

II-BOB. NOMANFIY BUTUN SONLAR

2.1. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot. Nomanfiy butun sonlar to'plamini tuzishdagi yondoshishlar.

II.1.1. Nomanfiy butun sonlar to'plamini to'plamlar nazariyasi asosida qurish. Nomanfiy butun sonlarni qo'shish va ayirish

Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga kelgan. Turli-tuman chekli to'plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zaruriyati natural sonlarning vujudga kelishiga sabab bo'lgan.

O'zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichni o'tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to'plamlarni taqqoslash uchun berilgan to'plamlar orasida yoki to'plamlardan biri bilan ikkinchi to'plamning qism to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishgan, ya'ni bu bosqichda kishilar buyumlar to'plamining sanog'ini ularni sanamasdan idrok qilganlar.

Vaqt o'tishi bilan odamlar faqat sonlarni atashni emas, balki ularni belgilashni, shuningdek, ular ustida amallar bajarishni o'rganib oldilar. Qadimgi Hindistonda sonlarni yozishning o'nli sistemasi va nol tushunchasi yaratildi. Astasekin natural sonlarning cheksizligi haqidagi tasavvurlar hosil bo'la boshladi.

Natural son tushunchasi shakllangandan so'ng sonlar mustaqil ob'yektlar bo'lib qoldi va ularni matematik ob'yektlar sifatida o'rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustidagi amallarni o'rgana boshlagan fan «Arifmetika» nomini oldi.

Arifmetika sonlar va sonlar ustidagi amallar haqidagi fandir.

Arifmetika qadimgi Sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to'plangan matematik bilimlar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga asr o'rtalarida Hind, Arab dunyosi mamlakatlari va O'rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa, yevropalik olimlar katta hissa qo'shdilar.

«Natural son» terminini birinchi bo'lib rimlik olim A.A. Boesiy qo'lladi.

Natural butun sonlar to'plamini tuzishda ikki xil yondashuv bor:

- 1) to'plamlar nazariyasi asosida;
- 2) aksiomatik metod asosida;

Nomanfiy butun sonlar to'plamini to'plamlar nazariyasi asosida qurishni qaraymiz:

XIX asrda G. Kantor tomonidan to'plamlar nazariyasi yaratilgandan so'ng, bu nazariya asosida natural sonlar nazariyasi yaratildi. Bu nazariya asosida chekli to'plam va o'zaro bir qiymatli moslik tushunchalari yotadi.

1-ta'rif: Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, bu to'plamlar teng sonli deyiladi.

«Teng sonlilik» munosabati ekvivalentlik munosabati bo'lib, barcha chekli to'plamlarni ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Har bir sinfda turli elementli to'plamlar yig'ilgan bo'lib, ularning umumiy xossasi teng sonli ekanligidir.

2-ta'rif: Natural son deb, bo'sh bo'lmagan chekli bir-biriga ekvivalent to'plamlar sinfining umumiy xossasiga aytiladi.

Har bir ekvivalentlik sinfining umumiy xossasini uning biror bir to'plami to'la ifodalaydi. Har bir sinf xossasini ifodalovchi natural son alohida belgi bilan belgilanadi. Masalan: $a = n(A)$; $b = n(B)$

3-ta'rif. Bo'sh to'plamlar sinfining umumiy xossasini 0 soni ifodalaydi, $0 = n(\emptyset)$.

4-ta'rif. 0 soni va barcha natural sonlar birgalikda nomanfiy butun sonlar to'plamini tashkil qiladi. Bu to'plam Z_0 ko'rinishida belgilanadi. $Z_0 \equiv \{0\} \cup N$. N - barcha natural sonlar to'plami.

Sonlarni taqqoslash qanday nazariya asosida yuz berishini aniqlaymiz. Ikkita nomanfiy butun a va b son berilgan bo'lsin. Ular chekli A va B to'plamlar elementlari sonini ifodalaydi.

5-ta'rif: Agar a va b sonlar teng sonli to'plamlar bilan aniqlansa, u holda ular teng bo'ladi.

$$a = b \Leftrightarrow A \sim B \text{ bu yerda } n(A) = a; n(B) = b$$

Agar A va B to'plamlar teng sonli bo'lmasa, u holda ular bilan aniqlanadigan sonlar turlicha bo'ladi. Agar A to'plam B to'plamning o'z qism to'plamiga teng sonli va $n(A) = a$; $n(B) = b$ bo'lsa, a son b sonidan kichik deyiladi va $a < b$ kabi yoziladi. Xuddi shu vaziyatda $a > b$ kabi yoziladi.

$$a < b \Leftrightarrow A \sim B_1, \text{ bu yerda } B_1 \subset B \text{ va } B_1 \neq B; B_1 \neq \emptyset.$$

6-tarif. Butun nomanfiy a va b sonlarning yig'indisi deb $n(A) = a$; $n(B) = b$, bo'lib, kesishmaydigan A va B to'plamlar birlashmasidagi elementlar soniga aytiladi.

$$a + b = n(A \cup B), \text{ bu yerda } n(A) = a; n(B) = b \text{ va } A \cap B = \emptyset$$

Berilgan ta'rifdan foydalanib, $5 + 2 = 7$ bo'lishini tushuntiramiz.

5—bu biror A to'plamning elementlari soni, 2—biror B to'plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lishi kerak.

Masalan $A = \{x, y, z, t, p\}$, $B = \{a, b\}$ to'plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz. $A \cup B = \{x, y, z, t, p, a, b\}$ sanash yo'li bilan $n(A \cup B) = 7$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, $5 + 2 = 7$.

Umuman, $a + b$ yig'indi $n(A) = a$; $n(B) = b$ shartni qanoatlantiruvchi kesishmaydigan A va B to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas. Bu umumiy da'voni biz isbotsiz qabul qilamiz.

Bundan tashqari butun nomanfiy sonlar yig'indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita nomanfiy a va b sonlar olmaylik, ularning yig'indisi bo'lgan butun nomanfiy c sonni har doim topish mumkin. U berilgan a va b sonlari uchun yagona bo'ladi.

Yig'indining mavjudligi va yagonaligi ikki to'plam birlashmasining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yig'indi ta'rifidan foydalanib "kichik" munosabatiga boshqacha ta'rif berish mumkin.

7-Ta'rif: $\forall a, b \in N$ uchun $a = b + c$, bo'ladigan c son topilsa, $b < a$ (yoki $a > b$) bo'ladi.

$$(\forall a, b \in N)(\exists c \in N)(b < a \Leftrightarrow a = b + c)$$

Qo'shish amalining xossalari:

1^o. Qo'shish kommutativdir:

$$(\forall a, b \in Z_0)(a + b = b + a)$$

ya'ni ixtiyoriy nomanfiy butun a va b sonlar uchun $a + b = b + a$ tenglik o'rinlidir.

Isbot: $a = n(A)$, $b = n(B)$ va $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin,

$$a + b = n(A \cup B) = n(B \cup A) = b + a$$

(to'plamlar birlashmasining kommutativligiga asosan).

2^o. Qo'shish amali assotsiativdir:

$$(\forall a, b, c \in Z_0) (a + (b + c)) = ((a + b) + c)$$

Isboti: $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$ va $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ bo'lsin. $a + (b + c) = n(A \cup (B \cup C))$; $(a + b) + c = n((A \cup B) \cup C)$ to'plamlar birlashmasining assotsiativligiga ko'ra

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Demak, $a + (b + c) = (a + b) + c$

3^o. O ni yutish xossasi:

$$(\forall a \in Z_0) \quad a + 0 = a$$

Isboti: $a = n(A)$, $0 = n(\emptyset)$ $a + 0 = n(A \cup \emptyset) = n(A) = a$. ($A \cup \emptyset = A$ va $A \cap \emptyset = \emptyset$ bo'lgani uchun)

4^o. $(\forall a, b, c \in Z_0) \quad a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$

Isboti: $a = n(A)$, $b = n(B)$, $c = n(C)$, $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$
 $a = b \Rightarrow n(A) = n(B)$, $n(A + C) = n(a + c)$, $n(B + C) = n(b + c)$, bundan
 $a + c = b + c$

5^o. Qo'shish monotonligi

$$(\forall a, c, b \in Z_0) \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

Isboti: $a = n(A)$, $b = n(B)$, bo'lsin. $a < b \Rightarrow A \sim B_1 \subset B$ bu yerda $B_1 \neq B$, $B_1 = \emptyset$ u holda $A \cup C \sim B_1 \cup C \subset B \cup C \Rightarrow a + c < b + c$.

Endi ayirmaning ta'rifi va uning mavjudligi va yagonaligini ko'rib o'tamiz.

8-Ta'rif: Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb $n(A) = a$, $n(B) = b$ va $B \subset A$ shartlar bajarilganda, B to'plamni A to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam elementlari soniga aytiladi.

$a - b = n(B_A)$ bu yerda $a = n(A)$, $b = n(B)$, $B \subset A$, $B_A - B$ ni A ga to'ldiruvchi to'plam.

Misol. Berilgan ta'rifdan foydalanib, $7 - 4 = 3$ bo'lishini tushuntiramiz. 7 biror A to'plamning elementlari soni, 4 A to'plamning qism to'plami bo'lgan B to'plamning elementlari soni.

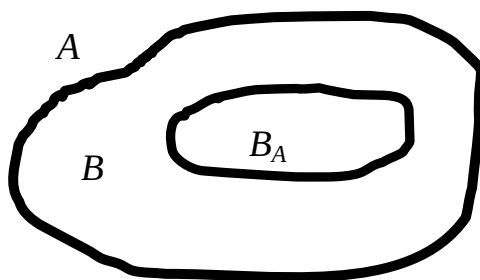
Masalan: $A = \{x, y, z, t, p, r, s\}$, $B = \{x, y, z, t\}$ to'plamlarni olaylik. B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisini topamiz:

$$A \setminus B = \{p, r, s\}, \quad n(A \setminus B) = 3$$

Demak, $7 - 4 = 3$.

$a - b$ ayirma $n(A) = a$, $n(B) = b$ va $B \subset A$ shartlarini qanoatlantiruvchi A va B to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas.

$a = n(A)$, $b = n(B)$, va $B \subset A$ bo'ladigan butun nomanfiy a va b sonlar berilgan bo'lsin va bu sonlarning ayirmasi B to'plamni A to'plamgacha to'ldiruvchisidagi elementlar soni bo'lsin, ya'ni $a - b = n(B_A)$.



26-chizma

Eyler doiralarida A , B , $A \setminus B$ to'plamlar 26-chizmada ko'rsatilganidek tasvirlanadi. $A = B \cup B_A$ ekani ma'lum, bundan $n(A) = n$; $(B \cup B_A) = A$; $B \cap B_A = \emptyset$ bo'lgani uchun biz

$$a = n(A) = n(B \cup B_A) = n(B) + n(B_A) = b + (a - b)$$

ga ega bo'lamiz.

Bu esa ayirmaga boshqacha ta'rif berish imkonini beradi.

9-ta'rif: Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb, shunday butun nomanfiy c songa aytiladiki, uning b son bilan yig'indisi a songa teng bo'ladi. $a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$.

Shunday qilib, $a - b = c$ yozuvda a -kamayuvchi, b -ayriluvchi, c -ayirma deb ataladi.

Ayirish amali qo'shishga teskari amaldir. Ayirmaning ikkinchi ta'rifidan kelib chiqib, quyidagi teoremlarni isbotlaymiz:

1-teorema: Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi faqat $b \leq a$ bo'lgandagina mavjud bo'ladi.

Isboti. Agar $a = b$ bo'lsa, u holda $a - b = 0$ bo'ladi, demak, $a - b$ ayirma mavjud bo'ladi.

Agar $b < a$ bo'lsa, u holda «kichik» munosabati ta'rifiga ko'ra shunday natural son mavjud bo'ladiki, bunda $a = b + c$ bo'ladi. U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra $c = a - b$, ya'ni $a - b$ ayirma mavjud bo'ladi. Agar $a - b$ ayirma mavjud bo'lsa, u holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra shunday butun nomanfiy c son topiladiki, $a = b + c$, bo'ladi. Agar $c = 0$ bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi; agar $c > 0$ bo'lsa, u holda «kichik» munosabatining ta'rifiga ko'ra $b < a$ bo'ladi. Demak, $b \leq a$.

2-teorema. Agar butun nomanfiy a va b sonlarining ayirmasi mavjud bo'lsa, u holda u yagonadir.

Isboti $a - b$ ayirmaning ikkita qiymati mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik: $a - b = c_1$ va $a - b = c_2$.

U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra $a=b+c_1$ va $a=b+c_2$ ga ega bo'lamiz. Bundan $b+c_1=b+c_2$; demak, $c_1=c_2$ ekani kelib chiqadi. Demak, ayirma yagona ekan.

Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarini to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosini qaraymiz.

Yig'indidan sonni ayirish uchun yig'indidagi qo'shiluvchilardan biridan shu sonni ayirish va hosil bo'lgan natijaga ikkinchi qo'shiluvchini qo'shish yetarli.

Bu qoidani simvollardan foydalanib yozamiz:

Agar, a, b, c - butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda:

a) $a \geq c$ bo'lganda $(a+b)-c=(a-c)+b$ bo'ladi;

b) $b \geq c$ bo'lganda $(a+b)-c=a+(b-c)$ bo'ladi;

v) $a \geq c$ va $b \geq c$ bo'lganda yuqoridagi formulaning ixtiyoriy bittasidan foydalanish mumkin. Yig'indidan sonni ayirish qoidasining to'g'riligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $a \geq c$ bo'lsin, u holda $a-c$ ayirma mavjud bo'ladi. Uni r orqali belgilaymiz: $a-c=r$. Bundan $a=r+c$ chiqadi, $r+c$ yig'indini $(a+b)-c$ ifodadagi a ning o'rniga qo'yamiz va unda shakl almashtiramiz:

$$(a+b)-c=(r+c+b)-c=r+b+c-c=r+b.$$

Biroq r harfi orqali $a-c$ ayirma belgilangan edi, bundan isbotlanishi talab etilgan $(a+b)-c=(a-c)+b$ ifodaga ega bo'lamiz.

Endi sondan yig'indini ayirish qoidasini qaraymiz:

Sondan sonlar yig'indisini ayirish uchun bu sondan qo'shiluvchilarning birini, ketidan ikkinchisini ketma-ket ayirish yetarli, ya'ni agar a, c, b - butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda $a \geq b+c$ bo'lganda $a-(b+c)=(a-b)-c$ ga ega bo'lamiz.

Bu qoidaning asoslanishi ham yig'indidan sonni ayirish qoidasi uchun bajarilgani kabi bajariladi.

Keltirilgan qoidalar boshlang'ich maktabda konkret misollarda qaraladi, asoslash uchun ko'rgazmali tasvirlar namoyish etiladi.

Bu qoidalar hisoblashlarni ixcham bajarish imkonini beradi.

Masalan, sondan yig'indini ayirish qoidasi sonni bo'laklab ayirish usuliga asos bo'ladi:

$$5-2=5-(1+1)=(5-1)-1=4-1=3.$$

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Natural son va nolning ta'rifini ayting.
2. Qaysi holda a soni b sonidan katta deyiladi va aksincha?
3. Nomanfiy butun sonlar yig'indisi ta'rifini ayting, uning mavjudligi va yagonaligini asoslang.
4. Qo'shishning qanday qonunlari bor?
5. Nomanfiy butun sonlar ayirmasi ta'rifi qanday? Ayirma qaysi holda mavjud bo'ladi?
6. Ayirmaga yig'indi orqali ta'rif bering.
7. Yig'indi va ayirma qoidalarini to'plamlar nazariyasi asosida tushuntiring.

II.1.2.NOMANFIY BUTUN SONLARNI KO'PAYTIRISH VA BO'LISH

1.Ko'paytmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi

$a=n(A)$ va $b=n(B)$ bo'lgan a va b nomanfiy butun sonlar berilgan bo'lsin.

1-Ta'rif: a va b nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi deb, $A \times B$ dekart ko'paytma elementlari sonini ifodalovchi c nomanfiy butun songa aytiladi.

Bu yerda $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ ekanini eslatib o'tamiz.

Demak, ta'rifga ko'ra: $a \cdot b = n(A \times B) = c$ bu yerda $a, b, c \in Z_0$. $a \cdot b = c$ yozuvda a -1-ko'paytuvchi b -2-ko'paytuvchi c -ko'paytma deyiladi, $c \in Z_0$ sonni topish amali esa ko'paytirish deyiladi.

Masalan; ta'rifga ko'ra $5 \cdot 2$ ko'paytmani topaylik. Buning uchun $n(A)=5$ va $n(B)=2$ bo'lgan $A=\{a, b, c, d, e\}$, $B=\{1, 2\}$ to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzamiz:

$$A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2), (d, 1), (d, 2), (e, 1), (e, 2)\}.$$

Dekart ko'paytma elementlari soni 10 bo'lgani uchun $5 \cdot 2 = 10$.

1-Teorema: Ikki nomanfiy butun son ko'paytmasi mavjud va yagonadir.

Ko'paytmaning mavjudligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzish har doim mumkinligi va dekart ko'paytma elementlari soni to'plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog'liq emasligi bilan isbotlanadi.

Ikkita nomanfiy butun son ko'paytmasining yagonaligini isbotlash talabalarga topshiriladi.

2. Ko'paytirish amalining xossalari

1°. Ko'paytirish kommutativdir:

$$(\forall a, b \in Z_0) ab = ba$$

Isbot. $a=n(A)$ va $b=n(B)$, $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin. Dekart ko'paytma ta'rifiga ko'ra $A \times B \neq B \times A$ shunga qaramay, $A \times B = B \times A$ deb olamiz (bunda istalgan $(a, b) \in A \times B$ juftlikka $(b, a) \in B \times A$ juftlik mos keltirildi) $A \times B = B \times A \Rightarrow n(A \times B) = n(B \times A)$, $ab = n(A \times B) = n(B \times A) = ba \Rightarrow ab = ba$

2° Ko'paytirish assotsiativdir.

$$(\forall a, b, c \in Z_0) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Isbot: $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ va A, B, C lar jufti-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin, yani $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$.

$$(ab)c = n((A \times B) \times C) \text{ va } a(bc) = n(A \times (B \times C)).$$

Yuqoridagi dekart ko'paytmalar doirasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yo'li bilan $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ ekanini ko'rsatish mumkin (kombinatorika bo'limidagi ko'paytma qoidasini eslang).

Demak $(ab)c = n((A \times B) \times C) = n(A \times (B \times C)) = a(bc)$.

3° Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi

$$(\forall a, b, c \in Z_0) (a+b) \cdot c = ac + bc$$

Isboti: $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ va A, B, C lar jufti-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin. To'plamlar nazariyasidan ma'lumki

$(A \times B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ va $A \cap B = \emptyset \Rightarrow (A \times C) \cap (B \times C) = \emptyset$ chunki $A \times C$ va $B \times C$ dekart ko'paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$$(a+b) \cdot c = n((A \times B) \times C) = n((A \times C) \cup (B \times C)) = n(A \times C) + n(B \times C) = ac + bc$$

Demak, $(a+b)c = ac + bc$

4^o Yutuvchi elementning mavjudligi: $(\forall a \in Z_0) a \cdot 0 = 0$

Isboti: $a = n(A)$ $0 = n(\emptyset)$ bo'lsin. $A \times \emptyset = \emptyset$ ekanligidan $a \cdot 0 = n(A \times \emptyset) = n(\emptyset) = 0$

5^o Ko'paytirishning monotonligi.

$$(\forall a, b, c \in Z_0, c \neq 0) \quad a > b \Rightarrow ac > bc$$

$$(\forall a, b, c \in Z_0) \quad a \geq b \Rightarrow ac \geq bc$$

$$(\forall a, b, c \in Z_0, c \neq 0) \quad a < b \Rightarrow ac < bc$$

Isboti: 1-sini isbotlab ko'rsatamiz.

$a > b \Rightarrow B \setminus A_1 \subset A$ bu yerda $n(A) = a$, $n(B) = b$ $A_1 \neq \emptyset$ $A_1 \neq A$

U holda $B \times C \setminus (A_1 \times C) \subset (A \times C)$

Demak, $n(B \times C) = n(A_1 \times C) < n(A \times C) \Rightarrow bc < ac$

6^o Ko'paytmaning qisqaruvchanligi

$$(\forall a, b, c \in Z_0, c \neq 0) \quad ac = bc \Rightarrow a = b$$

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik: $a \neq b$ bo'lsin. U holda yoki $a < b$, yoki $a > b$ bo'lishi kerak. $a < b$ bo'lsa, $ac < bc$ bo'lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, $a = b$ ekan.

3. Ko'paytmaning yig'indi orqali ta'rifi

2-Ta'rif: $a, b \in Z_0$ bo'lsin. a sonning b soniga ko'paytmasi deb, har biri a ga teng bo'lgan b ta qo'shiluvchining yig'indisiga aytiladi.

$$ab = \underbrace{a + a + \dots + a}_b \text{ marta}$$

Bundan $a \cdot 1 = a$ va $a \cdot 0 = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta'rif $a = n(A)$, $b = n(B)$, $A \cap B = \emptyset$ bo'lgan $A \times B$ dekart ko'paytma elementlarini sanash ma'lum bir qonuniyatga asoslanishiga bog'liq.

Misol. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z, t\}$

$A \times B$ dekart ko'paytmani quyidagi jadval ko'rinishida yozamiz:

Dekart ko'paytma elementlarini ustunlar bo'yicha sanasak, $3 \times 4 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$ ga ega bo'lamiz.

(a, x)	(a, y)	(a, z)	(a, t)
(b, x)	(b, y)	(b, z)	(b, t)
(c, x)	(c, y)	(c, z)	(c, t)

4. Bo'lishning ta'rifi

Nomanfiy butun sonlar to'plamida bo'lish amalini ta'riflash uchun to'plamni sinflarga ajratish tushunchasidan foydalanamiz. $a = n(A)$ A to'plamni juft-jufti bilan

kesishmaydigan teng quvvatli sinflarga ajratish mumkin bo'lsin. Butun nomanfiy a sonning natural b songa bo'linmasi quyidagicha ta'riflanadi:

4-ta'rif: Agar b son A to'plamni bo'lishdagi har bir qism to'plam elementlari soni bo'lsa, u holda a va b sonlarning bo'linmasi deb bu bo'linmadagi qism to'plamlar soniga aytiladi. Nomanfiy butun a va b sonlar bo'linmasini topish amali bo'lish, a – bo'linuvchi, b – bo'luvchi, $a:b$ - bo'linma deyiladi. Yuqoridagi ta'riflarni misollar yordamida tushuntiramiz.

Misol: 12 ta gilosi har biriga 3 tadan nechta bolaga tarqatishdi. Masala savoliga javob bo'lish orqali topiladi $12:3=4$ Masalani tahlil qilaylik: 12 ta elementga ega to'plam 3 ta elementga ega bo'lgan teng quvvatli qism to'plamlarga ajratilgan. Shuning bilan ular juft-jufti bilan kesishmaydi. Masalada nechta shunday qism to'plam borligi so'ralayapti. Javobdagi 4 soni 12 elementli to'plamning 3 elementli qism to'plamlar sonini bildiradi. Boshqacharoq masalani qaraylik. 12 ta gilosi 4 ta bolaga baravaridan tarqatishdi. Har bir bolaga nechtadan gilosi tarqatishdi. Bu masala ham bo'lish bilan echiladi: $12:4=3$ (gilos). Bu yerda 3 soni boshqa ma'noda – 12 elementdan iborat to'plam berilgan teng quvvatli kesishmaydigan har bir to'rtta qism to'plamdagi elementlar sonini bildiradi. Bo'lish amalining to'g'ri bajarilganini tekshirish uchun ko'paytirish amaliga murojaat qilinadi, chunki bo'lish va ko'paytirish amallari o'zaro bog'liq. Bu bog'lanishni qaraylik. $a=n(A)$ son va A to'plam b ta juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli $A_1, A_2, \dots, A_b$ qism to'plamlarga ajratilgan bo'lsin. U holda $c=a:b$ har bir shunday qism to'plamdagi elementlar soni bo'ladi, ya'ni $c=a:b=n(A_1)=n(A_2)=\dots=n(A_b)$. Shartga ko'ra $A=A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b$, bo'lgani uchun $n(A)=n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b)$ bo'ladi. Ammo $A_1, A_2, \dots, A_b$ qism to'plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi. yig'indi ta'rifiga ko'ra

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b) = n(A_1) + n(A_2) + \dots + n(A_b) = \underbrace{c + c + \dots + c}_{b \text{ marta}} = b \cdot c;$$

Ko'paytma ta'rifiga ko'ra $c \cdot b$ ga teng. Shunday qilib $a=c \cdot b$ ekan. Bundan esa a va b sonlarning bo'linmasi shunday c sonki, u bilan b sonining ko'paytmasi a ga teng bo'ladi. Bundan foydalanib bo'linmaga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

5-ta'rif: Butun nomanfiy a soni bilan b natural sonning bo'linmasi deb, shunday butun nomanfiy $c=a:b$ songa aytiladiki, uning b soni bilan ko'paytmasi a ga teng bo'ladi. Bu ta'rifdan $a:b=c \Leftrightarrow a=c \cdot b$ ekanligi ko'rinadi.

5. Bo'lishning bajarilishi va bir qiymatliligi

Bo'linma har doim ham mavjud bo'laveradimi degan savol tug'iladi?

2-Teorema. Ikkita a va b natural sonning bo'linmasi mavjud bo'lishi uchun $b \leq a$ bo'lishi zarur.

Isboti. a va b natural sonlarning bo'linmasi mavjud bo'lsin, ya'ni $a=c \cdot b$ bajariladigan c natural son mavjud bo'lsin. Ixtiyoriy natural son uchun $1 \leq c$ ekanligi o'z-o'zidan ravshan. Bu tengsizlikning ikkala qismini b natural songa ko'paytirib $b \leq c \cdot b$ ga ega bo'lamiz, $c \cdot b = a$ bo'lgani uchun $b \leq a$ bo'ladi. Teorema isbotlandi. $a=0$ va b natural sonning bo'linmasi nimaga teng? Ta'rifga ko'ra, bu

$c \cdot b = 0$ shartni qanoatlantiruvchi a sonidir. $b \neq 0$ bo'lgani uchun $c \cdot b = 0$ tenglik $c = 0$ bo'lganda bajariladi. Demak, $b \in N$ da $0 : b = 0$ bo'ladi.

3-Teorema. Agar a va b natural sonlarning bo'linmasi mavjud bo'lsa, u yagonadir. Buning isboti ayirmaning yagonaligi haqidagi teorema isbotiga o'xshash qilinadi. Butun nomanfiy sonni nolga bo'lish mumkin emasligini qaraymiz. $a \neq 0$ va $b = 0$ sonlar berilgan bo'lsin. a va b sonlarning bo'linmasi mavjud deb faraz qilaylik. U holda bo'linmaning ta'rifiga ko'ra $a = c \cdot 0$ tenglik bajariladigan butun nomanfiy c soni mavjud bo'ladi, bundan $a = 0$, farazimiz noto'g'ri, demak, $a \neq 0$ va $b = 0$ sonlarining bo'linmasi mavjud emas. Agar $a = 0$ va $b = 0$ bo'lsa, $0 = c \cdot 0$ tenglik kelib chiqadi, undan esa a va b sonlarning bo'linmasi har qanday son bo'lishi mumkin degan xulosa chiqadi. Shuning uchun matematikada nolni nolga bo'lish ham mumkin emas deb hisoblanadi. Nomanfiy butun sonlarni bo'lish ta'rifidan «... marta katta» va «-... marta kichik» munosabatlari aniqlanadi. Agar $a = n(A)$, $b = n(B)$, $a > b$ bo'ladigan a va b sonlar berilgan va bunda A to'plamni B to'plamga teng quvvatli c ta qism to'plamga ajratish mumkin bo'lsa a soni b sonidan c marta katta, b soni esa a sonidan c marta kichik deyiladi. c sonini o'zi bo'linmani ifodalaydi. Shularni hisobga olib quyidagi qoidani hosil qilamiz. Bir son ikkinchi sondan necha marta katta yoki kichik ekanini bilish uchun katta sonni kichik songa bo'lish zarur.

6. Yig'indini songa va sonni ko'paytmaga bo'lish qoidalari.

a) yig'indini songa bo'lish qoidasi:

4-teorema. Agar a va b sonlar c songa bo'linsa, u holda ularning $a+b$ yig'indisi ham c ga bo'linadi: $a+b$ yig'indini c ga bo'lganda hosil bo'ladigan bo'linma a ni c ga va b ni c ga bo'lganda hosil bo'ladigan bo'linmalar yig'indisiga teng, ya'ni $(a+b):c = a:c + b:c$

Isboti: a soni c ga bo'lingani uchun $a = c \cdot m$ bo'ladigan $m = a:c$ natural son mavjud. Shunga o'xshash $b = c \cdot n$ bo'ladigan $n = b:c$ natural son mavjud. U holda $a+b = c \cdot m + c \cdot n = c(m+n)$. Bundan esa $a+b$ yig'indining c ga bo'linishi va $a+b$ ni c ga bo'lganda hosil bo'ladigan bo'linma $m+n$ ga teng bo'lishi, ya'ni $a:c + b:c$ ekani kelib chiqadi. Bu qoidani to'plamlar nuqtaiy nazaridan tahlil qilsak tubandagicha:

$$a = n(A), b = n(B) \text{ va bunda } A \cap B = \emptyset \text{ bo'lsin.}$$

Agar A va B to'plamlarning har birini c ga teng quvvatli qism to'plamlarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda bu to'plamlar birlashmalarini ham shunday ajratish mumkin. Bunda, agar A to'plamni ajratishdagi har bir qism to'plam $a:c$ elementga, B to'plamning har bir qism to'plami $b:c$ elementga ega bo'lsa, u holda $A \cup B$ to'plamning har bir qism to'plamida $a:c + b:c$ element bo'ladi.

b) Sonni ko'paytmaga bo'lish va sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish qoidalari:

5-teorema. Agar a natural son b va c natural sonlarga bo'linsa, u holda a sonni b va c sonlar ko'paytmaga bo'lish uchun a sonni $b(c)$ ga bo'lish va hosil bo'lgan bo'linmani $c(b)$ ga bo'lish yetarli:

$$a:(b \cdot c) = (a:b):c = (a:c):b$$

Isboti: $(a:b):c=x$ deb faraz qilamiz, u holda bo'linmaning ta'rifiga ko'ra $a:b=c \cdot x$ bo'ladi, bundan shunga o'xshash $a=b \cdot (c \cdot x)$ bo'ladi. Ko'paytirishning gruppallash qonuniga asosan $a=(b \cdot c) \cdot x$ hosil bo'lgan tenglik $a:(b \cdot c)=x$ ekanini bildiradi.

6-teorema. Sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish uchun bu sonni bo'linuvchiga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmani bo'luvchiga bo'lish yetarli, ya'ni

$$a \cdot (b:c) = (a \cdot b):c$$

Isbot. Bu tenglikni ham sonni ko'paytmaga bo'lish qoidasiga o'xshash isbotlash mumkin.

Misollar:

- 1) $(220+140):10=220:10+140:10=22+14=36;$
- 2) $240:(10 \cdot 2)=(240:10):2=24:2=12;$
- 3) $12 \cdot (30:15)=(12 \cdot 30):15=360:15=24$

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar.

1. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi ta'rifini ayting. Ko'paytmaning mavjudlik va yagonalik shartlari qanday?
2. Ko'paytmaning qanday qoidalari bor? Ularni to'plamlar nazariyasiga ko'ra asoslang.
3. Ko'paytmaga yig'indi orqali ta'rif bering.
4. Nomanfiy butun sonlar bo'linmasini ta'riflang.
5. Bo'linmaga ko'paytma orqali ta'rif bering.
6. Bo'linmaning mavjudlik va yagonalik shartlarini ayting.
7. Yig'indi va ko'paytmani songa bo'lish qoidalarini aytib, isbotlab bering.

II.1.3.NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMINI AKSIOMATIK ASOSDA QURISH. QO'SHISH AKSIOMALARI. MATEMATIK INDUKSIYA PRINSPI.

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish.

Natural sonlar to'plamini aksiomatik metod asosida qurish uchun dastlab aksiomalar sistemalari va ularning xossalari ko'rib chiqishimiz kerak.

1.Aksiomalar sistemasi va ularning xossalari.

Matematik tushunchalar dastlab kishilik jamiyatining rivojlanishi bilan yuzaga kelgan. Bu tushunchalar aniq ta'riflarga ega bo'lmagan. Masalan, sharni ko'z oldiga keltirishda uni to'pga o'xshatganlar. Tushunchalarni aniqlashga muhtojlik tug'ilgan, ya'ni tushunchalar orasidagi bog'lanishlarni aniqlashga zaruriyat yuzaga kelgan. Masalan; aylana diametri tushunchasi dastlab aylanani teng ikkiga bo'luvchi vatar deb tushunilgan. Keyinchalik bu tushunchani eramizdan oldingi VI asrda yashagan qadimgi Gretsiyaning Milet shahrida yashagan Fales aylana diametri deganda albatta markaz orqali o'tuvchi vatarni tushunish kerakligini aytgan va isbotlab bergan. Shundan keyin esa aylana

diametri deganda uning markazi orqali o'tib ikkita nuqtasini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq kesmasi tushunilgan.

Bu ta'rifni yanada aniqroq qilish uchun «aylana», «aylana markazi», «to'g'ri chiziq kesmasi» so'zlarining ma'nolarini bilmoq kerak. Bu so'zlarga ta'rif berilsa, yangi ta'rif ichidagi ayrim so'zlarga yana ta'rif berish kerak bo'ladi. Shuning uchun matematik nazariyani yaratishda ayrim tushunchalarni ta'riflanmaydigan asosiy tushunchalar deb qabul qilib, barcha nazariyani shularga asosan qurmoq kerak.

Maktab planimetriya kursida «nuqta», «to'g'ri chiziq» va «masofa» tushunchalari, xuddi shuningdek matematikadagi «to'plam» va «son» tushunchalari shular jumlasiga kiradi. Biror nazariyani aksiomatik qurishda quyidagicha yondashiladi. Ba'zi bir ta'riflanmaydigan tushunchalar boshlang'ichlar sifatida olinib, bu tushunchalar bilan bog'liq ta'riflanmagan munosabatlar ko'rsatilib, keyinchalik bu munosabatlar va tushunchalarning xossalarini ifodalovchi bir qancha mulohazalar shakllantiriladi. Bu muloha-zalarga ifodalayotgan nazariyaning aksiomalari deyiladi.

Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalar kiritilgandan keyin nazariyaning rivojlanishi faqat mantiqiy fikrlash asosida boradi. Aksiomatik nazariyani qurishda tushuncha, munosabat va aksiomalar ixtiyoriy bo'lmasdan, ular ba'zibir haqiqiy ob'yektlar va ularning xossalarini yaqqol ko'rsatishi lozim. Masalan, ixtiyoriy uchta A, B va M nuqtalar uchun, M nuqtadan A va B nuqtalargacha masofalarning yig'indisi bu nuqtalar orasidagi masofadan kichik degan aksioma aytilsa, u holda haqiqatan hayotga aloqasi bo'lmagan nazariya yuzaga kelar edi., haqiqatda esa $|MA| + |MB| \geq |AB|$;

Shunday qilib, aksiomatik nazariya reallikning matematik modelini berishi kerak.

2. Aksioma sistemasini modellari

Agar munosabatlari bilan berilgan to'plamda aksiomalar sistemasini barcha aksiomalari bajarilsa, u holda munosabatlari bilan berilgan to'plam aksiomalar sistemasini modeli deyiladi. Biz tubandagi aksiomalar sistemasining modellarini qaraylik.

1-misol. Quyidagi uchta aksiomani qanoatlantiruvchi $a \sim b$ ekvivalentlik munosabati bilan berilgan aksiomalar sistemasini qaraymiz:

- 1) Barcha a lar uchun $a \sim a$ bajariladi;
- 2) Ixtiyoriy a va b lar uchun $a \sim b$ dan $b \sim a$ kelib chiqadi.
- 3) Ixtiyoriy a, b va c lar uchun $a \sim b$ va $b \sim c$ dan $a \sim c$ kelib chiqadi.

2-misol. $a < b$ birgina munosabat va quyidagi aksiomalar bilan aniqlanuvchi aksiomalar sistemasini qaraylik:

- 1) Ixtiyoriy a va b lar uchun $a < b$ dan $b < a$ yolg'onligi kelib chiqadi;
- 2) Ixtiyoriy a va b lar uchun $a < b$ va $b < c$ dan $a < c$ kelib chiqadi.

Bu aksioma qat'iy tartiblanganlik munosabatini ifodalaydi.

Bu sistema interpretatsiyasini quyidagicha ifodalash mumkin:

Kishilar to'plamida « a odam b odamdan baland», « a tana b tanadan og'irroq» va hokazo. Bu sistemaga quyidagi aksiomani qo'shamiz.

3) $a \neq b$ ekanligidan $a < b$ yoki $b < a$ kelib chiqadi. Endi biz qat'iy chiziqli tartib aksiomalar sistemasiga ega bo'ldik. Berilgan aksiomalar sistemasining ikkita modeli bir-biridan tashqi ko'rinishi bilan farq qilishi mumkin.

Misol: agar $a < b$, $b < c$ va $a < c$ hamda $1 < 2$, $2 < 3$ va $1 < 3$ desak, $X = \{a; b; c\}$ va $Y = \{1, 2, 3\}$ to'plamlar tartib aksiomalari sistemasi modelini ifodalaydi. Birinchi modelni 2-modelga aylantirish uchun a ni 1, b ni 2, c ni 3 deb olish yetarli. Ikkita model bir-biridan tashqi ko'rinishi bilan farq qilib, mazmuni bir xil bo'lsa, izomorf modellar deyiladi.

Aksiomalar sistemasi modeli real dunyo xossalarini aniqroq ifodalashi uchun ular mantiqan bir qancha talablarni bajarishi lozim.

1° Birinchi navbatda aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo'lishi kerak. Boshqacha aytganda berilgan aksiomalar sistemasida bir paytda chin va yolg'on tasdiq kelib chiqmasligi kerak.

Masalan, tubandagi ko'rinishdagi aksiomalar sistemasi bo'lishi mumkin emas.

- 1) Ixtiyoriy a element uchun, shunday b element mavjud, bunda $a \sim b$
- 2) Hech bir a element $a \sim a$ bajarilmaydi.
- 3) Agar $a \sim b$ bo'lsa, u holda $b \sim a$
- 4) Agar $a \sim b$ va $b \sim c$ bo'lsa, u holda $a \sim c$

Haqiqatan ham biror a elementni olaylik. 1) aksiomaga asosan shunday b element topiladiki, $a \sim b$. 3) aksiomaga asosan $b \sim a$. 4) aksiomaga asosan esa, ya'ni $a \sim b$ va $b \sim a$ dan $a \sim a$ kelib chiqadi. Bu esa 2) aksiomaga ziddir.

2° Ikkinchidan, aksiomalar sistemasi bir-biriga bog'liq bo'lmasligi, ya'ni bir aksioma aksiomalar sistemasining boshqa aksiomalardan kelib chiqmasligi kerak. Agar biz yuqoridagi sistemani 4) aksiomasini agar $a \sim b$ va $b \sim c$ bo'lsa, u holda $a \sim c$ deb olsak, u aksioma ortiqcha bo'ladi, chunki uni boshqa aksiomalardan keltirib chiqarish mumkin.

3° Uchinchidan, aksiomalar sistemasi qat'iy bo'lishi kerak.

3. Natural sonlar to'plami aksiomatikasi.

Natural sonlar aksiomatikasini qurish uchun dastlab natural sonlar tushunchasining kelib chiqishi va uning miqdoriy nazariyasini ko'rib o'tamiz.

1) Natural sonlar tushunchasining kelib chiqishi

Natural sonlar tushunchasi ham matematikaning boshqa tushunchalari kabi amaliy ehtiyojlardan kelib chiqqan. Qadim davrlarda chekli to'plamlar elementlarini solishtirishga zaruriyat tug'ilgan. Masalan, ov qurollari qabiladagi barcha ovchilarga yetadimi, tutilgan baliqlar qabilaning barcha a'zolariga yetadimi va hokazo. Bu solishtirishning oddiy usuli sanamasdan ikki to'plam elementlari orasida yoki bir to'plam bilan ikkinchi to'plam to'plam osti elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishdan iborat bo'lgan. Ammo bunday moslik o'rnatish bir-biridan uzoq bo'lgan to'plamlar (otarlar) o'rtasida mumkin bo'lmagan. Shuning uchun bunday hollarda vositachi (dallol) to'plamlardan foydalanilgan, ya'ni barmoqlar, toshlar, chig'anoqlar va boshqalar. Masalan, ikkita otardagi qo'ylar to'plamini solishtirish uchun birinchi otardagi qo'ylar to'plamiga teng chig'anoqlarni olib, ikkinchi otarga borib u yerdagi qo'ylar to'plami bilan solishtirganlar. Vositachi to'plamlardan faqat otardagi qo'ylar to'plamini solishtirishgina emas, barcha boshqa to'plamlarni solishtirishda ham

foydalanganlar. Shuning bilan birga vositachi to'plam nomlari boshqa to'plamlar sonlarini ifodalash uchun ham ishlatilgan. Masalan, «beshta o'rik» deyish o'rniga «qo'l o'rik», «o'nta olma» deyish o'rniga «ikkita qo'l olma», «yigirma qop bug'doy» deyish o'rniga «odam qop bug'doy» va h.k. Umuman, to'plam elementlari sonini vositachi to'plamlar yordamida ifodalaganlar. Keyinchalik sonlarni har safar bitta birlik qo'shib 1,2,3,... ko'rinishda qator qilib yozganlar. Shunday qilib natural sonlar qatori kelib chiqqan. «Natural sonlar» terminini birinchi bo'lib, rim olimi Boesiy (eramizdan oldingi 475-524 yillar) qo'llagan. Natural sonlar tushunchasini paydo bo'lishi matematikani rivojlanishida muhim burilish bo'lib, sonlarni nazariy jihatdan o'rganuvchi «arifmetika» fani yuzaga kelishga sababchi bo'ldi. Dastlab olimlar tomonidan katta sonlar o'rganila boshlandi. Buni qadimgi grek olimlari traktatlarida ko'rish mumkin.

2) Natural sonlar miqdoriy nazariyasi.

XIX asrda Georg Kantor tomonidan to'plamlar nazariyasiga asos solingandan keyin uning asosida natural sonlar nazariyasi qurildi. Nazariyani qurishga asos qilib chekli to'plamlar va o'zaro bir qiymatli moslik olingan. A va B to'plamlar elementlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ular teng sonli deyiladi. «A to'plam B to'plamga teng sonli» munosabati refleksiv, simmetrik va tranzitiv xossalarga ega. Bundan ko'rinadiki, teng sonlilik munosabati ekvivalentlik munosabati bo'lib, u butun chekli to'plamlar majmuasini ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Bitta sinfda turli xil to'plamlar bo'lishi mumkin, faqat ularning barchasi uchun teng sonlilik xossasi o'rinli, boshqacha aytganda bir xil sondagi elementlarga ega bo'ladi. Masalan, $\{a; b; c\}$ elementlarni saqlovchi sinfga, uchburchaklar sinfi, uchta tayoqcha va hokazo.

Ta'rif: Bir-biriga ekvivalent bo'sh bo'lmagan chekli to'plamlar umumiy xossasiga natural sonlar deyiladi. Yuqoridagi misolda 3 soni asosiy xossa hisoblanadi.

M to'plam bilan aniqlangan son $|M|$ yoki $n|M|$ bilan belgilanadi va M to'plamning quvvati deyiladi.

Ixtiyoriy to'plamga bitta element qo'shib u to'plamga ekvivalent bo'lmagan to'plamga ega bo'lamiz. Shunday jarayonni davom ettirsak, bir-biriga ekvivalent bo'lmagan to'plamlarning cheksiz ketma-ketligini hosil qilamiz va ularni 1,2,3, ... , n , ... ko'rinishda belgilaymiz. Chekli ikkita A va B to'plamlarni qaraylik. Ularga mos natural sonlarni a va b bilan belgilaymiz, bu to'plamlar ekvivalent bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Agar $A \sim B$ bo'lsa A va B to'plamlar bir sinfga tegishli bo'lib, ularga mos keluvchi sonlar teng bo'ladi, ya'ni $a=b$; Agar A va B lar turli sinflarga tegishli bo'lsalar, ularga mos keluvchi sonlar turlicha bo'ladi. Aytaylik A to'plam a elementga, B to'plam b elementga ega bo'lsin. Agar A to'plam B to'plamning to'plam ostisi B_1 ga teng sonli bo'lsa, u holda a soni b sonidan kichik deyiladi va $a < b$ kabi yoziladi.

$$(a < b) \Leftrightarrow (A \sim B_1; B_1 \subset B \text{ va } B_1 \neq B, B_1 \neq \emptyset)$$

$a < b$ munosabat asimmetrik va tranzitiv bo'lgani uchun bu munosabat tartib munosabati ekanini ko'rsatish mumkin. Shunday qilib N natural sonlar to'plami tartiblangan. Chekli to'plamlar ustidagi amallarga, shu to'plamlarga mos sonlar ustidagi amallar mos keladi.

Masalan: A va B to'plamlar kesishmasin yani $A \cap B = \emptyset$ hamda $a = n(A)$, $b = n(B)$ bo'lsin. U holda $C = A \cup B$ to'plamga c soni mos keladi va u $a+b$ bilan belgilanib a va b sonlarining yig'indisi deyiladi. A va B to'plamlar birlashmasi kommutativ va assotsiativ xossaga ega ekanligidan natural sonlar yig'indisi ham shu xossalarga ega ekanligi kelib chiqadi.

Sonlarning yig'indisi to'plamlar birlashmasiga bog'liq bo'lsa, sonlarning ayirmasi to'plamga to'ldiruvchi bilan bog'liq. Aytaylik, A chekli to'plam, B esa uning xususiy to'plam ostisi bo'lsin va $a = n(A)$, $b = n(B)$ bo'lsin. Sonlarning $a-b$ ayirmasi deb, B ni A ga to'ldiruvchi B_A – to'plam quvvatiga aytiladi.

$B_A^1 \cup B = A$ bo'lishidan $(a-b)+b \equiv a$ bo'ladi.

Natural sonlarni ko'paytirish amali ikki to'plam Dekart ko'paytmasi elementlarining sonini sanashga bog'liq. Aytaylik $a = n(A)$ va $b = n(B)$ bo'lsin. a va b natural sonlarning ko'paytmasi deb $A \times B$ to'plam ko'paytmasiga aytiladi, boshqacha aytganda A va B to'plamlar elementlaridan tuzilgan juftliklar soniga aytiladi. To'plamlar Dekart ko'paytmasi kommutativlik xossasiga ega bo'lmasada, ko'paytirishda $n(A \times B) = n(B \times A)$. Natural sonlarni ko'paytirish kommutativ va assotsiativ.

O'z-o'zini nazorat qilish savollari

1. Matematik tushunchalar deganda nimani tushunasiz:?
2. Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalarga misollar keltiring.
3. Nazariyani aksiomatik qurishda nimalar talab qilinadi?
4. Aksiomalar sistemasini modellariga misollar keltiring.
5. Aksiomalar sistemasini modellari qachon izomorf deyiladi?
6. Natural sonlar tushunchasining paydo bo'lishini tushuntiring.
7. Natural sonlarga ta'rif bering
8. Natural sonlar ustidagi amallarni to'plamlar nazariyasi asosida tushuntiring va xossalarni ayting.

4.Qo'shish aksiomalari

1). Natural sonlar to'plamini qo'shish aksiomalari asosida qurish.

N natural sonlar to'plami uchun aksiomalar sistemasini turli usullar bilan qurish mumkin. Asosiy tushunchalar uchun sonlar yig'indisi yoki tartib munosabati yoki bir son ketidan bevosita ikkinchi son kelish munosabati kabilarni olish yordamida tuzish mumkin. Har bir hol uchun asosiy tushunchalar xossalarni ifodalovchi aksiomalarni berish lozim. Biz asosiy tushuncha deb qo'shish amalini olib aksiomalar sistemasini beramiz. Agar bo'sh bo'lmagan N to'plamda quyidagi xossalarga ega qo'shish deb ataluvchi $(a;b) \Rightarrow a+b$ binar algebraik amal aniqlangan bo'lsa, N to'plamga natural sonlar to'plami deyiladi (bunda $a+b$ sonni a va b sonlarning yig'indisi deymiz).

- 1) qo'shish kommutativ, ya'ni $a \in \mathbb{N}$ va $b \in \mathbb{N}$ bo'lsa, u holda $a+b=b+a$;
- 2) qo'shish assotsiativ; ya'ni $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{N}$ bo'lsa, u holda $a+(b+c)=(a+b)+c$;
- 3) Ixtiyoriy ikki a va b natural sonlari uchun $a+b$ yig'indi a sonidan farqli $a+b \neq a$;

4) $\mathbb{N}$ to'plamning bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy A to'plam ostida shunday a soni mavjudki, a sonidan farqli barcha $x \in A$ sonini $x=a+b$ shaklida yozish mumkin, bunda $b \in \mathbb{N}$;

1) – 4) aksiomalar sistemasi, natural sonlar arifmetikasini qurish uchun yetarli.

Natural sonlar arifmetikasini bu aksiomalar asosida qurganda chekli to'plam xossaligidan foydalanishga ehtiyoj qolmaydi.

1), 4) aksiomalar sistemasidan 3) ni isbotlaymiz.

Bizga ma'lumki, A va B to'plam bo'sh bo'lmasa u holda B to'plam $A \cup B$ to'plamdan farq qiladi va $b \neq a+b$ munosabat bajariladi. 3) aksiomada berilishicha yig'indi birinchi qo'shiluvchidan farq qiladi. Shuning uchun $b \neq a+b$ munosabatda b ni birinchi qo'shiluvchi o'rniga qo'yish kerak. Buni esa 1) $a+b=b+a$ aksiomaga asosan amalga oshiramiz. $b \neq a+b$ da 1) ga asosan $b \neq a+b$ ga ega bo'lamiz. Odatda, ko'rgazmaliliksiz 1) – 4) aksiomalar vositasida bajarilgan isbotlar juda uzun bo'ladi, lekin ulardan kelib chiqadigan natijalarni nafaqat natural sonlar to'plami, balki 1) – 4) aksiomalar sistemasi ixtiyoriy modellariga qo'llash mumkin bo'ladi. Bizga yaxshi tanish bo'lgan aksiomalar sistemasi modellaridan biri bu oddiy ma'noda qo'shish amali berilgan $\{1;2;3;4; \dots\}$ to'plamdir. Bu model bilan birga boshqa modellar ham mavjud. Masalan: $\{-1;-2;-3;-4; \dots\}$ sonli to'plamda ham qo'shish amali oddiy ma'noda aniqlangan. Ba'zi bir qo'shish aksiomalar sistemasida qo'shish amali odatdagi qo'shish amalidan farq qiladi.

Masalan, agar oddiy qo'shish amali bilan berilgan $\{3;4;5; \dots\}$ sonli to'plamni qaraydigan bo'lsak, bu to'plamda 4) aksiomalar bajarilmaydi, ya'ni 4 va 5 sonlarini 3 sonlarining yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin bo'lmaydi. Agar qo'shishni $a*b=a+b-2$ ko'rinishida qabul qilinsa, bu to'plamda 1) – 4) aksiomalar bajariladi.

Masalan: $4=3*3=3+3-2$, $5=3*4=3+4-2$

Agar qo'shish amali o'rniga ko'paytirish amali qabul qilinsa, ushbu aksiomalar $\{2;2^2;2^3;2^4;\dots\}$ to'plamda ham bajariladi.

Yuqorida qaralgan to'plamlar turlicha va ularda qo'shish amali berilgan oddiy ma'nodagi qo'shish amalidan farq qilishiga qaramasdan 1) – 4) aksiomalarga asoslangan holda natural sonlarni qo'shishga oid bo'lgan barcha isbotlar har qanday aksiomalar sistemasi modellari uchun o'rinli bo'ladi.

1) - 4) aksiomalar sistemasi barcha modellari qat'iy izomorfligini isbotlash mumkin.

Bu aksiomalar sistemasi uchun ikkita interpretatsiyaning izomorfligini quyidagicha isbotlaymiz. Aksiomalar sistemasining birining interpretatsiyasi oddiy ma'nodagi qo'shish amali bilan berilgan $\{1;2;3;\dots\}$ to'plam bo'lsin, ikkinchi interpretatsiya oddiy ma'noda ko'paytirish amali bilan berilgan. Bu ikki

interpretatsiyaning izomorfligini ko'rsatish uchun har bir natural n soniga 2^n sonini mos qo'yish lozim bo'ladi. U holda $m+n$ soniga 2^{m+n} soni mos qo'yiladi. $2^{m+n} = 2^m 2^n$ ekanligidan $n \rightarrow 2^n$ mos qo'yuvchi akslantirish jarayonida qo'shish amali ko'paytirish amaliga o'tadi.

2). Natural sonlar to'plamida tartib munosabati va uning xossalari

N natural sonlar to'plamiga tartib munosabatini kiritamiz. Bunda biz 1), 4) aksiomalarga va elementlar yig'indisi tushunchalariga asoslanamiz.

« a natural son b natural sondan kichik» ta'rifini keltirib chiqarishda chekli to'plamlarga bog'liqlikdan foydalanamiz.

Bizga ma'lumki, chekli A to'plam bilan bo'sh bo'lmagan chekli B to'plam birlashmasi $C = A \cup B$ ($A \cap B = \emptyset$) A to'plamdagidan ko'p elementlarga ega bo'ladi. Bu esa quyidagi ta'rifga olib keladi:

Ta'rif. Agar a va b natural sonlari uchun shunday bir c natural soni mavjud bo'lib, $a+c=b$ munosabat o'rinli bo'lsa, a natural soni b natural sonidan kichik deyiladi va $a < b$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, $5 < 7$ bu holda shunday natural son 2 mavjudki, $2+5=7$ bo'ladi. $a < b$ munosabatdan foydalanib, 4) aksiomani quyidagicha ifodalash mumkin.

4¹) N natural sonlarning bo'sh bo'lmagan A to'plam ostida eng kichik son bor, ya'ni shunday sonni a desak, A to'plamdagi a dan farqli barcha x sonlari uchun $a < x$. Endi $<$ munosabatini N to'plamda qattiq tartib munosabati ekanini ko'rsatamiz, ya'ni bu munosabat tranzitiv va antisimmetrik. Aytaylik, $a < b$ va $b < c$ bo'lsin. Ta'rifga asosan shunday k va l sonlari topiladiki $b=a+k$, $c=b+l$ bo'ladi. U holda $c = (a+k)+l$

2) aksiomaga asosan $c=a+(k+l)$, $k+l$ natural son bo'lgani uchun tenglikdan $a < c$. Demak, $a < b$ va $b < c$ dan $a < c$ kelib chiqadi. Bu esa $<$ munosabati tranzitiv ekanligini ko'rsatadi.

$<$ munosabati asimmetrik ekanligi 4) aksiomadan ko'rinadi. Bu aksiomaga asosan natural sonlar to'plamining bo'sh bo'lmagan A to'plamida eng kamida bitta eng kichik element a bor. A da bu element bir qiymatli aniqlangan va bundan boshqa eng kichik element yo'q ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik a dan boshqa eng kichik b element bor bo'lsin, u holda $a < b$ va $b < a$ bajariladi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Shunday qilib $<$ munosabati N to'plamda qattiq tartib munosabati ekan. Bu tartibning chiziqli ekanini ko'rsatamiz, ya'ni ixtiyoriy ikkita turli xil a va b natural sonlar uchun $a < b$ va $b < a$ munosabatlardan biri bajariladi. Haqiqatan ham ikkita elementdan tashkil topgan $A = \{a; b\}$ to'plamni olaylik.

4¹) aksiomaga asosan bu to'plamda eng kichik element bo'lishi kerak. Agar bu element a bo'lsa, $a < b$, agar bu element b bo'lsa, $b < a$ munosabat o'rinli.

Endi natural sonlarni qo'shish monotonlik xossasiga ega ekanligini ko'rsatamiz.

Agar $a < b$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $c \in N$ uchun $a+c < b+c$ ga ega bo'lamiz

(tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil soni qo'shsak, tengsizlik belgisi o'zgarmaydi).

Aslida ta'rifga ko'ra $a < b$ deganda shunday bir k sonni mavjud bo'lib $b=a+k$ ekanini bildiradi. Lekin $b+c=(a+k)+c$. 1) va 2) aksiomalarga ko'ra $b+c = (a+k)+c = a+(k+c) = a+(c+k) = (a+c)+k$.

Demak $b+c=(a+c)+k$. Bu esa $a+c < b+c$ ekanini bildiradi.

Endi natural sonlarni qo'shish qisqaruvchanligini ko'rsatamiz, ya'ni $a+c=b+c$ bo'lsa, u holda $a=b$ ga teng. Aslida quyidagi uch hol bo'lishi mumkin: $a<b$, $b<a$, $a=b$; Ammo $a<b$ bo'lsa, u holda $a+c < b+c$ bo'ladi, biz esa $a+c=b+c$ deb oldik. Demak $a<b$ hol mumkin emas. Shu sababli $b<a$ hol ham mumkin emas, faqat $a=b$ bo'lgan hol qoladi.

3). Natural sonlar to'plamining cheklanmaganligi va diskretligi.

4¹) aksiomaga ko'ra N natural sonlar to'plamida eng kichik son mavjud. Bu son 1 bilan belgilanadi va birlik deb ataladi. N natural sonlar to'plamida eng kichik son bo'lgani uchun, ixtiyoriy $a \in N$, son uchun $a \neq 1$ va $1 < a$ bajariladi. Bu deganimiz $a=1+b$, bu yerda $b \in N$ natural sonlar to'plamida eng katta son mavjud emas, haqiqatan ham ixtiyoriy $a \in N$ uchun $a < a+1$, demak a N to'plam uchun eng katta son bo'la olmaydi. Shunga ko'ra N natural sonlar to'plami quyidan 1 soni bilan chegaralanib, yuqoridan esa chegaralanmagan deb aytiladi.

Barcha sonlar o'rtasida a sonidan keyin keluvchi eng kichik $a+1$ son bor. Haqiqatan ham a sonidan keyin b soni kelsin desak, u holda shunday c natural soni topiladiki $b=a+c$.

Ammo $1 \leq c$ bo'lganidan $a+1 \leq a+c$ ga ega bo'lamiz, bundan esa $a+1 \leq b$. Bu esa $a+1$ soni a sonidan keyin keluvchi eng kichik son ekanligini ko'rsatadi.

Bundan keyin a sonidan keyin keluvchi eng kichik songa, a sonidan bevosita keyin keluvchi son deyiladi. Shunday qilib, N natural sonlar to'plamidagi har bir elementdan bevosita keyin keluvchi element mavjud.

Bu xossa natural sonlar to'plamining diskretligi deyiladi. « b soni a sonidan bevosita keyin keladi» munosabatiga « a soni b sonidan bevosita oldin keladi» munosabati teskari hisoblanadi. Boshqacha aytganda, a soni b sonidan bevosita oldin keladi» munosabati faqat va faqat $b=a+1$ bo'lganda o'rinli. 1 sonidan oldin keluvchi son yo'q, chunki 1) va 3) aksiomalarga ko'ra $1=a+1$ bajarilmaydi. 1 dan boshqa barcha natural sonlar uchun uning oldidan keluvchi faqat bitta va bitta natural son mavjudligini ham ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham $b \neq 1$ bo'lsa, u holda $1 < b$ (1-eng kichik natural son), bundan esa shunday $a \in N$ natural soni mavjud bo'lib, $b=1+a=a+1$ ekani ko'rinadi. Demak, b natural soni a dan keyin kelar ekan, ya'ni b natural soni a dan bevosita keyin keladi. Endi b dan boshqa a dan bevosita keyin keluvchi natural son yo'qligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $c \neq a$, c b dan bevosita keyin keluvchi son bo'lsin. U holda $b=a+1$; $b=c+1$ bo'ladi, bundan $a+1=c+1$;

Qo'shishning qisqaruvchanlik xossasiga asosan $a=c$, bu esa farazimizga qarama-qarshi.

Demak, b son a sonidan bevosita keyin keluvchi yagona son ekan.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Natural sonlar to'plamiga ta'rif bering.
2. Qo'shish aksiomalarini izohlab aytib bering.
3. Qo'shish va ko'paytirish amali bilan berilgan aksiomalar sistemasining interpretatsiyasi izomorfligini ko'rsating.
4. a natural soni b natural sonidan qachon kichik deyiladi?
5. Kichik munosabati N to'plamda tartib munosabati bo'lishini izohlang.
6. Natural sonlar to'plamini chegaralanmaganligi va diskretligini tushuntiring?

II.1.4. Matematik induksiya prinsipi.

1). Matematik induksiya prinsipi mohiyati.

Matematik induksiya prinsipi – natural sonlar to‘plamining xossasi ekanligini ko‘rsatamiz. Agar N natural sonlar to‘plamining A to‘plam osti tarkibida 1 bilan har bir a soni uchun undan bevosita keyin keluvchi $a+1$ soni bo‘lsa, u holda A to‘plam N to‘plam bilan ustma-ust tushadi.

Bu degani 1 sonidan boshlab, unga bitta birlikni qo‘shish natijasida ixtiyoriy natural sonni hosil qilamiz. Matematik induksiya prinsipini isbotlashni teskarisidan boshlaymiz. Faraz qilaylik, yuqoridagi xossaga ega bo‘lgan to‘plam bilan ustma-ust tushuvchi A to‘plam mavjud (ya’ni $1 \in A$ va $a \in A$ tegishliligidan $a+1 \in A$). U holda uning to‘ldiruvchisi $A^1 = N \setminus A$ bo‘sh emas, ya’ni $A^1 \in \emptyset$.

4¹) aksiomaga asosan A^1 da eng kichik b soni bor. Bu son 1 dan farqli va $1 \in A$ bo‘lgani uchun, 1 soni A to‘plam to‘ldiruvchisiga tegishli emas. Demak b soni biror a sonidan bevosita keyin keladi, ya’ni $b = a + 1$. $a < b$ va $b \in A^1$ to‘plamdagi eng kichik son. Shuning uchun a son A^1 ga tegishli emas, ya’ni u A to‘plamdagi son. U holda $b = a + 1$ son ham A to‘plamga tegishli bo‘lishi lozim. Bundan ko‘rinayaptiki b soni bir vaqtda ham A , ham A^1 to‘plamga tegishli bo‘layapti. Buning esa bo‘lishi mumkin emas. Natijada hosil bo‘lgan qarama-qarshilik $A^1 = \emptyset$ ekanini va $A = N$ ekanligini ko‘rsatadi.

Matematik teoremlarni isbotlashda ko‘p hollarda matematik induksiya prinsipidan foydalaniladi.

Masalan,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1)$$

tenglikning barcha n natural sonlar uchun to‘g‘riligini isbotlang.

n ning o‘rniga $n=1$ dan boshlab qiymatlar qo‘yish bilan bu tenglikni n ning ma’lum bir qiymatigacha to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish mumkin, ya’ni

$$n = 1 \text{ bo'lsa } \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1, \text{ demak, } 1 = 1$$

$$n = 2 \text{ bo'lsa } \frac{2(2+1)(2 \cdot 2 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5, \text{ demak } 1^2 + 2^2 = 5$$

$$n = 3 \text{ bo'lsa } \frac{3(3+1)(2 \cdot 3 + 1)}{6} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} = 14, \text{ demak } 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

Ammo n ning katta qiymatlari uchun tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatish qiyin. Boshqacha aytganda barcha n natural sonlar uchun tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatishga qodir emasmiz. Shu sababli, tenglikni isbotlashda boshqacha muhokama yuritamiz. Dastlab tenglikni $n=1$ uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz, buni biz ko‘rsatdik. Keyinchalik bu tenglikni biror n qiymat uchun to‘g‘ri deb, undan bevosita keyin keluvchi $n+1$ qiymat uchun to‘g‘riligini isbotlaymiz, ya’ni

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

to‘g‘ri deb,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \quad (2)$$

to'g'riligini isbotlaymiz.

Buning uchun (1) tenglikning chap tomoniga $(n+1)^2$ hadni qo'shib, o'ng tomonida n ni $n+1$ ga almashtiramiz. (1)-da n ta natural sonlar kvadratlarining yig'indisi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng bo'lgani uchun (2) ni chap tomonida almashtirish bajaramiz va quyidagini hisoblaymiz.

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} = \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}; \end{aligned}$$

Demak n ta natural sonlar kvadratlarining yig'indisi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng ekan.

Bizning bu muhokamamiz mantiqiy jihatdan to'la emas, chunki bizning «ertami kechmi n ni barcha qiymatlariga yetamiz» iborasini aksiomalar yordamida asoslab bo'lmaydi. Asoslash uchun quyidagicha yondashamiz. (1) tenglik to'g'ri bo'lgan n ning qiymatlar to'plamini A bilan belgilaymiz.

Biz 1 sonini A ga tegishli ekanini bilamiz ($n=1$ uchun tenglik o'rinli) $n \in A$ bo'lishidan $n+1 \in A$ (agar tenglik n ning ba'zi bir qiymatlari uchun to'g'ri bo'lsa, u $n+1$ uchun ham to'g'ri).

U holda matematik induksiya prinsipiga asosan A to'plam natural sonlar to'plami N bilan ustma-ust tushadi, bu esa tenglikning n ning barcha natural qiymatlari uchun to'g'riligini bildiradi.

2). Peano aksiomatikasi.

Natural sonlarni qo'shish tushunchasi natural sonlar to'plami aksiomatikasini qurish uchun yagona asos emas. Shuning bilan birga bu tushuncha sodda emas. Ma'lumki, n natural soniga m natural sonini qo'shishni qadama-qadam, ya'ni qadamga yana bitta birlikni qo'shish yordamida hosil qilamiz. Masalan : $5+3=((5+1)+1)+1$;

Shuning uchun qo'shish operatsiyasini eng sodda ya'ni 1 sonini qo'shish operatsiyasiga keltirish mumkin. $n+1$ soni bevosita n sonidan keyin kelganligi uchun keyingi songa o'tish to'g'risida gapirish mumkin. Shunga ko'ra natural sonlar to'plamida asosiy tushuncha sifatida « b soni a sonidan bevosita keyin keladi» tushunchasini tanlash mumkin. Bu holda quyidagi aksiomalar qabul qilinadi.

- 1) 0- bu natural son;
- 2) Natural sondan keyin natural son keladi;
- 3) 0 bu hech qanday natural sondan keyin kelmaydi;
- 4) Har qanday natural son bevosita faqat bitta natural sondan keyin keladi;
- 5) To'liq induksiya aksiomasi;

Aksiomatik nuqtayi nazardan biz ikkita asosiy tushuncha bilan ish ko'rdik: "natural son" (ob'ekt) va "a dan bevosita keyin keladi".

Hozirgi adabiyotlarda bu aksiomalar sistemasi shakl jihatidan boshqacharoq ifodalanadi.

Natural sonlar – bu biror bo‘sh bo‘lmagan N to‘plam elementlari bo‘lib, to‘plamning ba’zi bir a va b elementlari uchun quyidagi 4 aksiomani qanoatlantiruvchi « b element a dan bevosita keyin keladi» munosabati o‘rnatilgan: (a soni dan keyin keluvchi sonni a^* bilan belgilaymiz).

1) 1 natural soni mavjud va u bevosita hech bir natural sondan keyin kelmaydi, ya’ni ixtiyoriy a soni uchun $a^* \neq 1$;

2) Har bir a natural soni uchun undan bevosita keyin keluvchi faqat va faqat bitta natural son a^* mavjud ya’ni $a=b \Rightarrow a^*=b^*$

3) 1 dan boshqa ixtiyoriy natural son faqat va faqat bitta natural sondan keyin keladi $a^*=b^* \Rightarrow a=b$

4) Induksiya aksiomasi.

Aytaylik, $M \subset N$ natural sonlar to‘plamining to‘plam osti quyidagi xossalarga ega bo‘lgan bo‘lsin:

a) 1 soni M ga tegishli bo‘lsin:

b) agar a natural soni M ga tegishli bo‘lsa, u holda a^* soni ham M ga tegishli bo‘ladi, u holda M barcha natural sonlardan iborat bo‘ladi, ya’ni $M = N$ bilan ustma-ust tushadi. Natural sonlar aksiomalar sistemasi 1891-yilda italyan matematigi va mantiqchisi Turin universiteti professori Djuzeppe Peano tomonidan («O‘ ponyatii chisla» maqolasida) taklif qilindi. Natural sonlar to‘plami uchun biz ikkita aksiomatikani berdik. Bu aksiomalar sistemasi teng kuchlimi, boshqacha aytganda ularning ikkalasi ham natural sonlar to‘plamini ifodalaydimi, degan savol tug‘iladi. Ikkita aksiomalar sistemasi tasdiq uchun olingan asosiy tushunchalar bilan farq qiladi. Shuning uchun bir sistemadagi aksioma, ikkinchi sistemada isbot talab qiladigan teorema bo‘lib keladi. Quyidagi amallarni bajarib bir aksiomatikadan ikkinchisiga o‘tilsa, ular ekvivalent deyiladi:

1) berilgan sistemadagi asosiy tushunchalardan ikkinchi sistema asosiy tushunchalarini aniqlash;

2) berilgan sistema aksiomalariga ko‘ra ikkinchi sistema aksiomalarini isbotlash;

Oldingi temachalarda biz qo‘shish aksiomalaridan foydalanib «bevosita keyin keladi» munosabati xossasini isbotladik. Bu xossalar ichida esa Peano aksiomalar sistemasidagi barcha tasdiqlar bor. Demak, Peano aksiomalar sistemasi qo‘shish aksiomalaridan kelib chiqadi.

Shunga o‘xshash Peano aksiomalar sistemasidan qo‘shish aksiomalar sistemasining kelib chiqishini ko‘rsatish mumkin.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Matematik induksiya prinsipi mohiyatini aytib bering.
2. Bitta teorema yoki tenglikni olib uning to‘g‘riligini matematik induksiya prinsipi yordamida isbotlang.
3. Peano aksiomalarini aytib bering.
4. Qo‘shish aksiomalari bilan Peano aksiomalari teng kuchlimi?

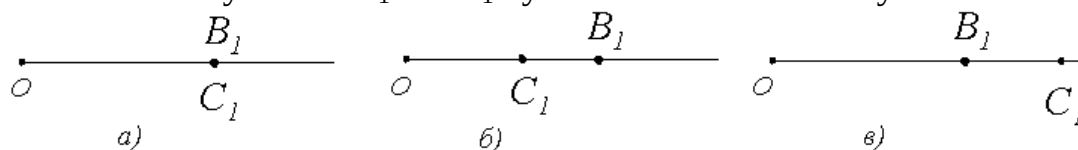
II.1.5.NATURAL SONLAR MIQDORLARNI O'LCHASH NATIJASI SIFATIDA

Kishilarning turmush faoliyatida faqat buyumlarning sanog'ini bilishgina emas, balki turli kattaliklarni – uzunlik, massa, vaqt va boshqalarni ham o'lchashga ehtiyoj paydo bo'ldi. Shu sababli natural sonlarning paydo bo'lishida sanoqqa bo'lgan ehtiyoj bilan o'lchashga bo'lgan ehtiyoj ham sabab bo'ldi. Natural sonlarni kattaliklarni o'lchash natijasida ya'ni miqdorlarni o'lchash asosida paydo bo'lishiga to'xtalamiz.

1). Kesmalarni taqqoslash. Kesmalar ustida amallar.

Bizga $a=[AB]$ va $b=[BC]$ kesmalar berilgan bo'lsin. Bu kesmalarga teng kesmalarni boshi 0 nuqtada bo'lgan biror nurga qo'yamiz. $OB_1=a$ va $OC_1=b$ kesmalarni hosil qilamiz. Bunda uchta hol bo'lishi mumkin:

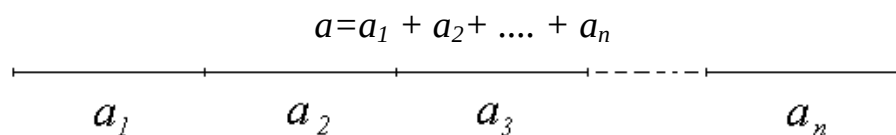
- 1) B_1 va C_1 nuqtalar ustma-ust tushadi (27a– chizma). U holda OB_1 va OC_1 bitta kesmani ifodalaydi, demak $a=b$;
- 2) C_1 nuqta OB_1 kesma ichida yotadi (27b– chizma) . U holda OC_1 kesma OB_1 kesmadan kichik (yoki OB_1 kesma OC_1 kesmadan katta) deyiladi va quyidagicha yoziladi; $OC_1 < OB_1$ ($OB_1 > OC_1$) yoki $b < a$ ($a > b$):
- 3) B_1 nuqta OC_1 kesma ichida yotadi (27e- chizma) U holda OB_1 kesma OC_1 kesmadan kichik deyiladi. $OB_1 < OC_1$ yoki $a < b$ ko'rinishda yoziladi.



27 – chizma

Kesmalar ustida turli amallar bajariladi.

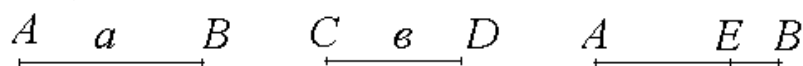
1-Ta'rif: Agar $a_1, a_2, \dots, a_n$ kesmalarning birlashmasi a kesмага teng bo'lib, kesmalar biri-biri bilan ustma-ust tushmasa (ya'ni ichki nuqtalarga ega bo'lmasa) va bir kesma ikkinchi kesmaning oxiriga birin-ketin tushsa, u holda a kesma $a_1, a_2, \dots, a_n$ kesmalarning yig'indisi deyiladi (3-chizma) yig'indi quyidagi ko'rinishda yoziladi:



28-chizma.

2-Ta'rif. a va b kesmalarning ayirmasi deb, shunday c kesмага aytiladiki, uning uchun $b+c=a$ tenglik bajariladi.

a va b kesmalarning ayirmasi quyidagicha topiladi. $a=[AB]$ kesma yasaladi va shu kesmada b kesмага teng $[AE]$ kesma ajratiladi. Natijada $c=[EB]$ kesma hosil bo'ladi (29-chizma)



29-chizma.

$a-b$ ayirma mavjud bo'lishi uchun a kesma b kesmadan katta bo'lishi zarur va yetarlidir.

2). Kesmalar ustidagi amallar xossalari

Kesmalar ustida amallar quyidagi xossalarga ega:

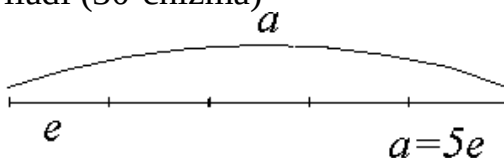
- 1) Har qanday a va b kesmalar uchun $a+b = b+a$ tenglik o'rinli (kesmalarni qo'shish o'rin almashtirish qonunga bo'ysunadi).
- 2) Har qanday a, b, c kesmalar uchun $a+(b+c)=(a+b)+c$ tenglik o'rinli (kesmalarni qo'shish gruppallash qonuniga bo'ysunadi)
- 3) Har qanday a, b va c kesmalar uchun $a < b$ bo'lsa, u holda $a+c < b+c$ bo'ladi.

3). Natural son kesma uzunligining qiymati sifatida

Eng avvalo kesmalar uzunligini o'lchashni eslaymiz. Kesmalar to'plamida birorta e kesma tanlanib, u birlik kesma yoki uzunlik birligi deyiladi. Keyinchalik esa boshqa kesmalar shu birlik e kesma bilan taqqoslanadi. Biror a kesma e birlik kesmaga teng n ta kesma yig'indisidan iborat bo'lsa, u tubandagicha yoziladi:

$$\underbrace{e + e + \dots + e}_{n \text{ ta}} = ne \text{ va } n \text{ natural son } a \text{ kesma uzunligining } e \text{ uzunlik}$$

birligidagi son qiymati deyiladi (30-chizma)



$$a = 5e$$

30-chizma

Agar uzunlik birligi sifatida boshqa kesma olinsa, u holda a kesma uzunligining son qiymati o'zgaradi.

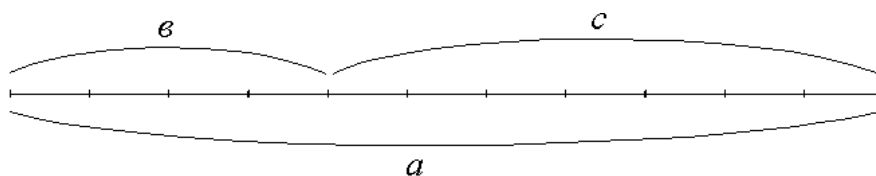
Shunday qilib, a kesma uzunligining son qiymati sifatidagi natural son a kesma tanlab olingan e birlik kesmalarning nechtasidan iboratligini ko'rsatadi. Tanlab olingan e uzunlik birligida bu son yagonadir. Bu sonlar uchun «teng» va «kichik» munosabatlarini qaraylik. Aytaylik m natural son a kesma uzunligining, n natural son b kesma uzunligining e uzunlik birligidagi son qiymatlari bo'lsin. Agar a va b kesmalar teng bo'lsa, ular uzunliklarining son qiymatlari ham teng bo'ladi, ya'ni $m=n$;

Agar a kesma b kesmadan kichik bo'lsa, u holda $m < n$ bo'ladi va teskari tasdiq ham to'g'ri bo'ladi. Kesmalar va ular uzunliklarining son qiymatlari orasida o'rnatilgan bog'lanish kesmalar uzunliklarini taqqoslashni ularni tegishli son qiymatlarini taqqoslashga keltiradi.

4). Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni qo'shish va ayirishning ma'nosi

Agar natural sonlar kesmalarning uzunliklarini o'lchash natijasida hosil bo'lgan bo'lsa, bu sonlarni qo'shish va ayirish qanday ma'noga ega bo'lishini aniqlaymiz.

1) Qo'shish. Masalan, 4 va 7 sonlari b va c kesmalarni e birlik yordamida o'lchash natijalari bo'lsin, $b = 4e$, $c = 7e$. $4+7=11$ ekani ma'lum. Bunda 11 soni $a=b+c$ kesma uzunligining qiymati bo'ladi.



31-chizma

Umumiy holda a kesma b va c kesmalar yig'indisi hamda $b=me$; $c=ne$ bo'lsin. Bunda m va n - natural sonlar. Bu deganimiz, b kesma m ta, c kesma n ta shunday bo'lakka bo'linadi, bu bo'laklarning har biri birlik kesma e ga teng. Shunday qilib, m va n natural sonlar yig'indisini uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalangan b va c kesmalardan tuzilgan a kesma uzunligining qiymati sifatida qarash mumkin.

2) Ayirish. Agar a kesma, b va c kesmalardan iborat bo'lib, a va b kesmalarining uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalansa (bir xil uzunlik birligida), c kesma uzunligining son qiymati a va b kesmalar uzunliklari son qiymatlari ayirmasiga teng. $c=(m-n)e$

Bundan ko'rinadiki, natural sonlarning $m-n$ ayirmasining uzunliklari mos ravishda m va n natural sonlar bilan ifodalangan a va b kesmalar ayirmasi bo'lgan c kesma uzunligining qiymatini ifodalay ekan.

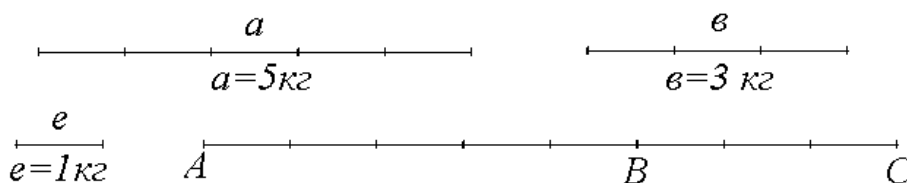
Agar $a=7e$ kesma b va c kesmalardan iborat bo'lib $b=3e$ bo'lsa, u holda $c=(7-4)e=3e$ bo'ladi.

Natural sonlarni qo'shish va ayirishga bunday yondashish nafaqat kesmalar uzunliklarini o'lchash, balki boshqa kattaliklarni o'lchash bilan ham bog'liq. Boshlang'ich sinflar uchun matematika darsliklarida turli xil kattaliklar va ular ustida amallarga doir masalalar ko'p. Bu masalalarni yechish esa kattaliklarning qiymatlari bo'lgan natural sonlarni qo'shish va ayirishning ma'nosini aniqlash bunday masalalarni yechishda amallarni tanlashga imkon beradi.

Masalan, Karim 5 kg olma, Olim 3 kg nok terdi. Karim va Olim hammasi bo'lib necha kilogramm meva tergan?

Masala qo'shish amali bilan yechiladi. Masalani yechishda terilgan olmalar massasini a kesma, noklar massasini b kesma ko'rinishida tasvirlaymiz (32-chizma).

U holda terilgan hamma mevalar massasini a ga teng $[AB]$ va b ga teng $[BC]$ kesmadan tuzilgan $[AC]$ kesma yordamida tasvirlash mumkin. $[AC]$ kesma uzunligining son qiymati $[AB]$ va $[BC]$ kesmalar son qiymatlarining yig'indisiga teng bo'lgani uchun terilgan mevalar massasini qo'shish amali bilan topamiz.

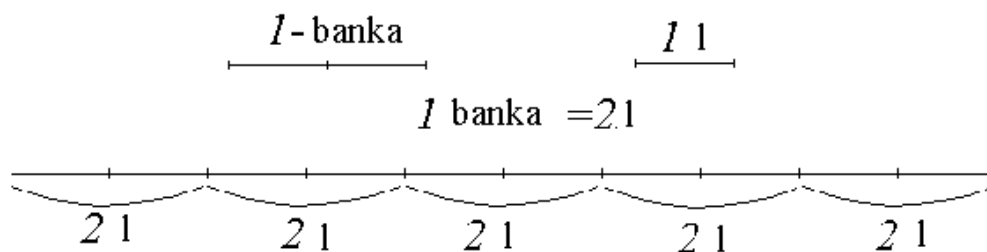


32-chizma.

5). Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni ko'paytirish va bo'lishning ma'nosi

Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan sonlarni ko'paytirish va bo'lishning ma'nosini ko'rsatish uchun dastlab masalalarga murojaat qilamiz.

Masala. Omborxonada har birida 2 l sharbat bo'lgan 5 ta banka bor. Bu bankalarda hammasi bo'lib qancha litr sharbat bor. Bu masalani kesmalar yordamida ifodalaylik (33-chizma).



33-chizma.

Bu masala ko'paytirish amali bilan yechiladi: $2 \times 5 = 10(l)$. Nima uchun?

Bu savolga yuqoridagi chizma yordamida javob beramiz.

5 ta bankada hammasi bo'lib qancha litr sharbat borligini bilish uchun $2l + 2l + 2l + 2l + 2l$ yig'indini topish yetarli. 2 l deganimiz $2 \cdot 1$ ko'paytma bo'lgani uchun yig'indini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin. $(2+2+2+2+2) \cdot 1$. 5 ta bir xil qo'shiluvchining yig'indisini $2 \cdot 5$ ko'paytma bilan almashtirib, $(2+2+2+2+2) \cdot 1 = (2 \cdot 5) \cdot 1 = 10 \cdot 1 = 10l$ ni hosil qilamiz. Bu masalada sharbat egallagan hajmning ikki o'lchov birligi banka va litr haqida so'z yuritilmoqda. Shu sababli bu masalani boshqa usulda ham yechish mumkin. Dastlab birlik sifatida bankani olsak, keyin litrga o'tsak, boshqacha aytganda yangi birlik sifatida litrni olsak 1 banka-2 litr.

$$\text{U holda } 5 \cdot 1b = 5 \cdot (2l) = 5(2 \cdot 1l) = (5 \cdot 2) \cdot 1l = 10 l$$

Bundan ko'rinadiki, natural sonlarni ko'paytirish kattalikning yangi, yanada maydaroq birligini tasvirlar ekan. Bu xulosamizni sonlarga-kesmalar uzunliklarining qiymatlariga qo'llab umumiy ko'rinishda isbotlaymiz.

a kesma e ga teng m ta kesmadan, e kesmaning o'zi e_1 ga teng n ta kesmadan iborat bo'lsa, a kesma uzunligining son qiymati uzunlikning e_1 birligida $m \cdot n$ ga teng bo'ladi. Haqiqatan ham, a kesmaning e_1 kesмага teng bo'laklar soni $m \cdot n$ ga teng, Shuning uchun u $n \cdot m$ ga teng. Demak, $a = (m \cdot n)e_1$;

Shunday qilib, natural sonlarni ko'paytirish uzunlikning yangi birligiga o'tishni ifodalaydi. Bu deganimiz, agar m natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati, n natural son e kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati bo'lsa, $m \cdot n$ ko'paytma a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati demakdir. Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan natural sonlarni bo'lishning ma'nosini aniqlaymiz.

Masala. Bir bankaning sig'imi 2 l bo'lsa, 10 l meva sharbatini qo'yish uchun necha banka kerak bo'ladi?

Masalani yechish uchun 10 l ni kesma bilan tasvirlaymiz va unda 2 l ni tasvirlovchi kesma necha marta joylashishini aniqlaymiz:

$$10l : 2l = 5(b)$$

Bu masalaning yechilishini boshqacha asoslash mumkin. Masalada sharbat egallagan hajmning ikki birligi - litr va banka qaralmoqda, o'lchash natijasini bankalar bilan, ya'ni yangi birlikda ifodalash talab etilmoqda. Yangi birlikda (bankada) 2 ta eski birlik (2 l) bor.

$$\text{Shuning uchun } 1l = 1b : 2 ; 10l = 10(1b : 2) = (10 : 2) \cdot 1b = 5 \cdot 1b = 5b;$$

Ko'rinib turibdiki, natural sonlarni bo'lish kattalikning yangi birligiga o'tish bilan bog'liq ekan. Buni umumiy holda ko'rsatamiz. a kesma e ga teng m ta kesmadan, e_1 kesma e ga teng n ta kesmadan iborat bo'lsin. e_1 uzunlik birligida a kesma uzunligini ifodalaydigan sonni qanday topish mumkinligini aniqlaymiz.

$$e_1 = n e \text{ bo'lgani uchun } e = e_1 : n . \text{ U holda } a = m e = m(e_1 : n) = (m : n) e_1;$$

Shunday qilib, kesmalar uzunliklarining qiymati bo'lgan natural sonlarni bo'lish uzunlikning yangi (yanada yirikroq) birligiga o'tishni tasvirlaydi: agar m natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati, n natural son e kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati bo'lsa, $m:n$ bo'linma a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymatidir.

Masalan, agar $a = 16e$ va $e_1 = 4e$ bo'lsa, a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati $4e_1$ ga teng bo'ladi:

$$a = 16e = 16 \cdot (e_1 : 4) = (16 : 4) e_1 = 4 e_1;$$

Boshlang'ich sinf matematika darslarida turli kattaliklar qatnashadigan ko'paytirish va bo'lish bilan yechiladigan sodda masalalar ko'p. Bularni yechishda ko'paytirish bir xil qo'shiluvchilarni qo'shish amali sifatida, bo'lish esa ko'paytirishga teskari amal sifatida qaraladi.

II.1.6. Tartibiy va miqdoriy natural sonlar

Bizga ma'lumki, natural sonlar deb buyumlarni sanashda qo'llaniladigan sonlarga aytiladi. Sanash jarayoni nimani ifodalaydi?

Masalan, biz $A = \{a, b, c, d, e\}$ to'plam elementlarini sanashni qanday olib borishimiz kerak? Bu to'plamning har bir elementini ko'rsatib, biz «birinchi», «ikkinchi», «uchinchi», «to'rtinchi», «beshinchi» deymiz. Shu bilan sanash jarayonini tugatamiz, chunki A to'plamning barcha elementlaridan foydalandik. Sanab borishda biz tubandagi qoidalarga amal qildik.

A to'plamning ixtiyoriy elementi sanashda birinchi ko'rsatilishi, birorta element ham tushib qolmasligi, bitta element ikki marta sanalmasligi kerak.

A to'plamni sanab biz A to'plamda 5 ta element bor deymiz, ya'ni bu to'plamning miqdoriy xarakteristikasiga ega bo'lamiz. Buni hosil qilish uchun esa tartibiy natural sonlar: «birinchi», ... «beshinchi» dan foydalandik. Boshqacha aytganda biz natural qator kesmasi deb ataluvchi $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ to'plamdan foydalandik.

1-Ta'rif. Natural qatorning N_a kesmasi deb a natural sondan katta bo'lmagan natural sonlar to'plamiga aytiladi.

Masalan, N_5 kesma 1, 2, 3, 4, 5 natural qatorning N_a kesmasi $x \leq a$ bo'lgan barcha x sonlardan tashkil topadi.

Natural qator kesmasining ta'rifi to'plam elementlari sanog'i tushunchasiga olib keladi. Bunda A to'plam elementlari bilan N_a kesma o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

2-Ta'rif. A to'plam elementlarini sanash deb, A to'plam bilan natural qatorning N_a kesmasi orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishga aytiladi. a soni deb A to'plamdagi elementlar soniga aytiladi va $n(A)=a$ kabi yoziladi. Bu a soni yagona va u miqdoriy natural sonidir. Shunday qilib sanashda chekli A to'plam elementlari nafaqat ma'lum tartibda joylashtiriladi(bunda «birinchi», «ikkinchi» va hokazo sonlar bilan ifodalanuvchi tartibiy natural sonlardan foydalaniladi), shuningdek A to'plam nechta elementni o'z ichiga olishi aniqlanadi (miqdoriy natural sonlardan foydalaniladi). Sanash uchun avvaldan yetarlicha sonlar zapasiga ega bo'lish zarur va bu sonlar ma'lum tartibda joylashishi, birinchi son mavjud bo'lishi lozim. Sanash chekli to'plam elementlarini tartiblashtirish uchun, ham ularning miqdorini aniqlash uchun xizmat qiladi. Demak tartibiy son miqdoriy songa olib keladi. Miqdoriy natural sonlar chekli teng quvvatli to'plamlar sinfining umumiy xossasini ifodalaydi. Shunday qilib, miqdoriy va tartibiy natural sonlar boshlang'ich ta'limda o'zaro uzviy boglangan, birgalikda qatnashadi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kesmalarni taqqoslashni tushuntirib bering.
2. Kesmalar ustida bajariladigan amallarni tushuntiring.
3. Kesmalar ustida amallar qanday xossalarga ega?
4. Kattaliklarni qiymatlari bo'lgan sonlar ustida bajariladigan amallarning ma'nosi.
5. Tartibiy miqdoriy natural sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?

II.2. SANOQ SISTEMALARI. POZITSION SANOQ SISTEMALARI

II.2.1. Sanoq sistemalari

1). Sanoq sistemalari tarixi

Hozirgi kunda har bir qadamda sonlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Shuning uchun biz har qanday sonni to'g'ri aytishimiz va yozishimiz, ular ustida amallar bajarishimiz kerak. Buning uchun sanoq sistemalari to'g'risida bilishimiz lozim. Umuman, sanoq sistemasi deb, sonlarni aytish va yozish hamda ular ustida amallar bajarishda ishlatiladigan tilga aytiladi. Dastavval sanoq sistemalari tarixi bilan tanishamiz. Ma'lumki, son tushunchasi juda qadim zamonlarda vujudga kelgan. O'sha vaqtning o'zidayoq sonlarni yozishga zaruriyat tug'ilgan. Yozuv paydo bo'lmasdan oldin kishilar sonlarni ayta bilganlar, hisob-kitob yuritganlar. Bunda ularga turli qurollar va eng avvalo qo'l va oyoqdagi barmoqlar yordam bergan. Shuningdek kertikli yog'och tayoqchalar, tugunli ip va arqonlar kabi hisob-kitob asboblariidan foydalanilgan. Kertik va tugunlar yordamida sonlarni «yozish»gan. Ammo bunday «yozish» qulay bo'lmagan, chunki katta sonlarni yozish uchun anchagina kertik va tugunlar yasashga to'g'ri kelgan, bu esa yozuvnigina qiyinlashtirmasdan, balki sonlarni taqqoslashda, sonlar ustida amallar bajarishda ham qiyinchiliklar tug'dirgan. Shuning uchun sonlarni yozishning boshqacha, tejamliror usuli vujudga kelgan: hisoblash ishlari bir xil sondagi elementlardan iborat bo'lgan gruppalar bilan olib borilgan.

Masalan, bitta odam ikkita qo'l barmoqlari elementlari bir gruppaga hisoblangan. Bunda hisob bir necha odam tomonidan olib borilgan. Birinchi odam barmoqlarini tartibli ravishda hammasini buklagandan keyin, ularni yozdiradi va shu zahoti ikkinchi odam birinchi barmog'ini bukad. Undan keyin ikkinchi odam keyingi o'nliklarni hisobini olib boradi, uning hamma barmoqlari bukilgandan keyin, qaytadan barmoqlarini yozdiradi va uchinchi odam birinchi barmog'ini bukad, hisob natijasi taxminan quyidagicha olib boriladi: masalan uchinchi odamning beshta barmog'i, ikkinchi odamning sakkizta barmog'i va birinchi odamning uchta barmog'i bukilsa, bu 583 sonni bildirgan. Odamning ikkita qo'l barmoqlari va ikkita oyoq barmoqlari gruppaga hisoblangan va u 20 ta elementdan iborat bo'lgan. Bunday 20 lik hisob – kitoblar Amerika qabilalarida XVI asrgacha saqlanib kelgan. Fransuzlarda hozir ham uning qoldiqlari bor. Masalan ular «sakson besh» sonini «to'rt marta yigirma va besh» deb ataydilar. Iqtisodiy ehtiyojning o'sib borishi natijasida insoniyat asta-sekin hisoblash usullarini vujudga keltira boshladi. Ularning keyingi rivoji bundan taxminan besh ming yil avval qadimgi davlatlar – Vavilon, Misr, Xitoy va boshqalarning shakllanish davriga to'g'ri keladi. Bu davrda sonlar yozuvining yangi usullari yaratildi. Qadimgi Vavilonda oltmishtadan gruppalar hisoblaganlar, ya'ni u yerda oltmishli sanoq sistemasidan foydalanilgan. Masalan, vavilonlik matematik 137 sonini bunday tasvirlagan : $137=2\cdot60+17$. Albatta bu son belgilar – uchburchaklar va ponalar bilan yozilgan. Gap shundaki, qadimgi vavilonliklar yozish uchun loyli tablichkalardan uchburchakli ponalar bosib chiqarganlar. Keyin bu tablichkalarni quritganlar va olovga tutib kuydirganlar. Sonlarni yozish uchun ponalarning holatlaridan foydalanilgan: vertikal holat – uchi bilan pastga va gorizontol holat – uchi bilan chapga qaratilgan. Bunda ∇ belgi bir va oltmishni, $<$ belgi – o'nlikni bildirgan boshqa sonlar bu belgilar va qo'shish amali bilan tasvirlangan. Masalan,

6 soni bunday tasvirlangan:

$\nabla\nabla\nabla$
 $\nabla\nabla\nabla$
 $\nabla\nabla\nabla$

199 soni bunday: $\nabla\nabla\nabla < \nabla\nabla\nabla$ Oxirgi yozuv sonining oltmishli $\nabla\nabla\nabla$

sistemadagi yozuvidir: $60+60+60+10+9=3\cdot 60+19$. Biroq qadimgi Vavilonda paydo bo'lgan sonlar yozuvi kamchiliklarga ega edi: Unda katta sonlarni belgilash qiyin edi: sanoq sistemasining asosini – 60 sonini belgilash uchun maxsus belgi yo'q edi, bu esa ba'zi yozuvlarni turlicha o'qishga olib kelar edi. Oltmishli sanoq sistemasining vujudga kelishida aylanani 360 ta teng bo'lakka bo'lish, shu bilan birga yilni 360 kunga bo'lish asos qilib olingan, degan taxmin mavjud. Bu sanoq sistemasining qoldiqlari shu kungacha saqlanib kelgan: aylanani 360° ga bo'lishga yana burchaklarni gradus, minut va sekundlar bilan o'lchashni ko'rsatish mumkin. Qadimgi misrliklar o'ntalab hisoblaganlar. Ularda maxsus belgilar faqat xonalarni – birlar, o'nlar, yuzlar, minglar va boshqalarni belgilash uchun ishlatilgan. Birdan to'qqizgacha bo'lgan sonlar tayoqchalar yordamida yozilgan.

1-I, 10-I , 100 - $\subset$, 1000 - 1

Masalan, 132 sonini misrliklar quyidagicha: $\subset I I I \text{ 𐀓}$

1234 sonini esa bunday : 1 C C I I I I I I

ko‘rinishda ayrim holatlarda tekis qator qilib o‘ngdan chapga yoki ustun qilib yuqoridan pastga qarab yozilgan.

Masalan, 65 sonini IIII I I , III I I yoki I I I III , I I I II ko‘rinishda ham yozganlar. Yozuvlar asosan papiruslarda bo‘yoqlar bilan bajarilgan. Ba‘zan yozish uchun tosh, daraxt, teri, holst, sopol sinig‘idan foydalanilgan.

2). Nopozitsion sanoq sistemalari

Yuqorida sonlarni yozishda sonni ifodalovchi belgilarning o‘rni ahamiyatga ega emas. Shuning uchun sonlarni yozishning bu sistemasiga nopozitsion sanoq sistemasi deyiladi. Misr papiruslarining ayrimlari bizning kungacha yetib kelgan. Ulardan biri –«Moskva matematik papirusi» deb nomlangani Moskvada A.S.Pushkin nomidagi tasviriy san‘at davlat muzeyida saqlanadi. Shunisi qiziqki, misrliklar ko‘paytirish amalini ikkilantirish usuli bilan bajarganlar. Masalan, 25 ni 9 ga ko‘paytirish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak bo‘lgan.

$$25(1+2\cdot2\cdot2)=25+25\cdot2\cdot2\cdot2=25+50\cdot2\cdot2=25+100\cdot2=25+200=225$$

Bo‘lish amali ko‘paytirishga teskari amal deb qaralgan, ya‘ni shunday son tanlanganki, uni bo‘luvchiga ko‘paytirganda bo‘linuvchi hosil bo‘lgan. Umuman, qadimgi misrliklar va vavilonliklar yetarlicha katta hajmdagi matematik bilimga ega edilar, lekin bularning hammasi asosan tajriba xarakterida edi. Aslini olganda umumlashmalar va isbotlar yo‘q edi, ya‘ni matematika fani endigina dunyoga kelmoqda edi. Uning keyingi rivojlanishiga qadimgi Gretsiya olimlaridan Fales (bizning eramizgacha 624-547 y). Pifagor (eramizgacha taxminan 580-500), Demokrit (eramizgacha taxminan 460-370 y), Platon (bizning eramizgacha 427-347), Evklid (bizning eramizgacha taxminan 300 y), Arximed (bizning eramizgacha taxminan 287-212 y), Eratosfen (eramizgacha 276-194 y) va boshqalar katta hissa qo‘shdilar. Bu son haqidagi ta‘limotning tarixi va rivojlanishidagi butun bir davrdir. Shuni eslatish kerakki, Qadimgi Gretsiyada ham nopozitsion sanoq sistemasi mavjud edi. Ular 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sonlarni grek alfavitining birinchi to‘qqizta harfi bilan, masalan $\alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 3, \delta = 4, \varepsilon = 5$ va h.k.

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 sonlarini esa navbatdagi 9 ta harf bilan

($10 = \iota, 20 = \chi, 30 = \lambda, 40 = \mu, 50 = \gamma$ va h.k.)

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 sonlarni qolgan 9 ta harf bilan belgilaganlar ($100 = \rho, 200 = \delta, 300 = \tau$ va h.k.)

Masalan 325 sonini $\tau\chi\varepsilon$ ko‘rinishda yozilgan, bu yozuvda son so‘zdan farq qilishi uchun ustiga chiziq qo‘yilgan.

Greklar mingliklarni ifodalashda birliklarni ifodalovchi harfni chapdan pastiga shtrix qo‘yganlar. Masalan, $\overline{\varepsilon\rho\mu\beta}$ yozuv 5142 sonini bildirgan. 10000 soni esa miriado deyilib, M harfi bilan belgilangan. $\frac{\lambda\varepsilon}{M\gamma\beta}$ yozuv 350052 sonini bildiradi.

Ikki ming yildan sal ilgari Garbiy Yevropadagi barcha mamlakatlar va Osiyoning ko‘pgina mamlakatlari qadimgi rimliklarga bo‘ysungan. Rim

imperiya­si­da ma­te­ma­ti­ka ri­voj­lan­ti­ril­mas­dan, un­dan fa­qat a­ma­li­y ma­qsad­lar uchun fo­ydalanilgan. Qadim­gi Ri­mdan qol­gan na­rsalardan biri son­larni yozishning yana bitta usulidir. Ri­m sanoq sis­te­masida ham Qadim­gi Mi­sr sis­te­masidagi ka­bi belgili sonlar bor.

Bir- I, Besh – V, O‘n - X , Ellik – L, Yuz -C , Besh yuz –D, Ming – M
Qolgan hamma sonlar shu belgili sonlarga qo‘shish va ulardan ayirish orqali hosil qilinadi. Kichik songa tegishli belgi katta songa tegishli belgidan oldin turgan bo‘lsa, ayirish bajariladi.

Kichik songa tegishli belgi katta songa tegishli belgidan keyin turgan bo‘lsa qo‘shish bajariladi.

Masalan: IV–to‘rt ($5-1=4$), XC–to‘qson ($100-10=90$), XL–qirq ($50-10=40$). VI–olti ($5+1=6$), CX – biryuz o‘n ($100+10=110$)

Bir necha sonni rimcha nomerlash bilan yozamiz. 265- bu ikki yuz (CC) plyus oltmish, ya‘ni ellik plyus o‘n (LX), plyus besh (V). Demak, 265 soni bunday yoziladi: CCL XV: 385 – bu uch yuz (CCC) plyus sakson, ya‘ni ellik plyus o‘ndan 3 marta (LXXX), plyus besh (V). Demak, 385 soni bunday yoziladi: CCC LXXXV. To‘rt, besh va olti xonali sonlar m harfi (lotincha millming so‘zidan olingan) yordamida yoziladi, uning chap tomoniga minglar, o‘ng tomoniga yuzlar, o‘nlar, birlar yoziladi.

Masalan: XXXIXm DXXXVI yozuv 39536 sonning, CCXXXVIIIIm DCXLVI yozuv 238646 sonning yozuvidir.

Qadim­gi Ru­s ma­da­ni­ya­ti greklar ma­da­ni­ya­ti bilan bog‘liq bo‘lgani uchun, ularda ham sonlarning belgilanishi greklardagi belgilashlarga o‘xshash bo‘lgan, ya‘ni sonlarni harflar bilan belgilashgan.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sanoq sistemalari tarixi haqida tushuntiring.
2. Vavilonliklarning oltmishli sanoq sistemasi to‘g‘risida gapiring.
3. Misrliklarda sonlarning yozilishini ko‘rsating.
4. Qadim­gi Gretsiyada sonlarning grek alvafiti orqali ifodalanishini aytib bering.
5. Ri­m sanoq sis­te­masida belgili sonlarni yozib ko‘rsating, ixtiyoriy sonni belgili sonlar yordamida ifodalang.

II.2.2.Pozitsion sanoq sistemalari

1).O'nli sanoq sistemasining vujudga kelishi

Pozitsion sanoq sistemasining vujudga kelishi matematikaning rivojlanishida katta rol o'ynaydi. Bu sistemada bitta belgi (raqam) sonlarning yozilishida joylashish tartibiga ko'ra turli sonlarni ifodalashi mumkin. Pozitsion sistemaning vujudga kelish tarixi bilan birmuncha tanishib o'tamiz.

V-XII asrlarda Sharq mamlakatlaridan Hindiston va Yaqin Sharqda matematika sezilarli darajada rivojlandi. Hindiston va Xitoyda matematika Misrdagidek bundan 5 ming yil avval paydo bo'lgan.

Ayniqsa, hind olimlarining arifmetikaga qo'shgan hissalari kattadir, chunki ular hozirgi kunda butun insoniyat qo'llagan sonlarni o'qish va yozish usulini ya'ni o'nli sanoq sistemasini kashf qildilar.

Hind matematiklari o'ylab topgan kashfiyotning mohiyati shundaki, ular sonlarni yozishda har bir raqamning yozuvidagi qiymati uning o'rniga, pozitsiyasiga bog'liq. Masalan, 823 sonidagi 8 raqami 8 yuzlikni, 87 sonidagi o'sha 8 raqami 8 o'nlikni, 8926 sonidagi 8 raqami esa 8 minglikni bildiradi. Bundan o'nta raqam yordamida har qanday sonni yozish mumkin ekan degan xulosa chiqadi. Shuning uchun o'nli sanoq sistemi pozitsion sistema deyiladi. Undan tashqari, Hindistonda birinchi marta xona birligi yo'qligini bildirish uchun noldan foydalanildi, bu esa sonlar yozuvini takomillashtirish va hisoblashlarni osonlashtirishda katta rol o'ynaydi.

To'g'ri nolning bizga odat bo'lgan yozuvi birdaniga paydo bo'lmagan. Avvalo sonda birorta xona bo'lmasa, hindlar shu xona raqamini aytish o'rniga «bo'sh» so'zini aytardilar, yozishda esa bo'sh o'ringa nuqta qo'yadilar. Keyinchalik nuqtalar o'rniga doiracha chizadigan bo'ldilar. Sonlar yozuvidagi o'nta 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 belgining hammasi raqamlar deyiladi. Biroq bundan 200 yil avval bitta belgi – 0 gina raqam deyilar edi. Sonning o'nli sanoq sistemasida yozilishidagi raqamlarni ham qadimgi Hindiston matematiklari o'ylab topgan, lekin ularning dastlabki yozilishi hozirgi yozilishidan farq qiladi, raqamlarning hozirgi formasi kitob bosib chiqarish kashf qilingandan keyin -XY asrda qaror topdi. Nima uchun Hindistonda kashf qilingan raqamlar ko'pincha arab raqamlari deyiladi? Chunki VII asrda vujudga kelgan Arab xalifaligi rivojlanishning yuqori darajasida turgan bir qancha davlatlarni ikki yuz yilga yaqin o'ziga bo'ysundirgan edi. Jumladan: Shimoliy Hindiston, Misr, O'rta Osiyo, Mesopotamiya, Zakavkaze, Shimoliy Afrika va boshqa davlatlar. Bu katta mamlakatning poytaxti (markazi) Bag'dod shahri edi. Arablar fanning muhimligini tushunar va o'zlari bosib olgan mamlakatlarning, jumladan, Gretsiya, Hindiston, O'rta Osiyo olimlarining asarlarini (ishlarini) o'z tillariga tarjima qilar, o'rganar va to'plar edilar. Biroq arab matematiklari qadimgi buyuk olimlarning asarlarini saqlabgina qolmasdan, matematikani rivojlantirishga katta hissa ham qo'shdilar. IX asrning buyuk olimlaridan biri o'zbek (Xorazm) matematigi Muhammad ibn Muso al-Xorazmiydir. Uning «Kitob al-jabr» nomli kitobi fanga algebra nomini berdi. Bu kitobda arifmetik masala va tenglamalarning yechilish qoidalari bayon qilingan. Al-Xorazmiy o'zining boshqa kitobida Hindistonda kashf qilingan hind

arifmetikasini, ya'ni o'nli sanoq sistemasini yoritdi. Uch yuz yil keyin, ya'ni XII asrda u lotin tiliga tarjima qilindi va bu kitob butun Yevropa xalqlari uchun arifmetikadan birinchi darslik bo'lib qoldi. Natijada Yevropa mamlakatlarida Arab davlatida yashagan muallif yozgan kitob bo'yicha o'nli sanoq sistemasi o'rganilgani uchun o'nli sistemadagi arab raqamlari deyila boshlandi. Bu esa noto'g'ridir. XII asrdan boshlab Garbiy Yevropada uzoq davom etgan turg'unlikdan so'ng matematikaga qiziqish uyg'ondi, bunga savdo-sotiqning kengayishi sabab bo'ldi.

Yevropada o'nli sanoq sistemasining tarqalishiga Leonardo Fibonachchining 1202-yilda chop qilingan «Kniga abaka» kitobi yordam berdi. XIII asrdan boshlab o'nli sistema joriy qilindi va u XVI asrga kelib Garbiy Yevropa mamlakatlarida to'la foydalana boshlandi.

XVI asr oxirida, Ivan Grozniy podsholigi davrida, Rusda birinchi bosma matematik kitoblar paydo bo'ldi, bu kitoblardan maqsad turli amaliy masalalarni yechishda hisoblashni osonlashtirishdan iborat edi. Ularda sonlar slavyancha sanoq sistemasida yozilgan edi.

Rus fanining rivojlanishida Leontiy Filippovich Magniskiy tomonidan yozilgan «Arifmetika sirech nauka chislitel'naya» kitobi muhim rol o'ynadi. Bu kitob Pyotr I davrida 1703-yilda slavyan tilida nashr qilindi, ammo undagi hamma hisoblashlar o'nli sanoq sistemasida bajarilgan edi. Bu kitob uzoq vaqt barcha ilm kishilari uchun eng zarur kitob bo'lib qoldi, chunki bu kitobda nafaqat matematikaga oid materiallar, balki astronomiya, navigasiya va boshqa fanlarning ba'zi bir bo'limlari haqida ma'lumotlar bor edi.

2). O'nli sanoq sistemasida sonlarning ifodalanishi

Ma'lumki, o'nli sanoq sistemasida sonlarni yozish uchun 10 ta belgi (raqam)dan foydalaniladi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Ulardan chekli ketma-ketliklar hosil qilinib, bu ketma-ketliklar sonlarining qisqacha yozuvidir. Masalan: 5 ming +4 yuz+5 o'n+7 bir 5457 ketma-ketlik sonining qisqacha yozuvidir. Bu yig'indini bunday ko'rinishda yozish qabul qilingan: $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$.

Ta'rif . n natural sonning o'nli yozuvi deb bu sonni $n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$ ko'rinishda yozishga aytiladi, bu yerda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0 \in 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ qiymatlarni qabul qiladi va $n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$ yig'indini qisqacha $n = n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0$ kabi yozish qabul qilingan.

$1, 10, 10^2, 10^3, \dots, 10^k$ ko'rinishdagi sonlar mos ravishda, birinchi, ikkinchi, ..., $k+1$ - xona birliklari deyiladi, shu bilan birga bitta xonaning 10ta birligi keyingi yuqori xonaning bitta birligini tashkil qiladi, ya'ni qo'shni xonalar nisbati 10 ga – sanoq sistemasining asosiga teng. Sonlar yozuvidagi dastlabki uchta xona bitta gruppaga birlashtiriladi va birinchi sinf yoki birlar sinfi deyiladi. Birinchi sinfga birlar, o'nlar, yuzlar kiradi. Sonlar yozuvidagi to'rtinchi, beshinchi va oltinchi xonalar ikkinchi sinf-minglar sinfini tashkil qiladi. Unga bir minglar, o'n minglar va yuz minglar kiradi. Keyingi uchinchi xona – millionlar sinfi bo'ladi, bu sinf ham uchta xonadan iborat: yettinchi, sakkizinchi va to'qqizinchi xonalardan, ya'ni bir millionlar, o'n millionlar va yuz millionlardan iborat. Navbatdagi uchta xona ham yangi sinfni hosil qiladi va hokazo. Birlar, minglar, millionlar va hokazo

sinflarning ajratilishi sonlarni yozishga va o'qishga qulayliklar yaratadi. O'nli sanoq sistemasida hamma sonlarni $n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$ (bunda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0$, koefitsientlar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k \neq 0$) ko'rinishdagina yozmasdan ularning hammasiga nom, ism berish mumkin. Bu quyidagicha amalga oshiriladi: birinchi o'nta sonning nomi bor. So'ngra bu sonlardan o'nli yozuv ta'rifi mos ravishda va ozgina so'z qo'shish natijasida keyingi sonlarning nomi kelib chiqadi. Masalan, ikkinchi o'nliklardagi sonlar (ular $1 \cdot 10 + a_0$ ko'rinishda yoziladi) o'n bilan birinchi o'nlikdagi sonlar nomining qo'shilishidan tuziladi: o'n bir, o'n ikki va hokazo. Yigirma so'zi ikkita o'nlikni bildiradi. Uchinchi o'nlikdagi sonlar nomi (ular $2 \cdot 10 + a_0$ ko'rinishdagi sonlar) yigirma so'ziga birinchi o'nlikdagi sonlar nomini qo'shish natijasida hosil bo'ladi: yigirma bir, yigirma ikki va h.k. hisobni shunday davom ettirib, to'rtinchi, beshinchi, oltinchi, ettinchi, sakkizinchi, to'qqizinchi va o'ninchi o'nliklarni hosil qilamiz. Navbatdagi o'nliklar mos ravishda quyidagicha ataladi: o'ttiz, qirq, ellik, oltmish, yetmish, sakson, to'qson. **Yuz so'zi** o'nta o'nni bildiradi. Yuzdan katta sonlar nomi (ya'ni $1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ ko'rinishdagi sonlar) yuz va birinchi hamda keyingi o'nliklardagi sonlar nomidan tuziladi va birinchi yuzlikni anglatish uchun ular oldiga bir so'z yoziladi: bir yuz bir, bir yuz ikki, ... bir yuz yigirma va h.k. Bu yuzlikni keyingi yuzlikkacha to'ldirib, ikkita yuzlikka ega bo'lamiz, u ikki yuz deyiladi. Ikki yuzdan katta sonlarni hosil qilish uchun ikki yuz soniga birinchi va keyingi o'nlikdagi sonlar qo'shib aytiladi. Har bir yuzlikdan keyin yangi yuzlik hosil bo'ladi: uch yuz, to'rt yuz, besh yuz va h.k., o'nta yuz maxsus nom bilan «ming» deb yuritiladi. Mingdan keyingi sonlar mingga bittadan qo'shib borish natijasida hosil bo'ladi, bu yerda ham birinchi minglik oldiga bir so'z qo'yiladi (bir ming bir, bir ming ikki va h.k.). Natijada ikki ming, uch ming va h.k. sonlar hosil bo'ladi. Mingta ming soni maxsus nom bilan «million» deb ataladi. Yana sanashni davom ettirib, mingta millionni hosil qilamiz. Mingta million soni maxsus nom bilan «milliard» deb ataladi. hisoblashlarda million 10^6 , milliard 10^9 , milliard 10^{12} ko'rinishida yoziladi. Shunga o'xshash undan ham katta sonlarni yozish mumkin. Shunday qilib, milliard ichidagi hamma natural sonlarni aytish uchun hammasi bo'lib 22 ta turli so'z ishlatiladi: bir, ikki, uch, to'rt, besh, olti, etti, sakkiz, to'qqiz, o'n, yigirma, o'ttiz, qirq, ellik, oltmish, yetmish, sakson, to'qson, yuz, ming, million, milliard. Natural sonning o'nli yozuvi sonlarni taqqoslashning yana bir usulini beradi, Agar n va m natural sonlar o'nli sanoq sistemasida, ya'ni

$$n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0, n_k \neq 0$$

$$m = m_l \cdot 10^l + m_{l-1} \cdot 10^{l-1} + \dots + m_1 \cdot 10 + m_0, m_l \neq 0$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, quyidagi shartlardan biri bajarilsa, n soni m dan kichik bo'ladi:

- 1) $k < l$ (n sondagi xonalar soni m sondagi xonalar sonidan kichik):
- 2) $k = l$, ammo $n_k < m_l$
- 3) $k = l$, $n_k = m_k, \dots, n_s = m_s$ ammo $n_{s-1} < m_{s-1}$;

Bu tasdiqni isbotsiz qabul qilamiz. Ulardan foydalanib, sonlarni oson taqqoslash mumkin. Masalan, a) $2465 < 18328$, chunki 2465 sonning yozuvidagi raqamlar 18328 sonning yozuvidagi raqamlardan kam;

b) $2456 < 5287$, bunda raqamlar soni bir xil, ammo 2456 sonidagi minglar xonasidagi raqam 5287 sonining minglar xonasidagi raqamdan kichik; v) $2475 < 2486$, bunda raqamlar soni bir xil, birlar va o'nlar xonasidagi raqam 2486 sonidagi birlar va o'nlar xonasidagi raqamdan kichik.

3). Sonlarning o'nli sanoq sistemasidan farqli pozitsion sanoq sistemasidagi yozuvi

Biz asosi 10 bo'lgan sanoq sistemasida har qanday son ushbu $n_n \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$ ko'rinishida yozilishini bilamiz, unda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_0$ koeffitsientlar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, qiymatlarini qabul qiladi va $n_k \neq 0$.

O'nli sanoq sistemi pozitsiondir – ayni bir belgi (raqam) ning qiymati bu belgining shu sonning yozuvida tutgan o'rniga (pozitsiyasiga) bog'liq.

Ma'lumki, o'nli sanoq sistemasidan boshqa bir qancha pozitsion sanoq sistemalari mavjud va ularni o'nli sanoq sistemasidan farqi bu sistemalarning asoslari turlicha bo'lishligidir.

Masalan, Vavilonda sanoq sistemi oltmishli bo'lgan. Bundan boshqa sanoq sistemalar ham ma'lum: o'n ikkili sistema va hokazo. Umuman, pozitsion sanoq sistemasining asosi ikkidandan katta yoki ikkiga teng istalgan p natural son bo'lishi mumkin. Agar $p=2$ bo'lsa, sistema ikkili, $p=3$ bo'lsa, uchli, $p=10$ bo'lsa, o'nli sistema deyiladi.

p asosli sistemada son qanday yoziladi?

O'nli sistemada sonni yozish uchun 10 ta belgidan foydalaniladi

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Ravshanki, ikkili sistemada sonni 2 ta belgi masalan, 0,1 belgilar yordamida, sakkizli sistemada 0,1,2,3,4,5,6,7,, belgilar yordamida yozish mumkin. Umuman, p asosli sanoq sistemasida sonni yozish uchun p ta belgidan foydalanish kerak: 0,1,2, 3,, $p - 1$.

Ta'rif. p asosli sanoq sistemasida n natural sonning yozuvi deb uning $n = n_k \cdot P^k + n_{k-1} \cdot P^{k-1} + \dots + n_1 \cdot P + n_0$ ko'rinishdagi yozuviga aytiladi, bunda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_0$ lar 0,1,2 ..., $P-1$ qiymatlarni qabul qiladi va $n_k \neq 0$

Har qanday n natural sonni bunday yagona ko'rinishda yozish mumkinligini isbotsiz qabul qilamiz.

n sonining $n = n_k \cdot P^k + n_{k-1} \cdot P^{k-1} + \dots + n_1 \cdot P + n_0$ ko'rinishini qisqacha ushbu ko'rinishda yozish qabul qilingan: $n = n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0$.

Masalan, to'rtli sistemada, ya'ni $P=4$ da $3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 3$ yig'indi $n=3023_4$ ko'rinishda qisqacha yozish mumkin bo'lgan biror n sonining yozuvidir.

Bu son quyidagicha o'qiladi: «uch, nol, ikki, uch to'rtli sanoq sistemasida».

Sonlarni yozishda turli belgilardan foydalanish nuqtaiy nazaridan ikkili sanoq sistemi tejamkorliroqdir – unda sonlarni yozish uchun faqat ikkita belgi 0 va 1 kerak. Bu sistemada sonning qisqa yozuvi nol va birlardan tuzilgan chekli ketma-ketlikdan iborat. Masalan,

$$1011_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1; \quad 10001_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1.$$

p asosli sanoq sistemasida yozilgan sonlarni taqqoslash o'nli sanoq sistemadagidek bajariladi. Masalan, $2101_3 < 2102_3$ chunki bu sonlarda xonalar

soni bir xil va yuqori xonadagi uchta raqam bir xil bo'lib, birinchi sondagi kichik xona raqami ikkinchi sondagi o'sha xona raqamidan kichik.

4). Bir sanoq sistemasidan ikkinchisiga o'tish

1) Sonning p asosli sistemadagi yozuvidan o' nli sistemadagi yozuviga o'tish. n soni p asosli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin: $n = n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0$. Uni ushbu $n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + n_1 \cdot p + n_0$ ko'p had ko'rinishda yoyib yozish mumkin, bunda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0$ va p sonlar yozuvi o' nli sistemada berilgan. Bu sonlar ustida o' nli sistemada qabul qilingan qoidalar bo'yicha amallar bajarib, n sonning o' nli yozuvini hosil qilamiz. Masalan, 253_6 sonining o' nli yozuvini topish uchun uni $2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 3$ yig'indi ko'rinishida yozamiz va qiymatlarini topamiz: $2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 3 = 112$. Demak, $253_6 = 112_{10}$

2) Sonning o' nli sistemadagi yozuvidan p asosli sistemadagi yozuviga o'tish.

n soni o' nli sistemada yozilgan bo'lsin. Uni p asosli sistemada yozish degan so'z $n_k, n_{k-1}, \dots, n_0$ larning $n = n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + n_1 \cdot p + n_0$ bo'ladigan qiymatini topish demakdir, bunda

$$1 \leq n_k < p, 0 \leq n_{k-1} < p, \dots, 0 \leq n_0 < p.$$

Diqqatimizni ushbu qonuniyatga qaratamiz.

$n = n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \dots + n_1 \cdot p + n_0$ sonini $n = p \cdot (n_k \cdot p^{k-1} + n_{k-1} \cdot p^{k-2} + \dots + n_1) + n_0$ ko'rinishda yozish mumkin $0 \leq n_0 < p$ bo'lgani uchun n sonining oxirgi yozuvini n sonini p qoldikli bo'lishdagi yozuv deb qarash mumkin, bunda n_0 - qoldiq, $n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-2} + \dots + n_1$ - to'liqsiz bo'linma. Xuddi shuningdek, n_1 - ni hosil bo'lgan bo'linmani p ga bo'lganda chiqqan qoldiq deb qarash mumkin va hokazo.

Bu qonuniyat sonning o' nli yozuvidan p asosli sistemadagi yozuviga o'tish jarayoniga asos bo'ladi. n sonini p ga o' nli sistemada bo'lish qoidasi bo'yicha qoldikli bo'lamiz. Bo'lishda chiqqan qoldiq sonning p asosli sistemadagi yozuvining oxirgi raqami bo'ladi.

Chiqqan bo'linmani yana p ga qoldikli bo'lamiz. Yangi qoldiq n sonining p asosli sistemasidagi yozuvning oxiridan bitta oldingi raqami bo'ladi. Bo'lish jarayonini davom ettirib, n sonining p asosli sistemadagi yozuvining hamma raqamlarini topamiz.

Masalan, 97 sonining uchli sanoq sistemasidagi yozuvini topaylik, ya'ni 97 sonini $n_k \cdot 3^k + n_{k-1} \cdot 3^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 3 + n_0$ ko'rinishda yozamiz, bunda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0$ lar 0,1,2 qiymatlarni qabul qiladi. 97 ni 3 ga bo'lamiz: $97 = 32 \cdot 3 + 1$. Bo'lish natijasida $n_0 = 1$ ekanligi topildi. Biroq 3 soni oldidagi koeffitsient 3 dan katta: shuning uchun 32 ni 3 ga bo'lamiz: $32 = 10 \cdot 3 + 2$, ya'ni $97 = (10 \cdot 3 + 2) \cdot 3 + 1 = 10 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$. Bu bo'lishda $n_1 = 2$ ni topdik, biroq 3^2 daraja oldidagi koeffitsient 2 dan katta, shuning uchun 10 ni 3 ga bo'lamiz: $10 = 3 \cdot 3 + 1$, ya'ni $97 = (3 \cdot 3 + 1) \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 3 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$

Bu bosqichda $n_2 = 1$ ekanini aniqladik, ammo 3^2 daraja oldidagi koeffitsient 3 dan katta, shuning uchun 3 ni 3ga bo'lamiz: $3 = 1 \cdot 3 + 0$, ya'ni $97 = (1 \cdot 3 + 0) \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$

Oxirgi bo'lishni bajarib, biz $n_3 = 0$ ekaninagina topmasdan, katta xona raqamini ham aniqladik. Shuning uchun bo'lish jarayoni tugallandi. $1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1$ ko'phad 10121_3 sonining yozuvidir. Demak, $97_{10} = 10121_3$

Ko'rsatilgan bu jarayonni burchak qilib bo'lishni bajarib ham olib borish mumkin. Demak, $97_{10} = 10121_3$;
Bunday bo'lish natijasini yoza borib, katta xona raqami ketma-ket bo'lishdagi oxirgi bo'linma ekanligini esda tutish lozim.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar:

1. Pozitsion sanoq sistemasi deganda nimani tushunasiz?
2. O'nli sanoq sistemasida sonlar qanday ifodalanadi?
3. Sonlar yozuvidagi sinflarni aytib bering.
4. O'nli sanoq sistemasida yozilgan sonlarni taqqoslang.
5. O'ndan farqli pozitsion sistemalarda sonlarning yozilishiga misollar keltiring.
6. Bir sanoq sistemasidan ikkinchi sanoq sistemasiga o'tishni misollar yordamida tushuntiring.

II.2.3.O'NLI VA BOSHQA POZITSION SANOQ SISTEMALARIDA SONLARNI QO'SHISH

1). O'nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni qo'shish.

Dastlab misollardan boshlaymiz: $364+2423$ sonlarni qo'shamiz. Buning uchun qo'shiluvchilarni koeffitsientli o'nning darajalari yig'indisi ko'rinishda yozamiz:

$$364+2423=(3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4) + (2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3).$$

Bu ifodada qavslarni ochib, qo'shiluvchilar o'rnini shunday almash-tiramizki, birlar birlar oldida, o'nlar o'nlar oldida va hokazo bo'lsin va yana qavs ichiga olamiz. Bularning hammasini qo'shishning tegishli qonunlari asosida bajarish mumkin. Haqiqatan, gruppalash qonuni ifodalarini qavslarsiz yozishga imkon beradi:

$3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 4 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3$. O'rin almashtirish qonuniga ko'ra qo'shiluvchilar o'rnini almashtiramiz: $2 \cdot 10^3 + (3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^2) + (6 \cdot 10 + 2 \cdot 10) + (4 + 3)$. Birinchi qavsdan 10^2 ni, ikkinchisidan 10 ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Buni qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonunini qo'llab bajarish mumkin:

$$2 \cdot 10^3 + (3+4) \cdot 10^2 + (6+2) \cdot 10 + (4+3)$$

Ko'rib turibmizki, 364 va 2423 sonlarini qo'shish tegishli xonalar raqamlari bilan tasvirlangan bir xonali sonlarni qo'shishga keltirildi. Bu yig'indini qo'shish jadvalidan topamiz:

$$2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7$$

Hosil qilingan ifoda 2787 sonining o'nli yozuvidir.

Endi $n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_0$ va $m = m_k \cdot 10^k + m_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + m_0$ sonlarini qo'shishni ko'raylik. Agar ikkala sonda ham xona birliklari teng bo'lib (agar teng bo'lmasa teng bo'lmagan son oldiga nollar yozib tenglashtiramiz) $n_s + m_s < 10$ bo'lsa, yig'indi tubandagicha bo'ladi.

$$\begin{aligned} & (n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_0) + (m_k \cdot 10^k + m_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + m_0) = \\ & = (n_k + m_k) \cdot 10^k + (n_{k-1} + m_{k-1}) 10^{k-1} + \dots + (n_0 + m_0); \end{aligned}$$

Agar $n_s + m_s \geq 10$ bo'lsa qo'shish birmuncha qiyin bo'ladi.

Masalan, $394+827$ yig'indini qaraylik.

Qo'shiluvchilarni koeffitsientli o'nning darajalari yig'indisi ko'rinishida yozamiz:

$$(3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 4) + (8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7).$$

Qo'shish qonunlari, qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonunidan foydalanib, berilgan ifodani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$(3+8) \cdot 10^2 + (9+2) \cdot 10 + (4+7).$$

Ko'rib turibmizki, bu holda ham berilgan sonlarni qo'shish bir xonali sonlarni qo'shishga keltirildi, ammo $3+8$, $9+2$, $4+7$ yig'indilar 10 sonidan katta, shuning uchun hosil bo'lgan ifoda biror sonning o'nli yozuvi bo'lmaydi. Shunday qilish kerakki, 10 ning darajalari oldidagi koeffitsientlar 10 dan kichik bo'lsin. Buning uchun bir qator almashtirishlar bajaramiz. Avval $4+7$ yig'indini $10+1$ ko'rinishda yozamiz:

$$(3+8) \cdot 10^2 + (9+2) \cdot 10 + (10+1)$$

Endi qo'shish va ko'paytirish qonunlaridan foydalanib, topilgan ifodani quyidagi ko'rinishga keltiramiz:

$$(3+8) \cdot 10^2 + (9+2+1) \cdot 10 + 1$$

Oxirgi almashtirishning mohiyati ravshan: birlarni qo'shishda hosil bo'lgan o'nni berilgan sonlardagi o'nliklarga qo'shdik. $9+3$ yig'indini $1 \cdot 10 + 2$ ko'rinishda yozib, quyidagini hosil qilamiz:

$$(3+8) 10^2 + (10+2)10 + 1 \text{ yoki } (3+8)10^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$$

va nihoyat $3+9$ yig'indi hosil qilamiz: $(1 \cdot 10 + 2) 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$ bundan

$$1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1.$$

Hosil bo'lgan ifoda 1221 sonining o'nli yozuvidir.

O'nli sanoq sistemasida yozilgan ko'p xonali sonlarni qo'shish algoritmi umumiy ko'rinishda tubandagicha ifodalanadi :

- 1) Ikkinchi qo'shiluvchining tegishli xonalari bir-birining ostiga tushadigan qilib birinchi qo'shiluvchining ostiga yozamiz, agar qo'shiluvchilarning bittasida xonalar soni kam bo'lsa, uning oldiga nollar yozib xonalar sonini tenglashtiramiz;
- 2) Birlar xonasidagi raqamlar qo'shiladi. Agar yig'indi 10 dan kichik bo'lsa, uni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga (o'nlar xonasiga) o'tamiz.
- 3) Agar birliklar raqamlarining yig'indisi 10 dan katta yoki 10 ga teng bo'lsa, uni $10+S_0$, bunda S_0 ni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo'shiluvchidagi o'nlar raqamiga 1 ni qo'shamiz, keyin o'nlar xonasiga o'tamiz.
- 4) O'nlar bilan yuqoridagi amallarni bajaramiz, keyin yuzlar bilan va hokazo. Yuqori xona raqamlari qo'shilgandan keyin bu jarayonni to'xtatamiz.

Boshqa sanoq sistemalarida sonlarni qo'shish ham shunga o'xshaydi. Bunda faqat shu sistemadagi bir qiymatli sonlarni qo'shish jadvalini bilish kerak.

Masalan, ikkilik sanoq sistemasida qo'shish jadvali quyidagicha:

$m \setminus n$	0	1
0	0	1
1	1	10

Sakkizlik sanoq sistemasida qo‘shish jadvali quyidagicha:

m\n	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Yuqoridagi jadvallarga mos sonlarni qo‘shishga misollar keltiramiz.

$$\begin{array}{r} 1101110_2 \\ + 110101_2 \\ \hline 10100011_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 230547_8 \\ + 326715_8 \\ \hline 557464_8 \end{array}$$

2). O‘nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni ayirish

Quyidagi misollarni qaraylik.

1-misol: 3848 sonidan 725 sonini ayirish talab qilinsin. Dastlab kamayuvchi va ayriluvchida xonalar sonini tenglashtiramiz. Ayriluvchini 0725 ko‘rinishda yozib, sonlarni koeffitsientli o‘nning darajalari ko‘rinishida yozamiz.

$$3248 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8$$

$$0725 = 0 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5$$

Endi 3248 – 0725 ayirmani tubandagi ko‘rinishda yozamiz.

$$\begin{aligned} 3848 - 0725 &= (3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8) - (0 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5) = \\ &= 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 8 - 0 \cdot 10^3 - 7 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10 - 5; \end{aligned}$$

Yig‘indi va ayirma xossalariidan foydalanib, bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$$3848 - 0725 = (3 - 0) \cdot 10^3 + (8 - 7) \cdot 10^2 + (4 - 2) \cdot 10 + (8 - 5) = 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 = 3123$$

2-misol. 6157 – 376 ayirmani topish talab qilinsin. Bu holda ayirish oldingi misoldan qiyinroq bo‘ladi, chunki bu ayirmani

$(6 - 0) \cdot 10^3 + (1 - 3) \cdot 10^2 + (5 - 7) \cdot 10 + (7 - 6)$ ko‘rinishda yozib bo‘lmaydi, sababi ayrim qavs ichidagi ifodalarda ayriluvchi kamayuvchidan katta. Shuning uchun kamayuvchini tubandagi ko‘rinishda yozamiz.

$$6 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$$

Bu ifodada ham 6 ni 5+1 ko‘rinishda yozamiz. U holda $6157 = 6 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 7$; ammo $10^3 = 900 + 100 = 9 \cdot 10^2 + 10 \cdot 10$ bo‘lganligidan $6157 = 5 \cdot 10^3 + (9+1) \cdot 10^2 + (5+10) \cdot 10 + 7 = 5 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 15 \cdot 10 + 7$

Demak, $6157-376=(5-0) \cdot 10^3+(10-3) \cdot 10^2+(15-6) \cdot 10+(7-6)=5 \cdot 10^3+7 \cdot 10^2+9 \cdot 10+1=5791$

Endi umumiy holda $n=n_k 10^k+n_{k-1} 10^{k-1}+\dots+n_0$ va $m=m_k 10^k+m_{k-1} 10^{k-1}+\dots+m_0$ sonlari berilgan bo'lsin.

U holda $n-m$ ayirma barcha $s(0 \leq s \leq k)$ lar uchun $n_s \geq m_s$ shart bajarilganda quyidagiga teng bo'ladi:

$$n-m=(n_k-m_k)10^k+(n_{k-1}-m_{k-1})10^{k-1}+\dots+(n_0-m_0).$$

Shunday qilib, ikki son ayirmasini topish algoritmi quyidagicha ifodalanadi:

- 1) ayriluvchini mos xonalari bir-birining ostida bo'ladigan qilib kamayuvchining ostiga yozamiz. Xonalar sonini tenglashtiramiz.
- 2) agar ayriluvchining birlar xonasidagi raqam kamayuvchining tegishli raqamidan katta bo'lsa, uni kamayuvchining raqamidan ayiramiz, so'ngra keyingi xonaga o'tamiz.
- 3) agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqami-dan katta, ya'ni $n_0 < m_0$ bo'lib, kamayuvchining o'nlar raqami noldan farqli bo'lsa, kamayuvchining o'nlar raqamini bitta kam-aytiramiz, shu vaqtning o'zida birlar raqami 10 ta ortadi, shundan keyin $10+n_0$ sonidan m_0 ni ayiramiz va natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz, so'ngra keyingi xonaga o'tamiz.
- 4) agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta bo'lib, kamayuvchining o'nlar, yuzlar va boshqa xonasidagi raqamlar nolga teng bo'lsa, kamayuvchining noldan farqli birinchi (birlar xonasidan keyingi) raqamini olib, uni bitta kamaytiramiz, kichik xonalardagi barcha raqamlarni o'nlar xonasigacha 9 ta orttiramiz, birlar xonasidagi raqamni esa 10 ta orttiramiz va $10+n_0$ dan m_0 ni ayiramiz, natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga o'tamiz.
- 5) keyingi xonada bu jarayonni takrorlaymiz.
- 6) kamayuvchining katta xonasidan ayirish bajarilgandan keyin ayirish jarayoni tugallanadi.

Boshqa sanoq sistemalarida ham sonlarni ayirish yuqoridagiga o'xshash, ammo farqi ayirish qaysi sistemada bajarilayotgan bo'lsa shu sistemalardagi birlik sonlarni qo'shish jadvalidan foydalaniladi.

Misollar keltiramiz:

$$\begin{array}{r} 4823_9 \\ - 745_9 \\ \hline 4067_9 \end{array}$$

Haqiqatan ham qo'shish jadvaliga asosan $5_9+7_9=13_9$; $13_9-5_9=7_9$ bo'ladi, boshqalarini ham shunga o'xshash ko'rsatish mumkin.

3). O'nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni ko'paytirish

Ma'lumki, ikkita bir xonali sonni ko'paytirishda hosil bo'lgan hamma ko'paytmalar esda saqlanadi. Hamma bunday ko'paytmalar maxsus jadvalga yoziladi, bu jadval bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvali deyiladi.

325 sonini 1000 ga ko'paytirishni bajarganda 325 soni ketiga uchta nolni yozish yetarli, ya'ni 325000 bo'ladi. Haqiqatan ham, $325=3 \cdot 10^2+2 \cdot 10+5$ ko'rinishida yozish mumkin va qo'shishga nisbatan ko'paytirish distributivlik

xossasiga ega bo'lishidan $10^k \cdot 10^s = 10^{k+s}$ ga ko'ra
 $325 \cdot 1000 = (3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 5) \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$ bo'ladi.

Bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$$325 \cdot 1000 = 3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 = 325000$$

Bundan ko'rinadiki n sonini 10^s ga ko'paytirish uchun n sonining o'ng tomoniga s ta nol yozish kifoya.

Haqiqatan ham, agar $n = n_k n_{k-1} \dots n_0$ soni berilgan bo'lsa, u holda $n = n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \dots + n_0$ ni 10^s ga ko'paytiramiz.

$$n \cdot 10^s = (n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \dots + n_0) \cdot 10^s = n_k 10^{k+s} + n_{k-1} 10^{k-1+s} + \dots + n_0 \cdot 10^s + 0 \cdot 10^{s-1} + \dots + 0;$$

$$\text{Demak, } n \cdot 10^s = n_k \cdot 10^{k+s} + n_{k-1} \cdot 10^{k-1+s} + \dots + n_0 \cdot 10^s$$

s_{ma}

Endi $n = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_0$ sonini bir xonali m soniga ko'paytiramiz.

$$n \cdot m = (n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \dots + n_0) m = n_k m 10^k + n_{k-1} m 10^{k-1} + \dots + n_0 m;$$

bu yerda $n_s \cdot m$ lar bir xonali sonlar bo'lib, ularning ko'paytmalari bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvalida bor bo'lib, ularning natijalari bir xonali yoki ikki xonali sonlar bo'ladi.

$n_s \cdot m$ ko'paytmani $n_s \cdot m = a_s 10 + b_s$ ko'rinishida yozish mumkin, (bunda faqat $a_s = 0$ bo'lgan holni hisobga olgan holda.)

U holda biz quyidagiga ega bo'lamiz.

$$n \cdot m = (a_k 10 + b_k) 10^k + (a_{k-1} 10 + b_{k-1}) 10^{k-1} + \dots + (a_0 10 + b_0) = (a_k 10^{k+1} + a_{k-1} 10^k + \dots + a_0 10) + (b_k 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \dots + b_0);$$

Misol:

$$\begin{aligned} 48 \cdot 7 &= (4 \cdot 10 + 8) \cdot 7 = 4 \cdot 7 \cdot 10 + 8 \cdot 7 = 28 \cdot 10 + 56 = (2 \cdot 10 + 8) \cdot 10 + (5 \cdot 10 + 6) = \\ &= 2 \cdot 10^2 + (8 + 5) \cdot 10 + 6 = 2 \cdot 10^2 + (10 + 3) \cdot 10 + 6 = 2 \cdot 10^2 + 10^2 + 3 \cdot 10 + 6 = \\ &= 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6 = 336 \end{aligned}$$

Endi ko'p xonali sonlarni ko'paytirishni qaraymiz:

$n = n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \dots + n_0$ va $m = m_l 10^l + m_{l-1} 10^{l-1} + \dots + m_0$ sonlari berilgan bo'lsin. $n \cdot m$ ko'paytmani topamiz. Dastlab ko'paytirish xossasiga ko'ra quyidagini hisoblaymiz.

$$n (m_l 10^l + m_{l-1} 10^{l-1} + \dots + m_0) = (n m_l) 10^l + (n m_{l-1}) 10^{l-1} + \dots + n m_0$$

n sonini ketma-ket bir xonali $m_l, m_{l-1}, \dots, m_0$ sonlariga ko'paytirib, natijani $10^l, 10^{l-1}, \dots, 10^0$ sonlariga ko'paytirib qo'shamiz natijada $n \cdot m$ ko'paytmaga ega bo'lamiz.

Bu esa bizni odatdagi sonlarni ustun shaklda yozib ko'paytirish qoidalarimizga mos keladi.

Masalan:

$$\begin{array}{r} 385 \\ \times 24 \\ \hline 1540 \\ + 770 \\ \hline 9240 \end{array}$$

Shunday qilib, ko'p xonali sonni ko'p xonali songa ko'paytirish ko'p xonali sonni bir xonali songa ko'paytirishga keltirildi.

Umuman, $n = n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0$ sonni $m = m_l m_{l-1} \dots m_1 m_0$ songa ko'paytirish algoritmini tubandagicha ifodalash mumkin:

1) n ko'paytuvchini yozamiz va uning ostiga ikkinchi ko'paytuvchi m ni yozamiz.

2) n sonni m sonning kichik xonasi m_0 ga ko'paytiramiz va nm_0 ko'paytmani m sonning ostiga yozamiz.

3) n sonni m sonning keyingi xonasi m_1 ga ko'paytiramiz va $n m_1$ ko'paytmani bir xona chapga surib yozamiz. Bu nm_1 ni 10 ga ko'paytirishga mos keladi.

4) bu jarayonni nm_1 ni hisoblaguncha davom ettiramiz.

5) topilgan $l+1$ ta ko'paytmani qo'shamiz.

O'nli sanoq sistemadan boshqa sistemadagi sonlar ham shunga o'xshash ko'paytiriladi. Bunday ko'paytirishda shu sistemadagi bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvalidan foydalaniladi. Ikki, uch va oltilik sanoq sistemalari uchun shunday jadvallarni keltiramiz.

1) ikkilik sanoq sistemasi uchun

$n \backslash m$	0	1
0	0	0
1	0	1

2) uchlik sanoq sistemasi uchun

$n \backslash m$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

3) oltilik sanoq sistemasi uchun

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Misol:

$$\begin{array}{r}
 \times 43_5 \\
 \underline{32_5} \\
 + 141 \\
 \underline{234} \\
 3031_5
 \end{array}$$

4). O'nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni bo'lish

Sonlarni bo'lish texnikasi haqida so'z borar ekan, bu jarayon qoldiqli bo'lish amali kabi qaraladi. Ta'rifni eslaylik. Butun nomanfiy a sonni b natural songa qoldiqli bo'lish deb, $a=bq+r$ va $0 \leq r < b$ bo'ladigan butun nomanfiy q va r sonlarni topishga aytiladi, q soni esa to'liqsiz bo'linma deyiladi.

Bir xonali va ikki xonali sonlarni bir xonali songa bo'lganda bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvalidan foydalaniladi.

Masalan, 63 ni 8 ga bo'lamiz. Ko'paytirish jadvalidan 8-ustunda 63 soni yo'q. Shuning uchun bu ustunda 63 dan kichik eng yaqin 56 sonini olamiz. 56 soni 8-satrda bo'lgani uchun to'liqsiz bo'linma 7 ga teng. Qoldiqni topish uchun 63 dan 56 ni ayiramiz: $63-56=7$.

Shunday qilib, $63=8\cdot7+7$;

Endi ko'p xonali sonni bir xonali songa bo'lish qanday amalga oshirilishini aniqlaymiz. 346 ni 4 ga bo'lish kerak bo'lsin. Bu degani shunday to'liqsiz bo'linma q va r qoldiqni topish kerakki, ular uchun $346=4q+r$, $0\leq r<4$ bo'lsin. Shuni aytish kerakki, 346 va 4 sonlarni to'liqsiz bo'linmasi q ga bo'lgan talabni quyidagicha yozish mumkin:

$$nq\leq 346<n(q+1).$$

Avval q sonining yozuvida nechta raqam bo'lishini aniqlaymiz. q bir xonali son ko'paytmasi plyus qoldiq 346 ga teng emas. Agar q soni ikki xonali bo'lsa, ya'ni agar $10 < q < 100$ bo'lsa, u holda 346 soni 40 va 400 sonlari orasida bo'ladi, bu esa to'g'ri. Demak, 346 va 4 sonlarining bo'linmasi ikki xonali son.

Bo'linmaning o'nlar raqamini topish uchun bo'linuvchi 4 ni ketma-ket 20 ga, 30 ga, 40 ga va hokazo ko'paytiramiz. $4\cdot80=320$, $4\cdot90=360$ va $320<346<360$ bo'lgani uchun to'liqsiz bo'linma 80 va 90 sonlari orasida bo'ladi, ya'ni $q=80+q_0$. U holda 346 soni haqida bunday deyish mumkin: $4\cdot(80+q_0)\leq 346<4\cdot(80+q_0+1)$, bundan $320+4q_0\leq 346<320+4(q_0+1)$ va $4q_0\leq 26<4(q_0+1)$.

Berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini (bo'linmaning birlar raqamini) ko'paytirish jadvalidan foydalanib topish mumkin. $q_0=6$ hosil bo'ladi demak, to'liqsiz bo'linma $q=80+6=86$, qoldiq ayirish bilan topiladi: $346-4\cdot86=2$. Shunday qilib, 346 ni 4 ga bo'lganda to'liqsiz bo'linma 86 va 2 qoldiq hosil bo'ladi: $346=4\cdot86+2$.

Bo'lishni ifodalagan bu jarayon burchak qilib bo'lish deb nomlana-digan bo'lish asosida yotadi.

$$\begin{array}{r|l} 346 & 4 \\ -32 & 86 \\ \hline 26 & \\ \underline{24} & \\ 2 & \end{array}$$

Ko'p xonali sonni ko'p xonali songa bo'lish tubandagicha bajariladi. Masalan, 6547 ni 57 ga bo'laylik. Bu bo'lishni bajarish shunday butun nomanfiy q va r sonlarni topish kerakki, uning uchun $6547=57q+r$, $0\leq r<57$ bajarilsin.

Bundan $57q\leq 6547<57(q+1)$ q bo'linmadagi raqamlar sonini aniqlaymiz. Shubhasiz, q bo'linma 100 va 1000 sonlari orasida yotadi (u uch xonali), chunki $5700 < 6547 < 57000$;

Bo'linmaning yuzlar raqamini topish uchun bo'linuvchi 57 ni ketma-ket 100 ga, 200 ga, 300 ga va hokazo ko'paytiramiz. $57\cdot100=5700$; $57\cdot200=11400$ va $5700<6547<11400$ bo'lgani uchun to'liqsiz bo'linma 100 va 200 sonlari orasida yotadi, ya'ni $q=100+q_1$, bu yerda q_1 - ikki xonali son. U holda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$$57\cdot(100+q_1)\leq 6547 < 57\cdot(100+q_1+1).$$

Qavslarni ochib va 5700 sonini ayirib, ushbu tengsizlikka kelimiz:

$$57 q_1 \leq 847 < 57 \cdot (q_1 + 1)$$

q_1 soni ikki xonali. Shuning uchun bo'linmadagi o'nlar raqamini topish uchun bo'linuvchi 57 ni ketma-ket 10 ga, 20 ga, 30 ga va hokazo ko'paytiramiz.

$57 \cdot 10 = 570$, $57 \cdot 20 = 1140$ va $570 < 847 < 1140$ bo'lgani uchun $10 < q_1 < 20$ va q_1 sonini $q_1 = 10 + q_0$ ko'rinishda yozish mumkin. U holda 847 soni haqida quyidagilarni aytish mumkin:

$$57 \cdot (10 + q_0) \leq 847 < 57 \cdot (10 + q_0 + 1), \text{ ya'ni}$$

$$57 \cdot 10 + 57 \cdot q_0 \leq 847 < 57 \cdot 20 + 57 \cdot (q_0 + 1), \quad 57 q_0 \leq 277 < 57 \cdot (q_0 + 1).$$

Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonining (bo'linmaning birlar raqamini) 57 ni ketma-ket 1 ga, 2 ga, ... , 9 ga ko'paytirib tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini tanlab topamiz. $57 \cdot 4 = 228$. Demak q_0 soni 4 ga q_1 esa 14 ga, to'liqsiz bo'linma $q = 100 + 14 = 114$ ga teng. Qoldiq ayirish yo'li bilan topiladi $6547 - 114 \cdot 57 = 49$ 6547 ni 57 ga bo'lganda, to'liqsiz bo'linma 114 ga, qoldiq 49 ga teng. $6547 = 114 \cdot 57 + 49$.

Butun nomanfiy a sonni b natural songa bo'lishning turli usullarining umumlashmasi quyidagi burchak qilib bo'lish algoritmi hisoblanadi:

I. Agar $a = b$ bo'lsa, bo'linma $q = 1$ qoldiq $r = 0$ bo'ladi.

II. Agar $a > b$ bo'lib, a va b sonlardagi xonalar soni bir xil bo'lsa, b ni ketma-ket 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ga ko'paytirib, bo'linma tanlab olinadi, chunki $a < 10 b$

III. Agar $a > b$ bo'lib, a sondagi xonalar soni b sondagi xonalar sonidan katta bo'lsa, a bo'linuvchini yozib, uning o'ng tomoniga b bo'luvchini yozamiz va oralariga burchak belgisini qo'yib, bo'linma hamda qoldiqni ushbu ketma-ketlikda qidiramiz:

1) b sonda nechta xona bo'lsa, a sonda shuncha katta xonalarni yoki, agar zarur bo'lsa, bitta ortiq xonani shunday ajratamizki, ular b dan katta yoki unga teng d_1 sonni hosil qilsin. b ni ketma-ket 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ga ko'paytirib, d_1 va b sonlarning q_1 bo'linmasini tanlab topamiz. q_1 ni burchak ostiga (b dan pastga) yozamiz.

2) b ni q_1 ga ko'paytirib, ko'paytmani a sonining ostiga shunday yozamizki, bq_1 sonning quyi xonasi ajratilgan d_1 sonning quyi xonasi ostiga yozilsin.

3) b_1 ning ostiga chiziqcha chizamiz va ayirmani topamiz: $r_1 = d_1 - bq_1$

4) r_1 ayirmani bq_1 sonning ostiga yozamiz. r_1 ning o'ng tomoniga a bo'linuvchining foydalanilmagan xonalaridan yuqori xonasini yozamiz va chiqqan d_2 sonni b son bilan taqqoslaymiz.

5) Agar chiqqan d_2 son b dan katta yoki unga teng bo'lsa, u holda d ga nisbatan I yoki II punktlardagidek ish tutamiz. q_2 bo'linmani q_1 dan keyin yozamiz.

6) Agar chiqqan d_2 son b dan kichik bo'lsa, birinchi chiqqan d_3 son b dan katta yoki unga teng bo'lishi uchun keyingi xonadan qancha zarur bo'lsa yana shuncha yozamiz. Bu holda q_1 dan keyin shuncha nol yozamiz. Keyin d_3 ga nisbatan I yoki II punktlardagidek ish tutamiz. q_2 bo'linma nollardan keyin yoziladi. Agar a sonning kichik xonadan foydalanganda $d_3 < b$, bo'lsa, d_3 va b sonlarning bo'linmasi nolga teng bo'ladi va bu nolni bo'linmaning oxirgi xonasiga yozamiz, qoldiq $r = d_3$ bo'ladi.

Boshqa sanoq sistemalarida bo'lishda hisoblashlar burchak qilib bo'lishga keltiriladi va unda shu sistemadagi bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvallaridan foydalaniladi.

Masalan, $10220_3 : 12_3$ hisoblansin (uchlik sanoq sistemasi).

Demak, $10220_3 : 12_3 = 210_3$.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. O'nli sanoq sistemasida sonlarni qo'shish formulasini keltirib chiqaring.
2. O'nli sanoq sistemasida sonlarni qo'shish algoritmini yozib bering.
3. Yettilik sanoq sistemasida sonlarni qo'shishni misollar yordamida tushuntiring.
4. O'nli sanoq sistemasida sonlarni ayirish formulasini keltirib chiqaring.
5. O'nli sanoq sistemasida sonlarni ayirish algoritmini yozib bering.
6. Oltilik sanoq sistemasida sonlarni ayirishni misollar yorda-mida tushuntiring.
7. O'nli sanoq sistemasida sonlarni ko'paytirish formulasini keltirib chiqaring.
8. O'nli sanoq sistemasida sonlarni ko'paytirish algoritmini yozib bering.
9. Sakkizlik sanoq sistemasida sonlarni ko'paytirishni misollar yordamida tushuntiring.
10. O'nlik sanoq sistemasida sonlarni bo'lishni tushuntiring
11. O'nli sanoq sistemasida sonlarni bo'lishning umumlashgan burchak qilib bo'lish algoritmini yozib bering.
12. Uchlik sanoq sistemasida sonlarni bo'lishni misollar yordamida tushuntiring.

II.2.4.NOMANFIY BUTUN SONLARNING BO'LINUVCHANLIGI BO'LINUVCHANLIK

MUNOSABATI VA UNING XOSSALARI

1). Bo'luvchanlik munosabati

Ma'lumki, butun nomanfiy sonlarni har doim ham ayirib va bo'lib bo'lmaydi. Ammo butun nomanfiy a va b sonlari ayirmasining mavjudligi haqidagi masala oson yechiladi, ya'ni $a \geq b$ ni aniqlash yetarli. Bo'lish uchun esa bunday umumiy shart yo'q.

Bu bo'linish alomatlarini qarash uchun bo'linuvchanlik munosabati tushunchasini aniqlashtirish kerak.

Ta'rif. Butun nomanfiy a son va b natural son berilgan bo'lsin. Agar a ni b ga qoldikli bo'lganda qoldiq nolga teng bo'lsa, b soni a sonining bo'luvchisi deyiladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki agar b soni a ning bo'luvchisi bo'lsa, shunday butun nomanfiy son q mavjudki, uning uchun $a=b \cdot q$ bo'ladi.

Masalan, 6 soni 24 sonining bo'luvchisidir, chunki shunday butun nomanfiy $q=4$ son mavjudki, uning uchun $24=6 \cdot 4$ bo'ladi.

“Berilgan sonning bo'luvchisi” terminini “bo'luvchi” terminidan ajrata bilish kerak. Masalan, 25 ni 4 ga bo'lganda 6 soni bo'luvchi deyiladi, lekin bu son 25 ning bo'luvchisi emas. Agar 25 ni 5 ga bo'lsak, bunda “bo'luvchi” va “berilgan sonning bo'luvchisi” terminlari bitta narsani anglatadi.

b soni a sonining bo'luvchisi bo'lganda a soni b ga karrali yoki a soni b ga bo'linadi deyiladi va $a \mid b$ kabi yoziladi.

$a \mid b$ yozuv bo'linuvchanlik munosabati yozuvidir, bu yozuv a va b sonlari ustida bajariladigan amalni ko'rsatmaydi, ya'ni $a \mid b = c$ deb yozib bo'lmaydi.

Berilgan sonning bo'luvchisi shu sondan katta bo'lmagani uchun uning bo'luvchilari to'plami chekli. Masalan, 24 sonining hamma bo'luvchilarini qaraylik. Ular chekli to'plamni hosil qiladi: $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

2). Bo'linuvchanlik munosabati xossalari.

Bo'linuvchanlik munosabati qator xossalarga ega:

1-teorema. 0 soni ixtiyoriy songa bo'linadi, ya'ni $(\forall b \in Z_0) 0 \mid b$

Isboti: haqiqatan ham ixtiyoriy $b \in Z_0$ uchun $0 = b \cdot 0$. ($0 \in Z$) bo'lganligidan bo'linuvchanlik ta'rifiga ko'ra $0 \mid b$

2-teorema. 0 dan farqli ixtiyoriy son nolga bo'linmaydi, ya'ni $(\forall a \in Z_0) a \nmid 0$ bajarilmaydi.

Isboti: Aytaylik, $a \neq 0$ bo'lsin. Ixtiyoriy $b \in Z_0$ soni uchun $0 \cdot b = 0$ bo'lganligidan b ning hech bir qiymati uchun $a = 0 \cdot b$ tenglik bajarilmaydi. Demak, a soni 0 ga bo'linmaydi.

3-teorema: Ixtiyoriy son 1 ga bo'linadi, ya'ni $(\forall a \in Z_0) a \mid 1$

Isboti : Ixtiyoriy $a \in Z_0$ soni uchun $a = 1 \cdot a$ ga egamiz, bundan esa a ning 1 ga bo'linishi kelib chiqadi.

4-teorema. Bo'linuvchanlik munosabati refleksivdir, ya'ni har qanday natural a son uchun $a = a \cdot 1$ tenglik o'rinli. Bu degani, shunday $q=1$ son mavjudki, uning uchun $a = a \cdot 1$, bundan bo'linuvchanlik munosabati ta'rifiga ko'ra $a \mid a$.

Isbot qilingan bu teoremadan har qanday butun nomanfiy sonning 1 ga bo'linishi kelib chiqadi.

5-teorema. Agar $a \mid b$ va $a > 0$ bo'lsa, u holda $a \geq b$ bo'ladi.

Isboti: haqiqatan ham $a \mid b$ bo'lsa, u holda $a = bc$, bu yerda $c \in Z_0$. Shuning uchun $a - b = bc - b = b(c - 1)$ $a > 0$ deganimiz uchun $c > 0$. Z_0 – butun nomanfiy sonlar to'plamida ixtiyoriy son 1 dan kichik bo'lmagani uchun $c \geq 1$, demak, $b(c - 1) \geq 0$. Shuning uchun $a - b \geq 0$, bundan $a \geq b$;

6-teorema. Bo'linuvchanlik munosabati tranzitivdir, ya'ni $a \mid b$ va $b \mid c$ dan $a \mid c$ kelib chiqadi.

Isboti: $a \mid b$ bo'lgani uchun shunday butun nomanfiy k soni mavjudki, uning uchun $a = b \cdot k$ bo'ladi. $b \mid c$ bo'lgani uchun shunday butun nomanfiy λ soni mavjudki, uning uchun $b = c \cdot \lambda$ bo'ladi. Birinchi tenglikda b o'rniga $c \cdot \lambda$ ni qo'yamiz: $a = (c \cdot \lambda) \cdot k$ bo'ladi, bundan $a = (c \cdot \lambda) \cdot k = c \cdot (\lambda \cdot k)$ $\lambda \cdot k$ ko'paytma ikkita nomanfiy butun sonlar ko'paytmasidan iborat bo'lgani uchun ko'paytma ham nomanfiy butun son. Shuning uchun a soni ham c ga bo'linadi, ya'ni $a \mid c$

7-teorema: Agar a va b sonlari c ga bo'lsa, ularning yig'indisi ham c ga bo'linadi, ya'ni $(\forall a, b, c \in Z_0)(a \mid c \wedge b \mid c) \Rightarrow ((a + b) \mid c)$

Isboti: haqiqatan ham shunday k va λ sonlari topiladiki, $a = ck$ va $b = c\lambda$ bo'ladi. U holda $a + b = ck + c\lambda = c(k + \lambda)$ $k + \lambda$ – nomanfiy butun son bo'lgani uchun $(a + b) \mid c$ bo'ladi.

Bu isbotlangan tasdiq qo'shiluvchilar soni ikkitadan ko'p bo'lganda ham o'rinli. Bu teorema isbotidan quyidagi jumlaning isboti ham kelib chiqadi.

Agar $a \geq b$ shartda a va b sonlari c ga bo'linasa $a - b$ ayirma ham c ga bo'linadi.

8-teorema. Bo'linuvchanlik munosabati antisimmetrikdir, ya'ni $a \nmid b$ dagi turli a va b sonlar uchun $b \nmid a$ emasligi kelib chiqadi.

Bo'linuvchanlik munosabatlariga doir masalalarini o'rganish va masalalar yechish uchun quyidagilarni bilish zarur.

Masalan, agar son 5 ga bo'linasa, u $5q$ ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda q – butun nomanfiy son. Agar son 5 ga bo'linmasa, u qanday ko'rinishga ega bo'ladi? Ma'lumki, agar son 5 ga butun son marta bo'linmasa, u holda uni 4 ga qoldiqli bo'lish mumkin, bunda qolgan qoldiq 4 dan kichik bo'lishi kerak, ya'ni 1,2,3 yoki 4 sonlari bo'lishi kerak. Unda 5 ga bo'lganda qoldiqda 1 qoladigan sonlar $5q - 1$ ko'rinishda; 5 ga bo'lganda qoldiqda 2 qoladigan sonlar $5q - 2$ ko'rinishda; 5 ga bo'lganda qoldiqda 3 qoladigan sonlar $5q - 3$ ko'rinishda; 5 ga bo'lganda qoldiqda 4 qoladigan sonlar $5q - 4$ ko'rinishda bo'ladi. $5q, 5q-1, 5q-2, 5q-3, 5q-4$ ko'rinishdagi sonlar juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydigan, ularning birlashmasi esa butun nomanfiy sonlar to'plami bilan ustma-ust tushadigan to'plamlar hosil qiladi.

3).Bo'linuvchanlik alomatlari

Quyidagicha savol tug'iladi:

O'nli sanoq sistemasida yozilgan biror x sonini a soniga bo'linuvchanligini bevosita (bo'lish ishlarini bajarmasdan) aniqlash mumkinmi?

Ta'rif: O'nli sanoq sistemasida yozilgan x sonini biror a soniga bo'linuvchanligini aniqlash qoidasi bo'linuvchanlik alomatlari deyiladi. O'nli sanoq sistemasida ba'zi bir bo'linuvchanlik alomatlarini qaraymiz:

1) 2 ga bo'linish alomati. x soni 2 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvi 0,2,4,6,8 raqamlaridan biri bilan tugashi zarur va yetarlidir.

Isboti: x soni o'nli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin, ya'ni $x = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$ (1), (bunda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0$ lar

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k \neq 0$ hamda n_0 0,2,4,6,8 qiymatlarni qabul qiladi). U holda $x \nmid 2$ bo'lishini isbotlaymiz.

$10 \nmid 2$ bo'lgani uchun $10^2 \nmid 2, 10^3 \nmid 2, \dots, 10^p \nmid 2$ va demak, $(n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10) \nmid 2$. Shartga ko'ra n_0 ham 2 ga bo'linadi, shuning uchun x ni, ya'ni (1) ni har biri 2 ga bo'linadigan ikki qo'shiluvchining yig'indisi sifatida qarash mumkin.

Demak, yig'indining bo'linuvchanligi haqidagi teorema ko'ra x sonning o'zi ham 2 ga bo'linadi.

Endi teskarisini isbotlaymiz: agar x son 2 ga bo'linasa, uning o'nli yozuvi 0,2,4,6,8 raqamlaridan biri bilan tugaydi.

(1) tenglikni $n_0 = x - (n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10)$ ko'rinishda yozamiz. U holda ayirmaning bo'linuvchanligi haqidagi teorema ko'ra $n_0 \nmid 2$, chunki $x \nmid 2$ va $(n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10) \nmid 2$. bir xonali son 2 ga bo'linishi uchun u 0,2,4,6,8 qiymatlarni qabul qilishi kerak. Bu isbotdan 2ga bo'linish alomatini quyidagicha ham ta'riflash mumkin. o'nli sanoq sistemasida yozilgan sonning faqat va faqat oxirgi raqami juft son bilan tugasa u 2 ga bo'linadi.

2) 5 ga bo'linish alomati. x soni 5 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugashi zarur va etarlidir. Bu alomatning isboti 2 ga bo'linish alomatining isbotiga o'xshaydi.

3) 4 ga bo'linish alomati. x soni 4 ga bo'linishi uchun x sonining o'nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamidan hosil bo'lgan ikki xonali sonning 4 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. x soni o'nli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin, ya'ni $x = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$ bunda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_0$ lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va oxirgi ikkita raqam 4 ga bo'linadigan sonni tashkil qilsin. U holda $x \text{M}$ bo'lishni isbotlaymiz.

Isbot: 100M bo'lgani uchun $(n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_2 \cdot 10^2) \text{M}$. Shartga ko'ra $a_1 \cdot 10 + a_0$ (bu ikki xonali sonning yozuvidir) ham 4 ga bo'linadi. Shuning uchun x ni har biri 4 ga bo'linadigan ikki qo'shiluvchining yig'indisi deb qarash mumkin. Demak, yig'indining bo'linuvchanligi haqidagi teorema ko'ra x sonining o'zi ham 4 ga bo'linadi.

Teskarisini isbot qilamiz, ya'ni agar x soni 4 ga bo'linsa, uning o'nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamdan hosil bo'lgan ikki xonali son ham 4 ga bo'linadi.

(1) tenglikni quyidagicha yozamiz: $n_1 \cdot 10 + n_0 = x - (n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_2 \cdot 10^2)$; $x \text{M}$ va $(n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_2 \cdot 10^2) \text{M}$ bo'lgani uchun ayirmaning bo'linuvchanligi haqidagi teorema ko'ra $(n_1 \cdot 10 + n_0) \text{M}$. Ammo $n_1 \cdot 10 + n_0$ yozuv x sonining oxirgi ikkita raqamidan hosil bo'lgan ikki xonali sonning yozuvidir.

4) 3 va 9 ga bo'linish alomati. Oldin 9 ga bo'linish alomatini qaraymiz. x soni 9 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvidagi raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Avval $10^k - 1$ ko'rinishdagi sonlar 9 ga bo'linishini isbotlaymiz. Haqiqatan, $10^k - 1 = (9 \cdot 10^{k-1} + 10^{k-1}) - 1 = (9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + 10^{k-2}) - 1 = (9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \dots + 10) - 1 = 9 \cdot 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-2} + \dots + 9$. hosil bo'lgan yig'indining har bir qo'shiluvchisi 9 ga bo'linadi, demak, $10^k - 1$ soni ham 9 ga bo'linadi.

x soni o'nli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin, ya'ni $x = n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_1 \cdot 10 + n_0$, bunda $n_k, n_{k-1}, \dots, n_1, n_0$ lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $(n_k + n_{k-1} + \dots + n_0) \text{M}$.

U holda $x \text{M}$ bo'lishini isbotlaymiz. $n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + n_0$ yig'indiga $n + n_{k-1} + \dots + n_0$ ifodani qo'shib va ayirib, natijani bunday ko'rinishda yozamiz:

$$x = (n_k \cdot 10^k - n_k) + \dots + (n_1 \cdot 10 - n_1) + (n_0 - n_0) + (n_k + n_{k-1} + \dots + n_1 + n_0) =$$

$$= n_k \cdot (10^k - 1) + n_{k-1} \cdot (10^{k-1} - 1) + \dots + n_1 \cdot (10^{k-1} - 1) + \dots + n_1 \cdot (10 - 1) + (n_k + n_{k-1} + \dots + n_0)$$

Oxirgi yig'indida har bir qo'shiluvchi 9 ga bo'linadi:

$n_k (10^k - 1) \text{M}$, chunki $(10^k - 1) \text{M}$

$n_{k-1} (10^{k-1} - 1) \text{M}$, chunki $(10^{k-1} - 1) \text{M}$

.....

$n_1 (10 - 1) \text{M}$, chunki $(10 - 1) \text{M}$.

Shartga ko'ra $(n_k + n_{k-1} + \dots + n_0) \text{M}$. Demak, $x \text{M}$. 3 ga bo'linish alomatini qaraymiz. x soni 3 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvidagi raqamlar yig'indisi 3 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

Bu alomatning isboti 9 ga bo'linish alomatining isbotiga o'xshashdir.

Boshqa pozitsion sanoq sistemalarida bo'linuvchanlik alomatlarini qaraymiz. Aytaylik, P sanoq sistemasining asosi bo'lsin.

Agar $P : a$ bo'lsa, u holda $P^2, P^3, \dots, P^p$ ko'rinishdagi barcha sonlar a ga bo'linadi. Shuningdek $X_p P^p + X_{p-1} P^{p-1} + \dots + X_1 P + X_0$ ko'rinishdagi yig'indi ham a ga bo'linadi.

Ta'rif: Agar P a soniga bo'linsa va X P asosli sanoq sistemasida

$$X = X_p P^p + X_{p-1} P^{p-1} + \dots + X_0$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda X soni a ga faqat va faqat X_0 soni a ga bo'linsa bo'linadi.

Masalan, o'n ikkili sanoq sistemasidagi son faqat va faqat uning oxirgi raqami 0,3,6 va 9 bilan tugasa 3 ga bo'linadi.

Umumiy holda $P-1$ ga bo'linuvchanlik alomatini yozamiz.

$X = X_k P^k + X_{k-1} P^{k-1} + \dots + X_1 P + X_0$ soni berilgan bo'lsin, shu sonni $P-1$ ga bo'linuvchanlik alomatini yozamiz

Algebradan bizga tubandagi formula ma'lum.

$$P^p - 1 = (P-1)(P^{p-1} + P^{p-2} + \dots + 1)$$

Bu formuladan n ning ixtiyoriy qiymatida $P^p - 1$ ni $P-1$ ga bo'linishi kelib chiqadi. X sonini quyidagicha yozish mumkin.

$$X = [X_k(P^k - 1) + \dots + X_1(P-1)] + (X_k + X_{k-1} + \dots + X_0)$$

Birinchi qo'shiluvchi $P-1$ ga bo'linadi. Bundan esa quyidagi qoida kelib chiqadi. X soni $P-1$ soniga faqat va faqat uning raqamlarining yig'indisi $P-1$ songa bo'linsa bo'linadi.

Masalan: 6723_8 soni 9 ga bo'linadi, chunki uning raqamlarini yig'indisi $6+7+2+3=18$; 18 esa 9 ga bo'linadi

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Qachon b soni a sonining bo'luvchisi deyiladi?
2. Bo'linuvchanlik munosabati nima?
3. «Berilgan sonning bo'luvchisi» va «bo'luvchi» terminlarining farqi nimada?
4. Bo'linuvchanlik munosabatlarining xossalarini ayting.
5. 2 ga va 3 ga bo'linish alomatlarini aytib, isbotlab bering.
6. 4 ga va 9 ga bo'linish alomatlarini aytib, isbotlab bering.
7. O'nli sanoq sistemasidan boshqa pozitsion sistemalarida bo'linish alomatlarini aytib bering.

KARRALI VA BO'LUVCHILAR

1). Sonlarning eng kichik umumiy karralisi.

Agar a soni b soniga bo'linsa, a soni b ga karrali deyiladi. O soni barcha sonlarga bo'lingani uchun o soni barcha sonlarga karrali. Biz b soniga karrali deganda b soniga natural karralini tushunmog'imiz kerak, ya'ni $b, 2b, \dots, nb$; bularning eng kichigi b hisoblanadi.

Bo'linuvchanlik munosabati xossalarini karralilik xossalari kabi ifodalash ham mumkin.

Masalan, a soni b soniga karrali, b soni esa s ga karrali bo'lsa, a soni s ga karrali bo'ladi. a va b sonlarini olaylik. Agar m soni a sonini ham, b sonini ham karralisi bo'lsa, u holda m soni bu sonlarning umumiy karralisi deyiladi.

a va b sonlarining umumiy karralisi ularning ko'paytmasi ab hisoblanadi, chunki u a ga ham, b ga ham bo'linadi.

a va b sonlarining umumiy karralisi bo'lgan sonlar to'plami, a va b sonlariga karrali sonlar to'plamining kesishmasidan iborat bo'ladi.

Masalan: 3 ga karrali sonlar to'plami A, 4 ga karrali sonlar to'plami B bo'lsin.

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, \dots\}$

$B = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots\}$

A va B to'plamlarining kesishmasi

$A \cap B = \{12, 24, 36, \dots\}$

Bu to'plamning barcha sonlari 3 va 4 ga karrali.

Bu sonlarning ichida eng kichigi 12 soni.

Ta'rif. a va b sonlariga umumiy karrali bo'lgan sonlarni ichida eng kichigiga, bu sonlarning eng kichik umumiy karralisi deyiladi va u $K(a, b)$ bilan belgilanadi.

Masalan, $K(3, 4) = 12$;

Umumiy karralilik xossalari:

1-teorema. Ixtiyoriy ikkita a va b sonlarning umumiy karralisi, u sonlarning eng kichik umumiy karralisiga bo'linadi.

Isboti. Aytaylik $K(a, b) = n$ bo'lsin m soni esa a va b sonlarining umumiy karralisi bo'lsin. Biz $m:n$ ekanini ko'rsatishimiz kerak. m soni n ga bo'linsin va biror r qoldiq qolsin, ya'ni $m = n \cdot q + r$; $r = 0$ ekanini ko'rsatamiz.

m ham, n ham a soniga bo'lingani uchun $r = m - nq$ ham a soniga bo'linadi. Shuningdek, m ham n ham b soniga bo'lingani uchun r ham b ga bo'linadi. Demak, r ham a ga ham b ga bo'linadi. Agar r noldan farqli bo'lsa, u a va b sonlarining umumiy karralisi bo'lishi kerak va u n dan kichik bo'lmasligi kerak, ya'ni $r \leq n$ (n esa a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisi). Buning esa bo'lishi mumkin emas, chunki qoldiq bo'luvchidan katta.

Demak, qoldiq r noldan farqli emas, ya'ni $r = 0$.

Demak, $m = nq$, ya'ni m n ga bo'linadi.

2-teorema. Agar $K(a, b) = n$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy natural s soni uchun $K(as, bs) = ns$ tenglik o'rinli.

Endi bo'luvchi ustida to'xtalamiz. "a sonini b soniga karrali" munosabatiga "b soni a sonining bo'luvchisi" munosabati teskari. Boshqacha aytganda b soni a sonining bo'luvchisi bo'lishi uchun faqat va faqat a soni b soniga karrali bo'lishi kerak.

Agar b soni a sonining bo'luvchisi bo'lsa, $b|a$ ko'rinishida yoziladi. Masalan, $4|16$ yozuvi $16 \div 4$ ni bildiradi.

Bo'linuvchilik munosabatining har bir xossasiga bo'luvchilik munosabati mos keladi.

Masalan, bo'linuvchilik munosabatida tranzitivlik xossa tubandagicha ifodalanadi: agar a b ning bo'luvchisi, b esa s ning bo'luvchisi bo'lsa, u holda a, s ning bo'luvchisi bo'ladi. Har bir son o'zining bo'luvchisi, 1 esa ixtiyoriy sonning bo'luvchisidir.

2). Sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi

1-ta'rif. Agar a va b sonlari s ga bo'linsa, s soni bu sonlarning umumiy bo'luvchisi deyiladi. a va b sonlarining umumiy bo'luvchilarini topish uchun a

soni bo'luvchilari to'plami bilan b soni bo'luvchilari to'plami kesishmasini topish kerak.

Masalan, 16 va 28 sonlarining umumiy bo'luvchilarini toping.

A va B to'plamlar mos ravishda 16 va 28 sonlarining umumiy bo'luvchilarini ifodalasin. U holda

$$A = \{1, 2, 3, 4, 8, 16\}, \quad B = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$$

A I $B = \{1, 2, 4\}$, Demak, 16 va 28 sonlarining umumiy bo'luvchilari 1, 2, 4 sonlari ekan. Aytaylik, a natural son b ga bo'linsin. Ammo a sonining bo'luvchilari soni a dan oshmaydi, shu sababli bo'luvchilari soni chekli bo'ladi. Shunga asosan a va b sonlarining umumiy bo'luvchilari soni chekli va chekli to'plam tashkil etadi.

2-ta'rif. a va b sonlarining umumiy bo'luvchilari ichida eng kattasiga, a va b sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi deyiladi va $D(a, b)$ ko'rinishda belgilanadi. Yuqoridagi misolda $D(16, 28) = 4$ ga teng.

3-ta'rif. Agar a va b sonlari 1 dan boshqa umumiy bo'luvchilarga ega bo'lmasa, ular o'zaro tub deyiladi. Masala: 13 va 15 sonlari uchun $D(13, 15) = 1$.

3). Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo'luvchining xossalari

1-xossa. Agar c soni a va b sonlarining umumiy bo'luvchisi bo'lsa (ya'ni $a = a_1c$; $b = b_1c$), u holda $\lambda = \frac{ab}{c}$ - son a va b sonlarining umumiy karralisi bo'ladi.

Isbot: Shartga ko'ra $a = a_1c$; $b = b_1c$ bo'lganda $\lambda = a_1b$ $\lambda = b_1a$ ekanligini ko'rsatamiz.

$\lambda = \frac{ab}{c}$ dan $\lambda = \frac{a_1cb_1c}{c} = a_1b_1c = b_1(a_1c) = b_1a$; bundan λ ni a ga bo'linishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, $\lambda = a_1(b_1c) = a_1b$: bundan esa λ soni a va b sonlarining umumiy karralisi ekan.

Misol: 6 soni 12 va 18 sonlarining umumiy bo'luvchisi ya'ni, $12 = 6 \cdot 2$; $18 = 6 \cdot 3$.

Bundan $\lambda = \frac{12 \cdot 18}{6} = 36$ soni 12 va 18 sonlarining eng kichik umumiy karralisi bo'ladi.

2-xossa. Agar d soni a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisi bo'lsa (ya'ni $d = K(a, b)$ bo'lsa), u holda $\lambda = \frac{ab}{d}$ soni a va b sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi bo'ladi.

Bu xossa to'g'riligini ko'rsatish oson (buni ko'rsatishni talabalarga mustaqil topshiramiz).

Bu xossadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Ikkita a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisini, uning eng katta umumiy bo'luvchisiga ko'paytmasi shu sonlarning ko'paytmasiga teng.

$$D(a, b) \cdot K(a, b) = \frac{ab}{d} d = ab$$

Xususiyl holda, agar $D(a,b)=1$ bo'lsa, u holda $K(a,b)=a \cdot b$ ga teng.

2-natija: O'zaro tub ikkita natural sonning eng kichik umumiy karralisi shu sonlarning ko'paytmasiga teng.

3-xossa. a va b natural sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi shu sonlarning ixtiyoriy umumiy bo'luvchilariga bo'linadi.

4-xossa. Agar a va b natural sonlar ko'paytmasi $a \cdot b$ m natural soniga bo'linsa hamda m soni a soni bilan o'zaro tub bo'lsa, b soni ham m ga bo'linadi.

5-xossa. Agar a natural soni o'zaro tub bo'lgan b va c sonlarining har biriga bo'linsa, u holda a soni ularning $b \cdot c$ ko'paytmasiga ham bo'linadi.

Bu xossadan natural sonning murakkab sonlarga bo'linish alomatlari kelib chiqadi. Masalan, natural x soni 12 ga bo'linishi uchun u 4 va 3 sonlariga bo'linishi zarur va yetarli.

4). Tub sonlar va ularning xossalari

Har bir son a kamida ikkita bo'luvchiga ega: a sonining o'zi va 1 ;

1-ta'rif. Ikkita bo'luvchiga ega bo'lgan va birdan katta sonlarga tub sonlar deyiladi, boshqacha aytganda, o'ziga va 1 ga bo'linadigan sonlarga tub sonlar deyiladi.

Masalan, 7 tub son, uning bo'luvchilari 7 va 1, 15 soni tub son emas, chunki u 15 va 1 bo'luvchilaridan boshqa 3 va 5 bo'luvchilarga ega.

2-ta'rif. Ikkitadan ortiq har xil bo'luvchilarga ega bo'lgan sonlar murakkab sonlar deyiladi.

1 soni 1 ta bo'luvchiga, ya'ni o'ziga, 0 soni esa cheksiz ko'p bo'luvchilarga ega. Shu sababli 1 va 0 sonlari tub sonlarga ham murakkab sonlar sostaviga ham kiritilmaydi.

Shunday qilib, nomanfiy butun sonlar to'plami Z_0 4 ta sinfga ajratiladi:

- 1) birinchi sinf faqat 0 soni (cheksiz ko'p bo'luvchilarga ega)
- 2) ikkinchi sinf faqat 1 soni (faqat bitta bo'luvchiga ega)
- 3) tub sonlar sinfi (ikkita bo'luvchiga ega)
- 4) murakkab sonlar sinfi (0 dan farqli ikkitadan ortiq bo'luvchilarga ega)

Tub sonlar quyidagi xossalarga ega:

- 1) agar r tub soni 1 dan farqli biror n natural soniga bo'linsa, u n soni bilan ustma-ust tushmasa, u uchinchi bo'luvchiga ega bo'ladi, ya'ni 1, r va n . U holda r tub son emas.
- 2) agar r va q lar har xil tub sonlar bo'lsa, u holda r soni q ga bo'linmaydi.
- 3) agar a natural soni r tub songa bo'linmasa, u holda a va r sonlari o'zaro tub sonlar.
- 4) agar ikkita a va b natural sonlar ko'paytmasi r tub songa bo'linsa, u holda ulardan bittasi shu tub songa bo'linadi.
- 5) agar natural son 1 dan katta bo'lsa, aqalli bitta tub bo'luvchiga ega bo'ladi.
- 6) Murakkab a sonining eng kichik tub bo'luvchisi $\sqrt{a}$ dan oshmaydi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Karrali deganda nimani tushunasiz?
2. Eng kichik umumiy karraliga ta'rif bering.

3. Sonlarning umumiy bo'luvchisini tushuntiring va eng katta umumiy bo'luvchiga ta'rif bering.
4. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo'luvchining xossalarini aytib bering.
5. Tub va murakkab sonlar deb qanday sonlarga aytiladi?

II.2.6. SONLARNI TUB KO'PAYTUVCHILARGA AJRATISH [YOYISH] USULI BILAN ULARNING ENG KATTA UMUMIY BO'LUVCHISI VA ENG KICHIK UMUMIY KARRALISINI TOPISH

1). Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish [yoyish] usuli bilan ularning eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish

Sonni tub sonlar ko'paytmasi ko'rinishida ifodalash bu sonni tub ko'paytuvchilarga ajratish (yoyish) deyiladi. Masalan, $86=2 \cdot 43$ yozuv 86 soni 2, 43 tub ko'paytuvchilarga ajratilganini bildiradi.

Umuman, har qanday murakkab sonni tub ko'paytuvchilarga ajratish mumkin. U qanday usulda ajratilsa ham bir xil yoyilma hosil bo'ladi. (agar ko'paytuvchilar tartibi hisobga olinmasa.). Shuning uchun 86 sonini $2 \cdot 43$ ko'paytma yoki $43 \cdot 2$ ko'paytma ko'rinishida yozish 86 sonini tub ko'paytuvchilarga ajratishning bir xil yoyilmasidir. 436 sonining yoyilmasini qaraymiz.

$$\begin{array}{r|l} 436 & 2 \\ 218 & 2 \\ 109 & 109 \\ 1 & \end{array}$$

Bir xil ko'paytuvchilarni ko'paytmasining darajasi qilib yozish qabul qilingan. $436=2^2 \cdot 109$ sonining bunday yozilishi uning kanonik ko'rinishi deyiladi. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish ularning eng katta umumiy bo'luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topishda ishlatiladi.

Masalan, 1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topaylik. Bu sonlarning har birini kanonik ko'rinishda yozamiz.

$$\begin{array}{ll} 1800=2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 & 244=2 \cdot 2 \cdot 61 = 2^2 \cdot 61 \\ 900 & 122 \\ 450 & 61 \\ 225 & 1 \\ 75 & \\ 25 & \\ 5 & \\ 1 & \end{array}$$

1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisining tub ko'paytuvchilarga yoyilmasiga berilgan sonlar yoyilmasidagi barcha umumiy tub ko'paytuvchilar

kirishi va bu tub ko'paytuvchilarning har biri berilgan sonlarning yoyilmalaridagi eng kichik ko'rsatkichi bilan olinishi kerak. Shuning uchun 1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisining yoyilmasiga 2^2 kiradi. Demak, $D(1800,244)=2^2=4$ 1800 va 244 sonlarining eng kichik umumiy karralisining tub ko'paytuvchilarga yoyilmasiga berilgan sonlar yoyilmasining hech bo'lmaganda bittasida bo'lgan hamma tub ko'paytuvchilar kirishi va bu tub ko'paytuvchilarning har biri shu yoyilmalardagi eng katta darajasi bilan olinishi kerak. Shuning uchun 1800 va 244 sonlarning eng kichik umumiy karralisining yoyilmasiga $2^3, 3^2, 5^2, 61$ ko'paytuvchilar kiradi. Demak, $K(1800, 244)=2^3 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 61=109800$

Umuman, berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisini topish uchun:

1) berilgan har bir sonni kanonik ko'rinishda yozamiz; 2) berilgan sonlar yoyilmasidagi hamma tub ko'paytuvchilar ko'paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko'paytuvchini berilgan sonlar yoyilmasiga kirgan eng katta ko'rsatkichi bilan olamiz; 3) bu ko'paytmaning qiymatini topamiz – u berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisi bo'ladi. Bir nechta misol qaraymiz:

1-misol. 60, 252, 264 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topamiz.

Har bir sonni kanonik ko'rinishda yozamiz:

$$60=2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 252=2^2 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 264=2^3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini topish uchun berilgan yoyilmalardagi umumiy tub ko'paytuvchilar ko'paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko'paytuvchini berilgan sonlarning yoyilmasiga kirgan eng kichik ko'rsatkichi bilan olamiz. $D(60,252,264)=2^2 \cdot 3=12$

Berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisini topish uchun berilgan sonlarning yoyilmasidagi hamma ko'paytuvchilar ko'paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko'paytuvchini berilgan sonlar yoyilmasiga kirgan eng katta ko'rsatkichi bilan olamiz: $K(60,252, 264)=2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11=27720$

2-misol. 48 va 245 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topamiz. Har bir sonni kanonik ko'rinishda yozamiz. $48=2^4 \cdot 3$; $245=5 \cdot 7^2$.

Berilgan sonlar yoyilmasida umumiy ko'paytuvchilar bo'lmagani uchun $D(48, 245)=1$. $K(48,245)=48 \cdot 245=10760$

2). Eratosfen g'alviri

Matematiklar tomonidan tub sonlarni ifodalovchi bir qancha jadvallar tuzilgan. Bu jadvallardan foydalanilsa, har bir sonning tub yoki murakkabligini tekshirib o'tirish shart emas. Eramizdan oldingi III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi va astronomi Eratosfen, tub sonlarni aniqlashning oddiy usulini, ya'ni ma'lum qoidaga ko'ra sonlarni o'chirishga asoslangan usulini yaratdi.

Bu metodni qo'llaganda o'chirilgan sonlar o'rni bo'sh qoladi, boshqacha aytganda murakkab sonlar tushib, tub sonlar qoladi, shu sababli bu metodni Eratosfen galviri deb ataganlar. Bu metodning mohiyati quyidagicha. Dastlab 2 dan n gacha barcha natural sonlar yoziladi. Shundan keyin 2 soni qoldirilib, 2 ga karrali sonlar o'chiriladi.

Masalan: $n = 30$ deb olsak, quyidagi jadval hosil bo'ladi:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

Jadvaldan 2 sonidan boshqa 2 ga bo'linadigan sonlar o'chirilgan, bundan esa qolgan sonlarni eng kichik tub bo'luvchisi 2 dan katta ekanligi ko'rinadi.

Jadvalda 2 dan keyin o'chirilmagan son 3. 3 sonini o'zini qoldirib, jadvaldan 3 ga bo'linuvchi sonlarni o'chiramiz.

2, 3, 5, 7, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 25, 29.

(ba'zi bir sonlar ikki martadan chizildi)

2 va 3 dan boshqa qolgan sonlar 2 ga ham 3 ga ham bo'linmaydi.

Kelgusi bosqichda 5 sonini qoldirib 5 ga karrali sonlarni o'chiramiz. U holda jadval quyidagi ko'rinishga keladi.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27, 29.

Uch marta chizilgandan keyin qolgan sonlar 2,3 va 5 ga bo'linmaydi. Tub sonlar quyidagilar:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29;

Eratosfen metodi berilgan n natural sonidan oshmaydigan tub sonlarni topishga imkon beradi. Ammo u bu tub sonlar soni cheklimi yoki cheksizmi degan savolga javob bera olmaydi. Bu savolga eramizdan oldin III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi Evklid javob berdi. U tub sonlar to'plami cheksizdir degan tasdiqni isbotladi va u Evklidning tub sonlar haqidagi teoremasi nomi bilan yuritiladi. Bu teorema isbotini ko'raylik.

Teorema. Tub sonlar to'plami cheksiz.

Isbot. Teorema isbotini teskarisidan boshlaymiz. Faraz qilaylik tub sonlar to'plami chekli, u $r_1, r_2, \dots, r_p$ sonlardan iborat bo'lsin. Bu sonlar ko'paytmasini hosil qilib unga 1 sonini qo'shaylik, ya'ni $a = r_1 \cdot r_2 \dots r_p + 1$:

Bu son yo murakkab, yoki tub son bo'lishi mumkin. Bu son tub son emas, chunki u $r_1, r_2, \dots, r_p$ sonlardan katta, biz esa shu sonlardan boshqa tub son yo'q deb faraz qilganmiz. Ikkinchi tomondan, a soni murakkab son bo'lsa, u kamida bitta tub ko'paytuvchiga ega bo'lishi kerak va bu tub ko'paytuvchi $r_1, r_2, \dots, r_p$ lardan bittasi bo'lishi kerak. a soni esa bu sonlardan bittasiga ham bo'linmaydi (bo'linganda ham 1 qoldiqqa ega). Bu esa bizning farazimizga qarama-qarshi. Demak tub sonlar to'plami cheksiz.

3). Natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasi

Bizga ma'lumki maktabda o'quvchilar natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajrata oladilar.

Masalan, $124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ammo maktab matematika kursida ixtiyoriy murakkab son uchun tub ko'paytuvchilarga ajratish mavjudmi va ajratish usuli bir xilmi, degan savolga javob berilmagan. Bu savolga natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasi deb ataluvchi quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. Ixtiyoriy murakkab sonni yagona usulda tub sonlar ko'paytmasi shaklida ifodalash mumkin.

Isbot. Teorema isboti ikki qismdan iborat:

1) ixtiyoriy natural son uchun tub sonlar ko'paytmasi mavjudmi?

2) ko'paytma mavjud bo'lsa, u yagonami?

Birinchi qismini isbot qilamiz. Faraz qilamiz tub ko'paytuvchilarga ajralmaydigan murakkab son mavjud. U holda shunday sonlar to'plami A da eng kichik a soni

bor. A to'plamdagi hamma sonlar murakkab bo'lgani uchun, a sonini ikkita a_1 va a_2 sonlar ko'paytmasi shaklida yozish mumkin. a_1 va a_2 larni har biri a dan kichik.

$a_1 < a$; $a_2 < a$; a_1 va a_2 sonlari a dan kichik bo'lgani uchun ular A to'plamga tegishli emas. Shuning uchun ular tub sonlar yoki ular tub sonlar ko'paytmasiga ajraladigan sonlar.

Agar $a_1 = r_1 \dots r_m$ va $a_2 = q_1 \dots q_n$ bo'lsa, (bu yerda $r_1, \dots, r_m$ va $q_1, \dots, q_n$ lar tub sonlar). U holda $a = a_1 \cdot a_2 = r_1 \dots r_m q_1 \dots q_n$

a sonini tub ko'paytuvchilarga ajratilmaydi degan farazimizga zid. Demak, murakkab sonni tub sonlar ko'paytmasi shaklida ifodalash mavjud.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz.

Murakkab sonni tub sonlar ko'paytmasi shaklida ifodalash mumkin va u bir qiymatli aniqlanganligini ko'rsatamiz.

Boshqacha aytganda, murakkab sonni ikki xil tub ko'paytuvchilarga ajratish bir-biridan ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashinuvi bilan farq qilishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, ikki xil tub ko'paytuvchilarga ajratilgan natural sonlar mavjud. Bu sonlar to'plamini A bilan belgilaymiz. Farazga ko'ra A to'plam bo'sh to'plam emas, unda eng kichik a son mavjud. Shartga ko'ra quyidagi tub ko'paytuvchilarga egamiz.

$$a = r_1 \dots r_m; \quad a = q_1 \dots q_n$$

U holda $r_1 \dots r_m = q_1 \dots q_n \dots (1)$

(1) tenglikni o'ng tomoni tub q_1 soniga bo'linadi, u holda chap tomoni ham q_1 soniga bo'linadi, ya'ni chap tomondagi ko'paytuvchilardan biri bo'linadi.

Agar $r_1 q_1$ ga bo'linadi desak, u holda $r_1 = q_1$ bo'ladi. (1) tenglikni ikkala tomonini r_1 ga qisqartiramiz.

U holda $c = r_2 \dots r_m = q_2 \dots q_n$ tenglikka ega bo'lamiz. bu yerda $c = a : r_1$; $r_1 > 1$ bo'lsa, u holda $c < a$ bo'ladi.

Farazimizga ko'ra a eng kichik son va ikki xil tub ko'paytuvchilarga ega. Demak, c bitta tub ko'paytuvchilarga ega bo'lib, $c = r_2 \dots r_m = q_2 \dots q_n$ tub ko'paytuvchilar ajratmasi bir-biridan ko'paytuvchilar tartibi bilan farq qiladi. Bu esa tub ko'paytuvchilarga ajratish turlicha degan farazimizga zid.

Demak, tub ko'paytuvchilarga ajratish yagonadir.

Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratishdagi yoyilmada tub sonlar tub sonlarni o'sish tartibida joylashtiriladi.

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$a = P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n} \text{ yoyilmaga 2 dan boshlab } P_p \text{ gacha barcha tub sonlar kiradi.}$$

Agar yoyilma o'rtasida tub sonlar tushib qolsa, umumiylikni buzmasdan, ularni 0 ko'rsatkichli qilib yoziladi.

$$\text{Masalan: } 726 = 2 \cdot 3 \cdot 11^2 = 2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^2$$

4). Evklid algoritmi

Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish usuli bilan ularning eng katta umumiy bo'luvchisini topish ba'zan qator qiyinchiliklarga olib keladi. Masalan 6815 sonini tub ko'paytuvchilarga ajratishda birinchi bo'luvchi 5 ni topib, 1363 sonini hosil qilamiz, bu sonning eng kichik bo'luvchisi 29 ga teng. Ammo 29 ni

topish uchun 1363 sonining 2 ga, 3 ga, 5 ga, 7 ga, 11 ga, 13 ga, 17 ga, 19 ga, 23 ga, 29 ga bo'linish-bo'linmasligini tekshirishimiz kerak, bunda 1363 soni faqat 29 gagina butun son marta bo'linadi. Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini qiyinchiliklarsiz topish usuli mavjud.

Buning uchun ikki son umumiy bo'luvchisining bitta muhim xossasini eslaymiz. Masalan, 525 va 231 sonlarini olamiz va 525 ni 231 ga qoldiqli bo'lamiz: $525=231 \cdot 2+63$.

525 va 231 sonlarining umumiy bo'luvchilari to'plamini A orqali, 231 va 63 sonlarining umumiy bo'luvchilari to'plamini B orqali belgilaymiz va $A=B$ ni isbotlaymiz, boshqacha aytganda 525 va 231 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo'luvchisi 231 va 63 sonlarining umumiy bo'luvchisi ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan, agar $525:d$ va $231:d$ bo'lsa, ayirmaning bo'linuvchanligi haqidagi teorema ko'ra $63:d$ ni hosil qilamiz. Agar $525=231 \cdot 2+63$ tenglikni $63=525-231 \cdot 2$ ko'rinishida yozsak, bunga oson ishonch hosil qilish mumkin. Shunday qilib, 525 va 231 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo'luvchisi 231 va 63 sonlarining umumiy bo'luvchisi bo'ladi, ya'ni $A \subset B$. Aksincha, agar 231 va 63 sonlarining umumiy bo'luvchisi, ya'ni $231:t$ va $63:t$ bo'lsa, yig'indining bo'linuvchanligi haqidagi teorema ko'ra $525:t$ bo'ladi. Demak, 231 va 63 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo'luvchisi 525 va 231 sonlarining ham umumiy bo'luvchisi bo'lar ekan, ya'ni $B \subset A$.

Teng to'plamlar ta'rifiga ko'ra $A=B$. Ammo agar berilgan sonlar juftining umumiy bo'luvchilari to'plami bir xil bo'lsa, ularning eng katta umumiy bo'luvchisi ham teng bo'ladi, ya'ni $D(525, 231)=D(231, 63)$.

Umuman, agar a va b – natural sonlar hamda $a=bq+r$ bo'lsa, $D(a,b)=D(b, r)$ bo'ladi, bunda $r < b$.

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan xususiy holning isboti kabi. Bu xossaning muhimligi nimada? Bu xossa a va b sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisini topishda bu sonlarni kichik sonlarga almashtirishga imkon yaratadi, bu esa hisoblashlarni osonlashtiradi. Bunday almashtirishni bir necha bor bajarish mumkin. Masalan, 525 ni 231 ga qoldiqli bo'lib, qoldiqda 63 ni hosil qilamiz. Demak, $D(525, 231)=D(231, 63)$. 231 ni 63 ga qoldiqli bo'lamiz: $231=63 \cdot 3+42$, ya'ni $D(231, 63)=D(63, 42)$.

63 ni 42 ga qoldiqli bo'lamiz: $63=42 \cdot 1+21$. Demak, $D(63,42)=D(42,21)$. 42 ni 21 ga qoldiqli bo'lganda qoldiqda 0 hosil qilamiz, ya'ni $D(42, 21)=D(21,0)$. 21 bilan 0 ning eng katta umumiy bo'luvchisi 21 ga teng. Demak, 21 soni 525 va 231 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi bo'ladi, chunki $D(525, 231)=D(231, 63)=D(63,42)=(42, 21)=D(21, 0)=21$.

Biz bajargan hisoblashlar ko'pincha bunday yoziladi:

$$525 = 231 \cdot 2 + 63$$

$$231 = 63 \cdot 3 + 42$$

$$63 = 42 \cdot 1 + 21$$

$$42 = 21 \cdot 2 + 0$$

$$D(525,231)=21.$$

Eng katta umumiy bo'luvchini topishning ko'rilgan usuli qoldikli bo'lishga asoslangan. Bu usulni birinchi marta qadimgi grek matematigi Evklid (eramizgacha III asr) yaratgan va shuning uchun u Evklid algoritmi nomi bilan yuritiladi. Evklid algoritmini umumiy ko'rinishda bunday ifodalash mumkin: a va b – natural sonlar hamda $a > b$ bo'lsin. a soni b soniga qoldikli bo'linadi, keyin b soni qolgan qoldiqqa qoldikli bo'linadi, so'ngra birinchi qoldiq ikkinchi qoldiqqa qoldikli bo'linadi va hokazo, u holda oxirgi holdan farqli qoldiq a va b sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'ladi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish yo'li bilan eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topishni misollar yordamida tushuntirib bering.
2. Tub sonlarni aniqlashdagi Eratosfen g'alviri metodini tushuntiring.
3. Natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasini ifodalang va isbotlab bering.
4. Sonlarni eng katta umumiy bo'luvchisini topishni, Evklid algoritmini tushuntirib bering.