



**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIIY VA O'RTA
MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**



**BUXORO OZIQ-OVQAT VA ENGIL SANOAT
TEXNOLOGIYASI INSITUTI**

«OLIIY MATEMATIKA» kafedrasi

**«Oliy matematika»
fanidan**

MA'RUZALAR TO'PLAMI

(I–qism)

BUXORO–2011

Ushbu ma'ruzalar matnlari "Oliy matematika" kafedrasining 2010 yil 29 avgust kungi yig'ilishida (majlis bayoni №1) va institut o'quv-uslubiy kengashining 2010 yil 13 noyabr kungi majlisida (majlis bayoni № 2) muhokama etildi va chop etishga tavsiya qilindi.

MUALLIFLAR:

RASULOV N.P. **Bux OO va YESTI "Oliy matematika"**
kafedrasi dotsenti

TAQRIZCHILAR:

MA'MUROV B. **BuxDU kafedra mudiri, dotsent.**

OCHILOV Sh.B. **Bux OO va ESTI "Menejment"**
kafedrasi dotsenti

MUHARRIR:

MADRAXIMOV X.S. **Bux OO va YESTI "Oliy matematika"**
kafedrasining dotsenti.

Ushbu to'plamda "Iqtisodchilar uchun matematika" fanining ishchi o'quv dasturidagi to'plamlar nazariyasi, matematik mantiq, chiziqli algebra, vektorlar algebrasi va analitik geometriya bo'limlari bo'yicha 25 ta ma'ruzalar matni, adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

MUNDARIJA:

Kirish.....	4
1-ma'ruza. Matematikaning asosiy rivojlanish bosqichlari. Hozirgi zamon matematikasining tarkibi, ahamiyati va tadbiqlari.....	5
2-ma'ruza. To'plamlar va ular ustida amallar.....	11
3-ma'ruza. Kombinatorika elementlari.....	15
4-ma'ruza. Matematik mantiq haqida tushuncha. Mulohazalar va ular ustida amallar.....	19
5-ma'ruza. Mulohazalar algebrasi.....	22
6-ma'ruza. Matritsalar va ular ustida amallar.....	25
7-ma'ruza. Aniqllovchilar va ularning xossalari.....	30
8-ma'ruza. Chiziqli tenglamalar sistemasini.....	35
9-ma'ruza. Chiziqli tenglamalar sistemasini echishning Kramer va Gauss usullari.....	41
10-ma'ruza. Teskari matritsa. Tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish.....	47
11-ma'ruza. Vektorlar va ular ustida amallar.....	51
12-ma'ruza. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi, uning xossalari va tadbiqlari.....	56
13-ma'ruza. Vektorial ko'paytma, uning xossalari va tadbiqlari.....	59
14-ma'ruza. Vektorlarning aralash ko'paytmasi, uning xossalari va tadbiqlari.....	63
15-ma'ruza. Ko'p o'lchovli vektor va vektor fazo.....	67
16-ma'ruza. Chiziqli operatorlar, ularning xos vektorlari va xos qiymatlari.....	71
17-ma'ruza. Tekislikda analitik geometriya. To'g'ri chiziq tenglamalari.....	76
18-ma'ruza. To'g'ri chiziqning turli tenglamalari.....	79
19-ma'ruza. To'g'ri chiziqlarga doir ayrim masalalar.....	84
20-ma'ruza. Ikkinchi tartibli chiziklar. Aylana va ellips.....	87
21-ma'ruza. Giperbola va parabola.....	92
22-ma'ruza. Fazoda tekislik tenglamalari.....	97
23-ma'ruza. Tekislik tenglamalariga doir masalalar.....	101
24-ma'ruza. Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalari.....	105
25-ma'ruza. Fazodagi to'g'ri chiziq tenglamalarga doir masalalar.....	108
Adabiyotlar.....	113

Kirish

Mamlakatimizda qabo'l qilingan va amalga oshirilayotgan "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" bo'yicha ta'lim islohotining II bosqichidagi eng asosiy vazifa - tayyorlanayotgan mutaxassislarning sifatini oshirishdan iboratdir.

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamonaviy kadrlar tayyorlashda ularga beriladigan matematik bilimlar katta ahamiyatga ega. Shu sababli iqtisod yo'nalishlari bo'yicha ta'lim oluvchi bakalavrlarning o'quv rejalarida «Iqtisodchilar uchun matematika» fanini o'qitish ko'zda tutilgan. Talabalar uchun bu fanni o'qitishda ushbu maqsadlar qo'yiladi:

1. Kasbiy faoliyat uchun etarli hajmda matematik bilimlar va usullar haqida tushunchalar va ko'nikmalar hosil qilish.
2. Abstrakt va mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini hosil qilish va rivojlantirish.
3. Matematika va uning iqtisodiy tadbirlari bo'yicha adabiyotlarni mustaqil o'rganish orqali bilimlar doirasini kengaytirish olish.
4. Iqtisod ixtisosligi bo'yicha umumkasbiy va maxsus fanlarni o'zlashtirish uchun kerakli matematik poydevorni hosil qilish.
5. Kasb faoliyati jarayonida paydo bo'ladigan amaliy masalalarning matematik modellarini ishlab chiqish va uni tahlil etib, tegishli xulosalar chiqarish.

«Iqtisodchilar uchun matematika» fani quyidagi asosiy bo'limlardan iborat:

1. To'plamlar nazariyasi.
2. Matematik mantiq.
3. Chiziqli algebra
4. Vektorial algebra.
5. Analitik geometriya.
6. Differentsial hisob.
7. Integral hisob.
8. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar.
9. Oddiy differentsial tenglamalar.
10. Sonli va darajali qatorlar.

Ushbu ma'ruzalar to'plamida «Iqtisodchilar uchun matematika» fanining to'plamlar nazariyasi, matematik mantiq, chiziqli algebra, vektorial algebra, analitik geometriya bo'limlari bo'yicha fanni ishchi o'quv dasturida ko'zda tutilgan mavzular yoritilgan.

1 - MA'RUZA

MATEMATIKANING ASOSIY RIVOJLANISH BOSQICHLARI. HOZIRGI ZAMON MATEMATIKASINING TAR- KIBI, AHAMIYATI VA TADBIQLARI .

Ma'ruza rejası:

1. Matematika fanining predmeti.
2. Matematika fanini abstraktligi.
3. Matematikaning shakllanish davri.
4. Elementar matematika davri.
5. Urta Osiyoda elementar matematika tarakkiyoti.
6. Oliy matematika davri.
7. Hozirgi zamon matematikasi.
8. O'zbekiston matematika maktabi.
9. Matematikaning amaliyotdagi ahamiyati va qo'llanilishi.

Adabiyotlar:

[9]bob. 4-24 bet, 114-123 bet, [14]bob. 5-8 bet.

Eng avvalo “Matematika” fani nimani o'rgatadi? degan savolni qo'yamiz. Bu juda murakkab savol bo'lib, o'nga ta'lim darajasi turli bo'lgan odamlar turli javoblar beradilar. Masalan, boshlang'ich sinf o'quvchilari matematika-narsalarni sanash qoidalarini o'rgatadi deb javob beradilar va bu javobni noto'g'ri deb bo'lmaydi. Chunki bu matematikaning muhim qismi bo'lmish arifmetikani mohiyatini tashkil etadi va u dastlabki tarixiy davrlarda matematikani to'lik o'z ichiga olgan. O'rta sinf o'quvchilari bu javobga matematikani chiziqlar, figuralar, jismlarni, ya'ni geometrik ob'ektlarni ham o'rganadi deb qo'shimcha qiladilar. Yuqori sinf o'quvchilari esa bu savolga matematika funktsiyalarni o'rganishini ham ilova qiladilar. Talabalar oliy o'quv yurtlarida matematikaning differentsial tenglamalar, ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika kabi yangidan-yangi bo'limlarini o'rganadilar va shu sababli ularning javoblari o'quvchilar javobiga nisbatan kengroq va to'laroq bo'ladi.

Ammo barcha bu javoblar bir tomonlama xarakterga ega bo'lib, matematikaning u yoki bu yunalishlarini ifodalaydi. Bu savolga umumiy holda javob berish uchun juda ko'p matematiklar, faylasuflar harakat qilganlar. Hozircha bu savolga eng qoniqarli javob XX asrning buyuk matematigi **A.N.Kolmogorov** (1903-1987) tomonidan keltirilgan va quyidagicha ifodalanadi.

T A' R I F: Matematika haqiqiy olamning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalari haqidagi fandir.

Matematika so'zi grek tilidan olingan bo'lib, miqdorlar haqidagi fan degan ma'noni bildiradi.

Matematika boshqa tabiiy fanlardan shu bilan farq qiladiki, u real olamni, atrofimizdagi ob'ekt va jarayonlarni abstraktlashtirilgan holda o'rganadi va shu sababli uning natijalari umumiy xarakterga ega.

Masalan, biologiya tirik hayotni o'rganuvchi fan bo'lib, unda qo'llaniladigan usullar xususiy xarakterga va bu usullarni fizikaga yoki tilshunoslikga tadbqiq etib bo'lmaydi. Xuddi shunday gaplarni fizika, ximiya, geologiya va boshqa fanlar tug'risida aytish mumkin.

Ammo arifmetikaning qonun – qoidalarini biologiya ob'ektlariga ham, fizik-ximik tadqiqotlarga ham, iqtisodiy masalalarni echishda ham, qishloq xo'jaligida ham bir xil muvaffaqiyat bilan qo'llash mumkin. Shu sababdan ham XIX asrning buyuk matematigi **Gauss** «Arifmetika - matematikaning podshohidir, matematika esa barcha fanlarning podshohidir.» -deb bejiz aytmagan.

Albatta, matematika bunday ulkan bahoga erishishi uchun uzoq taraqqiyot yo'lini bosib o'tishga to'g'ri kelgan. **A.N.Kolmogorov** o'zining 1954 yilda qobusnoma uchun yozilgan va “Matematika “ deb atalgan maqolasida bu taraqqiyotni ushbu to'rt davrga ajratadi.

I. Matematikaning shakllanish davri.

II. Elementar matematika davri.

III. O'zgaruvchi miqdorlar matematikasi davri. Bu davrni shartli ravishda “Oliy matematika “davri deb ham aytish mumkin.

IV. Hozirgi zamon matematikasi davri.

Shuni ta'kidlab utish kerakki, har bir keyingi davrda elementar matematikani rivojlanishi to'xtab qolgan emas.

I. Matematikaning shakllanish davri eramizdan oldingi VI-V asrgacha davom etdi. Bu davrda insoniyat turli predmetlarni sanashni o'rgandi. Sanoq sistemalari oldin og'zaki holda ishlatilgan. Yozma sanoq sistemalarini kashf etilishi bilan natural sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish qonun-qoidalarini topila boshlandi. Yullarni uzunligini o'lchash, daromadlarni va etishtirilgan hosilni taqsimlash kabi masalalar natijasida kasr sonlar tushunchasi va ular ustida arifmetik amallar bajarish qoidalarini ishlab chiqildi.

Natijada, eng qadimiy matematik fan- arifmetikaga asos solindi. Maydonlarni o'lchash, jismlar hajmlarini hisoblash, turli ish qurollarini yaratishga ehtiyoj paydo bo'lishi bilan geometriyaning kurtaklari shakllana boshlandi. Shunisi qiziqqi, bu jarayonlar turli xalqlarda bir-biriga bog'likmas ravishda, parallel ko'rinishda amalga oshdi.

Ayniqsa bu jarayonlar Misr va Vavilon davlatlarida yaqqol namoyon bo'ldi.

II. Elementar matematika davri eramizdan oldingi V asrdan boshlab XVII asr boshlarigacha davom etdi. Oldingi davrdagi matematik bilimlar tarqoq, xususiy ko'rinishdagi natijalardan, qonun-qoidalaridan iborat edi. Ularni birlashtirish, umumiy ko'rinishga keltirish qadimgi Gretsiyadan boshlandi va matematika fanini ilmiy poydevoriga asos solindi.

Evklidning “**Neqizlar**” asarida elementar geometriya fani aksiomatik ravishda ifodalandi va bu asar 2 ming yil davomida boshqa matematik fanlarni asosini yaratishga misol, namuna sifatida xizmat qilib keldi. Qadimgi Gretsiyada matematikaning (asosan geometriyani) rivojlanishiga **Pifaqor, Aristotel, Arximed, Geron, Diofant,**

Ptolomey kabi mutafakkirlar katta hissa qo'shdilar. Turli gidrotexnik ko'rilishlar (masalan, Arximed vinti), harbiy mashinalar, Arximedni tosh otuvchi qurilmalari, oynalar sistemasida kemalarni yondirib yuborish, dengizda suzish uchun kerakli bilimlar, geodeziya va kartografiya, astronomik kuzatishlar bilan bog'lik masalalar matematikani rivojlanishiga katta turtki bo'ldi.

Kurilayotgan davrning IX-XV asrlari davomida matematikaning rivojlanishiga O'rta Osiyo olimlarining hissasi katta bo'ldi. Bu vaktida arablar juda ko'p yerlarni bosib olib, arab xalifaligiga birlashtirdilar. Bu yerlarda olimlar yagona arab tilidan foydalana boshladilar va bu ular orasidagi aloqalarni mustahkamlanishiga olib keldi. Bundan tashqari o'sha davrda katta ilmiy tadqiqodlar davlat tomonidan moliyalashtirila boshlandi. Bu omillar bu yerda ilmni rivojlanishiga, katta kutubxonalar tashkil etilishiga, rasadxonalar qurilishiga olib keldi.

IX asrda yashab ijod etgan xorazmlik olim Muhammad ibn Muso al Xorazmiy birinchi bo'lib o'zining "Aljabr" asarida algebra faniga asos soldi. Yevropalik olimlar bu kitob orqali kvadrat tenglamalarni echish usuli bilan tanishdilar. X asrda Beruniy $x^3+1=3x$ ko'rinishdagi kub tenglamani taqribiy yechish usulini topdi. XI-XII asrda yashagan Umar Xayyom kub tenglamalarni umumiy holda tekshirdi, ularni sinflarga ajratdi va echilish shartlarini topdi. XIII asrda ijod etgan ozarbayjon matematigi Nasriddin Tusiy sferik trigonometriyani asos solinishiga yakun yasadi va Evklidning "Negizlar" kitobini arab tiliga tarjima qildi. XV asrda buyuk astronom va matematik Mirzo Ulugbek (1394-1449) "Ziji Kuragoniy" asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini nihoyatda katta aniqlik bilan hisoblab berdi. Bu ishda rasadxonada eng zamonaviy aniq asboblardan foydalanilgani bilan bir qatorda yirik matematiklar ham ishlaganini ko'rsatib utish kerak. Ulardan eng mashhuri G'iyosiddin Jamshid ibn Masud ali Qushchi bo'lib hisoblanadi. U o'nli kasrlar ustida arifmetik amallar bajarish qonun-qoidalarini batafsil bayon qilib berdi (o'ngacha O'rta Osiyoda asosan oltmishlik sanoq sistemasi qo'llanilgan). Yevropada bu natijalarga atigi XVI asrda erishildi. Ali Qushchi Nyuton binomi formulasini natural sonlar uchun og'zaki ko'rinishda ifodaladi, "Aylana haqidagi risola" asarida (sonini 17 xona aniqliqda hisobladi, astronomik hisoblashlar uchun kerak bo'lgan sinuslar jadvalini tuzish uchun tenglamalarni iteratsion usulda sonli yechish yo'lini ko'rsatdi).

Hindistonning matematikaga qo'shgan eng katta hissasi-unli sanok sistemasi uchun raqamlar va nolni kashf etilishidir. Bu raqamlar yevropaliklarga arab matematiklari asarlari orqali ma'lum bo'lgani uchun hozirgi paytda notug'ri ravishda «arab raqamlari» deb ataladi.

Elementar matematikaning rivojlanishiga Xitoy olimlarining ham katta ulushi bor.

XII-XV asrlar davomida Garbiy Yevropa matematiklari asosan qadimgi Gretsiya va Sharq matematiklarining ishlarini o'rganish bilan shug'ullanib kelganlar, matematik bilimlarni ommalashtirish maqsadida turli asarlar yozganlar, matematik simvollarni kashf etganlar. Ammo XVI asrdan boshlab bu yerlik olimlar tomonidan yirik kashfiyotlar qilina boshlandi va yuksalish davri boshlandi. Masalan, polyak olimi Kopernik ning astronomik kashfiyoti, italiyalik olim Galileyning mexanika bo'yicha qator kashfiyotlari matematikani rivojlanishiga turtki bo'ldi.

Italiyalik matematiklar Tartaliya, Ferrari, Kardano uchinchi va to'rtinchi tartibli algebraik tenglamalarni echish usullarini topdilar (oldin bu tenglamalar taqribiy yechilar edi.) Frantsuz matematigi Viet n- darajali tenglama ildizlari bilan uning koeffitsientlari orasidagi munosobatlarni topdi.

III. Oliy matematika davri XVII asrdan boshlandi. Elementar matematikada kattaliklar va geometrik ob'ektlar ko'zgalmas, o'zgarmas miqdorlar kabi qaralar edi. Matematikada endi harakatlanuvchi va o'zgaruvchi miqdorlarni qurishga to'g'ri kela boshladi. Masalan, Boyl-Mariot (1662) gaz hajmi bilan uning bosimi o'rtasida o'zaro bog'lanish mavjud ekanligini, Guk (1660) esa qattik jismning deformatsiyalanishi ε va kuchlanishi σ orasida $\sigma = \alpha \varepsilon$ ko'rinishdagi chiziqli bog'lanish mavjud ekanligini aniqladilar. Bu qonunlarda ikki o'zgaruvchi miqdor orasidagi o'zaro bog'lanishni o'rganishga to'g'ri keldi va bunday bog'lanishlar funktsiya tushunchasiga olib keldi. Elementar matematikada (arifmetikada) son qanday asosiy ahamiyatga ega bo'lsa, oliy matematikada funktsiya shunday asosiy ahamiyatga egadir. Funktsiyalarni o'rganish matematik tahlil degan fanga olib keldi. Bu fanda limit, hosila, integral kabi tushunchalar kiritildi. Nemis matematigi Leybnits 1682-1686 yillarda va ingliz matematigi, mexanigi Nyuton 1665-1666 yillarda differentsial va integral hisobni kashf etdilar.

Bu davrda matematikani rivojlanishiga Dekart, Fure, Paskal, Ferma, Gyuy-gents, Bernulli, Eyler, Laqranj, Dalamber, Koshi kabi buyuk olimlar katta hissa qo'shdilar. Bu davrda matematik tahlilni rivojlantirish bilan bir qatorda analitik geometriya, differentsial tenglamalar, ehtimollar nazariyasi kabi yangi fanlarga asos solindi.

IV. Hozirgi zamon matematikasi davri XIX asr boshidan hisoblanadi. Oldingi davrlarda matematikaning rivojlanishi amaliy masalalarni echish natijasida amalga oshgan bo'lsa, endi matematika o'z ichki qonuniyatlari bo'yicha ham rivojlanish boshladi. Bu rivojlanish oldin topilgan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon yutuqlari asosida qayta ko'rib chiqish, tahlil etish kabi yunalishlarda amalga oshadi. Masalan, $x^2 - 1 = 0$ kvadrat tenglama $x = \pm 1$ ildizga ega ekanligi malum, ammo o'nga juda o'xshash $x^2 + 1 = 0$ tenglama haqiqiy sonlar ichida ildizga ega emas. Shu sababli haqiqiy sonlardan kengroq, umumiyroq bo'lgan kompleks sonlar tushunchasini kiritishga to'g'ri keldi. XIX asrda kompleks sonlar va ularning funktsiyalarini o'rganish natijasida «Kompleks taxlil» fani paydo bo'ldi. Bu nazariyaning amaliyotga tadbirlari keyinchalik topildi.

Algebraik tenglamalarni echish masalalari bilan shug'ullanish natijasida Abel, Galua (1830) tomonidan guruhlar nazariyasi yaratildi. XX asrdagina guruhlar nazariyasi kristallarni o'rganishda, kvant fizikasida o'z tadbirini topdi.

XIX asrda matematika fanining juda ko'p sohalarga qullanilishi, tarkibini juda kengayishi natijasida uning poydevorini ilmiy nuqtai-nazardan qayta ko'rib chiqish yoki yaratish masalalari muhim ahamiyatga ega bo'ldi. Matematik fanlarning asosiy poydevori sifatida to'plamlar nazariyasi va matematik mantiq olindi. XX asrda juda kup matematik fanlar poydevori to'plamlar nazariyasi asosida yaratildi. XIX-XX asrda yangi matematik fanlarga ham asos solindi va rivojlantirildi. Masalan,

to'plamlar nazariyasi, matematik mantiq, haqiqiy o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi, funktsional tahlil, topologiya, matematik fizika masalalari.

O'zbekistonda matematika fanining rivojlanishiga to'xtalib o'taylik. O'zbekistonda matematika fani bo'yicha yutuqlar Toshkentda 1920 yilda universitet tashkil etilishi bilan bog'lik. O'zbekistonga kelgan rus olimlari ichida V.I.Romanovskiy ham bor edi. U matematik statistika bo'yicha ko'zga ko'ringan olim edi va u o'zbek matematika maktabini yaratishga katta hissa qo'shdi. O'zbek matematiklaridan birichi bo'lib akademik Kori-Niyoziy ko'rsatish mumkin. U matematika bo'yicha katta ilmiy ishlar qilmagan bo'lsada, matematikani targ'ib qilish, o'zbek tilida darsliklar yozish bilan O'zbekistonda matematikani rivojlanishiga katta hissa ko'shdi. Dunyoga tanilgan matematiklarimizdan akademik T.A.Sarimsokov (1915-1995), akademik S.X. Sirojiddinov(1920-1988), M.S. Saloxitdinov funktsional tahlil, matematik statistika, matematik fizika tenglamalari bo'yicha juda katta kashfiyotlar qilib, o'zbek matematika maktabini jahonga tanitirdilar.

Matematikaning amaliy tadbirlari bo'yicha ba'zi bir misollarni keltiramiz.

1.1845 yilda fransuz matematigi Levere Uran planetasi trayektoriyasi tenglamasini tekshirib, bizga noma'lum osmon jismi borligini, uning trayektoriyasini va massasini nazariy yo'l bilan, ya'ni "qalam uchida" xisoblab topdi. U ko'rsatgan koordinatalar bo'yicha 1846 yil 23 sentyabr kuni nemis astronomi Galle teleskopda Neptun planetasini kashf etdi. Xuddi shunday ravishda 9-planeta 1915 yilda qilingan matematik xisoblar asosida 1930 yili kashf etildi.

2. Neytron, kvark kabi elementlar zarrachalarining mavjudligi va ularning xossalari tajribalar asosida emas, xisoblashlar asosida kashf etildi.

3.Samolyotlarning uchish uzoqligi kattalasha borishi bilan ularni avtomatik boshkarish masalasi paydo bo'ldi. Bu masalani L.S. Pontryagin (Rossiya) va Belman (AQSh) kabi matematiklar hal qilib, optimal boshkarish nazariyasi degan yangi fanga asos soldilar.

4.Telefon aloqasini rivojlanishi bilan aloqa bo'limlarida abonentlarni navbatda qancha kutib turish vaqtlari kabi masalalar natijasida amerikalik olim Erlang "Om-maviy xizmat ko'rsatish nazariyasi" nomli yangi matematik fanga asos soldi.

5.Kosmosni o'zlashtirish muammolarini yechishda matematika roli benihoyat kattadir. Akademik Keldo'sh (Rossiya) raxbarlik qilgan "Amaliy matematika" ilmiy-tekshirish institutida bu masalalarni yechish usullari ishlab chiqildi va ular EXM lar yordamida amalga oshirildi.

6.Iqtisodiyotda xalk xo'jaligini boshkarish uchun amerikalik iqtisodchi-olim Leontev tomonidan tarmoklararo muvozanatning matematik modellari ishlab chiqildi va uning tenglamalari yechilib, ishlab chiqirishni oqilona boshkarishga erishildi.

7.Akademik Kantorovich (Rossiya) materiallardan andoza olishning kamchiqim yo'llarini axtarish bilan shug'ullandi va natijada chiziqli dasturlash nomli yangi matematik fanga asos soldi. Bu fan natijalari asosida xalk xo'jaligida juda katta iqtisodiy foydaga erishildi va shu sababli Kantorovich iqtisodiyot bo'yicha Nobel mukofotiga sazovor bo'ldi.

Bunday misollarni yana ko'plab keltirish mumkin va ular matematikaning qanchalik darajada ahamiyatli ekanligini ifodalaydi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari.

1. Matematika fani predmeti akademik A.N. Kolmogorov tomonidan qanday ta'riflangan?
2. Matematika boshqa tabiiy fanlardan qanday xususiyati bilan ajralib turadi?
3. Matematikaning rivojlanish davri A.N. Kolmogorov tomonidan necha davrga ajratilgan?
4. Matematikaning shakllanish davri qanday xususiyatlarga ega?
5. Elementar matematika davri qaysi asrlarga to'g'ri keladi?
6. Elementar matematika davri qanday xususiyatlarga ega?
7. O'rta Osiyolik olimlarning elementar matematika rivojlanishiga qo'shgan xissalarini ko'rsatib o'ting.
8. Oliy matematika davri qaysi asrlarga to'g'ri keladi?
9. Oliy matematika davrining asosiy xususiyatlari nimalardan iborat?
10. Hozirgi zamon matematikasining asosiy xususiyati nimadan iborat?
11. O'zbek matematiklaridan kimlarni bilasiz va ularning xizmatlari nimadan iborat?
12. Matematikaning amaliy masalalarni echishga tadbirlaridan qaysi birini bilasiz?

2- MA'RUZA.

TO'PLAMLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tayanch iboralar: to'plam, qism to'plam, bush to'plam, birlashma, kesishma, ayirma, to'plamlarning dekart ko'paytmasi.

Ma'ruza rejası:

1. To'plam tushunchasi va uning elementlari.
2. Qism to'plam.
3. To'plamlar tengligi.
4. Bush to'plam.
5. To'plamlar yig'indisi (birlashmasi) va bu amalning xossalari.
6. To'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi) va bu amalning xossalari.
7. To'plamlar ayirmasi.
8. To'plamlarning dekart ko'paytmasi.

Adabiyotlar:

[4] I bob, § 1-2, [8] I bob, § 1-4 [10] I bob, § 1-6 [11] I bob § 1-3

Oldingi ma'ruzada aytilgandek to'plamlar nazariyasi deyarli barcha matematik fanlarining asosida yotadi. Bu nazariya asoslari 1879-1884 yillarda nemis matematigi **Georg Kantor** tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berildi. To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u juda umumiy xarakterga ega va shu sababli o'nga anik ta'rif berib bo'lmaydi. Masalan, institutimizdagi I kurs talabalari to'plami, $[0;1]$ kesmadagi nuktalar to'plami, natural sonlar to'plami, biror zavoddagi stanoklar to'plami va hokazo. Shunday qilib to'plam deganda ko'pincha bir umumiy xususiyatga ega bo'lgan turli ko'rinishdagi ob'ektlar majmuasini tushunamiz. Matematikada to'plamlar **A, B, S, D, ...** kabi bosh lotin harflar bilan belgilanadi. To'plamga kiruvchi ob'ektlar uning elementlari deyiladi va mos ravishda $a, b, s, d, ...$ kabi belgilanadi. «a element A to'plamga tegishli» degan ibora simvolik ko'rinishda $a \in A$ kabi yoziladi. $b \notin A$ kabi yozuvlar esa b element A to'plamga tegishli emasligini bildiradi.

1- TA'RIF: Agar A to'plamga tegishli har bir a element boshqa bir B to'plamga ham tegishli bo'lsa ($a \in A \Rightarrow a \in B$), u holda A to'plam V to'plamining qismi deyiladi va $A \subset B$ (eki $B \supset A$) kabi belgilanadi.

M i s o l: Iqtisod yo'nalishdagi talabalar to'plami oliygoh talabalar to'plamining qism to'plami bo'ladi.

2- TA'RIF: Agarda A va B to'plamlar uchun $A \subset B$ va $B \subset A$ shartlar bir paytda bajarilsa, bu to'plamlar teng deyiladi va $A = B$ kabi yoziladi.

M i s o l: 1) $A = \{-1; 1\}$, $B = \{x^2 - 1 = 0 \text{ tenglama echimlari}\}$ uchun $A = B$ bo'ladi.

2) $A = \{\text{to'g'ri burchakli uchburchaklar}\}$, $B = \{\text{tomonlari } a, b, c \text{ bo'lgan va } c^2 = a^2 + b^2 \text{ shartni qanoatlantiruvchi uchburchaklar}\}$ to'plamlar uchun $A=B$.

3) $A = \{\text{badiiy asarni yozish uchun ishlatilgan harflar}\}$,

$B = \{\text{alfavitdagi harflar}\}$ bo'lsa, $A=B$ bo'ladi,

3-TA'RIF: Birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\emptyset$ kabi belgilanadi.

Ixtiyoriy A to'plam uchun $A \subset A$ va $\emptyset \subset A$ shartlar doimo bajariladi. Arifmetikada 0 soni qanday vazifani bajarsa, to'plamlar nazariyasida $\emptyset$ to'plam sho'nga o'xshash vazifani bajaradi.

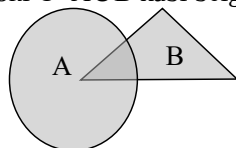
Misol: $\{\sin x = 2 \text{ tenglamaning echimlari}\} = \emptyset$,

$\{\text{perimetri 0 bo'lgan kvadratlar}\} = \emptyset$.

Arifmetikada haqiqiy sonlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallari kiritilgan. Bu amallar shunday kiritilganki, qo'shish va ayirish natijasida yana haqiqiy sonlar paydo bo'ladi va bu amallar ma'lum bir xossalarga (qonunlarga) ega bo'ladi. Bu amallarni va ularning xossalarini bilmasak, kup arifmetik masalalarni echib bilmas edik. Xuddi shunday sababga ko'ra to'plamlar ustida qo'shish va ko'paytirish amallarini kiritishga ehtiyoj paydo bo'ldi.

Ammo bu amallar arifmetikadagi qo'shish va ko'paytirish amallaridan farq qiladi.

4-TA'RIF: A va B to'plamlarning yig'indisi (birlashmasi) deb shunday C to'plamga aytiladiki, uning elementlari A va B to'plamlardan xech bo'lmaganda bittasiga tegishli bo'ladi va $C=A+B$ yoki $C=A \cup B$ kabi belgilanadi.



$$C = A \cup B$$

Shunday qilib $A \cup B$ to'plam elementlari yoki A ga, yoki B ga, yoki ham A ga, ham B ga tegishli elementlardan iboratdir, ya'ni $c \in A \cup B \Rightarrow c \in A$ yoki $c \in B$ yoki $c \in A$ va $c \in B$.

Xuddi shuningdek $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar yig'indisi $C = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ kabi belgilanadi. Bu erda C xech bo'lmaganda bitta A_k to'plamga tegishli elementlar to'plami sifatida aniklanadi.

Misol. 1) $A = \{\text{juft sonlar}\}$, $B = \{\text{tok sonlar}\} \Rightarrow A \cup B = Z = \{\text{butun sonlar}\}$.

2) $A_1 = \{\text{1 kurs talabalarikurs talabalari}\}$, $A_2 = \{\text{2 kurs talabalari}\}, \dots$. $A_5 = \{\text{5 kurs talabalari}\} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \dots \cup A_5 = \{\text{institutdagi barcha talabalar}\}$.

3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\} \Rightarrow A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

4) $A = \{\text{juft sonlar}\}$, $B = \{\text{to'rtga bo'linadigan sonlar}\} \Rightarrow A \cup B = A$.

Umuman olganda $B \subset A$ yoki $B = A$ bo'lsa, u holda $A \cup B = A$ bo'ladi.

Demak, to'plamlarda arifmetikadagi qo'shish amali uchun « $b \neq 0$ bo'lsa, unda $a+b \neq a$ bo'ladi» degan tasdik o'rinli bo'lmasligi mumkin ekan. Ammo arifmetikadagi $a+0=a$

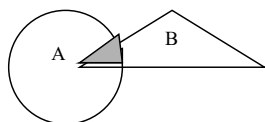
degan xossa to'plamlar uchun saqlanib qoladi, ya'ni $\forall A$ to'plam uchun $A \cup \emptyset = A$ bo'ladi.

Arifmetikada qo'shish amali uchun $a+b=b+a$ (kommutativlik) va $(a+b)+c=a+(b+c)$ (assotsiativlik) qonunlari o'rinli. Bu qonunlar to'plamlarni qo'shish amali uchun ham saqlanib qoladi, ya'ni $\forall A$ va B, C to'plamlar uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

$$A \cup B = B \cup A, (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Bu tengliklar qo'shish ta'rifidan bevosita kelib chiqadi.

5 -TA'RIF: A va B to'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi) deb shunday C to'plamga aytiladiki, uning elementlari ham A ga, ham B ga tegishli bo'ladi va $C=AB$ yoki $C=A \cap B$ kabi belgilanadi.



$$C = A \cap B$$

Shunday qilib $c \in A \cap B \Rightarrow c \in A, c \in B$. Xuddi shuningdek $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlarning ko'paytmasi $C = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^n A_k$ kabi belgilanadi va C to'plam barcha A_k larga tegishli elementlardangina iborat bo'ladi.

Misol:

1) $A = \{\text{juft sonlar}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\},$

$B = \{3 \text{ ga bo'linadigan sonlar}\} = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ bo'lsa, u holda

$$A \cap B = \{6, 12, 18, \dots\} = \{6 \text{ ga bo'linadigan sonlar}\}$$

$A = \{\text{talabalar}\}, B = \{\text{futbolchilar}\} \Rightarrow A \cap B = \{\text{futbol bilan shug'ullanuvchi talabalar}\}.$

Arifmetikada sonlarni ko'paytirish uchun kommutativlik va assotsiativlik qonunlari o'rinli. To'plamlar ko'paytmasi ta'rifidan bu qonunlar bu erda ham saqlanib qolishini qo'rish mumkin, ya'ni

$$A \cap B = B \cap A, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

Arifmetikada qo'shish va ko'paytirish amallari o'zaro distributivlik qonuni bilan bog'langan, ya'ni $(a+b)c=ac+bc$. Bu qonun to'plamlar uchun ham o'rinlidir, ya'ni

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Shu tenglikni isbotlaymiz.

$x \in (A \cup B) \cap C$ bo'lsin. Unda $x \in A \cup B$ va $x \in C$ bo'ladi. $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ eki $x \in B$ bo'lsin. Bundan $x \in A \cap C$ yoki $x \in B \cap C$. Bundan $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ va $x \in B$ xol ham xuddi shunday qaraladi.

Shunday qilib, $x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$, ya'ni

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (1).$$

Endi $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ bo'lsin. Unda $y \in A \cap C$ eki $y \in B \cap C$ eki $y \in A \cap C$ va $y \in B \cap C$.

$y \in A \cap C$ bo'lsin. Bu holda $y \in A, y \in C \Rightarrow y \in A \cup B, y \in C \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C$.
 $y \in A \cap C, y \in B \cap C \Rightarrow y \in A, y \in B, y \in C \Rightarrow y \in A \cup B, y \in C \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C$.
 Demak, $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \Rightarrow y \in (A \cup B) \cap C$, ya'ni

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C \quad (2).$$

(1) va (2) munosabatlardan, 2- ta'rifga asosan, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunday tarzda yana bir ushbu distributivlik qonunini isbotlash mumkin:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

6- TA'RIF: A va B to'plamlarning ayirmasi deb, shunday C tuplamga aytiladiki, u A ga tegishli, ammo B ga tegishli bo'lmagan elementlardan tashkil topadi va $C = A \setminus B$ kabi belgilanadi.

Demak, $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ va $x \notin B$. $\forall A$ to'plam uchun $A \setminus A = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$ munosabatlar o'rinlidir.

Misol: 1) $Z = \{\text{butun sonlar}\}$, $B = \{\text{juft sonlar}\}$ bo'lsa, $Z \setminus B = \{\text{toq sonlar}\}$.

2) $A = \{\text{barcha talabalar}\}$, $B = \{\text{I kurs talabalari}\}$ bo'lsa, $A \setminus B = \{\text{II-V kurs talabalari}\}$.

2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 7, 9\}$ bo'lsa, $A \setminus B = \{2, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{7, 9\}$.

7- TA'RIF: A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi deb $A \times B$ kabi belgilanadigan va (x, y) , $x \in A$, $y \in B$ ko'rinishdagi juftliklardan tuzilgan yangi to'plamga aytiladi.

Masalan, $A = [0, 1]$, $B = [0, 2]$ bo'lsa, $A \times B$ uchlari $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 0)$, $M_3(1, 1)$ va $M_4(0, 1)$ nuqtalarda joylashgan to'rtburchakdagi nuqtalarni ifodalaydi. Agarda $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ -haqiqiy sonlar to'plami) bo'lsa, $A \times B = \mathbb{R}^2$, ya'ni tekislikdagi barcha nuqtalarni ifodalaydi.

Dekart ko'paytmasi uchun $A \times B \neq B \times A$, ya'ni kommutativlik qonuni bajarilmaydi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari.

1. To'plam deganda nima tushuniladi?
2. To'plam elementi kandy aniklanadi?
3. To'plamlarga misollar keltiring.
4. Qism to'plam qanday ta'riflanadi?
5. Qachon ikkita to'plam teng deyiladi?
6. Qanday to'plam bo'sh to'plam deyiladi?
7. To'plamlar yig'indisi qanday ta'riflanadi?
8. To'plamlar yig'indisi amali qanday xossalarga ega?
9. To'plamlar ko'paytmasi qanday ta'riflanadi?
10. To'plamlar ko'paytmasi amali qanday xossalarga ega?
11. To'plamlar ayirmasi qanday ta'riflanadi?
12. To'plamlar ustidagi amallar chizmada qanday ifodalanadi?
13. To'plamlarning dekart ko'paytmasi qanday aniqlanadi?

3-MA'RUZA

KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

Tayanch iboralar: kombinatorik masalalar, kombinatorika, qo'shish qoidasi, ko'paytirish qoidasi, kombinatsiya, o'rin almashtirish, o'rinlashtirish, Nyuton binomi, binomial koeffitsient.

Ma'ruza rejası:

1. Kombinatorik masalalar.
2. Kombinatorika predmeti.
3. Kombinatorikaning qo'shish qoidasi.
4. Kombinatorikaning ko'paytirish qoidasi.
5. Kombinatsiya ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
6. O'rin almashtirish ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
7. O'rinlashtirish ta'rifi va uni hisoblash formulasi.
8. Nyuton binomi.
9. Ba'zi bir kombinatorik ayniyatlar.

Adabiyotlar:

[10] II bob § 8-11 [12] I bob § 7

T A' R I F 1 : Biror chekli to'plam elementlari ichidan ma'lum bir xossaga ega bo'lgan elementlardan iborat qism to'plamlarni tanlab olish yoki to'plam elementlarini ma'lum bir tartibda joylashtirish bilan bogliq masalalar **kombinatorik masalalar** deyiladi.

T A' R I F 2 : To'plamlar nazariyasining kombinatorik masalalar bilan shug'ullanadigan qismi **kombinatorika** deyiladi.

Masalan, o'nta talabani ikki kishilik partali sinfga necha xil usulda o'tkazish mumkinligi, molekulada atomlar qanday usullarda birlashishi mumkinligi (ximiya), oqsil moddalarda aminokislotalarning qanday tartiblarda joylashtirish mumkinligi (biologiya), turli bloklardan iborat mexanizmida bu bloklarni turlicha tartiblarda birlashtirish (konstruktorlik), bir necha dala uchastkalarida turli xil ekinlarini har xil tartibda ekish (agronomiya), extimolliklar nazariyasining turli masalalarini echishda natijalarni u yoki bu guruxlarini kurish kombinatorik masalalarga misol bo'ladi va kombinatorikani ham matematikada, ham insonning boshqa faoliyatlarida qo'llanilishini ko'rsatadi.

Kombinatorikada qo'shish va ko'paytirish qoidasi deb ataluvchi ikkita asosiy qoida mavjud. Ularni ifodalash uchun dastlab to'plamlar nazariyasiga doir bir teoremani keltiramiz.

TEOREMA : Agarda A va B chekli to'plamlar bo'lib, ulardagi elementlar soni $n(A)$ va $n(B)$ bo'lsa, u holda $A \cup B$ to'plamdagi elementlar soni $n(A \cup B)$ quyidagicha topiladi:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B), \text{ agarda } A \cap B = \emptyset \text{ bo'lsa,}$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \text{ agarda } A \cap B \neq \emptyset \text{ bo'lsa.}$$

Bu teoremadan kombinatorikaning qo'shish qoidasi kelib chiqadi

Qo'shish qoidasi : Agarda biror α tanlovni $n(\alpha)$ usulda, β tanlovni esa $n(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa va bu erda α ni ixtiyoriy tanlash usuli β ni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda « α yoki β » tanlovni amalga oshirish usullari soni

$$n(\alpha \text{ yoki } \beta) = n(\alpha) + n(\beta)$$

formula bilan topiladi.

M i s o l : Korxonada 10 erkak va 8 ayol xodim ishlaydi. Shu korxonadan bitta xodimni necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Echish: α -erkak xodimni tanlash, β - ayol xodimni tanlash bo'lsin. Unda $n(\alpha) = 10$, $n(\beta) = 8$ va bitta xodimni

$$n(\alpha \text{ yoki } \beta) = n(\alpha) + n(\beta) = 10 + 8 = 18$$

usulda tanlash mumkin.

Ko'paytirish koidasi. Agarda biror α tanlovnin $n(\alpha)$ usulda, β tanlovni $n(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda « α va β » tanlovni (yoki (α, β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni

$$n(\alpha \text{ va } \beta) = n(\alpha) \cdot n(\beta)$$

formula bilan topiladi.

Masalan, korxonada 10 erkak va 8 ayol ishlasa, ulardan bir erkak va bir ayol xodimdan iborat juftlikni $n(\alpha \text{ va } \beta) = 10 \cdot 8 = 80$ usulda tanlash mumkin.

M i s o l : 10 talabadan iborat guruxga ikkita yo'llanma berildi. Bu yo'llanmalarni necha xil usulda tarqatish mumkin ?

Echish : α I yo'llanmani, β esa II yo'llanmani tarqatish usullari bo'lsin. Unda $n(\alpha) = 10$ va $n(\beta) = 9$, chunki bitta talabaga I yo'llanma berilganda II yo'llanmaga 9 talaba ega bo'lishi mumkin. Demak, ikkita yo'llanmani tarqatishlar soni $n(\alpha \text{ va } \beta) = 10 \cdot 9 = 90$ bo'ladi.

Umumiy holda $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tanlovlarni mos ravishda $n(\alpha_1), n(\alpha_2), \dots, n(\alpha_m)$ usullarda amalga oshirish mumkin bo'lsa,

$$n(\alpha_1 \text{ yoki } \alpha_2 \text{ yoki } \dots \text{ yoki } \alpha_m) = n(\alpha_1) + n(\alpha_2) + \dots + n(\alpha_m),$$

$$n(\alpha_1 \text{ va } \alpha_2 \text{ va } \dots \text{ va } \alpha_m) = n(\alpha_1) \cdot n(\alpha_2) \cdot \dots \cdot n(\alpha_m)$$

formulalar o'rinli bo'ladi.

TA'RIF 3: n ta elementli to'plamning k ($k \leq n$) ta elementli ixtiyoriy qism to'plami n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiya deyiladi va ularning soni C_n^k kabi belgilanadi.

Faqat elementlarning joylashish tartibi bilan farq qiladigan barcha qism to'plamlar bitta kombinatsiya hisoblanadi

Kombinatsiyalarda elementlarning joylashish tartibi ahamiyatga ega emas va bu qism to'plamlar bir-biridan kamida bitta elementi bilan farq qilishi kerak.

Masalan, $\{a, e, c\}$ $n=3$ elementli tuplamdan ikkita elementli kombinatsiyalar $\{a; e\}$, $\{a; c\}$, $\{e; c\}$ bo'ladi. Bu erda $\{e; a\} = \{a; e\}$, $\{c; a\} = \{a; c\}$, $\{e; c\} = \{c; e\}$ deb hisoblanadi

Umumiy holda quyidagi formula o'rinli:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (1)$$

Bu erda $n!$ (en faktorial) = $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ va $0! = 1$ deb olinadi

Misol: Beshta odamdan uch kishidan iborat komissiyani

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

usulda tuzish mumkin:

TA'RIF 4: n ta elementdan iborat to'plamning elementlarini joylashish tartibini o'zgartirish natijasida hosil bo'lgan n ta elementli ixtiyoriy to'plam **o'rin almashtirish** deb ataladi va ularning soni P_n kabi belgilanadi.

Misol: 1) $n = 2 \Rightarrow \{a; e\}, \{e; a\} \Rightarrow P_2 = 2$

2) $n = 3 \Rightarrow \{a; e; c\}, \{a; c; e\}, \{e; a; c\}, \{e; c; a\}, \{c; a; e\}, \{c; e; a\} \Rightarrow P_3 = 6$

Umumiy holda n elementli o'rin almashtirishlar soni uchun

$$P_n = n! \quad (2)$$

formula o'rinli.

Misol: Navbat kutib turgan 5 ta odamni $P_5 = 5! = 120$ usulda navbatga joylashtirish mumkin.

TA'RIF 5: n ta elementlardan iborat to'plamning k ta elementdan iborat qism tuplamlari bir-biridan yoki elementlari, yoki elementlarning joylashish tartibi bilan farq qilsa, ular n ta elementdan k tadan **o'rirlashtirish** deb ataladi va ularning soni A_n^k kabi belgilanadi.

Misol: 1) $\{a; e; c\}$ $n=3$, $k=2 \Rightarrow \{a; e\}, \{a; c\}, \{e; c\}, \{e; a\}, \{c; a\}, \{c; e\} \Rightarrow A_3^2 = 6$.

2) $\{a; e; c; d\}$ $n=4$, $k=3 \Rightarrow \{a; e; c\}, \{a; c; e\}, \{e; a; c\}, \{e; c; a\}, \{c; a; e\}, \{c; e; a\} \dots \Rightarrow A_4^3 = 16$.

Umumiy holda o'rirlashtirishlar soni quyidagicha topiladi:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \quad (3)$$

Masala: Talaba 8 kunda 4 ta imtixon topshirishi kerak. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Echish: Kunlarni 1,2,3, ... ,8 kabi nomerlab chiqsak, imtixonlar qo'yilish kunlari $\{1;2;3;4\}$, $\{1;3;2;5\}$ kabi to'rtliklardan iborat va ularning soni

$$A_8^4 = 1680$$

C_n^k sonlari yordamida quyidagi formulani yozish mumkin:

$$(a+e)^n = C_n^0 a^n e^0 + C_n^1 a^{n-1} e^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} e^k + \dots + C_n^n a^0 e^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} e^k \quad (4)$$

Bu **Nyuton binomi formulasi** deyiladi, C_n^k esa binomial koeffitsentlar deb ataladi. Nyutondan oldin bu formulani natural daraja uchun **Umar Xayyom** (1048-1131), **Giyosiddin ali - Kushchi** (1430) ham bilishgan. Nyutonning xizmati shuki, u (4) formulani nafaqat natural n daraja uchun, balkim kasr darajalar uchun ham o'rinli ekanligi ko'rsatgan.

Nyuton binomidan va ta'rifdan C_n^k uchun quyidagi kombinatorik ayniyatlar kelib chiqadi:

$$1) a=1 \Rightarrow \sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n \quad 2) a=1, \varphi=-1 \Rightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$$

$$3) C_n^k = C_n^{n-k} \quad 4) C_n^0 = C_n^n = 1.$$

Bu ayniyatlarning to'g'riligini tekshirish talabalarga havola qilinadi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari.

1. Qanday masalalar kombinatorik deyiladi?
2. Kombinatorika fani nima?
3. Kombinatorikaning qo'shish qoidasi nimani ifodalaydi?
4. Qo'shish qoidasiga misol keltiring.
5. Kombinatorikada ko'paytirish qoidasi nimani ifodalaydi?
6. Ko'paytirish qoidasiga misol keltiring.
7. Kombinatsiya deb nimaga aytiladi va ularning soni qanday topiladi?
8. O'rin almashtirish deb nimaga aytiladi va ularning soni qanday topiladi?
9. O'rinlashtirish deb nimaga aytiladi va ularning soni qanday topiladi?
10. Nyuton binomi qanday ko'rinishda bo'ladi?
11. Kombinatorik ayniyatlarga misollar keltiring.

4-MA'RUZA

MATEMATIK MANTIQ HAKIDA TUSHUNCHA. MULOXAZALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tayanch iboralar: mantiq fani, matematik mantiq, muloxaza, diz'yunktsiya, kon'yunktsiya, implikatsiya, ekvivalentsiya, rostlik jadvali, muloxaza inkori.

Ma'ruza rejası:

1. Mantiq fani va uning asoschisi.
2. O'rta Osiyoda mantiq fanining rivojlanishi.
3. Matematik mantiq va uning asoschisi.
4. Matematik mantiq fanining ahamiyati va tadbirlari.
5. Mulohaza tushunchasi.
6. Mulohazalar yig'indisi (diz'yunktsiyasi) va bu amalning xossalari.
7. Mulohazalar ko'paytmasi (kon'yunktsiyasi) va bu amalning xossalari.
8. Mulohazalar xulosasi (implikatsiyasi).
9. Mulohazalar ekvivalentsiyasi.
10. Mulohazaning inkori.
11. Mantiqiy amallarning rostlik jadvali.

Adabiyotlar:

[5] §1, I bob, § 1.1

Tafakkur qonunlari, shakllari va usullarini hamda to'g'ri fikr yuritish va xulosa chikarishni o'rganadigan fan ***mantiq (logika)*** deb ataladi.

“**Logika**” grekcha “logika “ suzidan olingan bo'lib, so'z yoki aql degan ma'nolarni anglatadi.

Mantik fanining asoschisi bo'lib yunon faylasufi ***Aristotel (Arastu)*** hisoblanadi. Arastu o'zining “***Organon***”, “***Metafizika***” kabi asarlarida mantiq fani qonunlarini yoritgan. O'rta Osiyolik olimlardan ***Forobiy*** va ***Abu Ali ibn Sino*** mantiq fanini rivojlanishiga o'z hissalarini qo'shganlar.

Mantiqiy qonunlarni matematik formulalar va belgilar bilan ifodalash hamda ularni matematik usullarda o'rganish natijasida matematik mantiq fani shakllandi. Bu fanning shakllanishida nemis matematigi va faylasufi ***Leybnits***ning xizmatlari katta bo'ldi.

Hozirgi paytda matematik mantiq kibernetika, avtomatlar nazariyasi, boshkaruv nazariyasi kabi fanlarda keng qo'llanilmoqda.

Matematik mantiq fanining asosiy tushunchalaridan biri mulohaza bo'lib hisoblanadi.

TA'RIF 1: Rost yoki yolg'onligi anik ma'lum bo'lgan darak gaplar **mulohaza** deyiladi.

Masalan, “Bir yilda 12 oy bor” (rost), “25 tub son” (yolg'on) kabi tasdiqlar mulohaza bo'ladi.

Ammo ta'riflar, so'rok yoki undov gaplar, rost yoki yolg'onligi aniq bo'lmagan darak gaplar mulohaza bo'lmaydi.

Tilimizda “va”, “yoki”, “emas” kabi bog'lovchilar yordamida soddarak gaplardan murakkabrok gaplar hosil qilinadi. Matematik mantiq fanida bu bog'lovchilar mulohazalar ustida tegishli amallarni aniqlaydi. Bu amallarni ta'riflash uchun barcha mulohazalar to'plamini R , o'nga kiruvchi mulohazalarni esa $A, B, C, \dots$ yoki $A_1, A_2, A_3, \dots$ kabi bosh lotin xarflari bilan belgilaymiz. Mulohazaning “rost” yoki “yolg'on” ekanligini mos ravishda 1 yoki 0 deb belgilaymiz.

TA'RIF 2: A va B mulohazalarning **diz'yunktsiyasi (vigindisi)** deb ularning kamida bittasi rost bo'lganda rost bo'luvchi yangi murakkab mulohazaga aytiladi va $A \vee B$ kabi belgilanadi.

$A \vee B$ diz'yunktsiya “ A yoki B ” kabi o'qiladi va $A \vee B = B \vee A$ kommutativlik qonuniga bo'ysunadi.

Masalan, $A = \{\text{talaba I kursda o'qiydi}\}$, $B = \{\text{talaba II kursda o'qiydi}\}$ mulohazalar uchun $A \vee B = \{\text{talaba I yoki II kursda o'qiydi}\}$ degan ma'noni bildiradi.

TA'RIF 3: A va B mulohazalarning **kon'yunktsiyasi (ko'paytmasi)** deb, ularning ikkalasi ham rost bo'lgandagina rost bo'luvchi yangi murakkab mulohazaga aytiladi va $A \wedge B$ kabi belgilanadi.

$A \wedge B$ kon'yunktsiya « A va B » kabi o'qiladi va $A \wedge B = B \wedge A$ kommutativlik qonuniga bo'ysunadi.

Masalan, $A = \{\text{talaba I kursda o'qiydi}\}$, $B = \{\text{talaba «menejment» yo'nalishi bo'yicha I kursda o'qiydi}\}$ mulohazalar uchun $A \wedge B = \{\text{talaba «menejment» yo'nalishi bo'yicha I kursda o'qiydi}\}$ degan ma'noga ega bo'ladi.

TA'RIF 4: A va B mulohazalarning **implikatsiyasi (xulosasi)** deb A rost, B yolg'on bo'lgandagina yolg'on bo'ladigan yangi murakkab mulohazaga aytiladi va $A \Rightarrow B$ kabi belgilanadi.

$A \Rightarrow B$ implikatsiya «Agar A bo'lsa, u holda B bo'ladi» yoki « A dan B kelib chiqadi» deb o'qiladi. Bu amalda A -shart, B -xulosa deb ataladi.

Masalan, $A = \{\text{talaba I kursda o'qiydi}\}$, $B = \{\text{talaba Buxoro shaxrida yashaydi}\}$ mulohazalar uchun $A \Rightarrow B = \{\text{Agar talaba I kursda o'qisa, u Buxoro yashaydi}\}$,

$B \Rightarrow A = \{\text{Agar talaba Buxoroda yashasa, u I kursda o'qiydi}\}$ degan ma'nolarni bildiradi

TA'RIF 5: A va B mulohazalarning **ekvivalentsiyasi** deb, ularning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lgandagina rost bo'ladigan yangi murakkab mulohazaga aytiladiv va $A \Leftrightarrow B$ kabi belgilanadi.

$A \Leftrightarrow B$ ekvivalentsiya “ A bo'lishi uchun B zarur va etarli” yoki “ A faqat va faqat B bo'lganda bo'ladi” degan ma'noni bildiradi hamda $A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$ kommutativlik qonuniga bo'ysunadi.

Bu amallar ta'rifini quyidagi jadval ko'rinishida ifodalash mumkin :

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Bunday jadvallar **rostlik jadvallari** deb ataladi.

Bu amallar ikkita A va V mulohazalar orqali aniqlanadi va shu sababli binar amallar deb ataladi.

T A ' R I F 6 : A mulohazaning **inkori** deb u rost bo'lganda yolg'on, yolg'on bo'lganda esa rost qiymat qabo'l qiluvchi yangi mulohazaga aytiladi va $\neg A$ kabi belgilanadi.

$\neg$ Ainkor "A emas" degan ma'noni bildiradi va bitta mulohaza orqali aniqlangani uchun **unar** amal hisoblanadi.

Masalan, $A = \{25 \text{ tok son}\}$ mulohaza uchun $\neg A = \{25 \text{ tok emas}\}$ yoki $\neg A = \{25 \text{ juft son}\}$ degan ma'noni ifodalaydi.

Ta'rifga asosan $A=1$ (rost) bo'lsa, $\neg A=0$ va aksincha $A=0$ (yolg'on) bo'lsa, $\neg A=1$ bo'ladi.

O'z- o'zini nazorat etish savollari:

1. Mantiq fani nima bilan shug'ullanadi?
2. Mantiq fani asoslari kim tomonidan yaratilgan va uning qaysi asarlarida yoritilgan?
3. O'rta Osiyolik mutafakkirlardan mantiq fani rivojiga kim o'z hissasini qo'shgan?
4. Matematik mantiq fani mohiyati nimadan iborat va uning asoschisi kim?
5. Matematik mantiqning ahamiyati nimadan iborat?
6. Mulohaza deb nimaga aytiladi?
7. Mulohazalar yig'indisi qanday ta'riflanadi va bu amal qanday xossalarga ega?
8. Mulohazalar ko'paytmasi qanday aniqlanadi va bu amal qanday xossalarga ega?
9. Mulohazalar implikasiyasi va ekvivalentsiyasi qanday aniqlanadi?
10. Mulohazaning inkori amali qanday aniqlanadi?
11. Mantiqiy amallarning rostlik jadvali deb nimaga aytiladi?

5-MA'RUZA

MULOHAZALAR ALGEBRASI.

Tayanch iboralar: mulohazalar algebrasi, amallar prioriteti, mulohazaviy formula, qism formula, nabor, boshlang'ich nabor, oxirgi nabor, formulaning rostlik jadvali.

Ma'ruza rejası:

1. Mulohazalar algebrasi.
2. Mulohazalar algebrasida qo'llaniladigan belgilar.
3. Mantiqiy amallarning bajarilish tartibi (prioriteti).
4. Mulohazaviy formula.
5. Qism formula.
6. Mulohazaviy formula naborlari.
7. Mulohazaviy formulaning rostlik jadvali.

Adabiyotlar:

[5] I bob, §1-2, [8] I bob, §12

Mulohazalar va ular ustida aniqlangan amallar yangi bir algebra hosil qilish imkonini beradi.

TA'RIF 1: Barcha mulohazalar to'plami P va unda aniqlangan diz'yunktsiya, kon'yunktsiya, implikasiya va ekvivalentsiya binar amallari hamda inkor etish unar amalidan tuzilgan $\langle P, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg \rangle$ sistema **mulohazalar algebrasi** deyiladi.

Mulohazalar algebrasida quyidagi belgilardan foydalaniladi:

1. $A, B, C, \dots, A_1, A_2, A_3, \dots$ - mulohazalar;
2. $1, 0$ - mantiqiy o'zgarmaslar;
3. $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$ - mantiqiy amallar;
4. $(,)$ - chap va o'ng qavslar.

Mulohazalar algebrasida mantiqiy amallardan eng avval inkor, so'ngra kon'yunktsiya, undan keyin diz'yunktsiya, implikasiya va eng oxirida ekvivalentsiya amallari bajariladi. Shunday qilib mantiqiy amallar bajarilish tartibi (prioriteti) $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, ko'rinishda bo'ladi. Amallar bajarilish tartibini qavslar yordamida o'zgartirish mumkin.

Masalan, $A \Rightarrow B \wedge C$ yozuvda dastlab $\wedge$, so'ngra $\Rightarrow$ amali bajariladi. $(A \Rightarrow B) \wedge C$ yozuvda esa dastlab $\Rightarrow$, so'ngra $\wedge$ amali bajariladi.

TA'RIF 2: Mulohazalar yoki ular ustida mantiqiy amallar bajarilishini ifodalovchi simvolik yozuvlar **mulohazaviy formula** yoki qisqacha formula deb ataladi.

Masalan, $A, B, \neg A, A \vee B, A_1 \vee (A_2 \Rightarrow A_3)$ kabi yozuvlar formula bo'ladi.

TA'RIF 3: U mulohazalar algebrasining ixtiyoriy formulasi bo'lsin.

1. Agarda U faqat muloxaza yoki 0 va 1 mantiqiy o'zgarmasdan iborat bo'lsa, uning qism formulasi deb uning o'ziga aytiladi.
2. Agarda $U = W * H$ ko'rinishda bo'lib, bunda W va H birop formulalar, $*$ esa biror binar mantiqiy amal bo'lsa, uning qism formulalari U formulaning o'zidan, W va H formulalar va ularning qism formulalari kabi aniqlanadi.
3. Agarda $U = \neg W$ ko'rinishda bo'lsa, uning qism formulalari U, W formulalardan va W formulaning barcha qism formulalaridan tashkil topadi.

Masalan, $A, B, 1, 0$ formulalarning qism formulalari faqat ularning o'zidan, $U = \neg A(B \Rightarrow C)$ formulaning qism formulalari $A, B, C, B \Rightarrow C, \neg A, \neg A \vee (B \Rightarrow C) = U$ formulalardan iborat bo'ladi. Shunday qilib, qism formulalar ketma-ketligi U formulani hisoblash tartibini aniqlaydi. Masalan, ko'rib o'tilgan U formulani hisoblash uchun dastlab A, B, C o'zgaruvchi mulohazalarga 1 (rost) yoki 0 (yolg'on) qiymatlar beriladi. So'ngra $B \Rightarrow C$ implikasiya, undan keyin $\neg A$ inkor qiymatlari aniqlanib, eng oxirida berilgan U formula qiymati $U = \neg A \vee (B \Rightarrow C) = 1$ yoki 0 ekanligini amallarning rostlik jadvali orkali aniqlaymiz.

Endi $A_1, A_2, \dots, A_n$ mulohazalardan tuzilgan formulani $U(A_1, A_2, \dots, A_n)$ kabi belgilaymiz. Agarda $A_i = \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, ($\alpha_i = 0$ yoki 1) bo'lsa, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ nabor deb ataladi. Bunda $(1, 1, 1, \dots, 1)$ "boshlang'ich", $(0, 0, \dots, 0)$ esa "oxirgi" nabor deyiladi. $U(A_1, A_2, \dots, A_n)$ formula uchun barcha naborlar soni 2^n ta bo'ladi.

Masalan, $U(A_1, A_2)$ formula uchun to'rtta $(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)$ naborlar mavjud. Har bir naborda berilgan formula 1 yoki 0 qiymatlardan birini qabo'l qiladi. Formula haqida tulik ma'lumotga ega bo'lish uchun uning har bir nabordagi qiymatini aniqlash kerak bo'ladi. Buning uchun formulaning quyidagicha aniqlanadigan «rostlik jadvali» tuziladi.

Jadvalning I satriga $U(A_1, A_2, \dots, A_n)$ formulalarning barcha qism formulalari $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots, U$ ketma-ketlikda joylashtiriladi. So'ngra jadvalning keyingi har bir satriga naborlar "boshlang'ich"dan boshlanib, "oxirgi" gacha tartibda yozib chiqiladi. Nixoyat har bir nabor uchun kism formulalar qiymatlari mantiqiy amallarning rostlik jadvali yordamida birin-ketin hisoblanib, eng oxirgi ustunda berilgan formula qiymatlari topiladi.

Misol sifatida $U(A, B) = (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$ formulaning rostlik jadvalini tuzamiz. Bu formulaning qism formulalari $A, B, \neg A, A \vee B, \neg A \wedge B$ va $U(A, B)$ formulani uzidan iborat bo'ladi.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$\neg A \wedge B$	$U = (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Mulohazalar algebrasi qanday ta'riflanadi?
2. Mulohazalar algebrasida qanday belgilardan foydalaniladi?
3. Mantiqiy amallar qanday ketma-ketlikda bajariladi?
4. Mulohazaviy formula qanday ta'riflanadi?
5. Mulohazaviy formulaning qism formulalari qanday aniqlanadi?
6. Mulohazaviy formula naborlari deb nimaga aytiladi?
7. Boshlang'ich va oxirgi naborlar qanday ko'rinishda bo'ladi?
8. Mulohazaviy formulaning rostlik jadvali qanday tuziladi?

6-MA'RUZA

MATRITSALAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tayanch iboralar: matritsa, matritsa tartibi, matritsa elementi, to'rtburchakli matritsa, kvadrat matritsa, ustun matritsa, satr matritsa, matritsalar tengligi, diagonal elementlar, diagonal matritsa, birlik matritsa, nol matritsa, matritsani songa ko'paytmasi, matritsalar yig'indisi, ayirmasi, matritsalar ko'paytmasi.

Ma'ruza rejası:

1. Matritsa, uning tartibi va elementlari.
2. Matritsalarining turlari.
3. Matritsalar tengligi.
4. Birlik va nol matritsa.
5. Matritsani songa ko'paytirish.
6. Matritsalarining algebraik yig'indisi.
7. Matritsalarini qo'shish amalining xossalari.
8. Matritsalar ko'paytmasi.
9. Matritsalar ko'paytmasi amalining xossalari.
10. Matritsaning iqtisodiy tadbigiga misol.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §22-23, [3] IV bob, §1, [8] V bob, §60-61, [14]. 9-16.

TA'RIF 1: m ta satr va n ta ustundan iborat to'gri to'rtburchak shaklidagi $m \times n$ ta sondan tuzilgan jadval $m \times n$ tartibli matritsa deb ataladi.

Matritsalar A, B, C kabi bosh lotin harflar bilan, ularni tashkil etuvchi sonlar esa a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} kabi belgilanadi. Bu sonlar shu matritsaning elementlari deb ataladi. Bu erda i - element joylashgan satrni, j esa ustunning tartib rakamini bildiradi.

Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1.2 \\ 0 & 7.5 & -1 \end{pmatrix}$ matritsa 2×3 tartibli matritsa bo'lib, unda $a_{11} = 1$,

$a_{13} = 1.2$, $a_{22} = 7.5$. Agarda A matritsaning tartibini ko'rsatishga extiyoj bo'lsa, u $A_{m \times n}$ ko'rinishda yoziladi.

TA'RIF 2: $A_{m \times n}$ matritsada $m = n$ bo'lsa, u kvadrat, $m \neq n$ bo'lsa to'gri to'rtburchakli matritsa deyiladi.

Bunda, agar $m = 1$ bo'lsa, satr matritsaga va $n = 1$ bo'lsa, ustun matritsaga ega bo'lamiz. $m = 1$ va $n = 1$ bo'lganda matritsa bitta sonni ifodalaydi. Demak, matritsa ma'lum bir ma'noda son tushunchasini umumlashtiradi.

TA'RIF 3: A va B matritsalar teng deyiladi ($A=B$ deb yoziladi), agarda ular bir xil tartibli va ularning mos elementlari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni $a_{ij} = b_{ij}$ shart bajarilsa. Masalan,

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a+a & a-a \\ a:a & a:a \end{pmatrix} \underline{a+a, a-a} \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 1 & a^2 \end{pmatrix} \underline{2a-0}$$

$$\underline{A} = \underline{a:a} \underline{a:a}, \quad \underline{B} = \underline{1} \underline{a^2}$$

bo'lsa, $A=B$ deb yozish mumkin.

$A=\{a_{ij}\}$ matritsada a_{ii} ko'rinishdagi elementlar diagonal elementlar deyiladi.

TA'RIF 4: Barcha diagonal elementlari birga teng ($a_{ii}=1$), kolgan barcha elementlari esa nolga teng ($a_{ij}=0, i \neq j$) bo'lgan kvadrat matritsa birlik matritsa deyiladi va E kabi belgilanadi.

Masalan, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{0-1}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{0-1-0}$

~~00-1~~

birlik matritsalaridir.

TA'RIF 5: Barcha elementlari nolga teng ($a_{ij}=0$) bo'lgan matritsa nol matritsa deyiladi va 0 kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \underline{0-0-0} \underline{0-0-0} \underline{(0-0)} \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \underline{(0-0-0-0)}$$

nol matritsalar bo'ladi.

TA'RIF 6: Bir xil $m \times n$ tartibli A va B matritsalar yigindisi yoki ayirmasi deb shunday $m \times n$ tartibli S matritsaga aytiladiki, uning elementlari $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ kabi aniqlanadi va $C=A+B$ deb yoziladi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun

$$A+B = \begin{pmatrix} 5+1 & 3+0 & -1+1 \\ 0+2 & 7+(-3) & 2+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 5-1 & 3-0 & -1-1 \\ 0-2 & 7-(-3) & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Matritsalar yig'indisi uchun $A+B=B+A$ (kommutativlik),

$A+(B+C) = (A+B)+C$ (assotsiativlik) qonunlari o'rinli bo'ladi.

Bundan tashqari $A-A=0$, $A+0=A$, $\underline{A+A=2A}$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi.

TA'RIF 7: Ixtiyoriy $m \times n$ tartibli $A=\{a_{ij}\}$ matritsaning λ songa ko'paytmasi deb $\{\lambda a_{ij}\}$ matritsaga aytiladi va u λA kabi belgilanadi.

Формат: Список

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun

$$6A = \begin{pmatrix} 6 \cdot 5 & 6 \cdot 4 & 6 \cdot (-1) \\ 6 \cdot 0 & 6 \cdot 2 & 6 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 24 & -6 \\ 0 & 12 & 42 \end{pmatrix}$$

Matritsalar qo'shish va songa ko'paytirish amallari uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\lambda (A \pm B) = \lambda A \pm \lambda B, (\lambda \pm \mu) A = \lambda A \pm \mu A, \\ 0 \cdot A = O, \lambda \cdot O = O$$

TA'RIF 8: $A_{m \times p}$ va $B_{q \times n}$ matritsalar uchun $p=q$ shart bajarilganda ularning ko'paytmasi (AB) deb shunday $C_{m \times n}$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} elementlari ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) ushbu

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Shunday qilib, c_{ij} element A matritsaning i -satr elementlarini B matritsaning j -ustun mos elementlariga ko'paytirib, ularni qo'shib chiqishdan hosil qilinadi, ya'ni "satrni ustoga ko'paytirish" qoidasi bilan topiladi.

Masalan,

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $m=3, p=q=2, n=2$ bo'lgani uchun ularni ko'paytirish mumkin va $AB=C_{3 \times 2}$ matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$C_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 6 + (-2) \cdot 1 & 0 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2 \\ 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 & 4 \cdot (-4) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & -10 \\ -2 & -4 \\ 29 & -6 \end{pmatrix}$$

Matritsalar ko'paytmasi uchun $AB \neq BA$, ya'ni kommutativlik qonuni o'rinli bo'lmaydi. Ammo $A(BC) = (AB)C$ (assotsiativlik),

$A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$ distributivlik qonunlari bajariladi.

Bundan tashqari $AE=EA=A$, $A \cdot 0=0 \cdot A=0$, $(\lambda A)B=A(\lambda B)$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi.

Ma'ruza nixoyasida matritsalarining iqtisodiy ma'nosi va tadbiklarini ifodalovchi misollarni keltiramiz.

1-misol. Aloxida iqtisodiy tarmoklar o'rtasida ishlab chiqarish resurslari taksimoti jadvali quyidagicha berilgan bo'lsin. (Umumiy xajmga nisbatan foiz hisobida, rakamlar shartli)

Resurslar	Iqtisodiy tarmoklar		
	Sanoat	Kishlok xo'jalik	Boshqa tarmoklar
1. Yokiли	45	30	25
2. Elektr energiyasi	53	27	20
3. Mexnat resurslari	38	21	41
4. Suv resurslari	40	48	12

Bu jadvalni matritsa yordamida quyidagi qulay ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$A_{4 \times 3} = \begin{pmatrix} 45 & 30 & 25 \\ 53 & 27 & 20 \\ 38 & 21 & 41 \\ 40 & 48 & 12 \end{pmatrix}$$

Bu yozuvda A matritsa xar bir elementi aniq ma'noga ega. Masalan, $a_{11}=45$ sanoat tarmoqlari yokilgining 45 % ni, $a_{21}=53$ esa elektr energiyasining 53 % ini iste'mol qilishini ko'rsatadi, $a_{22}=27$ qishlok xo'jaligi elektr energiyasining 27 % ini sarflashini, $a_{33}=41$ esa mehnat resurslarining 41 % boshqa tarmoqlarda band ekanligini ifodalaydi va hokazo.

2-Misol. Korxona p_1, p_2 va p_3 kabi belgilangan 3 xil mahsulot ishlab chiqarishi ma'lum bo'lsin. Bu maxsulotlarni ishlab chikarish uchun 2 xil xomashyo s_1 va s_2 ishlatilsin. Agar a_{ij} ($i=1,2,3$; $j=1,2$) orqali i - turdagi maxsulot birligini ishlab chiqarish uchun j - tur xomashyodan qancha xarajat etilganini belgilasak, unda maxsulotlar birligini ishlab chiqarish uchun xomashyolar xarajati me'yorini $A_{3 \times 2}=(a_{ij})$ matritsa orkali qulay ko'rinishda ifodalash mumkin. Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Agar ishlab chiqarish rejasi $C=(100 \ 80 \ 130)$ satr matritsa va xomashyo birligining

bahosi $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$ ustun matritsalar ko'rinishida berilgan bo'lsa, u holda maxsulot

ishlab chiqarish rejasiga mos keladigan xomashyo xarajatlarining mikdorini bevosita quyidagicha aniqlash mumkin:

1- tur xomashyo xarajati $S_1= 2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$ birlik,

2- tur xomashyo xarajati $S_2= 3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ birlik.

Matritsalarini ko'paytirish amali orqali $S=(S_1 \ S_2)$ xomashyo xarajati satr matritsasi esa quyidagicha topiladi:

$$S = C \cdot A = (100 \ 80 \ 130) \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = (730 \ 980).$$

Umumiy xomashyo xarajati bahosi $Q=S \cdot B=730 \cdot 30+980 \cdot 50=70900$ pul biriligin tashkil etadi. Bu iqtisodiy masalaning echimini matritsalar ustida amallar orkali qisqacha quyidagicha ifodalash mumkin:

$$Q=S \cdot B=(C \cdot A) \cdot B=C \cdot (A \cdot B)=70900 .$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning tartibi qanday aniklanadi?
3. Matritsalar qanday turlarga ajratiladi?
4. Qanday elementlar diagonal elementlar deyiladi?
5. Birluk matritsa qanday ta'riflanadi?
6. Qachon matritsa nol matritsa deyiladi?
7. Qaysi shartda matritsalarini qo'shish yoki ayirish mumkin?
8. Matritsalar yig'indisi yoki ayirmasi qanday topiladi?
9. Matritsalar yig'indisi amali qanday xossalarga ega?
10. Matritsani songa ko'paytirish qanday aniqlanadi?
11. Qaysi shartda matritsalarini ko'paytirish mumkin?
12. Ko'paytma matritsa tartibi qanday topiladi?
13. Matritsalar ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
14. Matritsalarini ko'paytirish amali qanday xossalarga ega?
15. Matritsaning iqtisodiy tadbiriga misol keltiring?

7-MA'RUZA

ANIQLOVCHILAR VA ULARNING XOSSALARI.

Tayanch iboralar: aniqllovchi ta'rifi, ikkinchi tartibli aniqllovchi, uchinchi tartibli aniqllovchi, aniqllovchi xossalari, algebraik to'ldiruvchi, aniqllovchilarni satr yoki ustun bo'yicha yoyish (Laplas teoremasi), yuqori tartibli aniqllovchilar.

Ma'ruza rejası:

1. Aniqllovchi hakida tushuncha.
2. II tartibli aniqllovchi va uni hisoblash formulasi.
3. III tartibli aniqllovchi va uni hisoblash formulasi.
4. Aniqllovchining xossalari.
5. Aniqllovchining nolga teng bo'lish shartlari.
6. Aniqllovchi elementining algebraik to'ldiruvchisi.
7. Laplas teoremasi.
8. Yuqori tartibli aniqllovchilarni hisoblash.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §9-10 [3] I bob, §1 [8] V bob, §65-69,
[14]. 16-26.

TA'RIF: n -tartibli kvadrat matritsa elementlaridan ma'lum bir qoida asosida hosil qilinadigan sonli ifoda n – tartibli aniqllovchi deb ataladi.

Masalan, ikkinchi tartibli aniqllovchi deb, ikkinchi tartibli kvadrat matritsadan quyidagicha hosil qilingan va belgilangan sonli ifodaga aytiladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (1)$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 4 \cdot 5 = 18 - 20 = -2, \quad \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 4 \cdot (-2) = 50 + 8 = 58$$

Uchinchi tartibli aniqllovchi esa quyidagi sonli ifoda kabi yordamida aniqlanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} \quad (2)$$

Uchinchi tartibli aniqllovchini hisoblashga misol keltiramiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 0 + 6 \cdot 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-2) -$$

$$- (-2) \cdot 5 \cdot 3 - 6 \cdot 1 \cdot 0 - 4 \cdot (-1) \cdot (2) = 112$$

Aniqllovchilar va matritsalar orasida quyidagi o'xshashlik va farqlar mavjud:

- 1) Matritsa sonlar jadvali bo'lsa, aniqllovchi esa sonli ifoda bo'lib, uning qiymati sondan iboratdir;
- 2) Matritsa yoysimon chiziqlar bilan belgilansa, aniqllovchi to'g'ri chiziqlar bilan belgilanadi;
- 3) Ular ichidagi sonlar elementlar deyiladi;
- 4) Ular satrlar va ustunlardan iborat;
- 5) Aniqllovchilarda ustun va satrlar soni teng bo'lishi kerak, ammo matritsalarida esa bunday bo'lishi shart emas.

Endi ixtiyoriy tartibli aniqllovchilarning xossalari bilan tanishamiz. Aniqlik va soddalik uchun bu xossalarni uchinchi tartibli aniqllovchilar uchun ifodalaymiz. Bu xossalarni o'rinli ekanligini (2) formula yordamida tekshirib ko'rish mumkin va buni talabalarga mustaqil ish sifatida havola qilamiz.

1. Agar aniqllovchining barcha satrlari mos ustunlar bilan almashtirilsa, u holda aniqllovchining qiymati o'zgarmaydi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu xossadan aniqllovchining satr va ustunlari teng moxiatli ekanligi kelib chiqadi.

2. Aniqllovchining ikkita ixtiyoriy satrlari (ustunlari) o'zni o'zaro almasha, aniqllovchining faqat ishorasi teskarisiga o'zgaradi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3. Agar aniqllovchining ikkita satr (ustun) elementlari bir xil bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng.

I s b o t : Buning uchun bir xil elementli satrlarni (ustunlarni) o'rinlarini almashtiramiz. Natijada aniqllovchi ko'rinishi o'zgarmay qoladi. Bundan, oldingi xossaga asosan, $\Delta = -\Delta$ tenglik hosil bo'ladi va undan $\Delta = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

4. Satrning ustunning) umumiy ko'paytuvchisini aniqllovchi belgisidan tashqariga chiqarib, ko'paytma shaklida yozish mumkin.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Agar aniqllovchining biror satri (ustuni) nollardan iborat bo'lsa, u holda aniqllovchining qiymati nolga teng bo'ladi.

6. Agar aniqlovchining ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlari o'zaro proporsional bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng,

Masalan, aniqlovchining I va II satrlari proporsional bo'lsa,

$$\begin{vmatrix} \kappa a_{11} & \kappa a_{12} & \kappa a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \kappa \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \kappa \cdot 0 = 0$$

7. Agar aniqlovchining biror satri (ustuni) ikki had yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda bu aniqlovchi ikkita mos aniqlovchilar yig'indisiga yoyiladi

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + B_{31} & a_{32} + B_{32} & a_{33} + B_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix}$$

Umumiy holda n – tartibli ($n \in \mathbb{N}$) aniqlovchi quyidagicha yoziladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta$$

Yuqori tartibli aniqlovchilarni umumiy holda hisoblash formulalari juda murakkab ko'rinishda bo'ladi. Shu sababli uning elementining algebraik to'ldiruvchisi tushunchasi kiritiladi

TA'RIF: a_{ij} ($i=1, m, j=1, n$) elementning algebraik to'ldiruvchisi deb aniqlovchining i -satri va j -ustunini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan $(n-1)$ tartibli aniqlovchi qiymatini $(-1)^{i+j}$ ga ko'paytmasiga aytiladi va A_{ij} kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

aniqlovchining quyidagi to'qqizta algebraik to'ldiruvchilari mavjud:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix},$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

Xuddi shunday, n - tartibli aniqlovchining algebraik to'ldiruvchilarin² ta $(n-1)$ -tartibli aniqlovchilardan iborat bo'ladi.

Yuqori tartibli aniqlovchilarni hisoblash algebraik to'ldiruvchilar yordamida quyidagi teorema orqali osonroq bajariladi.

TEOREMA(Laplas): Uchinchi tartibli aniqlovchining qiymati uning istalgan satr (ustun) elementlarini ularning mos algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} \\ \Delta &= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} \\ \Delta &= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

yoki

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} \\ \Delta &= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} \\ \Delta &= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Bu tengliklarning o'rinli ekanligini to'g'ridan-to'g'ri hisoblashlar yordamida ko'rsatish mumkin. (3) yoki (4) aniqlovchini satrlar yoki ustunlar bo'yicha yoyilmasi deyiladi.

Izox: Ixtiyoriy n -tartibli aniqlovchilar uchun ham keltirilgan teoremani induksiya usulida isbotlash mumkin.

Yuqori tartibli aniqlovchi qiymatini topishda hisoblashlarni kamaytirish maqsadida uning nollari koproq bo'lgan satr yoki ustun bo'icha yoyish maqadga muvofiqir.

M i s o l: To'rtinchi tartibli aniqlovchini ikkinchi satr bo'yicha yoyib, qiymatini Laplas teoremasi orqali hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 66 - 18 = 198 - 18 = 180$$

Izox: Aniqlovchining biror satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib, ko'paytmalarni qo'shib chiqsaq, yig'indida doimo 0 hosil bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot A_{21} + a_{12} \cdot A_{22} + a_{13} \cdot A_{23} &= 0, \\ a_{12} \cdot A_{11} + a_{22} \cdot A_{21} + a_{32} \cdot A_{31} &= 0. \end{aligned}$$

O'z-O'zini nazorat etish savollari:

1. II tartibli aniqllovchi qanday hisoblanadi?
2. III tartibli aniqllovchi qaysi usullarda hisoblanadi?
3. Aniqllovchi va matritsa o'rtasida qanday o'xshashlik va farqlar bo'ladi?
4. Aniqllovchida satr va ustunlar qanday moxiyatli?
5. Aniqllovchida satrlar yoki ustunlar O'rni almashtirilsa nima bo'ladi?
6. Qaysi shartlarda aniqllovchini hisoblamasdan uning qiymati nol bo'lishini aytish mumkin?
7. Aniqllovchi elementining algebraik to'ldiruvchisi deb nimaga aytiladi?
8. Aniqllovchilar uchun Laplas teoremasi qanday ifodalanadi?
9. Yuqori tartibli aniqllovchilar qanday hisoblanadi?

8-MA'RUZA .

CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI.

Tayanch iboralar:chiziqli tenglamalar sistemasi, sistemaning koeffitsientlari, sistemaning ozod hadlari, sistemaning echimlari, birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi, birgalikda bo'lmagan sistema, aniq va aniqmas sistemalar, sistema matritsasi, sistemaning kengaytirilgan matritsasi, matritsaning rangi, Kroneker-Kapelli teoremasi, sistemaning bazis echimlari, sistemaning erkli echimlari, bir jinsli tenglamalar sistemasi, bir jinsli tenglamalar sistemasining fundamental echimlari.

Ma'ruza rejasi:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Sistemaning echimlari va ular bo'yicha turlari.
3. Matritsaning rangi.
4. Kroneker-Kapelli teoremasi.
5. Sistemaning bazis va erkli echimlari.
6. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.
7. Bir jinsli sistemaning trivial va notrivial echimlari.
8. Bir jinsli sistemaning fundamental echimlari.

Adabiyotlar:

[1]. §20, §26, §27; [14]. 38-39, 29-35, 48-56 betlar.

Ko'pgina amaliy masalalar, shu jumladan iqtisodiy masalalar, chiziqli tenglamalar sistemasi tushuchasiga olib keladi.

TA'RIF 1: n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi ko'rinishdagi sistemaga aytiladi:

[illegible]

Bu erda a_{ij} va ϵ_i ($i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$) –berilgan va ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lib, a_{ij} sonlari (1) sistemaning **koeffitsientlari**, ϵ_i esa **ozod xadlari** deyiladi.

Yig'indi belgisi yordamida (1) sistemani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = \theta_i, \quad i=1,2,\dots, m. \quad (2)$$

Agarda (1) yoki (2) chiziqli tenglamalar sistemasining a_{ij} koeffitsientlaridan tuzilgan to'rtburchakli matritsani A , x_j noma'lumlar va b_i ozod xadlardan hosil qilingan ustun matritsalarini mos ravishda X va B kabi belgilasak, unda matritsalarini ko'paytirish amalidan foydalanib bu sistemani ixcham va qulay bo'lgan $AX=B$ ko'inishda yozish mumkin.

TA'RIF 2: (1) yoki (2) sistemaning *echimi* deb shunday $x_1=k_1, x_2=k_2, \dots, x_n=k_n$ n ta sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga quyilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni ayniyatga aylanadita sonlarga aytiladiki, ular tenglamalar sistemasiga qo'yilganda har bir tenglama qanoatlantiriladi, ya'ni ayniyatga aylanadi.

Masalan,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 32 \end{cases}$$

$n=3$ noma'lumli $m=2$ ta tenglamalar sistemasining echimi $x_1=1, x_2=-2$ va $x_3=5$ ekanligini bevosita tekshirish orqali ko'rsatish mumkin.

TA'RIF 3: Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo'lmaganda bitta echimga ega bo'lsa, u holda bu sistema *birgalikda* deyiladi; agar echimga ega bo'lmasa sistema *birgalikda emas* deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi yagona echimga ega bo'lsa, u *aniq* deyiladi. Birgalikdagi tenglamalar sistemasi ko'p echimga ega bo'lsa, u *noaniq* tenglamalar sistemasi deyiladi.

Masalan, yuqorida ko'rilgan sistema birgalikda bo'lgan noaniq sistemadir, chunki u $x_1=c, x_2=(8-14c)/3$ va $x_3=(34-19c)/3$ ko'rinishdagi cheksiz ko'p echimga ega. Bunda s ixtiyoriy son bo'lib, $c=1$ bo'lganda yuqorida ko'rib o'tilgan $x_1=1, x_2=-2$ va $x_3=5$ echimlar hosil bo'ladi.

Ushbu

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{ba} \quad \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ 10x_1 - 8x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining birinchisi birgalikda va aniq (yagona $x_1=1$ va $x_2=0$ echimga ega), ikkinchisi esa birgalikda emas (uning birinchi tenglamasi o'rinli bo'lganda ikkinchi tenglamasining o'ng tomoni 4 emas, balkim 2 bo'lishi kerak).

Berilgan (1) tenglamalar sistemasini birgalikda yoki birgalikda emasligini umumiy holda aniqlash uchun uning koeffitsientlaridan tuzilgan ushbu $m \times n$ tartibli A matritsani kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Bu matritsaga ozod xadlar ustunini birlashtirib, ushbu $m \times (n+1)$ tartibli

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \epsilon_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \epsilon_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & \epsilon_4 \end{array} \right) \quad (4)$$

kengaytirilgan A_1 matritsani hosil qilamiz.

Endi quyidagi tushunchalarni kiritamiz.

TA'RIF 4: $m \times n$ tartibli S matritsaning ixtiyoriy k ta satr va ustunlarini qoldirish orqali hosil qilingan k - tartibli ($k \leq \min(m, n)$) kvadrat matritsaning aniqlovchisi C matritsaning ***k- tartibli minori*** deyiladi.

TA'RIF 5: C matritsaning noldan farqli minorlarining eng katta tartibi shu matritsaning **rangi** deyiladi va rang C yoki $r(C)$ kabi belgilanadi.

Masalan, 3×4 tartibli

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

matritsaning rangi $r(C)=2$ bo'lishini tekshirib ko'rish mumkin.

KRONEKER-KAPELLI TEOREMASI: Agar (1) sistema matritsasi A va uning kengaytirilgan matritsasi A_1 larning rangi uzaro teng, ya'ni $r(A)=r(A_1)$ bo'lsa va faqat shu holda (1) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'ladi.

Bu teoremani isbotsiz qabo'l etamiz.

Birgalikda bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasi uchun quyidagi tasdiqlar o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin:

1. Agar birgalikdagi sistema matritsasining rangi $r(A)$ tenglamalar sistemasi-ga kiruvchi noma'lumlar soni n ga teng, ya'ni $r(A)=n$ bo'lsa, u holda (1) sistema yagona echimga ega bo'ladi.
2. Agar birgalikdagi sistema matritsasining rangi $r(A)$ noma'lumlar soni n dan kichik ($r(A)<n$) bo'lsa, u holda (1) sistema noaniq bo'lib, cheksiz ko'p echimga ega.

(1) sistemada $r(A)=r<n$ bo'lsin. Agar $x_1, x_2, \dots, x_r$ noma'lumlar oldidagi koeffitsient-lardan tuzilgan matritsaning aniqlovchisi noldan farqi bo'lsa, u holda $x_1, x_2, \dots, x_r$ noma'lumlar **asosiy yoki bazis o'zgaruvchilar** deyiladi. Qolgan $n-r$ ta noma'lum esa esa **asosiy bo'lmagan yoki erkli o'zgaruvchilar** deb ataladi. (1) sistemaning barcha $n-r$ ta asosiy bo'lmagan o'zgaruvchilari nolga teng bo'lgan echimi **bazis echim** deyiladi.

Misol: Ushbu sistemani tekshiring va echimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \end{cases}$$

Echish: Asosiy va kengaytirilgan matritsalarlarni tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Bu erda $r(A) = r(A_1) = r = 2$ ekanligini tekshirib ko'rish mumkin. Sistema matritsasining rangi noma'lumlar sonidan kichik, ya'ni $r = 2 < 4$ bo'lgani uchun bu sistemacheksiz ko'p echimga egadir. Bu sistemaning x_1 va x_2 o'zgaruvchilar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan aniqlovchi noldan farkli va shu sababli ularni asosiy o'zgaruvchilar deb olish mumkin. Bundan tashkari sistema matritsasining rangi $r = 2$ bo'lgani uchun uning bir tenglamasini, masalan uchinchisini, tashlab yuborish mumkin. Asosiy o'zgaruvchilarni xosil kilingan tenglamalar sistemasining chap tomonida koldirib, kolgan x_3 va x_4 asosiy bo'lmagan o'zgaruvchilarni tenglamalarning o'ng tomoniga utkazamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -6 + 2x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 - x_2 = 5 - x_3 + x_4 \end{cases}$$

Bu sistemani maktabdan tanish bo'lgan qo'shish usulida echib,

$$x_1 = (4 - x_4)/5, \quad x_2 = (5x_3 - 7x_4 - 17)/5.$$

ekanligini topamiz. Asosiy bo'lmagan x_3 va x_4 o'zgaruvchilarga ixtiyoriy $x_3=c_1$ va $x_4=c_2$ qiymatlar berib, sistemaning cheksiz kup echimlari quyidagi ko'rinishda bo'lishini topamiz:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}c_2, \quad x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5}c_2, \quad x_3 = c_1, \quad x_4 = c_2.$$

TA'RIF 6: Agar (1) sistemaning o'ng tomonidagi barcha ozod xadlar 0 ga teng bo'lsa, u holda bu sistema chiziqli **bir jinsli** tenglamalar sistemasi deyiladi.

Demak, noma'lumli m ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

[illegible]

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi xamma vakt birgalikdadir, chunki u xech bo'lmaganda $x_1=0, x_2=0, \dots, x_n=0$ echimga ega. Bu (5) sistemaning **trivial echimi** deyiladi. Agar (5) sistemada $m \neq n$ va uning aniqlovchisi $\Delta_A \neq 0$ bo'lsa, u holda bu sistema fakat trivial echimga ega bo'ladi. Agar (5) sistemaning echimi ichida kamida bitta noldan farkli son mavjud bo'lsa, u **notrivial echim** deb ataladi. Notrivial echimlar $m < n$ bo'lganda yoki $m = n$ bo'lib, sistemaning aniqlovchisi $\Delta_A = 0$ bo'lganda mavjud bo'lishi mumkin. Boshkacha aytganda chiziqli bir jinsli tenglamalar sistema

noldan farkli echimga ega bo'lishi uchun uning koeffitsientlaridan tuzilgan A matritsaning rangi o'zgaruvchilar sonidan kam, ya'ni $r(A) < n$ bo'lishi kerak.

Bir jinsli (5) sistemaning $x_1=k_1, x_2=k_2, \dots, x_n=k_n$ echimini $e_1=(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ satr matritsa ko'rinishda belgilaymiz. Chiziqli birjinsli tenglamalar sistemasining echimlari quyidagi xossalarga ega:

1. Agar $e_1=(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ (5) sistemasining echimi bo'lsa, u holda ixtiyoriy λ soni uchun $\lambda e_1=(\lambda k_1, \lambda k_2, \lambda k_3, \dots, \lambda k_n)$ xam shu sistemasining echimi bo'ladi.
2. Agar $e_1=(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$ va $e_2=(l_1, l_2, l_3, \dots, l_n)$ (5) sistemasining echimlari bo'lsa, u holda ularning chiziqli kombinatsiyasi

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 = (c_1 k_1 + c_2 l_1, c_1 k_2 + c_2 l_2, \dots, c_1 k_n + c_2 l_n)$$

xam (5) sistemaing echimi bo'ladi.

TA'RIF 6: (5) sistemaning kandaydir $e_1, e_2, \dots, e_k$ echimlari chiziqli bog'likmas deyiladi, agarda $c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k = 0$ tenglik fakat va fakat $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$ bo'lganda bajarilsa.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi echimlarining xar kanday chiziqli kombinatsiyasi yana shu sistemaning echimi bo'lishligi yukoridagi xossalardan kelib chikadi. Shuning uchun shunday chiziqli bog'lik bo'lmagan echimlarni topish kerakki, ular orkali sistemaning barcha kolgan echimlari chiziqli ifodalansin.

TA'RIF 7: Chiziqli bog'lik bo'lmagan $e_1, e_2, \dots, e_k$ echimlar sistemasi ***fundamental echimlar*** sistemasi deyiladi, agar (5) sistemaning xar kanday echimini shu $e_1, e_2, \dots, e_k$ echimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalab bo'lsa.

TEOREMA: Agar chiziqli birjinsli tenglamalar sistemasi noma'lumlari oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan A matritsaning rangi r noma'lumlar soni n dan kichik bo'lsa, u holda (5) sistemaning xar kanday fundamental echimlar sistemasi n-r ta echimdan iborat bo'ladi va (5) sistemaning umumiy echimi

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_k e_k$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu erda $e_1, e_2, \dots, e_k$ -ixtiyoriy fundamental echimlar sistemasi, $c_1, c_2, \dots, c_k$ -ixtiyoriy sonlar va $k=n-r$.

n noma'lumli m ta (1) chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy echimi o'nga mos bo'lgan bir jinsli (5) chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy echimi bilan (1) sistemaning kandaydir xususiy echimlari yigindisiga tengligini kursatish mumkin.

Uz-uzini nazorat etish savollari.

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi kanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Sistemaning koeffitsientlari, noma'lumlari va ozod xadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning echimlari kanday ta'riflanadi?
4. Kachon sistema birgalikda va kachon birgalikda emas deyiladi?
5. Kachon sistema anik va kachon anikmas deyiladi?
6. Matritsaning rangi kanday aniklanadi?
7. Kroniker-Kapelli teoremasi nimani aniklaydi?
8. Kaysi shartda chiziqli tenglamalar sistemasi yagona echimga ega?

9. Kaysi shartda chiziqli sistema cheksiz kup echimga ega?
10. Sistemaning bazis o'zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
11. Sistemaning erkli o'zgaruvchilari deb nimaga aytiladi?
12. Kanday echim bazis echim deb ataladi?
13. Kachon chiziqli sistema bir jinsli deyiladi?
14. Trivial va notrivial echimlar kanday ta'riflanadi?
15. Kaysi shartda bir jinsli sistema notrivial echimga ega ?
16. Bir jinsli sistema echimlari kanday xossalarga ega?
17. Fundamental echimlar sistemasi kanday ta'riflanadi?
18. Fundamental echimlar soni kanday topiladi?

9- MA'RUZA .

Chiziqli TENGLAMALAR SISTEMASINI ECHISHNING KRAMER VA GAUSS USULLARI.

Tayanch iboralar: chiziqli tenglamalar sistemasi, koeffitsient, ozod xad, asosiy aniqlovchi, yordamchi aniqlovchi, Kramer formulasi, Gauss usuli.

Ma'ruza rejasi:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasining echimlari.
3. Sistemaning asosiy va yordamchi aniqlovchilari.
4. Kramer formulalari.
5. Sistemaning yagona, cheksiz kup yoki echimga ega bo'lmashlik shartlari.
6. Gauss usulining tugri yuli.
7. Gauss usulining teskari yuli.
8. Kramer va Gauss usullarining kulayliklari xamda kamchiliklari.
9. Chiziqli tenglamalar sistemasini iktisodiy masalalarni echishga tadbigiga doir mi-sollar.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §20-21 [3] I bob, §2 [8] IV bob, §51-57, V bob, §70
[14]. 40-47, 55-56 betlar.

Bu ma'ruzada oldin kurib utilgan chiziqli tenglamalar sistemasining xususiy, ya'ni noma'lumlar va tenglamalar soni teng ($n=m$) bo'lgan holda echimini topish masalasi bilan shugullanamiz.

Dastlab, maktab matematika kursidan ma'lum bo'lgan, ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini ($n=m=2$) kuramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

Bu erda a_{ij} sistemaning koeffitsientlari, b_i sistemaning ozod xadlari, x_j sistemaning noma'lumlari va (1) sistemadagi tenglamalarni ayniyatga aylantiruvchi $x_j = \alpha_j$ sonlari sistemaning echimlari deb atalishini eslatib utamiz.. Bunda sistema echimi yagona, cheksiz kup yoki mavjud bo'lmashligi mumkinligi bizga ma'lum.

(1) sistema uchun Δ asosiy va ikkita Δ_1 , Δ_2 yordamchi aniqlovchilarni quyidagicha kiritamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Δ asosiy aniqlovchi sistemaning koeffitsientlaridan xosil kilinib, yordamchi aniqlovchilar esa uning ustunlarini ozod xadlar bilan almashtirishdan xosil kilinadi.

(1) sistema tenglamalarini dastlab mos ravishda a_{22} va $-a_{12}$ larga kupaytirib, so'ngra kushamiz:

$$(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})x_1+(a_{12}a_{22}-a_{22}a_{12})x_2=B_1a_{22}-B_2a_{12}$$

Bu tenglikni kiritilgan aniqlovchilar orkali quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} B_1 & a_{11} \\ B_2 & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_1 = \Delta_1 \quad (2)$$

Shuningdek (1) sistema tenglamalarini mos ravishda $(-a_{21})$ va a_{11} larga kupaytirib kushsak, u holda

$$(a_{11}a_{21}-a_{21}a_{11})x_1+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=B_2a_{11}-B_1a_{21}$$

Yukoridagidek

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & B_1 \\ a_{22} & B_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta x_2 = \Delta_2 \quad (3)$$

Agar noma'lumlarga nisbatan (2) va (3) chiziqli tenglamalarni echsak,

$$x_1 = \Delta_1/\Delta \text{ va } x_2 = \Delta_2/\Delta \quad (4)$$

formulalarga ega bo'lamiz. Ular (1) sistema echimi uchun **Kramer formulalari** deb yuritiladi.

Endi uch noma'lumli 3 ta tenglamalar sistemasini karaylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=B_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=B_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=B_3 \end{cases} \quad (5)$$

Bu sistemaning echimi uchun xam Kramer formulalarini chikarish kiyin emas.

Quyidagi asosiy aniqlovchini kiritamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bunda i ustunni B_1, B_2, B_3 ozod xadlar ustuni bilan almashtirib $\Delta_i, i=1,2,3$ yordamchi aniqlovchilarni xosil kilamiz.

a_{ij} elementning algebraik tuldiruvchisini A_{ij} kabi belgilaylik.

(5) sistema tenglamalarini mos ravishda Δ aniqlovchidagi birinchi ustun elementlarining algebraik tuldiruvchilariga (A_{11}, A_{21}, A_{31}) kupaytirib kushib chikaylik.

$$(a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31})x_1+(a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31})x_2+(a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31})x_3=B_1A_{11}+B_2A_{21}+B_3A_{31};$$

Oxirgi munosobatni aniqlovchilar tiliga utkazsak va Laplas formulasidan foydalansak, $\Delta x_1+0x_2+0x_3=\Delta_1$ ёки $\Delta x_1=\Delta_1$ tenglamani olamiz.

Shuningdek 2-ustun yoki 3-ustun elementlari algebraik tuldiruvchilarini mos ravishda (5) sistema tenglamalariga kupaytirib kushib chiksak, $\Delta x_2=\Delta_2$ va $\Delta x_3=\Delta_3$ tenglamalarni olamiz.

Bu tenglamalardan (5) sistema uchun

$$x_1=\Delta_1/\Delta, \quad x_2=\Delta_2/\Delta, \quad x_3=\Delta_3/\Delta$$

Kramer formulalarini xosil kilamiz.

Misol: Sistema Kramer usulida echilsin:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Echish: Asosiy va yordamchi aniqlovchilarni hisoblaymiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 18, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7.$$

Kramer formulalariga asosan

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = -5/18, \quad x_2 = \Delta_2 / \Delta = -1/18, \quad x_3 = \Delta_3 / \Delta = 7/18.$$

IZOX: (1) yoki (5) sistema yagona echimga ega bo'lishi uchun $\Delta \neq 0$ bo'lishi kerak. Agarda $\Delta = 0$ va $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ bo'lsa sistema cheksiz kup echimga ega bo'ladi. Agarda $\Delta = 0$ va $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ yordamchi aniqlovchilardan kamida bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema echimga ega bo'lmaydi.

Endi sistemani Gauss usulida echishni kurib chikamiz. Bu usul mohiyatini (5) sistemani echish orkali kursatamiz. (5) sistemani Gauss usulida echish uchun uning ikkinchi tenglamasidan x_1 noma'lumni, uchinchi tenglamasidan esa x_1 va x_2 noma'lumlarni yukotib, quyidagi uchburchak ko'rinishdagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2 \\ c_{33}x_3 = d_3 \end{cases}$$

Bu Gauss usulining tugri yuli deb ataladi.

Uchburchakli sistemaning oxirgi tenglamasidan boshlab, birin-ketin x_3 , x_2 va x_1 noma'lumni ketma-ket topamiz. Bu Gauss usulining teskari yuli deb ataladi.

Misol:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Echish: Ikkinchi va uchinchi tenglamalardan x_1 noma'lumni yukotamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ -17x_2 + 16x_3 = 82 \\ 8x_2 - 5x_3 = -31 \end{cases}$$

Endi uchinchi tenglamadan x_2 noma'lumni yukotamiz:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ -17x_2 + 16x_3 = 82 \\ 43x_3 = 129 \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan $x_3 = 3$, so'ngra ikkinchi tenglamadan $x_2 = -2$ va nixoyat birinchi tenglamadan $x_1 = 1$ ekanligini topamiz.

Umumiy, $n=m \geq 4$ bo'lgan holda xam Kramer formulalari va Gauss usuli yukorida kurib utilgan singari bo'ladi.

Kramer va Gauss usullarining kulayliklari va kamchiliklarini kursatamiz.

- 1) Kramer formulalari ixtiyoriy chiziqli sistema uchun bir xil ko'rinishga ega.
- 2) Kramer formulalarida echimlarning ixtiyoriy biri topilishi mumkin.
- 3) Kramer formulasi ikki va uch noma'lumli sistema uchun kulay.
- 4) Turt va undan ortik noma'lumli sistema uchun Kramer formulalaridan foydalanish murakkab.
- 5) Gauss usuli aniqlovchilarni xisoblashni talab etmasdan, fakat koeffitsientlar va ozod xadlar ustida arifmetik amallar bajarish orkali amalga oshiriladi.
- 6) Gauss usulini kompyuterda amalga oshirish oson.
- 7) Gauss usulida juda kup arifmetik amallar bajarish talab etiladi.
- 8) Gauss usulida noma'lumlardan fakat birini topib bo'lmaydi.

Chiziqli tenglamalar sistemas iktisodiy masalalarni echishda juda keng mikiyosda kullaniladi. Kupgina iktisodiy masalalarni chiziqli tenglamalar sistemas yordamida echish jarayonida xatto yangi chiziqli dasturlash fani vujudga keldi.

Quyidagi masalalarga murojaat etaylik.

1-masala. Oyok kiyim fabrikasi 3 xil maxsulot, ya'ni etik, tufli va botinka ishlab chikarishga ixtisoslashtirilgan bo'lsin. Shu maxsulotlarni ishlab chikarish uchun 3 xil S_1 , S_2 va S_3 xomashyo ishlatilsin. Xar bir juft oyok kiyimiga sarf bo'ladigan xomashyo xarajati me'yori va xomashyolarning bir kunlik sarflanadigan mikdori quyidagi jadvalda berilgan bo'lsin:

Xomashyo turi	Bir juft oyok kiyimi iG`ch.ga sarf bo'ladigan xomashyo			Xomashyoning bir kunlik sarf mikdori. (shartli rakamlar)
	Etik	Tufli	Botinka	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Bu ma'lumotlar asosida xar bir oyok kiyimining bir kunlik ishlab chikarilish mikdori topilsin.

Echish: Masalani echish uchun etik, tufli va botinkaning bir kunlik ishlab chikarilish mikdorlarini mos ravishda x_1, x_2 va x_3 deb belgilaymiz. Unda, masala shartlariga asosan, quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini xosil kilamiz:

$$5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 800$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600$$

Bu tenglamalar sistemasini yukorida kurib utilgan usullardan biri yordamida echib, $x_1=200$, $x_2=300$ va $x_3=200$ ekanligini topamiz. Demak, fabrika bir kunda 200 juft etik, 300 juft tufli va 200 juft botinka ishlab chikarar ekan.

2-masala. 1- chi va 2-avtoxujaliklarga 2 ta zavoddan avtomobillar junatiladi. 1-avtoxujalikning extiyoji 200 avtomobil, 2- avtoxujalikning extiyoji esa 300 avtomobilni tashkil etsin. 1-zavod 350 ta, 2- zavod esa 150 ta avtomobil ishlab chikargan. Zavodlardan xar bir avtoxujalikka etkazib beriladigan bitta avtomobilga kilinadigan sarf-xarajat quyidagi jadvalda berilgan:

Zavod	Bir avtomobilni etkazib berishga bo'ladigan xarajat	
	1- avtoxujalik	2- avtoxujalik
1-zavod	15 \$	20 \$
2-zavod	8 \$	25 \$

Avtomobillarni etkazib berishga ajratilgan sarf-xarajat mikdori 7950 pul birligini tashkil etsa, zavodlardan avtomobillarni xujaliklarga etkazib berishning rejasi topilsin.

Echish: Bu masalani echish uchun i-zavoddan j-avtoxujalikka etkazib beriladigan avtomobillar mikdorini x_{ij} ($i,j=1,2$) deb belgilasak, masala shartiga kura quyidagi sistema xosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 350 \\ x_{21} + x_{22} = 150 \\ x_{11} + x_{12} = 200 \\ 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{21} + 25x_{22} = 7950. \end{cases}$$

Bu 4 noma'lumli 4 ta chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lib, uni biror usulda echish natijasida $x_{11}=50$, $x_{12}=300$, $x_{21}=150$, $x_{22}=0$ javobni xosil kilamiz. Bu echim anik iktisodiy mazmo'nga egadir, ya'ni 2-zavodda ishlab chikarilgan barcha 150 avtomobilni 2-chi avtoxujalikka, 1-zavodda ishlab chikarilgan 350 ta avtomobillarning 300 tasini 1- avtoxujalikka va kolgan 50 tasini esa 2- avtoxujalikka yuborilsa, tashish xarajatlari kursatilgan mikdorda bo'ladi.

Uz-uzini nazorat etish savollari:

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi kanday ko'rinishd bo'ladi?
2. Sistemaning koeffitsientlari va ozod xadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning echimi kanday ta'riflanadi?
4. Sistemaning asosiy aniqlovchisi deb nimaga aytiladi?
5. Sistemaning yordamchi aniqlovchilari kanday xosil kilinadi?
6. Sistema echimi uchun Kramer formulalari kanday ko'rinishda bo'ladi?
7. Kaysi shartlarda sistema yagona yoki cheksiz kup echimga ega bo'ladi?
8. Sistema kaysi shartda echimga ega bo'lmaydi?
9. Gauss usulining moxiyati nimadan iborat?
10. Kramer usuli kanday afzalliklarga va kamchiliklarga ega?
11. Gauss usuli kanday afzallik va kamchiliklarga ega?
12. Chiziqli tenglamalar sistemasining iktisodiy masalalarni echishga doir misollar keltiring.

10 – MA'RUZA

TESKARI MATRITSAs. TENGLAMALAR SISTEMASINI MATRITSALAR USULIDA ECHISH.

Tayanch iboralar: teskari matritsa, teskari matritsa xossasi, matritsalar usuli, Leontevning tarmoklararo muvozanat modeli.

Ma'ruza rejasi:

1. Teskari matritsa ta'rifi.
2. Teskari matritsani mavjudlik va yagonalik sharti.
3. Teskari matritsani topish algoritmi.
4. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish.
5. Matritsalar usulining afzalliklari va kamchiliklari.
6. Leontevning tarmoklararo muvozanat modeli.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §24-25 [3] IV bob, §2-4, [14]. 26-29, 40-41, 56-60 betlar.

T A ' R I F: Berilgan A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb shunday bir (uni kelajakda A^{-1} kabi belgilaymiz) kvadrat matritsaga aytiladiki, agarda $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ (E-birlik matritsa) shart bajarilsa.

Agarda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lsa,

$$A^{-1} = 1/\Delta \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

matritsa A ga teskari matritsa bo'lishini Laplas teoremasi yordamida kursatish mumkin. Bunda A_{ij} lar A matritsaning a_{ij} elementining algebraik tuldiruvchilaridir ($i=1,2,3; j=1,2,3$).

Misol: Teskari matritsa topilsin:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 43$$

Dastlab A matritsa elementlarining algebraik tuldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 + 4 = 16, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 8 = -17,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(-9 - 8) = 17,$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10,$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4 + 12) = -16,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 6 - 16 = -10,$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 12) = 16,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 9 = 17.$$

Natijada teskari matritsa ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$A^{-1} = 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ -10 & -16 & 17 \end{pmatrix}$$

Tekshirish utkazamiz. Darxakikat,

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= 1/43 \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ -10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1/43 \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Bu tenglikdan teskari matritsa tugri topilganligiga ishonch xosil kilamiz.

Endi uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini echishning matritsalar usuli bilan tanishamiz.

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

sistema berilgan bo'lsin. Quyidagi yordamchi matritsalarini kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Matritsalarini kupaytirish ta'rifiga asosan (1) sistemani $AX=Y$ ko'rinishida yoza olamiz. Oxirgi matritsali tenglamani har ikkala tomonini chapdan A^{-1} ga kupaytiramiz va X echimlar matritsasini hosil qilamiz:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Misol: Tenglamalar sistemasi matritsa usulida echilsin:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 20 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -11 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

Echish: Karalayotgan sistema uchun yuqorida topilgan formulalarga asosan, quyidagi tengliklarni yoza olamiz:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= A^{-1}B = \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 16 & 17 & -10 \\ -17 & -10 & 16 \\ 10 & -16 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{43} \begin{pmatrix} 43 \\ -86 \\ 129 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Demak, sistemaning echimi $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$ bo'ladi.

Xulosa qilib shuni aytish kerakki, teskari matritsa tushunchasi ixtiyoriy n - tartibli kvadrat matritsa uchun ham yuqoridagidek aniqlanadi. Matritsa usuli har kanday sondagi tenglamalar sistemasi uchun ($\Delta \neq 0$) ham qo'llanilishi mumkin va tenglamalar sistemasi, uning echimlari matritsa ko'rinishida ixcham ifodalanadi. Bu usulning kamchiligi shundan iboratki, teskari matritsani topish murakkab va juda ko'p hisoblashlarni talab etadi.

Ma'ruzaning nixoyasida tenglamalar sistemasini matritsa usulida echishning iqtisodiyotdagi tadbirga misol sifatida Leontevning tarmoqlararo muvozanat modelini kiritib chikamiz.

Xalk xujaligi n ta tarmokdan iborat degan, x_i orkali bir yilda i - tarmokning ($i=1,2,\dots,n$) ishlab chikargan yalpi maxsuloti xajmini, x_{ij} ($i,j=1,2,\dots,n$) orkali i - tarmokda ishlab chikarilgan yalpi maxsulotning j - tarmokda iste'mol kilinish mikdori va y_i orkali i -tarmokda ishlab chikarilgan yalpi maxsulotning noishlab chikarishga sarflanadigan mikdori belgilaymiz.

Bu ma'lumotlar asosida tarmoqlararo muvozanat (balans) modelini tuzish talab etiladi.

Ixtiyoriy i -tarmokda ishlab chikarilgan yalpi maxsulot mikdori x_i shu tarmok maxsulotlarini n ta tarmokda sarflangan x_{ij} mikdori va shu tarmokning noishlab chikarishga sarflangan maxsulot mikdori y_i yigindisiga teng bo'ladi, ya'ni

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (2)$$

(2) tenglamalar balans munosabatlari deyiladi. Bu tenglamalar pul qiymatlarda yoki natural mikdordlarda tuzilishi mumkin.

Endi tugri xarajatlar koeffitsienti deb ataluvchi va a_{ij} kabi belgilanib, $a_{ij} = x_{ij}/x_j$ ($i,j=1,2,3,\dots,n$) formula bilan aniqlanuvchi kattalikni kiritamiz. Bu koeffitsient j -

tarmokning bir birlik maxsulotini ishlab chikarish uchun sarflanadigan i-tarmok maxsuloti mikdorini ifodalaydi va uni uzgarmas deb karash mumkin. Bu xolda $x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j$ bo'ladi va bu tenglikni (2) sistemaga kuysak,

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3)$$

tenglamalar sistemasi xosil bo'ladi. Bu sistema tarmoklararo balans modeli deyiladi va u 1936 yilda amerikalik iktisodchi olim, Nobel mukofoti sovrindori V.Leontev tomonidan yaratilgan. Agar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(bu erda $a_{ij} \geq 0$, $x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$) belgilashlardan foydalansak, u holda (3) sistema matritsalar orkali $X = AX + Y$ ko'rinishda ifodalanishi mumkin. A va Y ma'lum bo'lsa, bu tenglamadan X ni topish mumkin. Buning uchun uni

$$X - AX = Y \Rightarrow (E - A)X = Y \quad (4)$$

shaklda yozamiz. Bundan, agar $(E - A) \neq 0$ bo'lsa $X = (E - A)^{-1} \cdot Y$ ni topamiz. $S = (E - A)^{-1}$ matritsa tulik sarf-xarajat matritsasi deyiladi. (3) sistema yoki (4) tenglama tarmoklararo muvozanatning Leontev modeli deyiladi.

Uz-uzini nazorat etish savollari:

1. Teskari matritsa kanday ta'riflanadi?
2. Teskari matritsaning mavjudlik va yagonalik sharti nimadan iborat?
3. Teskari matritsa kanday topiladi?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi matritsa ko'rinishda kanday yoziladi?
5. Sistema matritsa usulida kanday echiladi?
6. Matritsalar usulining kanday kulayliklari va kamchiliklari bor?
7. Tarmoklararo muvozanatning Leontev modeli kanday ko'rinishda bo'ladi?

11-MA'RUZA.

VEKTORLAR VA ULAR USTIDA AMALLAR.

Tayanch iboralar: skalyarlar, vektorlar, vektor moduli, vektorning geometrik talkini, nol vektor, kollinear vektorlar, vektorlar tengligi, vektorlar yigindisi, vektorlar ayirmasi, vektorlarni songa kupaytmasi, ort vektorlar, vektorning yoyilmasi, vektorning koordinatalari.

Ma'ruza rejasi:

1. Skalyar va vektor kattaliklar.
2. Vektorning geometrik ma'nosi.
3. Vektorlarning kollinearligi va tengligi.
4. Vektorlar ustida arifmetik amallar va ularning xossalari.
5. Ort vektorlar va vektorning ortlar buyicha yoyilmasi.
6. Vektorning koordinatalari.
7. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §1-7 [3] III bob, §1-2, [14]. 63-66 betlar.

Xayotda uchraydigan barcha kattaliklar matematikada ikki turga, ya'ni skalyar va vektor kattaliklarga ajratiladi.

TA'RIF1: Fakat sonli qiymatlari bilan aniklanadigan kattaliklar **skalyarlar** deb ataladi.

Masalan, massa, xajm, uzunlik, modda zichligi, guruxdagi talabalar soni skalyarlar bo'ladi. Skalyarlar a, θ, c kabi belgilanadi.

TA'RIF2: Sonli qiymati va yunalishi bilan aniklanadigan kattaliklar **vektorlar** deyiladi.

Masalan, kuch, tezlik, bosim, xarakat, okim vektor kattaliklar bo'ladi. Vektorlar $\vec{a}, \vec{\theta}, \vec{c}$ kabi belgilanadi.

TA'RIF3: $\vec{a}$ vektorning sonli qiymati uning **moduli** yoki **uzunligi** deb ataladi va $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi.

Geometrik nuktai-nazardan vektorlar yunaltirilgan kesmalar singari karaladi. Yunaltirilgan kesmaning boshi A va oxiri B nuktada bo'lsa, tegishli vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Bunda A nuqta vektorning boshi, B nuqta esa vektorning uchi,

kesma uzunligi vektor uzunligi deyiladi, ya'ni $|AB| = \left| \overrightarrow{AB} \right|$.

TA'RIF4: Boshi va uchi bitta nuqtadan iborat bo'lgan vektor **nol vektor** deyiladi.

Nol vektor $\vec{0}$ kabi belgilanib, uning moduli $|\vec{0}|=0$ bo'ladi. Bu vektor yunalishi tugrisida suz yuritib bo'lmaydi.

TA'RIF 5: Bir tugri chizikda yoki parallel tugri chiziklarda joylashgan vektorlar **kollinear** vektorlar deb ataladi.

Masalan, ABCD parallelogramm bo'lsa, $\vec{AD}$ va $\vec{BC}$, $\vec{AB}$ va $\vec{CD}$ vektorlar kollinear, $\vec{AD}$ va $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ va $\vec{AB}$ vektorlar esa kollinear bo'lmaydi.

Izox. Nol vektor $\vec{0}$ xar kanday $\vec{a}$ vektorga kollinear deb xisoblanadi.

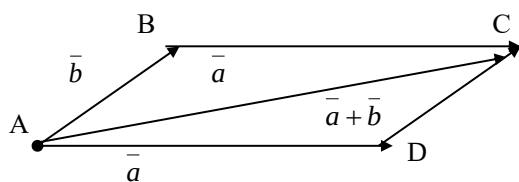
TA'RIF 6: Ikkita $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar teng deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ kabi belgilanadi, agar-da quyidagi uchta shart bajarilsa:

1. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear;
2. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil uzunlikka ega, ya'ni $|\vec{a}|=|\vec{b}|$;

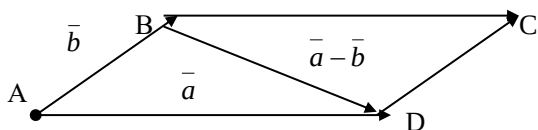
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ bir xil yunalishga ega.

Masalan, ABCD parallelogrammda $\vec{AD}=\vec{BC}$, $\vec{AB}=\vec{DC}$ bo'ladi. Bu erdan vektorlarni parallel kuchirish mumkinligi kelib chikadi.

Endi ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni qo'shish va ayirish amalini kiritamiz. Buning uchun parallel kuchirish orkali ularning boshlarini bitta A nuqtaga keltiramiz. Unda bu vektorlarni $\vec{a}=\vec{AD}$, $\vec{b}=\vec{AB}$ kabi belgilab, ABCD parallelogrammni hosil qilamiz.



Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb parallelogrammning A uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\vec{AC}$ vektorga aytiladi va $\vec{a}+\vec{b}$ kabi belgilanadi. Bu vektorlarning $\vec{a}-\vec{b}$ ayirmasi parallelogrammning B uchidan chiquvchi diagonalidan hosil qilingan $\vec{BD}$ vektorga aytiladi.



Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

TA'RIF7: $\vec{a}$ vektorni λ songa (skalyarga) ko'paytmasi deb, $\lambda\vec{a}$ kabi belgilanadigan va quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan vektorga aytiladi:

1. $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, ya'ni vektorning uzunligi. $|\lambda|$ marta o'zgaradi;
2. $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar kollinear;
3. $\lambda > 0$ bo'lsa $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ bir xil yo'nalgan,
 $\lambda < 0$ bo'lsa $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ qarama-qarshi yo'nalgan.

Masalan, ABCD trapetsiya bo'lib, uning asoslari $AD=8$ va $BC=4$ bo'lsa, unda $\vec{AD}=2\vec{BC}$ va $\vec{AD}=-2\vec{CB}$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Izox. $\lambda=0$ bo'lsa, har qanday $\vec{a}$ vektor uchun $0\cdot\vec{a}=\vec{0}$ bo'ladi.

Vektorning songa ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1. $\lambda(\beta\vec{a})=\beta(\lambda\vec{a})$
2. $(\lambda\pm\beta)\vec{a}=\lambda\vec{a}\pm\beta\vec{a}$
3. $\lambda(\vec{a}\pm\vec{b})=\lambda\vec{a}\pm\lambda\vec{b}$

Bu erda α va β ixtiyoriy sonlar, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ixtiyoriy vektorlardir.

TA'RIF8: $(-1)\vec{a}$ vektor $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi va $-\vec{a}$ kabi belgilanadi. Bunda doimo $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ bo'ladi.

Endi bir tekislikda joylashgan vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritamiz. Buning uchun bu tekislikda XOY koordinatalar sistemasini olamiz. OX(OY) koordinata o'qida joylashgan, musbat yo'nalishda yo'nalgan va uzunligi birga teng bo'lgan $\vec{i}(\vec{j})$ vektorni kiritamiz.

Kiritilgan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar **ort vektorlar** yoki kiskacha **ortlar** deb ataladi. Endi berilgan $\vec{a}$ vektorni yo'naltirilgan kesma sifatida qarab, uning OX va OY o'qdagi proektsiyalarini qaraymiz. Bu proektsiyalar ham yo'naltirilgan kesma bo'lib, ular $\vec{a}$ vektorning OX va OY o'qdagi proektsiyalari deb ataladi va $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$ kabi belgilanadi. Unda, vektorlarni qo'shish ta'rifidan foydalanib, $\vec{a}=\vec{a}_x+\vec{a}_y$ tenglikni yozish mumkin.

Endi $\vec{a}$ vektor proektsiyalarining uzunligini $|\vec{a}_x|=|x|$, $|\vec{a}_y|=|y|$ kabi belgilaymiz. $\vec{a}_x$ va $\vec{i}$ ort ($\vec{a}_y$ va $\vec{j}$ ort) kollinear vektorlar bo'ladi, chunki ular OX(OY) koordinata o'qida joylashgan. Unda $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$ bo'lgani uchun, vektorlarni songa ko'paytmasi ta'rifiga asosan, $\vec{a}_x=x\vec{i}$ va $\vec{a}_y=y\vec{j}$ deb yozish mumkin. Bu erda $\vec{a}_x$ va $\vec{i}$ ort bir xil yo'nalgan bo'lsa, $x=|\vec{a}_x|$ deb, qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, $x=-|\vec{a}_x|$ deb olinadi. Xuddi shunday tarzda u qiymati $\pm|\vec{a}_y|$ kabi olinadi.

Bu holda tekislikdagi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorini $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortlar orqali

$$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j} \quad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

TA'RIF 9: (1) tenglik $\vec{a}$ vektorning ortlar bo'yicha yoyilmasi, x va y sonlari esa uning koordinatalari deb ataladi va $\vec{a}(x,y)$ kabi ifodalanadi.

Masalan, $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ vektorning koordinatalari $x=2$, $y=-3$ bo'ladi.

Nol vektor uchun $\vec{0} = 0\cdot\vec{i}+0\cdot\vec{j}$ bo'lgani uchun uning koordinatalari $x=0$, $y=0$ bo'ladi.

Har qanday $\vec{a}$ vektor uzining x va y koordinatalari bilan (1) tenglik orqali to'liq aniqlanadi. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tengligi, kollinearligi va ular ustidagi qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish amallarining natijalari oson aniqlanadi.

TEOREMA 1: $\vec{a}(x_1,y_1)$ va $\vec{b}(x_2,y_2)$ vektorlar teng bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari teng, ya'ni $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ bo'lishi zarur va etarli.

TEOREMA2: $\vec{a}(x_1,y_1)$ va $\vec{b}(x_2,y_2)$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari proporsional, ya'ni

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \Rightarrow x_1 = kx_2, y_1 = ky_2$$

bo'lishi zarur va etarli.

Masalan, $\vec{a}(3,-2)$ va $\vec{b}(9,-6)$ kollinear vektorlar, chunki $9/3=(-6/-2)=3$.

TEOREMA3: $\vec{a}(x_1,y_1)$ va $\vec{b}(x_2,y_2)$ vektorlar yig'indisi yoki ayirmasining koordinatalari mos koordinatalarning yig'indisi yoki ayirmasiga teng bo'ladi, ya'ni

$$\vec{a}(x_1,y_1) \pm \vec{b}(x_2,y_2) = \vec{c}(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

Masalan, $\vec{a}(4,-2)$ va $\vec{b}(5,9)$ bo'lsa, $\vec{a}+\vec{b}=(4+5,-2+9)=(9,7)$, $\vec{a}-\vec{b}=(4-5,-2-9)=(-1,-11)$ koordinatali vektorlardan iborat bo'ladi.

TEOREMA4: $\vec{a}(x,y)$ vektorning λ songa ko'paytmasining koordinatalari uning har bir koordinatasini λ songa ko'paytirishdan hosil bo'ladi, ya'ni $\lambda\cdot\vec{a}(x,y)=\vec{c}(\lambda x, \lambda y)$

Masalan, $\vec{a}(4,-7)$ bo'lsa, $3\vec{a}=(3\cdot4,3\cdot(-7))=(12,-21)$ koordinatali vektor bo'ladi.

Bu teoremlarning isboti talabalarga mustaqil ish sifatida beriladi.

Fazodagi vektorlarning koordinatalari tushunchasini kiritish uchun OX, OY va OZ o'qlari bo'yicha $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ ort vektorlarni kiritamiz. Unda yuqorida ko'rsatilgan singari, fazodagi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. Bu tenglik $\vec{a}$ vektorning ortlar bo'yicha yoyilmasi deb atalib, undagi x , y va z sonlari uning koordinatalari deyiladi va $\vec{a}(x,y,z)$ kabi yoziladi. Fazodagi vektorlar uchun ham yuqorida ko'rilgan teoremlardagi tasdiqlar o'rinli bo'ladi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari.

1. Qanday kattaliklar skalyarlar deyiladi?
2. Skalyar miqdorlarga misollar keltiring.
3. Qanday kattaliklar vektorlar deb ataladi?
4. Vektorlarga misollar keltiring.
5. Vektorlarning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
6. Vektorning moduli deb nimaga aytiladi?
7. Qanday vektor nol vektor deyiladi?
8. Qanday vektorlar kollinear deyiladi?
9. Qachon vektorlar teng deb hisoblanadi?
10. Vektorlar yig'indisi qanday aniqlanadi?
11. Vektorlar yig'indisi qanday xossalarga ega?
12. Vektorni songa ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
13. Vektorni songa ko'paytmasi qanday xossalarga ega?
14. Ort vektorlar deb qanday vektorlar tushuniladi?
15. Vektorning ortlar bo'yicha yoyilmasi qanday aniqlanadi?
16. Vektorning koordinatalari qanday topiladi?
17. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning tenglik va kollinearlik sharti nimadan iborat?
18. Koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida arifmetik amallar qanday bajariladi?

12-MA'RUZA

VEKTORLARNING SKALYAR KUPAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TADBIKLARI.

Tayanch iboralar: skalyar ko'paytma, skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosi, skalyar ko'paytma xossalari, vektorlarning ortogonalligi, skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi, ikki vektor orasidagi burchak.

Ma'ruza rejas:

1. Skalyar ko'paytma ta'rifi.
2. Skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosi.
3. Skalyar ko'paytma xossalari.
4. Vektorlarning ortogonalligi.
5. Skalyar ko'paytmaning koordinatalardagi ifodasi.
6. Skalyar ko'paytmaning tadbiklari.
7. Skalyar ko'paytmaning iqtisodiy ma'nosiga misol.

Adabiyotlar.

[1] I bob, §8 [3] III bob, §3-4 [14]. 66-68 betlar.

TA'RIF: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning **skalyar ko'paytmasi** deb $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yoki $(\vec{a}, \vec{b})$ kabi belgilanadigan va

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

formula bilan aniqlanadigan songa aytiladi. Bu erda φ orkali $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasida burchak belgilangan.

Bu erda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning (1) formula orqali ko'paytirilganda son, ya'ni skalyar kattalik hosil bo'ladi va shu sababli $\vec{a} \cdot \vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi.

Skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosini ko'ramiz. $\vec{F}$ kuch moddiy nuqtaga ta'sir etib, uni to'g'ri chiziq bo'ylab $\vec{S}$ vektor bo'yicha xarakatlantirgan bo'lsin. Agar-da kuch va harakat yo'nalishlari orasidagi burchak φ bo'lsa, bajarilgan A ish miqdori

$$A = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi$$

formula bilan aniqlanishi bizga fizika kursidan ma'lum. Ammo bu formulani (1) ga asosan $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ deb yozish mumkin. Demak, $\vec{F}$ kuch va $\vec{S}$ harakat vektorlarining skalyar ko'paytmasi bajarilgan ishni ifodalaydi.

Skalyar ko'paytmaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
3. $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda \vec{b}$
4. $(\vec{a} \pm \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} \pm \vec{b} \cdot \vec{c}$

TA'RIF: $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi = 90^\circ$ bo'lsa, ular ortogonal vektorlar deyiladi va $\vec{a} \perp \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Masalan, oldingi ma'ruzada kurib utilgan ort vektorlar ortogonaldir, ya'ni $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$ va $\vec{j} \perp \vec{k}$.

TEOREMA. Noldan farqli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar ortogonal bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lishi zarur va etarli.

I s b o t. Zaruriyligi. $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsin. Unda ular orasidagi burchak $\varphi = 90^\circ$ bo'ladi va skalyar ko'paytma ta'rifiga asosan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0 = 0$$

Etarliligi. $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ bo'lib, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ bo'lsin. Unda skalyar ko'paytma ta'rifidan

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 0 \Rightarrow \cos \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi tekislikda yotuvchi va koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}(x_1, y_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini topamiz. Buning uchun $\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ va $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ va $\vec{j} \cdot \vec{i} = 0$ ekanligidan va skalyar ko'paytmaning 3) va 4) xossalariidan foydalanamiz.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) = x_1 x_2 \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + y_1 x_2 \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \vec{j} \cdot \vec{j} = \\ &= x_1 x_2 \cdot 1 + x_1 y_2 \cdot 0 + y_1 x_2 \cdot 0 + y_1 y_2 \cdot 1 = x_1 x_2 + y_1 y_2 \end{aligned}$$

Demak

$$\vec{a}(x_1, y_1) \cdot \vec{b}(x_2, y_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2, \quad (2)$$

ya'ni vektorlarning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Masalan, $\vec{a}(3, 6)$ va $\vec{b}(5, -2)$ bo'lsa, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 5 + 6 \cdot (-2) = 15 - 12 = 3$ natijani olamiz.

Xuddi shunday tarzda fazodagi $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi uchun

$$\vec{a}(x_1, y_1, z_1) \cdot \vec{b}(x_2, y_2, z_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad (3)$$

formula o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Endi skalyar ko'paytma tadbiklari sifatida quyidagi masalalarni ko'ramiz.

1-masala. $\vec{a}(x, y, z)$ vektorning modulini toping.

Echish. Skalyar ko'paytmaning 2) xossasiga va (3) formulaga asosan

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x \cdot x + y \cdot y + z \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4)$$

Masalan, $\vec{a}(3, 4, 12)$ vektorning moduli

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

2-masala. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

Echish. Skalyar ko'paytma ta'rifi (1), (3) va (4) formulalarga asosan

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \quad (5)$$

Masalan, $\vec{a}(1, 0, 1)$ va $\vec{b}(0, 1, 1)$ vektorlar orasidagi φ burchak uchun

$$\cos \varphi = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

natijani olamiz va undan $\varphi = 60^\circ$ ekanligini topamiz.

3-masala. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning ortogonallik shartini toping.

Echish. $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lgani uchun ular orasidagi burchak $\varphi = 90^\circ$ bo'ladi va shu sababli $\cos \varphi = 0$. Unda (5) formuladan

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0 \quad (6)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikki vektorning ortogonallik shartidir.

Masalan, $\vec{a}(3, -2, 1)$ va $\vec{b}(5, 7, -1)$ vektorlar ortogonaldir, chunki

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 7 + 1 \cdot (-1) = 15 - 14 - 1 = 0$$

4-masala. Fazodagi $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Echish. Bu nuqtalarni kesma bilan tutashtirib, $\overline{AB}$ vektorni xosil qilamiz. Ma'lumki, bu vektorning koordinatalari uning uchi bilan boshi koordinatalari ayirmasiga teng bo'ladi, ya'ni $\overline{AB}(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$. Unda (4) formulaga asosan,

$$d = |\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (7)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Masalan, $A(5, -3, 1)$ va $B(8, 1, 13)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$d = \sqrt{(8 - 5)^2 + (1 - (-3))^2 + (13 - 1)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

bo'ladi.

Tekislikdagi vektorlar uchun 1-4 masalalarning echimlarini topishni talabaga mustaqil ish sifatida havola etamiz.

Skalyar ko'paytmaning iqtisodiy ma'nosini ko'rsatish uchun uch xil mahsulotlarning narx va miqdorlarini ifodalovchi ushbu $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ va $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$ vektorlarni kiritamiz. Unda ularning skalyar ko'paytmasi $\vec{p} \cdot \vec{q} = p_1 q_1 + p_2 q_2 + p_3 q_3$ uchala maxsulot qiymatini ifodalaydi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari.

1. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
2. Vektorlar skalyar ko'paytmasining mexanik ma'nosi nimadan iborat?
3. Skalyar ko'paytma qanday xossalarga ega?
4. Qanday vektorlar ortogonal vektorlar deyiladi?
5. Vektorlarning ortogonalligini zaruriy va etarli sharti nimadan iborat?
6. Skalyar ko'paytma vektorlarning koordinatalari orqali qanday ifodalanadi?
7. Ikki vektor orasidagi burchak qanday topiladi?
8. Ikki vektorning ortogonallik sharti koordinatalarda qanday ifodalanadi?
9. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
10. Skalyar ko'paytmani iqtisodiy ma'nosiga misol keltiring.

13-MA'RUZA

VEKTORIAL KO'PAYTMA, UNING XOSSALARI VA TADBIQLARI

Tayanch iboralar: vektorial ko'paytma, vektorial ko'paytma xossalari, vektorial ko'paytmani hisoblash, kollinear vektorlar.

Ma'ruza rejası:

1. Vektorial ko'paytma ta'rifi.
2. Vektorial ko'paytmaning mexanik ma'nosi.
3. Vektorial ko'paytmaning xossalari.
4. Orlarning vektorial ko'paytmasi.
5. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning vektorial ko'paytmasi.
6. Vektorial ko'paytma yordamida echiladigan masalalar.
7. Vektorlarning kollinearlik sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §11 [3] III bob, §5-6

TA'RIF: $\vec{a}$ vektoring $\vec{b}$ vektorga **vektorial kupaytmasi** deb, quyidagi uchta shartni qanoatlantiruvchi yangi $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektorga aytiladi:

1. $\vec{c}$ ning uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga teng bo'lib, quyidagicha ifodalanadi:

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$, bu erda $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, ya'ni vektorlar orasidagi burchakni ifodalaydi.

2. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar tekisligiga perpendikulyar, ya'ni

$$\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \quad \vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}.$$

3. $\vec{c}$ vektor shunday yo'nalganki, uning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng kiska burilish soat strelkasi xarakatiga teskari bo'ladi.

Agarda $\vec{F}$ radius vektori $\vec{r}$ bo'lgan moddiy A nuqtaga ta'sir etuvchi kuch bo'lsa, u holda $\vec{F} \times \vec{r}$ vektorial ko'paytma $\vec{F}$ kuchni A nuqtaga nisbatan momentini ifodalaydi.

Vektorial kupaytma xossalari.

1. Vektorial ko'paytmada ko'paytuvchilarning o'rni almasha, ko'paytmaning faqat ishorasi o'zgaradi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$

2. Vektorial ko'paytmada o'zgarmas (ko'paytuvchini tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni

$$\vec{a} \times (\lambda \vec{e}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{e} = \lambda (\vec{a} \times \vec{e})$$

3. Vektorial ko'paytma uchun taqsimot qonuni o'rinli, ya'ni

$$\vec{a} \times (\vec{e} + \vec{m}) = \vec{a} \times \vec{e} + \vec{a} \times \vec{m}$$

TEOREMA. Ikkita nolmas $\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlar kollinear bo'lishlari uchun ularning vektorial ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va etarli, ya'ni $\vec{a} \parallel \vec{e} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{e} = 0$

Isboti: $\vec{a} \parallel \vec{e}$ bo'lsin. U holda $\varphi=0$ yoki $\varphi=\pi$ va $\sin \varphi=0$. Demak,

$|\vec{a} \times \vec{e}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}| \sin \varphi = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}| \cdot 0 = 0$. Uzunligi nolga teng bo'lgan vektorning uzi ham nol vektor bo'ladi, ya'ni $\vec{a} \times \vec{e} = 0$.

Endi, aksincha $\vec{a} \times \vec{e} = 0$ bo'lsin. U holda $|\vec{a}| \cdot |\vec{e}| \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{e}| = 0$ bo'ladi. Bunda $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{e}| \neq 0$ bo'lgani uchun faqat $\sin \varphi = 0$, ya'ni $\varphi = 0$ yoki $\varphi = \pi$ ekanligi kelib chiqadi. Bu esa $\vec{a} \parallel \vec{e}$ ekanligini bildiradi.

Natija: Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ bo'ladi.

Misol: $(\vec{a} - 2\vec{e}) \times (2\vec{a} + \vec{e})$ ko'paytmani soddalashtiring.

Echish: $(\vec{a} - 2\vec{e}) \times (2\vec{a} + \vec{e}) = 2\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{e} - 2\vec{e} \times 2\vec{a} - 2\vec{e} \times \vec{e} = 5\vec{a} \times \vec{e}$

Vektorial ko'paytmani koordinatalarda xisoblash.

Avval koordinata o'qlaridagi $\vec{i}$, $\vec{j}$ va $\vec{k}$ ortlarning vektorial ko'paytmasini hisoblaymiz. Vektorial ko'paytmaning ta'rifiga asosan

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \quad \vec{j} \times \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Endi $\vec{i} \times \vec{j}$ vektorni hisoblaymiz. Ort vektorlar ta'rifiga asosan

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1, \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \quad |\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Bu erdan va vektorial ko'paytmaning ta'rifidan $\vec{i} \times \vec{j}$ vektor OZ uki buylab yunalgan va uning uzunligi 1 ga teng. Demak, $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ ekan. Xuddi sho'nga o'xshash $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$. Vektorial ko'paytmaning 1 – xossasiga binoan

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlar uzining koordinatalari bilan berilgan bo'lsin, ya'ni

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}; \quad \vec{e} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k};$$

Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini topamiz. Vektorial ko'paytma xossalari va ortlarning vektorial ko'paytmasiga asosan

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x (\vec{i} \times \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + \\
&+ a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \times \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) + \\
&+ a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) = 0 + a_x b_y \vec{k} - a_x b_z \vec{j} - a_y b_x \vec{k} + 0 + a_y b_z \vec{i} + a_z b_x \vec{j} + a_z b_y \vec{i} + 0 = \\
&= (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}.
\end{aligned}$$

Bunda c_x, c_y, c_z koordinatalar orqali mos qavslardagi ifodalar belgilandi. Bu koordinatlarni mos ravishda aniqlovchilar yordamida xam ko'rsatsa bo'ladi:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

yoki

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Misol. $\vec{a}(2; 3; -1)$ va $\vec{b}(3; -1; -4)$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini toping.

Echish:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k}$$

Endi vektorial ko'paytmaning ba'zi bir tadbirlarini ko'ramiz.

1-masala. $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ va $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$ vektorlarga yasalgan parallelogrammning yuzini toping.

Echish: Vektorial ko'paytmaning ta'rifiga asosan parallelogramm yuzi quyidagicha topiladi:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$$

Misol. $\vec{a}(2; 3; -1)$ va $\vec{b}(3; -1; -4)$ vektorlarga yasalgan parallelogramm yuzasini toping.

Echish: Oldin ko'rsatilganga asosan

$$\vec{a} \times \vec{b} = -13\vec{i} + 5\vec{j} - 11\vec{k}$$

bo'lgani uchun, izlangan S yuza

$$S = \sqrt{(-13)^2 + 5^2 + (-11)^2} = \sqrt{169 + 25 + 121} = \sqrt{315} = 3\sqrt{35}$$

Natija. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan uchburchakning yuzi

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

formula bilan topiladi.

2-masala. $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ va $\vec{e}(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z)$ vektorlarning kollinearlik shartini toping.

Echish: Oldin ko'rilgan teoremda $\vec{a}$ va $\vec{e}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun ularning vektorial ko'paytmasi $\vec{a} \times \vec{e} = 0$ bo'lishi kerak ekanligi ko'rsatilgan edi. Bu tenglikni koordinatalarda ifodalaymiz:

$$\vec{a} \times \vec{e} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ \epsilon_x & \epsilon_y & \epsilon_z \end{vmatrix} = 0.$$

Bu aniqlovchining birinchi satri vektorlardan, ikkinchi va uchinchi satrlari esa skalyarlardan iborat bo'lgani uchun, yuqoridagi tenglik faqat

$$\frac{a_x}{\epsilon_x} = \frac{a_y}{\epsilon_y} = \frac{a_z}{\epsilon_z}$$

bo'lganda o'rinli bo'ladi. Bu tenglik vektorlarning kollinearlik shartini ifodalaydi.

Misol. $\vec{a}(m, 3, 2)$ va $\vec{e}(4, 6, n)$ vektorlar m va n parametrlarning qanday qiymatlarida kollinear bo'lishini toping.

Echish. Kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{4} = \frac{3}{6} = \frac{2}{n} \Rightarrow m = 2, n = 4.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Vektorial ko'paytma qanday ta'riflanadi?
2. Vektorial ko'paytmaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
3. Vektorial ko'paytma qanday xossalarga ega?
4. Orlarning vektorial ko'paytmasi qanday topiladi?
5. Vektorial ko'paytma koordinatalarda qanday ifodalanadi?
6. Ikkita vektorlardan hosil qilingan parallelogramm va uchburchak yuzalari qanday topiladi?
7. Vektorlarning kollinearlik sharti nimadan iborat?

14 -MA'RUZA

VEKTORLARNING ARALASH KO'PAYTMASI, UNING XOSSALARI VA TADBIQLARI.

Tayanch iboralar: aralash ko'paytma, uning geometrik ma'nosi, komplanar vektorlar, aralash ko'paytma xossalari, aralash ko'paytmani koordinatalar orqali ifodalash, aralash ko'paytma tadbiqlari.

Ma'ruza rejası:

1. Vektorlarning aralash ko'paytmasi.
2. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi.
3. Aralash ko'paytmaning xossalari.
4. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblash.
5. Aralash ko'paytma yordamida echiladigan masalalar.
6. Vektorlarning komplanarlik sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §12 [3] III bob, §7

Uchta a, b, c vektorlarni uzaro kupaytirish masalasini kuraylik. Agar a va b vektorlarni skalyar ko'paytirib, natijani c vektorga ko'paytirsak, u holda c vektorga kollinear vektor hosil bo'ladi. Agarda birinchi ikkita vektorni vektorial ko'paytirib, so'ngra hosil bo'lgan natijani uchinchi c vektorga yana vektorial ko'paytirsak, natijada yana bir yangi vektor hosil qilamiz. Bundan tashkari uchta vektorni quyidagi usulda ham ko'paytirish mumkin.

TA'RIF 1: a, b, c vektorlarning aralash kupaytmasi deb $a \times b$ vektorial ko'paytmani c vektorga skalyar ko'paytmasi kabi aniqlanadigan songa aytiladi va $a \cdot b \cdot c$ kabi belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga asosan aralash (vektor – skalyar) ko'paytma

$$a \cdot b \cdot c = (a \times b) \cdot c$$

ko'rinishda bo'ladi.

TA'RIF 2: Vektorlar komplanar deyiladi, agarda ular bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda joylashgan bo'lsa.

Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosini ko'rib o'taylik. Buning uchun komplanar bo'lmagan a, b, c vektorlarni karaylik. Ma'lumki, $a \times b$ uzunligi ko'paytuvchi vektorlardan tuzilgan parallelogrammning yuzasiga teng va parallelogramm tekisligiga perpendikulyar yo'nalgan vektordan iborat bo'ladi. Agar $a \times b$ vektorga c vektorni proektsiyalasak, u holda shu proektsiya parallelogramm tekisli-

giga perpendikulyar bo'lib, uning moduli a, b, c vektorlarga kurilgan parallelopiped balandligi H ni ifodalaydi. Unda bu parallelopiped hajmi uchun

$$V = S_{\text{acoc}} \cdot H = |(a \times b) \cdot c|$$

formulaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, aralash ko'paytma parallelepiped hajmini ifodalash ekan.

Endi aralash ko'paytmaning xossalarini ko'rib o'tamiz:

Aralash ko'paytmada vektorial va skalyar ko'paytma amallari o'rnini almashtirish mumkin, ya'ni

$$(a \times b) \cdot c = a \cdot (b \times c).$$

Shu sababli aralash ko'paytmada amallarni ko'rsatmasdan, qisqacha abc kabi yozish mumkin.

1. Aralash ko'paytmada ko'paytuvchilar o'rnini soat miliga teskari yo'nalish bo'yicha doiraviy ravishda almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmasdan qoladi, ya'ni

$$abc = cab = bac = bac.$$

Bo'ng'a aralash ko'paytmaning aylanma xossasi deb yuritishadi.

2. Aralash ko'paytmada yonma – yon turgan vektorlarni o'rnini almashtirilsa, uning ishorasi teskarisiga o'zgaradi, ya'ni

$$abc = -bac = -cba = -cba$$

Skalyar hamda vektorial ko'paytmalarning qanday sharoitda nolga teng bo'lishini taxlil qilgan edik. Bu savolni endi aralash ko'paytma uchun ko'rib chiqaylik. Quyidagi xollar bo'lishi mumkin:

ko'paytuvchi vektorlardan kamida bittasi nol vektor;

ko'paytuvchi vektorlardan kamida ikkitasi kollinear;

ko'paytuvchi vektorlar komplanar.

Birinchi holda aralash ko'paytmaning nol bo'lishi o'z – o'zidan kelib chiqadi. Ikkinchi holda, ya'ni ikkita vektor kollinear bo'lsa, unda ularning vektorial ko'paytmasi nol va shu sababli aralash ko'paytma ham nolga teng bo'ladi. Uchinchi holda $a \times b$ va c vektorlar perpendikulyar bo'ladi va shu tufayli ularning skalyar ko'paytmasidan hosil bo'lgan aralash ko'paytma nol bo'ladi.

Natijada quyidagi tasdiqni olamiz:

TEOREMA. Noldan farqli uchta vektorning komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Koordinatalari bilan berilgan $a=(a_x, a_y, a_z)$, $b=(b_x, b_y, b_z)$, $c=(c_x, c_y, c_z)$ vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblash formulasini keltirib chiqaramiz. Vektorial ko'paytmani hisoblash formulasiga asosan

$$a \times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}.$$

Skalyar ko'paytmani hisoblash formulasi va yuqoridagi tenglikka hamda aniqlovchining satr bo'yicha yoyilmasiga asosan

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = A c_x + B c_y + C c_z = \begin{vmatrix} c_z & c_x & c_y \\ a_x & a_y & a_z \\ b_z & b_x & b_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_z & c_x & c_y \end{vmatrix}$$

Demak, aralash ko'paytma ko'paytuvchi vektorlarning koordinatalaridan tuzilgan III tartibli aniqlovchi kabi hisoblanadi.

Masalan, $\mathbf{a}=(3,1,-2)$, $\mathbf{b}=(4, 0, 1)$, $\mathbf{c}=(0,2,-1)$ vektorlarning aralash ko'paytmasini topamiz:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -16 - 6 + 4 = -18.$$

Aralash ko'paytmaning koordinatalardagi ko'rinishidan foydalanib, uchta vektorlarning komplanarlik shartini topamiz:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

Aralash ko'paytmadan foydalanib, quyidagi masalalarni echamiz :

M a s a l a 1 : $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorlardan tuzilgan uchburchakli piramida xajmini toping.

E c h i s h : Berilgan $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ va $\mathbf{c}$ vektorlardan tuzilgan piramidaning asosidagi $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vektorlar hosil qilgan uchburchak yuzasini S , balandligi

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = h$ va xajmini V deb olsak, $V = Sh/3$ tenglik o'rinli bo'ladi. Shu vektorlardan tuzilgan parallelopiped asosi yuzasi $2S$, balandligi esa h bo'ladi. Bu parallelopiped xajmini V_0 deb olsak, $V_0 = 2Sh = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|$ bo'ladi.

Bu holda piramida xajmi

$$V = V_0/6 = |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}|/6 = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

formula bilan hisoblanadi.

M a s a l a 2 : Fazodagi to'rtta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ va $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarni bir tekislikda yotish shartini toping.

E c h i s h : M_1, M_2, M_3 va M_4 nuqtalar bir tekislikda yotishi uchun

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \overrightarrow{M_1 M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1),$$

$\overrightarrow{M_1 M_4} = (x_4 - x_1, y_4 - y_1, z_4 - z_1)$ vektorlarni komplanar bo'lishi zarur va etarli, ya'ni

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

shart kelib chikadi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Vektorlarning aralash ko'paytmasi qanday ta'riflanadi?
2. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Aralash ko'paytma natijasida qanaqa kattalik hosil bo'ladi?
4. Aralash ko'paytma qanday xossalarga ega?
5. Aralash ko'paytma koordinatalar orqali qanday topiladi?
6. Uchta vektordan hosil qilingan parallelopiped va piramida xajmi qaysi formula bilan topiladi?
7. Uchta vektorning komplanarlik sharti nimadan iborat?
8. To'rtta nuqta kaysi shartda bir tekislikda yotadi?

15-MA'RUZA

KO'P O'LCHOVLI VEKTOR VA VEKTOR FAZOLAR.

Tayanch iboralar: n o'lchovli vektor, n o'lchovli vektorlarning tengligi, vektorlar yig'indisi, vektorlarni songa ko'paytmasi, vektor fazo, chiziqli bog'liklik vektorlar, erkli vektorlar, vektor fazo o'lchovi, bazis, vektorni bazisdagi yoyilmasi, vektorning koordinatalari.

Ma'ruza rejası:

1. Ko'p o'lchovli vektorlar va ular ustida chiziqli amallar;
2. Chiziqli amallarning xossalari;
3. Vektor fazolar ;
4. Chiziqli bog'lik va erkli vektorlar;
5. Vektor fazolarning o'lchovi va bazisi;
6. Vektorlarni bazis bo'yicha yoyilmasi va uning yagonaligi.

Adabiyotlar:

[14]. 68-76 betlar.

Oljingi ma'ruzalarda tekislik va fazoda vektor tushunchasini kiritib, bu vektorlar to'plamida vektorlarni qo'shish, ayirish, songa ko'paytirish, ularni o'zaro skalyar, vektorial va aralash ko'paytirish amallarini kiritgan edik.

Endi vektor tushunchasini umumlashtirib, vektor fazoga ta'rif beramiz.

TA'RIF 1: n ta tartiblashgan haqiqiy sonlardan tashkil topgan $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'rinishdagi ifodaga **n -o'lchovli vektor** deyiladi. Bu erda x_i ($i=1, 2, \dots, n$) soni x vektorning i -komponentasi deb ataladi.

n -o'lchovli vektor tushunchasi iqtisodiyotda keng qo'llaniladi. Masalan, turli maxsulotlardan tashkil etilgan to'plamni $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ularning baholarini esa $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlar ko'rinishida ifodalash mumkin.

TA'RIF 2: Ikkita bir xil n -o'lchovli $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlar **teng** deyiladi va $x=y$ kabi belgilanadi, agarda ularning mos koordinatalari teng, ya'ni $x_1=y_1, x_2=y_2, \dots, x_n=y_n$ bo'lsa.

Endi ko'p o'lchovli vektorlar ustida amallar kiritamiz.

TA'RIF 3: Ikkita bir xil n o'lchovli $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlarning **yig'indisi** deb shunday yangi $x+y= z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$ vektorga aytiladiki, uning koordinatalari x va y vektorlarning mos koordinatalarini qo'shishdan hosil bo'ladi, ya'ni $z_i=x_i+y_i, i=1, 2, \dots, n$.

TA'RIF 4: $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorni λ **xakikiy songa kupaytmasi** deb shunday yangi $\lambda x= z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$ vektorga aytiladiki, unda $z_i=\lambda x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) bo'ladi.

Kiritilgan bu ikki amal yordamida x va y vektorlarning ayirmasini $x-y= x+(-1)y$ kabi kiritish mumkin.

Masalan, $\mathbf{x}=(3,-2,5,7,-4)$ va $\mathbf{y}=(0,7,9,-1,2)$ besh o'lchovli vektorlar berilgan bo'lsa, unda

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(3,-2,5,7,-4)+(0,7,9,-1,2)=(3+0,-2+7,5+9,7+(-1),-4+2)=(3,5,14,6,-2)$$

$$5\mathbf{x}=5(3,-2,5,7,-4)=(5\cdot 3, 5\cdot (-2), 5\cdot 5, 5\cdot 7, 5\cdot (-4))=(15,-10,25,35,-20),$$

$$\mathbf{x}-\mathbf{y}=(3,-2,5,7,-4)-(0,7,9,-1,2)=(3-0,-2-7,5-9,7-(-1),-4-2)=(3,-9,-4,8,-6).$$

Ixtiyoriy vektorlar ustidagi bu chiziqli amallar quyidagi xossalarni qanoatlantiradi:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ - yig'indining kommutativlik xossasi;
2. $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$ - yig'indining assotsiativlik xossasi;
3. $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ -sonli ko'paytuvchiga nisbatan assotsiativlik xossasi.
4. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ - vektorlar yig'indisining distributivlik xossasi.
5. $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ - sonli yig'indini ko'paytuvchiga nisbatan distributivlik xossasi.
6. $\mathbf{0}=(0,0,0,\dots,0)$ nol vektor va ixtiyoriy $\mathbf{x}$ vektor uchun $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ tenglik o'rinli bo'ladi.
7. Ixtiyoriy $\mathbf{x}$ vektorga $(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$ qarama-qarshi vektor deyiladi va ular uchun $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$ tenglik o'rinlidir.
8. Ixtiyoriy $\mathbf{x}$ vektor uchun $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

TA'RIF 5: Agar haqiqiy koordinatali vektorlar to'plamida vektorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari aniqlangan bo'lib, ular yuqorida keltirilgan 8 ta xossalarni (aksiomalarni) qanoatlantirsa, u holda bu to'plam vektor fazo deb aytiladi.

Yuqorida kurilgan $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ lar nafaqat vektorlar, balki ixtiyoriy ob'ektlar (elementlar) bo'lishi mumkin. Unda bu elementlar va kiritilgan amallardan tuzilgan to'plam chiziqli fazo deyiladi. Masalan, $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ lar darajasi n dan oshmagan ko'phadlar bo'lsa, u holda yuqoridagi 8 xossa qanoatlantiriladi, ya'ni darajasi n dan oshmagan barcha algebraik ko'phadlar to'plami chiziqli fazo hosil etadi.

Vektor (chiziqli) fazoning ta'rifidan shu xulosa kelib chiqadiki, bu fazoda yagona $\mathbf{0}$ (nol) vektor va har bir $\mathbf{x}$ ga qarama-qarshi yagona $-\mathbf{x}$ vektorlar mavjud bo'lib, ular uchun $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$, $(-1)\mathbf{x}=-\mathbf{x}$ tengliklar urinlidir.

TA'RIF 6: Biror R vektor fazoning $\mathbf{a}$ vektori shu fazoning $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlarining **chiziqli kombinatsiyasidan** iborat deyiladi, agarda qandaydir $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ haqiqiy sonlarda ushbu tenglik o'rinli bo'lsa:

$$\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\dots+\lambda_m\mathbf{a}_m. \quad (1)$$

TA'RIF 7: R vektor fazoning $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlari **chiziqli bog'liq deyiladi**, agarda bir vaqtda barchasi nolga teng bo'lmagan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ haqiqiy sonlar mavjud bo'lib,

$$\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2+\dots+\lambda_m\mathbf{a}_m=\mathbf{0} \quad (2)$$

tenglik o'rinli bo'lsa. Aks holda $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlar **chiziqli bogliqmas (erkli)** deyiladi.

Ta'rifdan kelib chiqadiki, berilgan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlar chiziqli bog'liqmas bo'lsa, u holda (2) tenglik faqat $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=0$ bo'lganda o'rinli bo'ladi.

Agar $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlar chiziqli bog'lik bo'lsa, u holda ularning har bittasi qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko'rinishida ifodalanadi va aksincha, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vektorlardan birortasi qolganlari orqali chiziqli ifodalansa, u holda ular chiziqli bog'lik bo'ladi.

Masalan, $a_1=(1,0,0,0)$, $a_2=(0,1,0,0)$, $a_3=(0,0,1,0)$, $a_4=(0,0,0,1)$ vektorlar chiziqli bog'liqmas (erkli); $c_1=(3,0,0,0)$, $c_2=(0,0,1,0)$, $c_3=(6,0,-7,0)$ vektorlar esa chiziqli bogliq ($2c_1-7c_2+c_3=0$) bo'ladi.

TA'RIF 8: R vektor (chiziqli) fazo **n o'lchovli** deyiladi, agar unda n ta chiziqli bog'liqmas vektorlar mavjud bo'lib, ixtiyoriy (n+1)ta vektor chiziqli bog'lik bo'lsa.

Bu erda n soni R fazoning **o'lchovi** deb atalib, $n=\dim(R)$ kabi belgilanadi va u R fazodagi chiziqli bogliqmas vektorlarning maksimal soniga teng bo'ladi.

TA'RIF 9: n o'lchovli R fazoning ixtiyoriy n ta chiziqli bog'liqmas vektorlari to'plami uning **bazisi** deyiladi.

Masalan, 4 o'lchovli fazoda yuqorida ko'rib o'tilgan

$$a_1=(1,0,0,0), a_2=(0,1,0,0), a_3=(0,0,1,0), a_4=(0,0,0,1)$$

vektorlar bazisni tashkil etadi.

TEOREMA: R chiziqli fazoning xar bir **x** vektorini shu R fazoning bazis vektorlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali yagona usulda ifodalash mumkin.

Isbot: Faraz qilaylik $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar n o'lchovli R fazoning ixtiyoriy bir bazisi bo'lsin. Unda, ixtiyoriy (n+1)ta vektorlar chiziqli bog'lik ekanligidan, $e_1, e_2, \dots, e_n$ va **x** vektorlar birgalikda chiziqli bog'lik bo'lishi kelib chiqadi. Bu holda bir vaqtning o'zida barchasi nolga teng bo'lmagan (n+1)ta shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda$ sonlar mavjudki,

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda x = 0. \quad (3)$$

Bu erda $\lambda \neq 0$ bo'ladi, chunki agar $\lambda = 0$ bo'lsa, u holda yuqoridagi tenglikdan $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar chiziqli bog'lik ekanligi, ya'ni ular bazis tashkil etmasligi kelib chiqadi. Demak $\lambda \neq 0$ bo'lib, (3) dan

$$x = -\frac{\lambda_1}{\lambda} e_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} e_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} e_n,$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n, \quad x_i = \lambda_i / \lambda, \quad (4)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu erdan **x** vektor $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis orqali chiziqli ifodalanishi va bunday ifodalanish yagona ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

(4) ifoda **x** vektorni $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi **yoyilmasi** va unlagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ koeffitsientlar **x** vektorning shu bazisga nisbatan koordinatlari deb ataladi. Demak, xar qanday vektor biror bazisdagi koordinatalari orkali bir qiymatli aniqlanadi. Xar qanday bazisda **0** vektorning koordinatalari nollardan va ixtiyoriy $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektorga qarama-qarshi vektorning koordinatalari $-x_1, -x_2, \dots, -x_n$ sonlardan iborat bo'ladi.

Masalan, 4 o'lchovli vektor fazoda $e_1(1,1,0,0)$, $e_2(0,1,1,0)$, $e_3(0,0,1,1)$, $e_4(0,1,0,1)$ vektorlar bazis tashkil etishini va bu bazisda $x=(2,0,-3,1)$ vektorning koordinatalari $x_1=2$, $x_2=-3$, $x_3=0$, $x_4=1$ bo'lishini talabalar mustaqil ish sifatida tekshirib ko'rishlari mumkin.

TEOREMA: Agar $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar sistemasi R fazoning chiziqli bog'liqmas vektorlari bo'lib, R fazoning ixtiyoriy **a** vektori ular orqali chiziqli ifodalansa, u holda R fazo n o'lchovli va $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorlar uning bazisi bo'ladi.

16-MA'RUZA

CHIZIQLI OPERATORLAR, ULARNING XOS VEKTORLARI VA XOS QIYMATLARI.

Tayanch iboralar: operator, chiziqli operator, tasvir, aks tasvir, operatorning matritsasi, operatorlar yig'indisi, operatorni songa ko'paytmasi, operatorlarning ko'paytmasi, nol operator, birlik operator, xususiy vektor, xususiy son, operatorning xarakteristik ko'phadi, operatorning xarakteristik tenglamasi, halkaro savdo modeli.

Ma'ruza rejası:

1. Operator va uning chiziqlilik sharti;
2. Operatorning matritsasi va uning rangi;
3. Operatorlar ustida amallar;
4. Nol va birlik operatorlar;
5. Xususiy vektorlar va sonlar;
6. Xalkaro savdoning chiziqli modeli.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §28-31 [14]. 78-86 betlar.

Chiziqli algebraning fundamental tushunchalaridan biri chiziqli operator tushunchasi bo'lib hisoblanadi.

n o'lchovli R^n va m o'lchovli R^m ikkita vektor (chiziqli) fazoni qaraylik.

TA'RIF 1: Agar R^n fazoning har bir x vektoriga R^m fazoning yagona y vektori biror qonun yoki qoida asosida mos qo'yilgan bo'lsa, u holda R^n fazoni R^m fazoga akslantiruvchi $A(x)$ **operator** berilgan deyiladi.

TA'RIF 2: Berilgan $A(x)$ operator **chiziqli** deyiladi, agar ixtiyoriy $x_1, x_2, x \in R^n$ vektorlar va ixtiyoriy λ son uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'lsa:

1. $A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$ -operatorning additivlik xossasi;
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ -operatorning birjinslilik xossasi.

TA'RIF 3: $y = A(x)$ operatorida y vektor x vektorning **tasviri**, x vektor esa y vektorning **aks tasviri** deyiladi.

Agar R^n va R^m fazolar ustma-ust tushsa, ya'ni $m=n$ bo'lsa, u holda A operator R^n fazoni o'zini-o'ziga akslantiradi va kelgusida biz mana shunday operatorlarni o'rganamiz.

R^n fazoda biror $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis vektorlarni tanlab, ixtiyoriy $x \in R^n$ vektorni bu bazis orqali $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ ko'rinishda ifodalanishi va A operatorning chiziqlilik xossalarini hisobga olib,

$$A(x) = x_1 A(e_1) + x_2 A(e_2) + \dots + x_n A(e_n) \quad (1)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdagi har bir $A(e_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$) vektor yana R^n fazoning vektori bo'lganligi uchun uni $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis orqali yoyish mumkin. Faraz qilaylik

bo'lsin. Unda, (1) va (2) tengliklarga asosan,

Ikkinchi tomondan $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$ vektor ham xuddi shu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ bazisda o'z linatalariga ega bo'lib, uni

ko'rinishda yozish mumkin. Har qanday vektorni bazis orqali yagona usulda ifodalanishini hisobga olib, (3) va (4) tengliklardan ushbu tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

TARIFA4: (5) sistemaning a_{ij} koeffitsientlaridan tuzilgan $A=(a_{ij})$ ($i,j=1,2,\dots,n$) matritsa chiziqli A operatorning $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi **matritsasi**, A matritsaning rangi r esa A operatorning **rang**i deyiladi.

Shunday qilib, har bir chiziqli A operatorga berilgan bazisda biror A matritsa to'g'ri keladi va aksincha, har qanday n- tartibli A matritsaga n- o'lchovli fazoning biror chiziqli A operatori to'g'ri keladi.

Berilgan A chiziqli operatorida $\mathbf{x}$ vektor bilan uning tasviri $\mathbf{y}=\mathbf{A}(\mathbf{x})$ o'rtasidagi bog'lanish matritsalar orqali $\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}$ ko'rinishda ifodalanadi. Bu erda A- chiziqli operator matritsasi bo'lib, $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \dots, x_n)'$ va $\mathbf{Y}=(y_1, y_2, \dots, y_n)'$ ustun matritsalar $\mathbf{x}$ va $\mathbf{y}$ vektorlarning koordinatalaridan hosil qilinadi.

Masala: $\mathbb{R}^3$ fazoda A chiziqli operator biror $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ bazisda

tasviri topilsin.

Echish: $Y=A \cdot X$ tenglik va matritsalarini ko'paytirishga asosan

Demak, $\mathbf{y} = 10 \mathbf{e}_1 - 13 \mathbf{e}_2 - 18 \mathbf{e}_3$.

Endi chiziqli operatorlar ustida amallar kiritamiz.

TA'RIF5: A va B chiziqli operatorlarning **yigindisi** deb $A+B$ kabi belgilanadigan va $(A+B)x = Ax + Bx$ tenglik bilan aniqlanadigan yangi bir operatorga aytiladi.

TA'RIF6: A chiziqli operatorni λ *songa ko'paytmasi* deb λA kabi belgilanadigan va $(\lambda A)(\mathbf{x}) = \lambda(A(\mathbf{x}))$ tenglik bilan aniqlanadigan operatorga aytiladi.

Misol: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan A chiziqli operatorning xos qiymatlari va xos vektorlari topilsin.

Echish: Dastlab operatorning xarakteristik tenglamasini yozamiz:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 4 \\ 9 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0.$$

Bu tenglamani echib, A chiziqli operatorning $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = 7$ xos qiymatlarini topamiz. Bu xos qiymatlarga mos keluvchi xos vektorlar

$$(A - \lambda_1 E)x^{(1)} = 0 \text{ va } (A - \lambda_2 E)x^{(2)} = 0$$

tenglamalardan topiladi, ya'ni,

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0 \text{ va } \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} c \\ -1,5c \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}.$$

Bu erda c va c_1 ixtiyoriy hakikiy sonlardir.

Ko'rib o'tilgan tushunchalarni iqtisodiyotga tadbirg'i sifatida halkaro savdoning chiziqli modelini ko'rib o'tamiz. Milliy daromadlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ bo'lgan n ta $S_1, S_2, \dots, S_n$ mamlakatlarni qaraymiz. Bu erda S_j ($j=1,2,\dots,n$) mamlakat milliy daromadining S_i ($i=1,2,\dots,n$) mamlakat mahsulotlarini sotib olishga sarflanadigan qismi ulushini a_{ij} kabi belgilaymiz. Har bir mamlakatning milliy daromadi o'zida ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotib olishga va boshqa mamlakat mahsulotlarini import etishga to'liq sarflanadi deb hisoblaymiz. Bu shart matematik ko'rinishda

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

kabi ifodalanadi. Unda $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, matritsa **savdoning tarkibiy matritsasi** deb ataladi va, (10) tengliklarga asosan, uning xar bir ustunidagi elementlar yig'indisi birga teng bo'ladi.

Mamlakatlar orasidagi savdo muvozanatlashgan bo'lishi uchun har bir S_i mamlakatning ichki va tashqi savdodan olgan foydasi uning milliy daromadiga teng bo'lishi, ya'ni

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

tengliklar bajarilishi kerak. Agar $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mamlakatlar milliy daromadlari vektori bo'lsa, unda (11) tengliklarni matritsa ko'rinishida $AX = X$ kabi yozish mumkin. Bu erda X ustun matritsa x vektorning koordinatalaridan tuzilgan bo'lib, u A matritsaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keluvchi xos vektori kabi topiladi.

Masala: Uchta mamlakat orasidagi savdoning tarkibiy matritsasi

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

ko'rinishda ekanligi ma'lum bo'lsa, bu davlatlarning muvozanatlashgan savdoda milliy daromadlarini toping.

Echish: $AX = X$ tenglamani $(A - E)X = 0$ ko'rinishda yozib, ushbu

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

birjinsli uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasiga kelimiz. Uni Gauss usulida echib, $x_1=(3/2)c$, $x_2=2c$, $x_3=c$ ekanligini topamiz. Demak, bu uch davlatning milliy daromadlari vektori $\mathbf{x}=(3c/2, 2c, c)$ bo'lganda, ya'ni ularning nisbati $3/2:2:1$ yoki $3:4:2$ bo'lganda ular orasidagi o'zaro savdo muvozanatlashgan bo'ladi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Operator deb nimaga aytiladi?
2. Qachon operator chiziqli deyiladi?
3. Operatorning matritsasi qanday aniqlanadi?
4. Operatorlarning yig'indisi qanday aniqlanadi?
5. Operatorni songa ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
6. Operatorlarning ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
7. Nol operator deb nimaga aytiladi?
8. Birluk operator deb nimaga aytiladi?
9. Operatorning xususiy vektori va soni qanday aniqlanadi?
10. Operatorning xarakteristik tenglamasi qanday aniqlanadi?
11. Xalkaro savdo modeli qanday tuziladi?

17-MA'RUZA

TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA. TO'G'RI CHIZIK TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: geometrik ob'ekt tenglamasi, analitik geometriya predmeti, ikkita asosiy masala, ikki nuqta orasidagi masofa, aylana tenglamasi, kesmani berilgan nisbatda bo'lish, o'rta nuqta koordinatalari, to'g'ri chiziqning normal tenglamasi, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

Ma'ruza rejası:

1. Geometrik ob'ekt tenglamasi.
2. Analitik geometriya predmeti va asosiy ikkita masalasi.
3. Ikki nuqta orasidagi masofa va aylana tenglamasi.
4. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish.
5. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi.
6. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §13-17 [3] II bob, §1-4, V bob §1 [14].95-104 betlar.

Tekislikda XOY Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lsin. Bu holda tekislikdagi har bir M nuqta uning koordinatalari deb ataladigan (x,y) sonlar juftligi bilan to'lik aniqlanadi va M (x,y) kabi yoziladi. Tekislikdagi turli geometrik ob'ektlarni nuqtalar to'plami kabi qarash mumkin.

TA'RIF 1: Tekislikdagi geometrik ob'ektlarni ularning $M(x,y)$ nuqtalarining koordinatalari orqali ifodalovchi tengliklar shu ***ob'ektning tenglamasi*** deb ataladi.

Tenglama odatda $F(x,y) = 0$ ko'rinishda yoziladi. Agarda $M_0(x_0,y_0)$ nuqta uchun $F(x_0,y_0) = 0$ shart bajarilsa, M_0 shu tenglama bilan aniqlangan geometrik ob'ektga tegishli bo'ladi. Aks holda M_0 nuqta bu ob'ektga tegishli bo'lmaydi. Shunday qilib, geometrik ob'ekt o'zining $F(x,y) = 0$ tenglamasi bilan to'lik aniqlanadi.

TA'RIF 2: Geometrik ob'ektlarni ularning tenglamalari orqali o'rganuvchi matematik fan analitik geometriya deb ataladi.

Analitik geometriya asoschisi bo'lib frantsuz matematigi va faylasufi Rene Dekart hisoblanadi.

Analitik geometriyada asosan ikkita masala qaraladi:

1. Berilgan geometrik ob'ektning tenglamasini topish.
2. Geometrik ob'ektning tenglamasi bo'yicha uning xossalarini o'rganib, ob'ektni aniqlash.

Bu masalalarni echishda vektorlar algebrasidan keng foydalaniladi. Misol tariqasida analitik geometriyaning quyidagi masalalarini ko'ramiz.

Masala 1: Tekislikdagi $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalar orasidagi d masofani toping.

Echish: Berilgan nuqtalar bo'yicha $\mathbf{M_1M_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1\}$ vektorni hosil qilamiz. Berilgan nuqtalar orasidagi masofa shu vektorning uzunligiga teng, ya'ni

$$d=|\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \quad (1)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Masalan, $M_1(3,1)$ va $M_2(-2,6)$ nuqtalar orasidagi masofa (1) ga ko'ra

$$d=\sqrt{(-2-3)^2+(6-1)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

Ikki nuqta orasidagi masofa formulasidan foydalanib, markazi $M(a,\epsilon)$ nuqtada joylashgan R radiusli aylana tenglamasini topamiz. $N(x,y)$ shu aylanada joylashgan ixtiyoriy nuqta bo'lsin. Aylana ta'rifiga asosan u $|MN|=R$ tenglamani qanoatlaniruvchi nuqtalar to'plamining geometrik o'rnidan iborat. Natijada, (1) formulaga ko'ra

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-\epsilon)^2}=R \Rightarrow (x-a)^2+(y-\epsilon)^2=R^2 \quad (2)$$

Bu aylana tenglamasini ifodalaydi. Aylananing (2) ko'rinishdagi tenglamasiga uning kanonik (eng informativ, eng qulay) tenglamasi deyiladi.

Masalan, markazi $M(2,3)$ va radiusi $R=5$ bo'lgan aylana

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25$$

tenglamaga ega bo'ladi. Bu erdan $N(5,7)$ nuqta shu aylanaga tegishli ekanligi kelib chiqadi, chunki

$$(5-2)^2+(7-3)^2=25.$$

$K(2,6)$ nuqta aylanada yotmaydi, chunki uning tenglamasini qanoatlantirmaydi:

$$(2-2)^2+(6-3)^2=9 \neq 25.$$

M a s a l a 2. Uchlari $M_1(x_1,y_1)$ va $M_2(x_2,y_2)$ nuqtalarda joylashgan M_1M_2 kesmani berilgan $\lambda > 0$ nisbatda bo'luvchi $M_0(x_0,y_0)$ nuqta koordinatalarini toping.

E c h i s h: $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_0=\{x_0-x_1,y_0-y_1\}$ va $\mathbf{M}_0\mathbf{M}_2=\{x_2-x_0,y_2-y_0\}$ vektorlarni qaraymiz. Ular bir to'g'ri chiziqda yotgani uchun kollinear va masala shartiga ko'ra $|\mathbf{M}_1\mathbf{M}_0| = \lambda |\mathbf{M}_0\mathbf{M}_2|$. Aytganciga asosan $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_0 = \lambda \mathbf{M}_0\mathbf{M}_2$ deb yozish mumkin. Bu tenglikni vektorlarning koordinatalari orqali ifodalaymiz (koordinatalar ko'rinishidagi ikki vektor teng bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari teng bo'lishi kerak):

$$x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0), y_0-y_1=\lambda(y_2-y_0).$$

Bu tengliklardan izlangan x_0 va y_0 koordinatalarni topamiz:

$$x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad (3)$$

Xususiyl, $\lambda = 1$, holda M_1M_2 kesmaning o'rta nuqtasi koordinatalarini topamiz:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}, y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \quad (4)$$

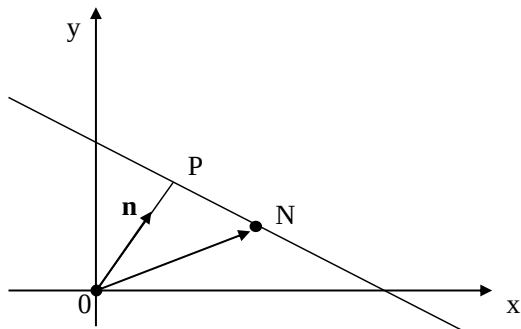
Masalan, $M_1(3,-5)$ va $M_2(1,1)$ nuqtalarni tutashtiruvchi kesmaning o'rta nuqtasi

$$x_0=\frac{3+1}{2}=2, y_0=\frac{-5+1}{2}=-2$$

koordinatalar bilan aniqlanadi.

Endi tekislikda biror l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin va uning tenglamasini topish talab etilsin. Buning uchun bu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $\mathbf{n}$ birlik vektor va koordinata boshidan bu to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa $|OP|=p$ ma'lum deb olamiz. Agarda $\mathbf{n}$ vektor OX koordinata o'qi bilan α burchak tashkil etgan bo'lsa, $\mathbf{n}=\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ deb yozish mumkin. $N(x,y)$ berilgan to'g'ri chiziqdagi ix-

tiyoriy bir nuqta, $\mathbf{ON} = \{x, y\}$ va $\mathbf{n}$ vektorlar orasidagi burchak φ bo'lsin ($\angle PON = \varphi$). Hosil bo'lgan $\mathbf{n} \cdot \mathbf{ON}$ skalyar ko'paytmani ikki usulda hisoblaymiz.



$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{ON} = x \cos \alpha + y \sin \alpha ;$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{ON} = |\mathbf{n}| \cdot |\mathbf{ON}| \cos \varphi = 1 \cdot |\mathbf{ON}| \cdot |\mathbf{OP}| / |\mathbf{ON}| = |\mathbf{OP}| = p.$$

Demak, berilgan to'g'ri chiziqdagi barcha $N(x, y)$ nuqtalar uchun

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \Rightarrow x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad (5)$$

tenglik o'rinlidir. Bu tekislikdagi to'g'ri chiziqning **normal tenglamasi** deyiladi. Agarda $K(x_0, y_0)$ berilgan l to'g'ri chiziqda yotmagan nuqta bo'lsa, undan bu to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofa

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p| \quad (6)$$

formula bilan aniqlanishini isbotlash mumkin.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Geometrik ob'ekt tenglamasi deb nimaga aytiladi?
2. Analitik geometriya predmeti nimadan iborat?
3. Analitik geometriyaning ikki asosiy masalasini ko'rsating.
4. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
5. Aylana tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
6. Kesmani berilgan nisbatda bo'luvchi nuqta koordinatalari qanday topiladi?
7. Kesmaning o'rta nuqtasi koordinatalari formulasini yozing.
8. To'g'ri chiziqning normal tenglamasini yozing.
9. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa qanday topiladi?

18 –MA'RUZA

TO'G'RI CHIZIKNING TURLI TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: umumiy tenglama, kesmalardagi tenglama, burchak koeffitsientli tenglama, yo'naltiruvchi vektor, kanonik tenglama, berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi, ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Ma'ruza rejası:

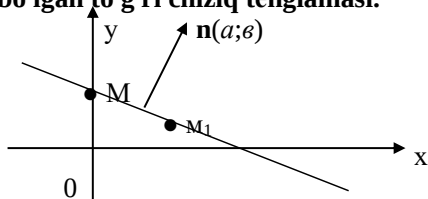
1. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasi.
2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi va uning taxlili.
3. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.
4. Yo'naltiruvchi vektor va to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.
5. Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
6. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.
7. To'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi.
8. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
9. To'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §17-18 [3] V bob, § 2,7 [14]. 96-101 betlar.

Oldingi, ma'ruzada to'g'ri chizikning normal tenglamasi ko'rsatilgan edi. Endi to'g'ri chiziqlarning boshqa ko'rinishdagi tenglamalari bilan tanishib chiqamiz.

1. Berilgan $M_1(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan $n(a, b)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.



Izlanayotgan ℓ to'g'ri chiziqning $\forall M(x, y)$ nuqtasini olamiz va $\mathbf{M_1M}$ vektorni hosil qilamiz. Unda $\mathbf{M_1M} = (x - x_1, y - y_1)$ bo'lib, masala shartida $\mathbf{n}$ vektorga perpendikulyar bo'ladi. Vektorlarning ortogonallik shartiga ko'ra

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M_1M} = 0 \Rightarrow a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0 \quad (1)$$

tenglamani olamiz. Shunday qilib $M(x, y)$ nuqta ℓ da yotsa, u holda $\mathbf{M_1M}$ va $\mathbf{n}$ vektorlar perpendikulyar. Aks holda esa $\mathbf{M_1M} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ bo'ladi, ya'ni $M(x, y)$ nuqta (1) tenglamani qanoatlantirmaydi.

M i s o l: $M(2;-5)$ nuqtadan o'tuvchi va $\mathbf{n}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqli tenglamasini toping.

Echish: (1) tenglamaga asosan $2(x-2)-3(y+5)=0 \Rightarrow 2x-3y-19=0$

2.To'g'ri chiziqli umumiy tenglamasi.

Oldingi punktda to'g'ri chiziqli tenglamasi ikki noma'lumli chiziqli tenglama bo'lishi kelib chiqqan edi (analitik geometriyaning birinchi asosiy masalasi).

Endi bo'lsa $\forall$ ikki noma'lumli chiziqli tenglama

$$Ax+By+C=0 \quad (2)$$

tekislikda to'g'ri chiziqli ifodalashini ko'rsatamiz (analitik geometriyaning 2-asosiy masalasi). Berilgan tenglamani shaklini quyidagicha almashtiramiz:

$$Ax+By+C=Ax+B(y+C/B)=0 \Rightarrow A(x-0)+B(y-(-C/B))$$

Bu esa, oldingi punktdagi (1) ga asosan, $\mathbf{n}(A,B)$ vektorga perpendikulyar va $M(0; -C/B)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasidir. Ko'rinib turibdiki (2) tenglamada A va B koeffitsientlar bir vaqtda 0 ga teng bo'lmasligi kerak.

(2) to'g'ri chiziqli umumiy tenglamasi deyiladi. Unda $\mathbf{n}(A,B)$ vektor shu to'g'ri chiziqli perpendikulyar bo'lib, uning **normal vektori** deyiladi.

Agar $C=0$ bo'lsa, $Ax+By=0$ tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamani $O(0;0)$ nuqta koordinatalari qanoatlantirganligi uchun, u koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini ifodalaydi.

Xususan $y=0$ ($A=0, C=0, B \neq 0$) OX o'qining, $x=0$ ($A \neq 0, C=0, B=0$) esa OY o'qining tenglamasidir.

3.To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

Ikkita to'g'ri chiziqli umumiy tenglamalari $a_1x+b_1y+c_1=0$ va $a_2x+b_2y+c_2=0$ bilan berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziqlarning $M(x_0,y_0)$ kesishish nuqtasi har ikkala to'g'ri chiziqli tegishli bo'lgani uchun uning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \end{cases}$$

M i s o l 1: $2x+y-1=0$ va $x+2y+1=0$ to'g'ri chiziqlarning $M_0(x_0;y_0)$ kesishish nuqtasini toping.

Echish.
$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+2y=-1 \end{cases} \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow M_0(1;-1).$$

4. To'g'ri chiziqli kesmalardagi tenglamasi.

Koordinata boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziqli OX va OY o'qlaridan uzunligi $|a|$ va $|b|$ bo'lgan kesmalar ajratgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqli tenglamasini topish uchun $M(a,0)$ va $N(0,b)$ nuqtalar unda yotishidan foydalanamiz. Bu nuqtalar koordinatalarini $Ax+By+C=0$ umumiy tenglamaga qo'yib, $A=-C/a$, $B=-C/b$ ekanligini topamiz. Bu erdan

$$Ax+By+C=0 \Rightarrow (-C/a)x+(-C/b)y+C=0 \Rightarrow -C(x/a+y/b-1)=0 \Rightarrow x/a+y/b=1$$

Demak, izlangan to'g'ri chiziqli tenglamasi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqning **kesmalardagi tenglamasi** deyiladi.

M i s o l 2: $2x+3y-6=0$ to'g'ri chiziqni yasang.

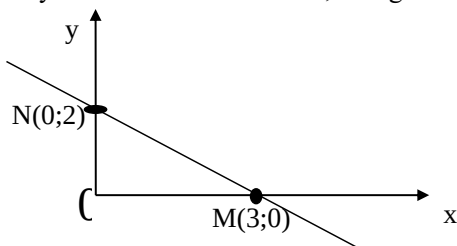
E ch i sh: Uni OX o'qi bilan kesishish nuqtasi M ni topamiz. Buning uchun quyidagi sistemani echish kifoya:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3;0)$$

Demak berilgan to'g'ri chiziqning OY o'qi bilan kesishish nuqtasi topildi. Endi uning o'qi bilan kesishgan nuqtasi N ni topamiz:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow N(0;2)$$

M va N nuqtalarni yasab va ularni tutashtirib, berilgan to'g'ri chiziqni hosil qilamiz.



Bu erdan berilgan to'g'ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi $x/3+y/2=1$ ekanligini ko'ramiz.

Demak, umumiy tenglamadan kesmalardagi tenglamaga o'tish uchun uni qarama-qarshi ishora bilan olingan ozod hadga bo'lish kerak.

5. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori.

To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.

Tekislikdagi l to'g'ri chiziqning biror $M_1(x_1, y_1)$ nuqtasi berilgan hamda $\vec{S} = m \cdot \vec{i} + n \cdot \vec{j}$ vektor shu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin. U holda berilgan M_1 nuqta va $\vec{S}$ vektor to'g'ri chiziqning holatini to'la belgilaydi. Shu sababli $\vec{S}$ to'g'ri chiziqning **yo'naltiruvchi vektori**, M_1 esa uning **boshlangich nuqtasi** deyiladi. Berilgan to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtani olamiz va $\vec{M_1M} = (x-x_1, y-y_1)$ vektorni hosil qilamiz. Shartga asosan bu va $\vec{S}$ vektorlar kollinear, ya'ni ularning mos koordinatalari proporsionaldir:

$$\frac{y - y_1}{n} = \frac{x - x_1}{m} \quad (3)$$

Hosil bo'lgan (3) tenglama berilgan to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

IZOX: Agar to'g'ri chiziq OX o'qiga parallel, ya'ni to'g'ri chiziq $\vec{i}$ vektorga parallel bo'lsa, u holda $m=0$ bo'ladi va uning kanonik tenglamasi

$$\frac{y - y_1}{0} = \frac{x - x_1}{n} \Rightarrow 0(x - x_1) = n(y - y_1) \Rightarrow y = y_1.$$

Shunday qilib OX o'qiga parallel to'g'ri chizikning tenglamasi $y = y_1$ bo'ladi. Aksincha to'g'ri chiziq OY o'qiga parallel bo'lsa, uning kanonik tenglamasi $x = x_1$ bo'ladi.

6. Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi. To'g'ri chiziqlar dastasi.

Aytaylik l to'g'ri chiziq va OX o'qi orasidagi burchak α bo'lsin. Agar to'g'ri chiziq OX o'qiga parallel yoki u bilan ustma-ust tushsa, unda $\alpha = 0$ bo'ladi. Agarda $\alpha \neq 90^\circ$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqning xolatini α burchak va l ga tegishli bo'lib, koordinatalari bilan berilgan $M_1(x_1; y_1)$ nuqta to'la aniqlanishini ko'rsatamiz. Yo'naltiruvchi vektor sifatida l ga parallel bo'lgan, ya'ni OX o'qi bilan α burchak tashkil qiluvchi $\vec{e}$ birlik vektorni qaraymiz. Ma'lumki ixtiyoriy birlik vektor uzining yo'naltiruvchi kosinuslari bilan aniqlanadi, ya'ni $\vec{e} = \cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j}$. Bunda $\cos\beta = \sin\alpha$ bo'lgani uchun

$$\vec{e} = \cos\alpha \vec{i} + \sin\alpha \vec{j}.$$

To'g'ri chiziqning (3) kanonik tenglamasiga $m = \cos\alpha$ va $n = \sin\alpha$ deb, quyidagi natijani olamiz:

$$\frac{y - y_1}{\sin\alpha} = \frac{x - x_1}{\cos\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha (x - x_1) = y - y_1$$

Agar bunda $k = \operatorname{tg}\alpha$ deb olsak, u holda

$$y - y_1 = k(x - x_1) \quad (4)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi bo'lib, unda k – to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsienti** deyiladi.

Misol: $M(1; 2)$ nuqtadan o'tib, OX o'qi bilan $\pi/3$ burchak tashkil qiluvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Echish: Izlanayotgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini topamiz:

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

Natijada to'g'ri chiziqning tenglamasi (4) ga asosan quyidagicha bo'ladi:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = \sqrt{3}(x - 1) \Rightarrow \sqrt{3}x - y - 1 - 2\sqrt{3} = 0.$$

Tekislikning biror M_0 nuqtasi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami **to'g'ri chiziqlar dastasi**, umumiy nuqta M_0 esa **dastaning markazi** deyiladi.

7. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

To'g'ri chiziq OX o'qi bilan α burchak tashkil qilib, OY o'qini $B(0, b)$ nuqtada kesib o'tsin. Shu to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz. Buning uchun to'g'ri chiziqlar dastasi-ning tenglamasiga $x_1 = 0$, $y_1 = b$ qo'yib,

$$y - b = k(x - 0) \Rightarrow y = kx + b \quad (5)$$

tenglamani olamiz. Bu to'g'ri chiziqning **burchak koeffitsientli tenglamasi** deyiladi. Xususan agar $b = 0$ bo'lsa, $y = kx$ koordinatalar boshidan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar

dastasining tenglamasini ifodalaydi. Agarda $k=0$ bo'lsa, u holda OX o'qiga parallel to'g'ri chizikning $y=b$ tenglamasiga ega bo'lamiz.

8. Berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Tekislikda $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Shu nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topish uchun $M_1(x_1, y_1)$ nuqtani boshlangich,

$\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ vektorni esa yo'naltiruvchi deb olish mumkin. Shu sababli izlangan to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Masalan, $M_1(2,1)$ va $M_2(-3,0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x - 2}{-3 - 2} = \frac{y - 1}{0 - 1} \Rightarrow -x + 2 = -5y + 5 \Rightarrow x - 5y + 3 = 0.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini taxlil eting.
4. Ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
5. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladi?
6. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
7. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasini yozing.
8. Burchak koeffitsientli tenglamadagi parametrlar qanday geometrik ma'noga ega?
9. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
10. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.
11. To'g'ri chiziqning kesmalaradagi tenglamasini yozing va undagi parametrlarning geometrik ma'nosini ko'rsating.

19-MA'RUZA

TO'G'RI CHIZIKLARGA DOIR AYRIM MASALALAR.

Tayanch iboralar: ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, to'g'ri chiziqlarning parallel sharti, perpendikulyarlik sharti, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa.

Ma'ruza rejası:

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
2. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik sharti.
3. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.

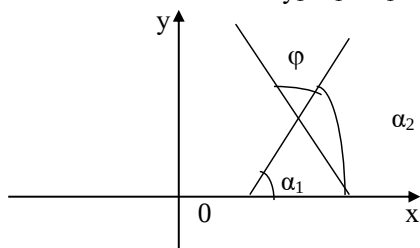
Adabiyotlar:

[1] I bob, §19 [3] V bob, §3,5,6 [14]. 101-104 betlar.

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Tekislikning biror M nuqtasida kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish bilan shug'ullanamiz. Bu to'g'ri chiziqlar o'zlarining burchak koef-fitsentli tenglamalari bilan berilgan bo'lsin, ya'ni

$$y_1=k_1x+B_1 \quad \text{ba} \quad y_2=k_2x+B_2$$



Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni φ bilan va ularning OX o'qi bilan hosil qilgan burchaklarini mos ravishda α_1 va α_2 bilan belgilaymiz. Chizmaga asosan izlanayotgan burchak tangensini topamiz:

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_2\cdot\operatorname{tg}\alpha_1}$$

Bunda $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$ va $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$ ekanligini hisobga olsak va $\varphi\neq90^\circ$ shartni qanoatlantirsa, u holda to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_2\cdot k_1} \quad (1)$$

formula orqali aniqlashimiz mumkin.

Agar to'g'ri chiziqlar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, ularning $\mathbf{n}_1(A_1,B_1)$ va $\mathbf{n}_2(A_2,B_2)$ normal vektorlariga murojaat qilamiz. Unda izlangan φ burchak normal vektorlar orasidagi burchak bilan teng bo'ladi va vektorlar orasidagi burchak formulasiga asosan

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

formula bilan topiladi.

To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Agar ikkita to'g'ri chiziq $\parallel$ yoki ustma-ust tushsa, y holda

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 \Rightarrow k_1 = k_2.$$

Aksincha, agar $k_1 = k_2$ bo'lsa, u holda $\operatorname{tg} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$. Shunday qilib, ikki to'g'ri chiziqning $\parallel$ bo'lishining zaruriy va etarli sharti $k_1 = k_2$ bo'ladi.

Agar to'g'ri chiziqlar $\perp$ bo'lsalar, u holda (1) formula ma'nosiz bo'ladi. Aytaylik $0 < \varphi < 90^\circ$ bo'lsin. Bunda $\cos \varphi \neq 0$, $\sin \varphi \neq 0$ bo'lgani uchun φ burchakni kotangensini (1) ga asosan quyidagicha yozish mumkin:

$$\operatorname{ctg} \varphi = 1/\operatorname{tg} \varphi = (1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2) / (\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1) = (1 + k_1 k_2) / (k_2 - k_1)$$

Bu formulada $\varphi = \pi/2$ desak, $\operatorname{ctg} \varphi = 0 \Rightarrow k_1 k_2 = -1$ natijani olamiz. Aksincha bu tenglik bajarilsa, u holda $\operatorname{ctg} \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$ ekanligini ko'rish qiyin emas.

Demak, ikkita to'g'ri chiziqning perpendikulyarligining zaruriy va etarli sharti $k_1 k_2 = -1$ bo'ladi.

1-m i s o l: $6x + 2y - 1 = 0$ va $x - 3y + 2 = 0$ to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarligini ko'rsating.

Echish:

$$\begin{array}{ll} 2y_1 = -6x + 1 & 3y_2 = x + 2 \\ y_1 = -3x + 1/2 & y_2 = x/3 + 2/3 \\ k_1 = -3 & k_2 = 1/3 \end{array}$$

Natijada $k_1 k_2 = -1$ ekanligini ko'ramiz, ya'ni $\varphi = 90^\circ$ va bu to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar ekan.

2-m i s o l: $M(-3;-1)$ nuqta orqali o'tuvchi va $2x + y - 3 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi topilsin.

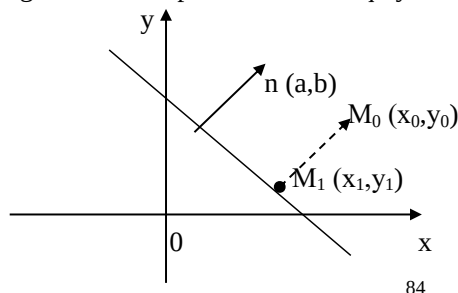
Echish: Berilgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_1 = -1/2$ ga teng. Demak, o'nga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_2 = -1/k_1 = 2$ va uning tenglamasi $y = 2x + b$ ko'rinishga ega. $M(-3;-1)$ nuqta izlanayotgan to'g'ri chiziqda yotgani uchun uning koordinatalari bu tenglamani qanoatlantiradi:

$$-1 = 2 \cdot (-3) + b \Rightarrow b = 5.$$

Natijada izlangan to'g'ri chiziq tenglamasi $y = 2x + 5$ ekanligini topamiz.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqa bo'lgan masofa.

Aytaylik $M_0(x_0; y_0)$ nuqta va undan o'tmaydigan biror to'g'ri chiziq uzining umumiy tenglamasi $ax + by + c = 0$ bilan berilgan bo'lsin. Berilgan nuqta va shu to'g'ri chiziq orasidagi masofani topish masalasini qo'yamiz.



Berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan $\vec{n} = (a; b)$ va $\mathbf{M_1M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1)$ vektorlar parallel bo'ladi. Bunda $\vec{n}$ to'g'ri chiziqning normal vektori, M_1 esa to'g'ri chiziqqa M_0 nuqtada o'tkazilgan perpendikulyar asosini ifodalaydi. Chizmaga asosan va skalyar ko'paytmaning har ikkala ko'rinishiga binoan

$$\vec{n} \cdot \mathbf{M_1M_0} = |\vec{n}| |\mathbf{M_1M_0}| \cos 0 = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1),$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot d = a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) \quad (2)$$

Bunda $d = |\mathbf{M_1M_0}|$ izlanayotgan masofani ifodalaydi.

$M_1(x_1; y_1)$ nuqta berilgan to'g'ri chiziqda yotganligi uchun uning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow ax_1 + by_1 = -c.$$

Bo'larni hisobga olib, (2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1) = (\pm d) \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$ax_0 + by_0 + c = (\pm d) \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$d = \pm \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (3)$$

3-misol: $2x - 3y + 1 = 0$ to'g'ri chiziq va $M(2; 1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

Echish: Berilganlarni (3) formulaga qo'yib, berilgan nuqta va to'g'ri chiziq orasidagi masofani topamiz:

$$d = |2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 1| / \sqrt{4 + 9} = 2 / \sqrt{13}$$

Izox: Oldingi ma'ruzada normal tenglamasi bilan berilgan to'g'ri chiziq bilan $M_0(x_0, y_0)$ orasidagi masofa

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|$$

formula bilan ham topilishi ko'rsatilgan edi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti nimadan iborat?
3. To'g'ri chiziqlarning parallellik shartini yozing.
4. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa qanday topiladi?

20-MA'RUZA

IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR. AYLANA VA ELLIPS.

Tayanch iboralar: ikkinchi darajali tenglama, ikkinchi tartibli chiziqlar, aylana umumiy tenglamasi, ellips ta'rifi, ellipsning kanonik tenglamasi, fokus, ekstsentrisset, fokal radius, direktrisa.

Ma'ruza rejası:

1. Ikkinchi darajali tenglama va ikkinchi tartibli chiziqlar.
2. Aylananing umumiy tenglamasi.
3. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
4. Ellips tenglamasining taxlili va ellips grafigi.
5. Ellipsning ekstsentrisseti.
6. Ellips direktrisalari va fokal radiuslari.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §13, §35-36 [3] VII bob, §1-3 [14]. 104-108 betlar.

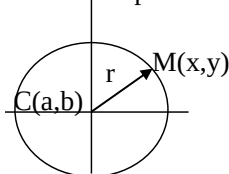
Ushbu II darajali tenglama

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad (1)$$

tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu erda A, B, C lardan kamida bittasi nolga teng emas. (1) tenglama koeffitsientlarining qiymatlariga qarab turli ikkinchi tartibli chiziqlarni tasvirlashi mumkin. Biz quyida shu egri chiziqlarni tenglamalari bilan tanishamiz.

Aylananing umumiy tenglamasi.

Radiusi r ga teng va markazi S(a;b) nuqtada yotgan aylana tenglamasini keltirib chiqaramiz. M(x,y) shu aylanadagi ixtiyoriy bir nuqta bo'lsin. Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan



$$|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Rightarrow$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad (2)$$

Bu markazi C(a;b) nuqtada bo'lib, radiusi r ga teng bo'lgan aylananing tenglamasidir. Agara=b=0 bo'lsa $x^2+y^2=r^2$. Bu markazi koordinatalar boshida yotgan aylananing tenglamasidir.

(2) tenglamadagi qavslarni ochsak,

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0,$$

ya'ni (1) ko'rinishdagi tenglamani olamiz. Oxirgi tenglamaga

$$D=-2a; \quad E=-2b; \quad F=a^2+b^2-r^2$$

belgilashlarni quyib, ushbu

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \quad (3)$$

aylananing umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deb ataluvchi tenglamani olamiz.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli (1) umumiy tenglama aylananing tenglamasi bo'lishi uchun x^2 va y^2 oldidagi koeffitsientlar teng va xy ko'paytma oldidagi koeffitsientning nolga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

Masalan, $x^2+y^2-2x+3y+2=0$ tenglamani quramiz. Bu tenglamada x va y qatnashgan hadlarni alohida – alohida guruhlab va to'la kvadrat ajratib, quyidagi aylana tenglamasini hosil qilish mumkin:

$$x^2-2x+1+y^2+3y+9/4-9/4+2=(x-1)^2+(y+3/2)^2-5/4=0$$

$$(x-1)^2+(y+3/2)^2=5/4$$

Bu markazi $C(1,-3/2)$ nuqtada joylashgan va radiusi $r=\sqrt{5}/2$ bo'lgan aylana tenglamasidir.

ELLIPS VA UNING KANONIK TENGLAMASI

TA'RIF: Ellips deb, har bir nuqtasidan berilgan ikki nuqttagacha (fokuslargacha) masofalarning yig'indisi o'zgarmas $2a$ soniga teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi.

Bu $2a$ o'zgarmas son fokuslar orasidagi $2c$ masofadan katta deb olinadi.

Biz F_1 va F_2 fokuslarni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik qilib olamiz. Unda fokuslar $F_2(-c;0)$ va $F_1(c;0)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Agar $M(x;y)$ ellipsda yotgan ixtiyoriy nuqta bo'lsa, unda ellips ta'rifiga asosan F_1M+F_2M yigindi uzgarmas son bo'lishi kerak, ya'ni

$$F_1M+F_2M=2a. \quad (4)$$

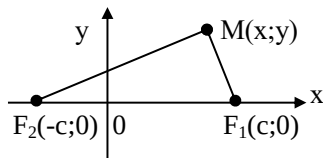
Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga asosan

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}, \quad F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Bu natijalarni (4)-tenglikka qo'yib, uni soddalashtiramiz:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ x^2+2xc+c^2+y^2 &= 4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2-2xc+c^2+y^2 \\ 4a^2-4xc &= 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}; \quad a^2-xc=a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \\ a^2(x^2-2xc+c^2+y^2) &= a^4-2a^2xc+x^2c^2 \\ a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2 &= a^4+x^2c^2 \quad (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \end{aligned} \quad (5)$$

F_1MF_2 uchburchakdan $MF_1+MF_2>F_1F_2$, bundan esa $2a>2c$, $a>c$ bo'lishi kerakligi kelib chiqadi.



Natijada $a^2 - c^2 > 0$ bo'ladi va uni $a^2 - c^2 = b^2$ deb belgilab olish mumkin. Bu holda (5) tenglik $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ko'rinishga keladi. Bu tenglamani a^2b^2 ga bo'lib, ushbu tenglamaga kelimiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

Hosil bo'lgan tenglama ellipsning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

Ellipsning shakli

Ellipsning kanonik tenglamasiga asosan $(x; y)$ nuqta ellipsda yotsa, u holda $(-x; y)$, $(-x; -y)$, $(x; -y)$ nuqtalar ham unda yotadi. Shuning uchun ham koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya o'qlari bo'lib hisoblanadi.

Ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari ellipsning uchlari deyiladi. Ularni topish uchun (6) ga mos ravishda $x=0$ va $y=0$ qiymatlarni qo'yib, hosil bo'lgan tenglamalarni echamiz:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b,$$

$$y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a.$$

Natijada ellipsning quyidagi to'rtta uchlari hosil bo'ladi:

$$A_1(a;0), \quad A_2(-a;0), \quad B_1(0;b), \quad B_2(0;-b)$$

$A_1A_2=2a$ – ellipsning katta o'qi, $B_1B_2=2b$ – kichik o'qi, a va b esa uning yarim o'qlari deyiladi.

Kanonik tenglamadan

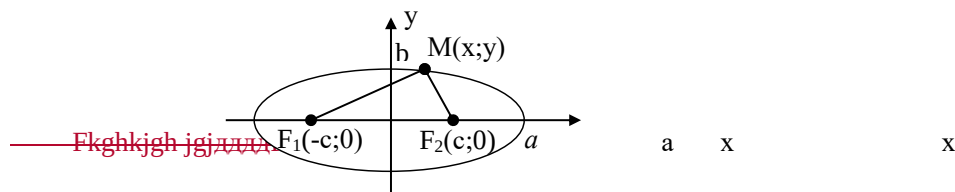
$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow |x| \leq a, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Rightarrow y^2 \leq b^2 \Rightarrow |y| \leq b,$$

natijalarni olamiz. Demak ellips chegaralangan egri chizik bo'ladi

Koordinata o'qlari ellips uchun simmetriya chiziqlari ekanligidan uning shaklini faqat birinchi chorakda aniqlash kifoya. Unda $x \geq 0$, $y \geq 0$ bo'lgani uchun (6) tenglamadan

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

funktsiyani hosil qilamiz. Bu funksiya uchun $x \in [0; a]$ bo'lib, x oshib borganda, y o'zgaruvchi b dan boshlab nolgacha kamayib boradi va ellipsning birinchi chorakdagi qismini hosil qiladi. Bu qismni simmetriya asosida davom ettirib, ellips shakli quyidagicha bo'lishini topamiz:



Ellipsning ekstsentrishititi.

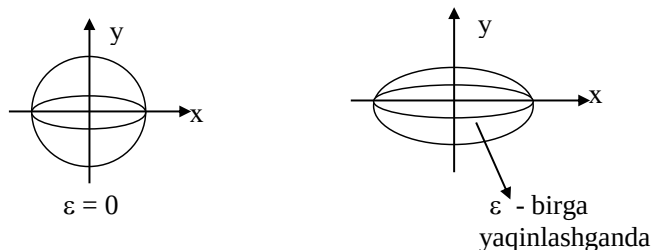
TA'RIF: Ellipsning fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning katta o'qi uzunligi $2a$ ga nisbati ellipsning **ekstsentrishititi** deb ataladi va ε kabi belgilanadi.

Ta'rifga asosan $\varepsilon = 2c/2a = c/a$ va $c \in (0; a)$ bo'lgani uchun $0 < \varepsilon < 1$ qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi. Kanonik tenglama bo'yicha ε quyidagicha topiladi:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Bu erda $\varepsilon = 0$ bo'lsa, $a = b$ bo'ladi va ellips aylanaga o'tadi. Demak aylana ellipsning xususiy xoli bo'ladi.

ε birga yaqinlashgan sari ellips OX o'qiga yaqinlashadi, ya'ni b nolga yaqin bo'ladi.



Ellips nuqtasining fokal radiuslari.

Ellipsning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasidan F_1 va F_2 fokuslarigacha bo'lgan r_1 va r_2 masofalar shu nuqtaning **fokal radiuslari** deyiladi. Ellips ta'rifiga asosan $r_1 + r_2 = 2a$ bo'ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan

$$r_1 = MF_1 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \quad r_2 = MF_2 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Bu fokal radiuslarni kvadratga kutarib ayirsak, u holda

$$r_2^2 - r_1^2 = 4cx \quad \text{va} \quad r_1 + r_2 = 2a$$

tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi va uni echib fokal radiuslar uchun quyidagi formulalarni olamiz:

$$r_1 = a - \varepsilon x \quad r_2 = a + \varepsilon x$$

Ellipsning direktrisalari.

Ellipsning katta o'qiga perpendikulyar va kichik o'qiga parallel bo'lgan $x = \pm \ell$ ($\ell > 0$) to'g'ri chiziqlarni qaraymiz. Ellipsning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasidan shu nuqtaga yaqin $x = \pm \ell$ ($\ell > 0$) perpendikulyar to'g'ri chiziqqacha (d_1) hamda yaqin fokusigacha bo'lgan r_1 masofalar nisbatini olamiz:

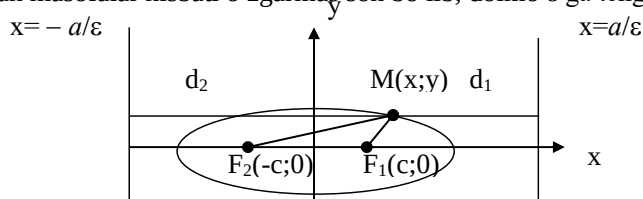
$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a - \varepsilon x}{\ell - x} = \varepsilon \frac{\frac{a}{\varepsilon} - x}{\ell - x}$$

Agar ℓ sifatida $\ell=a/\varepsilon$ olinsa, u holda yuqoridagi nisbat o'zgarmas bo'lib, doimo ε ga teng bo'ladi. $M(x;y)$ nuqtadan $x=-\ell$ to'g'ri chizigigacha bo'lgan masofani d_2 orqali belgilasak, u holda yuqoridagidek mulohazalar yuritib, $r_2/d_2 = \varepsilon$ tenglikni hosil qilamiz.

Ellips markazining chap va o'ng tomonida bir xil masofada joylashgan $x=\pm a/\varepsilon$ to'g'ri chiziqlariga ellipsning **direktrisalari** deyiladi.

Aylanada direktrisa bo'lmaydi, chunki unda $\varepsilon=0$.

Shunday qilib ellipsning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigacha va mos direktrisasigacha bo'lgan masofalar nisbati o'zgarmas son bo'lib, doimo ε ga teng bo'ladi.



Misol: $x^2+4y^2=4$ ellipsning barcha xarakteristikalarini toping.

Echish: Dastlab ellipsning kanonik tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1, \Rightarrow a^2=4; \quad b^2=1 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3.$$

Unda fokuslar $F_1(-\sqrt{3},0)$ va $F_2(\sqrt{3},0)$, yarim o'qlar $a=2$ va $b=1$ bo'ladi. Bo'lardan ekstsentrisset va direktrisalarni topamiz:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Fokal radiuslar $r_1 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $r_2 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x$ formulalar bilan topiladi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Ikkinchi darajali tenglamaning umumiy ko'rinishi qanday bo'ladi?
2. Aylananing umumiy tenglamasini yozing va u bo'yicha aylana markazi hamda radiusi qanday topilishini ko'rsating.
3. Ellips qanday ta'riflanadi?
4. Ellipsning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma'nosini ko'rsating.
5. Ellipsning ekstsentrisseti qanday aniqlanadi va u nimani ifodalaydi?
6. Ellipsning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladi?
7. Ellips direktrisalari deb nimaga aytiladi?

21-MA'RUZA

GIPERBOLA VA PARABOLA.

Tayanch iboralar: giperbola ta'rifi, giperbolaning kanonik tenglamasi, fokus, o'q, asimptota, ekstsentrishet, direktrisa, fokal radius, parabola ta'rifi, kanonik tenglamasi, parabola fokusi va uning xossasi, parabola ekstsentrisheti.

Ma'ruza rejası:

1. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
2. Giperbola grafigi va asimptotalari.
3. Giperbola ekstsentrisheti, direktrisalari va fokal radiuslari.
4. Parabola va uning kanonik tenglamasi.
5. Parabola grafigi va ekstsentrisheti.

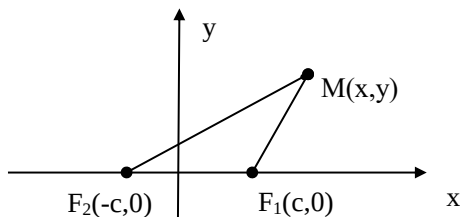
Adabiyotlar:

[1] I bob, §35-36 [3] VII bob, §4-5 [14]. 109-119 betlar.

TA'RIF: Giperbola deb, fokuslar deb ataluvchi ikki nuqttagacha masofalarining ayirmasi o'zgarmas $2a$ songa teng bo'lgan tekislikdagi nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Bu o'zgarmas $2a$ soni fokuslar orasidagi $2c$ masofadan kichik bo'lishi kerak.

Fokaslarni koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik qilib olamiz. Unda ularni $F_1(c,0)$ va $F_2(-c,0)$ deb ifodalash mumkin. $M(x,y)$ giperboladagi ixtiyoriy bir nuqta bo'lsin.



Ta'rifdan foydalanib giperbola tenglamasini chiqaramiz. Ta'rifga asosan $|F_2M| - |F_1M| = 2a$ bo'ladi. Bu erda

$$|F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |MF_1| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

va bu masofalarni yuqoridagi tenglikka qo'yib, soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2 y^2 = c^2 x^2 - 2cx a^2 + a^4$$

$$a^2x^2 - 2cx a^2 + a^2 c^2 + a^2 y^2 = c^2x^2 - 2cx a^2 + a^4$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^4 - a^2 c^2 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

F_1MF_2 uchburchakdan $|F_2M| - |F_1M| < |F_1F_2| \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c$ bo'lgani uchun $b^2 = c^2 - a^2$ deb belgilash mumkin va oxirgi tenglikni o'nga bo'lib, ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

Bu tenglamaga giperbolaning **kanonik tenglamasi** deyiladi.

Ellipsdagidek bu erda ham $r_2 = |F_2M|$ va $r_1 = |F_1M|$ giperbolaning **fokal radiuslari** deyiladi.

Giperbolaning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz:

$$y=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

Agar $x=0$ desak, u holda $y^2 = -b^2 \Rightarrow y \in \emptyset$ bo'lib, giperbolani OY o'qi bilan kesishmasligiga ishonch hosil qilamiz. Shunday qilib, giperbolani OX o'qidagi kesishish nuqtalari $A_2(a;0)$ va $A_1(-a;0)$ bo'lib, ular giperbolaning **uchlari** deyiladi. Giperbola uchlari orasidagi $2a$ masofani giperbolaning **haqiqiy o'qki** va $B_2(0; b)$, $B_1(0; -b)$ nuqtalar orasidagi $2b$ masofani esa giperbolaning **mavxum o'qi** deb ataladi. Mos ravishda a va b sonlariga giperbolaning yarim haqiqiy va yarim mavxum o'qlari deyiladi. O'qlarning o'rta nuqtasi giperbolaning **markazi** deyiladi.

Giperbolaning shakli.

Agar (x,y) giperbolada yotgan nuqta bo'lsa, u holda, $(\pm x, \pm y)$ nuqtalar ham giperbolaga tegishli bo'ladi, ya'ni giperbola koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikdir.

Giperbolaning kanonik tenglamasidan

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow |x| \geq a.$$

Agar yuqoridagidek, faqat birinchi chorak bilan kifoyalansak, u holda

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

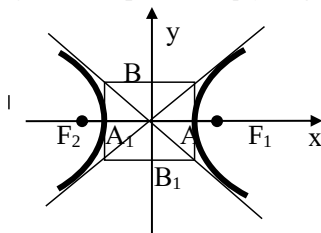
funktsiyada x o'zgaruvchi a dan ∞ gacha o'zgarib borganda, y o'zgaruvchi 0 dan ∞ gacha o'sadi, ya'ni giperbola chegaralanmagan egri chiziqdir. I chorakdagi giperbola grafigini simmetriya bo'yicha davom ettirib, giperbola ikkita bo'lakdan iborat egri chiziq bo'lishini ko'ramiz. Bu bo'laklar giperbolaning **shoxlari** deb ataladi.

Giperbolaning asimptotalari.

TA'RIF: Berilgan egri chiziq asimptotaga ega deyiladi, agarda shunday l to'g'ri chiziq mavjud bo'lsaki, egri chiziq bu to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa.

Giperbolaning $A_1A=2a$ va $BB_1=2b$ o'qlaridan yasalgan to'g'ri to'rtburchak diagonalari yotgan to'g'ri chiziqlar giperbolaning asimptotalari bo'lishini ko'rsatish mumkin.

Giperbolaning grafigi va asimptotalari quyidagi chizmada kursatilgan:



Asimptotalarning tenglamalari quyidagi ko'rinishga ega:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (2)$$

Agarda $a=b$ bo'lsa, giperbola teng yonli deyiladi. Unda $y=\pm x$ asimptotalarni koordinatalari sifatida olsak, giperbola tenglamasi bizga maktabdan tanish bo'lgan $xy=k \Rightarrow y=k/x$ ko'rinishga keladi.

M i s o l. $a=3$ va $b=2$ ga teng bo'lsa, giperbola va uning asimptotalari tenglamasi yozilsin.

E ch i sh. Giperbolaning (1) kanonik tenglamasi va (2) asimptotalar tenglamasiga asosan ushbu natijalarni olamiz:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1, \quad y = \pm \frac{2}{3} x$$

Giperbolaning ekstsentrishiteti.

TA'RIF: Giperbolani fokuslari orasidagi $2c$ masofani uning haqiqiy o'qi uzunligi $2a$ ga nisbati giperbolaning **ekstsentrishiteti** deyiladi va ε kabi belgilanadi.

Ta'rifga va kanonik tenglamaga asosan

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > 1. \quad (3)$$

Agar a parametr b ga nisbatan kichik bo'lsa, giperbolaning shoxlari Ox o'qiga qarab siqiq bo'ladi, b qancha a ga yaqin bo'lsa uning shoxlari shuncha yoyik bo'ladi.

Giperbolaning M nuqtasidan F_1 va F_2 fokuslarigacha bo'lgan masofalar shu nuqtaning **fokal radiuslari** deyiladi.

Ellipsning fokal radiuslarini topish yulidan foydalanib, giperbolaning fokal radiuslarini topamiz:

$r_1 = -a + \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$ (o'ng shox uchun), $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = -a - \varepsilon x$ (chap shox uchun)

Mu c o l : $x^2 / 16 - y^2 / 9 = 1$ giperbolaning abtissasi 8 ga teng, ordinatasi musbat bo'lgan nuqtasining fokal radiuslari hisoblansin.

Echish: Masala sharti va (3) formulaga asosan

$$x=8, y>0, a=4, b=3, c=\sqrt{16+9}=5, \varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$$

va (4) formulaga asosan o'ng shox fokal radiuslari

$$r_1 = -a + \varepsilon x = -4 + \frac{5}{4} \cdot 8 = 6, \quad r_2 = a + \varepsilon x = 4 + \frac{5}{4} \cdot 8 = 14$$

Giperbolaning direktrisalari.

TA'RIF: Giperbolaning *direktrisalari* deb uning markazidan $\pm a/\varepsilon$ masofada o'tib, fokal o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlarga aytiladi.

Ta'rifga asosan direktrisa tenglamalari $x = \pm a/\varepsilon$ bo'ladi.

Ekstsentrisset $\varepsilon > 1$ bo'lgani uchun $a/\varepsilon < a$. Demak direktrisa O markaz bilan A_1 va A uchlari orasidan o'tadi.

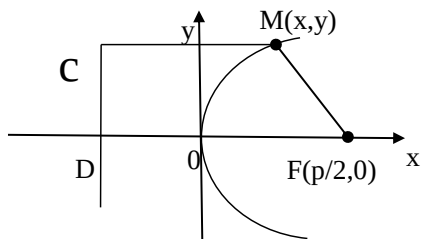
TEOREMA: Giperbolaning ixtiyoriy nuqtasidan fokusigacha masofaning mos direktrisasigacha masofasining nisbati o'zgarmas bo'lib, (ekstsentrissetga teng bo'ladi, ya'ni $r/d = \varepsilon$).

Teoremani isbotini o'quvchiga havola qilamiz.

TA'RIF: Parabola deb, har bir nuqtasidan berilgan nuqtigacha (fokusigacha) va berilgan to'g'ri chiziqqacha (direktrisasigacha) masofalari o'zaro teng bo'lgan tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga aytiladi.

Bunda direktrisa fokusdan o'tmasligi kerak.

Parabola tenglamasini topish uchun F fokus va l direktrisa orasidagi masofani $FD=p$, koordinata boshini ular o'rtasida deb olamiz. Unda fokus $F(p/2, 0)$, direktrisa tenglamasi $x = -p/2$ bo'ladi. Parabolaga tegishli ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtani olamiz.



Ta'rifga ko'ra $CM = FM$ va

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, CM = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

bo'lgani uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \Rightarrow x^2 - xp + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + xp + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y^2 = 2px \quad (5)$$

Hosil bo'lgan (5) tenglama parabolaning **kanonik tenglamasi** deyiladi. Bu parabola OX o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi va r parabolaning parametri deyiladi.

Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan direktirisagacha bo'lgan masofa $CM=d$, fokusigacha bo'lgan masofa $FM=r$ deb belgilasak, ta'rifga asosan $r=d$ va parabolaning ekstsentrishiteti $\varepsilon=r/d=1$ bo'ladi. Parabola uchun direktirisa tenglamasi $x=-p/2$, bo'ladi.

M i s o l: OX o'qi parabolaning simmetriya o'qi, uning uchi koordinatalar boshida yotadi. Parabola uchidan fokusigacha bo'lgan masofa 4 birlikka teng. Parabola tenglamasini tuzing.

Echish: Masala shartiga va (5) formulaga asosan

$$OF=4 \Rightarrow p/2=4 \Rightarrow p=8 \Rightarrow y^2=2px \Rightarrow y^2=2 \cdot 8x=16x.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Giperbola qanday ta'riflanadi?
2. Giperbolaning kanonik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. Giperbola kanonik tenglamasidagi parametrlar nimani ifodalaydi?
4. Giperbola asimptotalari qanday tenglama bilan ifodalanadi?
5. Giperbola ekstsentrishiteti deb nimaga aytiladi va u qanday qiymatlar qabo'l qila oladi?
6. Giperbolaning fokal radiuslari deb nimaga aytiladi va ular qanday topiladi?
7. Giperbola direktrisalari qanday xossaga ega?
8. Parabola qanday ta'riflanadi?
9. Parabolaning kanonik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
10. Parabolaning ekstsentrishiteti nimaga teng?
11. Parabola kanonik tenglamasidan uning fokusi va direktrisasi qanday topiladi?

22-MA'RUZA.

FAZODA TEKISLIK TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: tekislikning vektor tenglamasi, normal tenglamasi, umumiy tenglamasi, tekislikning normal vektori, tekislikning kesmalardagi tenglamasi.

Ma'ruza rejası:

1. Tekislik va uning vektor tenglamasi.
2. Tekislikning normal tenglamasi.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi.
4. Tekislikning normal vektori va uni topish.
5. Tekislik umumiy tenglamasini taxlil etish.
6. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §14-15 [3] VI bob, §1-2 [14]. 119-120 betlar.

Fazodagi xar bir M nuqta uchta x,y,z koordinatalar bilan aniqlanadi. Shu sababli fazodagi geometrik ob'ekt tenglamasi uch o'zgaruvchili, ya'ni $F(x,y,z) = 0$ ko'rinishda bo'ladi.

Fazoda eng asosiy geometrik ob'ektlardan biri bo'lib tekislik hisoblanadi. Uning tenglamasi quyidagi teorema bilan aniqlanadi.

TEOREMA: 1)Agarda fazoda tekislik berilgan bo'lsa, uning tenglamasi uch o'zgaruvchili chiziqli tenglamadan iborat bo'ladi.

2) Fazoda uch noma'lumli chiziqli tenglama berilgan bo'lsa, bu tenglama biror tekislikni aniqlaydi.

ISBOT: 1) Faraz qilaylik fazoda qandaydir tekislik berilgan bo'lsin. Uni uch o'zgaruvchili bitta chiziqli tenglama ifodalashini ko'rsatamiz.

Dekart koordinatalar sistemasida berilgan tekislikni ixtiyoriy bir nuqtasini $M(x;y;z)$, uning radius-vektorini $\mathbf{r}$ kabi belgilaymiz. Tekislikdagi boshqa bir $T(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan koordinatalar boshigacha bo'lgan masofani $\mathbf{r}$ orkali belgilaymiz, ya'ni $OT=p$. OT perpendikulyar ustida tekislikka yo'nalgan $\mathbf{n}^0$ birlik vektorni olamiz. $M(x;y;z)$ nuqta tekislikning istalgan nuqtasi bo'lsa ham $\mathbf{OM}=\mathbf{r}$ radius-vektorning birlik $\mathbf{n}^0$ vektorga proektsiyasi o'zgarmas bo'lib, $\mathbf{r}$ masofaga teng. Bundan

$$np_{\mathbf{n}^0} \overline{OM} = p \quad \text{ba} \quad np_{\mathbf{n}^0} \overline{OM} = \vec{r}\vec{n}^0 \Rightarrow \vec{r}\vec{n}^0 - p = 0 \quad (1)$$

natijani olamiz. Hosil qilingan (1) tenglama tekislikning **vektor tenglamasi** deyiladi. Agarda

$$\mathbf{r}=(x;y;z), \quad \mathbf{n}^0=(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$$

deb olsak, skalyar ko'paytmaning koordinatalaridagi ifodasidan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \quad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tekislikning **normal tenglamasi** deyiladi. Undan har qanday tekislikka chiziqli uch noma'lumli tenglama mos kelishini ko'ramiz.

2) Aytaylik bizga

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (3)$$

uch noma'lumli chiziqli tenglama berilgan bo'lsin. Agar $M(x;y;z)$ (3) tenglama aniqlaydigan sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, uning radius-vektori $\mathbf{r}=(x;y;z)$ va yordamchi $\mathbf{n}=(A;B;C)$ o'zgarmas vektorni kiritaylik. Bo'lardan foydalanib (3) tenglamani skalyar ko'paytma yordamida quyidagicha ifodalaymiz:

$$\mathbf{n}\mathbf{r}+D=0 \quad (4)$$

(3) tenglamani $|\mathbf{n}|$ ga bo'lamiz. Natijada quyidagi xollar kuzatiladi:

I. Agar $D<0$ bo'lsa, u holda $\mathbf{n}^0\mathbf{r}+D/|\mathbf{n}|=0$ va $p=-D/|\mathbf{n}|$ desak, $\mathbf{r}\mathbf{n}^0-p=0$ vektor tenglamani olamiz. Bu tenglamani qanoatlantiruvchi barcha $M(x;y;z)$ nuqtalarning geometrik o'rni, (1) ga asosan, tekislikdan iborat bo'ladi.

II. Agar $D>0$ bo'lsa, (4) ni $-|\mathbf{n}|$ ga bo'lamiz va yana $p = D/|\mathbf{n}|$ десак, $\mathbf{r}(-\mathbf{n}^0)-p=0$ vektor tenglamani olamiz.

III. Agar $D=0$ bo'lsa, u holda (4) ni $|\mathbf{n}|$ yoki $-|\mathbf{n}|$ ga bo'lib, $\mathbf{r}\mathbf{n}^0=0$ vektor tenglamani hosil qilamiz.

Demak, (3) tenglamadan (1) tenglama kelib chiqadi va bundan o'nga fazoda tekislik mos kelishi isbotlanadi.

(3) ko'rinishdagi tenglamaga tekislikning **umumiy tenglamasi** deyiladi.

Aytaylik $M(x;y;z)$ tekislikning ixtiyoriy va $M_1(x_1;y_1;z_1)$ esa uning ma'lum bir nuqtasi bo'lsin. U holda bu nuqtalar tekislik umumiy tenglamasini qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D &= 0 \\ Ax_1+By_1+Cz_1+D &= 0. \end{aligned}$$

Ularni birinchisidan ikkinchisini ayirsak,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \quad (5)$$

Bu berilgan M_1 nuqtadan o'tuvchi **tekisliklar dastasining tenglamasi** bo'ladi. (5) tenglama $\mathbf{n}=(A;B;C)$ va $\mathbf{M}_1\mathbf{M}=(x-x_1; y-y_1; z-z_1)$ vektorlarning ortogonallik shartini ifodalaydi.

Tekislikka perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy noldan farqli vektor shu tekislikning **normali** deb ataladi.

$\mathbf{M}_1\mathbf{M}$ vektor tekislikda yotganligi sababli, $\mathbf{n}$ vektor ham shu tekislikning normallari-dan biridir. Demak (3) yoki (5) tenglamadagi o'zgaruvchilarning oldidagi A, B, C koeffitsientlar orqali hosil qilingan $\mathbf{n}(A,B,C)$ tekislikning normallaridan biri ekan.

Shunday qilib normal tenglama (3) tenglamaning xususiy xoli bo'ladi. Tekislikning umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga o'tish uchun (3) ni

$$M = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

soniga ko'paytirish kerak (M va D ning ishoralari qarama – qarshi bo'lishi kerak). Natijada ushbu tenglamaga kelimiz:

$$MAx+MBy+MCz+MD=0$$

Bunda M **normallashtiruvchi ko'paytuvchi** deyiladi.

$MA=\cos\alpha$, $MB=\cos\beta$, $MC=\cos\gamma$, $MD=-p$
 ekanligini hisobga olsak, normal tenglamani topish uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\cos\alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \cos\beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos\gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad p = \mp \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Misol: Tekislikning $2x-y+2z-5=0$ umumiy tenglamasini normal tenglama ko'rinishga keltiring.

Echish: Normallashtiruvchi ko'paytuvchini topamiz va uni berilgan tenglamaga ko'paytiramiz:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{5}{3} = 0$$

Tekislikning umumiy tenglamasini tekshirish.

Tekislikning umumiy tenglamasi

$$Ax+By+Cz+D=0$$

berilgan bo'lsin. Ma'lumki bunda A, B, C koeffitsientlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi kerak, ya'ni tekislikning normali $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ nol vektor bo'lmasligi kerak.

Quyida umumiy tenglama unda qatnashayotgan koeffitsientlarning turli qiymatlarida qanday tekisliklarni ifodalanishini ko'rib o'tamiz.

1. $D=0 \Rightarrow Ax+By+Cz=0$ - tekislik koordinatalar boshidan o'tadi.
2. $A=0 \Rightarrow By+Cz+D=0$ - tekislik OX o'qiga parallel bo'ladi.
3. $B=0 \Rightarrow Ax+Cz+D=0$ - tekislik OY o'qiga parallel bo'ladi.
4. $C=0 \Rightarrow Ax+By+D=0$ - tekislik OZ o'qiga parallel bo'ladi.
5. $A=0, D=0 \Rightarrow By+Cz=0$ - tekislik OX o'qidan o'tadi.
6. $B=0, D=0 \Rightarrow Ax+Cz=0$ - tekislik OY o'qidan o'tadi.
7. $C=0, D=0 \Rightarrow Ax+By=0$ - tekislik OZ o'qidan o'tadi.
8. $A=0, B=0 \Rightarrow Cz+D=0 \Rightarrow z=-D/C$ - tekislik XOY tekisligiga parallel bo'ladi.
9. $A=0, C=0 \Rightarrow By+D=0 \Rightarrow y=-D/B$ - tekislik XOZ tekisligiga parallel bo'ladi.
10. $B=0, C=0 \Rightarrow Ax+D=0 \Rightarrow x=-D/A$ - tekislik UOZ tekisligiga parallel bo'ladi.
11. $A=0, B=0, D=0 \Rightarrow Cz=0$ - XOY tekisligi hosil bo'ladi.
12. $A=0, C=0, D=0 \Rightarrow By=0$ - XOZ tekisligi hosil bo'ladi.
13. $B=0, C=0, D=0 \Rightarrow Ax=0$ - YOZ tekisligi hosil bo'ladi.

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi.

Fazoda koordinatalar boshidan o'tmaydigan va koordinata o'qlarini mos ravishda a , b va c nuqtalarda kesib o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun tekislikning umumiy

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tenglamasidan foydalanamiz. Bu erda A, B, C, D koeffitsientlarni quyidagi mulohazalardan topamiz. Tekislik $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$ va $(0; 0; c)$ nuqtalardan o'tganligi uchun, ularning koordinatalari umumiy tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni

$$\begin{aligned} Aa + D &= 0 & A &= -D/a & a &= -D/A \\ Bb + D &= 0 & \Rightarrow B &= -D/b & \Rightarrow b &= -D/B \\ Cc + D &= 0 & C &= -D/c & c &= -D/C \end{aligned}$$

Koeffitsientlarning topilgan qiymatlarini tenglamaga qo'ysak, u holda

$$-D \frac{x}{a} - D \frac{y}{b} - D \frac{z}{c} + D = 0$$

va hosil bo'lgan bu tenglamani $(-D)$ ga bo'lsak hamda ixchamlasak, u holda

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1)$$

(1) tekislikning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deyiladi.

M i s o l: $3x - 4y + z - 5 = 0$ tekislik tenglamasini kesmalarga nisbatan ko'rinishga keltiring.

Echish: Yuqoridagidek mulohaza yuritib a, b, c larni topish mumkin:

$$a = -\frac{D}{A} = \frac{5}{3}; b = -\frac{D}{B} = -\frac{5}{4}; c = -\frac{D}{C} = +\frac{5}{1} = 5$$

Demak tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

$$\frac{x}{5/3} + \frac{y}{-5/4} + \frac{z}{5} = 1$$

ekanligi kelib chiqadi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Tekislikning vektor tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Tekislikning normal tenglamasini yozing va undagi parametrlar ma'nosini ko'rsating.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. Tekislikning normal vektori deb nimaga aytiladi?
5. Tekislik umumiy tenglamasidan uning normal vektori qanday topiladi?
6. Tekislikning umumiy tenglamasidan normal tenglamasiga qanday o'tiladi?
7. Tekislikning umumiy tenglamasida ba'zi parametrlar nol bo'lganda hosil bo'ladigan tekisliklarni aniqlang.
8. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
9. Tekislikning kesmalardagi tenglamasidagi parametrlar qanday ma'noga ega bo'ladi?

23 – M A ' R U Z A

TEKISLIK TENGLAMALARIGA DOIR MASALALAR.

Tayanch iboralar: berilgan nuqtadan o'tuvchi tekisliklar tenglamasi, uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi, tekisliklar orasidagi burchak, tekisliklarni perpendikulyarlik va parallellik sharti, nuqtadan tekislikkacha masofa.

Ma'ruza rejası:

1. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekisliklar tenglamasi.
2. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.
3. Ikki tekislik orasidagi burchak.
4. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik sharti.
5. Uchta tekislikning kesishish nuqtasi.
6. Nuktadan tekislikkacha bo'lgan masofa.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §16-19 [3] VI bob, §3-4 [14]. 119-120 betlar.

1. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekisliklar tenglamasi.

Aytmaylik tekislik berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan utsin va uning tenglamasi ko'rinishini topish talab etilsin. Izlanayotgan tekislikning umumiy tenglamasini qaraymiz:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

M_1 nuqta tekislikda yotgani uchun bu tenglamani qanoatlantirishi kerak:

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

Hosil bo'lgan bu tenglikni yuqoridagi tenglamadan ayirib, izlangan

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0,$$

ya'ni berilgan M_1 nuqtadan o'tuvchi tekisliklar tenglamasini hosil qilamiz. Undagi koeffitsientlarga turli qiymatlar berib, M_1 nuqtadan o'tuvchi tekisliklar dastasini olamiz.

2. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi.

Fazoda uchta nuqta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ berilgan bo'lib, ulardan o'tuvchi tekislik tenglamasini topish talab qilingan bo'lsin. Bu nuqtalarga mos keluvchi radius-vektorlarni mos ravishda

$$\vec{r}_1\{x_1; y_1; z_1\}, \vec{r}_2\{x_2; y_2; z_2\}, \vec{r}_3\{x_3; y_3; z_3\}$$

kabi belgilaymiz.

Agar tekislikning ixtiyoriy $M(x,u,z)$ o'zgaruvchi nuqtasiga mos keluvchi radius-vektorni $\vec{r} = \{x; y; z\}$ desak, u holda $\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ uchta vektor qarayotgan bitta tekislikda yotadi. Vektorlarning komplanarlik shartiga asosan ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi:

$$[(\vec{r} - \vec{r}_1) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)](\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$$

Bu berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislikning vektor ko'rinishli tenglamasi bo'ladi. Bu aralash ko'paytmani vektorlarning koordinatalari orqali ifodalab,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ya'ni berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislikning koordinatalar ko'rinishidagi tenglamasini hosil qilamiz.

Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini boshqacha, vektorlardan foydalanmasdan ham chiqarish mumkin.

Darxaqiqat, berilgan nuqtalarning biridan, masalan, $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasini yozamiz:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \quad (1)$$

Shartga ko'ra bu tenglamani ikkinchi $M_2(x_2; y_2; z_2)$ va uchinchi $M_3(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar ham qanoatlantirishi kerak, ya'ni

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0.$$

Agar oxirgi tenglamalarni C ga bo'lsak va hosil bo'lgan

$$\begin{cases} A(x_2 - x_1)/C + B(y_2 - y_1)/C + (z_2 - z_1) = 0 \\ A(x_3 - x_1)/C + B(y_3 - y_1)/C + (z_3 - z_1) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan A/C va B/C nisbatlarini topib, (1) tenglamaga qo'ysak, u holda uch nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi hosil bo'ladi.

M i s o l: Berilgan $(1; 2; 3)$, $(-1; 0; 0)$ va $(3; 0; 1)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

Echish: Birinchi usulga ko'ra

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(x-1) + 6(y-2) - 4(z-3) - 4(z-3) + 4(y-2) + 6(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 10(y-2) - 8(z-3) = 0 \Rightarrow (x-1) + 5(y-2) - 4(z-3) = 0.$$

Bu erda o'xshash hadlarni ixchamlab, izlanayotgan tekislikning tenglamasini hosil qilamiz:

$$x + 5y - 4z + 1 = 0$$

4. Tekisliklar orasidagi burchak. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Ikkita tekislik o'zlarining

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsin. Ular orasidagi ikki yokli α burchakni topish masalasini tekisliklarning mos $\vec{n}_1 \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 \{A_2, B_2, C_2\}$ normallari orasidagi burchakni topish masalasiga keltirish mumkin. Fazodagi ikki vektor orasidagi burchak formulasiga asosan

$$\cos \alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (2)$$

Agar yukorida keltirilgan tekisliklar perpendikulyar bo'lsa, u holda $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ vektorlar ham ortogonal bo'ladi. Natijada

$$\vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (3)$$

Bu tekisliklarning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

Xuddi shunday ravishda tekisliklarning parallellik sharti ularning normallarini kolleniarlik shartidan kelib chiqadi, ya'ni

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (4)$$

1-masala: Berilgan tekislikka parallel va berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi tuzilsin.

Echish: Berilgan nuqta $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va berilgan tekislik tenglamasi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

bo'lsin. U holda M_1 nuqtadan o'tuvchi ixtiyoriy tekislik tenglamasi

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Undagi koeffitsientlarni tekisliklarning parallellik shartidan, ya'ni (4) nisbatlar tengligidan topiladi.

Masalan, $A=A_1$, $B=B_1$, $C=C_1$ deb olsak, nisbatlar birga teng bo'ladi va izlanayotgan tekislik tenglamasini hosil qilamiz:

$$A_1(x-x_1) + B_1(y-y_1) + C_1(z-z_1) = 0 \quad (5).$$

2-masala: Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi va tenglamasi $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ bo'lgan tekislikka perpendikulyar tekislik tenglamasi tuzilsin.

Echish: M_1 nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini yozamiz:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0 \Rightarrow \frac{A}{C}(x-x_1) + \frac{B}{C}(y-y_1) + (z-z_1) = 0$$

Bu tenglamani M_2 nuqta ham qanoatlantirishi hamda tekisliklarning perpendikulyarlik shartidan ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A(x_2-x_1) + B(y_2-y_1) + C(z_2-z_1) = 0 \\ A_1A + B_1B + C_1C = 0 \end{cases}$$

Bu sistema tenglamalarini C ga bo'lib, hosil bo'lgan

$$\begin{cases} \frac{A}{C}(x-x_1) + \frac{B}{C}(y-y_1) + (z-z_1) = 0 \\ \frac{A}{C}A_1 + \frac{B}{C}B_1 + C_1 = 0 \end{cases}$$

sistemadan A/C va B/S nisbatlarni topamiz. Topilgan nisbatlarning qiymatlarini yuqoridagi tenglamaga qo'yib, izlanayotgan tekislik tenglamasini hosil qilamiz.

3-masala: Berilgan uchta tekislikning kesishish nuqtasini toping.

Echish: Tekisliklarning kesishish nuqtasi ularning uchalasiga ham tegishli bo'lgani uchun, uning x,y,z koordinatalarini topish uchun berilgan tekisliklarning umumiy tenglamalarini sistema qilib echamiz:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

4-masala: Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan umumiy tenglamasi

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

bilan berilgan tekislikkacha bo'lgan d masofani toping.

Echish: Izlangan masofa tekislikning normal tenglamasi orqali quyidagi formula bilan hisoblanishini ko'rsatish mumkin:

$$d = \pm(x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta + z_1 \cos \gamma - p). \quad (7)$$

Bundagi $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ yunaltiruvchi kosinuslarni va r parametrni topish uchun berilgan umumiy tenglamani normallashtiruvchi ko'paytuvchiga ko'paytirib, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$d = \frac{|A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}. \quad (8)$$

M i s o l: N(1;2;3) nuqtadan $2x-2y+z-3=0$ tenglama bilan ifodalanuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Echish: (8) formulaga asosan izlangan masofani topamiz:

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-3)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}.$$

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekisliklar tenglamasini yozing.
2. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi qanday topiladi?
3. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
4. Ikki tekislikning perpendikulyarlik sharti nimadan iborat?
5. Ikki tekislikning parallellik sharti nimadan iborat?
6. Uchta tekislikning kesishish nuqtasi qanday topiladi?
7. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa qanday topiladi?

24-MA'RUZA

FAZODAGI TO'G'RI CHIZIK TENGLAMALARI.

Tayanch iboralar: yo'naltiruvchi vektor, boshlang'ich nuqta, to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi, kanonik tenglamasi, parametrik tenglamasi, umumiy tenglamasi.

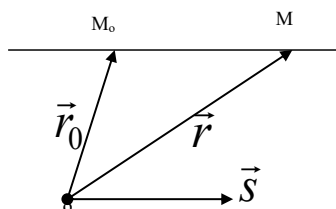
Ma'ruza rejası:

1. Fazodagi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori va boshlang'ich nuqtasi.
2. Fazodagi to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi.
3. Fazodagi to'g'ri chiziqning parametrik va kanonik tenglamasi.
4. Fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §17-18 [3] VI bob, §5 [14]. 120-121 betlar.

Fazodagi to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan har qanday s vektorga shu to'g'ri chiziqning **yo'naltiruvchi vektori** deyiladi. Aytaylik $M_0(x_0; y_0; z_0)$ to'g'ri chiziqning ma'lum bir nuqtasi, $M(x; y; z)$ esa to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. M_0 shu to'g'ri chiziqning **boshlang'ich nuqtasi** deyiladi. Bu nuqtalarning radius-vektorlari $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r}(x, y, z)$ va $\vec{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ vektorni olamiz. Unda, quyidagi chizmaga asosan, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{M_0M}$ tenglikka ishonch hosil qilish mumkin:



Agar $s(m; n; p)$ shu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori bo'lsa, u holda $\vec{M_0M}$ va $s(m; n; p)$ vektorlar kollinear, ya'ni $\vec{M_0M} = t \cdot s$, bunda t – o'zgarmas son. Natijada ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t s \quad (1)$$

Bu fazodagi to'g'ri chiziqning **vektor ko'rinishidagi tenglamasi** deyiladi. Agar (1) vektor tenglamani koordinatalarda ifodalasak, u holda

$$\begin{aligned} (x; y; z) &= (x_0; y_0; z_0) + t(m; n; p) \Rightarrow (x; y; z) = (x_0 + tm; y_0 + tn; z_0 + tp) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x = x_0 + tm, \quad y = y_0 + tn, \quad z = z_0 + tp \end{aligned} \quad (2)$$

Hosil bo'lgan tenglamalarda t parametr o'zgarishi bilan $x; y; z$ o'zgaruvchilar to'g'ri chiziqning turli nuqtalarini ifodalaydi, ya'ni (2) to'g'ri chiziqni to'liq aniqlaydi. Shu sababli (2) to'g'ri chiziqning **parametrik tenglamasi** deyiladi. Agarda (2) dan t ni topsak, u holda

$$t = \frac{x-x_0}{m}, t = \frac{y-y_0}{n}, t = \frac{z-z_0}{p} \Rightarrow \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (3)$$

Bu to'g'ri chiziqning **kanonik tenglamasi** deyiladi. Unda maxrajdagi m, n, p conlari yo'naltiruvchi vektor koordinatalari, suratdagi x_0, y_0, z_0 sonlari esa boshlang'ich nuqtaning koordinatalari bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Bu tenglamani s va $\mathbf{M}_0\mathbf{M}$ vektorlarning kollinearlik shartidan ham bevosita olishimiz mumkin edi.

To'g'ri chiziqning ushbu kanonik tenglamasi berilgan bo'lsin:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Bunda $p \neq 0$ deb olamiz. Bu tenglamani ikkiga ajratib,

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}, \quad \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz va bu sistema ham to'g'ri chiziqni ifodalaydi. Ammo ularning har biri tekislik tenglamasidir. Birinchi tenglama OY o'qiga parallel, ikkinchi tenglama esa OX o'qiga parallel tekislikni ifodalaydi. Bu tekisliklarning kesishmasida (3) kanonik tenglamasi bilan berilgan to'g'ri chiziq hosil bo'lmoqda.

Umuman olganda, fazoda to'g'ri chiziqning nuqtalari ikkita tekislik tenglamalaridan tuzilgan quyidagi sistemaning echimlaridan iborat bo'ladi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Bu tenglamalar sistemasi fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori s tekisliklarning

$$\mathbf{n}_1 = (A_1; B_1; C_1), \quad \mathbf{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$$

normallariga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun ham to'g'ri chiziqqa parallel $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ vektorni uning yo'naltiruvchi vektori sifatida olish mumkin.

1-misol: Fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko'rinishga keltiring.

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z - 5 &= 0 \\ 3x + y - 2z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Echish: Izlanayotgan to'g'ri chiziqda yotuvchi biror M_0 nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz. Tenglamalar sistemasida noma'lumlar 3 ta, lekin tenglamalar soni esa ikkita. Shuning uchun bitta noma'lumni erkin qilib olamiz. Masalan, $z=1$ deb olamiz. Natijada berilgan sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$

ko'rinishni oladi. Bu sistemadan $x=2, y=0$ ekanligini topamiz. Demak, $M_0(2;0;1)$ nuqta to'g'ri chiziqda yotadi. Yo'naltiruvchi vektor esa tekisliklarning $\mathbf{n}_1$ va $\mathbf{n}_2$ normallari vektorial ko'paytmasi kabi topiladi:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 11\mathbf{k}.$$

Demak, yo'naltiruvchi vektor $\mathbf{s}(-7;7;11)$. Unda to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y-0}{7} = \frac{z-1}{11}$$

2-misol. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini parametrik va kanonik ko'rinishga keltiring:

$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0 \\ 3x-y+2z-3=0 \end{cases}$$

Echish: Tenglamalarni xar birini x va y ga nisbatan echamiz:

$$\begin{cases} 2x+y=z-1 \\ 3x-y=3-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=2-z \\ 5y=7z-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{5}z+\frac{2}{5} \\ y=\frac{7}{5}z-\frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\frac{x-2/5}{-1/5} \\ z=\frac{y+9/5}{7/5} \end{cases}$$

Natijada to'g'ri chiziqning ushbu kanonik tenglamasiga kelimiz:

$$\frac{x-2/5}{-1/5} = \frac{y+9/5}{7/5} = \frac{z}{1}$$

Bu erdan parametrik tenglamalarni olish qiyin emas. Darxaqiqat, xar bir nisbatni t ga tenglashtirsak, u holda

$$x = \frac{-t}{5} + \frac{2}{5}; \quad y = \frac{7}{5}t - \frac{9}{5}; \quad z = t$$

izlangan parametrik tenglama bo'ladi.

O'z – o'zini nazorat etish savollari:

1. Fazodagi to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori deb nimaga aytiladi?
2. Fazodagi to'g'ri chiziqning boshlang'ich nuqtasi deb nimaga aytiladi?
3. Fazodagi to'g'ri chiziqning vektor tenglamasini yozing.
4. Fazodagi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Fazodagi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamasini yozing va undagi parametrlarning ma'nosini ko'rsating.
6. Fazodagi to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
7. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasidan kanonik va parametrik tenglamasiga qanday o'tiladi?

25-MA'RUZA

FAZODAGI TUGRI CHIZIKLARGA DOIR MASALALAR.

Tayanch iboralar: fazodagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, to'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik sharti, berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamasi, berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi, to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak, to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik va perpendikulyarlik sharti, ikki to'g'ri chiziqni bir tekislikda yotish sharti.

Ma'ruza rejası:

1. Fazodagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.
2. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
3. Berilgan nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar tenglamasi.
4. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.
5. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.
6. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallellik shartlari.
7. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan tekislikka parallel to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasi.
8. Ikki to'g'ri chiziqning bir tekislikda yotish sharti.

Adabiyotlar:

[1] I bob, §19 [14]. 121-122 betlar.

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Fazoda ikkita to'g'ri chiziq o'zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \text{ ba } \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

Ular orasidagi α burchakni topish masalasini ko'ramiz. Bu masalani ularning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltirish mumkin. Yo'naltiruvchi $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}, \vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ vektorlar orasidagi burchak quyidagi formula yordamida topiladi:

$$\cos \alpha = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (1)$$

Misol: Kanonik tenglamalari bilan berilgan quyidagi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}, \quad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

Echish: (1) formulaga asosan

$$\cos \alpha = \frac{1 \cdot 2 + (-4)(-2) + 1 \cdot (-1)}{\sqrt{1+16+1}\sqrt{4+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bundan $\alpha = 45^\circ$ ekanligini ko'ramiz.

2. To'g'ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Agar to'g'ri chiziqlar perpendikulyar bo'lsa, u holda (1) formulada $\cos \alpha = 0$ bo'ladi. Bundan esa ikki to'g'ri chizikning perpendikulyarlik sharti kelib chiqadi:

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

Agar to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, u holda ularning yo'naltiruvchi vektorlari ham o'zaro parallel bo'ladi va bundan ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti kelib chiqadi:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

3. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Aytaylik fazoda $M(a; b; c)$ nuqta va kanonik tenglamasi

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

bo'lgan to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Berilgan M nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p}$$

kabi ifodalash mumkin. To'g'ri chiziqlarning parallellik shartiga asosan

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}$$

munosabat o'rinli bo'ladi. Bundan, $m=m_1$, $n=n_1$ va $p=p_1$ deb olish mumkinligini ko'ramiz. Demak izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi

$$\frac{x - a}{m_1} = \frac{y - b}{n_1} = \frac{z - c}{p_1}$$

ko'rinishda bo'ladi.

4. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasi.

Aytaylik fazoning ikkita nuqtasi o'zining koordinatalari bilan berilgan bo'lsin. Ular $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ bo'lsin. Shu nuqalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini topamiz.

Izlanayotgan to'g'ri chiziqli kanonik tenglamasini tuzish uchun unda yotuvchi biror nuqtaning koordinatalarini va yo'naltiruvchi vektorini bilish kifoya. Shunday nuqta sifatida berilgan nuqtalardan istalganini, aytaylik M_1 ni olamiz. Yo'naltiruvchi vektor sifatida esa unda yotuvchi $\vec{M_1M_2}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$ vektorni tanlaymiz. Natijada berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqli tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

5. To'g'ri chiziqli va tekislik orasidagi burchak.

Aytaylik, to'g'ri chiziqli va tekislik mos ravishda o'zlarining kanonik va umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p}, \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ma'lumki tekislik va uni kesuvchi to'g'ri chiziqli orasidagi burchakni aniqlash uchun shu to'g'ri chiziqli tekislikka proyeksiyalab, hosil bo'lgan chiziqli burchak topiladi. Uni α orqali belgilaylik. Shu burchakning sinusini to'g'ri chiziqli $s(m, n, p)$ yo'naltiruvchi vektori va tekislikning $\vec{n}(A, B, C)$ normal vektori orqali topamiz:

$$\sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{Am} + \vec{Bn} + \vec{Cp}|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

6. To'g'ri chiziqli va tekislikning parallelizm va perpendikulyarlik shartlari

Aytaylik quyidagi

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p}, \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqli va tekislik o'zaro parallel bo'lsinlar. U holda to'g'ri chiziqli yo'naltiruvchi vektori $\vec{s}(m, n, p)$ va tekislik normalini $\vec{n}(A, B, C)$ o'zaro perpendikulyar bo'ladilar. Bundan to'g'ri chiziqli va tekislikning parallelizm sharti quyidagicha ekanligi kelib chiqadi:

$$\vec{Am} + \vec{Bn} + \vec{Cp} = 0$$

Bu tenglikni $\sin \alpha = 0$ shartdan ham keltirib chiqarish mumkin edi.

Endi berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartini keltirib chiqaraylik. To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori va tekislik normalini kollinear vektorlar ekanligidan, ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C} \quad \text{yoki} \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik shartini ifodalaydi.

7. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar dastasining tenglamasi.

Berilgan $M(a;b;c)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamasini yozamiz:

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$$

Bu to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan tekislik tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ bo'lsin. To'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartidan $Am+Bn+Cp=0$ munosabatni olamiz. Nisbatlarning tengligidan esa $m=x-a$, $n=y-b$, $p=z-c$ deb olishimiz mumkin. U holda izlanayotgan to'g'ri chiziqlar dastasining quyidagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0.$$

8. Ikki to'g'ri chiziqning bir tekislikka yotish sharti.

Ikkita to'g'ri chiziq uzlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan bo'lsin:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}, \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

Ularning yo'naltiruvchi vektorlarini mos ravishda $s_1(m_1;n_1;p_1)$ va $s_2(m_2;n_2;p_2)$ kabi belgilaymiz. To'g'ri chiziqlarning $M_1(x_1,y_1,z_1)$ va $M_2(x_2,y_2,z_2)$ boshlang'ich nuqtalarining radius-vektorlarini $r_1(x_1;y_1;z_1)$ va $r_2(x_2;y_2;z_2)$ kabi belgilaymiz. Unda bu nuqtalarning biridan ikkinchisiga yo'nalgan M_1M_2 vektor $r_2 - r_1$ bo'ladi. Vektorlarni ayirish qoidasiga asosan $r_2 - r_1 = (x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1)$ tenglikni yoza olamiz. Geometrik mulohazalarga asosan berilgan ikkita to'g'ri chiziqning bitta tekislikda yotishi uchun s_1 , s_2 va $r_2 - r_1$ vektorlarning komplanar bo'lishi zarur va etarlidir. Bundan aralash ko'paytma $(r_2 - r_1) s_1 s_2 = 0$ yoki

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bu ikki to'g'ri chiziqning bir tekislikda yotish shartini ifodalaydi.

O'z-o'zini nazorat etish savollari:

1. Fazodagi ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak qanday topiladi?
2. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik (parallellik) sharti nimadan iborat?
3. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday topiladi?
5. To'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik (parallellik) sharti nimadan iborat?
6. Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan tekislikka parallel to'g'ri chiziqlar tenglamasini yozing.
7. Qaysi shartda ikki to'g'ri chiziq bir tekislikda yotadi?

ADABIYOTLAR.

1. **SOATOV YO.U.** «Oliy matematika», I jild, Toshkent, O'qituvchi, 1992 y.
2. **PISKUNOV N.S.** «Differentsial va integral hisob», 1-tom, Toshkent, O'qituvchi, 1972 y.
3. **MADRAXIMOV X.S., GANIEV A.G., MUMINOV N.S.** «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1988 y.
4. **SARIMSOKOV T.A.** «Haqiqiy o'zgaruvchining funktsiyalari nazariyasi», Toshkent, O'qituvchi, 1968 y.
5. **T. YOKUBOV** «Matematik logika elementlari», Toshkent, O'qituvchi, 1983y.
6. **RAJABOV F., NURMETOVA.** «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1990 y.
7. **SHNEYDER V.E., SLUTSKIY A.I., SHUMOV A.S.** «Oliy matematika qisqa kursi», I tom, Toshkent, O'qituvchi, 1983 y.
8. **NAZAROV R.N., TOSHPO'LATOV B.T., DUSUMBETOV A.D.**
«Algebra va sonlar nazariyasi», I qism, Toshkent, O'qituvchi, 1993 y.
9. **NAZAROV X., OSTONOV K.** «Matematika tarixi», Toshkent, O'qituvchi, 1996 y.
10. **IBROXIMOV R.,** «Matematikadan masalalar to'plami», Toshkent, O'qituvchi, 1990 y.
11. **AZLAROV T., MANSUROV X.** «Matematik analiz», I qism, Toshkent, O'qituvchi, 1994 y.
12. **TO'LAGANOV T., NORMATOV A.** «Matematikadan praktikum», Toshkent, O'qituvchi, 1983 y.
13. **TOJIEV SH.** «Oliy matematikadan masalalar to'plami», Toshkent, O'qituvchi, 2003 y.
14. **KREMER N.SH., PUTKO B.A., TRISHIN I.M., FRIDMAN M.**
«Visshaya matematika dlya ekonomistov», Moskva, Yuniti, 2000g.

