

III – BOB. SON TUSHUNCHASINI KEHGAYTIRISH.

3.1. BUTUN SONLAR.

3.1.1. Butun nomanfiy sonlar. Manfiy sonlarning kiritilishi. Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasi.

1. Butun nomanfiy sonlar. a va b natural sonlar va $a + b = c$ yig'indi berilgan bo'lsin. Bu yig'indi uchun 1) $c > a$ va $c > b$; 2) har bir qo'shiluvchi, yig'indi bilan ikkinchi qo'shiluvchi orasidagi ayirmaga teng, ya'ni $b = c - a$ va $a = c - b$

«0» soni bo'sh to'lpamlar sinfining xarakteristikasi sifatida kiritilgan bo'lib « a » natural son esa bo'shmas to'lpamlar sinfining xarakteristikasi bo'lganligi uchun $a + 0 = a$ ekanligini tushunish qiyin emas. Yigindida biror qo'shiluvchini topish qoidasini qo'shiluvchilardan biri nol bo'lgan holda qarab, $0 = a - a$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, «0» sonini ikkita teng sonning ayirmasi deb qarash mumkin.

Nol sonini natural sonlar to'plamiga qo'shib, butun nomanfiy sonlar to'plami deb ataladigan yangi sonli to'plam hosil qilamiz. Bu kengaytirilgan to'plam Z_0 bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi

$$Z_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

Nol soni bilan amallar bajarish qoidalarini, ushbu tengliklar ko'rinishida yozish mumkin: $a + 0 = a$ (ta'rifga ko'ra), $0 + a = a$;

$$a - 0 = a; \quad a \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot a = 0$$

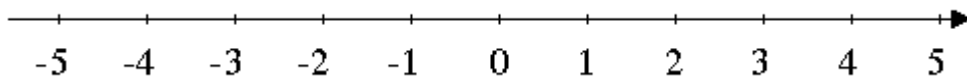
$$\text{agar } a \neq 0 \text{ bo'lsa, } 0 : a = 0$$

Nolga bo'lishni alohida qaraymiz. Noldan farqli a son berilgan bo'lsin, ya'ni $a \neq 0$ $a : 0$ bo'linma mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik; uni b orqali belgilaylik. U holda $a : 0 = b$ ga ega bo'lamiz, bundan esa quyidagi kelib chiqadi; $a = 0 \cdot b$ yoki $a = 0$ bu esa shartga ziddir. Demak, $a : 0$ bo'linmaning mavjudligi haqida qilgan farazimiz noto'g'ri. Shunday qilib, nolga bo'lish mavjud emas.

Nolni natural sonlar to'plamiga qo'shish natijasida son tushunchasini dastlabki kengaytirish amalga oshirildi.

2. Manfiy sonlarning kiritilishi. Nol sonini kiritilishi natijasida teng sonlarni ayirish mumkin bo'ldi. Katta sonni kichik sondan ayirish mumkin bo'lishi uchun sonlar to'plamini yangi sonlar kiritish yo'li bilan kengaytirilgan.

To'g'ri chiziqni olib, unda yo'nalish, O boshlang'ich nuqta va masshtab birligini olamiz. Boshlang'ich



34-chizma

nuqtaga 0 sonini mos qo'yamiz. Boshlang'ich nuqtadan o'ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi masofada joylashgan nuqtalarga 1, 2, 3, ... natural sonlarni mos qo'yamiz, boshlang'ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga -1, -2, -3 ... simvollari bilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo'yamiz. Bu sonlar butun manfiy sonlar deb ataladi.

Sonlar belgilangan bu to'g'ri chiziq son o'qi deb ataladi. O'qning strelka bilan ko'rsatilgan yo'nalishi musbat yo'nalish, qarama – qarshi yo'nalishi esa manfiy yo'nalish deb ataladi. Natural sonlar son o'qida boshlang'ich nuqtadan musbat yo'nalishda qo'yiladi, shuning uchun ularni musbat butun sonlar deb ataladi.

Butun nomanfiy sonlar to'plami bilan butun manfiy sonlar to'plamining birlashmasi yangi sonli to'plamni hosil qiladi, bu to'plam butun sonlar to'plami deb ataladi va Z simvoli bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi.

$$Z = \{\dots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Yuqoridagi 34-chizma butun sonlar to'plamining geometrik interpretatsiyasini tashkil etadi. Chizmadan ko'rinadiki, har bir butun songa son o'qida aniq nuqta mos keladi, lekin son o'qining har bir nuqtasiga ham butun son mos kelavermaydi.

3. Natural sonlar to'plamini butun sonlar to'plamiga kengaytirilishini ikkinchi talqini.

0- simvoli bilan belgilanadigan nol soni va manfiy butun sonlar quyidagicha kiritiladi: a) istalgan n - natural son va 0- sonining yig'indisi n sonidir.

$$n + 0 = n$$

b) istalgan n natural songa shunday yagona $-n$ - manfiy butun son mos keladiki, n va n sonlarning yig'indisi nolga teng.

$$n + (-n) = 0$$

$-n$ soni n songa qarama-qarshi son deb aytiladi. $-n$ soniga qarama – qarshi son n sonidir; $-(-n) = n$.

Natural sonlar to'plamiga yangi ob'ektlarni – nol sonini va manfiy butun sonlarni kiritish natijasida hosil bo'lgan to'plamni butun sonlar to'plami deyiladi. Butun sonlar to'plamidagi natural sonlar musbat butun sonlar deb ataladi. Barcha butun sonlar to'plami Z bilan belgilanadi. Butun sonlar to'plami tartiblangan to'plamdir, ya'ni istalgan ikkita m va n butun sonlar uchun quyidagi munosabatlardan biri va faqat biri o'rinlidir.

$$m = n \text{ yoki } m < n \text{ yoki } n < m$$

Butun sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishdan oldin sonning moduli to'g'risida tushuncha beramiz. n sonining absolyut qiymati (yoki moduli) deb $|n|$ bilan belgilanadigan va ushbu qoida bo'yicha hisoblanadigan songa aytiladi;

n sonining absolyut qiymati musbat n sonlar uchun ham manfiy n sonlar uchun ham musbat bo'lib faqat $n=0$ bo'lgandagina nolga teng.

3.1.2 Butun sonlar ustida amallar.

1. Qo'shish. Butun sonlarni qo'shishda quyidagi ikki holga e'tibor berish lozim.

a) qo'shiluvchilar bir xil ishorali;

b) qo'shiluvchilar turli ishorali.

1-ta'rif. Bir xil ishorali ikki butun sonning yig'indisi deb, shunday ishorali, moduli esa qo'shiluvchilar modullarining yig'indisiga teng bo'lgan butun songa aytiladi.

Turli ishorali va turli modulli ikki butun sonning yig'indisi deb, moduli

qo'shiluvchilar modullari ayirmasiga teng, ishorasi esa moduli katta bo'lgan qo'shiluvchi ishorasi bilan bir xil bo'lgan songa aytiladi; Ikkita qarama-qarshi sonning yig'indisi nolga teng, ya'ni $a + (-a) = 0$

Masalan,

$$(+8) + (+13) = +21, (-12) + (-11) = -23,$$

$$(+8) + (-13) = -5, (-8) + (+13) = +5, (8) + (-8) = 0.$$

Natural sonlar to'plamidagi qo'shish qonunlari (o'rin almashtirish, gruppalash) butun sonlar to'plami uchun ham o'rinli. Bundan tashqari butun sonlar to'plamida qo'shish monotonlik qonuniga bo'ysunadi.

Yig'indining monotonlik qonuni:

Agar $a > b$ bo'lsa, u holda $a + c > b + c$ ning saqlanishini misollarda tekshirib ko'ramiz. Haqiqatan, ham $-7 > -9$ tengsizlikdan quyidagilar kelib chiqadi:

$$(-7) + (11) > (-9) + (11)$$

$$(-7) + 0 > (-9) + 0, (-7) + (-3) > (-9) + (-3)$$

Natural sonlar to'plamida yig'indi har bir qo'shiluvchidan doimo katta. Butun sonlar to'plamida yig'indi bu cheklanishdan xoli.

Ikkita butun sonning yig'indisi: a) har bir qo'shiluvchidan katta bo'lishi mumkin; b) bir qo'shiluvchidan katta va ikkinchisidan kichik bo'lishi mumkin. v) har bir qo'shiluvchidan kichik bo'lishi mumkin; g) qo'shiluvchilardan biriga teng bo'lishi mumkin.

2.Ko'paytirish.

2-ta'rif. Ikki butun sonning ko'paytmasi deb, moduli ko'paytuvchilar modullari ko'paytmasiga teng va ko'paytuvchilar bir xil ishorali bo'lsa, plus ishora bilan olingan, ko'paytuvchilar turli ishorali bo'lsa, minus ishora bilan olinadigan songa aytiladi; agar ko'paytuvchilardan biri nolga teng bo'lsa, ko'paytma nolga teng.

Masalan,

$$(+3) \cdot (+8) = 24; (-3) \cdot (-8) = 24; \quad (-3) \cdot (8) = -24;$$

$$(+3) \cdot (-8) = -24$$

bulardan esa $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ kelib chiqadi, ya'ni ko'paytmaning moduli ko'paytuvchilar modullari ko'paytmasiga teng.

Butun sonlarni ko'paytirish uchun o'rin almashtirish, gruppalash va taqsimot qonunlari o'rinli. Bu qonunlarni o'rinli ekanligini beavosita misollar yordamida ko'rsatish mumkin.

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2; (-2) \cdot (3) = (3) \cdot (-2); (-2) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-2)$$

$$[(-5) \cdot (-4)] \cdot (+3) = (-5) \cdot [(-4) \cdot (+3)]$$

$$[(+5) \cdot (-4)] \cdot (-3) = (+5) \cdot [(-4) \cdot (-3)]$$

Butun sonlar to'plamida monotonlik qonuni natural sonlar to'plamidagi monotonlik qonunidan kengaytirilgan shaklda bo'ladi, ya'ni agar $a > b$ va $m > 0$ bo'lsa, u holda $am > bm$, agar $a > b$ va $m < 0$ bo'lsa, u holda $am < bm$. Shunday qilib, natural sonlar uchun monotonlik qonuni butun sonlar uchun monotonlik qonunining xususiy holidir.

Natural sonlar to'plamidan butun sonlar to'plamiga o'tilganda

ko'paytirishning ma'nosi o'zgaradi. Haqiqatan, a natural sonni 6 ga ko'paytirish a sonni 6 marta orttirish demakdir.

Natural ko'rsatkichli darajaga ko'tarish.

Darajaga ko'tarish amalining natural asos uchun ifodalangan ta'rifi istalgan butun asos uchun ham saqlanadi.

Masalan,

$$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$$

$$(-2)^6 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 64$$

Ishoralar qoidasi:

$$a > 0 \text{ va } a < 0 \text{ da } a^{2m} > 0;$$

$$a > 0 \text{ da } a^{2m} > 0$$

Butun sonlar to'plamida to'g'ri amallar (qo'shish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish) doimo bir qiymatli bajariladi, bu tegishli qoidalardan bevosita kelib chiqadi.

3. Ayirish.

Ayirish amalining ta'rifi natural sonlar uchun ayirish amali qoidasiga o'xshash.

3-ta'rif: a va b butun sonlarning ayirmasi deb, shunday x butun songa aytiladiki, uni b songa qo'shganda a soni hosil bo'ladi. Shu sababli agar $a - b = x$ bo'lsa, u holda $x + b = a$

Ayirish qoidasi ta'rifini ayirma ta'rifi, butun sonlarni qo'shish qoidasi va qo'shishning gruppallash qonuniga asoslanib keltirib chiqaramiz. a va b butun sonlar ayirmasini topish talab qilinayotgan bo'lsin. Izlanayotgan ayirmani x orqali belgilaymiz.

Ayirma ta'rifiga ko'ra

$$x + b = a$$

Bu tenglikning ikkala qismiga $-b$ ni qo'shib $x + b + (-b) = a + (-b)$ ni hosil qilamiz. Yig'indining gruppallash xossasini qo'llanib, quyidagini topamiz:

$$x + [b + (-b)] = a + (-b)$$

$b + (-b) = 0$ bo'lganligi uchun $x = a + (-b)$ yoki $a - b = a + (-b)$ so'nggi tenglik butun sonlarni ayirish qoidasini ifodalaydi va bunday ta'riflanadi: bir butun sondan ikkinchi butun sonni ayirish uchun ayiriluvchiga qarama – qarshi sonni kamayuvchiga qo'shish kerak.

Bundan butun sonlarni ayirish qo'shishga keltirilishi kelib chiqadi. Butun sonlar to'plamida qo'shish bir qiymatli bajarilganligidan butun sonlar to'plamida ayirish amali ham bir qiymatli bajarilishi kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlash kerakki, manfiy sonlar kiritilishi bilan kichik sondan katta sonni ayirish mumkin bo'ladi.

$$\text{Masalan, } (+4) - (+7) = (+4) + (-7) = -3$$

$$(-4) - (+7) = (-4) + (-7) = -11$$

4. Bo'lish.

Butun sonlar to'plamida bo'lish amali natural sonlar to'plamidagi kabi aniqlanadi. Butun sonlarni bo'lish qoidasini bo'linmaning ta'rifi va butun sonlarni ko'paytirish qoidasiga asoslanib keltirib chiqaramiz.

a butun sonni noldan farqli b butun songa bo'lishdan chiqadigan bo'linmani topish talab qilingan bo'lsin. Izlanayotgan bo'linmani x bilan belgilaymiz va bunday yozamiz: $a : b = x$. Natural sonlarni bo'lishdagi bo'linmaning ta'rifiga ko'ra $b \cdot x = a$. Bu tenglikdan ko'rish osonki, agar a va b turli ishorali bo'lsa, u holda x bo'linma manfiydir. Bu tenglikning o'zidan yana $|b| \cdot |x| = |a|$ bo'lishi kelib chiqadi, bunda agar $|a|$ son $|b|$ ga karrali bo'lsa, $|x| = |a| : |b|$ bo'ladi. Shunday qilib, bir butun sonni noldan farqli ikkinchi butun songa bo'lish uchun bo'linuvchining moduli bo'luvchining moduliga bo'lish va agar bo'linuvchi va bo'luvchi bir xil ishorali bo'lsa, hosil bo'lgan bo'linmani «+» ishora bilan olish, agar bo'linuvchi va bo'luvchi turli ishorali bo'lsa, bo'linmani «-» ishora bilan olish etarlidir; agar bo'linuvchi nolga teng bo'lsa, u holda bo'linma ham nolga teng.

Bundan kelib chiqadiki, butun sonlar to'plamida bo'linma faqat bo'linuvchining moduli bo'luvchining moduliga karrali bo'lganda mavjud ekan. Bu har qanday ixtiyoriy ikkita butun son uchun bo'lish amali bajarilmasligini ko'rsatadi. Bu esa sonli to'plamni yanada kengaytirishni, ya'ni yangi sonlarni kiritishni talab etadi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Butun nomanfiy sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?
2. Manfiy sonlarning kiritilishini tushuntiring
3. Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasini tushuntiring
4. Butun sonlarni qo'shish va ko'paytirish qoidalarini keltiring.
5. Butun sonlarni ayirish va bo'lish ta'riflarini keltirib tushuntirib bering.
6. Sonning moduli deganda nimani tushunasiz.

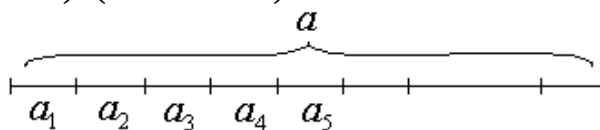
3.2. MUSBAT RATSIONAL SONLAR

3.2.1. Musbat ratsional sonlar to'plami.

1. Kesmalarni o'lchash.

Son tushunchasini kengaytirish mazmunini ochishdan oldin, o'lchanuvchi kattaliklar va o'lchov birliklari orasidagi bog'lanishni aniqlash lozim. Buning uchun kesmalarni o'lchashni qaraymiz.

Aytaylik a kesma $a_1, a_2, \dots, a_n$ kesmalar birlashmasidan tashkil topgan bo'lib, ularni hech bir ikkitasi ichki nuqtalarga ega bo'lmasin (kesmalar uchlari umumiy bo'lishi mumkin). (35- chizma)



35-chizma

U holda a kesmani $a_1, a_2, \dots, a_n$ kesmalarni yig'indisi deyiladi va tubandagi ko'rinishda yoziladi:

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad \text{yoki} \quad a = \sum_{k=1}^n a_k$$

Biror e kesmani tanlab, uni birlik kesma yoki uzunlik o'lchov birligi deymiz. Agar a kesmani har biri e kesmaga kongruent bo'lgan n ta bo'lakchaga ajratish mumkin bo'lsa, u holda a kesma e kesmaga karrali yoki boshqacha n soni a kesmaning e o'lchov birligidagi qiymati deyiladi va $m_e(a)$ kabi belgilanadi.

Agar e o'lchov birligi sifatida qabul qilingan bo'lsa $m_e(a)$ o'rniga $m(a)$ yoziladi. $m(a) = n$ bo'lsa, uni $a \cong n \cdot e$ ko'rinishida yozish mumkin, ya'ni a kesma e kesmaga kongruent n ta kesmadan tashkil topganini bildiradi.

Kesma o'lchovi ikkita hossaga ega: additivlik va multiplakatativlik.

1) Additivlik xossasi:

Agar $a = b + c$ bo'lib, bunda b va c kesmalar uzunliklari natural sonlar bilan ifodalangan bo'lsa, u holda a kesma uzunligi kesmalar bo'laklari uzunliklari yig'indisiga teng bo'ladi:

$$m(a) = m(b) + m(c) \quad (1)$$

bu additivlik hossasi. (additivlik so'zi lotincha additio - so'zidan olingan bizningcha qo'shish degan ma'noni beradi.)

2) Multiplakatativlik xossasi.

Uzunlik o'lchov birligini biridan ikkinchisiga o'tishning umumiy holini qaraylik. Aytaylik, e_1, e_2 dan n marta katta bo'lsin, ya'ni $e_1 \cong n e_2$: (n - natural son). Agar a kesmani e_1 o'lchov birligida o'lchaganda biror k soni hosil bo'lsa (ya'ni $a \cong k \cdot e_1$) shu a kesmani e_2 o'lchov birligida o'lchasa kn soni hosil bo'ladi (ya'ni $a \cong (k n e_2)$). Haqiqatan ham a kesma e_1 kesmaga kongruent bo'lgan k ta

kesmadan tashkil topadi. Bunda k ta kesmalarning har biri e_2 kesmaga kongrent. Demak a kesma e_2 kesmaga kongruent bo'lgan kn kesmadan tashkil topadi, ya'ni $a \equiv (kn)e_2$

Bulardan $a \equiv ke_1$ va $e_1 \equiv ne_2$ bo'lishidan $k(ne_2) = (kn)e_2$ ekanligi kelib chiqadi.

a kesmaning e_1 o'lchov birligidagi uzunligini $m_1(a)$, e_2 o'lchov birligidagi uzunligini $m_2(a)$ bilan belgilaymiz. U holda $m_1(a) = k$, $m_2(a) = kn$.

e_1 kesmaning e_2 o'lchov birligidagi uzunligini n ga tengligini hisobga olsak (ya'ni $m_2(e_1) = n$; $m_2(a) = kn$) tubandagi munosabatga ega bo'lamiz.

$$m_2(a) = m_1(a)m_2(e_1) \quad (2)$$

(2) - dan quyidagi xossa kelib chiqadi.

Agar a kesma e_1 kesmaga karrali, e_1 kesma esa e_2 kesmaga karrali bo'lsa, u holda a kesma e_2 kesmaga karrali bo'ladi va (2) tenglik bajariladi.

Bu xossaga multiplakatvlik xossasi deyiladi. (multiplakatv so'zi lotincha "multiplicatio" - so'zidan olingan bo'lib, bizningcha ko'paytirish degan ma'noni beradi).

2.Kasr tushunchasini kiritilishi.

Matematikaning amaliyotga ko'pgina tadbiri ikkita asosiy masalaga ya'ni kattaliklarni o'lchash va chekli to'plamlar elementlari sonini hisoblashga doir masalalarga olib keladi. To'plamlar elementlari sonini sanash natural sonlar bilan ifodalanadi.

Lekin hamma vaqt ham o'lchanadigan kattalikni butun son marta o'lchov birligi orqali ifodalab bo'lmagan. Bu esa natural sonlardan boshqa sonlarni ham kiritishga ya'ni sonlar tushunchasini kengaytirishga olib kelgan. Ma'lumki, matematika kursida natural, butun, ratsional, irratsional, haqiqiy va kompleks sonlar to'plamlari bilan ish ko'riladi. Sonlarning turli to'plamlari orasidagi o'zaro bog'lanishlari xususida to'xtalamiz.

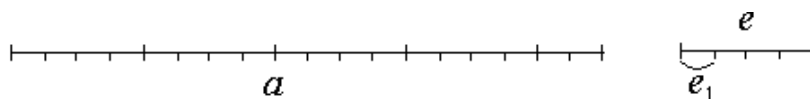
Son tushunchasining kengayishi jarayonidagi dastlabki to'plam Z_0 bo'ldi. Biz buni oldingi mavzuda ko'rib o'tdik. Juda qadim zamonlarda paydo bo'lgan natural son tushunchasi ko'p asrlar davomida kengaydi va umumlashtirildi. Kattaliklarni (miqdorlarni) yanada aniqroq o'lchashga bo'lgan talab musbat kasr sonlar tushunchasiga olib keldi. Manfiy sonlar tushunchasining paydo bo'lishi tenglamalarni echish va nazariy izlanishlar bilan bog'liq. Nol avval sonning yo'qligini bildirgan bo'lsa, manfiy sonlarning kiritilishi bilan butun sonlar to'plami Z da hamda ratsional sonlar to'plami Q da teng huquqli songa aylandi.

Bizning eramizgacha V asrda Pifagor maktabida musbat ratsional sonlar kesmalar uzunliklarini aniq o'lchash uchun etarli emasligi aniqlangan va keyinroq bu muammo hal qilingandan keyin irratsional sonlar paydo bo'ldi, XVI asrda esa o'nli kasrlarning kiritilishi bilan haqiqiy sonlarga qadam qo'yildi. Haqiqiy sonning qat'iy ta'rifi, haqiqiy sonlar to'plami xossalari asoslanishi XIX asrda berildi. Haqiqiy sonlar tushunchasi sonlar qatorining oxirigisi emas. Son tushunchasining kengayishi jarayonini davom ettirish mumkin va u davom etadi. O'quvchilarning kasr sonlar bilan dastlabki tanishuvi boshlang'ich sinflarda boshlanadi. Keyinchalik

o'rta sinflarda kasr sonlar tushunchasi aniqlashtiriladi va kengaytiriladi. Shuning uchun boshlang'ich sinf o'qituvchisi kasr va ratsional sonlar ta'rifini, ratsional sonlar ustida amallar bajarish qoidasini va bu amallar qonunlarini bilishi zarur, shuningdek, ratsional va haqiqiy sonlar to'plamlari bilan natural sonlar to'plamining o'zaro bog'liqligini ko'ra bilishi kerak. Bu boshlang'ich va o'rta sinflarda matematikani ketma-ket o'rganish uchun zarurdir.

Kasrlarning paydo bo'lishi tarixi kattaliklarni o'lchash bilan bog'liq. Masalan, kesma uzunligini o'lchashda kasrlar qanday paydo bo'lishini aniqlaymiz. a kesma olamiz. Uning uzunligini topish uchun kesma uzunligining birligi sifatida e ni olamiz. (36-chizma).

O'lchashda a kesmaning uzunligi $4e$ dan katta, lekin $5e$ dan kichikligi topildi. Shuning uchun uni natural son bilan (e uzunlik birligida) ifodalab bo'lmaydi. Ammo e kesmani har biri e_1 ga teng bo'lgan to'rtta teng qismga bo'lsak, e kesmaning uzunligi $4e_1$ bo'ladi. Agar dastlabki uzunlik birligi e ga qaytsak, unda a kesma e kesmaning to'rtidan bir qismiga teng kesmalarning 18 tasidan iborat bo'ladi,



36-chizma.

ya'ni a kesmaning uzunligi haqida gapirar ekanmiz, ikkita natural son - 18 va 4 sonlari ustida amallar bajarishga majbur bo'lamiz. Bunday vaziyatda kesma uzunligini $\frac{18}{4}e$ ko'rinishida yozishga, $\frac{18}{4}$ belgini esa kasr deb aytishga kelishib olamiz.

Kasr tushunchasi umumiy ko'rinishda bunday ta'riflanadi: a kesma va e birlik kesma berilgan bo'lsa, bunda e kesma har biri e_1 ga teng bo'lgan n ta kesma yig'indisi. Agar a kesma har biri e_1 ga teng m ta kesmadan tuzilgan bo'lsa, uning uzunligi $\frac{m}{n}e$ ko'rinishida bo'lishi mumkin. $\frac{m}{n}$ belgi kasr deyiladi, bunda m va n -natural sonlar, bu belgi bunday o'qiladi: « n dan m »

Tanlab olingan e_1 kesma e kesmaning to'rtidan bir qismidir. a kesmaga butun son marta qo'yiladigan e kesmaning bunday ulushidan boshqa ulishini, ya'ni e kesmaning sakkizdan bir qismini ham tanlash mumkin, unda a kesma 36 ta shunday kesmadan iborat bo'lib, uning uzunligi $\frac{36}{8}e$ ga teng bo'ladi. e kesmaning o'n oltidan bir qismini olish mumkin, unda a kesma 72 ta shunday kesmadan iborat bo'lib, uning uzunligi $\frac{72}{16}e$ bo'ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettirsak, a kesmaning uzunligi turli kasrlarning cheksiz to'plami bilan ifodalanishi mumkin: $\frac{18}{4}; \frac{36}{8}; \frac{72}{16}; \dots$

Umuman, agar e uzunlik birligida a kesmaning uzunligi $\frac{m}{n}$ kasr bilan

ifodalansa, u ixtiyoriy $\frac{mk}{nk}$ kasr bilan ifodalanadi, bunda k -natural son.

Bundan ko‘rinadiki, bir xil uzunlikdagi kasr berilgan o‘lchov birligida turli xil ko‘rinishdagi kasrlar bilan ifodalanishi mumkin.

Ta’rif: e uzunlik birligida bitta kesmaning uzunligini ifodalovchi kasrlar teng kasrlar deyiladi.

Agar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar teng bo‘lsa, bunday yoziladi: $\frac{p}{n} = \frac{t}{q}$.

Masalan: $\frac{18}{4}$ va $\frac{36}{8}$ kasrlar e uzunlik birligida bitta kesmaning uzunligini ifodalaydi, demak, $\frac{18}{4} = \frac{36}{8}$.

Berilgan kasrlarning tengligi yoki teng emasligini quyidagi teorema aniqlab beradi.

Teorema: $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar teng bo‘lishi uchun $pq = nt$ bo‘lishi zarur va etarlidir.

Isboti: 1) $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning tengligidan $pq = nt$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Har qanday q natural son uchun $\frac{p}{n} = \frac{pq}{nq}$, har qanday n natural son uchun $\frac{t}{q} = \frac{tn}{qn}$

bo‘lgani uchun $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning tengligidan $\frac{pq}{nq} = \frac{tn}{qn}$ tenglik kelib chiqadi, bundan o‘z navbatida $pq = nt$ tenglik kelib chiqadi

2) $pq = nt \Rightarrow \frac{p}{n} = \frac{t}{q}$ ni ko‘rsatamiz. $pq = nt$ to‘g‘ri tenglikning ikkala qismini

nq natural songa bo‘lsak, $\frac{pq}{nq} = \frac{nt}{nq}$ to‘g‘ri tenglikning hosil qilamiz. Ammo

$\frac{pq}{nq} = \frac{p}{n}, \frac{nt}{nq} = \frac{t}{q}$. Demak, $\frac{p}{n} = \frac{t}{q}$

Yuqorida qaralgan faktlardan kasrning asosiy xossasi kelib chiqadi: agar berilgan kasrning surat va maxraji bir xil natural songa ko‘paytirilsa, bo‘linsa, berilgan kasrga teng kasr hosil bo‘ladi. Kasrlarni qisqartirish va kasrlarni bir xil maxrajga keltirish shu xossaga asoslangan.

Kasrlarni qisqartirish – berilgan kasrni unga teng, lekin surati va maxraji undan kichik bo‘lgan kasrga almashtirishdir.

Agar kasrning surat va maxraji bir paytda faqat 1 ga bo‘linsa, kasr qisqarmas kasr deyiladi. Masalan $\frac{3}{4}$ qisqarmas kasr.

Kasrni qisqartirish natijasida odatda unga teng qisqarmas kasrni hosil qilish

uchun berilgan kasrning surat va maxrajini ularning eng katta umumiy bo'luvchisiga bo'lish kerak.

Masalan: $\frac{35}{40}$ kasrni qisqartirish uchun $D(35,40)$ ni topamiz, $D(35,40) = 5$. Endi

35 ni 5 ga va 40 ni 5 ga bo'lib, $\frac{35}{40} = \frac{7}{8}$ ni hosil qilamiz. $\frac{7}{8}$ - qisqarmas kasr.

Agar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar faqat va faqat bitta kesma uzunligini ifodalasa, ekvivalent kasrlar deyiladi.

3.2.2. Musbat ratsional sonlar.

Ma'lumki bitta kesmaga cheksiz ko'p ekvivalent kasrlar mos keladi. Shuning uchun ekvivalent kasrlar to'plamiga musbat ratsional sonlar deyiladi. Boshqacha aytganda, agar sonni kasr ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday songa musbat ratsional son deyiladi.

Umuman, musbat ratsional son – bu teng kasrlar to'plami, bu to'plamga tegishli har bir kasr shu sonning yozuvidir.

Masalan, $\left\{ \frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{20}{16}, \frac{40}{32}, \dots \right\}$ to'plam biror ratsional sonni ifodalaydi. Bunda

$\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{20}{16}$ va h.k kasrlar esa shu sonning turli yozuvidir.

$\left\{ \frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20}, \frac{24}{40}, \dots, \frac{3n}{5n} \right\}$ to'plam boshqa musbat ratsional sonni aniqlaydi.

Yuqorida berilgan ta'rifga ko'ra, biz $\frac{p}{n}$ yozuvga qarab, $\frac{p}{n}$ bu kasr yoki $\frac{p}{n}$ kasr ko'rinishidagi yozilgan musbat ratsional son deymiz. Ko'pincha qisqa bunday deyiladi: «musbat ratsional son $\frac{p}{n}$ berilgan». Bu degani musbat ratsional son va kasr tushunchasi aynan bir xil degani emas. Bular turli tushunchalardir, lekin jumla qisqa bo'lishi uchungina shunday deyiladi.

$\frac{7}{8}$ yozuv nimani anglatadi? Javoblar bunday bo'lishi mumkin: «Bu kasr», «Bu musbat ratsional sonning yozuvi».

$\frac{7}{8}$ -musbat ratsional son deyish mumkinmi? Mumkin, faqat gapni qisqartirish maksadida shunday deyish mumkin.

Biror musbat ratsional sonning barcha yozuvlari orasidan qisqarmas kasr ajratiladi, ya'ni surat va maxrajini eng kichik umumiy bo'luvchisi 1 ga teng bo'lgan kasr ajratib olinadi. Masalan, ratsional sonni aniqlovchi $\left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{16}, \frac{24}{32}, \dots \right\}$ kasrlar

orasida $\frac{3}{4}$ kasr qisqarmas kasrdir. Bu esa quyidagi teoremaga olib keladi.

Teorema: Har qanday musbat ratsional son uchun shu sonning yozuvi bo'lgan bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjud. (teorema isboti talabalarga mustaqil ish sifatida beriladi).

Natural sonlar to'plamini musbat ratsional sonlar to'plamiga to'ldiruvchi sonlar kasr sonlar deyiladi.

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. O'lchanuvchi kattaliklar va o'lchov birliklari orasidagi boglanishni aniqlashda kesmalarni o'lchashning mohiyatini tushuntirib bering.
2. Kesma o'lchovi xossalari sanang va tushuntiring.
3. Son tushunchasini kengaytirish zarurligini aytib bering.
4. Kasrlarning paydo bo'lishi va kasr tushunchasiga ta'rif bering.
5. Kasrlar teng bo'lishi haqidagi teoremani aytib bering.
6. Kasrlarni qisqartirish deganda nimani tushunasiz?
7. Musbat ratsional kasrga ta'rif bering.
8. Har qanday musbat ratsional son uchun bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjudligi haqidagi teoremani isbotlab bering.

3.2.3. MUSBAT RATSIONAL SONLAR USTIDA AMALLAR

1. Musbat ratsional sonlarni qo'shish va ayirish. Qo'shishning xossalari

Biz Q_+ to'plamda qo'shish va ayirish amallarini qaraymiz.

1) Qo'shish. Qo'shish amalini aniqlash uchun dastlab tubandagi tasdiqni to'g'riligini ko'rsatamiz.

$a, b \in Q_+$ sonlarni bir xil maxrajga ega bo'lgan kasrlar shaklida ifodalash mumkin.

Haqiqatan ham, a sonini $\frac{p}{n}$, b sonini $\frac{t}{q}$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda bu

kasrlarni bir xil maxrajga ega bo'lgan $\frac{pq}{nq}$ va $\frac{tn}{qn}$ kasrlar ko'rinishida ifodalash mumkin.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarni ularga ekvivalent bo'lgan bir xil maxrajli kasrlar bilan almashtirishga kasrlarni umumiy maxrajga keltirish deyiladi.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ ikki kasrning umumiy maxrajini topish n va q sonlarning eng kichik umumiy karralisi $K(n, q)$ ni topish demakdir.

Agar $k = K(n, q)$ bo'lsa, u holda $k = nl = ql$ bundan esa $\frac{p}{n}$ kasr $\frac{pl}{nl} = \frac{pl}{k}$

kasrlarga, $\frac{t}{q}$ kasr esa $\frac{tl^1}{ql^1} = \frac{tl^1}{k}$ kasrlarga ekvivalent.

Misol: $\frac{11}{15}$ va $\frac{5}{6}$ kasrlarni eng kichik umumiy maxrajini topish uchun $K(15; 6)$ ni topamiz.

$K(15;6) = 30$. Demak eng kichik umumiy maxraj 30 soniga teng.

Demak $\frac{11}{15}$ va $\frac{5}{6}$ kasrlarni $\frac{11 \cdot 2}{15 \cdot 2}$ va $\frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5}$ kasrlarga almashtiramiz, ya'ni $\frac{22}{30}$ va $\frac{25}{30}$ kasrlarni hosil qilamiz.

Aytaylik a va b musbat ratsional sonlar mos ravishda $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko'rinishida berilgan bo'lsin.

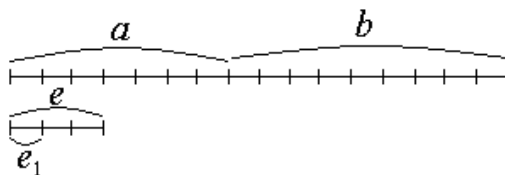
Ta'rif. Agar $a, b \in Q_+$ musbat ratsional sonlar bo'lsa, u holda a va b sonlarning yig'indisi deb $\frac{p+t}{n}$ kasr bilan ifodalangan songa aytiladi.

$$\frac{p}{n} + \frac{t}{n} = \frac{p+t}{n} \quad (1)$$

Agar a va b musbat ratsional sonlar turli maxrajli kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, bu kasrlar eng kichik umumiy maxrajga keltiriladi va (1) qoida buyicha qo'shiladi.

Masalan: $\frac{11}{15} + \frac{5}{6} = \frac{22}{30} + \frac{25}{30} = \frac{47}{30}$;

Endi musbat ratsional sonlarni kesmalar bo'yicha qo'shishni qaraymiz. a, b, c kesmalar berilgan bo'lib, $c = a + b$ va tanlab olingan uzunlik birligi e da $a = \frac{7}{3}e$, $b = \frac{9}{3}e$ bo'lsin. (37-chizma).



37-chizma.

U holda, ya'ni c kesma uzunligi $\frac{16}{3}$ soni bilan ifodalanadi, bu

$$c = a + b = \frac{7}{3}e + \frac{9}{3}e = 7e_1 + 9e_1 = (7 + 9)e_1 = 16e_1 = \frac{16}{3}e \text{ sonni } \frac{7}{3} \text{ va } \frac{9}{3} \text{ sonlarining yig'indisi sifatida qarash mumkin.}$$

Agar $a, b \in Q_+$ musbat ratsional sonlarni ifodalovchi kasrlarning ikkitasi yoki bittasi noto'g'ri kasr bo'lsa, (ya'ni $\frac{p}{n}$ noto'g'ri kasr bo'lsin ($p \geq n$).) u holda $p \geq n$

ga karrali bo'lsa, u holda $\frac{p}{n}$ - kasr natural sonning yozuvi bo'ladi.

Misol: $\frac{16}{4} = 4$;

Agar p n ga karrali bo'lmasa, p nu n ga qoldikli bo'lamiz: $p = nq + r$, bunda $r < n$

$\frac{p}{n}$ kasrda p o'rniga $nq + r$ ni qo'yamiz va (1) qoidani qo'llaymiz.

$$\frac{p}{n} = \frac{nq + r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n};$$

Bunga noto'g'ri kasrdan butun qismni ajratish deyiladi.

Qo'shishning xossalari:

a) Qo'shish amali kommutativlik xossasiga ega, ya'ni $a, b \in Q_+$ uchun

$$a + b = b + a$$

Haqiqatan ham a va b musbat ratsional sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko'rinishida berilgan bo'lsa, u holda $a + b$ musbat ratsional soni $\frac{p+t}{n}$ kasr ko'rinishida, $b + a$

musbat ratsional soni esa $\frac{t+p}{n}$ ko'rinishida ifodalanadi. $p + t = t + p$ bo'lgani uchun $a + b = b + a$

b) Qo'shish amali assotsiativ, ya'ni $a + (b + c) = (a + b) + c$.

Haqiqatan ham a, b va c musbat ratsional sonlari mos ravishda $\frac{p}{n}$, $\frac{t}{n}$ va $\frac{l}{n}$ kasrlar

ko'rinishida berilgan bo'lsa, u holda $a + (b + c)$ soni $\frac{p + (t + l)}{n}$ kasr ko'rinishida,

$(a + b) + c$ soni esa $\frac{(p + t) + l}{n}$ kasr ko'rinishida ifodalanadi.

$p + (t + l) = (p + t) + l$ (Natural sonlar xossasiga ko'ra) bo'lganligi sababli $a + (b + c) = (a + b) + c$

v) Qo'shish amali qisqaruvchan, ya'ni $a + c = b + c$ dan $a = b$ kelib chiqadi.

Natural sonlar to'plamidagi kabi Q_+ da ">" munosabati assimmetrik, tranzitiv va chiziqli. Kattalik munosabati quyidagicha: agar a va b sonlari teng maxrajli $\frac{p}{n}$ va

$\frac{t}{n}$ kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, u holda faqat va faqat $p > t$ bo'lganda $a > b$

bo'ladi. Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, u holda

faqat va faqat $pq > nt$ bo'lganda $a > b$ bo'ladi. Bundan Q_+ to'plamda tartib munosabati mavjudligi kelib chiqadi.

2) **Ayirish.** Aytaylik $a, b \in Q_+$ va $a > b$ bo'lsin. U holda qo'shish ta'rifiga

asosan shunday $c \in Q_+$ mavjudki $a = b + c$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Tenglik uchun c sonini bir qiymatli aniqlanishini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, faraz qilaylik $a = b + d$ bo‘lsin, bunda $d \in Q_+$;

U holda $b + c = b + d$ tenglikga ega bo‘lamiz. Q_+ to‘plamda qisqaruvchanlik xossasiga ko‘ra $c = d$ bo‘ladi. Bu esa c sonining bir qiymatli aniqlanganini ko‘rsatadi.

Agar Q_+ to‘plamda c soni mavjud bo‘lib $a = b + c$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda c soniga a va b sonlarining ayirmasi deyiladi va $a - b$ ko‘rinishida belgilanadi.

Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasr ko‘rinishida ifodalansa, $a - b$ ayirma $\frac{p-t}{n}$ kasr ko‘rinishida bo‘ladi.

Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasr ko‘rinishida bo‘lsa, $a - b$ ayirma $\frac{pq - tn}{nq}$ kasr

ko‘rinishida ifodalanadi. Bunda $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar umumiy maxrajga keltiriladi.

Misol: $\frac{5}{12} - \frac{3}{20} = \frac{25 - 9}{60} = \frac{16}{60} = \frac{4}{15};$

3) Musbat ratsional sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish.

Aytaylik, a kesma e_1 birlik kesma e_1 kesma esa e_2 birlik kesma bilan o‘lchangan bo‘lsa, u holda $a \cong \frac{p}{n}e_1$, $e_1 \cong \frac{t}{q}e_2$ bo‘ladi, ya’ni $na \cong pe_1$; $qe_1 \cong te_2$;

U holda $(nq)a \cong (pq)e_1$, $(pq)e_1 \cong (pt)e_2$, shuning uchun $(nq)a \cong (pt)e_2$. Bu esa a kesmaning e_2 birlik kesmaga nisbatan uzunligi $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanishini

ko‘rsatadi boshqacha aytganda $m_2(a)$ son $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanadi, ya’ni

$$m_2(a) = \frac{pt}{nq}.$$

Ammo shartga ko‘ra $m_1(a) = \frac{p}{n}$; $m_2(e_1) = \frac{t}{q}$:

Kesmalarni o‘lchashni multiplakativlik xossasi $m_2(a) = m_1(a) \cdot m_2(e_1)$ bajarilishi talab qilinsa, $\frac{pt}{nq} = \frac{p}{n} \cdot \frac{t}{q}$ tenglik bajarilishi lozim.

Ta’rif. Agar musbat ratsional sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda ularning ko‘paytmasi $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalangan son bo‘ladi.

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{t}{q} = \frac{pt}{nq}. \quad (1)$$

(kasrni kasrga ko'paytirish qoidasi maktabda tubandagicha ta'riflanadi: kasrni kasrga ko'paytirish natijasi shunday kasrga tengki, u kasrning surati ko'paytuvchi kasrlarning suratidagi sonlar ko'paytmasidan, maxraji esa ko'paytuvchi kasrlarning maxrajilari ko'paytmasidan iborat).

Musbat ratsional sonlarni ko'paytirish kommutativlik, assotsiativlik, qisqaruvchanlik xossalriga bo'ysunadi. Shuningdek musbat ratsional sonlarni ko'paytirish qo'shishga nisbatan taqsimot qonuniga bo'ysunadi.

Ta'rif: Ikki a va b ratsional sonning bo'linmasi deb shunday c songa aytiladiki, uning uchun $a = bc$ bo'ladi.

Biz a va b sonlarining bo'linmasi ta'rifini berdik. Agar $a = \frac{p}{n}, b = \frac{t}{q}$ bo'lsa,

bo'linma qanday topiladi? $c = \frac{pq}{nt}$ son shu bo'linma ekanligini ko'rsatamiz. Bo'linma

ta'rifiga ko'ra $a = bc = \frac{t}{q} \cdot \frac{pq}{nt}$.

Musbat ratsional sonlarning ko'paytirishning (1) qoidasini va ko'paytirish qonunlarini qo'llab, shakl almashtirishlar bajaramiz: $\frac{t}{q} \cdot \frac{pq}{nt} = \frac{t(pq)}{q(nt)} = \frac{(tq)p}{(tq)n} = \frac{p}{n}$.

Shunday qilib, ikki musbat ratsional sonning bo'linmasi: $\frac{p}{n} : \frac{t}{q} = \frac{pq}{nt}$ (2)

formula buyicha topiladi.

Hosil bo'lgan formula ixtiyoriy musbat ratsional sonlar uchun bo'linma mavjudligini ko'rsatadi, ya'ni natural sonlar to'plamida har doim ham bajarib bo'lavermaydigan bo'lish amallarini Q_+ to'plamida har doim bajarib bo'ladi.

Shuni eslatamizki, $\frac{p}{n}$ kasr yozuvidagi chiziq belgisini bo'lish amalining belgisi deb qarash mumkin. Haqiqatdan, ikkita p va n natural sonni olamiz va (2) qoida buyicha ularning bo'linmasini topamiz:

$p : n = \frac{p}{1} : \frac{n}{1} = p : n$. Aksincha, agar $\frac{p}{n}$ bo'lgani uchun har qanday musbat ratsional sonni ikki natural sonning bo'linmasi deb qarash mumkin. Shuni aytish kerakki, "ratsional son" termini lotincha ratio so'zdan kelib chiqqan bo'lib, tarjimasi "nisbat" (bo'linma) ni anglatadi.

3.2.4. Musbat ratsional sonlar to'plamining tartiblanganligi.

Agar ratsional sonlar teng kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, ular teng bo'ladi.

Masalan, agar a ratsional son $\frac{3}{4}$ ($a = \frac{3}{4}$) kasr bilan, b ratsional son $\frac{6}{8}$ ($b = \frac{6}{8}$) kasr

bilan ifodalangan bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi, chunki $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

a va b ratsional sonlardan qaysi biri kichik (katta) ekanligini qanday bilish mumkin?

Ta'rif: a va b - musbat ratsional sonlar bo'lsin. Agar shunday c ratsional son mavjud bo'lib, unda $a + c = b$ bo'lsa, a soni b sonidan kichik ($a < b$) yoki b soni a dan katta ($b > a$) deb aytiladi.

Bu ta'rif musbat ratsional sonlar to'plamida ayirma mavjud bo'lishining zarur va etarli shartini ifodalashga imkon yaratadi.

a va b musbat ratsional sonlarning ayirmasi mavjud bo'lishi uchun $b < a$ bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu shartning isboti natural sonlar to'plamida ayirma mavjud bo'lishi haqidagi teoremaning isbotiga o'xshaydi.

"Kichik" munosabatining keltirib chiqarilgan ta'rifidan bu munosabatni o'rgatishning amaliy usullarini chiqarish mumkin.

Agar $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{n}$ bo'lsa, $m < p$ bo'lganda va faqat shunda $a < b$ bo'ladi.

Agar $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}$ bo'lsa, $mq < np$ bo'lganda va faqat shunda $a < b$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz:

$\frac{m}{n} = \frac{mp}{nq}; \frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$. Natijada berilgan kasrlarni taqqoslash ularning suratlarini

taqqoslashga keltiriladi: agar $mq > pn$ bo'lsa, $a > b$; agar $mq < pn$ bo'lsa, $a < b$.

Masalan, agar $a = \frac{7}{8}, b = \frac{11}{13}$ bo'lsa, $a > b$, chunki $7 \cdot 13 = 91, 8 \cdot 11 = 88$ va

$8 \cdot 11 < 7 \cdot 13$. Bunday aniqlangan "kichik" munosabati tranzitiv va antisimmetrik ekanligini, ya'ni "kichik" munosabati musbat ratsional sonlar to'plamida tartib munosabati ekanini, bu to'plamning o'zi tartiblangan to'plam ekanini ko'rsatish mumkin. Shuni eslatib o'tamizki, musbat ratsional sonlar to'plamidagi tartib munosabati natural sonlar to'plamidagi tartib munosabatidan farqli xossalarga ega. Ma'lumki, N to'plam diskret - natural sonlar orasida boshqa natural sonlar yo'q. Musbat ratsional sonlar to'plamida: 1) eng kichik son yo'q; 2) ixtiyoriy ikkita musbat ratsional sonning orasida Q_+ to'plamining cheksiz ko'p soni bor.

Q_+ to'plamda eng kichik son yo'qligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik $a \in Q_+$ to'plamdagi eng kichik son bo'lsin. a sonini $\frac{m}{n}$ kasr ko'rinishida ifodalash mumkin,

u holda $\frac{m}{n+1}$ soni $\frac{m}{n}$ sonidan kichik bo'ladi, ya'ni $\frac{m}{n+1} < \frac{m}{n}$ chunki

$(mn < mn + m)$. Demak, farazimiz noto'g'ri. Musbat ratsional sonlar to'plamida eng kichik son yo'q.

Ikkinchi xossani misolda ko'rsatamiz. $\frac{1}{3}$ dan katta va $\frac{2}{3}$ dan kichik ratsional son mavjudmi? Mavjud. Buning uchun berilgan sonlarning o'rta arifmetigini topish etarli: $(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) : 2 = \frac{1}{2}$.

Shunday qilib, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. $\frac{1}{3}$ bilan $\frac{2}{3}$ ning orasida yotgan son yana topiladimi? Ha, uni topish uchun $\frac{1}{3}$ va $\frac{1}{2}$ sonlarning o'rta arifmetigini topish etarli: $(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) : 2 = \frac{5}{12}$. Shunday qilib, $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$. Bu jarayonni davom ettirish mumkin: Q_+ to'plamda olingan ixtiyoriy ikki son orasida shu to'plamda yotadigan cheksiz ko'p son bor. Q_+ to'plamning bu xossasi zichlik xossasi deyiladi.

3.2.5. Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatik qurish.

Biz musbat ratsional sonlar va uning ustida bajariladigan amallarni geometrik nuqtai nazardan, ya'ni kesmalarni o'lchash masalalaridan kelib chiqib aniqladik.

Ammo musbat ratsional sonlar faqat kesmalarni uzunliklarini o'lchash uchun emas, balki massa, yuza, hajm va boshqalarni o'lchash uchun ham zarur. Bu esa musbat ratsional sonlar nazariyasini yaratishni talab qiladi. Buning uchun bu sonlarni qanoatlantiruvchi aksiomalarni ko'rsatish etarli.

Q_+ da qo'shish xossalarini va natural sonlar to'plamida ko'paytirishni ($na = a + a + \dots + a$; n marta) ifodalovchi aksiomalar sistemasini yordamida Q_+ to'plamni aniqlaymiz. Bu aksiomalar sistemasini quyidagicha;

1. Q_+ to'plam N natural sonlar to'plamiga ega.
2. Q_+ to'plamda qo'shish amali aniqlangan bo'lib, u Q_+ to'plamdagi ixtiyoriy ikkita a va b sonlar uchun shu to'plamda a va b sonlarining yig'indisi deb ataluvchi $a + b$ sonini qo'yadi. N to'plam ostida qo'shish amali N to'plamda aniqlangan qo'shish amali bilan bir xil.
3. Q_+ da aniqlangan qo'shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan.
4. Ixtiyoriy $a \in Q_+$ son uchun shunday natural p va n sonlari topiladiki, bular uchun $na = p$ o'rinli
5. Ixtiyoriy natural p va n sonlari uchun shunday $a \in Q_+$ soni topiladi. Bunda $na = p$
6. Agar $na = nb$ bo'lsa, u holda $a = b$

Bu aksiomalar sistemasini ziddiyatsiz bo'lib, Q_+ to'plamni va undagi qo'shish amalini aniqlaydi (ziddiyatsizligini isbotini keltirmadik).

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Musbat ratsional sonlarni qo‘shish va ayirishni misollar yordamida tushuntiring. Qo‘shishning xossalari sanab, tushuntirib bering.
2. Musbat ratsional sonlarni ko‘paytirish va bo‘lishni ta’riflang va misollar yordamida tushuntirib bering.
3. Musbat ratsional sonlar to‘plamining tartiblanganligini tushuntiring.
4. a va b musbat ratsional sonlari o‘rtasida a sonidan b sonini kichik bo‘lishi ta’rifini keltiring.
5. Musbat ratsional sonlar to‘plamida eng kichik son yo‘qligi va ikkita musbat ratsional sonlar o‘rtasida cheksiz ko‘p ratsional sonlar mavjudligini isbotlang.
6. Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatik qurishni tushuntiring.

3.3. O‘NLI KASRLAR

3.3.1. O‘nli kasrlar.

Musbat ratsional sonlarning o‘nli kasr ko‘rinishidagi yozuvi.

Bizga ma’lumki kasr sonlarning paydo bo‘lishi kattalikning bir birligidan ikkinchi birligiga o‘tishdir, kasr maxraji berilgan kattalik birligi nechta ulushga bo‘linishini ko‘rsatadi. Hozirgi paytda deyarlik barcha mamlakatlarda xalqaro birliklar sistemasi ishlatiladi. Bu sistemada o‘nli sanoq sistemasidan foydalanilganligi uchun kattaliklarning yangi birliklari berilganlarni 10, 100, 1000 va hokazo marta kamaytirish bilan hosil qilinadi. Masalan, 1 dm=10 sm; 1 sm=100 mm; 1 km=1000 m=10000 dm; 1 kg= 1000 g va h.k. Shuning uchun amalda maxraji 10 ning darajalari bo‘lgan kasrlar ya’ni $\frac{m}{10^n}$ (bunda m, n -natural sonlar) katta ahamiyatga

ega. Bunday kasrlarni o‘nli kasrlar deyiladi. O‘nli kasrlardan farqli ravishda $\frac{m}{n}$ ko‘rinishdagi kasrlar oddiy kasrlar deyiladi.

Sonning o‘nli kasr ko‘rinishidagi yozuvining ma’nosini aniqlaymiz. $\frac{4362}{10^2}$

kasrni olamiz va quyidagi shakl almashtirishlar bajaramiz:

$$\frac{4362}{10^2} = \frac{4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 2}{10^2} = 4 \cdot 10 + 3 + \frac{6}{10} + \frac{2}{10^2}.$$

$4 \cdot 10 + 3$ yig‘indi 43 sonining yozuvidir, $\frac{6}{10} + \frac{2}{10^2}$ yig‘indi esa $\frac{4362}{10^2}$ sonining kasr qismining yozuvidir. Bunday kasr qismini maxrajsiz yozish qabul qilingan, bunda kasr qismi butun qismidan vergul bilan ajratiladi: $\frac{4362}{10^2} = 43,62$.

Umumiy holda qaraylik. Kasr suratining o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvi $m = m_k \dots m_0$ ko‘rinishga, boshqacha yozganda $m = m_k \cdot 10^k + \dots + m_0$ ko‘rinishga ega

bo'lsin. U holda daraja ustidagi amallarni bajarish qoidasiga ko'ra ($n \leq k$ bo'lganda) quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\frac{m}{10^n} = \frac{m_k \cdot 10^k + \dots + m_n 10^n + m_{n-1} 10^{n-1} + \dots + m_0}{10^n} =$$

$$= m_k 10^{k-n} + \dots + m_n + \frac{m_{n-1}}{10} + \dots + \frac{m_0}{10^0} \dots \quad (1)$$

$m_k 10^{k-n} + \dots + m_n$ - natural sonini M bilan belgilaymiz. (1) o'nli kasrni quyidagicha belgilash qabul qilingan: $M, m_{n-1} \dots m_0$. shunday qilib, $\frac{m}{10^n}$ kasrni yozishda, m sonini

o'nli yozuvdagi keyingi n ta raqami vergul bilan ajratiladi. Masalan: $\frac{621}{10^2} = 6,21$.

Ma'lumki, o'nli kasrlarni taqqoslash ular ustida amallar bajarishga keltiriladi. Masalan, $0,4563 < 0,4572$, chunki sonlarning o'nli va yuzli ulushlari teng bo'lgani bilan, birinchi sonning mingli ulushi ikkinchi sonnikidan kichik ($6 < 7$).

O'nli kasrlarni taqqoslash va ular ustida amallar bajarish oson bo'lgani uchun quyidagi savol kelib chiqadi: $\frac{m}{n}$ ($m, n \in N$) ko'rinishdagi har qanday kasrni ham o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkinmi?
Bunga quyidagi teorema javob beradi

Teorema: $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr o'nli kasrga teng bo'lishi uchun bu kasr maxrajining tub ko'paytuvchilarga yoyilmasida faqat 2 va 5 sonlari bo'lishi zarur va etarlidir. (biz uni isbotsiz qabul qilamiz):

Masalan, $\frac{17}{250}$ kasrni o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin, chunki u qisqarmas va maxrajining tub ko'paytuvchilarga yoyilmasi 2 va 5 sonlaridagina iborat:
 $250 = 2 \cdot 5^3$, $\frac{7}{15}$ kasrni o'nli kasr ko'rinishida yozib bo'lmaydi, uning maxrajining tub ko'paytuvchilarga yoyilmasida 3 soni bor: $15 = 3 \cdot 5$

O'nli kasrlar orasida 0,01 kasr ajralib turadi va undan ko'p foydalaniladi, U protsent deb ataladi va 1% deb belgilanadi. Amalda kattaliklarning qismlari protsentlar bilan ifodalanadi. Masalan, tovarning narxi 20% arzonlashtirildi. Agar shakarkamish tarkibida 15% shakar bo'lsa, 10 t shakarqamishda qancha shakar bor? $0,15 \cdot 10t = 1,5t$. Demak, 10t ning 15% i 1,5t ni tashkil qilar ekan.

Endi o'nli kasrlar ustida amallarini bajarish algoritmlarini keltiramiz.

Ikkita o'nli kasrni qo'shish (ayirish) algoritmi:

- 1) Ikkita o'nli kasrda verguldan keyingi o'nli belgilar sonini tenglashtirish kerak, agar o'nli kasrning bittasida o'nli belgilar soni kam bo'lsa, uning o'ng tomoniga bir qancha nollar yozish bilan tenglashtiriladi;
- 2) Hosil qilingan o'nli kasrda vergullarni tashlab, hosil bo'lgan natural sonlar qo'shiladi (ayiriladi);
- 3) Natijada hosil bo'lgan yig'indi (ayirma) sonda qo'shiluvchilarning (kamayuvchi

va ayriluvchida) qaysi birida o'nli belgilar ko'p bo'lsa, shuncha o'nli belgini vergul bilan ajratish kerak.

Masalan: 3, 12 va 2, 1536 o'nli kasrlarni qo'shing va ayiring.

a) $3,12 + 2,1536 = 3,1200 + 2,1536 = 5,2736$.

b) $3,12 - 2,1536 = 3,1200 - 2,1536 = 0,9664$.

O'nli kasrlarni ko'paytirish algoritmi:

- 1) Ikkita o'nli kasrdagi vergullar tashlab yuboriladi;
- 2) Hosil bo'lgan ikkita natural son natural sonlarni ko'paytirish qoidasiga asosan ko'paytiriladi;
- 3) Ko'paytmada hosil bo'lgan natural sonning o'ngidan chapiga qarab, ikkita o'nli kasrda verguldan keyin qancha raqam bo'lsa, shuncha raqam sanalib vergul qo'yiladi.

Masalan: $2,15 \times 3,17 = 6,8155$.

Ikki o'nli kasrni bo'lish algoritmi:

- 1) Ikkita o'nli kasrning verguldan keyingi raqamlar soni tenglashtiriladi, agar bittasida raqamlar soni kam bo'lsa, o'nli kasr oxirgi raqamini ketiga nollar yozib to'lg'iziladi;
- 2) Hosil bo'lgan o'nli kasrlarning vergullari tashlab yuboriladi;
- 3) Ikkita natural sonlarni bo'lish qoidasiga asosan bo'linadi.

Masalan: $40,625 : 12,5 = 40625 : 12500 = 3,25$

3.3.2. Cheksiz davriy o'nli kasrlar.

$\frac{1}{3}$ kasrni olib qaraylik, bu kasrni chekli o'nli kasr ko'rinishida yozib bo'lmaydi. 1 ni 3 ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etadi. Shu sababli $\frac{1}{3}$ kasr cheksiz o'nli kasr hisoblanadi. Bundan tashqari 1 ni 3 ga bo'lganda, ya'ni $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ bo'linmada raqamlar takrorlanadi. Agar biz bo'linmada bir qancha raqamlarni tashlab yuborsak, u holda $\frac{1}{3}$ dan katta songa ega bo'lamiz.

Har qanday chekli o'nli kasrni ham o'nli kasrni o'ng tomoniga nollar yozish bilan cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin.

Masalan $0,16 = 0,1600\dots 0\dots$

Bulardan ko'rinadiki, har bir musbat ratsional sonni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin ekan.

Bunda hosil qilingan cheksiz o'nli kasrlarni davriy o'nli kasrlar deyiladi.

Masalan: $\frac{3}{11}$ soni $0,272727\dots 27\dots$, $\frac{8}{55}$ soni $0,1454545\dots 45\dots$ cheksiz davriy o'nli

kasrlarni ifodalaydi. Bu davriy o'nli kasrlar qisqacha $0,(27)$, $0,1(45)$ ko'rinishida yoziladi, qavs ichidagi sonlar cheksiz davriy o'nli kasrdagi takrorlanuvchi bir xil raqamlar guruhini bildiradi va davr deb ataladi.

Davriy kasrlar ikki xil bo'ladi:

Sof davriy kasrlar - ularda vergul bilan davr orasida boshqa o'nli xonalar yo'q.

Masalan $0,(3)$, $0,(27)$, $0,(85472)$, ...

Aralash davriy oʻnli kasrlar - ularda vergul va davr orasida boshqa oʻnli xonalar bor. 3,15(44), 0,1(45), ...

Quyidagicha savol tugʻiladi. Har qanday qisqarmas $\frac{m}{n}$ kasrni davriy oʻnli kasr koʻrinishida ifodalab boʻladimi?

Teorema. Agar $\frac{m}{n}$ kasr qisqarmas va maxrajining yoyilmasida 2 va 5 dan farqli boshqa tub koʻpaytuvchi boʻlsa, $\frac{m}{n}$ kasr cheksiz davriy oʻnli kasr koʻrinishida ifodalanadi.

Isboti. Maxraj yoyilmasida 2 va 5 dan farqli boshqa tub koʻpaytuvchi boʻlgani uchun m ni n ga boʻlish jarayoni cheksizdir. Bundan tashqari m ni n ga boʻlganda n dan kichik qoldiqlar yaʼni $1, 2, 3, \dots, n-1$ sonlar qoladi. Turli qoldiqlar toʻplami chekli boʻlgani uchun, qaysidir qadamdan keyin biror qoldiq takrorlanadi, bu esa boʻlinma xonalarining takrorlanishiga olib keladi. Demak, $\frac{m}{n}$ sonini ifodalovchi cheksiz oʻnli kasr albatta davriy boʻlar ekan.

Isbotlangan teoremadan xulosa kelib chiqadi: ixtiyoriy musbat ratsional sonni chekli oʻnli kasr orqali yoki cheksiz davriy oʻnli kasr orqali ifodalash mumkin.

Agar chekli oʻnli kasrni davri 0 ga teng cheksiz kasr deb hisoblash kelishilsa, buni qisqacha shunday yozish mumkin. Masalan, $7,82 = 7,82(0)$. Bunday kelishilish ixtiyoriy musbat ratsional sonni cheksiz davriy oʻnli kasr koʻrinishida yozishga imkon beradi. Shuningdek ixtiyoriy musbat cheksiz davriy oʻnli kasrni biror musbat ratsional son shaklida ifodalash mumkin.

$\frac{m}{n}$ musbat ratsional sonni cheksiz davriy oʻnli kasr koʻrinishida yozish uchun surat m ni maxraj n ga boʻlish kerak. Cheksiz davriy oʻnli kasr oddiy kasr koʻrinishiga quyidagicha keltiriladi.

Cheksiz davriy oʻnli kasr $0,(14)$ berilgan boʻlsin, yaʼni $0,141414\dots$. Unga mos ratsional sonni a orqali belgilaymiz, u holda $a = 0,141414\dots$. Bu tenglikning ikkala tomonini 100 ga koʻpaytiramiz:

$$100a = 14,1414\dots \text{ yoki } 100a = 14 + 0,1414\dots = 14 + a$$

$$100a = 14 + a \text{ tenglamani echamiz: } a = \frac{14}{99}. \text{ Bu kasr qisqarmas.}$$

Umuman, sof davriy cheksiz oʻnli kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati davrga teng, maxraji esa kasr davrida nechta raqam boʻlsa, shuncha toʻqqizdan iborat.

Aralash davriy kasr $0,5(41)$, yaʼni $0,54141\dots$ berilgan boʻlsin. Unga mos ratsional sonni a orqali belgilaymiz, u holda $a = 0,54141\dots$. Bu tenglikning ikkala qismini 10 ga koʻpaytirib, $10a = 5,4141\dots$ sof davriy kasrni hosil qilamiz. Keyingi oʻzgartirishlar yuqoridagidek bajariladi. $x = 5,4141\dots$ deymiz. Bu tenglikni ikkala

qismini 100 ga ko'paytiramiz: $100x = 541,4141\dots$ yoki $100x = 541 + 0,4141\dots$. Bu

tenglikni ikkala qismiga 5 ni qo'shamiz: $100x + 5 = 541 + 5,4141\dots$; $x = 5,4141$

bo'lgani uchun $100x + 5 = 541 + x$ tenglamani hosil qilamiz, bundan $x = \frac{541-5}{99}$,

x ning bu qiymatini $10a = 5,4141\dots$ tenglikka qo'yamiz:

$$10a = \frac{541-5}{99}, \text{ bundan } a = \frac{541-5}{990} = \frac{536}{990}$$

Umuman, butun qismi 0 bo'lgan aralash davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati ikkinchi davrgacha yozilgan sondan birinchi davrgacha yozilgan sonning ayirmasidan, maxraji esa davrda nechta raqam bo'lsa, shuncha to'qqizdan va birinchi davrgacha nechta raqam bo'lsa, shuncha noldan iborat.

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. O'nli kasga ta'rif bering.
2. Musbat ratsional sonlarning o'nli kasr ko'rinishidagi yozuvini yozib ko'rsating.
3. Qisqarmas kasrni o'nli kasrga aylantirishda zaruriy va etarli shartlar to'g'risidagi teoremani aytib isbotlab bering.
4. O'nli kasrlar ustida amallar bajarishning algoritmlarini aytib bering.
5. Cheksiz davriy o'nli kasrlarni misollar yordamida tushuntiring.
6. Sof va aralash davriy o'nli kasrlarni misollar yordamida tushuntiring.
7. Kasrni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalash shartlarini aytib bering.
8. Cheksiz davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantirishni misollar yordamida tushuntiring.

3.4. MUSBAT HAQIQIY SONLAR

3.4.1. O'lchovdosh bo'lmagan kesmalar.

Musbat ratsional sonlar yordamida u yoki bu kattaliklarni istalgan aniqlik darajasida o'lchash mumkin. Ammo bunday aniqlikda o'lchashni hamma vaqt ham bajarib bo'lmaydi.

Masalan, biror OA kesmani $\frac{1}{10^n}$ aniqlikda o'lchash talab qilinsin. Buni biz quyidagicha o'lchaymiz. OA kesmani O nuqtasidan A nuqtasiga qarab uzunligi $\frac{1}{10^n}$ bilan ifodalanuvchi kesmalarni joylashtirib chiqamiz. Ammo bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin. Boshqacha aytganda shunday musbat m soni mavjudki, buning uchun $\frac{m}{10^n}$ uzunlik OA kesmadan kam, $\frac{m+1}{10^n}$ uzunlik OA kesmadan ortiq bo'ladi.

Shunday qilib OA kesma uzunligi $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ sonlari orasida bo'ladi. Xuddi shunday hol jismlarni o'lchashda ham ro'y beradi, ya'ni jism o'lchashda og'irlik $\frac{1}{10^n}$ gacha aniqlikda bo'lishi mumkin.

Bundan ko'rinadiki, $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ ratsional sonlari OA kesmani uzunligini taqribiy, ya'ni ortig'i yoki kami bilan ifodalaydi va u OA kesmaning uzunligini aniq ifodalaydimi?. Bu savolga ayrim hollarda ratsional sonlar bilan chegaralanib javob berib bo'lmaydi.

Shunday kesmalar mavjudki, ularni uzunliklarini ratsional sonlar yordamida ifodalab bo'lmaydi. Bunday kesmalarni mavjud bo'lishini quyidagi teoremda ko'rish mumkin.

Teorema: Kvadratning dioganali uning tomonlari bilan o'lchovdosh emas.

Isboti: aytaylik kvadratning tomoni 1 ga teng bo'lsin. Faraz qilaylik $ABCD$ kvadratning AC dioganali uning tomoni bilan o'lchovdosh bo'lsin va uning uzunligi qisqarmas $\frac{p}{q}$ kasr bilan ifodalansin. U holda Pifagor teoremasiga asosan

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2 \text{ tenglikka ega bo'lamiz.}$$

Boshqacha aytganda, $1^2 + 1^2 = \frac{p^2}{q^2}$ tenglikka ega bo'lamiz, bundan esa

$p^2 = 2q^2$ tenglik kelib chiqadi. Demak, p^2 - juft son, u holda p ham juft (chunki toq sonni kvadrati juft son bo'lmaydi). Shunday qilib, $p = 2p_1$. Bundan esa $4p_1^2 = 2q^2$, bundan esa q^2 ni juft sonligi kelib chiqadi va q - juft son.

Demak p va q lar juft son bo'lib, bizni $\frac{p}{q}$ kasr qisqarmas kasr degan farazimizga zid. Bu zidlik esa, kvadratning tomonini o'lchov birligi sifatida tanlasak, kvadrat diagonal uzunligini ratsional son orqali ifodalab bo'lmashligini, ya'ni kvadratning diagonalining tomoni bilan o'lchovdosh emasligini ko'rsatadi.

Shu sababli ixtiyoriy kesmani o'lchash natijasini son bilan ifodalash uchun Q_+ musbat ratsional sonlar to'plamini yangi sonlar bilan to'ldirib kengaytirish kerak.

Bu holda hosil bo'lgan yangi sonlar to'plami musbat haqiqiy sonlar to'plami deyiladi va R_+ bilan belgilanadi.

Bundan ko'rinadiki, har bir musbat ratsional son R_+ ga tegishli bo'ladi, ya'ni $Q_+ \subset R_+$; R_+ da qo'shish va ko'paytirish amallari musbat ratsional sonlar to'plami Q_+ dagidek aniqlanib, R_+ da kesmalarni o'lchash ham additivlik va multiplikativlik xossalriga ega bo'ladi.

3.4.2. Musbat haqiqiy sonlar va cheksiz o'nli kasrlar.

Biz ixtiyoriy kesmani o'lchash natijasini cheksiz o'nli kasrlar bilan ifodalanishini ko'rsatamiz (umuman, davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ko'rinishida ifodalanishini). Aytaylik, bizga a kesma va e birlik kesma berilgan bo'lsin. U holda a kesma birlik e kesmadan kichik yoki shunday bir n soni topiladiki $n \cdot e \leq a < (n+1)e$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu erda n - natural son (agar a e dan kichik bo'lsa, $n=0$ bo'ladi) bo'lib, bunga a kesma uzunligining butun qismi deyiladi.

Agar $a \cong ne$ bo'lsa, a kesma uzunligi n natural son bilan ifodalanadi. Aks holda $a \cong ne + a_1$, bu erda $a_1 < e$, U holda 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlardan birisini qabul qiluvchi shunday n_1 soni topiladiki, a_1 kesma uchun $\frac{n_1}{10}e \leq a_1 < \frac{n_1+1}{10}e$ tengsizlik

o'rinli bo'ladi, bundan esa $(n + \frac{n_1}{10})e \leq ne + a_1 < (n + \frac{n_1+1}{10})e$. Demak $(n, e_1) \leq a < (n, 1 + 0,1)e$. (bu erda n, n_1 lar o'nli kasr, masalan: 5,4 bo'lishi mumkin).

O'lchashda yuqoridagidek jarayonni davom ettirib, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlardan birini qabul qiluvchi $n_2, n_3, \dots, n_k$ sonlariga ega bo'lamiz. Bundan esa a kesmaning ixtiyoriy k bo'lagi $(n, n_1 n_2 \dots n_k)e$ kesmadan katta $(n, n_1 n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k})e$ kesmadan kichik bo'ladi.

Bundan ko'rinadiki, a kesmani o'lchash jarayonini cheksiz o'nli kasrlar shaklida ifodalash mumkin.

Agar cheksiz o'nli kasrda verguldan keyin bir qancha raqamlarni qoldirib, qolganlari tashlab yuborilsa $n, n_1, \dots, n_k$ soni hosil bo'ladi va u a kesma uzunligini kami bilan ifodalaydi, agar qoldirilgan raqamlarni oxirgisiga 1 qo'shilsa, a kesma

uzunligi ortig'i bilan olinadi. Shu sababli biz a kesma uzunligi $n, n_1 n_2 \dots n_k$ kasr bilan ifodalanadi deymiz, ya'ni $m(a) = n, n_1 n_2 \dots n_k$

Misol. $m(a) = 5,2753\dots$

Ixtiyoriy n uchun quyidagi tengsizlik o'rinaliligi aniq

$$n, n_1 \cdot n_2 \dots n_k \leq m(a) < n, n_1, n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k}$$

Kesmalarni o'lchashda oxirgi raqamlari faqat cheksiz 9 liklardan iborat kasr hosil bo'lmaydi, Masalan, $0,399\dots9\dots$ chunki istalgan x soni quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirmaydi.

$$0,3 \leq x < 0,4$$

$$0,39 \leq x < 0,40$$

.....

$$0,39\dots9 \leq x < 0,400\dots0$$

Agar bu tengsizliklarni o'rniga

$$0,3 < x \leq 0,4$$

$$0,39 < x \leq 0,40$$

.....

$$0,39\dots9 < x \leq 0,400\dots0$$

tengsizliklarni yozsak bu tengsizliklarni $0,4$ soni qanoatlantiradi. Shu sababli $0,399\dots9\dots = 0,3(9)$ o'nli kasr $0,4$ sonining boshqacha yozuvi hisoblanadi. Umuman, agar chekli o'nli kasrni oxirgi raqamini 1 ga kamaytirilsa va uning ketiga faqat 9 raqamlar ketma-ketligi yozilsa, u holda berilgan chekli o'nli kasrga teng cheksiz o'nli kasr hosil bo'ladi.

$$0,323 = 0,32299\dots9$$

$$6,7 = 6,69\dots9$$

Biz har bir kesmaga cheksiz o'nli kasrni mos qo'ydik. Demak keyingi raqamlari ketma-ket 9 raqamlari bilan tugallangan cheksiz o'nli kasrga uzunligi shu kasr bilan ifodalanuvchi kesma mavjud.

Ta'rif: $0,0 \dots 0$ dan farqi, keyingi raqamlari ketma-ket 9 raqamlari bilan tugamagan cheksiz o'nli kasrlar to'plami musbat haqiqiy sonlar to'plami deyiladi va R_+ bilan belgilanadi.

Har bir musbat x haqiqiy soni uchun uning taqribiy qiymatini ko'rsatish mumkin. Agar $x = n, n_1, n_2 \dots n_k \dots$ cheksiz o'nli kasrda verguldan keyin k ta raqamini qoldirib qolganlarini tashlab yuborsak, ya'ni $x_k = n, n_1, n_2 \dots n_k$ bu son x

sonini kami bilan $\frac{1}{10^k}$ aniqlikda olingan taqribiy qiymati bo'ladi. Agar bunga

$\frac{1}{10^k}$ ni qo'shsak, u holda $x_k^1 = n, n_1, n_2 \dots n_k + \frac{1}{10^k}$ soni x sonini ortig'i bilan

$\frac{1}{10^k}$ aniqlikdagi qiymati bo'ladi.

Agar n_k raqami 9 dan farqli bo'lsa, n_k ga 1 ni qo'shish bilan x_k^1 hosil bo'ladi.

Masalan, $x = 3,82365\dots$ u holda

$$x = 3,823, \quad x_k^1 = 3,824$$

bulardan ko'rinadiki, ixtiyoriy musbat haqiqiy x soni uchun quyidagi tengsizlik o'rinli.

$$x_k \leq x < x_k^1$$

3.4.3. R_+ to'plamda tartib munosabati.

Ikkita $x = m, m_1, m_2, \dots, m_k \dots$ va $y = n, n_1, n_2, \dots, n_k \dots$ musbat haqiqiy sonlari berilgan bo'lsin. Agar $m < n$ yoki shunday bir k soni uchun $m = n$ da $m = n, m_1 = n_1, \dots, m_{k-1} = n_{k-1}$ bo'lib, $m_k < n_k$ bo'lsa, x soni y sonidan kichik deyiladi.

R_+ to'plamda «<» munosabati qattiq chiziqli tartiblangan, ya'ni u assimmetrik, tranzitiv. Shuning uchun $x \neq y$ da $x < y$ yoki $y < x$.

R_+ to'plamda Q_+ to'plamdagidek eng kichik va eng katta element yo'q. Bundan tashqari R_+ to'plamdagi ixtiyoriy ikkita son o'rtasida cheksiz ko'p ratsional son yotadi. R_+ to'plamdagi tartib munosabatini asosiy xossalaridan biri uzluksizlik xossasidir. Bu xossaga Q_+ to'plam ega emas. R_+ ning ixtiyoriy to'plam osti to'plamlari sonli to'plamlar deyiladi. Masalan, N, Q_+ .

Agar ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in Y$ lar uchun $x \leq c \leq y$ o'rinli bo'lsa, c soni X va Y sonli to'plamlarni bo'ladi deyiladi.

Bunga asosan R_+ to'plamni uzluksizligi quyidagicha ta'riflanadi.

Agar X sonli to'plam Y sonli to'plamning chap tomoniga joylashgan bo'lsa, u holda albatta bu to'plamlarni bo'luvchi bitta son topiladi.

Masalan, $[2;5]$ va $[7;11]$ kesmalarni olsak, u holda $[2;5]$ kesmasi 6 sonidan chapda, $[7;11]$ kesmasi esa 6 sonidan o'ngda joylashadi. 6 soni $[2;5]$ va $[7;11]$ kesmalarini bo'ladi. Doiraning yuzi unga tashqi chizilgan ko'pburchaklar yuzalarining to'plami ichki chizilgan ko'pburchaklar yuzalari to'plamlarini bo'ladi.

3.4.4. R_+ da qo'shish, ko'paytirish, ayirish va bo'lish.

Bizga R_+ to'plamdan $x = m, m_1, m_2, \dots, m_k \dots$ va $y = n, n_1, n_2, \dots, n_k \dots$ sonlari berilgan bo'lsin.

U holda ixtiyoriy k soni uchun $x_k \leq x < x_k^1, \quad y_k \leq y < y_k^1$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Tengsizliklardan $x + y$ soni $x_k + y_k$ sonidan kichik, emasligi

$x_k^1 + y_k^1$ sonidan katta emasligi ko'rinadi.

1-Ta'rif. x va y musbat haqiqiy sonlarni yigindisi ya'ni $x + y$ deb, $\{x_k + y_k\}$ va $\{x'_k + y'_k\}$ to'plamlarni bo'luvchi songa aytiladi. Bu x_k va y_k lar x va y sonlarini kami bilan, x'_k va y'_k lar esa x va y sonlarining ortigi bilan olingan taqribiy qiymatidir.

R_+ to'plamda qo'shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan. Agar $x < y$ bo'lsa, ixtiyoriy $z \in R_+$ uchun $x + z < y + z$ o'rinli, R_+ dagi ixtiyoriy x va y lar uchun $x = x + y$ tenglik bajarilmaydi.

R_+ da ko'paytirish amali ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi.

2-Ta'rif: Musbat haqiqiy x va y sonlarning ko'paytmasi deb, $\{x_k \cdot y_k\}$ va $\{x_k^1 \cdot y_k^1\}$ to'plamlarni bo'luvchi songa aytiladi.

R_+ da ko'paytirish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan. Ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv. 1 soni ko'paytirish amaliga nisbatan neytral, ya'ni $a \in R_+$ bo'lsa, u holda $1 \cdot a = a$.

3-Ta'rif: R_+ da ixtiyoriy ikkita a va b sonlari uchun $a > b$ shartda, shunday $c \in R_+$ topiladiki, $a = b + c$ bajariladi. Bunda c soniga a va b sonlarining ayirmasi deyiladi va $a - b$ ko'rinishda yoziladi.

R_+ to'plamda ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal ekanligi o'z-o'zidan ravshan. Agar $x > y$ bo'lsa,

$$(x + y) - y = x$$

$$(x - y) + y = x$$

4-Ta'rif: R_+ dagi ixtiyoriy ikkita x va y sonlari uchun, shunday $z \in R_+$ topiladiki, $x = yz$ o'rinli bo'ladi. Bu holda z soniga x ni y ga bo'linmasi deyiladi va $x : y$ ko'rinishida belgilanadi. R_+ da bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal bo'lgani uchun

$$(xy) : y = x$$

$$(x : y) \cdot y = x$$

lar bajariladi.

3.4.5. Musbat haqiqiy sonlar to'plamining aksiomatikasi.

Biz yuqorida musbat haqiqiy sonlarni cheksiz o'nli kasrlar shaklida ifodalash mumkinligini aytgan edik. Ammo bu musbat haqiqiy sonlarning yozishning bir ko'rinishi xalos. Musbat haqiqiy sonlarni cheksiz ikkilik, cheksiz uchlik, va x.k. kasrlar ko'rinishida ham yozish mumkin. Masalan, musbat haqiqiy sonini cheksiz uchlik kasr ko'rinishida yozsak, uning tarkibida 0,1,2 raqamlari qatnashib, 021, 01210112... ko'rinishda bo'lishi mumkin. Musbat haqiqiy sonlarni uning yozilishi shakliga bog'lamasdan, hammasini qanoatlantiruvchi aksiomalarni shakllantirish

lozim. Shunday aksiomalar sistemasidan biri qo'shish amali xossalariga asoslangan bo'lib, unda ta'riflanmaydigan tushuncha qilib 1 va qo'shish amali hisoblanadi. Bu tushunchalar quyidagi aksiomalar sistemasini qanoatlantirishi lozim:

1. $N \subset R_+$
2. Qo'shish amali R_+ to'plamdagi ixtiyoriy $(a; b)$ juftlikga shu to'plamdagi $a + b$ sonini mos qo'yadi.
3. R_+ to'plamda ixtiyoriy a va b lar uchun R_+ da qo'shish amali kommutativ:

$$a + b = b + a$$
4. R_+ dagi ixtiyoriy $(a; b$ va $c)$ lar uchun R_+ da qo'shish amali assotsiativ:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
5. Agar $a, b \in R_+$, u holda $a + b \neq a$
6. Agar $a, b \in R_+$ bo'lib $a \neq b$ bo'lsa, u xolda shunday $c \in R_+$ soni topiladiki $b = a + c$ munosabat o'rinli bo'ladi;
7. Ixtiyoriy $a \in R_+$ va ixtiyoriy natural n soni uchun, shunday yagona $b \in R_+$ soni topiladiki, a soni uchun $a = b + b + \dots + b$ (n marta) munosabat o'rinli bo'ladi.

1) - 7) aksiomalar R_+ to'plamda tartib munosabatini kiritishga yo'l qo'yadi. Boshqacha aytganla R_+ to'plamda shunday bir c soni topildiki, buning uchun faqat va faqat $b = a + c$ musbat o'rinli bo'lgandagina $a < b$ bo'ladi. Bundan tashqari uzluksizlik aksiomasi bajarilishi lozim.

8. Agar X sonlar to'plami Y sonlar to'plamidan chapda yotsa (ya'ni ixtiyoriy $x \in X$, $y \in Y$ lar uchun $x \leq y$), u holda X va Y to'plamlarni bo'luvchi $a \in R_+$ soni mavjud (ya'ni $x \in X$ va $y \in Y$ sonlari uchun $x \leq a \leq y$ tengsizlik o'rinli).

Bu aksiomalar sistemasi yordamida R_+ to'plamdagi cheksiz o'nli kasr ko'rinishidagi ixtiyoriy son R_+ to'plamda qo'shish amalini aniqlashini isbot qilish mumkin.

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. O'lchovdosh bo'lmagan kesmalarni o'lchash haqida tushuncha bering.
2. Kvadratning dioganali uning tamonlari bilan o'lchovdosh emasligi to'g'risidagi teoremani isbotlang.
3. Musbat haqiqiy sonlarga ta'rif bering.
4. Musbat haqiqiy sonlar to'plamining tartiblanganligini tushuntiring.
5. Musbat haqiqiy sonlar to'plamida arifmetik amallar bajarishini ta'riflarini keltiring.
6. Musbat haqiqiy sonlar to'plamining aksiomatikasini keltiring.

3.5. HAQIQIY SONLAR TO'PLAMI.

3.5.1. Musbat va manfiy sonlar.

Musbat haqiqiy sonlar yordamida o'lchash natijasi bo'lgan ixtiyoriy skalyar miqdorlarni ifodalash mumkin: uzunlik, yuza, hajm, massa va x.k. Ammo amaliyotda bu kattaliklarni o'lchash natijasinigina emas, bu kattaliklar qanchaga o'zgarishini ko'rsatishga to'g'ri keladi. Kattaliklar esa o'z navbatida o'sishi yoki

kamayishi yoki o'zgarimasdan qolishi mumkin. Shu sababli kattaliklarni o'zgarishini ko'rsatish uchun musbat haqiqiy sonlar to'plamini kengaytirishga, ya'ni boshqa sonlarni qo'shishga zaruriyat tug'ilgan. R_+ sonlar to'plamiga 0 (nol) va manfiy sonlar qo'shilib kengaytirilgan. Buning uchun R_+ to'plam olinib, bu to'plamning har bir x soniga $-x$ (minus x) deb ataluvchi yangi son mos qo'yilgan. Masalan: 3 soniga -3 , 7 va 8 sonlariga -7 va -8 va x.k.

$-x$ ko'rinishidagi (bunda $x \in R_+$) songa manfiy son deyilib, ularni to'plami R_- deb belgilangan.

R_+, R_- va $\{0\}$ to'plamlari birlashtirilib haqiqiy sonlar to'plami deyiladi va R bilan belgilanadi.

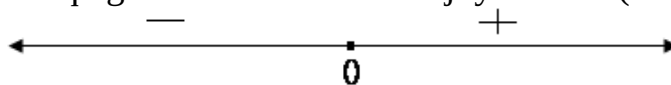
Shunday qilib

$$R = R_+ \cup R_- \cup \{0\}$$

bunda R_+, R_- va $\{0\}$ to'plamlari o'zaro jufti-jufti bilan kesishmaydi, boshqacha aytganda bitta son ham musbat, ham manfiy yoki musbat va nol bo'la olmaydi.

Agar kattalik dastlab x qiymatni qabul qilsa va (bunda $x, y \in R$) $x < y$ bo'lganda, kattalikni o'zgarishi musbat $y - x$ son bo'ladi.

Agar $x > y$ bo'lsa, kattalik o'zgarishi manfiy $-(x - y)$ soni bo'ladi. Musbat va manfiy sonlar qarama-qarshi yo'nalgan nurlar bilan tasvirlanadi, 0 soni esa ikkita nurni boshi hisoblanadi. x va $-x$ sonlari koordinata to'g'ri chiziqida sanoq boshi hisoblangan 0 nuqtaga nisbatan simmetrik joylashadi. (38-chizma)



38-chizma

Koordinata to'g'ri chiziqida sanoq boshidan x sonini ifodalovchi nuqttagacha bo'lgan masofa x sonini moduli deyiladi va $|x|$ bilan belgilanadi.

Shunday qilib,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0 & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Misol: $|8| = 8; \quad |-7| = 7; \quad |0| = 0;$

Aytaylik, $x \in R_+$ soni $a \in R$ soniga o'zgarganda $y \in R_+$ soniga o'tsin. U holda a haqiqiy songa musbat haqiqiy sonlar juftligi $(x; y)$ mos keladi. Masalan; 2 soniga $(7; 9)$ juftligi mos keladi, chunki 7 soni 9 soniga o'tadi. $(9; 7)$ juftligiga -2 soni mos keladi, chunki 9 sonidan 7 soniga o'tishga -2 soni mos keladi.

Bitta haqiqiy songa cheksiz juftliklar mos keladi. Masalan: 3 soniga $(1; 4)$, $(3; 6)$, $(\sqrt{2}; 3 + \sqrt{2})$, ... va x.k. -3 soniga esa $(4; 1)$, $(6; 3)$, $(3 + \sqrt{2}; \sqrt{2})$, va x.k.

$(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ juftliklari bitta a soniga mos kelishi uchun faqat va faqat $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ munosabat o'rinli bo'lishi zarur. $x_1 + y_2 = x_2 + y_1$ munosabat bajarilsa, $(x_1; y_1)$ va $(x_2; y_2)$ juftliklar ekvivalent deyiladi. $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$ munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalriga ega. Shu sababli

R_+ to'plam ekvivalent juftliklar sinflariga bo'linadi.

Har bir $(x; y)$ juftlikni sonlar nurida boshi x va oxiri y bo'lgan yo'naltirilgan kesmalar bilan tasvirlash mumkin.

Ekvivalent juftliklarga bir xil uzunlik va bir xil yo'nalishga ega bo'lgan kesmalar mos keladi va ular ekvivalent kesmalar deyiladi. Bundan esa haqiqiy sonlar ekvivalent yo'naltirilgan kesmalar sinfini tavsirlaydi deyish mumkin.

3.5.2. Haqiqiy sonlarni qo'shish va ayirish.

Aytaylik biror $x \in R_+$ soni dastlab a keyinchalik esa b soniga o'zgartirilsin. a va b haqiqiy sonlarning yig'indisi deb natijaviy o'zgarishga aytiladi. Masalan, 15 sonini dastlab 3 keyinchalik 7 ga o'zgartirsak, 15 soni dastlab 18 keyinchalik esa 25 bo'ladi. Demak 15 sonini 25 qilish uchun $3+7=10$ songa o'zgartirish kerak.

Qarama-qarshi haqiqiy sonlarning yig'indisi nolga teng. Umuman olganda haqiqiy sonlarni qo'shish qoidasi tubandagicha. Bir xil ishoraga ega bo'lgan haqiqiy sonlarni qo'shganda shu ishorali haqiqiy son hosil bo'ladi va u sonning moduli qo'shiluvchi sonlar modullarining yig'indisiga teng. Qarama-qarshi ishorali haqiqiy sonlarni qo'shganda hosil bo'lgan sonning moduli, qo'shiluvchilar moduli kattasidan moduli kichigini ayirmasiga, ishorasi esa qo'shiluvchilardan qaysi birining moduli katta bo'lsa, shu sonning ishorasi bilan bir xil bo'ladi.

Haqiqiy songa nolni qo'shish bilan son o'zgarmaydi.

Haqiqiy sonlarni qo'shish kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruvchanlik xossalriga ega. Bu ta'riflardan R to'plamda nolning neytral element ekanligi ko'rinadi.

R to'plamda ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal sanaladi. R to'plamda har bir b songa qarama-qarshi $-b$ son mavjud bo'lib $b + (-b) = 0$

Geometrik nuqtai nazardan ayirma b nuqtadan a nuqtaga boruvchi kesmaning uzunligiga teng, ya'ni $|a - b|$.

R to'plamda tartib munosabati o'rinli. Agar $a - b$ ayirma musbat bo'lsa, $a > b$ bo'ladi.

Tartib munosabati to'plamda assimetrik va tranzitiv bo'lgani uchun, tartib munosabati qattiq tartiblangan hisoblanadi.

Shu sababli R to'plamda $a = b$, $a > b$, $b > a$ munosabatlardan biri o'rinli.

3.5.3. Haqiqiy sonlar to'plamida ko'paytirish va bo'lish.

x va y sonlarni ko'paytmasi deb, shunday z soniga aytiladiki, bu sonning moduli ko'paytuvchilar modullarining ko'paytmasiga teng, ya'ni $|z| = |x| \cdot |y|$, ishorasi esa ko'paytuvchilar ishoralari bir xil bo'lsa, musbat, aks holda manfiy bo'ladi. Ixtiyoriy x soni uchun $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Ko'paytirish amali R to'plamda kommutativ, assotsiativ va qo'shishga nisbatan distributiv xossalarga ega. Qisqaruvchanlik xossasiga ega emas, chunki $zx = zy$ dan $x = y$ deb xulosa chiqarib bo'lmaydi, agar $z = 0$; bo'lsa $x \neq y$, ammo $z \neq 0$ bo'lsa, $zx = zy$ dan $x = y$ kelib chiqadi.

Shunday qilib ko'paytirishni noldan farqli sonlar uchun qisqartirish mumkin.

Agar x soni noldan farqli son bo'lsa, u holda ixtiyoriy $y \in R$ soni uchun shunday z soni topiladiki, $x = yz$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu erda z soniga x sonini y soniga bo'linmasi deyiladi va $x:y$ ko'rinishda belgilanadi. Shunday qilib R to'plamda noldan boshqa ixtiyoriy songa bo'lish aniqlangan.

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Haqiqiy sonlarni qo'shish va ayrishini tushuntiring.
2. Haqiqiy sonlar to'plamida ko'paytirish va bo'lishni tushuntiring.
3. Haqiqiy sonlar ustidagi amallarning xossalarini aytib bering.

3.6. SONLARNI YAXLITLASH. MIKROKALKULYATOR YORDAMIDA HISOBLASH.

3.6.1. Sonlarni yaxlitlash va ular ustida amallar

1. Taqribiy hisoblashlar.

Taqribiy son, sonlarni yaxlitlash. Har kimning ko'rish qobiliyati har xil, biror uzunlikni o'lchaganda o'lchov lentasining qattiq yoki bo'sh tortilishiga ko'ra o'lchash natijalari turlicha, bular esa miqdorlarning o'lchov natijalarning doimo taqribiy ekanligini ko'rsatadi. Sanash yo'li bilan hisoblash natijasi doimo taqribiy bo'lavermaydi, ba'zan aniq, ba'zan taqribiy bo'ladi. Masalan, bir ko'ldagi baliqlar soni 173200 dona deyilsa, baliqlar soni bir donaga aniqlikda sanalmagani aniq ko'rinib turadi. Demak, baliqlarning soni taqribiy. Agar sinfdagi o'quvchilar soni 26 desak, bu aniq sanalgan deyiladi. Sonning yuqori xonalarida bir yoki bir necha raqam qoldirib, kichik xonalarini o'chirib, o'rniga nollar qo'yishni yaxlitlash deyiladi. Yuqoridagi ko'ldagi baliqlar soni yaxlitlashga misol bo'la oladi. Berilgan sonni berilgan shartga ko'ra yaxlitlash uchun u berilgan sonda o'chiriladigan raqam 5 dan katta yoki 5 ga teng bo'lsa, undan oldingi xona raqamiga bir qo'shiladi va o'chirilgan raqam o'rniga nol yoziladi. Agar o'chiriladigan raqam 5 dan kichik bo'lsa, to'g'ridan-to'g'ri tashlanib, uning o'rniga nol yoziladi.

Misol. Quyidagi sonlarni yuzgacha aniqlikda yozing:

- 1) $325461 \approx 325500$
- 2) $257240 \approx 257200$

Agar tashlanadigan raqam faqat 5 ning o'zigina bo'lib, undan keyin hech qanday raqam kelmasa, u holda undan yuqori xona raqamiga qaraladi, agar u raqam toq bo'lsa 1 qo'shib, juft bo'lsa, o'z holicha qoladi. Haligi 5 raqami o'rniga nol yoziladi.

Misol. Quyidagi sonlarni o'ngacha aniqlikda yozing:

- $345 \approx 340$
 $335 \approx 340$

Agar sonning tashlangan xona raqami yaxlitlangandan keyingisi 5 bo'lib, u 5 ning o'zini ham yana yaxlitlash kerak bo'lsa va u 5 ortig'i yoki kami bilan olinganligi

ma'lum bo'lsa, u holda ortig'i bilan olingan 5 ning oldidagi xona raqamiga 1 qo'shiladi va 5 o'rniga nol qo'yiladi. Kami bilan olingan bo'lsa, oldidagi xona o'zgarishsiz qolib 5 o'rniga nol yoziladi.

Misol. Quyidagi sonlarni 1000 gacha aniqlikda yozing:

$$1) 83467 \approx 83500 \approx 83000$$

$$2) 83524 \approx 83500 \approx 84000$$

Sonlarni yaxlitlagandan keyin hosil bo'lgan son berilgan sonning taqribiy qiymati hisoblanadi. Taqribiy natijani yozganda aniqlik sonning ohirgi raqamida ko'rsatiladi: uning ohirgi raqamidagina kichkina xatolik bo'lib, boshqa hamma raqamlar ishonchli bo'lishi kerak. Buning uchun ishonchli va ishonchsiz raqamlar tushunchasini kiritamiz.

Taqribiy sonning qaysi xonadagi raqami yarimdan kam xatolikka ega bo'lsa, u xona va undan yuqori xonalardagi hamma raqamlar ishonchli deyiladi: agar qaysi xona raqamining xatoligi yarimdan ortiq bo'lsa, u raqam va undan boshlab o'ng tomondagi hamma raqamlar ishonchsiz raqamlar deyiladi.

Misol. Tomorkaning perimetrini ruletka bilan 7 marta o'lchaganimizda quyidagi natijalarni berdi:

$$-101,22m; 101,35m; 100,88m; 100,56m;$$

$$101,2m; 99,98m; 101,31m$$

Bularning arifmetik o'rtasi:

$$\frac{101,22m + 101,35m + 100,88m + 100,56m + 101,2m + 101,18m + 101,31m}{7} =$$

$$= \frac{707,7m}{7} = 101,1m \approx 101m$$

Demak, 101m ning bosh raqami bo'lgan 10 ishonchli, keyingi raqami 1 esa ishonchsizdir. Bu erda gap ishonchli va ishonchsiz raqamlar haqida borayotir, ya'ni tomorqani necha marta o'lchasak ham bosh raqamlar esa o'zgarmayotir. Shu sababli 10 ishonchli raqam, undan keyingi ikkita raqam esa ishonchsiz raqamlar bo'ladi. Masalan, 1 raqamini olib qaraylik. Bu raqamda birmuncha xatolik bor, bu xatolik 1 ga nisbatan 0,5 dan kam bo'lishi kerak. Ba'zi hollarda ohirgi raqamdagi xatolik 0,5 dan ortib ketsa, bu holda bundan bir xona yuqorigi raqam ham ishonchsiz bo'ladi.

Taqribiy sonlar ustida amallarni qaraymiz;

1. Qo'shish. Bir necha taqribiy sonlarni qo'shganda bu qo'shiluvchilarning birontasida yo'q bo'lgan xonalarga qarab yig'indi natijasining o'ng tomonidan yaxlitlash qoidasiga asosan mos tartibda xonalar olib tashlanadi va ularning o'rniga nollar yoziladi.

Misol: Shirkat xo'jaligining 3700 ga (100 gektargacha aniqlik bilan) eriga paxta, 260 ga (100 gektargacha aniqlik bilan) eriga pichan ekilgan. 58 ga eri turar joydan iborat. Shirkat xo'jaligining umumiy eri qancha?

$$\begin{array}{r} 3700 \\ + 260 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$4018 \approx 4000 \text{ ga.}$$

Demak, bu qo'shiluvchilardan eng ko'p aniqmas xonaga ega bo'lgani 3700, boshqalariniki unikidan kam. Shuning uchun natijaning oxirgi ikki xonasini yaxlitlab, nollar bilan almashtiramiz.

2. Ayirish. Taqribiy sonlarni ayirish ham taqribiy sonlarni qo'shishdek bajariladi. Masalan, shirkat xo'jaligining 2450 ga eriga bug'doy ekilgan. Uning 836 gektari bahorda ekilgan, qolgani kuzda ekilgan. Kuzda qancha eriga bug'doy ekilgan (2450 o'ngacha aniqlikda olingan)?

$$\begin{array}{r} 2450 \\ - 836 \\ \hline 1614 \approx 1610(\text{ga}) \end{array}$$

3. Ko'paytirish. Taqribiy sonlarni ko'paytirganda ko'paytuvchilarning qaysi biri eng kam aniq raqamga ega bo'lsa, natijada o'shaning raqamlari soni saqlanadi. Natijani aniqroq hisoblash kerak bo'lsa, hisoblash davridagi natijalarda bir xona ortiq olish mumkin. Lekin oxirgi natijada olingan ko'shimcha xona tashlab yuboriladi.

Misol: Maktab sport zalining bo'yi 17 m 74 sm, eni esa 9 m 63 sm ga teng. Maktab sport zalining yuzini toping.

Echish: $1774 \text{ sm} \times 963 \text{ sm} = 1708362(\text{kv.sm}) \approx 170\,0000 \text{ kv.sm} = 170 \text{ kv.m.}$
O'lchaganda lenta tarang yoki bo'sh bo'lib, bo'yi va enidagi birlik xonalari ishonchsiz bo'lishi mumkin. Shuning uchun bo'yidagi 177 raqami ishonchli, enidagi 96 raqami ishonchli deb, natijada ham yaxlitlash yo'li bilan 17 raqamini qoldirib, boshqa raqamlarni tashlab yuboramiz. Agar hisoblash natijasi bir necha amallar bilan kelib chiqadigan bo'lsa, uni aniqroq hisoblash uchun oraliqdagi amallar natijasida, yuqoridagi ko'rsatilgan qoidada aytilganidek bitta raqam ortiq olish kerak. Lekin bu raqam natijalarda hisobga olinmaydi. Masalan, yuqoridagi ko'rsatilgan zalning balandligi 9 m 26 sm bo'lsa, uning hajmini topish uchun asosining yuzi $1774 \text{ sm} \times 963 \text{ sm} \approx 1710000 \text{ kv.sm}$ ni topamiz: bunda bitta raqamni, ya'ni 1 ni qo'shimcha qilib oldik. Endi uni balandligiga ko'paytiramiz. U uch raqamli-yu, lekin bir qo'shimcha raqamni hisobga olmaymiz.
 $1710000 \text{ kv.sm} \times 926 \text{ sm} = 1583460000 \text{ kub sm} \approx 1600\,000\,000 \text{ kub sm} = 1600 \text{ kub m.}$

4. Bo'lish. Taqribiy sonlarni bo'lish amali taqribiy sonlarni ko'paytirishdek bajariladi. Bunda bo'luvchi va bo'linuvchilarning qaysi birida aniq raqam soni kam bo'lsa, bo'linmada shuncha aniq raqam soni saqlanadi.

Masalan, aytaylik bo'luvchi va bo'linuvchilardan birining olti raqami, ikkinchisining uch raqami aniq bo'lsa, bo'linma uchta aniq raqamli qilib olinadi. Shuning uchun ham bo'linmadagi uch raqamdan keyingi qoldiq bo'luvchining yarmidan ortiq bo'lsa, u uchinchi raqamga bir qo'shish kerak, agar yarmidan kam bo'lsa, uchta raqamni o'zgarishsiz qoldirish kerak.

Misol: $234564 : 310 \approx 757$

$$\begin{array}{r|l}
 -234564 & 310 \\
 \hline
 2170 & 756,65 \\
 \hline
 -1756 & \\
 \hline
 1550 & \\
 \hline
 -2064 & \\
 \hline
 1860 & \\
 \hline
 -2040 & \\
 \hline
 1860 & \\
 \hline
 -1800 & \\
 \hline
 1550 & \\
 \hline
 250 &
 \end{array}$$

Masala ishlash vaqtida bo'lishda ham ko'paytirishga o'xshash aniqroq hisoblash maqsadida vaqtincha bo'linmada bir raqam qo'shimcha olish kerak. (Qo'shimcha olingan raqam oxirgi natijada e'tiborga olinmaydi). Taqribiy sonlarni ko'paytirish va bo'lishda komponentlarning biri aniq son, biri taqribiy son bo'lsa, natija taqribiy sonlarning aniq raqamiga qarab aniqlanadi. Aniq sonning raqamiga qaralmaydi. Taqribiy sonlarni ko'paytirish va bo'lishda komponentlardan birining bosh raqamlari 1,2,3; natijaning bosh raqami 9,8,7 bo'lib kelsa, natijani yuqoridagi qoidadan, bir raqam kam olib hisoblash kerak. Shu bilan birga ko'p raqamli sonni kam raqamli songa bo'lish uchun o'sha bo'luvchining aniq raqami qancha bo'lsa, bo'linuvchini ham shuncha raqamgacha bo'lib, qolganlariga nollar qo'yamiz. Bunda qancha nol qo'yamiz, degan savol tug'iladi. Ma'lumki, bo'linmaning raqamlari soni bo'linuvchi bilan bo'luvchining raqamlari sonlarining ayirmasiga teng yoki undan bitta ortiq bo'ladi. Qaysi vaqtda teng bo'ladi? Qaysi vaqtda bitta ortiq bo'ladi?

Agar bo'lishni boshlashda bo'luvchi qancha raqamli bo'lsa, bo'linuvchining ham shuncha raqami unga etarli bo'lmasa, unda bo'linmaning raqam soni bo'linuvchi bilan bo'luvchining raqam sonlarining ayirmasidan bitta ortiq bo'ladi. Agar o'sha birinchi bo'lishda bo'luvchining raqami soniga mos (teng) bo'lgan bo'linuvchining bosh raqami soni etmasa, tag'in bir raqam qo'shiladigan bo'lsa, u holda bo'linmaning raqami soni bo'linuvi bilan bo'luvchining raqami sonlarining ayirmasiga teng bo'ladi.

2. Taqribiy sonlarning absolyut va nisbiy xatolari.

Aniq son bilan taqribiy sonning farqini absolyut xato deyiladi.

Misol: $90,3 \approx 90$; bunda $90,3$ -aniq son:

90 - taqribiy son, $90,3 - 90 = 0,3$ - absolyut xato.

Absolyut xatoning aniq songa bo'lgan nisbatini nisbiy xato deyiladi.

Berilgan misolda nisbiy xato $\frac{0,3}{90,3}$ ga teng.

Absolyut va nisbiy xatolar quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Bir necha taqribiy sonlar yig'indisining absolyut xatosi qo'shiluvchilar absolyut xatolarining yig'indisiga teng.

2-xossa. Ikki taqribiy son ayirmasining absolyut xatosi bu sonlarning ikkalasi ham ortig'i bilan yoki ikkalasi ham kami bilan olingan bo'lsa, shu taqribiy sonlar absolyut xatolari ayirmasiga teng bo'ladi.

3-xossa. Biri kami bilan, ikkinchisi ortig'i bilan olingan ikkita taqribiy son ayirmasining absolyut xatosi kamayuvchi va ayriluvchining absolyut xatolari yig'indisiga teng.

4-xossa. Ikki taqribiy son ko'paytmasining absolyut xatosi har qaysi son aniq qiymatini ikkinchi sonning absolyut xatosiga ko'paytirish natijalarining va ikkala son absolyut xatolari ko'paytmasining yig'indisiga teng.

5-xossa. Taqribiy sonni biror aniq songa bo'lishdan chiqqan bo'linmaning absolyut xatosi bo'linuvchining absolyut xatosini bo'luvchiga bo'lishdan chiqqan bo'linmaga teng.

6-xossa. Taqribiy sonlarni bo'lishda bo'linmaning eng katta nisbiy xatosi bo'linuvchi va bo'luvchining eng katta nisbiy xatolari yig'indisiga teng.

Xossalardan bittasini isbotini keltiramiz, (boshqa xossalarni isbotini talabalarni mustaqil bajarishiga qoldiramiz).

Ikkinchi xossani isboti:

A va B lar taqribiy sonlar:

a va b lar mos ravishda ularning taqribiy qiymatlari, α va β lar mos ravishda taqribiy sonlarning absolyut xatolari bo'lsin. Agar A - kamayuvchi, B - ayriluvchi (ikkalasi ham ortig'i yoki kami bilan olingan) Ikkinchi xossa shartiga ko'ra

$A - B$ ayirmaning absolyut xatosi, $\alpha - \beta$ ga (ortig'i bilan olinganda) yoki $\beta - \alpha$ ga teng (kami bilan olinganda) bo'lishini isbotlash kerak.

I - hol. A va B ortig'i bilan olingan taqribiy sonlar bo'lsin, u holda;

$$A = a + \alpha$$

$$B = b + \beta$$

Qo'shish va ayirish xossalariga ko'ra:

$$A - B = (a + \alpha) - (b + \beta) = a + \alpha - b - \beta = (a - b) + (\alpha - \beta)$$

II-hol. A va B kami bilan olingan taqribiy sonlar bo'lsin, u holda

$$A = a - \alpha$$

$$B = b - \beta$$

qo'shish va ayirish xossalariga ko'ra:

$$A - B = (a - \alpha) - (b - \beta) = a - \alpha - b + \beta = (a - b) + (\beta - \alpha);$$

3.6.2. Mikroalkulyator yordamida hisoblash

Insonniyat juda qadim zamondan buyon o'z mehnatlarini yengillashtirish imkonini beruvchi mashina va mexanizmlar yaratib kelganlar. Mashinalar bug'doy, paxta, piyoz, sholi kabilarni ekish, o'rish, terish, yanchish kabi ishlarni bajarib kishilarni mehnatlarini osonlashtirilishi uchun xizmat qiladi. Aqliy mehnat murakkab va og'ir bo'lib, uni yengillashtirish hisob mashinalari zimmasiga yuklatiladi. 1951 yilda birinchi EXM ishga tushdi.

Mashina 5-6 xonali sonlar ustida sekundiga 50 amal bajarar edi. Bu insonni amal bajarish tezligidan 1500 barobar ortiqdir. Zamonaviy EXM lar hisoblashlarni yuqori malakali matematiklardan 100 milliard marta tez bajaradi. Xatto hisob mashinalari otilgan raketa traektoriyasini hisoblab, uchish yo'nalishini to'g'irlab turish imkoniyatiga ega.

Biz boshlangich sinf o'quvchilarini kundalik xayotimizning turli sohalarida

ishlatayotgan mikroelektronika elementlaridan yasalgan juda kichik hisob mashinalari bilan tanishtiramiz. O'quvchi qo'liga birinchi marta mikrokalkulyatorni olar ekan oldin uni tokka ulab ajratish, raqamlarni kiritish va ekranni tozalash kabi elementar ko'nikmaga ega bo'lishi zarur. Bunda albatta bitta kalkulyatorni tugmachalari ifodalangan plakat yoki diapozitiv bo'lsa tushuntirish ishlari ko'ngildagidek o'tadi.

O'quvchilarni maktablar uchun chiqarilgan MKSH-2 mikrokalkulyatori bilan tanishtirish maqsadga muvofiq, chunki bu kalkulyator ko'pchilik maktablarda mavjuddir. Hisoblashlarni bajarganda oraliq natijalarni daftarga yozib 1-2 ta misolni o'quvchilar bilan birga doskada yechib borish maqsadga muvofik.

Hisoblashni bajarishda etarli malakaga ega bo'lguncha oldin dasturini daftarga yozib, so'ng o'sha bo'yicha ishlash, mashinada ishlashga o'rganish vaqtini tezlashtiradi hamda o'quvchilarda izchil algoritmash bajaradigan ixtiyoriy harakatini rejalash ko'nikmasini shakllantiradi.

Sinf bilan birga quyidagi ko'rinishdagi misollarni yechish tavsiya etiladi.

$$5+4=9 \qquad 4+17=21$$

Misol natijasi barcha o'quvchida bir xil chiqqach mustaqil ishga quyidagilar tavsiya qilinadi.

1. Ifodalarni hisoblang natijani javobga taqqoslang.

a) $6,35 - 3,5 + 18,43$

Dastur. $6,35 - 3,5 + 18,43 =$

Javob: 21,28

b) $32792 - 712 : 401 + 405$

Dastur. $32792 - 712 : 401 + 405 =$

Javob: 485

v) $6848 + 128 + 288$

Dastur. $6848 + 128 + 288 =$

Javob: 7264

g)
$$\frac{0,873 + 4,127}{32}$$

Dastur $(0,873 + 4,127) : 32 =$

Javob: 0,15625

Bu misollarni yechishda hisoblashlarni uzluksiz bajarishni o'quvchi xis qiladi. Ya'ni ikkinchi amal klavishi bosilganda ikkinchi amaldagi natija chiqishni kuzatadi. Buni o'quvchilarga quyidagi misolda tushuntirish mumkin.

$5+4$ misolida ko'raylik.

$5+4-$, $5+4+$, $5+4:$, $5+4x$ larni bajarganda natija bir xil chiqadi. Ya'ni birinchi amal kiritilgandan keyin amal = vazifasini o'tashi kuzatiladi.

Quyidagi misol yuqoridagi ko'rinishni umumlashtiradi.

$5+4 - 3x2$

Dastur. a) $5+4=-3=x2=$

javob: 12

Dastur. b) $5+4-3x2=$

javob: 12.

Ko'rinib turibdiki har ikkala holda ham javob bir xil. Uzluksiz hisoblash

malakasini egallash uchun sonlarni konstruksiyalash o'yinini taklif qilamiz. Bunda mikrokalkulyatorda hisoblab berilgan boshlang'ich songa ixtiyoriy sonlarni qo'shib, ayirib yoki bo'lib, ko'paytirib oxirgi son topiladi.

Masalan: Qo'shish va ayirish amallari yordamida 19 sonidan 125 sonini hosil qiling. 125 sonini 2,3,4 yurishda hosil qilib bo'ladimi?

Mikrokalkulyatorlarga 8 ta raqamli son sig'ib, shundan ortiqchasi yaxlitlanadi.

Sodda misollarni yechishda tubandagi jadvaldan foydalaning.

ifoda	Dastur

Mikrokalkulyatorlarda hisoblash malakasini oshirish yo'llaridan bir unda qiziqarli misollarni birgalikda echishdir. Buning uchun "Son o'yla" o'yinini taklif qilishimiz mumkin. Masalan, o'qituvchi: Ikki xonali sonni o'ylang. Uni mashinaga kiriting. 19 ga ko'paytiring, natijaga 43 ni qo'shing yana 3 ga ko'paytiring. Natijadan 129 ni ayiring va 57 ga bo'ling. Ekkranda o'ylagan soningizni o'qing. Agar barcha amallar to'g'ri bajarilsa, ekkranda har bir o'quvchini o'ylagan soni chiqadi.

To'rt arifmetik amalni bajarish malakasini hosil qilish uchun tubandagi misollarni yechish tavsiya qilanadi.

1. Natijani tekshiring.

$$\begin{array}{lll}
 175+455= & 195 \times 285= & 121314:112= \\
 675-792= & 675 \times 641= & 194175:155= \\
 97566612-8788= & & 64164260+1275= \\
 17181620-253040= & & 15161718+252627=
 \end{array}$$

2. Amallarni bajaring.

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } 17+18= & \text{b) } 689-17= & \text{v) } 9 \times 8= & \text{g) } 9999:11= \\
 8720+17541= & 751-579= & 17 \times 7= & 1718:17=
 \end{array}$$

3. $A = 1867 - b$ formulada A ni qiymatlarini toping

$$b = : 642, 1785, 941, 1767$$

A:

4. Amallarni bajaring.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } 6,75+7589,42 & \text{b) } 72,2-44,732 \\
 & 27,1 - 14,789 \\
 & 54,003 - 16,49 \\
 & 15,14 - 14,379
 \end{array}$$

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sonlarni yaxlitlashni tushuntiring.
2. Taqribiy sonlar ustida amallar bajarishni misollar yordamida tushuntiring.
3. Taqribiy sonlarning absolut va nisbiy xatolariga ta'rif bering.
4. Absolyut va nisbiy xatolar xossalari ayting .
5. Mikrokalkulyator tuzilishi va ishlash jarayoni to'g'risida gapirib bering.
6. Mikrokalkulyator yordamida misollar yechib ko'rsating.

3.7. KOMPLEKS SONLAR.

3.7.1. Kompleks son

Ixtiyoriy ko'rinishdagi algebraik tenglamalarni yechishda haqiqiy sonlar to'plami yetarli emas. Haqiqatan ham, sonlar to'plamida diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglama yechimga ega emas.

Masalan: $x^2+1=0$

Bu qiyinchilikdan qutulish maqsadida kompleks sonlar to'plami kiritiladi. Bu to'plamga haqiqiy sonlar to'plami to'plam osti sifatida kiradi. Kompleks sonlar to'plami C bilan belgilanadi. $D<0$; $x^2+1=0$ tenglama yechimi kompleks sonlar to'plamida bor deb, ya'ni $i=\sqrt{-1}$ bilan belgilanuvchi mavhum birlik kiritamiz. Bu mavhum birlik yuqoridagi tenglamani yechimi bo'ladi, ya'ni $i^2+1=0$; $i^2=-1$. Shunday qilib, biz haqiqiy sonlar to'plamini bi mavhum sonlar bilan to'ldiramiz. Haqiqiy a sonini mavhum bi soniga qo'shishdan $a+bi$ kompleks sonini hosil qilamiz.

Ta'rif: $a+bi$ ifodaga kompleks son deyiladi. (Bunda a, b haqiqiy sonlar, i - esa mavhum birlik, a - kompleks sonining haqiqiy, bi - esa mavhum qismlari. Agar a_1+b_1i va a_2+b_2i kompleks sonlarida $a_1=a_2$; $b_1=b_2$ bo'lsa, ular teng deyiladi. Odatda kompleks son bitta z harf bilan belgilanadi.

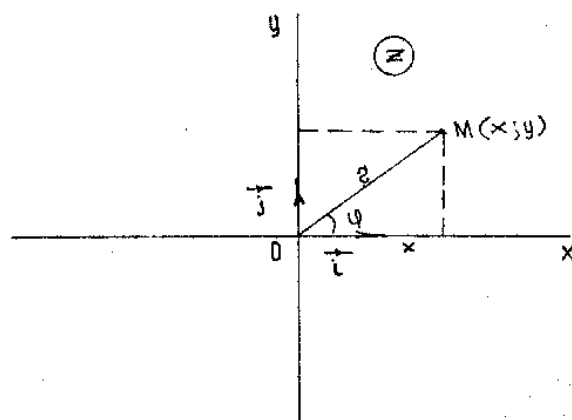
$z=a+bi$ kompleks sonni haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo'lsa, ya'ni $a=0$ va $b=0$ bo'lsa u nolga teng bo'ladi.

Mavhum qismlar bilan farq qiluvchi $z=a+bi$ va $z=a-bi$ kompleks sonlar qo'shma deyiladi. Haqiqiy va mavhum qismlarning ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita $z_1=a+bi$ va $z_2=-a-bi$ kompleks sonlar qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi.

1. Kompleks sonning geometrik tasviri.

$R=\{0; i; j\}$ koordinatalar sistemasida absissalar o'qiga $z=a+bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi a ni, ordinatalar o'qiga esa mavhum qismini koeffitsienti b ni joylashtirsak, tekislikda $(a;b)$ nuqtaga ega bo'lamiz. Shu nuqta $a+bi$ kompleks sonni geometrik tasviri deb qabul qilinadi. Odatda bu z nuqta deyiladi. Shunday qilib, tekislikning har bir nuqtasi bitta kompleks sonni ifodalaydi. Boshqacha aytganda, tekislik nuqtalari bilan kompleks sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Ox o'qida kompleks sonni haqiqiy qismi joylashgani uchun haqiqiy o'q, ordinatalari o'qida mavhum qismga tegishli son joylashgani uchun mavhum o'q, xOy tekisligini o'zi esa kompleks tekislik deyiladi.

Kompleks tekislik z bilan belgilanadi.
(39-chizma)



(39-chizma)

2. Kompleks sonning trigonometrik shakli

$z=x+yi$ ko'rinishdagi son algebraik ko'rinishdagi kompleks son deyiladi. Kompleks sonni trigonometrik shaklini hosil qilish uchun 39-chizmadan foydalanamiz.

Shakldan:

$$x=r\cos\varphi; y=r\sin\varphi \quad (1)$$

bunda r - kompleks soni z - sonini tasvirlagan vektorning uzunligini ifodalaydi va unga z sonning moduli, φ - burchakni esa z ning argumenti deyiladi.

$$(1) \Rightarrow |z| = |x + yi| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki 2π qo'shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k - butun son.

Argumentning barcha qiymatlari orasidan $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat bosh qiymat deyiladi va tubandagicha belgilanadi. $\varphi = \arg z$

(1) tengliklarni hisobga olib, kompleks sonni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$(1) \Rightarrow z = x + yi \Rightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad (3)$$

$$\text{bu erda } r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{agar } x > 0; y > 0 \text{ bo'lsa} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \\ 2\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{agar } x > 0, y < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

(3) ga kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi.

1-Misol. Kompleks sonning moduli 3 ga argumenti $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ga teng bo'lsa, uning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

(1) formuladan

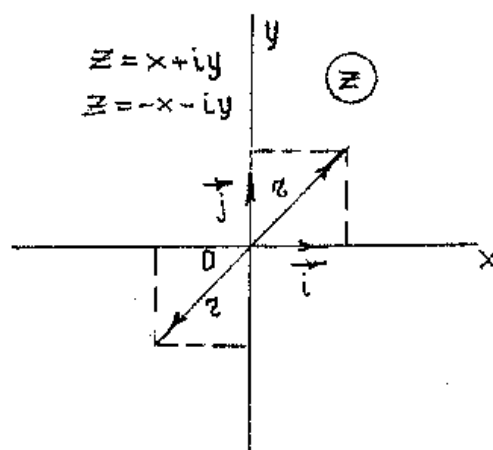
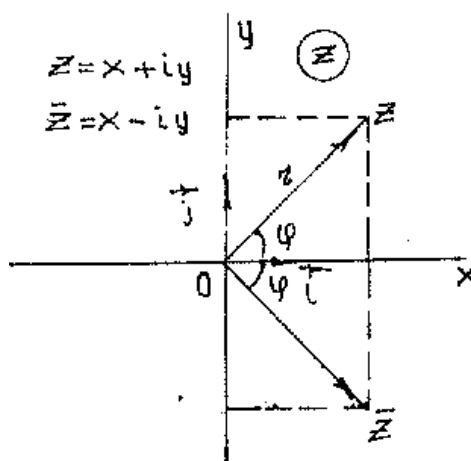
$$x = r \cos \varphi = 3 \cos \frac{\pi}{4} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$y = r \sin \varphi = 3 \sin \frac{\pi}{4} = 3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-Misol. $z=i$ kompleks sonning argumentini toping. $x=0; y=1; r=1; \varphi=\frac{\pi}{2}$

3-Misol. Qo'shma va qarama-qarshi kompleks sonlarni chizmada tasvirlang va izohlang.

Shakldan ko'rinadiki, qo'shma kompleks sonlar bir xil modulga ega va absolyut qiymatlari bo'yicha teng argumentlarga ega bo'lib, haqiqiy o'qqa simmetrik bo'lgan nuqtalar bilan tasvirlanadi, qarama-qarshi kompleks sonlar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar bilan tasvirlanadi (40-chizma).



40-chizma.

4-Misol. $z=1-i$ kompleks sonini trigonometrik shaklda ifodalang

$$x=1; y=-1; r=\sqrt{2}$$

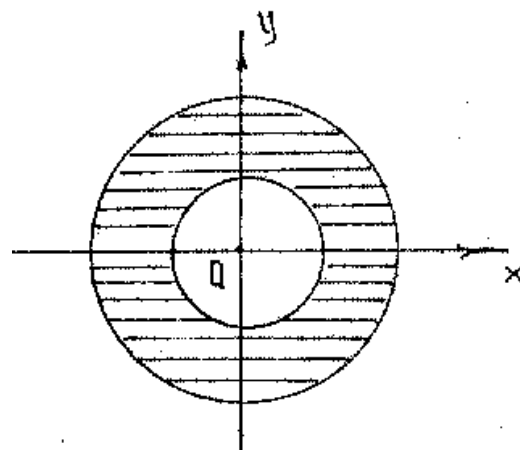
$$\operatorname{tg} \varphi = -1; \varphi = 2\pi - \arctg(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Shunday qilib, $z = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4})$. Endi kompleks sonlar to'plamining

ba'zi bir to'plam ostilarini ifodalovchi munosabatlarni geometrik nuqtai nazardan ko'rib o'taylik.

a) $|z|=2$ bu munosabat kompleks tekisligida markazi koordinata boshida radiusi 2 ga teng bo'lgan aylananing nuqtalarini ifodalaydi.

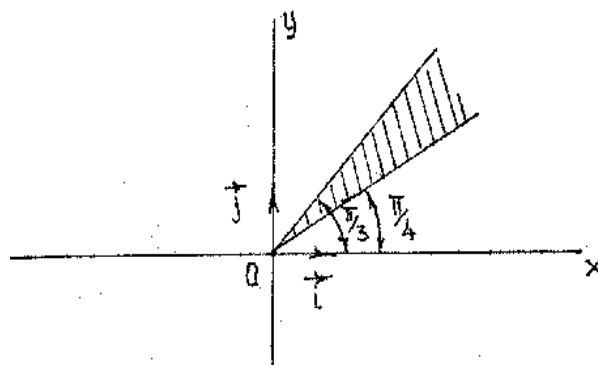
b) $2 \leq |z| \leq 3$ munosabat esa markazi koordinatalar boshida joylashib ichki radiusi 2 va 3 ga teng bo'lgan konsentrik joylashgan aylanalar bilan chegaralangan xalqa ichidagi nuqtalar to'plamini ifodalaydi (41 - chizma).



41-chizma.

v) $\arctg z = \frac{\pi}{6}$ munosabatga kompleks tekisligida koordinata boshidan 30° burchak ostida chiquvchi nurdagi nuqtalar to'plami mos keladi.

g) $\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}$ munosabatga esa kompleks tekisligidagi koordinata boshidan 45° va 60° burchak ostida chiquvchi nurlar bilan chegaralangan nuqtalar to'plami hamda nurlar ustida yotuvchi nuqtalar to'plami kiradi (42 - chizma).



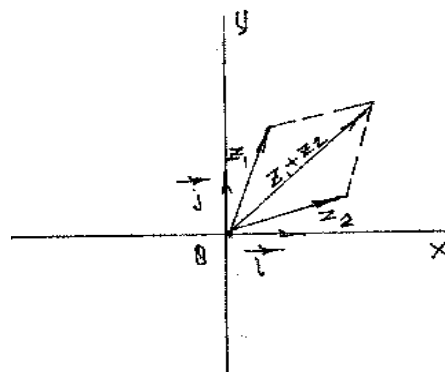
42-chizma

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kompleks songa ta'rif bering.
2. Kompleks soni geometrik tasvirlang.
3. Kompleks sonni trigonometrik ko'rinishga keltiring (misollar yordamida ko'rsating).

3.7.2. KOMPLEKS SONLAR USTIDA AMALLAR.

1) Qo'shish. $z_1 = a_1 + b_1i$ va $z_2 = a_2 + b_2i$ kompleks sonlarning yig'indisi deb, $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi. Kompleks sonlarni qo'shish vektorlarni qo'shish formulasidan vektorlar bilan ifodalangan kompleks sonlarni qo'shish qoidasi bo'yicha bajarilishi ko'rinadi. (43 - chizma)



43-chizma

Misol: $z_1 = 2 + 5i$ va $z_2 = -1 - 3i$ kompleks sonlarni yig'indisini toping.

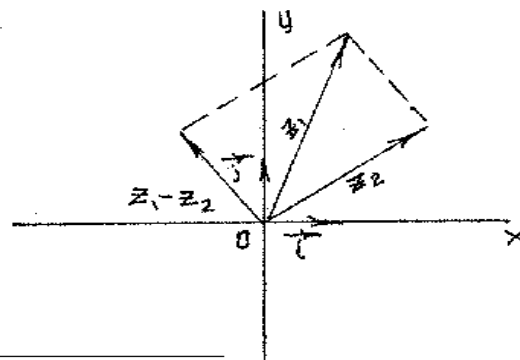
$$z_1 + z_2 = (2 + 5i) + (-1 - 3i) = (2 - 1) + i(5 - 3) = 1 + 2i$$

2) Ayirish. $z_1 = a_1 + b_1i$ va $z_2 = a_2 + b_2i$ kompleks sonlarni ayirmasi deb, shunday kompleks songa aytiladiki, unga ayriluvchi kompleks sonni qo'shganda kamayuvchi kompleks son ho-sil bo'ladi.

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Ikkita kompleks son ayirmasini moduli shu sonlarni kompleks sonlar tekisligida tasvirlovchi nuqtalar orasidagi masofaga teng (44-chizma).

Misol: $z_1 = 6 + 5i$ va $z_2 = 4 - 2i$ kompleks sonlarni ayirmasini toping. : $z_1 = 6 + 5i$ va $z_2 = 4 - 2i$; $z_1 - z_2 = (6 + 5i) - (4 - 2i) = (6 - 4) + i(5 + 2) = 2 + 7i$



$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

44-чизма

3) Kompleks sonlarni ko'paytirish. $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning ko'paytmasi deb, $i^2 = -1$ ekanligini hisobga olgan holda kompleks sonlarni ko'paytmasi ikkita ko'phad ko'paytmasi shaklida ko'paytirishdan hosil bo'lgan kompleks songa aytiladi.

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ u holda ularning ko'paytmasi $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ bo'ladi.

Misol: $z_1 = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ va $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ kompleks sonlarni ko'paytmasini toping.

Yechish.

$$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \right] = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2\sqrt{2} i$$

4) Kompleks sonlarni bo'lish. Kompleks sonlarni bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi. Boshqacha aytganda $z \cdot z_2 = z_1$ bo'lsa, z soni $z_1 = x_1 + i y_1$ uning $z_2 = x_2 + i y_2$ kompleks songa bo'linmasi deyiladi.

$z = \frac{z_1}{z_2}$ bo'linmasini topish uchun kasrning surat va maxrajini z_2 ning qo'shmasi $\bar{z}_2$ ga ko'paytiramiz.

$$z = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \text{ bundan } z = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2};$$

Agar kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ va $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ u holda

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))] \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))]$ ya'ni kompleks sonlarni

bo'lishda bo'linuvchining moduli bo'luvchining moduliga bo'linadi, argumentlari esa ayriladi.

Misol: $z_1 = \sqrt{3} + i$ ni $z_2 = -3 - 3i$ ga bo'ling.

a) algebraik; b) trigonometrik ko'rinishda bo'ling.

Yechish:

$$a) \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3} + i}{-3 - 3i} = \frac{(\sqrt{3} + i) \cdot (-3 + 3i)}{(-3 - 3i) \cdot (-3 + 3i)} = \frac{-3\sqrt{3} - 3 + (\sqrt{3} - 3)i}{9 + 9} =$$

$$= \frac{-3[\sqrt{3}+1(\sqrt{3}-1)i]}{18} = \frac{-\sqrt{3}-1}{6} + \frac{\sqrt{3}-1}{6}i$$

$$b) z_1 = \sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}); \quad z_2 = -3 - 3i = 3\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4});$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)}{3\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})} = \frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{6} - \frac{5\pi}{4})] = \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(-\frac{13\pi}{12}) + i \sin(-\frac{13\pi}{12})] = \frac{2}{3\sqrt{2}}(\cos \frac{13\pi}{12} - i \sin \frac{13\pi}{12}) = \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(\pi + \frac{\pi}{12}) - i \sin(\pi + \frac{\pi}{12})] = \frac{2}{3\sqrt{2}}(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) = \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot [-\cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})] = \\ &= \frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot [(-\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}) + i(\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4})] = \frac{2}{3\sqrt{2}}[(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \\ &- \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) + i(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})] = -\frac{\sqrt{3}+1}{6} + i \frac{\sqrt{3}-1}{6}; \end{aligned}$$

5) Darajaga ko'tarish. Kompleks sonlarni ko'paytirish qoidasidan darajaga ko'tarish qoidasi kelib chiqadi. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kompleks son uchun n – natural bo'lganda $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Bu formulani Muavr formulasi deyiladi. Muavr formulasini tadbiq qilishda $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$ bo'lishini e'tiborga olishimiz kerak.

Misol: $(-1+i)^5$ ni hisoblang.

$$\begin{aligned} z &= -1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) \\ z^5 &= (-1+i)^5 = (\sqrt{2})^5 \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)^5 = 4\sqrt{2} \left(\cos 5 \cdot \frac{3\pi}{4} + i \sin 5 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = \\ &= 4\sqrt{2}(\cos 675^0 + i \sin 675^0) = 4\sqrt{2}[\cos(720^0 - 45^0) + i \sin(720^0 - 45^0)] = \\ &= 4\sqrt{2}(\cos 45^0 - i \sin 45^0) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - 4i = 4(1-i); \end{aligned}$$

6) Kompleks sondan ildiz chiqarish. Ildiz chiqarish amali darajaga ko'tarish amaliga teskari amal. Kompleks sonning n – darajali ildiz $\sqrt[n]{z}$ deb, shunday z^* – kompleks songa aytiladiki, z^* ning n – darajasi z soniga tengdir, ya'ni $(z^*)^n = z$

Aytaylik, $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ va $z^* = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ bo'lsin.

Muavr formulasiga asosan $r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ bundan

$r = \rho^n, n\theta = \varphi + 2\pi\kappa$ ρ va θ ni topamiz.

Bu erda κ - istalgan butun son, $\sqrt[n]{r}$ - arifmetik ildiz. Demak,
 $\sqrt[n]{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi\kappa}{n})$; bu erda $\kappa = 0, 1, \dots, n-1$

Misol: $\sqrt[5]{1}$ ning ildizlarini toping.

Yechish: sonni trigonometrik ko'rinishda yozamiz. $z = 1$ bo'lib,
 $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$ bo'ladi.

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2\pi\kappa}{5} + i\sin\frac{2\pi\kappa}{5}.$$

$$\kappa = 0; z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$\kappa = 1; z_2 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ + i\sin 72^\circ = 0,309 + 0,951i$$

$$\kappa = 2; z_3 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = \cos 144^\circ + i\sin 144^\circ = -0,809 + 0,587i$$

$$\kappa = 3; z_4 = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5} = \cos 216^\circ + i\sin 216^\circ = -0,809 - 0,587i$$

$$\kappa = 4; z_5 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = \cos 288^\circ + i\sin 288^\circ = 0,309 + 0,951i$$

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kompleks sonlar ustida amallar bajarishni misollar yordamida tushuntiring.
2. Kompleks sonni darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish formulalarini keltirib chiqaring.