

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA‘LIM VAZIRLIGI**

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

Begmatov A.

OLIV MATEMATIKA KAFEDRASI

**Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda
to‘la differensialli tayenglamalar**

**amaliy mashg‘ulot darsida ilg‘or pedagogik texnologiyalarni qo‘llash
bo‘yicha uslubiy qo‘llanma**

SAMARQAND • 2011

A.Begmatov. Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to'la differensialli tenglamalar. Amaliy mashg'ulot darsida ilg'or pedagogik texnologiyalarni qo'llash bo'yicha uslubiy qo'llanma. SamISI. 2011. -22 b.

Taqrizchilar:

Husanov B. f-m.f.n., dotsent, Samarqand Davlat arxitektura va qurilish instituti;

Umarov T.I. SamISI, «Oliy matematika» kafedrası dotsenti.

Uslubiy qo'llanma „Oliy matematika” kafedrası majlisida muhokama etilgan va nashr etishga tavsiya qilingan(4-son bayonnoma, 24 mart, 2011 yil).

Ushbu uslubiy qo'llanmada **“Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to'la differensialli tayenglamalar”** mavzusi amaliy mashg'ulot darsida ilg'or pedagogik texnologiyalarni qo'llab o'qitish bo'yicha tavsiyalar ishlab chiqilgan. Qo'llanmadan **“Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to'la differensialli tayenglamalar”** mavzusi amaliy mashg'ulotini tashkil etish va o'tkazishda foydalanish mumkin.

Oliy matematika fanini ilg'or pedagogik texnologiyalarni qo'llab o'qitish bo'yicha umumiy ko'rsatmalar

O'zbekiston Respublikasi taraqqiyotida halqning boy ma'naviy salohiyati va umuminsoniy qadriyatlarga hamda hozirgi zamon madaniyati, iqtisodiyoti, ilmi, texnikasi va texnologiyasining so'nggi yutuqlariga asoslangan mukammal ta'lim tizimini barpo etish dolzarb ahamiyatga ega.

Ma'lumki, kadrlar tayyorlash Milliy dasturida ilg'or pedagogik texnologiyalarni joriy qilish va o'zlashtirish zarurligi ko'p marta takrorlanib, "...yangi pedagogik va axborot texnologiyalardan foydalanib, talabalarni o'qitishni jadallashtirish" ko'zda tutilgan.

Pedagogik texnologiyaga YUNESKOning bergan ta'rifini keltiramiz: "Pedagogik texnologiya – bu butun o'qitish va bilimlarni o'zlashtirish jarayonida o'z oldiga ta'lim shakllarini samaradorlashtirish vazifasini qo'yuvchi texnik hamda shaxs resurslari va ularning o'zaro aloqasini hisobga olib, bilimlarni yaratish, qo'llash (va belgilash)ning tizimli usulidir". Bu ta'rifdagi asosiy tushuncha "tizimli usul" bo'lib, aynan tizimli yondashuv pedagogik texnologiyaning, o'qitishga boshqa yondashuvlardan farqlanuvchi asosiy belgisi hisoblanadi. Ta'lim maqsadlari, uning mazmuni, o'qitish va ta'lim berish usullari, nazorat va natijalarni baholashni o'zaro bog'liklikda loyihalash- ko'pincha an'anaviy o'quv jarayonida yetishmaydigan narsadir.

Jaxon pedagogika fani ilmiy – texnika taraqqiyoti ta'sirini boshdan kechirib, psixologiya, kibernetika, tizimlar nazariyasi, boshqaruv nazariyasi va boshqa fanlar yutuqlarini birlashtirib, hozirgi davrda faol yangilanish (innovatsiya) jarayonlari bosqichida turar ekan, inson imkoniyatlarini samarali rivojlantirish amaliyotiga boy mahsul bermoqda.

Pedagogik texnologiya usullari (boshda) dastlab o'qitishning harakatini namunaviy vaziyatdagi (belgilangan qoida bo'yicha) o'zlashtirish talab etiladigan mahsuldor (reproduktiv) darajasi uchun ishlab chiqilgan. Mahsuldor ta'lim har qanday ta'limning zaruriy tarkibiy qismi hisoblanib, u insoniyat jamg'argan tajribani aniq o'quv fani doirasida o'zlashtirish bilan bog'liq. Ta'lim oluvchilarda bilim va ko'nikmalarning ma'lum "poydevori" hosil qilingandan keyingina ta'limning natijali (produktiv) va ijodiy yondashish usullariga ko'chish mumkin. Pedagogik texnologiya oqimi 70-80 yillarda AQShda yuzaga keldi va YUNESKO kabi nufuzli tashkilot tomonidan tan olindi va qo'llab – quvvatlandi va hozirgi kunda ko'pgina mamlakatlarda muvaffaqiyatli o'zlashtirilmoqda.

Ma'lumki, tubdan farq qiluvchi uchta ta'lim turlarini ajratish mumkin. Bular: og'zaki- ko'rgazmali, texnologik va izlanuvchan-ijodiy ta'lim turlari hisoblanadi.

1. Og'zaki – ko'rgazmali an'anaviy bo'lib, o'qituvchining axborot berishi, talabalarning bilimlarni qabul qilishi, to'plashi va xotirasida saqlashi bilan belgilanadi. Ta'limda og'zaki-ko'rgazmali yondashuv juda katta tajribaga ega

bo'lib, qismlarga ajratib ishlab chiqilgan va ta'lim tizimida ulkan xizmat ko'rsatdi. Jadal suratlar bilan o'sib borayotgan fan va texnika talablari, ta'lim tizimidagi istlohatlar, raqobotbardosh kadrlar tayyorlash, shaxsni rivojlantirish, uning ma'lumot olish istaklarini to'laroq qondirishga bo'lgan jamiyat ehtiyojlari o'qitish usullariga yangicha yondashishni talab qilmoqda.

2. Tal'imga texnologik yondashuvning umumiy tavsifnomasi (qismlarga ajratilmagan holda), ta'limning juda oddiy mahsuldor darajasi sifati misolida qaraladi. O'quv ishlari yuqori natijalarga erishishga qaratilgan bo'lib, yo'naltirilganlik, mashg'ul bo'lish, musobaqalashish va o'zaro yordamlashish tushunchalari mavjud bo'ladi.

3. Izlanuvchan yondashuvdagi maqsad, talabalarda muammoni hal etish, yangi, oxirigacha tugallanmagan tajribani o'zlashtirish, ta'sir etishning yangi yo'llarini yaratish qobiliyatlarini, shaxsiy idrokni rivojlantirishdan iboratdir.

Izlanuvchan ta'lim andozasining ta'lim mazmuni, tabiat va jamiyat bilan o'zaro ta'siri natijasida shaxsda tadqiqotchilik va jadal ijodiy harakterli faoliyat yo'li boshlanadi.

O'quv jarayonining texnologik shakl modeli va uning amaliy tadbiqu yangilik xususiyatiga ega bo'lib, an'anaviy ta'limni qayta shakllantiradi. "Pedagogik texnologiya" so'z birikmasi asosida "Texnologiya", "Texnologik jarayon" tushunchasi yotadi. Bu tushuncha orqali sanoatda tayyor mahsulotni olish uchun bajariladigan ishlarning ketma – ketligi haqidagi hujjat, ta'limda esa fan bo'yicha uslubiy tadbirlar majmuasi tushuniladi.

Pedagogik texnologiyada asosiy yo'l aniq belgilangan maqsadlarga qaratilganlik, ta'lim oluvchi bilan muntazam o'zaro aloqani o'rnatish, pedagogik texnologiyaning falsafiy asosi hisoblangan ta'lim oluvchining xatti – harakati orqali o'qitishdir. O'zaro aloqa pedagogik texnologiya asosini tashkil qilib, o'quv jarayonini to'liq qamrab olish kerak.

Pedagogik texnologiyada nazarda tutiladigan maqsadlarni qo'yish usuli, o'qitish maqsadlari o'quvchilar harakatida ifodalanadigan va aniq ko'rinadigan hamda o'lchanadigan natijalar orqali belgilanadi. Maqsadlar o'qituvchining faoliyatidan kelib chiqqan holda o'rgatish, tushuntirish, ko'rsatish, aytib berish va hokazo atamalar orqali qo'yiladi. O'quvchining harakatlarida ifodalanadigan vazifalar esa ta'limining natijalarda ifodalanadi. Natija, talabaning tugallangan xatti –harakatini ifodalovchi keltirib chiqaring, sanab o'ting, so'zlab bering, tanlang, ko'rsatib bering, hisoblang kabi atamalar bilan ifodalanishi kerak.

Shunday qilib, an'anaviy o'quv jarayonlarida asosiy omil – bu pedagog va uning faoliyati hisoblansa, pedagogik texnologiyada birinchi o'ringa o'qish jarayonidagi o'quvchilarning faoliyati qo'yiladi. Harbir vazifa raqamlanib, u bitta natijani ko'zlashi lozim. Har bir vazifani shunday qo'yish kerakki, u o'qituvchining o'tadigan darsining bosqichlarini emas, balki, talabaning o'zini keyin qanday tutishi kerakligiga ishora qilsin.

Ma'lumki, ilg'or texnologiyalarni qo'llashda asosiy e'tibor loyihalash bosqichiga qaratiladi, bunday tizimli yondoshuv asosida o'quv jarayonini loyihalash, kutilayotgan natija shaklidagi o'quv maqsadlarini mumkin qadar aniqlashtirish, rejalashtirilgan o'quv maqsadlariga kafolatli erishishga undaydi.

Mavzuni o'rganishning taxminiy bosqichlari quyidagilardan iborat deb bilamiz: 1) mavzu va uning rejasi beriladi; 2) o'quv faoliyati natijalari eslatiladi; 3) mavzuni uning ahamiyatga qisqa to'xtalinadi; 4) mavzuni tushuntirish ketma – ketligi texnologik loyiha asosida o'qituvchi maqsadiga mos kelishi lozim; 5) talabalar diqqatini jalb etib, mavzu savollari haqida muammoli vaziyatlar hosil qilish; 6) tushuntirish jarayonida o'quv adabiyotlari yoki tarqatma material bilan ishlashga ahamiyat beriladi; 7) talabaning tarqatma material yoki o'quv adabiyotlardan asosiy tushunchalarni o'qish va yozishni tashkil etishga imkoniyat yaratish; 8) mavzuni o'rganish darajasini tekshirish, talabalarga og'zaki savollar berib borish orqali, (masalan, analitik geometriya tushunchasining mohiyati nima?); 9) talabalar javoblariga izoh berish yoki to'ldirish, to'g'ri javoblarni rag'batlantirish; 10) egallangan bilimlarni tekshirish va baholash; bunda tayyorlangan savollar hamma talabalarga tarqatiladi. Savollarga javob berish uchun muayan (masalan, 10 minut) vaqt beriladi. Berilgan savol varaqlari yig'ishtirib olingach, savollar oldindan tayyorlab qo'yilgan javoblar bilan solishtirib tekshiriladi. To'g'ri javoblar ekranda ko'rsatiladi yoki doskaga ilinadi. Har bir talaba o'zlarning bilimlarini o'zlari tekshirib ko'radilar va baholaydilar baholash reyting tizimida bo'ladi, o'qituvchi talabalar javoblariga munosabat bildiradi. Yuqori baholanganlar rag'batlantiriladi va kam baho olganlarga tanbeh bermasdan, ularni o'qish – o'rganishga da'vat etiladi; 11) egallangan bilimlarni yanada mustahkamlash va mustaqil ishlash ko'nikmasini hosil qilish maqsadida uyga vazifa beriladi. Bunda beriladigan vazifa aniq bo'lishi, berilgan vazifaning bajarilish shakli (referat, konspekt qilish, misol va masalalarni yechish) aniq bo'lishi zarur.

“ Oliy matematika” fanini, o'rganishda ushbularga erishishni maqsad qilib olinadi:

- 1) matematikaning hozirgi zamon taraqqiyotidagi o'rni va ahamiyati anglash;
- 2) o'quvchining matematik apparatning qo'llanilishiga qiziqishi;
- 3) amaldagi dastur asosida matematik apparatni o'rgatish;
- 4) ayrim masalalarning matematik modellarini tuza bilish va uni tahlil qilish;
- 5) matematik fikrlash va xulosa chiqarish;
- 6) matematik bilimlarni chuqurlashtirishga yo'naltirib, bu bilimlarni o'z faoliyatida qo'llash.

Shuni ta'kidlaymizki, „Oliy matematika“ fani oliy ta'limda asosiy tayanch fan ekanligi, uning usullari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, informatika, chiziqli va nochiziqli dasturlash, makro va mikro iqtisod, ekonometriya, iqtisodiy tahlil, moliyaning miqdoriy metodlari, logistika va boshqa fanlarning asosiy bilimlarini egallashda muhim qurol sifatida ishlatilishi e'tiborga olinadi.

Biz ushbu uslubiy qo'llanmada „Oliy matematika“ fanining **“Birinchii tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to'la differensialli tayenglamalar”** amaliy mashg'ulot darsida ilg'or pedagogik texnologiyalarni qo'llab, o'qitish-o'rgatish haqida fikr yuritamiz.

1.1. “Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to’la differensialli tayenglamalar” mavzusi bo’yicha amaliy mashg’ulotining ta’lim texnologiyasi modeli

40(19)-mavzu	Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to’la differensialli tayenglamalar
Vaqt-2soat	Talabalar soni: 25 nafardan oshmasligi kerak
O’quv mashg’uloti shakli	Individual topshiriqlarni bajarishga asoslangan amaliy mashg’ulot.
Mashg’ulot rejasi	1.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga oid misollar yechish. 2. Bernulli tenglamasini yechish. 3. Rikkati tenglamasini yechish. 4.To’la differensialli tenglamalar yechimini va integrallovchi ko’paytuvchilarni topish.
Asosiy tushuncha va atamalar	Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi, to’la differensialli tenglama, integrallovchi ko’paytuvchi.
Amaliy mashg’ulotining maqsadi	Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to’la differensialli tayenglamalar haqidagi bilimlarni mustahkamlash va ularni chuqurlashtirish.
Pedagogik vazifalar	O’quv faoliyati natijalari
1.Mavzu bo’yicha bilimlarni tizimlashtirish, mustahkamlash. 2.O’quv materiallari bilan ishlash ko’nikmalarini hosil qilish. 3.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga oid misollar yechishni satish. 4.Bernulli tenglamasini yechishni tushuntirish. 5. Rikkati tenglamasi yechimini xususiy hollarda topishni ko’rsatish. 6.To’la differensialli tenglamalar yechimini va integrallovchi ko’paytuvchilarni	1. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga oid misollar yechishni bilishi. 2.Bernulli tenglamasini yechishni misollarda ko’rsata bilish. 3.Rikkati tenglamasining yechimini xususiy hollarda topishni bilish. 4.To’la differensialli tenglamalar yechimini topishni bilish. 5.Integrallovchi ko’paytuvchini topishga misollar yecha bilish.

topishga misollar yechishni tushuntirish.	
Ta'lim usuli va texnikasi	Amaliy mashg'uloti, tezkor-so'rov, aqliy hujum, insert, suhbat, munozara.
Ta'lim shakli	Frontal, jamoaviy(guruhli).
Ta'lim vositalari	Ma'ruza matni, o'quv topshiriqlar varaqalari, amaliy mashg'ulot bo'yicha o'quv materiallari, proektor, axborot texnologiyalari vositalari.
Ta'lim berish sharoiti	Maxsus texnika vositalari bilan jihozlangan, guruhli shaklda ishlashga mo'ljallangan auditoriya
Manitoring va baholash	Og'zaki so'rov, kuzatish.

1.2. “Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to'la differensialli tayenglamalar” mavzusi bo'yicha amaliy mashg'ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Ta'lim beruvchi	Ta'lim oluvchilar
1-bosqich. Mavzuga kirish (15 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsadi va o'quv faoliyati natijalari bilan tanishtiriladi. 1.2. Talabalar o'quv faoliyatini baholash mezonlari bilan tanishtiriladi(1-ilova). 1.3. Talabalarning darsga tayyorgarlik darajasini aniqlash, bilimlarini faollashtirish maqsadida tezkor-savollar o'tkaziladi(2-ilova, insert, B/Bx/Bo (Bilaman / Bilishni xoxlayman / Bilib oldim)): Mavzu mazmunining muhokamasi guruhlarda davom etishi e'lon qilinadi.	Tinglaydilar. yozib oladilar. Aniqlashtiradilar, savollar beradilar. Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
2- Asosiy bosqich.(50-daqiqa)	2.1.Talabalarni 4 ta o'quv guruhiga bo'linadi. va har biriga vazifalar beradi(3-ilova). Guruhlarda o'quv vazifasini bajarish bo'yicha ishni tashkil qiladi. Mavzu bo'yicha tarqatma material tarqatiladi(4-ilova). O'quv faoliyati natijalarini eslatadi. Vazifani bajarishda o'quv materiallaridan foydalanish mumkinligini eslatadi. Berilgan topshiriqlarni har bir guruh lideri bittadan doskada izohlashga, ya'ni prezentatsiyaga tayyorlashni so'raydi. 2.2.Taqdimot boshlanishini e'lon qiladi. Taqdimot vaqtida javoblarga izoh beradi, to'g'ri e'chimlarga e'tibor beradi, xatolarni	Tinglaydilar; Guruhlarda ishlaydilar, misol va masalalarni daftarda echadilar, savollar beradilar. Guruh liderlari topshiriqlar javoblarini

	ko'rsatadi. Talabalar bilan birgalikda javoblar to'g'riligini baholaydi, savollarga javob beradi. 2.3. Guruhlar bajargan ishlari bo'yicha o'z-o'zini baholaydilar va tekshiradilar. 2.4. Javoblarni to'ldiradi va qisqacha xulosalar qiladi.	aytadilar. Liderlar o'z guruhlarida baholash o'tkazadilar. Tinglaydilar.
3- bosqich, yakuniy(15 daqiqa)	3.1. Mavzu bo'yicha talabalarda yuzaga kelgan savollarga javob beradi, yakunlovchi xulosa qiladi. 3.2. Mashg'ulotda maqsadga erishishdagi, talabalar faoliyati tahlil qilinadi va baholanadi(5-ilova). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar beriladi(6-ilova) va uning baholash mezonlari aytiladi.	Savol beradilar; tinglaydilar. Tinglaydilar; Topshiriqlarni yozadilar.

40.1-ilova

Har bir mashg'ulot 0,5 balldan 2 ballgacha baholanadi.

Guruxlarning ish natijalarini baholovchi me'zonlari

Me'zonlar	Ball	%	Gurux natijalari bahosi			
			1	2	3	4
Axborotning to'liqligi	1,0	50				
Illyustratsiya (grafik tarzda taqdim etish)	0,6	30				
Gurux faolligi (qo'shimcha, berilgan savol, javoblarning soni)	0,4	20				
JAMI	2	100				

86-100% / – “a'lo”

71-85% / – “yaxshi”

55-70% / – “qoniqarli”

0-54%-- “qoniqarsiz”.

40. 2-ilova

Insert texnikasini qo'llagan holda ish yuritish qoidalari

1. Matnni o'qing.
2. Matn qatorlariga qalam bilan beligilar qo'yib, olingan ma'lumotni tizimlashtiring:

- V - ... haqida mavjud bo'lgan bilimlar (ma'lumotlar) mos keladi
 - (minus) - ... haqidagi mavjud bilimlarga e'tiroz bildiradi.
 + (plyus) - yangi ma'lumotlar hisoblanadi.
 ? - tushunarsiz / aniqlik / qo'shimcha ma'lumot talab qiladi

B/Bx/Bo texnikasini qo'llagan holda ish yuritish qoidalari

1. "Insert" texnikasidan foydalanib matnni o'qing.
2. Olingan ma'lumotlarni tizimlashtiring – matnga qo'yilgan belgilar asosida tablitsa qatorlarini to'ldirib chiqing.

B/Bx/Bo (Bilaman / Bilishni xoxlayman / Bilib oldim)

№	Mavzu savollari	Bilaman (Q)	Bilishni xoxlayman (?)	Bilib oldim
1	Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar qanday ko'rinishda bo'ladi?			
2	Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar umumiy qanday topiladi?			
3	Bernulli tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?			
4	Bernulli tenglamasi qanday almashtirish orqali birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga keltiriladi?			
5	Rikkati tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?			
6	Rikkati tenglamasining bitta xususiy yechimi $y = \varphi(x)$ ma'lum bo'lsa, bu tenglama yechimi qanday topiladi?			
7	Qanday differensial tenglamaga to'la differensialli tenglama deyiladi?			
8	To'la differensialli tenglama bo'lishi uchun qanday tenglik bajarilishi kerak?			
9	Integrallavchi ko'paytuvchi deb qanday funksiyaga aytiladi?			
10	Integrallavchi ko'paytuvchi qanday topiladi?			

40.3-ilova

Kichik guruhlarda ishlash qoidasi

1. Talabalar ishni bajarish uchun zarur bilim va malakalarga ega bo'lmog'i lozim.
2. Guruhlarga aniq topshiriqlar berilmog'i lozim.

3. Kichik guruh oldiga qo'yilgan topshiriqni bajarish uchun yetarli vaqt ajratiladi.
4. Guruhlardagi fikrlar chegaralanmaganligi va tazyiqqa uchramasligi haqida ogohlantirilishi zarur.
5. Guruh ish natijalarini qanday taqdim etishini aniq bilish-lari, o'qituvchi ularga yo'riqnoma berishi lozim.
6. Nima bo'lganda ham muloqotda bo'ling, o'z fikringizni erkin namoyon eting.

Guruhlarga beriladigan o'quv topshiriqlari

1-varaqa

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y' - \frac{y}{x} = -1$; 2) $y' + y = e^{-x}$.

2. $xy' + y = 3$ differensial tenglamaning $x=1$ da $y=1$ bo'ladigan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping

3. $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x=-1$ bo'lganda $y=1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

4. Ushbu $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$ to'la differensialli tenglamalarning umumiy yechimini toping.

5. $(x^2 - y)dx + xdy = 0$ differensial tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchini toping va tenglamaning umumiy yechimini aniqlang.

2-varaq

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $x^2y' - 2xy = 3$; 2) $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$.

2. $(1+x^2)y' - xy = 2x$ differensial tenglamaning $x=0$ da $y=0$ bo'ladigan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

3. $y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^3}$ differensial tenglamaning $x=-1$ bo'lganda $y=1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

4. Ushbu $(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy = 0$ to'la differensialli tenglamaning umumiy yechimini toping.

5. $(y + xy^2)dx - xdy = 0$ differensial tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchini toping va tenglamaning umumiy yechimini aniqlang.

3-varaqa

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $(a^2 + x^2)y' + xy = 1$; 2) $(2x + 1)y' + y = x$.

2. $xy' + y = x + 1$ differensial tenglamaning $x = 2$ da $y = 3$ bo'ladigan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

3. $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^3}{x^2}$ differensial tenglamaning $x = -1$ bo'lganda $y = 1$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

4. Ushbu $2(3xy^2 + 2x^2)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$ to'la differensialli tenglamaning umumiy yechimini toping.

5. $y^2 dx + (xy - 1)dy = 0$ differensial tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchini toping va tenglamaning umumiy yechimini aniqlang.

4-varaqa

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y' - y \tan x = \cot x$; 2) $y' + y \cos x = \sin 2x$.

2. $xy' - y = 5$ differensial tenglamaning $x = 2$ da $y = 3$ bo'ladigan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

3. 1) $y' + \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2}$ differensial tenglamaning $x = 3$ bo'lganda $y = 4$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

4. Ushbu $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$ to'la differensialli tenglamaning umumiy yechimini toping.

5. $(\sin x + a^y)dx + \cos x dy = 0$ differensial tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchini toping va tenglamaning umumiy yechimini aniqlang.

40.4-ilova

“Birinchi tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to'la differensialli tayenglamalar” mavzusi bo'yicha tarqatma material

1. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Bunday tenglama

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x)$$

ko'rinishda bo'lib, $p(x)$ va $g(x)$ lar berilgan funksiyalar. Bunday tenglamani yechish uchun $z = u(x)y$ almashtirish olib

$$\frac{dz}{dx} + \left[p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \right] z = g(x)u(x) \quad (1)$$

tenglamani hosil qilamiz. $u(x)$ funksiyani shunday tanlaymizki,

$$p(x) - \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 0$$

bo'lsin. Bundan $u(x) = e^{\int p(x)dx}$ bo'lib, bu holda (1) tenglama

$$\frac{dz}{dx} = g(x)e^{\int p(x)dx} + C$$

ko'rinishda bo'ladi. Bevosita integrallasak

$$z = \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

hosil bo'ladi.

Endi izlanayotgan y funksiyaga qaytib

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int g(x)e^{\int p(x)dx} dx \right] \quad (2)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

1-misol. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama birinchi tartibli chiziqli tenglama bo'lib $p(x) = x$, $g(x) = x$ ligini hisobga olib (2) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int x dx} \left[C + \int x \cdot e^{\int x dx} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} dx \right] = e^{-\frac{x^2}{2}} \left[C + \int \cdot e^{\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x^2}{2}\right) \right] \\ &= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C \right). \quad y = e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} + C \right). \end{aligned}$$

umumiy yechim bo'ladi.

2. Bernulli tenglamasi.

Bunday differensial tenglama

$$y' + p(x)y = y^n g(x)$$

inishda bo'ladi. Bu tenglamada $n=0$ yoki $n=1$ bo'lsa, chiziqli tenglama bo'ladi. Demak $n \neq 0,1$ bo'lgan, o'zgarmas. Bernulli tenglamasini y^n o'lib,

$$\frac{y'}{y^n} + p(x)\frac{1}{y^{n-1}} = g(x), \quad \frac{1}{y^{n-1}} = z$$

almashtirish bajarsak,

$$z' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y'$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = g(x) \text{ yoki } z' + (1-n)p(x)z = (1-n)g(x)$$

birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama hosil bo'ladi.

2-misol. $y' + xy = xy^3$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani y^3 bo'lib,

$$\frac{y'}{y^3} + x\frac{1}{y^2} = x$$

tenglamani hosil qilamiz. $\frac{1}{y^2} = z$ almashtirish olsak $z' = \frac{2y'}{y^3}$ bo'ladi.

Bularni tenglamaga qo'yib,

$$\frac{z'}{2} + xz = x, \quad z' - 2xz = -2x$$

chiziqli tenglamaga kelimiz. Bu tenglamaning umumiy yechimini (6) formulaga asosan topish mumkin:

$$z = e^{\int x dx} \left[C + \int (-2x)e^{-2\int x dx} dx \right] = e^{x^2} \left[C - \int 2xe^{-x^2} dx \right] =$$

$$e^{x^2} \left[C + \int e^{-x^2} d(-x^2) \right] = e^{x^2} \left[C + e^{-x^2} \right] = Ce^{x^2} + 1.$$

Shunday qilib

$$z = C \cdot e^{x^2} + 1$$

bo'ladi, z ning o'rniga $\frac{1}{y^2}$ ni qo'yib,

$$\frac{1}{y^2} = C \cdot e^{x^2} + 1, \quad y^2 = \frac{1}{Ce^{x^2} + 1},$$

yechimni olamiz. Bu berilgan Bernulli tenglamasining umumiy yechimi bo'ladi.

3. Rikkati tenglamasi.

Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (4)$$

ko'rinishdagi differensial tenglamaga Rikkati tenglamasi deyiladi. Bunda $a(x), b(x), c(x)$ funksiyalar biror intervalda aniqlangan uzluksiz funksiyalar. (4) tenglamada $a(x) = 0$ bo'lsa, chiziqli tenglama, $c(x) = 0$ bo'lsa, Bernulli tenglamasi kelib chiqadi.

Umuman olganda Rikkati tenglamasi yechimini elementar funksiya va ularning integrallari yordamida yechib(kvadraturada integrallab) bo'lmaydi.

Ushbu xususiy holni qaraymiz: Rikkati tenglamasining bitta xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, bu tenglama yechimi kvadraturalarda integrallanadi. $y = \varphi(x)$ Rikkati tenglamasining biror xususiy yechimi bo'lsin. $y = \varphi(x) + z$ almashtirish bajaramiz: bu holda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

bo'lib, (4) tenglama

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{dz}{dx} = a(x)[\varphi(x) + z]^2 + b(x)[\varphi(x) + z] + c(x)$$

ko'rinishda bo'ladi. Oxirgi tenglikdan, $y = \varphi(x)$ (4) tenglama yechimi, ya'ni

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a(x)[\varphi(x)]^2 + b(x)\varphi(x) + c(x)$$

ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{dz}{dx} = [2a(x)\varphi(x) + b(x)]z + a(x)z^2$$

tenglama hosil bo'lib, bu Bernulli tenglamasidir. Bunday differensial tenglamaning umumiy yechimini qanday topishni yuqorida o'rgandik.

3- misol. Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 2xy + (5 - x^2)$$

Rikkati tenglamasining umumiy yechimini toping.

Yechish. Bu tenglamaning xususiy yechimini $y = \varphi(x) = ax + b$ ko'rinishda izlash maqsadga muvofiq, bu holda

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = a, \quad a = -(ax + b)^2 + 2x(ax + b) + 5 - x^2$$

bo'lib, bir xil darajali x lar koeffitsiyentlarini tenglashtirsak $a = 1, b = \pm 2$ kelib chiqadi.

Demak, $\varphi(x) = x + 2, \varphi(x) = x - 2$ xususiy yechimlar bo'ladi.

$\varphi(x) = x + 2$ xususiy yechim uchun Bernulli tenglamasi

$$\frac{dz}{dx} = -4z - z^2$$

bo'lib, uning umumiy yechimi

$$y = x + 2 + \frac{4}{C e^{4x} - 1}$$

bo'ladi.

4. To'la differensialli tenglamalar.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaning chap qismi biror $u(x, y)$ funksiyaning to'liq differensialli, ya'ni

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

bo'lsa, bunday tenglama to'la differensialli tenglama deyiladi.(1)
tenglama to'la differensialli tenglama bo'lishi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

shart bajarilishi kerak. To'la differensialli tenglama ta'rifidan $du = 0$ bo'lib, bundan $u(x, y) = C$ kelib chiqadi (C ixtiyoriy o'zgarmas). $u(x, y)$ funksiyani topish uchun y ni o'zgarmas deb hisoblaymiz, u holda $dy = 0$ ekanligidan $du = M(x, y)dx$ bo'ladi. Oxirgi tenglikni x bo'yicha integrallasak,

$$u = \int M(x, y)dx + \varphi(y)$$

tenglik hosil bo'ladi. Oxirgi tenglikni y bo'yicha differensiallaymiz va natijani $N(x, y)$ ga tenglaymiz, chunki $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ edi.

$$\int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

yoki

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni y bo'yicha integrallab, $\varphi(y)$ ni topamiz:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C$$

Shunday qilib,

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

1-misol. Ushbu

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2y}{x^3} dy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to'la differensialli bo'lish yoki bo'lmasligini tekshiramiz: berilgan tenglamada

$$M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}, N = \frac{2y}{x^3}$$

bo'lganligi uchun

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-6y}{x^4}, \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{-6y}{x^4}$$

bo'lib,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

bo'ladi, ya'ni berilgan differensial tenglama to'la differensialli tenglamadir. Demak, berilgan tenglamaning chap tomoni biror $u(x, y)$ funksiyaning to'liq differensialli bo'ladi. Endi $u(x, y)$ funksiyaning topamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = \frac{x^2 - 3y^2}{x^4}$$

bo'lganligi uchun

$$u = \int \frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \varphi(y) = \int (x^{-2} - 3y^2 x^{-4}) dx + \varphi(y) = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + \varphi(y)$$

(2)

bo'lib, bunda $\varphi(y)$ hozircha noma'lum funksiya. Oxirgi tenglikni y bo'yicha differensiallab,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{2y}{x^3}$$

ekanligini hisobga olib,

$$\frac{2y}{x^3} + \varphi'(y) = \frac{2y}{x^3}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan $\varphi'(y) = 0$ bo'lib,

$$\varphi(y) = C_1.$$

bo'ladi. (2) tenglikdan

$$u = -\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1$$

Shunday qilib, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$du = d\left(-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1\right) = 0$$

bo'lganligi uchun

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} + C_1 = C_2$$

bo'lib, yoki

$$-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$$

bo'ladi, bunda $C = C_2 - C_1$.

5. Integrallovchi ko'paytuvchi.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

differentensial tenglamaning o'ng tomoni biror funksiyaning to'la differentiali bo'lgan holni qaradik. Bu tenglamaning o'ng tomoni biror funksiyaning to'la differentiali bo'lmasin. Ayrim hollarda shunday $\mu(x, y)$ funksiyaning tanlab olishi mumkin bo'ladi, berilgan tenglamani shu funksiya ko'paytirilganda, uning chap tomoni biror funksiyaning to'la differentiali bo'lishi mumkin. Hosil qilingan differentensial tenglamaning umumiy yechimi bilan dastlabki berilgan tenglamaning umumiy yechimi bir xil bo'ladi. Bunday $\mu(x, y)$ funksiya berilgan tenglamaning integrallavchi ko'paytuvchisi deyiladi. Integrallovchi ko'paytuvchini topish uchun, berilgan tenglamani hozircha noma'lum bo'lgan μ ga ko'paytirib,

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

tenglamani olamiz. Oxirgi tenglama to'la differentiali bo'lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Bundan

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

bo'lib,

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right)$$

bo'ladi. Oxirgi tenglamani μ ga bo'lak,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\mu \partial y}$$

bo'lganligi uchun

$$M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

bo'ladi.

Umumiy holda μ x, y larga bog'liq, ya'ni $\mu(x, y)$. Berilgan tenglama faqat x ga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsa, $\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = 0$ bo'lib,

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{yoki} \quad \frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

(4)

bo'ladi. Differensial tenglama faqat y o'zgaruvchiga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsa, $\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = 0$ bo'lib,

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

(5)

bo'ladi. Bu hollarda (4) va (5) tengliklarni bevosita integrallab

$$\mu = e^{\int \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) / N dx}, \quad \mu = e^{\int \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) / M dy}$$

integrallovchi ko'paytuvchini topamiz. Bunda (4) va (5) nisbatlar, birinchi holda y o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan, ikkinchi holda x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan integrallovchi ko'paytuvchilarning mavjudligini bildiradi.

2-misol.

$$(x^2 - 3y^2) dx + 2xy dy = 0$$

differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning to'la differensialli yoki to'la differensialli

emasligini tekshiramiz. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ shartni tekshiraylik:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (x^2 - 3y^2)'_y = -6y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = (2xy)'_x = 2y.$$

Demak, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajarilmaydi. (4) nisbatni qaraymiz:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{-6y - 2y}{2xy} = -\frac{4}{x}$$

bo'lib,

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = -\frac{4}{x}$$

bo'ladi. Oxirgi tenglikni integrallasak,

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = e^{-4 \ln x} = e^{\ln x^{-4}} = \frac{1}{x^4}$$

hosil bo'ladi. Berilgan tenglamani $\mu(x) = \frac{1}{x^4}$ funksiyaga ko'paytirsak,

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2xy}{x^4} dy = 0$$

bo'lib, keyingi tenglama uchun $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ tenglik bajariladi, ya'ni oxirgi differensial tenglama to'la differensialli tenglamadir. Bunday differensial tenglamalarning yechimini topishni yuqorida o'rgandik.

40.5-ilova

“Birinchii tartibli chiziqli, Bernulli va Rikkati hamda to'la differensialli tayenglamalar” mavzusi bo'yicha ttst topshiriqlari

I darajali testlar

1. Chiziqli differensial tenglama deb nimaga aytiladi?

- A) noma'lum funksiya va uning hosilalari birinchi tartibli bo'lgan differensial tenglamaga
- B) hosilalari birinchi tartibli bo'lgan differensial tenglamaga
- D) noma'lum funksiya y birinchi darajada bo'lgan tenglamaga
- E) noma'lum x - birinchi darajada bo'lgan tenglamaga

2. Koshi masalasi nima?

- A) differensial tenglamaga boshlang'ich shartlar sistemasi qo'yilganda uni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish
- B) birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish
- D) umumiy yechimdan olinadigan biror xususiy yechim

E) differensial tenglamani qanoatlantiruvchi umumiy yechimni topish

3. Bernulli tenglamasini toping.

A) $y'x + y = -xy^2$

B) $y'x + y = -x$

D) $y'x + y = -x^2$

E) $y'x + y = -3$

4. $y' + xy = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

A) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} (xe^{\frac{x^2}{2}} + C)$

B) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} (x^2 e^{\frac{x^2}{2}} + C)$

D) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} (4x - e^{\frac{x^2}{2}} + C)$

E) $y = e^{-\frac{x^2}{2}} (e^{\frac{x^2}{2}} + C)$

II darajali testlar

5. $y' + xy = xy^3$ Bernulli differensial tenglamasining umumiy yechimini toping.

A) $y^2 = \frac{3}{Ce^{x^2} + x}$

B) $y^2 = \frac{5}{Ce^{x^2} + x^2}$

D) $y^2 = \frac{7}{Ce^{x^2} - 4x}$

E) $y^2 = \frac{1}{Ce^{x^2} + 1}$

6. Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = -y^2 + 2xy + (5 - x^2)$$

Rikkati tenglamasining umumiy yechimini toping.

A) $y = x + 2 + \frac{4}{C\hat{a}^{4X} - 1}$

B) $y = x + 2 - \frac{7}{C\hat{a}^{4X} - 3x}$

D) $y = x + 2 + \frac{5}{C\hat{a}^{4\div} - 1}$

E) $y = x + 2 - \frac{8}{C\hat{a}^{4X} - 7x}$

III darajali testlar

7. Ushbu

$$\frac{x^2 - 3y^2}{x^4} dx + \frac{2y}{x^3} dy = 0$$

to'la differensialli tenglamaning umumiy yechimini toping.

A) $\frac{1}{x} - \frac{y}{x^3} = \tilde{N}$

B) $-\frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^3} = C$

D) $\frac{4}{x^2} + \frac{y^2}{x^3} = \tilde{N}$

E) $\frac{5}{x} + \frac{y^2}{x^3} = \tilde{N}$

8. $y' + \frac{1}{x}y = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

A) $y = \frac{1}{x} \left(2 + \frac{x^2}{2} \right)$

B) $y = \frac{1}{x} \left(C - \frac{x^2}{2} \right)$

D) $y = \frac{1}{x} \left(C + \frac{x^2}{2} \right)$

E) $y = -\frac{1}{x} \left(C + \frac{x^2}{2} \right)$

40.6-ilova

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $y' - y \tan x = \cot x$; 2) $y' + y \cos x = \sin 2x$.

2. $(1 - x^2)y' - xy = 2x$ differensial tenglamaning $x = 2$ bo'lganda $y = 3$ bo'ladigan xususiy yechimini toping.

3. $y' + \frac{y}{3} = \frac{x+1}{3y^5}$ tenglama uchun $x = 1$ bo'lganda $y = -1$ boshlang'ich shart bajariladigan Koshi masalasini yeching.

4. Ushbu to'la differensialli tenglamalarning umumiy yechimlarini toping:

1) $(3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$; 2) $3x^2 \hat{a}^y dx + (x^3 \hat{a}^y - 1)dy = 0$.

5. Quyidagi differensial tenglamalar uchun integrallovchi ko'paytuvchilarni toping va tenglamalarning umumiy yechimlarini aniqlang:

1) $(x \cos y - y \sin y)dx + (x \sin y + y \cos y)dy = 0$; 2) $2xtgx \, dx + (x^2 - 2 \sin y)dy = 0$.