O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI

Begmatov A.

OLIY MATEMATIKA KAFEDRASI

Differensial hisobning tatbiqlari

amaliy mashg‘ulot darsida ilg’or pedagogik texnologiyalarni qo’llash bo’yicha uslubiy qo’llanma

SAMARQAND • 2011

A.Begmatov. Differensial hisobning tatbiqlari. Amaliy mashg'ulot darsida ilg'or pedagogik texnologiyalarni qo'llash bo'yicha uslubiy qo'llanma. SamISI. 2011. -34 b.

Taqrizchilar:
Husanov B. f-m.f.n., dotsent, Samarqand Davlat arxitektura va qurilish instituti;
Umarov T.I. SamISI, «Oliy matematika» kafedrasi dotsenti.

Uslubiy qo'llanma „Oliy matematika'' kafedrasi majlisida muhokama etilgan va nashr etishga tavsiya qilingan(4-son bayonnoma, 24 mart, 2011 yil).

Ushbu uslubiy qo'llanmada "**Differensial hisobning tatbiqlari "** mavzusi amaliy mashg'ulot darsida ilg'or pedagogik texnologiyalarni qo'llab o'qitish bo'yicha tavsiyalar ishlab chiqilgan. Qo'llanmadan "**Differensial hisobning tatbiqlari"** mavzusi amaliy mashg'ulotini tashkil etish va o'tkazishda foydalanish mumkin.

Oliy matematika fanini ilg‘or pedagogik texnologiyalarni qo‘llab o‘qitish bo‘yicha umumiy ko‘rsatmalar

O‘zbekiston Respublikasi taraqqiyotida halqning boy ma’naviy salohiyati va umuminsoniy qadriyatlarga hamda hozirgi zamon madaniyati, iqtisodiyoti, ilmi, texnikasi va texnologiyasining so‘nggi yutuqlariga asoslangan mukammal ta’lim tizimini barpo etish dolzarb ahamiyatga ega.

Ma’lumki, kadrlar tayyorlash Milliy dasturida ilg‘or pedagogik texnologiyalarni joriy qilish va o‘zlashtirish zarurligi ko‘p marta takrorlanib, ”...yangi pedagogik va axborot texnologiyalardan foydalanib, talabalarni o‘qitishni jadallashtirish” ko‘zda tutilgan.

Pedagogik texnologiyaga YUNESKOning bergan ta’rifini keltiramiz:
“Pedagogik texnologiya – bu butun o‘qitish va bilimlarni o‘zlashtirish jarayonida o‘z oldiga ta’lim shakllarini samaradorlashtirish vazifasini qo‘yuuvchi texnik hamda shaxs resurslari va ularning o‘zaro aloqasini hisobga olib, bilimlarni yaratish, qo‘llash (va belgilash)ning tizimli usulidir”. Bu ta’rifdagi asosiy tushuncha “tizimli usul” bo‘lib, aynan tizimli yondashuv pedagogik texnologiyaning, o‘qitishga boshqa yondashuvlardan farqlanuvchi asosiy belgisi hisoblanadi. Ta’lim maqsadlari, uning mazmuni, o‘qitish va ta’lim berish usullari, nazorat va natijalarni baholashni o‘zaro bog‘liklikda loyihalash- ko‘pincha an’anaviy o‘quv jarayonida yetishmaydigan narsadir.

Jaxon pedagogika fani ilmiy – texnika taraqqiyoti ta’sirini boshdan kechirib, psixologiya, kibernetika, tizimlar nazariyasi, boshqaruv nazariyasi va boshqa fanlar yutuqlarini birlashtirib, hozirgi davrda faol yangilanish (innovatsiya) jarayonlari bosqichida turar ekan, inson imkoniyatlarini samarali rivojlantirish amaliyotiga boy mahsul bermoqda.

Pedagogik texnologiya usullari (boshda) dastlab o‘qitishning harakatini namunaviy vaziyatdagi (belgilangan qoida bo‘yicha) o‘zlashtirish talab etiladigan mahsuldor (reproduktiv) darajasi uchun ishlab chiqilgan. Mahsuldor ta’lim har qanday ta’limning zaruriy tarkibiy qismi hisoblanib, u insoniyat jamg‘argan tajribani aniq o‘quv fani doirasida o‘zlashtirish bilan bog‘liq. Ta’lim oluvchilarda bilim va ko‘nikmalarning ma’lum “poydevori” hosil qilingandan keyingina ta’limning natijali (produktiv) va ijodiy yondashish usullariga ko‘chish mumkin. Pedagogik texnalogiya oqimi 70-80 yillarda AQShda yuzaga keldi va YUNESKO kabi nufuzli tashkilot tomonidan tan olindi va qo‘llab – quvvatlandi va hozirgi kunda ko‘pgina mamlakatlarda muvaffaqiyatli o‘zlashtirilmoqda.

Ma’lumki, tubdan farq qiluvchi uchta ta’lim turlarini ajratish mumkin. Bular: og‘zaki- ko‘rgazmali, texnologik va izlanuvchan-ijodiy ta’lim turlari hisoblanadi.

1. Og‘zaki – ko‘rgazmali an’anaviy bo‘lib, o‘qituvchining axborot berishi, talabalarning bilimlarni qabul qilishi, to‘plashi va xotirasida saqlashi bilan belgilanadi. Ta’limda og‘zaki-ko‘rgazmali yondashuv juda katta tajribaga ega bo‘lib, qismlarga ajratib ishlab chiqilgan va ta’lim tizimida ulkan xizmat ko‘rsatdi. Jadal suratlar bilan o‘sib borayotgan fan va texnika talablari, ta’lim tizimidagi istlohatlar, raqobotbardosh kadrlar tayyorlash, shaxsni rivojlantirish, uning

ma’lumot olish istaklarini to‘laroq qondirishga bo‘lgan jamiyat ehtiyojlari o‘qitish usullariga yangicha yondashishni talab qilmoqda.

2. Tal’imga texnologik yondashuvning umumiy tavsifnomasi (qismlarga ajratilmagan holda), ta’limning juda oddiy mahsuldor darajasi sifati misolida qaraladi. O‘quv ishlari yuqori natijalarga erishishga qaratilgan bo‘lib, yo‘naltirilganlik, mashg‘ul bo‘lish, musobaqalashish va o‘zaro yordamlashish tushunchalari mavjud bo‘ladi.

3. Izlanuvchan yondashuvdagi maqsad, talabalarda muammoni hal etish, yangi, oxirigacha tugallanmagan tajribani o‘zlashtirish, ta’sir etishning yangi yo‘llarini yaratish qobiliyatlarini, shaxsiy idrokni rivojlantirishdan iboratdir.

Izlanuvchan ta’lim andozasining ta’lim mazmuni, tabiat va jamiyat bilan o‘zaro ta’siri natijasida shaxsda tadqiqotchilik va jadal ijodiy harakterli faoliyat yo‘li boshlanadi.

O‘quv jarayonining texnologik shakl modeli va uning amaliy tadbiqi yangilik xususiyatiga ega bo‘lib, an’anaviy ta’limni qayta shakllantiradi. “Pedagogik texnologiya” so‘z birikmasi asosida “Texnologiya”, “Texnologik jarayon” tushunchasi yotadi. Bu tushuncha orqali sanoatda tayyor mahsulotni olish uchun bajariladigan ishlarning ketma – ketligi haqidagi hujjat, ta’limda esa fan bo‘yicha uslubiy tadbirlar majmuasi tushuniladi.

Pedagogik texnologiyada asosiy yo‘l aniq belgilangan maqsadlarga qaratilganlik, ta’lim oluvchi bilan muntazam o‘zaro aloqani o‘rnatish, pedagogik texnologiyaning falsafiy asosi hisoblangan ta’lim oluvchining xatti – harakati orqali o‘qitishdir. O‘zaro aloqa pedagogik texnologiya asosini tashkil qilib, o‘quv jarayonini to‘liq qamrab olish kerak.

Pedagogik texnologiyada nazarda tutiladigan maqsadlarni qo‘yish usuli, o‘qitish maqsadlari o‘quvchilar harakatida ifodalanadigan va aniq ko‘rinadigan hamda o‘lchanadigan natijalar orqali belgilanadi. Maqsadlar o‘qituvchining faoliyatidan kelib chiqqan holda o‘rgatish, tushuntirish, ko‘rsatish, aytib berish va hokazo atamalar orqali qo‘yiladi. O‘quvchining harakatlarida ifodalanadigan vazifalar esa ta’limining natijalarda ifodalanadi. Natija, talabaning tugallangan xatti –harakatini ifodalovchi keltirib chiqaring, sanab o‘ting, so‘zlab bering, tanlang, ko‘rsatib bering, hisoblang kabi atamalar bilan ifodalanishi kerak.

Shunday qilib, an’anaviy o‘quv jarayonlarida asosiy omil – bu pedagog va uning faoliyati hisoblansa, pedagogik texnologiyada birinchi o‘ringa o‘qish jarayonidagi o‘quvchilarning faoliyati qo‘yiladi. Harbir vazifa raqamlanib, u bitta natijani ko‘zlashi lozim. Har bir vazifani shunday qo‘yish kerakki, u o‘qituvchining o‘tadigan darsining bosqichlarini emas, balki, talabaning o‘zini keyin qanday tutishi kerakligiga ishora qilsin.

Ma’lumki, ilg‘or texnologiyalarni qo‘llashda asosiy e’tibor loyihalash bosqichiga qaratiladi, bunday tizimli yondoshuv asosida o‘quv jarayonini loyihalash, kutilayotgan natija shaklidagi o‘quv maqsadlarini mumkin qadar aniqlashtirish, rejalashtirilgan o‘quv maqsadlariga kafolatli erishishga undaydi.

Mavzuni o‘rganishning taxminiy bosqichlari quyidagilardan iborat deb bilamiz: 1) mavzu va uning rejasi beriladi; 2) o‘quv faoliyati natijalari eslatiladi; 3) mavzuni uning ahamiyatga qisqa to‘xtalinadi; 4) mavzuni tushuntirish ketma

– ketligi texnologik loyiha asosida o‘qituvchi maqsadiga mos kelishi lozim; 5) talabalar diqqatini jalb etib, mavzu savollari haqida muammoli vaziyatlar hosil qilish; 6) tushuntirish jarayonida o‘quv adabiyotlari yoki tarqatma materal bilan ishlashga ahamiyat beriladi; 7) talabaning tarqatma materal yoki o‘quv adabiyotlardan asosiy tushunchalarni o‘qish va yozishni tashkil etishga imkoniyat yaratish; 8) mavzuni o‘rganish darajasini tekshirish, talabalarga og‘zaki savollar berib borish orqali, (masalan, analitik geometriya tushunchasining mohiyati nima?); 9) talabalar javoblariga izoh berish yoki to‘ldirish, to‘g‘ri javoblarni rag‘batlantirish; 10) egallangan bilimlarni tekshirish va baholash; bunda tayyorlangan savollar hamma talabalarga tarqatiladi. Savollarga javob berish uchun muayan (masalan, 10 minut) vaqt beriladi. Berilgan savol varaqlari yig‘ishtirib olingach, savollar oldindan tayyorlab qo‘yilgan javoblar bilan solishtirib tekshiriladi. To‘g‘ri javoblar ekranda ko‘rsatiladi yoki doskaga ilinadi. Har bir talaba o‘zlarning bilimlarini o‘zlari tekshirib ko‘radilar va baholaydilar baholash reyting tizimida bo‘ladi, o‘qituvchi talabalar javoblariga munosabat bildiradi. Yuqori baholanganlar rag‘batlantiriladi va kam baho olganlarga tanbeh bermasdan, ularni o‘qish – o‘rganishga da’vat etiladi; 11) egallangan bilimlarni yanada mustahkamlash va mustaqil ishlash ko‘nikmasini hosil qilish maqsadida uyga vazifa beriladi. Bunda beriladigan vazifa aniq bo‘lishi, berilgan vazifaning bajarilish shakli (referat, konspekt qilish, misol va masalalarni yechish) aniq bo‘lishi zarur.

“ Oliy matematika” fanini, o‘rganishda ushbularga erishishni maqsad qilib olinadi:

1) matematikaning hozirgi zamon taraqqiyotidagi o‘rni va ahamiyati anglash;
2) o‘quvchining matematik apparatning qo‘llanilishiga qiziqishi;
3) amaldagi dastur asosida matematik apparatni o‘rgatish;
4) ayrim masalalarning matematik modellarini tuza bilish va uni tahlil qilish;
5) matematik fikrlash va xulosa chiqarish;
6) matematik bilimlarni chuqurlashtirishga yo‘naltirib, bu bilimlarni o‘z faoliyatida qo‘llash.

Shuni ta’kidlaymizki, ,,Oliy matematika’’ fani oliy ta’limda asosiy tayanch fan ekanligi, uning usullari ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, informatika, chiziqli va nochiziqli dasturlash, makro va mikro iqtisod, ekonometriya, iqtisodiy tahlil, moliyaning miqdoriy metodlari, logistika va boshqa fanlarning asosiy bilimlarini egallashda muhim qurol sifatida ishlatilishi e’tiborga olinadi.

Biz ushbu uslubiy qo‘llanmada ,,Oliy matematika’’ fanining **“Differensial hisobning tatbiqlari”** amaliy mashg’ulot darsida ilg‘or pedagogik texnologiyalarni qo‘llab, o‘qitish- o‘rgatish haqida fikr yuritamiz.

1.1. “Differensial hisobning tatbiqlari” mavzusi bo’yicha amaliy mashg‘ulotining ta’lim texnologiyasi modeli

Amaliy mashg‘ulotining maqsadi	**Differensial hisobning tatbiqlari** haqida bilimlarni mustahkamlash va ularni chuqurlashtirish
22,23(1,2) -mavzular	**Differensial hisobning tatbiqlari**
Vaqt- 4 soat	Talabalar soni: 25 nafardan oshmasligi kerak
O‘quv mashg‘uloti shakli	Individual topshiriqlarni bajarishga asoslangan amaliy mashg‘ulot
Mashg‘ulot rejasi	1. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish: 1) funksiyaning monotonligi; 2) funksiyaning ekstremumi; 3) funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari; 4) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish; 5) funksiya grafigining asimptotalari; 6) funksiyani tekshirishning umumiy rejasi. 2. Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi. 3. Differensial hisobning iqtisodda qo’llanilishi haqida.
Pedagogik vazifalar	O‘quv faoliyati natijalari
1. Mavzu bo’yicha bilimlarni tizimlashtirish, mustahkamlash. 2. O’quv materiallari bilan ishlash ko’nikmalarini hosil qilish. 3. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish: 1) funksiyaning monotonligi; 2) funksiyaning ekstremumi; 3) funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari; 4) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshirish; 5) funksiya grafigining asimptotalari; 6)funksiyani tekshirishning umumiy rejasiga oid misol va masalalar eichib tushuntirish. 4.Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi bo’yicha aniqmasliklarni ochishga misollar ko’rsatib tushuntirish. 5.Differensial hisobning iqtisodda qo’llanilishiga oid misol va masalalarni ko’rsatib tushuntirish.	1. Funksiyaning monotonligini misollarda tekshira bilish. 2. Funksiyaning ekstremumini muayyan misollarda topa bilish. 3. Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlarini topa bilish. 4.Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini hosila yordamida tekshira bilish. 5. Funksiya grafigining asimptotalarini topish. 6. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasiga oid misol va masalalar hicha bilish. 7. Lopital qoidasi bo’yicha aniqmasliklarni ochishga misollar eicha bilish. 8. Differensial hisobning iqtisodda qo’llanilishiga oid misol va masalalarni hicha bilish.
Asosiy tushuncha va atamalar	Funksiya dinamikasi, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik qismlari, egilish nuqtasi, funksiyani tekshirish, asiptota, Lopital qoidasi, ishlab chiqarish xarajatlari, mahsulot, ishlab chiqarish xarajatlari orttirmasi, mahsulot ishlab chiqarish xarajati bo’yicha o’rtacha orttirmasi, ishlab chiqarish limitik xarajati, savdo, limitik pul mablag’i, funksiya egiluvchanligi, argument va funksiyaning nisbiy orttirmalari, nisbiy hosila, nisbiy egiluvchanlik, ikkita funksiya ko’paytmasi va nisbati egiluvchanliklari, talabning narxga nisbtan egiluvchanligi, talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi, taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi, to’la va o’rtacha xarajatlar egiluvchanliklari.
Ta’lim usuli va texnikasi	Amaliy mashg‘uloti, tezkor-so‘rov, aqliy hujum, insert, suhbat, munozara.
Ta’lim shakli	Frontal, jamoaviy (guruhli)
Ta’lim vositalari	Ma’ruza matni, amaliy mashg‘ulot bo’yicha o‘quv materiallari, proektor, axborot texnologiyalari vositalari.
Ta’lim berish sharoiti	Maxsus texnika vositalari bilan jihozlangan guruhli shaklda ishlashga mo‘ljallangan auditoriya
Manitoring va baholash	Og‘zaki so‘rov, kuzatish.

1.2. “Differensial hisobning tatbiqlari” mavzusi bo’yicha amaliy mashg‘ulotining texnologik xaritasi

Ish bosqichlari va vaqti	Ta’lim beruvchi	Ta’lim oluvchilar
1-bosqich. Mavzuga kirish (15 daqiqa)	1.1. Mavzuning nomi, maqsadi va o‘quv faoliyati natijalari bilan tanishtiriladi. 1.2. Talabalar o‘quv faoliyatini baholash mezonlari bilan tanishtiriladi(22.1-ilova). 1.3. Talabalarning darsga tayyorgarlik darajasini aniqlash, bilimlarini faollashtirish maqsadida tezkor-savollar o’tkaziladi(22.2-ilova, insert, B/Bx/Bo (Bilaman / Bilishni xoxlayman / Bilib oldim)): Mavzu mazmunining muhokamasi guruhlarda davom etishi e’lon qilinadi.	Tinglaydilar. yozib oladilar. Aniqlashtiradilar, savollar beradilar. Talabalar berilgan savollarga javob beradilar.
2- Asosiy bosqich.(50-daqiqa)	2.1.Talabalarni 4 ta o‘quv guruhiga bo‘linadi. va har biriga vazifalar beradi(22.3-ilova). Guruhlarda o‘quv vazifasini bajarish bo‘yicha ishni tashkil qiladi. Mavzu bo‘yicha tarqatma material tarqatiladi(22.4-ilova). O’quv faoliyti natijalarini eslatadi. Vazifani bajarishda o’quv materiallaridan foydalanish mumkinligini eslatadi. Berilgan topshiriqlarni har bir guruh lideri bittadan doskada izohlashga, ya’ni prezentatsiyaga tayyorlashni so‘raydi. Taqdimot boshlanishini e‘lon qiladi. Taqdimot vaqtida javoblarga izoh beradi, to’gri e’chimlarga e’tibor beradi, xatolarni ko’rsatadi. Talabalar bilan birgalikda javoblar to’g’riligini baholaydi, savollarga javob beradi. 2.3. Guruhlar bajargan ishlari bo‘yicha o‘z-o‘zini baholaydilar va tekshiradilar. 2.4. Javoblarni to‘ldiradi va qisqacha xulosalar qiladi.	Tinglaydilar; Guruhlarda ishlaydilar, misol va masalalarni daftarda echadilar, savollar beradilar. Guruh liderlari topshiriqlar javoblarini aytadilar. Liderlar o’z guruhlarida baholash o’tkazadilar. Tinglaydilar.
3- bosqich, yakuniy(15 daqiqa)	3.1. Mavzu bo‘yicha talabalarda yuzaga kelgan savollarga javob beradi, yakunlovchi xulosa qiladi.	Savol beradilar; tinglaydilar.

	3.2.Mashg'ulotda maqsadga erishishdagi, talabalar faoliyati tahlil qilinadi va baholanadi(22.5-ilova). 3.3. Mustaqil ish uchun topshiriqlar beriladi(22.6-ilova) va uning baholash mezonlari aytiladi.	Tinglaydilar; Topshiriqlarni yozadilar.

22.1-ilova

Har bir mashg'ulot 0,5 balldan 2 ballgacha baholanadi.

Guruxlarning ish natijalarini baholovchi me'zonlari

Me'zonlar	**Ball**	**%**	**Gurux natijalari bahosi**			
			1	**2**	**3**	**4**
Axborotning to'liqligi	1,0	50				
Illyustratsiya (grafik tarzda taqdim etish)	0,6	30				
Gurux faolligi (qo'shimcha, berilgan savol, javoblarning soni)	0,4	20				
JAMI	2	100				

86-100% / – "a'lo";

71-85% / – "yaxshi";

55-70% / – "qoniqarli";

0-54%-- "qoniqarsiz".

22. 2-ilova

Insert texnikasini qo'llagan holda ish yuritish qoidalari

1. Matnni o'qing.
2. Matn qatorlariga qalam bilan beligilar qo'yib, olingan ma'lumotni tizimlashtiring:

V - ... haqida mavjud bo'lgan bilimlar (ma'lumotlar) mos keladi
- (minus)   - ... haqidagi mavjud bilimlarga e'tiroz bildiradi.
+ (plyus)   - yangi ma'lumotlar hisoblanadi.
?   - tushunarsiz / aniqlik / qo'shimcha ma'lumot talab qiladi

B/Bx/Bo texnikasini qo'llagan holda ish yuritish qoidalari

1. "Insert" texnikasidan foydalanib matnni o'qing.

2. Olingan ma’lumotlarni tizimlashtiring – matnga qo‘yilgan belgilar asosida tablitsa qatorlarini to‘ldirib chiqing.

B/Bx/Bo

№	Mavzu savollari	Bila man	Bilishni xoxlay man	Bilib oldim
1	Funksiyaning monotonligi nima?			
2	Funksiyaning ekstremumi nima?			
3	Funksiya ekstremumga ega bo’lishining zaruriy va yetarli shartlari nimalardan iborat?			
4	Hosila yordamida ekstremumni tekshirishning ikkinchi qoidasi qanday?			
5	Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik qismlari va uning egilish nuqtasi hosila yordamida qanday aniqlanadi?			
6	Funksiya grafigining asimptotalari qanday topiladi?			
7	Funksiyani umumiy tekshirish nimalardan iborat?			
8	Aniqmasliklarni ochishda Lopital qoidasi nimadan iborat?			
9	Funksiya hosilasini bilgan holda funksional bog’lanish haqida nima deyish mumkin?			
10	Ishlab chiqarish xarajatlari, ishlab chiqarilgan mahsulot miqdoriga bog’liqmi?			
11	Ishlab chiqarish xarajatlari o’rtacha orttirmasi deb nimaga aytiladi?			
12	Ishlab chiqarishning limitik xarajati qanday aniqlanadi?			
13	Savdoning limitik pul mablag’i qanday aniqlanadi?			
14	Biror mahsulotga talab va uning narxi orasida bog’lanish bormi?			
15	Nisbiy orttirma nima?			
16	Funksiyaning egiluvchanligi qanday aniqlanadi?			
17	Funksiyaning egiluvchanligi qanday aniqlanadi?			
18	Talabning narxga nisbtan egiluvchanligi nimani ifodalaydi			

19	Talabning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday topiladi?			
20	Talab egiluvchan degani nima?			
21	Talab egiluvchan degani nima?			
22	Talab egiluvchan emas deb nimaga aytiladi?			
23	Talab daromadga bog'liqmi?			
24	Talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi qanday hisoblanadi?			
25	Taklif va narx orasida bog'lanish bormi?			
26	Taklifning narxga nisbatan egiluvchanligi $E_x(y)$ qanday aniqlanadi.			
27	Taklif funksiyasining egiluvchanligi nimani ifodalaydi?			
28	To'la xarajatlarning mahsulot hajmiga nisbatan egiluvchanligi $E_x(K)$ qanday aniqlanadi?			
29	O'rtacha xarajt egiluvchanligi $E_x(\Pi)$ qanday aniqlanadi?			
30	To'la xarajat egiluvchanligining 1 ga teng bo'lishi nimani ifodalaydi?			

22.3-ilova

Kichik guruhlarda ishlash qoidasi

1. Talabalar ishni bajarish uchun zarur bilim va malakalarga ega bo‘lmog‘i lozim. 2. Guruhlarga aniq topshiriqlar berilmog‘i lozim. 3. Kichik guruh oldiga qo‘yilgan topshiriqni bajarish uchun yetarli vaqt ajratiladi. 4. Guruhlardagi fikrlar chegaralanmaganligi va tazyiqqa uchra-masligi haqida ogohlantirilishi zarur. 5. Guruh ish natijalarini qanday taqdim etishini aniq bilish-lari, o‘qituvchi ularga yo‘riqnoma berishi lozim. 6. Nima bo‘lganda ham muloqotda bo‘ling, o‘z fikringizni erkin namoyon eting.

Guruhlarga beriladigan o'quv topshiriqlari

1-varaqa

1	Funksiyaning monotonligi nima?
2	Funksiyaning ekstremumi nima?

3	Funksiya ekstremumga ega bo’lishining zaruriy va yetarli shartlari nimalardan iborat?
4	Hosila yordamida ekstremumni tekshirishning ikkinchi qoidasi qanday?
5	Funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik qismlari va uning egilish nuqtasi hosila yordamida qanday aniqlanadi?
6	Funksiya grafigining asimptotalari qanday topiladi?
7	Funksiyani umumiy tekshirish nimalardan iborat?

2-varaqa

1. $y = 4x + x^3$ funksiyaning o’sishi va kamayishi oraliqlarini aniqlang.

2. $y = \frac{x^4}{4} - x^3$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

3. $y = x^5 + 5x - 6$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlil oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini toping.

4. $y = \frac{x^2}{x-2}$ funksiya grafigining asimpito’tasini toping.

5. $y = 3x - x^3$ funksiya grafigini uasang.

6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 4x^2 + 8}$ limitni Lopital qoidasiga asosan toping.

7. $y = e^{6x}$ funksiya egiluvchanligini toping?
$x = 1,\ x = 0,\ x = 2$ bo’lganda egiluvchanlik ko’rsatkichini toping?

3-varaqa

1. $y = x^2 + 4x + 5$ funksiyaning o’sishi va kamayishi oraliqlarini aniqlang.

2. $y = 1 + 2x^2 - \frac{x^4}{4}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

3. $y = (x-4)^5 + 4x + 4$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlil oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini toping.

4. $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ funksiya grafigining asimpito'tasini toping.

5. $y = -4x + x^3$ funksiya grafigini uasang.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ limitni Lopital qoidasiga asosan toping.

7. $y = x^3 - 1$ funksiya egiluvchanligini hisoblang. $x = 3$ *va* $x = 4$ bo'lganda egiluvchanligi ko'rsatkichini toping.

4-varaqa

1. $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ funksiyaning o'sishi va kamayishi oraliqlarini aniqlang..

2. $y = 4x - \frac{x^3}{3}$ funksiyaning ekstremumini tekshiring.

3. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlil oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini toping.

4. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$ funksiya grafigining asimpito'tasini toping.

5. $y = -4x + x^3$ funksiya grafigini uasang.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$ limitni Lopital qoidasiga asosan toping.

7. $y = e^{6x}$ funksiya egiluvchanligini toping?
$x = 2,\ x = 1,\ x = 3$ bo'lganda egiluvchanlik ko'rsatkichini toping?

22.4-ilova

"Differensial hisobning tatbiqlari" mavzusi bo'yicha tarqatma material

1. Differensial hisob yordamida funksiya dinamikasini tekshirish

Ma'lumki, tabiat va iqtisodning ko'p qonunlari funksiya yordamida modellashtiriladi. Bunday funksiyalrni bilish ularning qaysi oraliqda o'suvchi yoki kamayuvchi hamda ular qanday nuqtalarda eng katta va

eng kichik qiymatlarga erishishini aniqlash imkonini yaratadi. Bunga o'xshash tekshirishlar ***funksiya dinamikasini*** anglashga olib keladi.

2. **Funksiyaning monotonligi** mezonlari (kriteriyasi).

1-ta'rif. (a,b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalari uchun, $f(x_2) > f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda o'suvchi deyiladi.

2-ta'rif. (a,b) oraliqning $x_2 > x_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita nuqtalarsi uchun $f(x_2) < f(x_1)$ tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda kamayuvchi deyiladi.

Oraliqda o'suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deyiladi.

Monotonlikning zaruriy va yetarli shartlari:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega, ya'ni $f'(x) > 0$, bo'lsa, funksiya shu oraliqda **o'suvchi** bo'ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya manfiy hosilaga ega, ya'ni $f'(x) < 0$, bo'lsa, funksiya shu oraliqda **kamayuvchi** bo'ladi.

1-misol. $y = f(x) = x^3 - 3/2 \cdot x^2 - 6x + 4$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

Yechish. Birinchi tartibli hosilani topamiz:

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2),\ x^2 - x - 2 = 0,$$

bundan $x_1 = -1,\ x_2 = 2$ kritik nuqtalar bo'lib, ular funksiyaning aniqlanish sohasini $(-\infty;-1), (-1;2), (2;+\infty)$ oraliqlarga ajratadi.

Bu oraliqlarning har birida hosilaning ishorasini tekshiramiz. $(-\infty;-1)$ oraliqdan ixtiyoriy nuqta olib, masalan, $x = -2$ bo'lsa, $f'(-2) = (-2\ )^2 - (-2) - 2 = 4 + 2 - 2 = 4 > 0$ bњladi. Bunday tengsizlik oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi (buni tekshirib ko'ring). Demak, $(-\infty;-1)$ oraliqda funksiya o'suvchi (o'suvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan).

$(-1;2)$ oraliqning $x = 0$ nuqtasida $f'(0) = -2 < 0$, bњlib, bu

oraliqning istalgan nuqtasi uchun, $f'(x)<0$ tengsizlik bajariladi. Kamayuvchi funksiyaning yetarli shartiga asosan, $(-1;2)$ oraliqda funksiya kamayuvchi bo'ladi.
$(2;+\infty)$ oraliqning $x=3$ nuљtasi uchun, $f'(3)=3^2-3-2=9-5=4>0$, bњlib, bu tengsizlik ham oraliqning istalgan nuqtasi uchun bajariladi, demak, funksiya $(2;+\infty)$ oraliqda o'suvchi.

3. Funksiyaning ekstremumi.

Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi no'lga teng yoki uzilishga ega bo'ladigan nuqtalari **kritik** nuqtalar deyiladi.

1-ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **maksimumga** ega deyiladi.

2-ta'rif. x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **minimumga** ega deyiladi.

Funksiyaning maksimum yoki minimum nuqtalariga **ekstremum** nuqtalari deyiladi.

4. Ekstremumga ega bo'lshishinig zaruriy sharti.

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $y'=f'(x_0)$ no'lga teng yoki u mavjud bo'lmaydi.

Eslatma. Har qanday kritik nuqta ham ekstremum nuqtasi bo'lavermaydi.

5. Ekstremumning yetarli shartlari.

Birinchi qoida. x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuљta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va:

1) x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **maksimumga**;

2) x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **minimumga** ega bo'ladi.

Ikkinchi qoida. x_0 nuqtada birinchi hosila no'lga teng, ikkinchi hosila no'ldan farqli bo'lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va

: 1) $f''(x_0) < 0$ bo'lsa, **maksimum** nuqtasi;

2) $f''(x_0) > 0$ bo'lsa, **minimum** nuqtasi bo'ladi. 2-misol. $f(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{2}\cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaninshg ekstremumini birinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Kritik nuqtalarni topamiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, bunda

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 6}}{2} = \frac{1\pm 5}{2}$;

bo'lib, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ bo'ladi.

Endi argumentning kritik nuqtalaridan o'tishda funksiya hosilasining ishoralarini tekshiramiz:

$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$, $x < -2$ bo'lsa, $x + 2 < 0$, $x - 3 < 0$ bњlib,

$(x+2)(x-3) > 0$, bњladi, ya'ni ishora musbat $(+)$. $x > -2$ bo'lsa, $x+2 > 0$; $x - 3 < 0$, $(x+2)(x-3) < 0$, ya'ni ishora manfiy(-). Demak, $x_1 = -2$ nuqtadan o'tishda funksiya hosilasining ishorasi musbatdan manfiyga o'zgaradi. Birinchi qoidaga asosan $x_1 = -2$ nuqtada berilgan funksiya maksimumga ega bo'ladi.

$$y_{\max} = \frac{1}{3}(-2)^3 - \frac{1}{2}(-2)^2 - 6(-2) + 8/3 = 10 .$$

Endi -2< x <3 bo'lsa, $(x+2) > 0$; $(x-3) < 0$ bo'lib, $(x+2)(x-3) < 0$, hosilaning ishorasi manfiy $(-)$, $x > 3$ bo'lsa, $(x+2) > 0$; $(x-3) > 0$ bo'lib, $(x+2)(x-3) > 0$, musbat (+) bo'ladi. Demak, $x_2 = 3$ nuqtadan o'tishda funksiya hosilasi ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, birinchi qoidaga asosan funksiya $x_2 = 3$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

$$y_{\min} = 1/3\cdot 3^3 - 1/2\cdot 3^2 - 6\cdot 3 + 8/3 = -65/6.$$

3-misol. $f(x) = 1/4\cdot x^4 - 2x^3 + 11/2\cdot x^2 - 6x + 9/4$ funksiya ekstremumini ikkinchi qoida bilan tekshiring.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \qquad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11 .$$

endi kritik nuqtalarni topaylik:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 =$$

$$= x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1) =$$

$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6), \qquad x^2 - 5x + 6 = 0, \; x - 1 = 0$$

bundan, $x=1$ va

$$x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 6}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}\ ;\ x_2=2\ ,\ x_3=3$$

bњladi. Demak, kritik nuqtalar: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ bo'ladi. Endi ikkinchi tartibli hosilaning kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f''(1)=3\cdot 1^2-12\cdot 1+11=2>0,$$

$$f''(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+11=-1<0,$$

$$f''(3)=3\cdot 3^3-12\cdot 3+11=2>0.$$

Shunday qilib, ekstremumga ega bo'lishning ikkinchi qoidasiga asosan, $x_1=1$, $x_3=3$ nuqtalarda minimum, $x_2=2$ nuqtada funksiya maksimumga ega bo'ladi.

$\min f(1)=0$; $\max f(2)=0.25$; $\min f(3)=0$.

6. *Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlari.*

$y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun:

1) kritik nuqtalarni topamiz;

2) funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz;

3) bu topilgan qiymatlardan eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

4-misol. $y=f(x)=x^4-2x^2+5$ funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

Yechish. Berilgan funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz.

$y'=4x^3-4x$, $4x^3-4x=0$, $4x(x^2-1)=0$,

bundan , $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ kritik nuqtalar bo'ladi. Funksiyaning berilgan kesmaning chetki nuqtalaridagi hamda kritik nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-2)=(-2)^4-2(-2)^2+5=16-8+5=13,$$

$$f(-1)=4;\ f(0)=5;\ f(1)=4\ \text{ва}\quad f(3)=3^4-2\cdot 3^2+5=$$

$$=81-18+5=68.$$

Bu topilganlarni solishtirib, funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari, mos ravishda $y_{экич}=4$, $y_{экат}=68$ bo'ladi.

Shuni eslatamizki, funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatini topish katta amaliy ahamiyatga ega.

5-misol. Perimetri $2p(p>0)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklar orasida eng katta yuzaga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak topilsin.

Yechish: Bunday to'g'ri to'rtburchakning asosi x bo'lsin. Bu holda to'g'ri to'rtburchakning balandligi $p-x$ ga, yuzi esa,

$$S=S(x)=x(p-x),\ (0<x<p)$$

bo'ladi.

$S(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz:

$$S'(x)=p-2x,\ p-2x=0,\quad x=\frac{p}{2}$$

kritik nuqta bo'ladi. $S''(x)=-2;\quad S''(p/2)=-2<0.$

Demak, $S(x)$ funksiya, $x=\frac{p}{2}$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi.

$$S_{\max}=\frac{p}{2}(p-\frac{p}{2})=\frac{p^2}{4}.$$

Shunday qilib, eng katta yuzaga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak tomoni $\frac{p}{2}$ bo'lgan kvadratdan iborat ekan.

7. Funksiya grafigining *qavariqlik, botiqlik* oraliqlarini va *egilish* nuqtalarini hosila yordamida tekshirish.

1-ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o'tkazilgan urinmadan pastda yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda ***qavariq*** deyiladi.

2-ta'rif. $y=f(x)$ funksiyaning grafigi (a,b) oraliqning istalgan nuqtasidan unga o'tkazilgan urinmadan yuqorida yotsa, funksiya grafigi shu oraliqda ***botiq*** deyiladi.

3-ta'rif. Funksiya grafigining qavariq qismini, botiq qismidan ajratuvchi $M_0(x_0, f(x_0))$ nuqta **egilish** nuqtasi deyiladi.

***Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo'lishining yetarli shartlari*:**

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya'ni $f''(x)<0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'ladi;

2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya'ni $f''(x)>0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi.

$f''(x)=0$ va $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarga 2-tur kritik nuqtalar deyiladi.

Egilish nuqtalari mavjud bo'lishining yetarli sharti. x_0 nuqta $y=f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni o'zgartirsa, x_0 abssissali nuqta egilish nuqtasi bo'ladi.

Shunday qilib, funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik oraliqlarini, egilish nuqtalarini topish uchun, oldin funksiya aniqlanish sohasini ikkinchi tur kritik nuqtalar bilan oraliqlarga bo'lish va bu oraliqlarda ikkinchi tartibli hosila ishorasini tekshirish kerak. Keyin yetarli shartlardan foydalanib, qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalari aniqlanadi.

8. Funksiya grafigining asimptotalari.

1-ta'rif. $y=f(x)$ funksiya grafigidagi nuqta shu grafik bo'ylab cheksiz uzoqlashganda, undan biror to'g'ri chiziqqacha masofa no'lga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining ***asimptotasi*** deyiladi.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ bo'lsa, $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad va \quad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

yoki

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \quad ва \quad b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

limitlar mavjud bo'lsa, $y=kx+b$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. $k=0$ bo'lsa, $y=b$ gorizantal asimptota bo'ladi.

6-misol. Gauss egri chizig'i deb ataluvchi $y=e^{-x^2}$ funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlang.

Yechish. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni topamiz:

$$y'=e^{-x^2}(-2x)=-2xe^{-x^2},\ y''=-2\left[x'e^{-x^2}+(-2xe^{-x^2})x\right]=(4x^2-2)e^{-x^2}$$

Ikkinchi tartibli hosilani nolga tenglashtirib, ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$(4x^2-2)e^{-x^2}=0,\ e^{-x^2}\neq 0,\ 4x^2-2=0\ ,\ x^2=\frac{1}{2};\ x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}};\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Bular ikkinchi tur kritik nuqtalar bo'lib, sonlar o'qini

$$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}),(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\ ва\ (\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$$

oraliqlarga ajratadi.

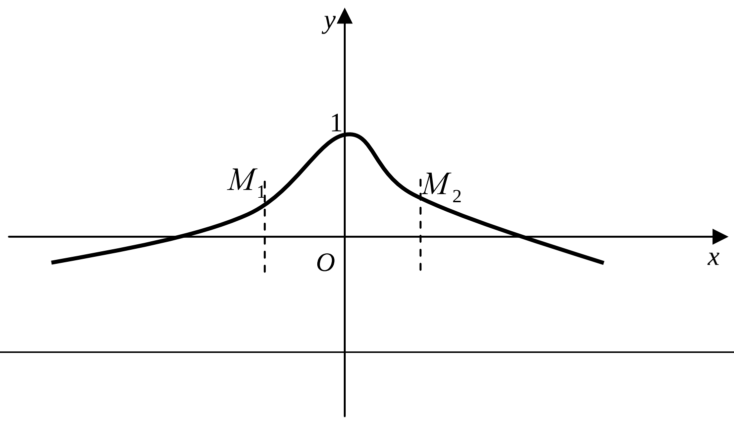
$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ oraliqlarda $y''>0$ bo'lib, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda $y''<0$ bo'ladi.

Demak,

$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ ва $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq, $(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'lib, $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda $f''(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nuqtadan o'tishda manfiydan musbatga o'zgartiradi. Bu ikkala holda ham egilish bo'ladi:

$$f_{эгл}=(-\frac{1}{\sqrt{2}})=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}};\ M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{e}}).\ f_{эгл}(\frac{1}{\sqrt{2}})=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\quad M_2(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Yuqoridagilarga asosan funksiya grafigini yasaymiz(22.1-chizma).



22.1-chizma

9. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasi.

Funksiyani hosila yordamida tekshirishni hisobga olib, funksiyani tekshirishning quyidagi umumiy rejasini tavsiya etamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasini topish hamda argumentning aniqlanish sohasi chetlariga intilganda funksiya o'zgarishini tekshirish;
2) funksiyaning juft-toqligini tekshirish;
3) funksiyaning davriyligini aniqlash;
4) funksiyaning uzluksizligi, uzilishini tekshirish;
5) funksiyaning kritik nuqtalarini aniqlash;
6) funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumini tekshirish;
7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topish;
8) funksiya grafigining qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini aniqlash;
9) funksiya grafigining asimtotalarini tekshirish;
10) imkoniyati bo'lsa funksiya grafigining koordinat o'qlari bilan kesishish nuqtalarini aniqlash;
11) yuqoridagi aniqlangan xususiyatlarni hisobga olib, funksiya grafigini

yasash.

7-misol. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$ funksiyani tekshiring.

Yechish. Funksiyani tekshirishning umumiy rejasidan foydalanamiz:

1) funksiya maxraji no’lga aylanadigan nuqtalardan boshqa hamma nuqtalarda aniqlangan. Maxraj $x_1=-2,\, x_2=2$ nuqtalarda no’lga teng, demak, funksiyaning aniqlanish sohasi $(-\infty,-2),\ (-2;+2),\ (2,+\infty)$ oraliqlardan iborat. Aniqlanish oraliqlarining chetlarida funksiyaning o’zgarishini tekshiramiz:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to-\infty}x=-\infty,\ \lim_{x\to-2-0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-2+0}\lim\frac{x^3}{x^2-4}=\infty,\ \lim_{x\to2-0}\frac{x^3}{x^2-4}=-\infty,\ \lim_{x\to2+0}\frac{x^3}{x^2-4}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-4}=$$

;

2) $$f(-x)=\frac{(-x)^3}{(-x)^2-4}=-\frac{x^3}{x^2-4}=-f(x)$$

bo’lganligi uchun toq funksiya;

3) funksiya $f(x+T)=f(x)$ tenglikni qanoatlantirmaydi, demak, davriy emas;

4) funksiya $x=\pm2$ nuqtalarda uzilishga ega;

5) kritik nuqtalarni topamiz:

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-4)-x^3 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2},\quad f'(x)=0,\ x=0,\ x=\pm2\sqrt{3}..$$

Bundan tashqari $f'(x),\ \ x=\pm2$ nuqtalarda mavjud emas. Demak, kritik nuqtalar: $x_1=-2\sqrt{3},\ x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=2,\ x_5=2\sqrt{3}$ bo’ladi;

6) $(-\infty,-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},+\infty)$ oraliqlarning har birida $f'(x)$ ning ishorasini tekshiramiz;

$(-\infty,-2\sqrt{3})$ *ва* $(-2\sqrt{3},+\infty)$ oraliqlarda $f'(x)$ funksiya hosilasi musbat, ya’ni funksiya bu oraliqlarda o’suvchi; $(-2\sqrt{3},-2)$, $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,2\sqrt{3})$ oraliqlarda $f'(x)<0$, ya’ni kamayuvchi $x_1=-2\sqrt{3}$ nuqtada funksiya maksimumga, $x_5=2\sqrt{3}$ nuqtada minimumga ega bo’ladi. $x=0$ kritik nuqtadan o’tishda $f'(x)$ ishorasi o’zgarmaydi, demak bu nuqtada ekstremum yo’q.

$$\max f(x)=f(-2\sqrt{3})=-3\sqrt{3};\ \min f(x)=f(2\sqrt{3})=3\sqrt{3};$$

7) ikkinchi tur kritik nuqtalarni topamiz:

$$f''(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-x^2(x^2-12)\cdot 2\cdot (x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=$$

$$=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)-4x^3(x^2-12)}{(x^2-4)^3}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}\ .$$

$$f''(x)=0,\quad 8x(x^2+12)=0,\quad x=0,\quad x=\pm 2$$

nuqtalarda ikkinchi tartibli hosila mavjud emas. Demak ikkinchi tur kritik nuqtalar

$$x_1=-2;\quad x_2=0;\quad x_3=2$$

bo'ladi ;

8) $(-\infty,-2),(-2,0),\ (0,2),\ (2,+\infty)$ oraliqlarda $f''(x)$ ning ishorasini tekshiramiz: $x=-3$ bo'lsin.

$$f''(-3)=\frac{8(-3)\left[(-3)^2+12\right]}{\left[(-3)^2-4\right]}=\frac{-24\cdot 21}{5^3}=-\frac{504}{125}<0,$$

xuddi shunday

$f''(-1)>0,\quad f''(1)<0,\quad f''(3)>0$ bo'lib, $(-\infty,-2)$ *ва* $(0,2)$ oraliqlarda funksiya grafigi qavariq, $(-2,0)$ *ва* $(2,+\infty)$ oraliqlarda funksiya grafigi botiq bo'ladi. Ikkinchi tartibli hosila har bir ikkinchi tur kritik nuqtada ishorasini o'zgartiradi, lekin $x=\pm 2$ da funksiya uzilishga ega. Shuning uchun faqat $x=0$ nuqtada funksiya grafigi egilishga ega bo'ladi $f(0)_{эгл}=0$;

9) funksiya grafigining asimptotalarini topamiz:

$$\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty \quad ва \quad \lim_{x\to -2\pm 0}\frac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty .$$

Demak, $x=-2,\ x=2$ funksiya grafigining vertikal asimgtotalari bo'ladi.

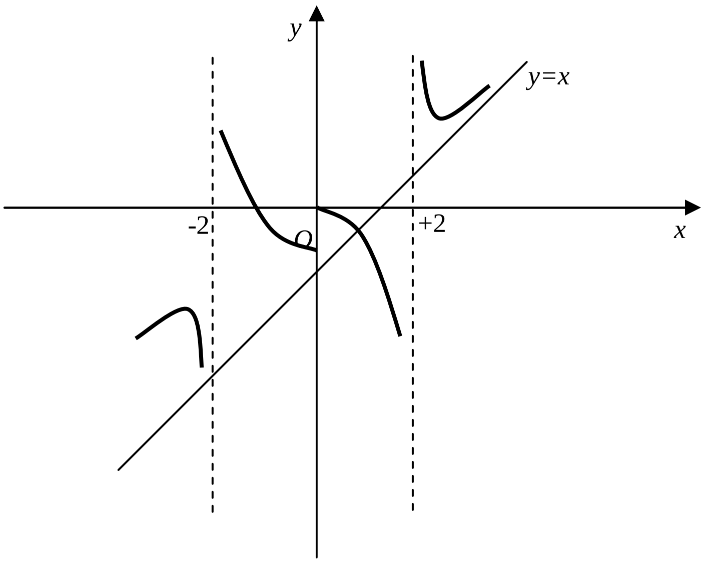
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=1,\quad b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}==\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1-4/x}=\frac{0}{1}=0.$$

Shunday qilib, $y=x$ og'ma asimptota bo'ladi;

10) $x=0$ bo'lganda $y=0$ bo'lib, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o'tadi;

11) yuqoridagi tekshirishga asosan, funksiya grafigini yasaymiz. (22.2-chizma).



22.2-chizma

10. Hosila yordamida aniqmasliklarni ochish. Lopital qoidasi.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda berilgan bo'lsin.

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

bo'lsa, $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'ladi.

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty,\quad \lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$

bo'lsa, $x\to a$ da $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo’ladi.

Berilgan funksiyalar hosilalarga ega bo’lsa, ulardan foydalanib, aniqmaslikni ochish mumkin.

Lopital qoidasi

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ bo’lib, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ mavjud bo’lsa, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o’rinli bo’ladi. $x\to\infty$ da ham Lopital qoidasi o’rinli.

$(0\cdot\infty)$ yoki $(\infty-\infty)$ ko’rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar orqali $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko’rinishdagi aniqmasliklarga keltirilib, keyin Lopital qoidasidan foydalaniladi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu limit $x\to 0$ da $\frac{0}{0}$ ko’rinishdagi aniqmaslik bo’lib, Lopital qoidasini qo’llab,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x}$$

natijaga ega bo’lamiz. Oxirgi limit $x\to 0$ da yana $\frac{0}{0}$ ko’rinishdagi aniqmaslik , demak, Lopital qoidasini yana qo’llash mumkin:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{x'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{0-\sin x}{1} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Shunday qilib, ketma-ket Lopital qoidasini qo’llash bilan berilgan limitning 0 ga tengligini ko’rsatdik.

11. Hosilaning iqtisodiy ma’nosi haqida.

Hosilaning iqtisodiy ma’nosini quyidagi misolda qaraymiz. Biror xil mahsulot ishlab chiqarilganda ishlabchiqarish xarajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotning miqdoriga bog’liq. Mahsulot miqdorini x bilan, ***ishlab chiqarish xarajatlarini*** y bilan belgilasak

$$y = f(x)$$

funksional bog’lanish kelib chiqadi. Mahsulot ishlab chiqarishni Δx ga ko’paytirilsa $x+\Delta x$ mahsulotga mos keluvchi xarajat

$$f(x+\Delta x)$$

bo’ladi. Demak, mahsulot miqdorining Δx orttirmasiga, ***mahsulot ishlab chiqarish xarajatining orttirmasi***

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

mos keladi.

1-ta'rif. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatga mahsulot ishlab chiqarish xarajatining o'rtacha orttirmasi deyiladi.

2-ta'rif.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

ga ***ishlab chiqarish limitik xarajati*** deb ataladi.

Yuqoridagiga o'xshash $\varphi(x)$ bilan x mahsulotni sotishdan olingan jami savdo pul mablag'i bo'lsa, quyidagi limit

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

ga ***savdo limitik pul mablag'i*** deyiladi.

1-misol. Mahsulot ishlab chiqarish xarajati va mahsulot hajmi x orasida

$$y = 100x - \frac{1}{30}x^3$$

bog'lanish bo'lsin. Ishlab chiqarish hajmi, 5 birlik va 10 birlik bo'lganda limitik xarajatni toping.

Yechish. Masala shartiga asosan, $x = 5$, $x = 10$. Funksional bog'lanish hosilasi

$$y' = 100 - \frac{1}{10}x^2$$

bo'lib,

$$f'(5) = 100 - \frac{1}{10}5^2 = 97.5, \quad f'(10) = 90$$

bo'ladi.

Bularning iqtisodiy ma'nosi, mahsulot ishlab chiqarish hajmi 5 birlik bo'lganda, mahsulot ishlab chiqarish xarajati kelgusi mahsulotni ishlab chiqarishga o'tishda 97,5 ni tashkil etadi; ishlab chiqarish hajmi 10 birlik bo'lganda, esa u 90 ni tashkil etadi.

12. *Funksiyaning egiluvchanligi (elastikligi)*.

Hosila yordamida erkli o'zgaruvchi (argument) orttirmasiga mos erksiz o'zgaruvchi (funksiya) orttirmasini hisoblash mumkin. Ko'p iqtisodiy masalalarni hal etishda ***nisbiy orttirma,*** ya'ni argumentning o'sish foiziga mos, funksiyaning o'sish foizini hisoblashga to'g'ri keladi. Bu funksiyaning egiluvchanligi yoki nisbiy hosila tushunchasiga olib keladi.

1-ta'rif. $\dfrac{\Delta x}{x}, \dfrac{\Delta y}{y}$

nisbatlarga, mos ravishda, argument va ***funksiya nisbiy orttirmalari*** deyiladi. Funksiya nisbiy orttirmasining argument nisbiy orttirmasiga nisbati

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}$$

ni qaraymiz. Bu nisbatni quyidagicha yozamiz:

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \qquad (1)$$

$y = f(x)$ funksiyaning hosilasi mavjud bo'lsa,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \qquad (2)$$

kelib chiqadi.

2-ta'rif. (2) munosabatga $y = f(x)$ ***funksiyaning*** x ***ga nisbatan egiluvchanligi deyiladi***, va $E_x(y)$ bilan belgilanadi. Ta'rifga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

bo'ladi.

x ga nisbatan egiluvchanlik argumentning orttirmasi 1% ga oshganda unga mos funksiya orttirmasining foizlarda hisoblangan o'sishi (yoki kamayishi)ni taqriban ifodalaydi.

Funksiya egiluvchanligini topishga bir necha misollar qaraymiz.

3-misol. $y = 3x - 6$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish Egiluvchanlik ta'rifiga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{3x-6} \cdot 3 = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}.$$

Masalan, $x = 10$ bo'lsa, funksiya egiluvchanligi

$$\frac{10}{10-2} = \frac{5}{4}$$

bo'ladi, ya'ni x 1% oshganda, y $\frac{5}{4}\%$ ga oshadi.

4-misol. $y = 1 + 6x^2 - 4x^3$ funksiya egiluvchanligini hisoblang.

Yechish. Ta'rifga asosan:

$$E_x(y) = \frac{x}{1+6x^2-4x^3}(12x - 12x^2) = \frac{12x^2 - 12x^3}{1+6x^2-4x^3}$$

Masalan, $x=1$ bo'lganda, $\frac{(12-12)}{7}=0$. Bu argument 1% ga ya'ni 1 dan 1,01 ga oshganda, funksiya qiymati taqriban o'zgarmaydi.
Endi funksiya egiluvchanligini hisoblashda qo'llaniladigan ayrim qoidalarni eslatamiz.

13. Talab va taklif egiluvchanligi.

Aniq bir mahsulotga talab va uning narxi orasidagi funksional bog'liqlikni (boshqa tovar narxi, inste'molchining daromadi va ehtiyoji o'zgarmas bo'lgan shartlarda) talabga mos narxni aniqlash mumkin. Lekin ko'p iqtisodiy tekshirishlarda talabning miqdori emas, mahsulot narxining o'zgarishi bilan unga talabning qanday o'zgarishi muhimdir. Boshqacha aytganda, talabning narxga nisbatan egiluvchanligini hisoblash katta ahamiyatga ega.

Talab y, narx x ning funksiyasi bo'lsin, ya'ni

$$y=f(x).$$

Δx narx orttirmasi, Δy unga mos talab orttirmasi bo'lsa, narxning nisbiy o'zgarishi $\Delta x/x$, talabning nisbiy o'zgarishi $\Delta y/y$ bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}$$

nisbat narx 1% oshganda unga mos talabni nisbiy o'zgarishi, ya'ni ***talabning narxga nisbatan egiluvchanligi*** qo'yidagi limitga teng:

$$E_x(y)=E_T=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) \qquad (5)$$

Demak, $E_T=\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$.

Shunday qilib, ***talabning narxga nisbatan egiluvchanligi***, narx 1% ga oshganda, biror tovarga bo'lgan talabning qanday o'zgarishini taqriban ifodalaydi.

Ma'lumki, talab funksiyasi narxga nisbatan kamayuvchi funksiyadir, ya'ni $\frac{dy}{dx}<0$ bo'ladi. Shuning uchun amalda manfiy sonlarni ishlatmaslik uchun

$$E_T=-\frac{x}{y}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

(6)

qilib olinadi.

$E_T>1$ bo'lsa, narxning 1%ga o'sishi, talabning taxminan 1% dan ko'p pasayishini ifodalaydi va talab egiluvchan deyiladi.

$E_T=1$ bo'lsa, narxning 1% ga o'sishi, talabning taxminan 1% ga pasayishini bildirib, talab neytral deyiladi.

$0 < E_T < 1$ bo'lsa, narxning 1% ortishi unga mos talabning 1% dan kam bo'lishini ifodalab, talab egiluvchan emas deyiladi.

7-misol. Talab funksiyasi $y = 10 - x$ bo'lsa uning egiluvchanligini toping.

Yechish. (6) formulaga asosan:

$$E_T = -\frac{x}{y}y' = -\frac{x}{10-x}(-1) = \frac{x}{10-x} \qquad x = 2 \ bo'lsa, \quad E_T = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

bo'ladi. Buning ma'nosi narx 2 bo'lganda uni 1% orttirish, talabning $\left(\frac{1}{4}\right)$% ga kamayishini ko'rsatadi.

Talabning daromad (kirim, unum, tushum)ga nisbatan elastikligini qaraymiz. x iste'molchining daromadi bo'lsin. Talab funksiyasi y desak,

$$y = f(x)$$

bog'lanish kelib chiqadi. Bunda ***daromadga nisbatan egiluvchanlik***

$$E_d(y) = \frac{x}{y}y'$$

bo'ladi.

8-misol. Tadbirkor biror mahsulotga talabning daromadga nisbatan egiluvchanligi 0,2 ekanligini bilgan holda, uning narxini 10% oshirmoqchi bo'lsa uning oladigan daromadini hisoblang?

Yechish. Talabning egiluvchanligi 0,2 bo'lganligi uchun unga talab 2% ga kamayadi. Natijada tadbirkorning daromadi 8% tashkil etadi.

Taklif deganda biror mahsulotning vaqt birligida sotishga chiqarilgan hajmini tushuniladi. Ma'lumki, biror mahsulotning taklifi biror davrda, narxning o'suvchi funksiyasidir. Taklif funksiyasining ham egiluvchanligini talab egiluvchanligiga o'xshash topish mumkin.

$$y = f(x)$$

taklif funksiyasi bo'lsin bunda x narx, y taklif funksiyasi, demak

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y'$$

bo'ladi. ***Taklif funksiyasining egiluvchanligi*** *narx 1% ga oshganda* taklif funksiyasining foizlarda o'sishini taxminan ifodalaydi.

14. *To'la va o'rtacha xarajatlar egiluvchanligi.*

Korxona biror mahsulotdan x birlik miqdorda ishlab chiqarsa va $k(x)$ to'la xarajat funksiyasi aniqlangan bo'lsa, to'la xarajat egiluvchanligi

$$E_x(K) = E_k = \frac{x}{K}\cdot\frac{dK}{dx} = \frac{dK}{dx} : \frac{K}{x}, \qquad (7)$$

bo’ladi, demak, ***to’la xarajat egiluvchanligi limitik xarajatning*** o’rtacha xarajatga nisbatini ifodalaydi..

O’rtacha xarajat $\Pi = \frac{K}{x}$ bњlsa, uning egiluvchanligi,

$$E_x(\Pi) = \frac{x}{\Pi}\cdot\frac{d\Pi}{dx} = \frac{x}{K/x}\cdot\frac{x(dK/dx)-K}{x^2} = \frac{x^2}{K}\cdot\frac{xdK/dx - K}{x^2} =$$

$$= \frac{x}{K}\cdot\frac{dK}{dx} - 1 = E_x(K) - 1, \qquad (8)$$

bњladi, demak, o’rtacha xarajat egiluvchanligi to’la xarajat egiluvchanligidan 1 ga kam ekan.

$E_T = 1$ bo’lsa, o’rtacha xarajat egiluvchanligi 0 ga teng, ya’ni $E_x(\Pi) = 0$ bo’lib, o’rtacha xarajat o’zgarmasligini bildiradi. Bundan

$$x\frac{dk}{dx} - K = 0 \quad yoki \quad \frac{dK}{dx} = \frac{K}{x}\ . \qquad (9)$$

Shunday qilib, **to’la xarajat egiluvchanligi** 1 ga teng bo’lsa, to’la limitik xarajat o’rtacha xarajatga teng bo’ladi.

22.5-ilova

“Differensial hisobning tatbiqlari” mavzusi bo’yicha ttst topshiriqlari

I darajali testlar

1. Monotonlikning zaruriy va yetarli shartlari quyidagilarning qaysilarida to’g’ri berilgan: 1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi, $y = f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega, ya’ni $f'(x) > 0,$ bo’lsa, funksiya shu oraliqda **o’suvchi** bo’ladi; 2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya musbat hosilaga ega, ya’ni $f'(x) > 0,$ bo’lsa, funksiya shu oraliqda **kamayuvchi** bo’ladi;
3) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya manfiy hosilaga ega, ya’ni $f'(x) < 0,$ bo’lsa, funksiya shu oraliqda **kamayuvchi** bo’ladi.

A) 1),3) B) 2),3) D) hammasi E) 1),2)

2. $y = f(x) = x^3 - 3/2\cdot x^2 - 6x + 4$ funksiyaning monotonlik oraliqlarini toping.

A) $(-\infty;-1),(-1;2),(2;+\infty)$ B) $(-\infty;-1),(2;+\infty)$
D) $(-\infty;-1),(-1;2)$ E) $(-1;2),(2;+\infty)$

3. Funksiyaning ekstremumi ta’riflari quyidagilarning qaysilarida to’g’ri berilgan: 1) x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo’lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$

nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **maksimumga** ega deyiladi; 2) x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **maksimumga** ega deyiladi; 3) x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) > f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **minimumga** ega deyiladi. 4) x_0 nuqtaning shunday atrofi mavjud bo'lsaki, bu atrofning har qanday $x \neq x_0$ nuqtasi uchun $f(x) < f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **minimumga** ega deyiladi.

A) 1),3) B) 1),2),3) D) 2),3)4) E) hammasi

4. Ekstremumga ega bo'lshishinig zaruriy shartini toping.
A) $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $y' = f'(x_0)$ no'lga teng yoki u mavjud bo'lmaydi
B) $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $y' = f'(x_0)$ no'lga teng bo'lmaydi
D) $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $y' = f'(x_0)$ no'ldan katta bo'ladi
E) $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, $y' = f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lmaydi

5. Quyidagilarning qaysilarida ekstremumning yetarli shartlari to'g'ri berilgan: 1) x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va: $a)$ x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **maksimumga**; $в)$ x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **minimumga** ega bo'ladi; 2) x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va: $a)$ x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **minimumga** $в)$ x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ o'z ishorasini manfiydan musbatga o'zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **maksimumga** ega bo'ladi; 3) x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lib, funksiya hosilasi ishorasi bu nuqtadan o'tishda ishorasini o'zgartirmasa, x_0 nuqta, funksiyaning ekstremum nuqtasi, va: $a)$ x_0 nuqtadan

chapdan o’ngga o’tishda $f'(x)$ o’z ishorasini musbatdan manfiyga o’zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **maksimumga**; *в*) x_0 nuqtadan chapdan o’ngga o’tishda $f'(x)$ o’z ishorasini manfiydan musbatga o’zgartirsa, x_0 nuqtada funksiya **minimumga** ega bo’ladi

A) 1) B) 2) D) 3) E) hammasida

6. Quyidagilarning qaysilarida ekstremumning ikkinchi qoidasi to’g’ri berilgan: 1) x_0 nuqtada birinchi hosila nolga teng bo’lib, ikkinchi hosila no’ldan farqli bo’lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va : $f''(x_0) < 0$ bo’lsa, **maksimum** nuqtasi; $f''(x_0) > 0$ bo’lsa, **minimum** nuqtasi bo’ladi; 2) x_0 nuqtada birinchi hosila nolga teng bo’lib, ikkinchi hosila no’ldan farqli bo’lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va : $f''(x_0) < 0$ bo’lsa, **minimum** nuqtasi; $f''(x_0) > 0$ bo’lsa, **minimum** nuqtasi bo’ladi; 3) x_0 nuqtada birinchi hosila noldan farqli bo’lib, ikkinchi hosila no’lga teng bo’lsa, x_0 nuqta funksiyaning ekstremum nuqtasi va : $f''(x_0) < 0$ bo’lsa, **maksimum** nuqtasi; $f''(x_0) > 0$ bo’lsa, **minimum** nuqtasi bo’ladi

A) 1) B) hammasi D) 2) E) 3)

II darajali testlar

7. $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 6x + 2\frac{2}{3}$ funksiyaninshg ekstremumini toping.

A) $y_{\max} = 10,\ y_{\min} = -\frac{65}{6}$ B) $y_{\max} = 10$

D) $y_{\min} = -\frac{65}{6}$ E) ekstremum yo’q

8. $f(x) = 1/4 \cdot x^4 - 2x^3 + 11/2 \cdot x^2 - 6x + 9/4$ funksiya ekstremumini ikkinchi qoida bilan toping.

A) $\min f(1) = 0$; $\max f(2) = 0.25$; $\min f(3) = 0$

B) $\min f(1) = 0$; $\max f(2) = 0.25$

D) $\max f(2) = 0.25$; $\min f(3) = 0$

E) $\min f(1) = 0$; $\min f(3) = 0$

9. Funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlarini topish ketma-ketligi quyidagi raqamlarning qaysilarida to’g’ri berilgan:

1) $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun: $a)$ kritik nuqtalarni topamiz; *в*) funksiyaning bu kritik nuqtalardagi

qiymatlarini hisoblaymiz; $d)$ bu topilgan qiymatlarni taqqoslab, eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati ekanligini topamiz; 2) $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun: $a)$ kritik nuqtalarni topamiz; $в)$ funksiyaning bu kritik nuqtalardagi va kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz; $d)$ bu topilgan qiymatlarni taqqoslab, eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati ekanligini topamiz; 3) $y = f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish uchun: $a)$ kritik nuqtalarni topamiz; $в)$ funksiyaning kesmaning chetlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz; $d)$ bu topilgan qiymatlarni taqqoslab, eng kichigi funksiyaning berilgan kesmadagi eng kichik qiymati, eng kattasi bu kesmadagi eng katta qiymati ekanligini topamiz.

A) 2) B) 1) D) hammasi E) 3)

10. $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ funksiyaning $[-2;3]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini toping.

A) $y_{ý.êè÷} = 4$, $y_{ý.êàò} = 69$ B) $y_{э.кич} = 4$

D) $y_{э.кат} = 68$ E) bunday qiymatlari yo'q

11. Funksiya grafigining qavariq yoki botiq bo'lishining yetarli shartlari quyidagilarning qaysi raqamlarida to'g'ri berilgan:

1) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya'ni $f''(x) < 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi qavariq bo'ladi; 2) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy, ya'ni $f''(x) < 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi; 3) (a,b) oraliqda differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat, ya'ni $f''(x) > 0$ bo'lsa, bu oraliqda funksiya grafigi botiq bo'ladi.

A) 1),3) B) hammasi to'g'ri D) 2),3) E) 1),2)

III darajali testlar

12. Egilish nuqtalari mavjud bo'lishining yetarli sharti quyidagi raqamlarning qaysilarida to'g'ri berilgan: 1) x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni o'zgartirmasa, x_0 abssissali nuqta egilish nuqtasi bo'ladi; 2) x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni musbatdan manfiyga o'zgartirsa, x_0

abssissali nuqta egilish nuqtasi bo'ladi; 3) x_0 nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun ikkinchi tur kritik nuqta bo'lsa va $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila bu nuqtadan o'tishda ishorasni o'zgartirsa, x_0 abssissali nuqta egilish nuqtasi bo'ladi.

A) 3) B) 1) D) hammasi E) 2)

13. $y = f(x)$ funksiya grafigining $y = kx + b$ og'ma ***asimptotasi*** k va b parametrlarini topish, quyidagi raqamlarning qaysilarida to'g'ri berilgan:

1) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *va* $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx]$;

2) $b = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *va* $k = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - bx]$;

3) $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *va* $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) + kx]$.

A) 1) B) 2) D) 3) E) hammasi noto'g'ri

22. 6-ilova

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funksiyalarning o'sishi va kamayishi oraliqlari tekshirilsin.

1) $y = \ln x$; 2) $y = tg\, x$;

2.Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin va ularning grafiklari yasalsin.

1) $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$; 2) $y = x^2(1 - x)$; 3) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; 4) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

3. $y = 2 + \dfrac{12}{x^2 - 4}$; $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$ funksiyalar grafiglarining qavariqlik va botiqlil oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini toping.

4. Quyidagi funksiyalarning asimptotalarini toping.

1) $y = x - \ln x$;

2) $y = \dfrac{e^x}{x}$;

3) $y = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$.

5. Quyidagi limitlar Lopital qoidasiga asosan topilsin.

1) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$;

1.	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$	2	$\lim\limits_{x\to 0} x^x$
3	$\lim\limits_{x\to 0} tg\,x\cdot\ln x$	4	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

6. To'la xarajatlar chizig'i tenglamasi $K=6\lg(1+3x)$ bo'lsa, limitik xarajat chizig'i tenglamasini yozing?

7. $E_x(f(x))$ $f(x)$ funksiyaning egiluvchanligi bo'lsa, $xf(x)$ funksiya egiluvchanligi $E_x(f(x))+1$ bo'lishini isbotlang.