

**ЎЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА
АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ**

**БЕРДАҚ АТЫНДАҒЫ ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК
УНИВЕРСИТЕТИ**

Магистратура бөлими

Қол жазба ҳуқықында

Баймурзаева Айнур Абдибековна

«Динамикалық системалардың орнықлылығын Ляпуновтың екінші усылы менен
изертлеў»

**Қәнигелик: 5А 480103- «Әмелий математика ҳәм информациялық
технологиялар»**

Әмелий математика ҳәм информациялық технологиялар қәнигелиги
бойынша магистр дәрежесин алыў ушын жазылған

ДИССЕРТАЦИЯ

Илимий басшы:
доц.Р.Мустафаева .

Нөкис-2012

М А З М У Н Ы

КИРИСИҰ	3
---------	---

I БАП. Сызықлы дифференциаллық системалардың шешимлеринің бақаларын оптимизациялаў.

1.1-§. Ляпуновтың квадратлық функциялары жәрдеминде сызықлы дифференциаллық системалардың басланғыш өзгериўлер областын бақалаўды оптимизациялаў	10
1.2-§. Сапалы интеграллық критериясын оптимизациялаў	29

II БАП. Сызықлы дифференциаллық системаларында болып өтиўши процесслерин бақалаў

2.1-§. Сызықлы дифференциаллық системаларында болып өтиўши процесслерин ўақыт бойынша оптимизациялаў	45
2.2-§. Оптимизациялық мәселелерин градиентлик усыллары менен шешиў	54

III Бап. Айырмалы схемалардың оптимал орнықлылық бақаларын Ляпуновтың квадратлық функциялар топарында дүзиў.

3.1-§. Басланғыш өзгериўлерин оптимизациялаў бақалары	60
3.2-§. Интеграллық критериясы ҳәм оны оптимизациялаў	68
3.3-§. Болып өтиўши процесслерин ўақыт бойынша бақалаў	79
САНЛЫ МЫСАЛ	82
ЖУЎМАҚЛАЎ	84
ӘДЕБИЯТЛАР ДИЗИМИ	86

К И Р И С И Ы

Динамикалық системаларын изертлеудің универсал усылларының бири болып А.М.Ляпуновтың екінши усылы ямаса Ляпунов функциялар усылы болып табылады. XIX әсирдің ақырында белгили рус илимпазы тәрепинен усынылған бул усыл өзиниң актуаллығын бүгинги күнге шекем жойтпады. Дәслепки ўақытлары бул усылдың қолланыў областы болып әдеттеги дифференциаллық теңлемелери болып есапланатуғын еди. Буннан былай бул усылы жәрдемінде айырмалы, дифференциаллық-айырмалы, дифференциаллық стохастикалық, дифференциаллық-айырмалы стохастикалық системалары, бөлистирилген параметрлерине ийе системалары хәм т.б. системалар изертленип басланды.

А.М.Ляпуновтың екінши усылын раўажландырыўына биринши үлес қосқан илимпазлар, булар Четаев Н.Г., Малкин И.Г., Персидский К.П хәм т.б. Бул ўақыт аралығында исленген жумыслары Ляпунов теоремаларының шәртлерин пәсейтиўге бағдарланған болды. Кем-кемнен изертлениўши объектлер топары кеңейтирилип, соның менен бирге бул объектлерди изертлегенде, оларға байланыслы болған математикалық машқалаларда көбейип барды. Ляпунов функциялар усылын дифференциал теңлемелер системасын, дифференциал теңлемелерди, импульслық системаларды, улыўмаласқан динамикалық системаларды изертлеўге қолланып хәм бул усыл кеңнен тарқалып баслады.

Ляпунов функциялар усылы системаларды сапасы жағынан изертлеў жумысларын жүргизиўге, олардың шешимлериниң асимптотикалық хәрекетин анықлаўда нәтийжели пайдаланды. Өлшеми үлкен болған системаларды изертлеўде Ляпуновтың вектор функциялар усылы нәтийжели пайдаланбақта.

Егерде Ляпунов функциясы бар болып есапланса, онда ол параметрли берилген топарында бир текли емес болып жасалады, соның менен бирге функцияның сыйпақлығы қәлеген дәрежеде болыўы мүмкин. Усыған сәйкес

бул функциясы жәрдеминде есапланып алынған шешимнің характеристикалары да бир текли емес болып анықланады. Оптимизациялау усылларын раўажланыўы Ляпуновтың «оптимал» функция түсинигиниң пайда болыўына түртки болды, яғный бул функциялар есапланып атырған характеристикаларды әдеўир жақсы баҳалаўшы функциялар болып есапланады.

Динамикалық системаларда сапалы процесслерди изертлеўдиң тийкарғы усылларының бири А.М.Ляпуновтың екинши усылы болып табылады. Оның мәниси анық қәсийетлерге ийе болған функцияларды табыўдан ибарат. Егерде оң мәнисте анықланған функциясы бар болып хәм ол системаның шешимин бойлап тең салмақлы жағдайы орнықлы болады.

Теманың актуаллығы хәм заманагөйлиги.

Динамикалық системаларды изертлеўде, оларды тәрийплеўши дифференциаллық теңлемелер системасында орнықлылық шәртин беретугын теоремалар бизиң әсиримиздиң отызыншы жылларында алынған еди. Кейин ала бул усылы менен шекли айырмалы теңлемелер, дифференциаллық-айырмалы теңлемелерин, дара туўындылы теңлемелерин, стохастикалық теңлемелер системасын, улыўма динамикалық системалардағы процесслердиң шешимлериниң орнықлылығын изертлеўде өзиниң қолланылыўын тапты [5,15,17,18].

Мәселени изертлеў дәрежеси. Динамикалық системалардағы сапалы процесслерин изертлеўдиң Ляпунов усылында анық бир қәсийетлерине ийе болған функцияларды табыўдан ибарат болады. Бул усылдың машқаласы соннан ибарат, бунда изертлениўши система ушын анық бир функцияны дүзиў болып табылады. Сызықлы системаларды изертлеўде қолланылатугын Ляпуновтың квадратлық функциясы бурыннан-ақ белгили еди. Кейин ала сызықлы емес системаларды изертлеўде анық класстағы системалар ушын, анық көринистеги функцияларды ислеп шығыў қыйын шешилетуғын мәселеге айланды. Оны шешийў жолларының бири функцияның анық параметрлик көринисте берилиўи хәм параметрлер көплигинде системаға

муўапық оның толық туўындысын минимумластырыў мәселесин шешиўден ибарат.

Ляпунов функциясы усылының баҳалығы соннан ибарат, ол динамикалық системаның базы-бир санлы характеристикасын есаплаўға мүмкиншилик береді. Булар характеристикаларына орнықлылық областы, қайта ретлестириў шамасы, өтиў процессиниң ўақты бойынша хәр қыйлы интеграл критериялары болып есапланады [1,11,13 ,15]. Хәр қыйлы Ляпунов функциялары хәр қыйлы баҳалықты береді. Булардың барлығы ең жақсы функцияны излеўге хәм Ляпуновтың экстремаллық функциясы деген түсиникке алып келеді.

Улыўма қойылыўы бойынша бул мәселе вариациялық есаплаў мәселеси болып табылады. Егер функция анық класстағы алдын-ала берилген параметрлерде сайланып алынса, онда ол әпиўайы жақсы нәтийже береді. Бунда вариациялық мәселе шекли сандағы өзгериўшили функцияны оптималластырыў мәселесине өтеді. Квадратлық көринистеги Ляпунов функциясын дүзиў жақсырақ үйренилген. Бул жерде параметрлер сыпатында симметриялық оң анықланған матрицалардың элементлери қатнасады. Системаны шешиўдеги барлық харктеристикалар бул матрицалардың экстремаллық меншикли санлары арқалы аңлатылады хәм оптималластырыў мәселеси мақсет функциясы экстремаллық мәниске ерисетуғын оң анықланған матрицаларды табыў баҳасын оптималластырыў

Диссертацияның мақсети хәм ўазыйпалары. Диссертацияның тийкарғы мақсети айырмалы схемалардың орнықлылығының оптимал баҳаларын Ляпуновтың квадратлық функциялар топарында дүзиўди изертлеў болып есапланады. Бул функцияның бар болыўы системаның орнықлылы болатуғынлығының зәрүрли хәм жеткиликли шәртлери болады. Бирақ орнықлылықты орнатыўдан басқа, бул функциясы шешимниң бир қатар характеристикаларын есаплаўға мүмкиншилик береді. Ляпунов функциялары жәрдемінде шешимниң координата басына қарата умтылыўының монотонлық дәрежесин баҳалаўға, сапа көрсеткишлериниң

хэр қыйлы түрдеги интеграл критерияларын, ўақыт бойынша болып өтиўши характеристикалары ҳәм т.б. анықлаўға болады.

Изертлеў предмети ҳәм объекти. Шекли айырмалы теңлемелер системасының орнықлылығының оптимал баҳаларын Ляпуновтың квадратлық функциялар топарында изертлеў. Изертлеўдиң тийкарғы усылы болып А.М. Ляпуновтың квадратлық түрине ийе функциясы алынды.

Базы-бир анық шәртлерди келтирип шығарыўда ҳәм олардың шешиў алгоритмлерин дүзиўде сызықлы алгебраның, дифференциаллық теңлемелер теориясының ҳәм сызықлы емес программаластырыў усыллары пайдаланылды.

Изертлеўлерди алып барыў усыллары. Шекли айырмалы схемалардың орнықлылық баҳаларын Ляпуновтың квадратлық функциялары жәрдемінде анықланды. Сызықлы дифференциаллық системалардың орнықлылы болатуғын шәртлери алынған, соның менен бирге шешимниң бир қатар характеристикаларын есаплаўға мүмкиншилик береді. Ляпунов функциялары жәрдемінде шешимниң координат басына қарата умтылыўының монотонлық дәрежесин баҳалаўға, сапаның хэр қыйлы түрдеги интеграллық критерияларын, болып өтиўши процесслердиң ўақыт бойынша характеристикалары ҳәм т.б. анықланған.

Изертлеўдиң илимий жаңалығы. Оптимизациялық усылларынан пайдаланыў нәтийжесинде басланғыш өзгериўлерин оптимизациялаў баҳалары ҳәм болып өтиўши процесслердиң ўақыт бойынша баҳалары алынған.

Изертлеўдиң әмелий ҳәм илимий нәтийжелериниң апробациясы.

Диссертация жумысында алынған тийкарғы нәтийжелери Өзбекстан Республикасы илимлер академиясы Қарақалпақ бөлимінде 20 апрель 2012 жылы өткерилген Қарақалпақстан Республикасы XII-ши жас алымлар конференциясында «Айырмалы теңлемелер системасының орнықлылығын Ляпуновтың квадратлық функциялары жәрдемінде изертлеў» темасында баянат жасалды (XII жас алымлар конференциясы.-Нөкис: «Илим»

баспаханасы, 2012, 4 бет). Жәнеде Бердақ атындағы Қарақалпақ мәмлекетлик университети магистратура бөлими «Магистрантлардың илимий мийнетлери» топламында «Асимптотическая устойчивость систем с одним запаздыванием» темасында илимий мақаласы басылып шықты. (ҚМУ магистрлериниң илимий мийнетлери топламы.-Нөкис: ҚМУ баспаханасы, 2012, 15-16 бетлери).

Жұмыстың дүзилиси хәм көлеми. Магистрлик диссертация кирисиў бөлиминен, үш баптан хәм жети параграфтан, жуўмақлаў бөлиминен хәм пайдаланылған әдебиятлар дизиминен турады.

Кирисиў бөлиминде жұмыстың темасының актуаллығы, диссертация жұмысының мақсети хәм ўазыйпалары, изертлеў объекти, изертлеўдиң илимий жаналығы, теориялық хәм әмелий баҳалылығы баянланады.

Диссертацияның I бабында турақлы коэффициентлерине ийе болған сызықлы дифференциаллық теңлемелер системалары қаралған. Системаның шешими Ляпунов функциялар усылы менен жүргизилген. Турақлы коэффициентлерине ийе болған сызықлы дифференциаллық теңлемелер системалары орнықлылық көрсеткишлерин оптимизациялаў мәселеси қаралады. Бунда квадратлық формасы түриндеги Ляпунов функциясы жасалады. Ляпунов функциясы жәрдемінде системаның орнықлылығы изертленип хәм басланғыш өзгерислерин баҳалаўши байланыслар келтирилип шығарылды. Бул баҳалар Ляпунов функциясын сайлап алыўға байланыслы болып хәм Ляпунов функциясындағы H матрицасының $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ мәнислерине байланыслы болады. Усы $\lambda_{\max}, \lambda_{\min}$ мәнислери тийкарында $\varphi_1(H) = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$ функциясы дүзиледи. Ляпунов теңлемелердиң шешимлер көплигинде бул функцияның минимумлаў мәселеси қаралады. Бул бапта басланғыш өзгерислерин баҳалаўши Ляпунов функцияларының анықламалары келтирилген.

Диссертацияның II бабында сызықлы дифференциаллық системаларында болып өтиўши процесслерин баҳалаў мәселелери қаралған, бунда сызықлы дифференциаллық системаларында болып өтиўши

процесслерин $Q(x) = x^T Hx$ Ляпуновтың квадратлық функциясы жәрдеминде, системаның шешиминің ұақыт бойынша характеристикасын оптимизациялаў мәселеси қаралған. Оптимизациялаў мәселесин градиентлик усыллары менен шешиў жоллары қаралған.

Диссертацияның III бабында айырмалы схемалардың орнықтылық бақаларын Ляпуновтың квадратлық функциялар топарында дүзиў мәселеси қаралады. Изертлеў жумыслары Ляпуновтың екінши усылы менен алып барылған. Ляпунов функциясы квадратлық формасында дүзиледи. Матрицасы Ляпуновтың шекли айырмалы теңлемесин қанаатландыратуғын, оң анықланған квадратлық формасының бар болыўы, асимптотикалық орнықтылы болатуғынлығының зәрүрли хәм жеткиликли шәртлери болады. Шекли айырмалы теңлемениң шешиминің жыйнақтылық бақалары алынған. Бул бақалар жәрдеминде орнықтылық характеристикалары есапланады. Бул баптың 1-ши параграфында шекли айырмалы теңлемелер системасы қаралады. Шекли айырмалы теңлемелери ушын орнықтылық анықламалары келтирилип берилген. 2-ши параграфында систаманы сапасы жағынан тәрийплеўши характеристикаларының бири болған интеграллық критериясы хәм оны оптимизациялаў мәселелери қаралады. Көпшилик жағдайларда системаның сапасы(системаны басқарыў) қаралып атырған ұақыт аралығында, оның интегралы бойынша бақаланады. Бундай түрдеги сапалық критериясын интеграллық деп атайды. Бунда басланғыш өзгерислери бойынша, сапалық интеграллық(қосындысы) критериясы бойынша хәм болып өтиўши процесслердиң ұақты(берилген дәллигине жетисиў ушын, орынланатуғын адымлар саны) бойынша үш түрли мақсет функциялары киритиледи. Системаның түринен сапалық критериясының байланысы изертленеди хәм бир қатар оптимизациялаў алгоритмлери алынған.

I БАП

Сызықлы дифференциаллық системалардың шешімлеринің бақаларын оптимизациялау

Бул бапта тұрақлы коэффициентлеріне ийе сызықлы дифференциаллық теңлемелер системаларын қараймыз. Системаның шешімлерін изертлеу әмелдерін Ляпуновтың функциялар ұсылы менен жүргіземіз. Олардың ишінде Ляпуновтың квадратлық түріндегі функциясы ең қолайлы болып есапланады. Бул функцияның бар болыуы системаның орнықтылығы болатуғынлығының зәрүрлі хәм жеткілікті шәрттері болады. Бірақ орнықтылықты орнатуыдан басқада, шешімнің бір қатар характеристикаларын есапалауға мүмкіншілік береді. Ляпунов функциялары жәрдемінде шешімнің координат басына қарата ұмтылуы монотонлық дәрежесін бақалауға, сапаның хәр қыйлы түрдегі интеграл критерияларын, болып өтуіші процесстердің ұақыт бойынша характеристикалары хәм т.б. анықлауға болады.

Ляпунов функциясы жәрдемінде есапланған характеристикалары системаның параметрлеріне хәм Ляпунов функциясы кириуші матрицалардың меншікті санларына байланыссы болады. Бул функцияларын жасауда пайдаланатуғын матрицалары шекленген кеңістігінде конус түрінде көпшігін пайда етеді. Сонлықтан квадратлық функциялар топарына тийісін болған хәм әдеуір дәл бақалаушы функцияны табыу, яғнай бул жерде Ляпуновтың оптимал функциясын есаплап табыу мәселесі қойылады.

Орнықтылық хәм байланыс түсініклердің тийкарғы анықламаларын келтіреміз. Егерде әдеттегі дифференциаллық теңлемелер системасын қарастырсақ

$$\dot{x}(t) = f(x), \quad x \in R^n, \quad t \geq t_0, \quad f(0) = 0,$$

координат көшеринің басын шешими ретінде ийе болған, яғный $x(t) \equiv 0$ болған, онда төменде берілген орнықтылықтың анықтамалары орынлы болады.

Анықлама. $x(t) \equiv 0$ шешими Ляпунов бойынша орнықты деп аталады, егерде кәлеген $\varepsilon > 0$ саны үшін сондай $\delta(\varepsilon) > 0$ бар болып хәм $|x(t_0)| < \delta(\varepsilon)$ да системаның кәлеген бир $x(t)$ шешими үшін $t > t_0$ да $|x(t)| < \varepsilon$ теңсизлиги орынланса.

Анықлама. $x(t) \equiv 0$ шешими экспоненциал орнықтылы деп аталады, егерде $N > 0, \gamma > 0$ турақтылары бар болып хәм $t > t_0$ да системаның кәлеген бир $x(t)$ шешими үшін $|x(t)| \leq N |x(t_0)| \exp\{-\gamma(t - t_0)\}$ орынланса.

1.1 -§. Ляпуновтың квадратлық функциялары жәрдемінде сызықты дифференциаллық системалардың басланғыш өзгеріулер областын бахалауды оптимизациялау

Турақты коэффициентли сызықты дифференциаллық теңлемелер системасын қараймыз:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t) \in R^n \tag{1.1.1}$$

Дәслепки берілген $x(t_0) = x_0$ шәртин қанаатландыратуғын (1.1) системаның шешимин $x(t)$ -деп белгилеймиз. Ляпунов функциясын $\mathcal{Q}(x) = x^T H x$ квадратлық форма түрінде аламыз. (1.1.1) системасын есапқа алып, оның толық тууындысы төмендеги көриниске ийе болады:

$$\dot{\mathcal{Q}}(x(t)) = \dot{x}^T(t) H x(t) + x^T(t) H \dot{x}(t) = x^T(t) [A^T H + H A] x(t)$$

Егерде, симметриялық оң анықланған H -матрицасын сондай етип сайлап алсақ, оның $\mathcal{Q}(x)$ функциясының толық тууындысы, алдын ала берілген терис анықланған квадратлық формасына тең болатуғындай етип яғный

$$\dot{\mathcal{G}}(x(t)) = -\dot{x}^T(t) C x(t)$$

онда H – матрицасын табыў мәселеси Ляпуновтың матрицалық теңлемесин шешиўге алып келинеди

$$A^T H + HA = -C. \quad (1.1.2)$$

Егерде A – матрицасы асимптотикалық орныклы болса, онда (1.1.2) теңлемеси жалғыз бир шешимге ийе болатуғынлығы [1] дәлилленген. Соның менен бирге, егерде C – матрицасы оң анықланған болса, онда пайда болған H – матрицасы да оң анықланған болады.

Әмелий мәселелерди шешиўде тек ғана орныклылық жағдайын анықлаў мәселесинен басқа, $\delta(\varepsilon)$ -функциясын есаплаў мәселеси де әхмийетли болып есапланады. Бунда $\delta(\varepsilon)$ -функциясы қайта дүзиўди сыпатлаўшы шама болып есапланады. Мына берилген $U_\delta = \{x : |x| < \delta(x)\}$ ны дәслепки берилген қозғалыс областы деп атаймыз. $\mathcal{G}(x) = x^T H x$ -Ляпунов функциясы жәрдемінде U_δ -областын мынандай етип алыўға болады. Квадратлық функциялары ушын

$$\lambda_{\min}(H) \cdot |x|^2 \leq \mathcal{G}(x) \leq \lambda_{\max}(H) \cdot |x|^2, \quad (1.1.3)$$

теңсизлиги орынлы болады, бул жерде $\lambda_{\min}(\cdot), \lambda_{\max}(\cdot)$ – матрицаның ең киши хәм ең үлкен меншикли мәнислери. (1.1.1) системасына муўапық, функцияның толық туўындысы ушын

$$\dot{\mathcal{G}}(x) \leq \lambda_{\min}(C) \cdot |x|^2$$

теңсизлиги орынлы болады. (1.1.3) теңсизлигинен пайдаланып мынаған ийе боламыз

$$\frac{d\mathcal{G}(x)}{dt} \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \mathcal{G}(x)$$

Бул дифференциаллық теңсизлигиниң шешиминен мынаған ийе боламыз:

$$\mathcal{G}(x) \leq \mathcal{G}(x_0) e^{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)}$$

Бул жерде кайтадан (1.1.3) теңсизлигин пайдаланып, төмендегини жазыуға болады:

$$x(t) \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}} |x_0| \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)\right\} \quad (1.1.4)$$

(1.1.1) системаның $x(t) \equiv 0$ шешими асимптотикалық орнықтылы болғаны ушын, онда кейинги (1.1.4) қатнасынан төмендегиге ийе боламыз:

$$\sup\{x(t)\} = \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}} |x_0|$$

ямаса, ε хәм $\delta(\varepsilon)$ шамаларынан пайдаланып, төмендегиге ийе боламыз:

$$\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}} \delta(\varepsilon) \leq \varepsilon$$

Демек, U_δ -дәслепки берилген қозғалысларды баҳалау ушын мына төмендеги байланыс орынлы болады:

$$\delta(\varepsilon) \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)}} \cdot \varepsilon.$$

Көринип турғандай баҳаның дәллігі $\mathcal{Q}(x) = x^T H x$ -Ляпунов функциясын сайлап алыуға байланыслы болып хәм бул баҳасы $\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)$ шамасынан киши болған сайын, елде дәлірек болады. Егерде $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)$ деп белгилесек, онда Ляпунов функциялардың шешимлер көплигинде $\varphi_1(H)$ функциясын минимизациялау мәселесине ийе боламыз. Онда төменде берилген математикалық программаластыруу мәселесине ийе боламыз:

$$H_0 = \arg \inf_{G(H)} \{\varphi_1(H)\}$$

бул жерде $G(H)$ -оң анықланған H матрицалар көплигі, бул матрицалары ушын $A^T H + H A$ терис анықланған болады.

1.1-анықтамасы. H_0 матрицасы төмендегиге болған

$$H_0 = \arg \inf_{H \in G(H)} \{\varphi_1(H)\}, \varphi_1(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \quad (1.1.5)$$

$\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясын дәслепки қозғалысты бахалау үшін оптимал деп атаймыз.

(1.1.5) оптимизациялық мәселенің шешімлеринің бар болатуғынлығын хәм ол жалғыз бир шешим болатуғын мәселелерин үйренемиз, яғный $n > 2$ де дәслепки қозғалыс областын оптимал бахалаушы $\mathcal{G}_0(x)$ функциясын табу мәселеси.

$G(H)$ областын қараймыз. Бунда, егерде $H_1 \in G(H)$ хәм $H_2 \in G(H)$ болғанда, қәлеген α – турақлысы үшін $0 < \alpha < 1$ болғанда $\alpha H_1 + (1 - \alpha)H_2 \in G(H)$ болатуғынлығын көриуге болады. Буннан тысқары, егерде $H \in G(H)$ болса, онда қәлеген бир μ – үшін, $0 < \mu < \infty$ болғанда $\mu H \in G(H)$ болады. Демек, $G(H)$ – қаптал бетин өз ишине алмайтуғын, төбеси координат басында жайласқан дөңес конус болады. H – матрицасы симметриялық болғаны үшін, бул кеңісликтің өлшеми $n(n+1)/2$ болады.

Бунда $1 \leq \varphi_1(n) < \infty$ болатуғынлығы мәлим. Сонлықтан Ляпуновтың барлық функцияларының ишинде $\varphi_1(H_0) = 1$ болатуғын функциясы «ең жақсы» (A – матрицасының түрине ғәрезли болған) функциясы болып есапланады, яғный бунда $\mathcal{G}_0(x) = |x|^2$. Геометриялық жақтан $\varphi_1(H)$ эллипстің көшер қатнастарын анықлайды, ал бул болса, яғный $\partial \mathcal{G}^\alpha = \{x : \mathcal{G}(x) = \alpha\}$ – Ляпунов функциясының бет қәддиси болып есапланады. Ляпунов функцияларының ишинде – сфералық функциясы «ең жақсы» болып есапланады.

Ляпуновтың оптимал, яғный $\varphi_1(H_0) = 1$ болатуғын функциясының бар болыуының зәрүрли хәм жеткиликли шәртлерин келтиремиз.

1.1.1-теоремасы. (1.1.2) Ляпунов теңлемеси $\varphi_1(H_0) = 1$ болатуғын $H_0 \in G(H)$ – матрицасын шешими ретинде сол жағдайда ийе болады, егерде $A_r A^T$ – терис анықланған матрицасы болса.

Зәрүрли шәртлери. Мейли оң анықланған C_0 -матрицасы бар болсын. Бул матрицасы ушын (1.1.2) теңлемеси H_0 шешимине ийе болып хәм бул шешими ушын $\varphi_1(H_0) = 1$ -тең болсын. Қәлеген бир H – симметриялық матрицасы ушын ортонормалласқан U – матрицасы бар болып хәм ол ушын $U^T H U$ -матрицасы диагоналық структурасына ийе болып, соның менен бирге $U^T U = E$ болатуғынлығы мәлим. $\lambda_{\max}(H_0) / \lambda_{\min}(H_0) = 1$ болғаны себепли, яғнай $\lambda_1(H_0) = \lambda_2(H_0) = \dots = \lambda_n(H_0) = \lambda$ болғаны ушын, онда $V^T H_0 V = \lambda E$ болады. Соның менен бирге H_0 -оң анықланған болғаны себепли $\lambda > 0$ болады.

Буннан

$$(V^T A U)^T (V^T H_0 U) + (V^T H_0 U)(V^T A U) = -(V^T C_0 U)$$

болады. $V^T H_0 V = \lambda E$ болғаны ушын, онда

$$V^T A^T V + V^T A V = -\frac{1}{\lambda} V^T C_0 V$$

Демек, $A + A^T = -\frac{1}{\lambda} C_0$ - терис анықланған матрицасы болады.

Жеткиликли шәртлери. Мейли $A + A^T$ -терис анықланған матрицасы болсын. Онда $C_0 = -(A + A^T)$ деп есаплап, $H_0 = E$ ге ийе боламыз хәм буннан демек, $\lambda_{\max}(H_0) / \lambda_{\min}(H_0) = 1$ болады.

$G(H)$ көплиги ашық конус болғаны себепли, бунда $\varphi_1(H_0) = 1$ болатуғын H_0 -оң анықланған матрицасы, конустың шегарасына тийисли болатуғын жағдайы болыў мүмкин.

1.1.1-леммасы. Мейли қәлеген бир $\varepsilon > 0$ ушын Ляпуновтың матрицалық теңлемесиниң шешими болатуғын H_ε матрицасы ушын $\varphi_1(H_\varepsilon) < 1 + \xi$ теңsizлиги орынланатуғын C_ε -оң анықланған матрицасы бар болсын. Онда $\{C_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ симметриялық оң анықланған матрицалар избе-излиги бар болып хәм бул избе-излик \bar{C} -симметриялық оң толық емес анықланған матрицасына жуўықласады хәм оған сәйкес болған

$\{H_k\}, k = 1, 2, \dots$ избе-излиги H -оң анықланған матрицасына жуықласады, соның менен бирге

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = \varphi_1(\bar{H}) = 1.$$

Дәлилленіуі. Мейли $\varepsilon = 1/k$ хәм $\varphi_1(H_k) < 1 + 1/k$ болсын. Ляпунов теңлемесин $|C_k|$ ға бөліп, мынаған ийе боламыз:

$$A^T \frac{H_k}{|C_k|} + \frac{H_k}{|C_k|} A = -\frac{C_k}{|C_k|}.$$

Бунда, меншик санлары пропорционал болып өзгергенин есапқа алып, $|C_k| = 1, k = 1, 2, \dots$ (бул жерде $|C_k| = \lambda_{\max}(C_k)$) болады деп есаплаймыз. $\{C_k\}, k = 1, 2, \dots$ избе-излиги бирлік радиусына ийе болған сфераға тийисли болатуғынлығын $|C_k| = 1$ теңлиги аңлатады хәм оның компакт болатуғынлығынан $\{C_k\}$ избе-излигинен $\{C_{k_m}\} \rightarrow \bar{C}$ үлес избе-излигин ажыратып алыуға болады, бунда \bar{C} -оң толық анықланбаған болады.

A – асимптотикалық орнықты болғаны ушын, онда мына оператордың

$$F[H] = A^T H + H A$$

меншик санлары ушын $\lambda(F) = \lambda_i(A) + \lambda_j(A) \neq 0, 1 \leq i \leq n$ [2] орынланады. Демек, $F[H]$ операторы айнымалы емес болып есапланады. Сонлықтан, $F^{-1}(C)$ болған операторы бар болып хәм ол үзликсиз кері оператор болады, хәм Ляпунов теңлемесиниң H – шешими үзликсиз түрде C – ға байланысly болады. Демек, $\{C_{k_m}\}$ избе-излигине уқсас, $\{H_{k_m}\}$ – үлес избе-излиги базы–бир \bar{H} матрицасына жуықласады. $\{H_{k_m}\}$ – ушын лемманың тастыйқлаулары дурыс болатуғынлығын корсетемиз. Мынаған ийе боламыз:

$$|A^T| \cdot |H| + |A| \cdot |H| \geq |C|.$$

$|C_k| = 1$ болғаны ушын, онда

$$\lambda_{\max}(H) \geq \lambda_{\max}(C) / 2|A| = 1/2|A| > 0$$

болады.

Матрицаның элементлерінен, характеристикалық теңлемениң коренлерінің үздіксіз ғәрезлі болғаны себепли

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\max}(H_{k_m}) = \lambda_{\max}(\bar{H}), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{\min}(H_{k_m}) = \lambda_{\min}(\bar{H}).$$

болады. $\lambda_{\max}(\bar{H}) > 0$ болғаны себепли, соның менен бирге

$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_{k_m}) = 1$ болғаны ушын, онда $\lambda_{\min}(\bar{H}) > 0$ болады. Демек,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_{k_m}) = \varphi_1(\bar{H}) = 1.$$

1.1.2-теоремасы. $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$ болатуғын $\{H_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ оң

анықланған матрицалар ізбе-излигин (1.1.2.) Ляпунов теңлемесінің шешімі ретінде тек сол жағдайда ийе болады, егерде $A + A^T$ -матрицасы толық емес теріс анықланған болса.

Зәрүрлі жағдайы. Мейли $\{C_k\}$ -, соның менен бирге $\{H_k\}$, $k = 1, 2, \dots$ ізбе-изліктері бар болсын хәм олар ушын $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$ орынлансын. Онда 1.1.1 леммасы бойынша $\{H_{k_m}\}$ хәм $\{C_{k_m}\}$ үлес ізбе-изліктерін сайлап алыуға мүмкін болып, олар \bar{H} -оң анықланған матрицасына хәм \bar{C} -оң толық емес анықланған матрицаларына жууықласып, соның менен бирге

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_{k_m}) = \varphi_1(\bar{H}) = 1.$$

(1.1.3) Ляпунов теңлемесін сәйкес болған U -ортогонал матрицасына көбейтип хәм 1.1.1 теоремасында келтирилген түрлендіріулерді орышлап, мына томенде берілген теңлигине ийе боламыз:

$$A + A^T = -\frac{1}{\lambda} \bar{C},$$

яғнай $A + A^T$ матрицасы оң толық емес анықланған болады.

Жеткиликли шартлери. Мейли $A + A^T$ -толық емес терис анықланған матрицасы болсын. Енди $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$ болатуғын $\{C_k\}$ -избе-излигин көрсетеміз. Мейли

$$C_k = (A + A^T) + \frac{1}{k} E.$$

Бунда C_k -матрицасы оң анықланған болады. Ляпунов теңлемесин шешіп, $H_k = H'_k + E$ ийе боламыз. Бирақ H'_k мына теңлемеден анықланады:

$$A^T H'_k + H'_k A = -\frac{1}{k} E.$$

Шешими теңлемениң оң қаптал бөлегине үзликсиз ғәрезли болған себепли

$\lim_{k \rightarrow \infty} (H'_k) = O$, бунда O -нольге тең болған матрицасы. Демек,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (H_k) = E$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$$

болады.

1.1.1-салдары. Егерде $A + A^T$ матрицасының меншик мәнислери оң емес болып хәм олардың ишинде нольге тең болған санлары бар болса, онда берилген дәслепки мағлыұматлар бойынша оптимал болатуғын $\mathcal{G}_0(x)$ Ляпунов функциясы, бунда $H_0 \in G(H)$ жоқ болып есапланады.

Дәлилениуи. 1.1.2 теоремадан $C_k = -(A + A^T) + \frac{1}{k} E$ деп есаплап,

$\lim_{k \rightarrow \infty} (H_k) = E$ ийе боламыз. Демек, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_1(H_k) = 1$ болады, бирақ

$\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = -A + A^T$ оң анықланған матрицасы болмайды, яғный

$H_0 = E \notin G(H)$ болады. Буннан $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 \in G(H)$ оптимал болатуғын Ляпунов функциясы бар болып есапланбайды.

Егерде $G(H)$ областын карастырсақ, онда $\mathcal{G}_0(x)$, $H_0 \in G(H)$ -Ляпуновтың оптимал функциясы бар болатуғын жағдайы 1.1 теоремасында көрсетілген шәртлери менен анықланатуғынлығын корсетемиз.

1.1.3-теоремасы. $\mathcal{G}_0(x)$, $H_0 \in G(H)$ оптимал функциясы сол жағдайда бар болады, егерде $A + A^T$ терис анықланған функциясы болса.

Зәрүрли жағдайы. Мейли Ляпуновтың оптимал болған $\mathcal{G}_0(x)$ функциясы бар болсын, яғный (1.1.2) теңлемесиндеги H_0 хәм C_0 лар оң анықланған матрицалары бар болып хәм

$$\inf_{H \in G(H)} \{\varphi_1(H)\} = \varphi_1(H_0) = \alpha$$

болсын.

Енди $\alpha = 1$ болатуғынлығын көрсетемиз. Мейли, $\alpha > 1$ болсын деп кери жағдайдан баслаймыз. Барлық ўақытта U -ортогонал матрицасы бар болып хәм ол H_0 матрицасын диагонал түрине алып келеди, яғный

$$U^T H_0 U = \begin{bmatrix} \lambda_1(H_0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_0) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_0) \end{bmatrix} = \Lambda(H_0)$$

Мейли $\lambda_{\min}(H_0) = \lambda_{l_1}(H_0) = \dots = \lambda_{l_k}(H_0)$, $l < n$ болсын. S – матрицасын

$$S = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n \end{bmatrix},$$

киритемиз, бунда $j \neq l_1, l_2, \dots, l_k$ болғанда $\mu_{l_1} = \mu_{l_2} = \dots = \mu_{l_k} = 1$, $\mu_j = 0$ болады. C_0 матрицасы оң анықланған болғаны ушын, онда жеткиликли киши болған $\delta > 0$ -да,

$$C_1 = C_0 - \delta(A^T U S U^T + U S U^T A)$$

матрицасы да оң анықланған болады. Енди, H_1 матрицасы

$$A^T H_1 + H_1 A = -C_1$$

теңлемесинен пайда болған хәм H_0 матрицасы

$$H_0 = H_1 - \delta USU^T$$

катнасы менен байланыслы болғанлары ушын, онда

$$\begin{aligned} \varphi_1(H_1) &= \frac{\lambda_{\max}(H_0 + \delta USU^T)}{\lambda_{\min}(H_0 + \delta USU^T)} = \frac{\lambda_{\max}[U^T(H_0 + \delta USU^T)U]}{\lambda_{\min}[U^T(H_0 + \delta USU^T)U]} = \\ &= \frac{\lambda_{\max}[\Lambda(H_0 + \delta \mathcal{S})]}{\lambda_{\min}[\Lambda(H_0) + \delta \mathcal{S}]} = \frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0) + \delta} < \varphi_1(H_0) = \alpha. \end{aligned}$$

болады.

Солай етип H_1 матрицасын жасап алып хәм бул матрицасы ушын $1 \leq \varphi_1(H_1) < \alpha$ теңсизлиги орынланады. Соның ушын $\alpha > 1$ болады деген болжаўлар надурис болады.

Демек, $\alpha = 1$ болады хәм 1.1.1 теоремадан $A + A^T$ матрицасының терис анықланған болатуғынлығы келип шығады.

Жеткиликли жағдайы. Егерде $A + A^T$ терис анықланған болса, онда $C_0 = -(A + A^T)$ деп есаплап, $H_0 = E$ хәм $\varphi_1(H_0) = 1$ ийе боламыз.

$\varphi_1(H)$ функциясының анықланыў областын кеңейтеміз. Ол ушын $G(H)$ конусына, оның қаптал бетин киритеміз, яғный енди $H \in \bar{G}(H)$ қараймыз, бул жерде

$$\bar{G}(H) = G(H)U\partial G(H), \quad \partial G(H) = \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) = 0\}$$

$G(H)$ көплиги туйық болып есапланады, соның менен бирге, егерде $\bar{H} \in \partial G(H)$, онда \bar{H} толық емес анықланған болыўы мүмкин, яғный \bar{H} матрицасын Ляпунов функциясын жасаў ушын улыўма айтқанымызда пайдаланыўға болмайды.

1.1.4-теоремасы. Дәслепки берілген мағлыўматларды бахалаў хәм олар ушын $\varphi_1(H_0) = 1$ болатуғын оптимал болған $\mathcal{Q}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясы, бунда $H_0 \in \bar{G}(H)$, сол жағдайда бар болады, егерде $-(A + A^T)$ толық емес оң анықланған болса.

Зэрүрли жағдайы. Мейли $H_0 \in \overline{G}(H)$ хәм $\varphi_1(H_0) = 1$ болсын. Онда $\lambda_1(H_0) = \lambda_2(H_0) = \dots = \lambda_n(H_0) = \lambda$ болады. Ляпунов теңлемесин төмендеги түрге, яғный

$$U^T [A^T (\lambda E) + (\lambda E) A] U = -U^T C_0 U$$

алып келиўши U ортогонал матрицасы бар болады.

Буннан $A + A^T = -\frac{1}{\lambda} C_0$ болады, себеби $\lambda_{\min}(C_0) = 0$ болғаны ушын, онда

$-(A + A^T)$ толық емес оң анықланған болады.

Жеткиликли жағдайы. $C_0 = -(A + A^T)$ деп есаплап, $\varphi_1(H_0) = 1$ ийе боламыз. $-(A + A^T)$ толық емес оң анықланған болғаны ушын, онда $H_0 \in \overline{G}(H)$ болады.

$-(A + A^T)$ матрицасы толық емес оң анықланбаған, яғный $\lambda_{\min}(-A - A^T) < 0$ жағдайын қараймыз. Бунда базы-бир оптимал функциясының бар болатуғынлығын, бирақ $\varphi_1(H_0) > 1$ хәм H_0 матрицасын улыўма жағдайда бир текли емес етип жасаўға болатуғынлығын көрсетейик.

1.1.5-теоремасы. Мейли $(A + A^T)$ матрицасы толық емес оң анықланбаған болсын. Онда оптимал болыўдың зэрүрли шәрти болып C_0 дың толық емес оң анықланған матрица болыўы есапланады, яғный $\lambda_{\min}(C_0) = 0$ хәм буннан $H_0 \in \partial G(H)$ болады.

Дәлшлениўи. Мейли H_0 хәм C_0 -матрицалары оптимизациялық мәселениң шешими болып хәм $H_0 \in G(H)$ болсын, яғный C_0 -оң анықланған болып хәм $\lambda_{\min}(C_0) > 0$ болсын деп кери жағдайдан баслаймыз. Бунда Ляпунов теңлемесиниң шешими болатуғын \overline{H} , \overline{C} – жуп матрицаларының бар болыўын хәм $\varphi_1(\overline{H}) < \varphi_1(H_0)$ болатуғынлығын корсетейик. Уйғарыўлар бойынша $\lambda_{\min}(C_0) > 0$, онда

$$0 < \lambda_{\min}(C_0) = \lambda_1(C_0) \leq \dots \leq \lambda_n(C_0) = \lambda_{\max}(C_0)$$

болады.

Айрықша емес, ортогонал U матрицасы бар болып, бул матрица C_0 -ды диагональ матрицасына алып келеди, яғни

$$U^T C_0 U = \Lambda(C_0)$$

Ляпунов теңлемесін шеп қаптал тәрепінен U^T -ға көбейтип хәм оң қаптал тәрепінен U -ға көбейтип

$$A_1^T H_1 + H_1 A = -\Lambda(C_0)$$

теңлемесіне ийе боламыз, бунда

$$A_1 = U^T A U, \quad H_1 = U^T H_0$$

болады.

$A_1 + A_1^T = U^T (A + A^T) U$ болғаны ушын, онда $A_1 + A_1^T$ хәм $-(A_1 + A_1^T)$ -симметриялық матрицалар теңдей болған

$$\lambda_i(-A_1 - A_1^T) = \lambda_i(-A - A^T), \quad i = 1, n$$

меншик санларына ийе болады хәм олар

$$\lambda_1(-A - A^T) \leq \lambda_2(-A - A^T) \leq \dots \leq \lambda_n(-A - A^T)$$

болады.

$-(A + A^T)$ матрицасы оң анықланбаған болып есапланады, онда $\lambda_1(-A - A^T) < 0$ болады. $\delta = (\lambda_1(-A - A^T)) / \lambda_{\min}(C_0)$ белгилеулер киритип хәм

$$A_1^T H_1 + H_1 A = (A_1 + A_1)^T - \delta \Lambda(C_0)$$

болған Ляпунов теңлемесін қараймыз.

$-(A_1 + A_1)^T - \delta \Lambda(C_0)$ -матрицасы толық емес оң анықланғанлығын көрсетеміз. Хәқыйқатында да,

$$-(A_1 + A_1)^T - \delta \Lambda(C_0) = -(A_1 + A_1)^T + \left| \lambda_1(-A - A^T) \cdot E + \delta \Lambda_2(C_0) \right|$$

болады, бул жерде $\Lambda_1(C_0) = \Lambda(C_0) - \lambda_{\min}(C_0) \cdot E$.

Мына теңсізлігі

$$0 < \lambda_{\min}(C_0) = \lambda_1(C_0) \leq \lambda_2(C_0) \leq \dots \leq \lambda_n(C_0)$$

орынланғанлығы себепли хәм $\delta > 0$ болғаны ушын, онда $\delta\Lambda_1(C_0)$ -матрицасы толық емес оң анықланған болады. $-(A_1 + A_1^T) + |\lambda_1(-A - A^T)| \cdot E$ матрицасының меншик санлары болып

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_i = \lambda_i(-A - A^T) + |\lambda_1(-A - A^T)| \geq 0, \quad i = \overline{2, n}$$

болып есапланады. Буннан $-(A_1 + A_1^T) + \delta\Lambda(C_0)$ матрицасыда толық емес оң анықланған болады.

(1.1.6) теңлемесин қараймыз. Бул теңлемениң оң қаптал бөлеги толық емес оң анықланған болады. Мейли оның шешими болып H_2 матрицасы есаплансын. Теңлемени былайынша түрлендиремиз

$$A_1^T(H_2 - E) + (H_2 - E)A_1 = -\delta C_0.$$

Оң қаптал тәрәпинен U -ға, ал шеп қаптал тәрәпинен U^T -ға көбейтеміз. Нәтийжеде

$$A^T(\tilde{H}_2 - E) + (\tilde{H}_2 - E)A = -\delta C_0$$

ийе боламыз, бул жерде $\tilde{H}_2 = UH_2U^T$ хәм буннан демек ол H_2 матрицасына уқсас болған меншикли мәнислерине ийе болады.

Буннан, \tilde{H}_2 -матрицасы

$$A^T\tilde{H}_2 + \tilde{H}_2A = -(A + A^T) - \delta C_0,$$

Ляпунов теңлемесиниң шешими болады.

Егерде, C_0 -оң анықланған матрицасында, H_0 -Ляпунов теңлемесиниң шешими болса, ал $-(A + A^T) + \delta C_0$ -толық емес оң анықланған матрицасында \tilde{H}_2 -оның шешими болса, онда бул шешимлер өз-ара

$$\tilde{H}_2 - E = \delta H_0,$$

катнасы менен байланыслы болады, ал олардың меншикли мәнислери

$$\lambda_i(\tilde{H}_2) = \lambda_i(E + \delta H_0) = 1 + \lambda_i(H_0) \frac{|\lambda_1(-A - A^T)|}{\lambda_{\min}(C_0)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Демек, $\lambda_i(\tilde{H}_2) > 0$, $i = \overline{1, n}$ болады, яғный алынған матрицамыз оң анықланған болады. Соның менен бирге

$$\varphi_1(\tilde{H}_2) = \frac{\lambda_{\max}(E + \delta H_0)}{\lambda_{\min}(E + \delta H_0)} = \frac{1 + \delta \lambda_{\max}(H_0)}{1 + \delta \lambda_{\min}(H_0)} < \varphi_1(H_0)$$

болады.

Демек, \tilde{H}_2 матрицасына ийе болып, бул матрицасы ушын $\varphi_1(\tilde{H}_2) < \varphi_1(H_0)$ орынланады. Ал бул болса H_0 -матрицасының оптимал болатуғынлығына қарсы келеди.

Тастыйқлаулардан көринип турғандай, C_0 -матрицасының оң анықланған жағдайы, яғный $\lambda_{\min}(C_0) > 0$ ең бір әхмийетли моменти болып есапланады.

1.1.6-теоремасы. Қәлеген бир (1.1) системасы ушын, оның дәслепки өзгерислерин оптимал баҳалаушы $\mathcal{J}_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 \in \overline{G}(H)$ Ляпунов функциясы барлық ұақытта бар болады.

Дәлилленуі. Жоқарыда айтылғандай $\overline{G}(H)$ -дөңес конус болып, ол $\partial G(H)$ каптал бетин өз-ишине алады. $\varphi_1(H)$ функциясы бир текли болады, яғный қәлеген бир μ ушын, бунда $0 < \mu < \infty$ болады $\varphi_1(H) = \varphi_1(\mu H)$ теңсизлиги орынланады. Сонлықтан конустың өзин қарамастан, ал оның бирлик радиусқа ийе сферасы менен кесилискен бөлегин қарасақта болады:

$$\overline{G}_1(H) = \overline{G}(H) \cap \{H : |H| = 1\}.$$

Пайда болған көплик компакт болады. $\varphi_1(H)$ функцияның минимумын табыу мәселесин, оған эквивалент болған $\tilde{\varphi}_1(H) = \varphi_1^{-1}(H)$ функциясынан максимум табыу мәселеси менен алмастырамыз. $\overline{G}_1(H)$ көплигинде $\tilde{\varphi}_1(H)$ функциясы $\tilde{\varphi}_1(H) = \lambda_{\min}(H)$ түрине ийе болады хәм үзликсиз түрде H -ға байланыслы болады. Функция компактда үзликсиз боғаны ушын, ол өзиниң ең үлкен хәм ең киши мәнислерине жетиседи, онда $\tilde{\varphi}_1(H)$, $H \in \overline{G}_2(H)$ функциясынан максимум табыу мәселеси шешимге ийе

болады. Демек, дәлелікі өзгерістерді бағалау үшін, оптимал болған Ляпунов функциясы барлық уақытта бар болады.

Улыма жағдайда ($|n \geq s|$) оптимал болған $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ функциясын жасау әмелі бір теклі емес болатуғынлығын көрсетеміз. Бул мынаған байланыссы болады: H матрицасының спектрын максимал киширейтсек, онда шеткі меншикли санлардың арасында жайласқан меншикли санлары бази-бір вариациялық дәрежесине ийе болады. Дара жағдайда, егерде A матрицасы блоклы-диагоналлық структурасына ийе болса, онда барлық уақытта $\varphi_1(H_0) = \varphi_1(\tilde{H}_0)$ болатуғын \tilde{H}_0 матрицасын жасауға болады.

Төмендегилер белгили болып есапланады. H -матрицасының $s \times l$ өлшемлі үлес матрицасы деп, коэффициентлери дәлелікі берілген матрицаның s -қатарында хәм l -бағананың кесилисиуінде жайласқан элементлери менен анықланатуғын H' матрицасын атайды. Егерде $s = r$ болса, яғнай қатар менен бағананың тәртип номерлери теңдей болса, онда бундай үлес матрицасын *орайлық* деп атайды.

Мейли H -симметриялық оң анықланған матрицасы болып хәм H' -оның орайлық үлес матрицасы болсын. Онда төменде берілген мына

$$\lambda_{\min}(H) \leq \lambda_{\min i}(H') \leq \lambda_{\max}(H') \leq \lambda_{\max}(H) \quad (1.7)$$

қатнасы дурыс болады.

H_0 матрицасы жалғыз бір болмайтуғынын дәлиллеу үшін блоклы-диагоналлық структурасына ийе болған A -матрицалар топарын қараймыз:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

бул жерде A_1, A_2 -асимптотикалық орныклы матрицалар хәм олардың өлшемлери n_1 хәм n_2 болады, соның менен бирге $n_1 + n_2 = n$ болады.

1.1.7 -теоремасы. Егерде A -матрицасы блоклы-диагоналлық структурасына ийе болса, онда Ляпуновтың оптимал функциясының H_0

матрицасы да сондай түрдеги блоклы-диагоналлық структурасына ийе болады.

Дәлилденуі. Мейли $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ -Ляпуновтың оптимал функциясы болсын. H_0 хәм C_0 -матрицаларын блок түрінде жазамыз:

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & H_{12}^0 \\ (H_{12}^0)^T & H_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ (C_{12}^0)^T & C_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

Бул матрицаларына сәйкес болған Ляпунов теңлемесі үш теңлемесіне бөлініп кетеді:

$$\begin{aligned} A_1^T H_{11}^0 + H_{11}^0 A_1 &= -C_{11}^0, & A_1^T H_{12}^0 + H_{12}^0 A_2 &= -C_{12}^0, \\ A_2^T H_{22}^0 + H_{22}^0 A_2 &= -C_{22}^0. \end{aligned}$$

Буннан мына матрицалары да

$$H' = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & H_{22}^0 \end{bmatrix}, \quad C' = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & 0 \\ 0 & C_{22}^0 \end{bmatrix}.$$

Ляпунов теңлемесінің шешімі болады, бірақ (1.7) есапқа алып

$$\lambda_{\min}(H_0) \leq \lambda_{\min i}(H'_0) \leq \lambda_{\max}(H'_0) \leq \lambda_{\max}(H_0)$$

ийе боламыз.

Буннан, демек $\varphi_1(H'_0) \leq \varphi_1(H_0)$ болады хәм H_0 матрицасы блоклық структурасына ийе болады.

Келтирилген теоремадан пайдаланып, мына мысалды жасаймыз. Мейли A_1 өлшемі $(n-1) \times (n-1)$ болған асимптотикалық орнықты матрицасы болып, ал $A_2 = -a < 0$ скаляр шамасы болсын. A_1 -үлес матрицасы үшін Ляпуновтың оптимал функциясы болып H_{11}^0 матрицасына ийе болған функциясы болады. Онда $\mathcal{G}_0(x) = x^T H'_0 x$ функциясы мына матрицасы менен

$$H' = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix},$$

дәслепкі системасы үшін оптимал болады, бул жерде

$$\lambda_{\min}(H_{11}^0) \leq h \leq \lambda_{\max}(H_{11}^0).$$

$\mathcal{G}_0(x)$ функциясын жасау ұсылларын қараймыз. Егерде $-A - A^T$ - матрицасы толық емес оң анықланған болмаса, яғни $H_0 \neq E$ болса, онда H_0 -матрицасын табыу мәселесі құрамалы оптимизациялық мәселесі болады. $\varphi_1(H)$ дөңес хәм дифференциалланбайтуғын функциясы болады. Оннан тысқары, есели коренлерине сәйкес болатуғын дөгерегинде, яғни оптимизациялық мәселенің шешими жайласқан дөгерегинде дифференциалланыушы қәсийети бузылады,

Квазиоптималластырыушы, яғни $\varphi_1(H)$ функциясын избе из адым бойынша жақсылауға кепиллик бериуши еки алгоритмди қараймыз.

Нур бойынша созыу алгоритми. Мейли C -қәлеген бир оң анықланған функциясы болып хәм оған сәйкес болған Ляпунов теңлемесинің шешими H -болсын. Оны мынандай етип

$$A^T(H + \delta E) + (H + \delta E)A = -[C - \delta(A + A^T)]$$

түрлендиремиз. $-(A + A^T)$ - оң анықланған матрицасы болмайды(онда $H_0 = E$ болар еди). Базы-бир $0 < \delta < \delta_0$, $C - \delta(A + A^T)$ -матрицасы үзликсиз болғаны себепли, олда оң анықланған болады. Соның менен бирге, $\delta > 0$ -да

$$\varphi_1(H + \delta_2 E) = \frac{\lambda_{\max}(H + \delta E)}{\lambda_{\min}(H + \delta E)} = \frac{\delta + \lambda_{\max}(H)}{\delta + \lambda_{\min}(H)} < \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} = \varphi_1(H)$$

теңлиги дурыс болады хәм монотонлық байланыс орын алады, яғни $\delta_1 < \delta_2$ -да $\varphi_1(H + \delta_2 E) < \varphi_1(H + \delta_1 E)$ болады. $C - \delta(A + A^T)$ матрицасы оң анықланған болатуғын δ_0 -дың максимал мәнисин табамыз.

$$0 < \delta < \lambda_{\min}(C) / |\lambda_{\min}(-A - A^T)|$$

шәртинде мына төмендеги теңсизлиги

$$\lambda_{\min}[C - \delta(A + A^T)] \geq \lambda_{\min}(C) - \delta \lambda_{\max}(A + A^T) \geq 0.$$

орынланатуғынлығы 1.1.5 теоремасынан келип шығады.

Демек, δ_0 -ретинде

$$\delta_0 = \frac{\lambda_{\min}(C)}{|\lambda_{\min}(-A - A^T)|}$$

алыуға болады.

Бул алгоритмнің геометриялық мағанасы мынадан ибарат: $\frac{H}{\delta}$ матрицасы $H + \delta E$ нурында жайласқан болып хэм $\delta \rightarrow \infty$ болғанда, сәйкес түрде $H_0 = \delta E$ болған матрицасына қарата умтылады.

Көшерлерди созыу алгоритми. Бул алгоритмнің мағанасы мынадан ибарат, бунда система менен ортогонал түрлендириулер алып барыу жолы менен бас көшерине алып келинеди. Буннан соң киши көшер тартылып созылады, яғнай $\lambda_{\min}(H) \rightarrow \lambda_{\min}(H) + \varepsilon$ болады. C матрицасы оң анықланғанға шекем ε саны соған шекем көбейтилип барылады.

(1.1.2) Ляпунов теңлемесин шеп каптал тәрепинен U -ға, ал оң каптал тәрепинен U^T -ға көбейтемиз, бул жерде U -бул H -матрицасын диагоналлық түрине алып келетуғын матрицасы. Мынаған ийе боламыз:

$$(U^T AU)^T \cdot (U^T HU) + (U^T HU) \cdot (U^T AU) = -(U^T CU)$$

ямаса

$$A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 = -C_1$$

бул жерде $A_1 = U^T AU$ $C_1 = U^T CU$ болады. Бул теңлемелерди мына түрде көширип жазамыз:

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1 \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} A_1 =$$

$$= -C_1 + A_1^T \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} A_1$$

Мейли $A_1 = \{a_{ij}^1\}$, $C_1 = \{c_{ij}^1\}$, $i, j = \overline{1, n}$ болсын. Онда,

$$\Lambda(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

деп белгилеп,

$$A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1 = -C_1(\varepsilon)$$

ийе боламыз, бул жерде

$$C_1(\varepsilon) = \begin{bmatrix} C_{11}^1 - 2\varepsilon \cdot a_{11}^1 & C_{12}^1 - \varepsilon \cdot a_{12}^1 & \dots & C_{1n}^1 - \varepsilon \cdot a_{1n}^1 \\ C_{12}^1 - \varepsilon \cdot a_{12}^1 & C_{22}^1 & \dots & C_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{1n}^1 - \varepsilon \cdot a_{1n}^1 & C_{2n}^1 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

$\varepsilon = 0$ болганда, матрица $C_1(\varepsilon)$ -оң анықланған болатуғынлығы мәлим, ε - параметрдің өсиүйи менен, оң анықланған қәсийети жойтылып барылады, онда оң анықланған қәсийети сақланып қалатуғын ε - шаманың максимал мәниси мына теңлемеден анықланады

$$\det C_1(\varepsilon) = 0.$$

Ямаса, бул теңлемени ашып жазып, мынаған

$$\begin{aligned} & (-\varepsilon)^n \begin{vmatrix} -2a_{11}^1 & -a_{12}^1 & \dots & -a_{1n}^1 \\ -a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + (-\varepsilon)^{n-1} \left\{ \begin{vmatrix} C_{11}^1 & -a_{12}^1 & \dots & -a_{1n}^1 \\ C_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ C_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \dots \right. \\ & \left. + \begin{vmatrix} -2a_{11}^1 & -a_{12}^1 & \dots & -a_{1n-1}^1 & c_{11}^1 \\ -a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 & c_{12}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ -a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 & c_{1n}^1 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ c_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \dots & \dots & \cdot \\ c_{1n}^1 & c_{2n}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} = 0. \right. \end{aligned}$$

ийе боламыз. Нольге тең ағзаларын алып таслап квадрат теңлемесине ийе боламыз:

$$\varepsilon^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^2 \\ a_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & c_{2n}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} - 2\xi \begin{vmatrix} a_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & c_{2n}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ c_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{1n}^1 & c_{2n}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} = 0.$$

C_1 – матрицасы оң анықланған болғаны сабебли, онда төмендегеше

$$P_0 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^2 \\ a_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & c_{2n}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} < 0, P_1 = \begin{vmatrix} a_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & c_{2n}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix}, P_2 = \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ c_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ c_{1n}^1 & c_{2n}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} > 0$$

белгилеу киритип, мына теңлемесине ийе боламыз:

$$p_0 \varepsilon^2 - 2p_1 \varepsilon + p_2 = 0.$$

Бул теңлемеси хәр қыйлы белгилерине ийе болған ҳақықый коренлерине ийе болады:

$$\mu_1 = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 - p_0 p_2}}{p_0} < 0, \mu_2 = \frac{p_1 - \sqrt{p_1^2 - p_0 p_2}}{p_0} > 0.$$

$\varepsilon = \mu_2$ деп есаплап, $H(\varepsilon) = U\Lambda(\varepsilon)U^T$ матрицасына ийе боламыз. Бул матрицасы ушын

$$\varphi_1(H(\varepsilon)) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\min\{\lambda_1 + \varepsilon, \lambda_2\}} < \varphi_1(H)$$

болады.

1-ескертиу. Егерде $\lambda_1 + \varepsilon > \lambda_2$ болса, онда $H(\varepsilon)$ -матрицасының ең киши меншик саны болып λ_2 есапланады хәм усыған уқсас етип келеси меншик санды түрлендириуге болады, яғный $\lambda_2 \rightarrow \lambda_2 + \varepsilon$ умтылады.

1.2 -§. Сапалы интеграллық критериясын оптимизациялау

Динамикалық системалардағы өтиу процесслерин сыпатлаушы хәм системаның жумыс ислеу сапасын тәрийплеуши критерияларының бири

болып интеграллық критериясы есапланады, яғный төменде берілген функционал түрлері:

$$I[x(t)] = \int_t^{\infty} |x(t)| dt$$

(1.1.4) теңсізлігінен пайдаланып, сапалық интеграл критериясын бахалау үшін мына теңсізлігине ийе боламыз:

$$I[x(t)] = \int_t^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} |x_0| \exp\left\{-\frac{\lambda_{\min}(C)}{2\lambda_{\max}(H)}(t-t_0)\right\} dt = 2|x_0| \cdot \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Бұл алынған теңсізліктің геометриялық мағанасы төмендегіше болады. $|x(t)|$ функциясын жоқарыдан (1.1.4) экспонентасы менен шегараланған хәм экспонентадан интеграл алып есаплаймыз. Интегралдың шамасы киши болған сайын, критерияның бахасы дәлирек болатуғынлығы мәлим. Ляпунов теңлемесинің шешими болатуғын, яғный $H \in G(H)$ болатуғын H -оң анықланған матрицаларында анықланған мақсет функциясын киритемиз:

$$\varphi_2(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}.$$

1.2.1-анықламасы.

$$H_0 = \arg \inf \{ \varphi_2(H) \}, \quad \varphi_2(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}, \quad (1.2.1)$$

$H \in G(H)$

болатуғын $\mathcal{G}_0(x)$ -Ляпунов функциясы сапалы интеграллық критериясын бахалау үшін оптимал болады деп атаймыз.

(1.2.1) Ляпуновтың оптимал функциясының (1.1.1) системаның A -матрицасының түрине байланысын қараймыз.

1.2.1-леммасы. Мейли A -матрицасы асимптотикалы орнықты болсын хәм $A + A^T$ -терис анықланған болсын. Онда (1.1) системаның кәлеген шешими үшін

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp\left\{\frac{1}{2} \lambda_{\max}(A + A^t) \cdot (t - t_0)\right\}. \quad (1.2.2)$$

теңsizлиги дурыс болады

Дәлилленуі. $A + A^T$ -симметриялық, терис анықланған матрицасы болғаны үшін, онда Ляпунов теңлемесінде $C = -(A + A^T)$ болады деп есаплап, $H = E$ ийе боламыз хәм (1.4.) бахасы (2.2) түрине ийе болады.

1.2.2-леммасы. Егерде A -асимптотикалық хәм нормал (яғный $A^T A = A A^T$) матрицасы болса, онда $A + A^T$ матрицасы терис анықланған болады.

Дәлилленуі. $H = -(A + A^T)$ деп белгилеймиз хәм қаралып атырған бул аңлатпаны оң қаптал тәрeпинен A -ға көбейтеміз:

$$HA = -A^2 - A^T A$$

Буннан соң оны шеп қаптал тәрeпинен A^T -ға көбейтип:

$$HA^T = -A^T A - (A^T)^2$$

хәм алдыңғы аңлатпасы менен қосамыз. $A^T A = A A^T$ есапқа алып,

$$A^T H + HA = -(A + A^t)^2 = -H^2$$

ийе боламыз.

Симметриялық болатуғын

$$A^T H + HA = -H^2$$

теңлемесиниң шешими $H = -(A + A^T)$ болады. H -матрицасы айнымалы емес матрица болғанлығы себепли, онда H^2 -оң анықланған болады. Егерде пайда болған теңлемени Ляпунов теңлемеси ретинде қарастырсақ хәм A -матрицаның асимптотикалық орнықты болатуғынын есапқа алсақ, онда оның шешими $H = -(A + A^T)$ -оң анықланған матрица болады, яғный $A + A^T$ -терис анықланған болады.

Келтирилген леммадан пайдаланып, A -матрицасына байланысly болған, интеграллық мағанасы бойынша ең жақсы болған бахалар алыу мүмкиншилигин қараймыз.

1. Мейли A -асимптотикалық хәм нормальлы, яғный $A^T A = AA^T$ болсын.

1.2.1-теоремасы. Егерде A -асимптотикалық хәм нормальлы болса, онда кәлеген $\delta > 0$ ушын, $|\bar{x}(t_0)| = \delta$ -да (1.1) системаның барлық ўақытта $x = \bar{x}(t)$ шешими бар болып хәм ол

$$|\bar{x}(t)| = \delta \cdot \exp \left\{ \max_{i=1, n} \operatorname{Re} \lambda_i(A)(t - t_0) \right\}.$$

Дәлелленіуі. A - нормальлы болғаны ушын, онда U -ортононаллық матрицасы бар болып, бул матрицасы A -ны Жордан формасына алып келеди:

$$U^T A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \beta_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_k & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_2 \end{pmatrix} = \Lambda, \quad (1.2.3)$$

бул жерде, $\lambda_p = \alpha_p \pm i\beta_q$, $\lambda_q = \gamma_q$, $p = \overline{1, k}$, $q = \overline{1, s}$, $2k + s = n$ - A - матрицасының меншикли мәнислери.

а) Мейли $\max_{i=1, n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) = \gamma_j$ болсын. Онда $x = U z$ деп алмастырып, сызықлы дифференциаллық теңлемелер системасына ийе боламыз:

$$\dot{z} = \Lambda z, \quad (1.2.4)$$

бул жерде Λ -да (1.2.3)-те анықланған. Бул системаның дара шешими $\bar{z}(t)(0, \dots, e^{\gamma_j(t-t_0)}, 0, \dots, 0)^T$ болатуғынлығын көриўге болады. Буннан $\bar{x}(t) = U \bar{z}(t) \cdot \delta$ векторы дәслепки берилген системаның дара шешими болады, соның менен бирге $U : |\bar{x}(t)| = \delta \exp \{ \gamma_j(t - t_0) \}$ болады.

б) Мейли $\max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) = \alpha_e$ болсын. Онда (1.2.4) теңлемелер системасы

ушын дара шешими

$$\bar{Z}(t) = (0, \dots, 0, e^{\alpha_e(t-t_0)} \sin \beta_e(t-t_0), e^{\alpha_e(t-t_0)} \cos(t-t_0), \dots, 0)^T$$

болады, ал излениўши шешими болып:

$$\bar{x}(t) = U \bar{z}(t) \cdot \delta$$

есапланады.

1.2.2-теоремасы. Егерде A -асимптотикалық хэм нормальлы матрицасы болса, онда мына

$$\max_{i=1,n} \{\operatorname{Re} \lambda_i(A)\} = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A + A^T) \quad (1.2.5)$$

теңsizлиги дурыс болады.

Дәлилленіўи. (1.1.1) системасын (1.2.4) түрине алып келемиз. A -асимптотикалық орнықлылы болғаны себепли, онда $\alpha_p < 0$, $p = \overline{1, k}$, $q = \overline{1, s}$,

$2k + s = n$ болады. U -матрицасы ортогоналлық болғаны ушын

$\Lambda^T = (U^T A U)^T = U^T A^T U$ болады. Буннан тысқары,

$\lambda_i(A + A^T) = \lambda_i[U^T(A + A^T)U]$, $i = \overline{1, n}$ болады. Сонлықтан,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A + A^T) &= \frac{1}{2} \lambda_{\max}[U^T(A + A^T)U] = \frac{1}{2} \lambda_{\max}[U^T A U + U^T A^T U] = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A + A^T) = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_k, \gamma_1, \dots, \gamma_s\} = \max_{i=1,n} \{\operatorname{Re} \lambda_i(A)\}, \end{aligned}$$

1.2.1-салдары. Егерде A асимптотикалық хэм нормальлы матрицасы болса, онда (1.1.1) системаның қәлеген $x(t)$ -шешими ушын мына теңsizлиги

$$|x(t)| \leq |x_0| \cdot \exp\left\{\max_{i=1,n} \operatorname{Re} \lambda_i(A) \cdot (t - t_0)\right\}$$

дурыс болады.

Дәлилленіўи (1.2.2) теореманың (1.2.5) теңsizлигинен келип шығады.

1.2.3-теоремасы. Егерде A матрицасы асимптотикалық хэм нормальлы матрицасы болса, онда интеграллық мағанасы хэм дәслепки мағлыўматларды

бақалау мағанасы бойынша оптимал болатуғын Ляпунов функциялары бирдей болады хәм $H_0 = E$, $C_0 = -(A + A^T)$.

Дәлилленуі. Егерде A нормал болса, онда 1.2.2-леммасынан $A + A^T$ матрицасы терис анықланған болады. Сонлықтан дәслепки берілген мағлыұматлар бойынша Ляпунов функциясы ретінде $\mathcal{Q}_0(x) = x^T H_0 x$ функциясын алыуға болады, бунда $H_0 = E$. Бул функцияның интеграллық мағанасы бойынша да оптимал болатуғынлығын көрсетейик. Хәқыйқатында да, 1.2.1-салдардан хәм 1.2.2- теоремадан

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |x_0| \exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda_{\max}(A + A^T)(t - t_0) \right\} = \\ &= |x_0| \cdot \exp \left\{ \max_{i=1, n} \operatorname{Re} \lambda_i(A)(t - t_0) \right\} \end{aligned}$$

Соның менен бирге бул теңсизлик ең жақсы болып есапланады, яғный $\bar{x}(t)$ шешими бар болып хәм бул шешими ушын бул теңсизлик дәл болып есапланады. Демек, $\mathcal{Q}_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 = E$ Ляпунов функциясы жәрдемінде алынған интеграллық баҳасы мағанасы бойыншада ең жақсы болып есапланады.

II. Мейли $A + A^T$ терис анықланған болсын, онда $A^T A \neq A A^T$ болады. 1.1 параграфта көргенимиздей дәслепки өзгерислерди бақалау ушын оптимал баҳасы болып $\mathcal{Q}_0(x)$ функциясы есапланады, бунда $H_0 = E$.

Улыұмаластырып айтқанымызда жоқарыдағы функциясы ең жақсы интеграллық баҳасын бериуши Ляпунов функциясы менен бирдей болмау да мүмкин.

(2.1.1) системасын қараймыз, бунда

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \delta \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$\delta \neq 0$ болғанда A матрицасы нормальлы болмайды, бирәқ $|\delta| < 2$ болғанда, $A + A^T$ терис анықланған болып хәм оның характеристикалық санлары $\lambda_{1,2}(A + A^T) = -2 \pm \delta$ болады.

Сонлықтан, $C = -(A + A^T)$ деп есаплап, $H = E$ ийе боламыз хәм

$$\varphi_2(E) = \frac{1}{\lambda_{\max}(-A - A^T)} = \begin{cases} \frac{1}{2 - \delta}, & 0 \leq \delta < 2, \\ \frac{1}{2 + \delta}, & -2 < \delta < 0. \end{cases}$$

Екинши жақтан $C = 2E$ деп хәм Ляпунов теңлемесин шешип, мынаған ийе боламыз:

$$H_{2E} = \begin{bmatrix} 1 & \delta/2 \\ \delta/2 & 1 + \delta^2/2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2}(H_{2E}) = \left(1 + \frac{\delta^2}{4}\right) \mp \frac{\delta}{2} \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}}.$$

Буннан, $0 \leq \delta < 2$ да

$$\varphi_2(H_{2E}) = \frac{\lambda_{\max}(H_{2E})}{2} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_{2E})}{\lambda_{\min}(H_{2E})}} = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}} \left[\frac{\delta}{2} + \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{4}} \right]$$

ийе боламыз.

Хәм $\delta_0 \rightarrow 2$ умтылғанда, бунда

$$\sqrt{1 + \frac{\delta_0^2}{4}} \left[\frac{\delta_0}{2} + \sqrt{1 + \frac{\delta_0^2}{4}} \right] < \frac{1}{2 - \delta_0},$$

яғный, $H = E$ матрицасы интеграллық мағанасы бойынша оптимал болмайды.

III. Мейли A асимптотикалық орнықтылығы матрицасы болсын, бирақ $A + A^T$ терис анықланбаған болсын. Бул жағдайда мына теорема дурыс болады.

1.2.4-теоремасы. Дәслепки өзгерислерди баҳалаўшы Ляпуновтың оптимал функциясын, оның интеграллық критериясын баҳалаў ушын пайдаланыўға болмайды, себеби $\varphi_2(H_0) = +\infty$.

Дәлллениўи. Егерде $A + A^T$ терис емес анықланған болса, онда алдынғы параграфдан дәслепки мағлыўматларды баҳалаў ушын оптимал функциясы ушын $\lambda_{\min}(C_0) = \lambda_{\min}[-(A^T H_0 + H_0 A)] = 0$ орынланыўы зәрүр болады. Сонлықтан $\varphi_2(H_0) = \infty$ болады.

Оған карамастан $\varphi_2(H)$ функциясын оптималластырыу мәселеси шешімге ийе болып, яғный интеграллық мағанасы бойынша оптимал болатуғын Ляпунов функциясы бар болады.

1.2.5-теоремасы. Интеграллық критерияның сапасын бахалаушы $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясы, бунда $H_0 \in G(H)$ барлық уақытта бар болады.

Дәлилленіуі. $G(H)$ көплиги бул орайы координат басында жайласқан конус болады. $\varphi_2(H)$ функциясы биртеккли болғаны себепли, онда оның анықланыу областы ретінде барлық $G(H)$ болмай, ал оның бир бөлегин $G_1(H) = G(H) \cap \{H : |H| = 1\}$ алып қараған жеткиликли болады. $G_1(H)$ көплиги шегараланған болып, бирақ туйық болады. Егерде бул көпликтің шегарасына $\partial G_1(H)$ жақынласақ, онда

$$\varphi_2(H) = \frac{1}{\lambda_{\min}(c) \sqrt{\lambda_{\min}(H)}} \rightarrow \infty$$

умтылады.

Бунда функцияның минимал мәнісин изленгенимиз ушын, онда жеткиликли киши болған ε шегарасын алып таслап хәм $G_1(H)$ областын қиширейтеміз, яғный бул областа

$$\overline{G}_1^\varepsilon(H) = G_1(H) / \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) > \varepsilon\}$$

оптимизациялық мәселесин шешемиз. $\overline{G}_1^\varepsilon(H)$ көплиги компактлы болып хәм $\varphi_2(H)$ функциясы өзіннің ең киши мәнісине усы компактінде жетиседи, яғный Ляпуновтың оптимал функциясы бар болады.

Енди улыуға жағдайда ($n \geq 3$) Ляпуновтың оптимал функциясы биртеккли емес болып жасалатуғынлығын көрсетемиз. Дәслепки өзгерислерди бахалауға уқсас, бул аралық меншик санларын вариациялау мүмкиншиликлери менен байланыслы болып, дара жағдайда, егерде қаралып атырған A блоклы-диагоналық матрицасына хәм H_0 ийе (1.1) системасы

оптимально болса, онда барлық уақытта H'_0 матрицасын дүзгіңге болады, бұл матрицасы үшін $\varphi_2(H'_0) \leq \varphi_2(H_0)$ болады.

1.2.6-теоремасы. Егерде A матрицасы блоклы-диагональлық структурасына ийе болса, онда Ляпунов функциясына оптимально болатуғын H_0 матрицасы блоклы-диагональды болады.

Дәлелленіуі. Мейли A матрицасы мына түрине ийе болсын:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

ал $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпуновтың оптимально функциясы болсын. H_0 хәм C_0 матрицаларын мына түрінде жазамыз:

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & H_{12}^0 \\ (H_{12}^0)^T & H_{22}^0 \end{bmatrix} \quad C_0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ (C_{12}^0)^T & C_{22}^0 \end{bmatrix}$$

Буннан H'_0, C'_0 матрицалары

$$H'_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & H_{22}^0 \end{bmatrix} \quad C'_0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & 0 \\ 0 & C_{22}^0 \end{bmatrix}$$

Ляпунов функциясының шешімлері болатуғынлығы көринип турыпты хәм ол үшін

$$\lambda_{\min}(H_0) \leq \lambda_{\min}(H'_0) \leq \lambda_{\max}(H'_0) \leq \lambda_{\max}(H_0),$$

$$\lambda_{\min}(C_0) \leq \lambda_{\min}(C'_0) \leq \lambda_{\max}(C'_0) \leq \lambda_{\max}(C_0)$$

болады.

Сонлықтан

$$\varphi_2(H'_0) = \frac{\lambda_{\max}(H'_0)}{\lambda_{\min}(C'_0)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H'_0)}{\lambda_{\min}(C'_0)}} \leq \frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(C_0)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(C_0)}} = \varphi_2(H_0).$$

Жоқарыда келтирилген теоремадан пайдаланып, Ляпуновтың оптимально функциясын жасаудың биртеккли емеслигин көрсететуғын мысал келтиремиз.

Мейли A_1 матрицасы өлшеми $(n-1) \times (n-1)$ болған, $\mathcal{G}'_0(x) = (x')^T H_{11}^0 x'$ оптимально функциясына ийе хәм $\lambda_{\min}(H_{11}^0) < \lambda_{\max}(H_{11}^0)$ болған

асимптотикалық орнықтылығы болсын. Егерде $A_2 = -a < 0$ скаляр болып, соның менен бірге $a > \lambda_{\min}(C_{11}^0)/2\lambda_{\max}(H_{11}^0)$ болса, онда барлық системасы үшін Ляпуновтың оптимал функциясы ретінде $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ алығуға болады, бұл жерде

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}, \lambda_{\min}(H_{11}^0) \leq h \leq \lambda_{\max}(H_{11}^0), \quad h \geq \lambda_{\min}(C_{11}^0)/2a.$$

Квазиоптимизациялаудың бір адымлы алгоритмдерін қараймыз, яғни $\varphi_2(H)$ функциясын жақсылаушы H матрицасын ізлеуге алып келіуші алгоритмдерін қараймыз.

Нур бойынша оптимизациялау алгоритми.

Мейли $H_E - C = E$ теңлемесіне сәйкес келетұғын, яғни

$$A^T H_E + H_E A = -E$$

Ляпунов теңлемесінің шешімі болсын. Бұл теңлемени мынандай етип түрлендіреміз:

$$A^T (H_E + \delta E) + (H_E + \delta E) A = [E - \delta(A + A^T)].$$

$\varphi_2(H)$ функциясы δ параметрінің функциясы болады, яғни

$$\varphi_2(\delta) = \frac{\lambda_{\max}(H_E + \delta E)}{\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)]} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E + \delta E)}{\lambda_{\min}(H_E + \delta E)}}.$$

δ өзгеріушісі бойынша $\varphi_2(\delta)$ функциясының минимумын ізлейміз. $H_E + \delta E$ хәм $E - \delta(A + A^T)$ матрицалары оң анықланған болғаны үшін, онда δ ны сайлап алғанымызда мына шегаралаушы шәртин басшылыққа алыуымыз керек:

$$\delta + \lambda_{\min}(H_E) > 0, \quad 1 - \delta \cdot \lambda_i(A + A^T) > 0, \quad i = \overline{1, n}$$

1.2.3-леммасы. Егерде A асимптотикалық орнықтылығы матрицасы болса, онда $\lambda_{\min}(A + A^T) < 0$ болады.

Дәллілениуі. Егерде A асимптотикалық орнықтылығы матрицасы болса, онда $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0, i = \overline{1, n}$ болады. Буннан мынаған ийе боламыз:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(A + A^T) = S_p(A + A^T) = 2S_p A = 2 \sum_{i=1}^n \operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0.$$

Бул жерде $S_p A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ - A -матрицасының изи. $\sum_{i=1}^n \lambda_i(A + A^T) < 0$ болғаны үшін, барлық $\lambda_i(A + A^T)$, $i = \overline{1, n}$ шамалары $A + A^T$ матрицасы симметриялық болғаны үшін хақыйқый болады. Онда $\lambda_{\min}(A + A^T) < 0$ ийе боламыз.

Үш жағдайын қараймыз.

1). Егерде A -нормальлы матрицасы болса, онда қарап атырған алгоритмды қолланыў талап етилмейди. Бунда $H_0 = E$, $C_0 = (A + A^T)$ деп алыў керек болады.

2). Мейли A -нормальлы емес матрицасы болсын, бірақ $A + A^T$ терис анықланған болсын. Бул жағдайда $\lambda_{\max}(A + A^T) < 0$ хэм

$$\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)] = \begin{cases} 1 - \delta \cdot \lambda_{\min}(A + A^T), & \delta < 0, \\ 1 - \delta \cdot \lambda_{\max}(A + A^T), & \delta \geq 0. \end{cases}$$

болады. Белгилеўлер киритемиз:

$$a = \lambda_{\max}(H_\varepsilon), \quad b = \lambda_{\min}(H_\varepsilon), \quad c_1 = \lambda_{\min}(A + A^T), \quad c_2 = \lambda_{\min}(A + A^T).$$

$\varphi_2(\delta)$ функциясы мына түрине ийе болады:

$$\varphi_2(\delta) = \begin{cases} \frac{\delta + a}{1 - \delta c_1} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}, & \max\left\{-b, \frac{1}{c_1}\right\} < \delta < 0, \\ \frac{\delta + a}{1 - \delta c_2} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}, & \delta \geq 0. \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Енди мына түрине ийе болған функциясын қараймыз:

$$\psi(\delta) = \frac{\delta + a}{1 - \delta c} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}.$$

Бул функциясы үшін экстремум болыўдың зәрүрли шәрти болып $\psi'(\delta) = 0$ есапланады, яғный

$$\psi'(\delta) = \frac{(3ac - bc + 2)\delta - (a - 3b - 2abc)}{2(1 - \delta c)^2(\delta + b)} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}} = 0.$$

Буннан

$$\delta_0 = \frac{a - 3b - 2abc}{3ac - bc + 2}.$$

δ_0 нокатындағы екінші туўындының түрін жазып келтиреміз:

$$\psi''(\delta_0) = \frac{3ac - bc + 2}{2(1 - \delta_0 c)^2 (\delta_0 + b)} \sqrt{\frac{\delta_0 + a}{\delta_0 + b}}.$$

Экстремум болыўдың жеткиликли шәрти болып екінші туўындының оң анықланғанлығы есапланады, яғный

$$3ac - bc + 2 > 0, \quad \delta_0 + b > 0. \quad (1.2.7)$$

Демек, егерде

$$\delta_0 = \frac{a - 3b - 2abc}{3ac - bc + 2}$$

$\psi(\delta)$ функцияның анықланыў областында жайласқан болса хәм (1.2.7)

теңsizлиги орынланса, онда $\delta = \delta_0$ да $\psi(\delta)$ функциясы минимал мәнисин

қабыл етеди. (1.2.6) функциясына қарата мыналарға ийе боламыз.

Мейли $A + A^T$ терис анықланған болып хәм мына төменде берілген теңsizликлер системалардың ең кеминде биреўи орынлансын:

$$\begin{cases} 3ac_1 - bc_1 + 2 > 0, \\ \max\left\{-b, \frac{1}{c_1}\right\} < \frac{a - 3b - 2abc_1}{3ac_1 - bc_1 + 2} < 0, \end{cases} \quad (1.2.8)$$

ямаса

$$\begin{cases} 3ac_2 - bc_2 + 2 > 0, \\ a - 3b - 2abc_2 > 0. \end{cases} \quad (1.2.9)$$

Онда

$$\delta_0 = \arg \min \{\varphi_2(\delta_1), \varphi_2(\delta_2)\},$$

деп алып, бунда

$$\delta_1 = \frac{a - 3b - 2abc_1}{3ac_1 - bc_1 + 2}, \quad \delta_2 = \frac{a - 3b - 2abc_2}{3ac_2 - bc_2 + 2}.$$

Егерде (1.2.8), (1.2.9) теңsizликлери орынланбаса, онда $\delta_0 = 0$ болады, яғный $H_0 = H_E$.

3) Мейли $A + A^T$ терис анықланған болмасын, яғный $\lambda_{\max}(A + A^T) > 0$ болады. Онда $\varphi_2(\delta)$ функциясы мына түрине ийе болады:

$$\varphi_2(\delta) = \begin{cases} \frac{\delta + a}{1 - \delta c_1} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}, & \max\left\{-b, \frac{1}{c_1}\right\} < \delta < 0, \\ \frac{\delta + a}{1 - \delta c_2} \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}}, & 0 \leq \delta < \frac{1}{c_2}, \end{cases} \quad (1.2.10)$$

бул жерде $a = \lambda_{\max}(H_E)$, $b = \lambda_{\min}(H_E)$, $c_1 = \lambda_{\min}(A + A^T)$, $c_2 = \lambda_{\max}(A + A^T)$ болады.

Алдыңғы пункттеги айтылғанларды қайталап, мынаған ийе боламыз.

Мейли төменде берилген теңсізликлердин биреуи орынлансын

$$\begin{cases} 3ac_1 - bc_1 + 2 > 0, \\ \max\left\{-b, \frac{1}{c_1}\right\} < \frac{a - 3b - 2abc_1}{3ac_1 - bc_1 + 2} < 0, \end{cases} \quad (1.2.11)$$

ямаса

$$\begin{cases} 3ac_2 - bc_2 + 2 > 0, \\ 0 \leq \frac{a - 3b - 2abc_2}{3ac_2 - bc_2 + 2} < \frac{1}{c_2}. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Онда

$$\delta_0 = \arg \min \{\varphi_2(\delta_1), \varphi_2(\delta_2)\},$$

деп алыуы керек болады, бул жерде

$$\delta_1 = \frac{a - 3b - 2abc_1}{3ac_1 - bc_1 + 2}, \quad \delta_2 = \frac{a - 3b - 2abc_2}{3ac_2 - bc_2 + 2}.$$

Егерде (1.2.11), (1.2.12) теңсізликлери орынланбаса, онда $\delta_0 = 0$ болады, яғный $H_0 = H_E$.

Көшер бойынша созыу алгоритми.

Мейли H_E - бул $C = E$ матрицасына сәйкес келетуғын Ляпунов теңлемесиниң шешими болсын. Онда U айрықша емес болған түрлендириулер бар болып хәм ол H_E ны диагоналық түрине алып келеди.

Ляпунов теңлемесін шеп қаптал тәрепінен U^T ға көбейтип, ал оң қаптал тәрепінен U ға көбейтип, мынаған ийе боламыз:

$$A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 = -E$$

яғный $U^T A U = A_1 = \{a_{i,j}^1\}, i, j = \overline{1, n}$ болады. Пайда болған теңлемени мынандай етип түрлендіреміз:

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} A_1 =$$

$$= -E + \varepsilon \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

$C = E$ хәм $H = H_E$ деп белгилеп алынған матрицаларында $\varphi_2(H)$ матрицасы ε параметрине байланысly болған функциясына айланады:

$$\varphi_2(\varepsilon) = \frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}[E - \varepsilon \Delta]} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}},$$

бунда

$$\Delta = \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Δ матрицасы меншикли санларына ийе болады:

$$\lambda_i(\Delta) = 0, i = \overline{1, n-2}, \lambda_{n-1, n}(\Delta) = a_{11}^1 \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}.$$

Сонлықтан

$$\lambda_{\min} [E - \varepsilon \Delta] = \begin{cases} 1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right], & \varepsilon < 0, \\ 1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right], & \varepsilon \geq 0. \end{cases}$$

Демек, буна $\varphi_2(\varepsilon)$ функциясы мына түрине ийе болады:

$$\varphi_2(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{\lambda_{\max}(H_E + \delta E)}{1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right]} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}}}, \max \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), 1 / \left[a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right] \right\} < \varepsilon < 0 \\ \frac{\lambda_{\max}(H_E + \delta E)}{1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right]} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon}}, 0 \leq \varepsilon < 1 / \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right]. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Енди

$$a = \lambda_{\max}(H_E), b = \lambda_{\min}(H_E), c_1 = a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}, c_2 = a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \text{ деп}$$

белгилеулер киритемиз хэм улыўма түрине ийе болған функцияның минимум болатуғын шэртлерин қараймыз:

$$\psi(\varepsilon) = \frac{a}{1 - \varepsilon c} \sqrt{\frac{a}{b + \varepsilon}}.$$

$\psi'(\varepsilon) = 0$ болатуғын минимумның зэрүрли шэртлери мына түрине ийе болады:

$$\psi'(\varepsilon) = \frac{a\sqrt{a}(2bc + \varepsilon c - 1)}{2(1 - \varepsilon c)^2 \cdot (b + \varepsilon)^{3/2}}.$$

Экстремум мәнисине ийе ноқатлары

$$\varepsilon_0 = (1 - 2bc) / c.$$

Минимум болатуғын $\psi''(\varepsilon_0) > 0$ жеткиликли шэртлери, яғный

$$\psi''(\varepsilon_0) = \frac{a\sqrt{a}(2bc + \varepsilon c - 1)}{2(1 - \varepsilon c)^2 \cdot (b + \varepsilon)^{3/2}} > 0$$

болады.

Демек, (1.2.13) байланысына қарата мыналарға ийе боламыз. Егерде

$$0 < \frac{1-2bc_2}{c_2} < \frac{1}{a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{11}^1)^2}},$$

орынлы болса, онда $H_0 = U\Lambda(\varepsilon_0)U$ деп алыу керек болады, бунда

$$\varepsilon_0 = 1 / \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{11}^1)^2} \right] - 2\lambda_{\min}(H_E)$$

кери жағдайда $\varepsilon_0 = 0$, яғный $H_0 = H_E$.

II Бап

Сызықлы дифференциаллық системаларында болып өтуіші процесслерін бақалау

2.1-§. Сызықлы дифференциаллық системаларында болып өтуіші процесслерін уақыт бойынша оптимизациялау

Бунда $\mathcal{Q}(x) = x^T Hx$ Ляпуновтың квадратлық функциясы жәрдеминде системаның шешиминің және бир характеристикасын анықлауды қараймыз.

Асимптотикалық орнықты (1.1.1) системалары менен тәрийпленетуғын процесслери ушын ең бир әхмийетли техникалық характеристикалардың бири болып өтуіші процесслердің өтуі уақты болып есапланады. Бунда $x(t)$ шешими координата басының ε дөгерегине жетип барыу ушын хэм оннан шығып кетпеу ушын жумсалатуғын уақыт муғдарын *болып өтуіші процессинің уақты* деп аталады. Квадратлық түрине ийе болған Ляпунов функциясы жәрдеминде болып өтуіші процесслердің уақтың мынандай етип бақалауға болады. (1.1.4) теңсизлигинен

$$T(\varepsilon, |x_0|, H) \leq \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \cdot \frac{|x_0|^2}{\varepsilon^2} \right]$$

келип шығады.

$H \in G(H)$ матрицасын табыу мәселеси өтуіші процесслерін әдеуір дәл табыуға мүмкиншилик береді. Егерде, дәслепки хэм ақырғы мағлыұматлар бойынша теңсалмақты болған өтуіші процесстин уақтың анықлауши бақасын излегенимизде, онда мына төмендеги функцияны оптималластырыуымыз керек болады:

$$\varphi_3(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right]$$

2.1.1-анықламасы. Өтуіші процесслердің уақтың анықлауши бақасы ушын Ляпуновтың $\mathcal{Q}_0(x)$ функциясы оптимал болады, егерде

$$H_0 = \arg \inf_{H \in G(H)} \{\varphi_3(H)\}, \quad (2.1.1)$$

бул жерде

$$\varphi_3(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right]$$

болады.

Енди (2.1.1) оптимизациялық мәселениң шешиминиң бар болатуғын мәселелерин қараймыз.

$0 < \lambda_{\min}(H) \leq \lambda_{\max}(H)$ болғаны себепли, онда Ляпуновтың оптимал функциясы ретинде (A матрицасына байланыслы) $\mathcal{G}_0(x) = |x|^2$ болады, яғный $H_0 = E$. Бунда $\varphi_3(H_0) = 0$ болады.

2.1.1.-теоремасы. Өтиўши процесслерди ўақыт бойынша баҳалаў ушын оптимал хәм ол ушын $\varphi_3(H_0) = 0$ болған $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 \in G(H)$ Ляпунов функциясы сол жағдайда бар болады, егерде $A + A^T$ терис анықланған болса.

Дәлилленуїи. 1.1 теоремасында көрсетилгени бойынша (1.2) Ляпунов функциясы шешими ретинде $E \in G(H)$ ийе болыў ушын зәрүрли хәм жеткиликлеи шәрти болып $A + A^T$ матрицасының терис анықланғанлығы болып есапланады. Ал $\varphi_3(H)$ функциясының түринен $\varphi_3(H) = 0$ болатуғынлығы келип шығады, егерде H матрицасы сол жағдайда оң анықланған болады, егерде $H = E$ болса.

Мейли $A + A^T$ толық емес терис анықланған болсын. Онда

$$\lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(C) \rightarrow +\infty, \quad H \rightarrow \partial G(H),$$

хәм $H \rightarrow \partial G(H)$ да $\varphi_3(H)$ функциясы үзилiske түседи. Егерде, соның менен бирге $H \rightarrow E \partial G(H)$ болса, онда

$$\ln[\lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)] \rightarrow 0$$

болады хәм $\varphi_3(H)$ анықланған болмайды.

Енди мына жағдайын қараймыз, бунда $A + A^T$ матрицасы толық емес терис анықланбаған. $\varphi_1(H)$ функциясы ушын Ляпуновтың оптимал

функциясы бар болады хәм ол шегарада жайласқан болады, яғный $H_0 \rightarrow \partial G(H)$. Өтиўши процесслердиң ўақты бойынша баҳаласын оптимизациялаў ушын, егерде $H \rightarrow \partial G(H)$ болғанда, онда

$$\ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right] > 0, \quad \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \rightarrow +\infty$$

болады, яғный $\varphi_3(H) \rightarrow \infty$. $\mathcal{D}_0(x)$ оптимал функциясы бар болатуғынлығын корсетейик, бирақ $\varphi_3(H_0) > 0$ хәм H_0 матрицалары $G(H)$ конустың ишинде болады.

2.1.2.-теоремасы. Мейли $A + A^T$ толық терис анықланған функциясы болмасын. Өтиў процессиниң ўақты бойынша баҳасын анықлаўши Ляпуновиың $\mathcal{D}_0(x)$ оптимал функциясы барлық ўақытта бар болады.

Дәлилленіўи. $\varphi_3(H)$ функциясының $G(H)$ анықланыў областын қараймыз. Бул көплиги $\varphi_3(H)$ да дөңес конус болады. Сонлықтан $G(H)$ болған барлық областын қарамай, ал оның радиусы $\lambda_{\max}(H) = 1$ болған сферасы менен кесилісиўи нәтийжесинде пайда болған $G_1(H)$ бөлегин қараймыз. Сонлықтан меншикли санлары үзликсиз түрде матрицаның элементлеринен ғәрезли болғаны ушын, онда $\varphi_3(H)$ үзликсиз түрде $h_{ij}, 1 \leq i \leq j \leq n$ ға байланыслы болады. $G_1(H)$ көплининиң $\partial G_1(H)$ шегарасы нольге тең болған меншикли санының пайда болыўы менен анықланады, яғный $\partial G_1(H) = \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) = 0, \lambda_{\max}(H) = 1\}$ болады. $\partial G_1(H)$ шегарасына жақынлағанда $\varphi_3(H)$ функциясының түрине байланыслы

$$\lim_{H \rightarrow \partial G_1(H)} \left\{ \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} \right] \right\} = +\infty$$

болады.

Минимизациялаў мәселеси шешилип атырғаны ушын $G_1(H)$ та $G_1^E(H)$ караўға болады, бул жерде

$$G_1^E(H) = G_1(H) / \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) > \varepsilon\},$$

ε -жеткиликли киши шама, $\varphi_3(H)$ функциясы $G_1^E(H)$ компакте үзлексіз болып, өзінің минимал мәнісіне жетіседі, яғни Ляпуновтың оптимал функциясын табыу мәселесі шешімге ийе болады.

Енді улыма жағдайда H_0 матрицасы біртекли емес болып дүзілетуғынлығын көрсетейік. Мысал ретінде блоклы-диагоналлық структурасына ийе системасын жасаймыз.

2.1.3-теоремасы. Егерде (1.1) системасы блоклы-диагоналлық түріндегі A матрицасына ийе болса, онда Ляпуновтың оптимал функциясының H_0 матрицасы да блоклы-диагоналлық структурасына ийе болады.

Дәлелленіуі. Алдыңғы баптағы 1.7 хәм 2.6. уқсас болған теоремалардың дәлелленіуін тәкирарлап, екі H_0, C_0 хәм H'_0, C'_0 жуп шешімлерін аламыз, бул жерде екінші жуплық шешімлерінде жәрдемші блоklar нольлық матрицалары болады. Нәтийжеде ийе боламыз:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(H_0) \leq \lambda_{\min}(H'_0) \leq \lambda_{\max}(H'_0) \leq \lambda_{\max}(H_0), \\ \lambda_{\min}(C_0) \leq \lambda_{\min}(C'_0) \leq \lambda_{\max}(C'_0) \leq \lambda_{\max}(C_0) \end{aligned}$$

Сонлықтан

$$\varphi_1(H'_0) = \frac{\lambda_{\max}(H'_0)}{\lambda_{\min}(C'_0)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H'_0)}{\lambda_{\min}(H'_0)} \right] \leq \frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(C_0)} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)} \right] = \varphi_3(H_0)$$

болады. Егерде (1.1) системасының A матрицасы блоклы- диагоналлық структурасына ийе болса, онда H_0 матрицасыда блоклы- диагоналлық структурасына ийе болады.

Бир текли емеслігін дәлеллеуіші мысал ретінде системаны қараймыз. Бул системаның A_1 матрицасы асимптотикалық орнықтылы болып, ал $A_2 = -a < 0$ скаляр болады. Мейли $A_1 + A_1^T$ матрицасы теріс анықланған болмасын хәм бірінші үлес системасы ушын оптимал болып H_{11}^0 есапланады, соның менен бірге $\lambda_{\min}(H_{11}^0) < \lambda_{\max}(H_{11}^0)$ болады. Егерде

$a > 2\lambda_{\min}(C_{11}^0)/\lambda_{\min}(H_{11}^0)$ болса, онда H_{11}^0 хәм h лардан дүзилген H_0 матрицасын алыўға болады, соның менен бирге

$$\lambda_{\min}(H_{11}^0) \leq h \leq \lambda_{\max}(H_{11}^0), h > \lambda_{\min}(C_{11}^0)/2\lambda_{\max}(H_{11}^0).$$

Оптималластырыў мәселесин шешиўдиң алгоритмлерин қараймыз.

Нур бойынша оптималластырыў алгоритми. Ляпунов теңлемесин мына төмендеги түрине түрлендиремиз:

$$A^T(H_E + \delta E) + (H_E + \delta E)A = -[E - \delta(A + A^T)]$$

H өзгериўшисиниң $\varphi_3(H)$ функциясы δ өзгериўшисиниң функциясына айланады:

$$\varphi_3(\delta) = \frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)]} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right]$$

Енди $\varphi_3(\delta)$ ның экстремумын излеймиз. $H + \delta E$ хәм $E - \delta(A + A^T)$ матрицалары оң анықланған болыўы ушын, онда δ векторын сайлап алғанымызда $\delta + \lambda_{\min}(H_E) > 0$, $\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)] > 0$ есапқа алыў керек болады.

Егерде $-(A + A^T)$ матрицасы оң анықланған болса, онда $H_0 = E$ деп алыў керек болады. Сонлықтан $-(A + A^T)$ матрицасы оң анықланған емес деп есаплаймыз хәм буннан $\lambda_{\max}(A + A^T) > 0$ болады.

Демек,

$$\lambda_{\min}[E - \delta(A + A^T)] = \begin{cases} 1 - \delta\lambda_{\min}(A + A^T), & \delta < 0, \\ 1 - \delta\lambda_{\max}(A + A^T), & \delta \geq 0. \end{cases}$$

$\varphi_3(\delta)$ функциясы мына түрине ийе болады:

$$\varphi_3(\delta) = \begin{cases} \frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{1 - \delta\lambda_{\min}(A + A^T)} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right], \\ \max \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), \frac{1}{\lambda_{\min}(A + A^T)} \right\} < \delta < 0, \\ \frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{1 - \delta\lambda_{\max}(A + A^T)} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right], \end{cases}$$

бунда $0 \leq \delta < \frac{1}{\lambda_{\max}(A + A^T)}$ болады.

Томенде берілген функцияның, яғный

$$\psi(\delta) = \frac{\delta + a}{1 - \delta c} \ln \left[\frac{\delta + a}{\delta + b} \right], \quad a > b > 0$$

минимизациялау мәселесін қараймыз.

$\delta = \delta_0$ нокатындағы $\psi(\delta)$ ның экстремум болатуғынлығының зәрүрлі шәрти ретінде $\psi'(\delta) = 0$ болады, яғный δ_0 нокаты мына теңлемениң

$$\frac{1 + ac}{a - b} \ln \left[\frac{\delta + a}{\delta + b} \right] - \frac{1 - \delta c}{b + \delta} = 0 \quad (2.1.2)$$

шешиминен анықланады.

$\delta = \delta_0$ да жеткиликли шәрти болып $\psi''(\delta_0) > 0$ есапланады. Екинши туўындысын алып, мынаған ийе боламыз:

$$\psi''(\delta_0) = \frac{(b - a)^2}{(1 - \delta_0 c)(\delta_0 + a)(\delta_0 + b)^2}.$$

Демек, егерде δ_0 (2.1.2) теңлемениң шешими болса хәм $\delta_0 + b > 0$, $1 - \delta_0 c > 0$ теңсизликлерин қанаатландырса, онда $\delta = \delta_0$ да $\psi(\delta)$ функциясы минимал мәнисин қабыл етеди.

Жоқарыда қаралған мәселени өтиўши процесслерин ўақыт бойынша баҳасын оптималластырыў мәселесине қолланамыз.

1). Мейли δ_1

$$\frac{1 + \lambda_{\max}(H_E) \cdot \lambda_{\min}(A + A^T)}{\lambda_{\max}(H_E) - \lambda_{\min}(H_E)} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right] - \frac{1 - \delta \lambda_{\min}(A + A^T)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} = 0,$$

$$\max \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), \frac{1}{\lambda_{\min}(A + A^T)} \right\} < \delta_1 < 0$$

теңлемесиниң шешими болсын. Онда $H(\delta_1) = H_E + \delta_1 E$,

$C(\delta_1) = E - \delta_1(A + A^T)$ деп есаплап, $\varphi_3(H(\delta)) < \varphi_3(H_E)$ ийе боламыз, яғный

$\mathcal{G}_0(x) = x^T H(\delta)x$ функциясы жәрдемінде алынқан өтиўши процесстин ўақты

$\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ функциясы менен алынғаннан киши болады.

2) Мейли δ_2 де төмендеги теңлемениң

$$\frac{1 + \lambda_{\max}(H_E)\lambda_{\max}(A + A^T)}{\lambda_{\max}(H_E) - \lambda_{\min}(H_E)} \ln \left[\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} \right] - \frac{1 - \delta\lambda_{\min}(A + A^T)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)} = 0,$$

$$0 < \delta_2 < \frac{1}{\lambda_{\max}(A + A^T)}$$

барлық δ уақытта $H(\delta) = H_E + \delta E$, $C(\delta) = E - \delta(A + A^T)$ хәм

$\varphi_3(H(\delta)) < \varphi_3(H_E)$ ийе боламыз.

Егерде бул еки шәрти де орынланса, онда $x^T H(\delta_1)x$ хәм $x^T H(\delta_2)x$ функциялардың ишинен $\varphi_3(\delta)$ киши болатуғынын сайлап аламыз, яғный

$$\delta_0 = \arg \min \{ \varphi_3(\delta_1), \varphi_3(\delta_2) \}$$

Егерде бул шәртлердің бирде биреўде орынланбаса, онда $\delta_0 = 0$ деп есаплап, яғный Ляпуновтың оптимал функциясы болып $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_E x$ болады.

Көшер бойынша созыў алгоритми.

Мейли U ортогонал матрицасы болып хәм ол H_E матрицасын диагоналлық түрине алып келеди, яғный $U^T H_E U = \Lambda$ болады. Ляпунов теңлемесин шеп қаптал тәрәпинен U^T ға көбейтип, ал оң қаптал тәрәпинен U көбейтип, мына төмендегиге ийе боламыз:

$$A_1^T \Lambda + \Lambda A_1 = -E,$$

бул жерде $A_1 = U^T A U = \{a_{ij}^1\}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Теңлемени мына түрине түрлендиремиз:

$$A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1 = -C_1(\varepsilon),$$

яғный

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} A_1 =$$

$$= -E + \varepsilon \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Буннан

$$C_1(\varepsilon) = E - \varepsilon \begin{bmatrix} 2a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n}^1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

хәм $\varphi_3(\varepsilon)$ функциясы ушын

$$\varphi_3(\varepsilon) = \frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}[C_1(\varepsilon)]} \ln \left[\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E) + \varepsilon} \right].$$

ε параметрин өзгертиў есабынан теңsizликтиң оң қаптал бөлегин азайтамыз, яғный өтиўши процессиниң ўақтың анықлаўши дәлирек баҳасына ийе боламыз. $C_1(\varepsilon)$ матрицасының характеристикалық теңлемеси мына түрине ийе болады:

$$\det[C_1(\varepsilon) - \lambda E] = (-1)^n \cdot (1 - \lambda)^{n-2} \left[(1 - \lambda)^2 - 2\varepsilon a_{11}^1 (1 - \lambda) - \varepsilon^2 \sum_{i=1}^2 (a_{1i}^1)^2 \right].$$

Оған сәйкес болатуғын меншикли санлары болып

$$\lambda_i[C(\varepsilon)] = 0, \quad i = \overline{1, n-2}, \quad \lambda_{n-1, n} = [C(\varepsilon)] = 1 - \varepsilon(a_{11}^1 \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2})$$

есапланады.

Демек,

$$\lambda_{\min} [C(\varepsilon)] = \begin{cases} 1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right], & \varepsilon \geq 0, \\ 1 - \varepsilon \left[a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2} \right], & \varepsilon < 0. \end{cases}$$

$\varphi_3(\varepsilon)$ функциясы үшін мына төмендегі теңсізліктері орынлы болады:

$$\varphi_3(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{a}{1 - \varepsilon c_1} \ln \left[\frac{a}{b + \varepsilon} \right], & 0 \leq \varepsilon < \frac{1}{c_1}, \\ \frac{a}{1 - \varepsilon c_2} \ln \left[\frac{a}{b + \varepsilon} \right], & \max \left\{ -b, \frac{1}{c_2} \right\} < \varepsilon < 0 \end{cases},$$

бул жерде

$$a = \lambda_{\max}(H_E), \quad b = \lambda_{\min}(H_E), \quad c_1 = a_{11}^1 + \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}, \quad c_2 = a_{11}^1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2}$$

болады.

Төменде берілген функциясын қараймыз

$$\psi(\varepsilon) = \frac{a}{1 - \varepsilon c} \ln \left[\frac{a}{\varepsilon + b} \right].$$

Экстремум болыўдың зәрүрлі шәрті мына түрине ийе болады:

$$\psi'(\varepsilon) = \frac{a}{1 - \varepsilon c} \left[\frac{c}{1 - \varepsilon c} \ln \left(\frac{a}{b + \varepsilon} \right) - \frac{1}{b + \varepsilon} \right] = 0 \quad (2.1.3)$$

Мейли ε_0 (2.1.3) теңлемесиниң шешими болсын. Онда

$\psi(\varepsilon)$ функцияның екинши туўындысы ε_0 да мынаған тең болады:

$$\psi''(\varepsilon_0) = \frac{a}{(1 - \varepsilon_0 c)(b + \varepsilon)^2} > 0.$$

Егерде (2.1.3) теңлемеси функцияның анықланыў областына тийисли болған ε_0 шешимине ийе болса, онда бул ноқатында $\psi(\varepsilon)$ функциясы минимал мәнисине жетиседи.

$\varphi_3(\varepsilon)$ функциясы өзиниң минимал мәнисине жетисетуғын $\varepsilon = \varepsilon_0$ дағы мәнисин табыў үшін мынандай әмеллерин орынлаймыз.

1) $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{c_1}$ аралығында

$$\frac{c_1}{1 - \varepsilon c_1} \ln\left(\frac{a}{b + \varepsilon}\right) - \frac{1}{b + \varepsilon} = 0$$

теңлемесин шешемиз.

2) $\max\{-b, 1/c_2\} < \varepsilon < 0$ аралығында

$$\frac{c_2}{1 - \varepsilon c_2} \ln\left(\frac{a}{b + \varepsilon}\right) - \frac{1}{b + \varepsilon} = 0$$

теңлемесин шешемиз.

Егерде бул теңлемелери $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ шешимлерине ийе болса, онда $\varepsilon_0 = \arg \min\{\varphi_3(\varepsilon_1), \varphi_3(\varepsilon_2)\}$.

Егерде шешимлери жоқ болса, онда $\varepsilon_0 = 0$ хэм $H = H_E$ болады.

2.2-§. Оптимизациялық мәселелерин градиентлик усыллары менен шешіу

Сызықлы емес программаластырыудың улыўмаласқан мәселелерин шешіуде

$$f_0(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}, \quad f_i(H) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad H \in \Omega(H)$$

Лагранждың көбейткишлер усылынан пайдалансақ болады. Лагранж функциясы мына төмендеги түрине ийе болады:

$$Z(H, \beta) = f_0(H) + \sum_{i=1}^n \beta_i f_i(H), \quad \beta_i \geq 0.$$

Кун-Таккере теоремасынан мыналар келип шығады. Мейли $f_i(H), i = \overline{0, m}$ дөңес функциялары болсын, $\Omega(H)$ көплиги дөңес болып хэм Слейтердин қадағалау шэрти орынлансын, яғнай $\tilde{H} \in \Omega(H)$ бар болып, бунда $f_i(\tilde{H}) < 0 \quad i = \overline{1, m}$ болады. H_0 матрицасы оптимизациялық мәселениң шешими болыудың зэрүрли хэм жеткиликли шэртлери болып

$\bar{\beta}_0 = (\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_m^0)$ векторының бар болыуы, бунда (H_0, β_0) жұбы $Z(H, \beta)$ функциясының ер ноқаты болыуы керек болады.

Хәм шегаралауши шәртлерине ийе болған дәслепки мәселеси төмендеги функцияны минимизациялау мәселеси менен алмастырылады, яғный

$$F(H) = \max_{\beta \geq 0} Z(H, \beta) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}$$

ямаса минимакс мәселесин шешиу менен:

$$Z(H, \beta) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)} \max_{\beta \geq 0}.$$

Бундай мәселелерди шешиудин тийкарғы санлы усыллары болып градиентлер усылы хәм оның модификациялары есапланады. Шешимин табыудың еки градиентлик усылын қараймыз.

1. Тууры градиентлык усылы.

$$H_{k+1} = \pi_H \left(H_k - \rho_k \left[\text{grad} \tilde{f}_0(H_k) + \sum_{i=1}^m C_i(H_k) \cdot \text{grad} \tilde{f}_i(H_k) \right] \right)$$

бул жерде $\pi_H(z)$ функциясы бул z ноқатын $\Omega(H)$ көплигине проектлеу әмели жәрдемінде алынған функциясы. $C_i(H)$ функциясы төмендегише болып есапланады:

$$C_i(H) = \begin{cases} C_i, & \text{егер } f_i(H) > 0, \quad i = \overline{1, m} \\ 0, & \text{егер } f_i(H) \leq 0, \quad i = \overline{1, m} \end{cases},$$

бунда C_i жеткиликли үлкен санлары, $\text{grad} \tilde{f}_i(H)$ H ноқатындағы $f_i(H)$ функциясының улымаласқан градиенти.

2. Эрроу-Гурвиц усылы. Бул усылда функцияның ер ноқатын еки координата бойынша бир уақытта излеймиз. Демек

$$H_{k+1} = \pi_H \left(H_k - \rho_k \cdot \left[\text{grad} \tilde{f}_0(H_k) + \sum_{i=1}^n \beta_i^k \cdot \text{grad} \tilde{f}_i(H_k) \right] \right),$$

$$\beta_i^{k+1} = \max \{ 0, \beta_i^k + \rho_k \cdot f_i(H_k) \}, \quad i = \overline{1, m}$$

яғный β бойынша $Z(H, \beta)$ градиентың бағыты бойынша хәм H бойынша антиградиентық бағыты бойынша. Егерде $f_0(H)$ қатан дөңес функциясы

болса, онда $f_i(H)$ функциялары дөңес болады, онда $Z(H, \beta)$ функциясының ер ноқаты бар болып хәм егерде

$$\rho_k \rightarrow 0, \rho \geq 0, \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = \infty$$

болса, онда $\{(H_k, \beta_k)\}$ избе-излиги сол мағанасында жыйнақлы болады, $\{H_k\}$ шекли ноқатларының бири шешимлер көплигине тийисли болады. Бул алгоритмлерди $\varphi_i(H)$, $i = \overline{1,3}$ функцияларын минимизациялаў ушын пайдаланыў мүмкиншилигин қараймы.

1) Төменде берилген функциясын минимизациялаў мәселесин қараймыз:

$$\varphi_1(H) \rightarrow \inf_{H \in \overline{G}(H)},$$

бунда $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$, $\overline{G}(H) = \{H : \lambda_{\min}(-A^T H - HA) > 0\}$ болады. Жоқарыда дәлилленип көрсетилген бойынша H_0 болған оптимал шешими $\partial G(H)$ шегарасында жайласқан болады, соның менен бирге $\varphi_1(H)$ функциясының биртеккли болғаны ушын, $\overline{G}(H)$ тың ишинде жайласқан $\lambda_{\max}(H) = 1$ шардың бир бөлегин қарасақта болады. Демек, төмендеги функцияның минимумын қарасақ болады:

$$f_0^1(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)},$$

шегаралаўши шәртлери

$$f_1(H) \leq 0, \quad f_2(H) \leq 0$$

болады, бунда $f_0(H) = -\lambda_{\min}(H)$, $f_1(H) = -\lambda_{\min}(-A^T H - HA)$, $f_2(H) = \lambda_{\max}(H) - 1$ болады, $\Lambda(H)$ -симметриялық оң анықланған матрицалардың көплиги.

Лагранж функциясы төмендеги түрине ийе болады:

$$Z_1(H, \beta) = f_0^1(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i f_i(H)$$

H бойынша улығмаласқан градиенти

$$\text{grad}_h \tilde{Z}_1(H, \beta) = \text{grad}_h \tilde{f}_0^1(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \cdot \text{grad}_h \tilde{f}_i(H)$$

$$f_0^2(H) = -\ln[\lambda_{\min}(-A^T H - HA)] - \frac{1}{2} \ln[\lambda_{\min}(H)].$$

Лагранж функциясы

$$Z_2(H, \beta) = f_0^2(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i f_i(H)$$

болады. H бойынша улыўмаласқан градиенти:

$$\text{grad}_{\tilde{H}} Z_2(H, \beta) = \text{grad}_{\tilde{H}} f_0^2(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \cdot \text{grad} f_i(H)$$

болады, бул жерде

$$\text{grad}_{\tilde{H}} f_0^2(H) = -\frac{D[H]}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x_{\min} \cdot x_{\min}^T}{\lambda_{\min}(H)}.$$

$f_0^2(H)$ функциясы бул еки дөңес функциялардың қосындысы болып хэм Слейтер шәртлериде орынланады.

3). Функцияны минимизациялаў әмелин қараймыз:

$$\varphi_3(H) \rightarrow \inf_{H \in G(H)}$$

бул жерде

$$\varphi_3(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} \cdot \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}}.$$

Бул мәселени мына төмендеги мәселеси менен алмастырамыз:

$$f_0^3(H) \rightarrow \min_{H \in \Omega(H)}, \quad f_1(H) \leq 0, \quad f_2(H) \leq 0,$$

бул жерде

$$f_0^3(H) = -\ln[\lambda_{\min}(-A^T H - HA)] - \ln\{\ln[\lambda_{\min}(H)]\}.$$

Лагранж функциясы мына түрине ийе болады:

$$Z_3(H, \beta) = f_0^3(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i f_i(H)$$

Оның H бойынша улыўмаласқан градиенты

$$\text{grad}_{\tilde{H}} Z_3(H, \beta) = \text{grad}_{\tilde{H}} f_0^3(H) + \sum_{i=1}^2 \beta_i \cdot \text{grad} f_i(H)$$

болады, бул жерде

$$\text{grad} \tilde{f}_0^3(H) = -\frac{D[H]}{\lambda_{\min}(-A^T H - HA)} - \frac{x_{\min} \cdot x_{\min}^T}{\lambda_{\min}(H) \cdot \ln[\lambda_{\min}(H)]}.$$

$f_0^3(H)$ функциясы да еки дөңес функциялардың қосындысы болып хәм Слейтер шәртлери орынланады.

Дифференциалланбайтуғын оптимизациялық мәселелерин шешиўдиң ең бир әхмийетли усылларының бири болып Н.З,Шор тәрәпинен усынылған градиентлик түсиўдың улыўмаласқан усылы болып есапланады.

Кеңисликти созыў менен градиентлик түсиў усылы.

1-адым. H^0 ноқатындағы $f(H)$ функциясыгның улыўмаласқан H^0 хәм $g_1(H^0)$ градиентлерин есаплаймыз. h_{k+1} хәм α_{k+1} берилген формулалар бойынша H^1 хәм α_1 ларды есаплаймыз. Буннан соң $H' = h^0 - h_1 \cdot g_f(H^0)$ есапланады. $B_1 = E$ деп аламыз.

2-адым. Мейли $k = 1$ болсын.

3-адым. $g_f(H^k)$ есаплаймыз.

4-адым. Егерде $|g_f(H^k)| < \varepsilon$ болса, онда есаплаўларды тоқтатамыз, кери жағдайда 5-адымға өтемиз.

5- адым. $r_k = B_k^T [g_f(H^k) - g_f(H^{k-1})]$ айырманы есаплаймыз.

6-адым. $k + 1$ созыў бағытын, яғный $\xi_{k+1} = 2k / |2k|$ есаплаймыз.

7-адым. h_{k+1} жылжыўдың $k + 1$ адымын хәм α_{k+1} созыў коэффициентин есаплап аламыз.

8-адым. $k + 1$ адымның созыў матрицасы есапланады

$$B_{k+1} = B_k [E + (\alpha_{k+1}^{-1} + 1) \cdot \varphi_{k+1} \cdot \varphi_{k+1}^T]$$

9-адым. $\tilde{g}_{k+1} = B_{k+1}^T g_f(H^k)$ есапланады.

10-адым. Итерацияның $k + 1$ ши адымы орынланады

$$H^{k+1} = H^k - h_{k+1} \cdot B_{k+1} \tilde{g}_{k+1} / |\tilde{g}_{k+1}|$$

11-адым. $k = k + 1$ деп есаплап хәм 3-ши адымға өтемиз.

III Бап

Айырмалы схемалардың орнықтылығының оптимал бақаларын Ляпуновтың квадратлық функциялар топарында дүзиу

Бул бапта айырмалы теңлемелердің автономлы системалары қаралады. Изертлеу жұмыстары Ляпуновтың екінші усылы жәрдемінде жүргизиледи. Функциялар квадратлық формасы түрінде жасалады. Ляпуновтың екінші усылы жәрдемінде алынатуғын орнықтылықтың бир неше характеристикалары келтирили шығарылған. Квадратлық функциялар топарында ең жақсы болатуғын орнықтылықты сыпатлаушы бақаларын дүзиу мүмкиншиликлери қаралған.

3.1-§. Басланғыш өзгериулерин оптимизациялау бақалары

Сызықлы айырмалы теңлемелер системасын қараймыз:

$$x_{k+1} = Ax(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1.1)$$

Айырмалы теңлемелер системасы үшін орнықтылық анықламалары дифференциаллық теңлемелер системасы үшін берилген анықламаларына уқсас.

Анықлама. $x_k \equiv 0, k = 0, 1, 2, \dots$ шешими Ляпунов бойынша орнықтылы болады, егерде қалеген бир $\varepsilon > 0$ ушын, сондай бир $\delta(\varepsilon) > 0$ бар болып, $k = 0, 1, 2, \dots$ айырмалы теңлемелер системаның қалеген $x(k)$ шешими ушын $|x_0| < \delta$ де $|x_k| < \varepsilon$ шәрти орынланса.

Анықлама. $x_k \equiv 0$ шешими асимтотикалық орнықтылы болады, егерде ол Ляпунов бойынша орнықтылы болып хәм $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k| = 0$ болса.

Ляпуновтың екінші усылы менен орнықтылықты изертлегенимизде квадратлық түрдеги функциясы алынады. Егерде оның биринши айырмасы (3.1.1) системанысына сәйкес

$$\Delta \mathcal{G}(x(k)) = x^T(k)(A^T H A - H)x(k)$$

терис анықланған болса, онда система асимптотикалық орнықтылығы болады.

Әмелиятта изертлеу жұмыстары Ляпуновтың айырмалы теңлемесін шешиўге алып келинеди:

$$A^T H A - H = -C. \quad (3.1.2)$$

Орнықтылықты анықлаўдан тысқары Ляпуновтың екінши усылы системаның шешимлериниң базы бир характеристикаларын есаплаўға мүмкиншилик береді. Егерде H хәм C матрицалары оң анықланған болса, онда (1.1.3) болған квадратлық формасындағы иенсизликлер орынлы болады. $\Delta \mathcal{G}(x(k)) = \mathcal{G}(x(k+1)) - \mathcal{G}(x(k))$ себепли, онда оны орнына апарып қойғаннан кейин

$$\mathcal{G}(x(k+1)) - \mathcal{G}(x(k)) \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \mathcal{G}(x(k))$$

ийе боламыз ямаса

$$\mathcal{G}(x(k+1)) \leq \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}\right) \mathcal{G}(x(k)).$$

Пайда болған теңсизлигин шешип, мынаған ийе боламыз:

$$\mathcal{G}(x(k)) \leq \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}\right)^k \mathcal{G}(x(0)).$$

Қайтадан (1.1.3) квадратлық формасындағы теңсизликлеринен пайдаланып

$$|x(k)| < \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(C)}{\lambda_{\min}(H)}} |x(0)| \cdot \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}\right)^{k/2}. \quad (3.1.3)$$

(3.1.3) теңсизликлери (3.1.1) системаның бир қатар шешим баҳаларын алыў ушын хәм оларды оптимизациялаў ушын дәслепки мағлыўмат болады.

Егерде A асимптотикалық орнықтылығы матрицасы болса, ал H хәм C матрицалары оң анықланған болса, онда

$$0 \leq \lambda_{\min}(C) \leq \lambda_{\max}(H)$$

теңсизликлери орынланады.

Сонлықтан (3.1.3) теңсизлигиниң оң қаптал бөлегин бөлими

$$0 \leq 1 - \lambda_{\min}(C) / \lambda_{\max}(H) < 1$$

болған шексиз кеміуіші геометриялық прогрессияның ағзасы ретінде көрсетілуіге болады.

Система орнықтылығы болады, егерде $|x(0)| < \delta(\varepsilon)$ болса, онда $k = 1, 2, \dots$, де $|x(k)| < \varepsilon$ болатуғынлығы орнықтылықтың анықтамасынан келип шығады.

(3.1.3) теңсізлігін пайдаланып

$$\delta(\varepsilon) \leq \sqrt{\lambda_{\min}(H) / \lambda_{\max}(H)} \cdot \varepsilon$$

ийе боламыз.

Дәслепки қозғалыс областың әдеуір дәл бахалаушы, яғни $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$ функциясы өзінің минимал мәнісіне жетісетуғын H матрицасын табыу мәселесі бұл жерде бизди ғызықтырады. $W(H)$ деп оң анықланған H матрицалар көплігін белгілейміз. Бұл матрицасы үшін $A^T H A - H$ матрицалары теріс анықланған. Сонлықтан $W(H)$ көплігі бұл жерде дөңес конус болатуғынлығын тексеріп көріу қыйыншылық туўдырмайды.

3.1.1-анықтамасы. $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясын, бунда

$$H_0 = \arg \inf_{H \in W(H)} \{\varphi_1(H)\},$$

дәслепки қозғалысты бахалау үшін оптимал болады деп атаймыз. $\varphi_1(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$ болғаны үшін, онда барлық Ляпунов функциялардың ишинен ең жақсы болып $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ функциясы есапланады, бұл функциясы үшін $\varphi_1(H_0) = 1$. (3.1.1) системасы үшін бундай жағдайға анық бир A матрицалар топары үшін жетісетуғынлығымыз анық. Бундай функциялардың бар болуы шәртлерін анықлаймыз.

3.1.1-теоремасы. (3.1.1) теңлемесі дәслепки өзгеріу көплігін оптимал бахалаушы $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясына тек сол жағдайда ийе болады, егерде $E - A^T A$ оң анықланған матрицасы болса, бунда $H_0 \in W(H)$, $\varphi_1(H_0) = 1$ болады.

Дәлилленіуі. Дифференциаллық теңлемелер системасына ұқсас (3.1.2) теңлемесін H_0 матрицасын диагональлық түрине алып келетуғын U матрицасына көбейтеміз. Жеткиликлі шәртлерін келтиріп шығарыўда $C_0 = E - A^T A$ деп есаплаймыз.

$\varphi_1(H)$ функциясының анықланыў областы $W(H)$ ашық конус болады. Бунда дәл төменги шегарасын табыў мәселеси қаралғаны себепли, бунда мынандай жағдай болыўы мүмкин, яғный $H_0 \in \partial W(H)$, бул жерде $\partial W(H)$ конустың қаптал бети. Бул жағдайда H^ε хәм C^ε оң анықланған матрицалардың избе-излиги бар болып, олар (3.1.2) теңлемесін қанаатландырып хәм $\varphi_1(H^\varepsilon) < 1 + \varepsilon$ болады.

3.1.1- леммасы. Мейли қәлеген бир $\varepsilon > 0$ ушын H^ε хәм C^ε оң анықланған матрицалары бар болып, олар (3.1.2)ни хәм $\varphi_1(H^\varepsilon) < 1 + \varepsilon$ қанаатландырысын. Онда (3.1.2)ни хәм $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_m) \rightarrow 1$ қанаатландыратуғын

$\{H_m\} \in W(H)$ хәм $\{C_m\}$ $m = 1, 2, \dots$ избе-изликлери бар болады. Бирақ $\{H_m\}$ избе излиги оң анықланған H_0 матрицасына жыйнақлы болады, ал $\{C_m\}$ избе-излиги толық емес оң анықланған C_0 матрицасына жыйнақлы болады.

Дәлилленіуі. Бул лемманың Дәлилленіуі 1.1.1 лемманың дәлилленіуіне тийкарынан ұқсас болады. Бунда $\{C_m\}$ избе излиги дүзилип хәм оннан жыйнақлы болатуғын $\{C_{m_k}\}$ үлес избе излиги ажыратып алынады.

$F(H) = H - A^T H A$ операторы айнымалы емес болғаны ушын $\{C_{m_k}\}$ избе излигиниң жыйнақлы болатуғынлығынан $\{H_{m_k}\}$ ның жыйнақлылығы келип шығады.

Бул леммадан пайдаланып келеси тастыйқлаў дәлилленеди.

3.1.2-теоремасы. (3.1.2) теңлемеси $\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_1(H_m) \rightarrow 1$ болатуғын $\{H_m\}$, $m = 1, 2, \dots$, оң анықланған матрицалардың избе излигин шешими ретинде сол жағдайда ийе болады, егерде $E - A^T A$ матрицасы толық емес оң анықланған болса.

Жоқарыда келтирилген тастыйқлаўлар тийкарында мына келеси теоремасы дурыс болады.

3.1.3-теоремасы. Дәслепки көзғалысларды баҳалаў ушын оптимал болатуғын $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясы, бунда $H_0 \in W(H)$ болады бар болады, егерде $E - A^T A$ оң анықланған матрицасы болса. Бунда $H_0 = \lambda E$, $\lambda > 0$, $\varphi_1(H_0) = 1$.

Дәлилленіўи. Бул теореманың зәрүрли шәртлерин кери болжаўдан баслаймыз. Мейли $\varphi_1(H_0) = \alpha > 1$ болсын деп болжаймыз хәм бул жағдайда $\varphi_1(H)$ функциясын жақсылаўға болады деп дәлиллеймиз, яғный $\varphi_1(H_0^\delta) < \alpha$ шәрти орынланатуғын H_0^δ табыў. Ал онда 2.2.1 теоремасынан $E - A^T A$ матрицасының оң анықланған болатуғынлығы келип шығады. Бул теореманың жеткиликли шәртлери 2.2.1 теоремасынан келип шығады.

$\varphi_1(H)$ функциясының H өзгериўшисиниң өзгериўи областын кеңейтемиз. Ол ушын конуска оның оң қаптал бетин көсамыз, яғный толық емес оң анықланған $H - A^T H A$ матрицаларына ийе болатуғын оң анықланған H матрицалар көплигин қараймыз, яғный

$$\bar{W}(H) = W(H) \cup \partial W(H), \partial W(H) = \{H : \lambda_{\min}(H - A^T H A) = 0\}.$$

3.1.4-теоремасы. $\varphi_1(H_0) = 1$ болатуғын дәслепки қозғалысларды баҳалаў ушын оптимал болатуғын $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ функциясы, бунда $H_0 \in \bar{W}(H)$ бар болады, егерде $E - A^T A$ толық емес оң анықланған матрицасы болса.

Зәрүрли шәрти. Мейли $H_0 \in \bar{W}(H)$ хәм $\varphi_1(H_0) = 1$ ийе болайық. Егерде $H_0 \in W(H)$ болса, онда 2.2.3 теоремасына келемиз. Сонлықтан $H_0 \in \partial W(H)$ деп есаплаймыз, яғный $\lambda_{\min}(H_0 - A^T H_0 A) = 0$. $\varphi_1(H_0) = 1$ болғаны ушын, онда $H_0 = \lambda E$, $\lambda > 0$ болады. Демек, $\lambda_{\min}(H_0 - A^T H_0 A) = \lambda \cdot \lambda_{\min}(E - A^T A) = 0$, яғный $E - A^T A$ толық емес оң анықланған матрицасы.

Жеткиликли шәртлери. Мейли $E - A^T A$ толық емес оң анықланған матрицасы болсын. $H_0 = \lambda E$ деп есаплап, $\varphi_1(H_0) = 1$ ийе боламыз, яғный $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпуновтың оптимал функциясы болады.

Енди $E - A^T A$ толық емес оң анықланбаған функциясы болған жағдайын қараймыз. Бунда Ляпуновтың оптимал функциясы бари-бир бар болатуғынлығын көрсетеміз, бірақ $\varphi_1(H_0) > 1$ болады.

3.1.5-теоремасы. C_0 матрицаның толық емес оң анықланғанлығы оптималлық шәртинің зәрүрлі шәрти болады, яғный $H_0 \in \partial W(H)$.

Дәлилленіуі. Дәлиллеуді кері пикирден баслаймыз. Мейли $H_0 \in W(H)$ болсын, яғный $\lambda_{\min}(C_0) > 0$ болады. Онда $H_0 + \delta E$ матрицасы дүзилип хәм бул матрицасы ушын $\varphi_1(H_0 + \delta E) < \varphi_1(H_0)$ теңсизлиги орынлансын деп болжаймыз.

$\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ оптимал функциясы барлық ұақытта бар болатуғынлығын көрсетеміз.

3.2.6-теоремасы. Асимптотикалық орнықлылы болған қәлеген (3.1.1) системасы ушын дәслепки қозғалысларды бахалау ушын $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясы, бунда $H_0 \in \bar{W}(H)$ барлық ұақытта бар болады.

Дәлилленіуі. Жоқарыда айтылғандай $\bar{W}(H)$ - бул өз ишине қаптал тәрәпин алған дөңес конус болып есапланады. $\varphi_1(H)$ - нолинши дәрежелі бир текли функциясы. Сонлықтан оның анықланыу областы ретінде бирлик радиусына ийе $\bar{W}_1(H) = W(H) \cap \{H : |H| = 1\}$ сферасы менен $\bar{W}(H)$ конустың кесилиспесин қарауға болады.

$\bar{W}^1(H)$ көплиги компакт болып есапланады. $\bar{W}^1(H)$ көплигинде $\varphi_1(H)$ функциясының ең киши мәнисин табыу мәселесин $\bar{W}_1(H)$ көплигинде $\varphi^{-1}(H) = \lambda_{\min}(H)$ функциясының ең үлкен мәнисин табыу мәселесі менен алмастырайық. $\lambda_{\min}(H)$ функциясы үзликсиз болып хәм $\bar{W}^1(H)$ компактында өзинің ең үлкен мәнисине жетиседи.

Енди улыуа жағдайда ($n \geq 3$) Ляпуновтың оптимал функциясы бир мәнилі емес болып дүзиледи.

3.1.7-теоремасы. (3.1.1) системасының A матрицасы блоклы-диагоналық структурасына ийе болса, онда дәслепки қозғалысларды

оптимальный баһалаушы Ляпуновтың $\mathcal{G}_0(x)$ функциясының да H_0 матрицасы блоклы-диагональлық структурасына ийе болады.

Дәлилленіуі. Тийкарынан 1.1.8 теоремасының Дәлилленіуі менен теңдей болады. Мейли H_0 хәм C_0 оптималь матрицалары болып хәм

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^0 \\ (H_{12}^0)^T & H_{22} \end{bmatrix}, \quad C_0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ (C_{12}^0)^T & C_{22} \end{bmatrix}.$$

Егерде C_0 матрицасынан $C_{12}^0, (C_{12}^0)^T$ блоктарын алып таслау менен дүзилген C'_0 матрицасын алсақ, онда оның шешими болып H'_0 матрицасы есапланады. Бул матрицасының H_0 матрицасынан парқы, онда $H_{12}^0, (H_{12}^0)^T$ блоктарының кемислиги. Ал бундай болса, онда $\varphi_1(H'_0) \leq \varphi_1(H_0)$ болады, яғный оптималь болатуғын матрицасы блоклы-диагональлық структурасына ийе болады.

Бул теоремадан пайдаланып, $\mathcal{G}_0(x)$ функция бир мәнили емес болып дүзилетуғынын тастыйклайушы мысал ретинде блоклы-диагональлық структурасына ийе болған A матрицалы системасын аламыз. A_1 блоги бул оптималь $\mathcal{G}_0(x) = (x')^T H_{11}^0 x'$ функциясына ийе болған үлес системасы болып есапланады, бунда $\lambda_{\min}(H_{11}^0) < \lambda_{\max}(H_{11}^0)$ болады. Онда барлық системасы ушын H_0 ретинде H_{11}^0 хәм $h: \lambda_{\min}(H_{11}^0) \leq h \leq \lambda_{\max}(H_{11}^0)$ үлес матрицалардан дүзилген матрицаны алыуға болады.

Енди $\mathcal{G}_0(x)$ функциясын табыу алгоритмин қараймыз.

Нур бойынша оптимизациялау алгоритми.

(3.1.2) теңлемесин төмендегише етип түрлендремиз:

$$A^T (H + \delta E) A - (H + \delta E) = -[C + \delta(E - A^T A)]$$

Егерде C оң анықланған матрицасы болса, онда жеткиликли киши болған $\delta > 0$ санларында $C + \delta(A + A^T)$ де оң анықланған болады. Симметриялық матрицалардың қәсийетлеринен мына төмендеги келип шығады:

$$\lambda_{\min} [C + \delta(E - A^T A)] \geq \lambda_{\min}(C) + \delta \lambda_{\min}(T - A^T A).$$

Сонлықтан $\delta = \lambda_{\min}(C) / \lambda_{\min}(E - A^T A)$ алып, мынаған ийе боламыз:

$$\varphi_1(H + \delta E) = \frac{\lambda_{\max}(H + \delta E)}{\lambda_{\min}(H + \delta E)} = \frac{\lambda_{\max}(H) + \delta}{\lambda_{\min}(H) + \delta} < \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)} = \varphi_1(H).$$

Бул аңлатпаның геометриялық мағанасы бойынша жылжыу нур бойынша μE матрицасына қарата болып, бунда $\partial W(H)$ шегарасына шекем $\mu \rightarrow \infty$.

Көшерди созыу алгоритми.

Мейли жұп оң анықланған H хәм C матрицасы (3.1.2) теңлемениң шешими болсын. H матрицасын диагоналық түрине алып келиуши U ортогонал матрицасы бар болады. (3.1.2) теңлемесин шеп қаптал тәрәпинен U^T көбейтеміз, оң қаптал тәрәпинен U матрицасына көбейтеміз. $A_1 = U^T A U$ $C_1 = U^T C U$ белгилейміз. Сонда мынаған ийе боламыз:

$$A_1^T \Lambda A_1 - \Lambda = -C_1.$$

Ең киши меншикли мәнисин ε шамасы менен қозғаймыз.

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H) \end{bmatrix} A_1 - \begin{bmatrix} \lambda_1(H) + \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n(H) \end{bmatrix} =$$

$$= - \left\{ C_1 - A_1^T \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} A_1 + \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ε шамасын үлкейткен сайын $\varphi_1(H)$ функциясы киширейип баратуғынлығы мәлим. Оң қаптал бөлеги оң анықланған болатуғындай ε мүмкин болған мәнисин табамыз. Белгилеулер киритеміз:

$$C_1(\varepsilon) = C_1 + \varepsilon \begin{bmatrix} 1 - (a_{11}^1)^2 & -a_{11}^1 a_{12}^1 & \dots & -a_{12}^1 a_{11}^1 \\ -a_{12}^1 a_{11}^1 & -(a_{12}^1)^2 & \dots & -a_{12}^1 a_{1n}^1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_{1n}^1 a_{11}^1 & -a_{1n}^1 a_{12}^1 & \dots & -(a_{1n}^1)^2 \end{bmatrix} = C_1 + \varepsilon \delta$$

Δ матрицасының характеристикалық теңлемесі мына түрине ийе болады:

$$\det(\Delta - \lambda E) = (-1)^n \cdot \lambda^{n-2} \cdot (\lambda^2 + p_1 \lambda + p_2) = 0,$$

бунда

$$p_1 = -S_p \Delta = \sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1$$

$$p_2 = \sum_{i=2}^n \begin{vmatrix} 1 - (a_{1i}^1)^2 & -a_{1i}^1 a_{1i}^1 \\ -a_{1i}^1 a_{1i}^1 & -(a_{1i}^1)^2 \end{vmatrix} + \sum_{\substack{i,j=2 \\ i \neq j}}^n \begin{vmatrix} -(a_{1i}^1)^2 & -a_{1i}^1 a_{1j}^1 \\ -a_{1j}^1 a_{1i}^1 & -(a_{1j}^1)^2 \end{vmatrix} = \sum_{i=2}^n (a_{1i}^1)^2.$$

Δ матрицасының меншикли санлары болып

$$\lambda_i(\Delta) = 0, i = \overline{1, n-2}, \quad \lambda_{n-1, n} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \right)^2 + 4 \sum_{i=2}^n (a_{1i}^1)^2} \right].$$

есапланады.

Егерде $\varepsilon > 0$ болса, онда

$$\lambda_{\min}(C_1(\varepsilon)) \geq \lambda_{\min}(C_1) + \frac{\varepsilon}{2} \left[\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \right)^2 + 4 \sum_{i=2}^n (a_{1i}^1)^2} \right].$$

Мейли

$$\varepsilon = 2 \lambda_{\min}(C_1) \left[\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \right)^2 + 4 \sum_{i=2}^n (a_{1i}^1)^2} - \sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 + 1 \right]^{-1}$$

болсын. Онда

$$\varphi_1(H(\varepsilon)) = \frac{\lambda_{\max}[\Lambda(\varepsilon)]}{\lambda_{\min}[\Lambda(\varepsilon)]} = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\min\{\lambda_{\min}(H) + \varepsilon, \lambda_2[\cdot]\}} < \varphi_1(H),$$

бул жерде $H(\varepsilon) = U \Lambda(\varepsilon) U^T$.

3.2-§. Интеграллық критериясы хэм оны оптимизациялау

Көбинесе системаның сапасын (ретлестириу системалары) барлық аралығы бойынша оның интегралы бойынша бақаланады. Бундай түрдегі сапалық критериясын интеграллық деп атайды. (2.1.4) теңсізлігінен мына төмендегі теңсізлік келип шығады:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x(k)| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} x(0) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}\right)^k = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)}}{1 - \sqrt{1 - \lambda_{\min}(C)/\lambda_{\max}(H)}} |x(0)|.$$

3.2.1-анықтамасы. $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпуновтың функциясы интеграллық мәністе оптимал болады деп атаймыз, егерде

$$H_0 = \arg \inf_{H \in W(H)} \{\varphi_2(H)\},$$

бунда

$$\varphi_2(H) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}}\right)^{-2}.$$

Интеграллық өтиўши процессти сыпатлаўшы $\varphi_2(H)$ функциясын қараймыз. Бул функцияның $\varphi_1(H)$ функциясынан парқы ол әдеўир қурамалы түрине ийе болып хәм оны тиккелей үйрениў қыйынлаў болады. $\varphi_1(H)$ функциясына ұқсас, оның A матрицасынан параметри ретинде ғәрезлигин қараймыз. Үш жағдайын үйрениў усыныс етиледи: A нормал матрица, A -нормал емес матрицасы, бирақ $E - A^T A$ оң анықланған хәм $E - A^T A$ оң анықланбаған.

Егерде (3.1.1) системасы асимптотикалық орнықлылы болса, яғный $|\lambda_i(A)| < 1, i = \overline{1, n}$ болып хәм $E - A^T A$ матрицасы оң анықланған болса, онда $C = E - A^T A$ болады деп, $H = E$ ийе боламыз. Сонлықтан (3.1.4) теңсизлиги мына түрине ийе болады:

$$\begin{aligned} |x(k)| &\leq [1 - \lambda_{\min}(E - A^T A)]^{k/2} \cdot |x(0)| = \\ &= [\lambda_{\max}(A^T A)]^{k/2} \cdot |x(0)| = |A|^k \cdot |x(0)|. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

3.2.1-леммасы. Егерде (3.1.1) системасы асимптотикалық орнықлылы болса хәм A нормал матрицасы болса, онда $E - A^T A$ оң анықланған болады.

Дәлилленіўи. Қойылған шәрти бойынша $\max_{i=1, n} |\lambda_i(A)| < 1$. Онда болса

$$\lambda_{\min}(E - A^T A) = 1 - \lambda_{\max}(A^T A) = 1 - \max_{i=1, n} |\lambda_i(A)|^2 > 0.$$

3.2.1-салдары. Егерде (3.1.1) системасы асимптотикалық орнықлылы болса хәм A нормал матрицасы болса, онда

$$|x(k)| \leq (\max_{i=1,n} |\lambda_i(A)|)^k \cdot |x(0)|. \quad (3.2.2)$$

Бул тастыйклай тиккелей (3.2.1) теңсизлигинен келип шығады.

1) Мейли A -нормал, асимптотикалық орнықтылы матрицасы болсын. Әдеуір дәлирек болып (3.2.2) баҳасы болатуғынлығын көрсетейик. Бул баҳасы жақсыланбайды, яғнай бул теңсизлиги теңликке айланатуғын $\bar{x}(k)$ шешими бар болып, яғнай

$$|\bar{x}(k)| = (\max_{i=1,n} |\lambda_i(A)|)^k \cdot |x(0)|.$$

Бул жағдайда Ляпуновтың оптимал функциясы болып $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ есапланады, бунда $H_0 = E\lambda$.

3.2.1-теоремасы. Егерде (3.1.1) системасы асимптотикалық орнықтылы болса хэм A нормал матрицасы болса, онда $\bar{x}(k)$ шешими бар болып хэм бул шешими ушын

$$|\bar{x}(k)| = (\max_{i=1,n} |\lambda_i(A)|)^k \cdot |x(0)|.$$

Дәлилленуі. A нормал матрицасы болған ушын, онда A матрицасын нормал формасына алып келиуіши U ортогонал матрицасы бар болады.

$$U^T A U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \beta_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_k & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_3 \end{bmatrix} = \Lambda,$$

бунда $\gamma_p = \alpha_p + i\beta_p$, $p = \overline{1, k}$, $\lambda_q = \gamma_q$, $q = \overline{1, s}$, $2k + s = n$ A матрицасының меншик мәнислери болады. $x = Uy$ деп алмастырып, мына сызықты системасына ийе боламыз:

$$y_{k+1} = \Lambda y(k).$$

Мейли $\max_{i=1,n} |\lambda_i(A)| = \gamma_j$ болсын. Онда дара шешими ретінде $\bar{x}(k) = U(0, \dots, 0, \rho_j^k \sin \omega k, \rho_j^k \cos \omega k, 0, \dots, 0)^T |x(0)|$ алып, теореманың тастыйқлауына ийе боламыз. Егерде $\max_{i=1,n} |\lambda_i(A)| = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$ болса, онда

$$\bar{x}(k) = U(0, \dots, 0, \rho_j^k \sin \omega k, \rho_j^k \cos \omega k, 0, \dots, 0)^T |x(0)|,$$

деп алыў жеткиликли болады., бунда $\rho_j = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$, $\omega_j = \arctg(\beta_j \alpha_j)$.

3.2.2-теоремасы. Егерде (3.1.1) системасы асимптотикалық орнықлылы хэм A нормал матрицасы болса, онда дәслепки мағлыўматлар бойынша хэм интеграллық критериясы бойынша оптимал болатуғын Ляпунов функциялары теңдей болады, соның менен бирге $H_0 = E$ болады.

Дәлиллениўи. Мейли A нормал матрицасы болсын. Онда 2.2.1 лемманын $E - A^T A$ матрицасы оң анықланғанлығы келип шығады. Хэм дәслепки мағлыўматларды баҳалаў бойынша оптимал болатуғын Ляпунов функциясы $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 = E$, $C_0 = E - A^T A$ түрине ийе болады. (3.2.2) теңsizлигиниң дурыслығы 3.2.1 салдарынан келип шығады, бирақ 3.2.1 теоремада көрсетилгендей теңsizликлер теңликке айланатуғын $\bar{x}(k)$ шешими бар болады, яғный баҳа жақсыланбайды. Бул баҳасы $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$, $H_0 = E$ функциясында жетиседи.

II. Мейли $E - A^T A$ матрицасы оң анықланған болып, бирақ A нормал емес матрицасы болсын. Бул жағдайда оптимал функциялары бир бирине тең болмаўы мүмкин.

Бул тастыйқлаўды көрсетиўши мысал ретінде, матрицасы

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \delta \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

болған (3.1.1) системасын қараймыз. $\delta \neq 0$ да A матрицасы нормал емес болады, бирақ $|\delta| < 3/4$ те оң анықланған болады. $0 < \delta_0 < 3/4$ деп сайлап аламыз.

Дәслепки қозғалысларды оптимал бахалаўшы Ляпунов функциясы болып $H_0 = E$ есапланады. Егерде бул функцияны интеграллық критериясын бахалаўға пайдалансақ, онда мынаған ийе боламыз

$$\varphi_2(H_0) = (1 - \sqrt{\lambda_{\min}(E - A^T A)})^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3/2 - \delta_2 - \delta\sqrt{1 + \delta_2}}}.$$

$\delta \rightarrow 3/4$ болғанда $\varphi_2(H_0) \rightarrow \infty$ умтылады. Соның менен бирге

$$A^T H A - H = -E,$$

Ляпунов теңлемесин шешип, мынаған ийе боламыз:

$$H_E = \begin{bmatrix} 4/3 & 8\delta/9 \\ 8\delta/9 & 4(1 + 20 \cdot \delta_2/9)/3 \end{bmatrix}.$$

Буннан,

$$\lambda_{1,2}(H_E) = \frac{4}{27} \left[9 + 10\delta^2 \pm \sqrt{2(27 + 66\delta^2 + 50\delta^4)} \right]$$

хәм

$$\varphi_2(H_E) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\lambda_{\min}(H_E)}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\max}(H_E)}}\right)^{-1}$$

кәлеген $|\delta| < 3/4$ ушын шегараланған болады.

III. Егерде $E - A^T A$ матрицасы оң анықланбаған болса, онда дәслепки қозғалыслар бойынша ең жақсы баҳаны бериўши H_0 хәм C_0 матрицаларын $\varphi_2(H)$ ты алыў ушын пайдаланыўға болмайды.

2.2.3-теоремасы. Егерде $E - A^T A$ матрицасы оң анықланған болса, онда дәслепки қозғалыслар бойынша ең жақсы баҳаны бериўши H_0 хәм C_0 матрицалары $\varphi_2(H)$ ты шексизге айландырады.

Дәлилленуї. Егерде $E - A^T A$ оң анықланбаған матрицасы болса, ал H_0 хәм C_0 матрицалары дәслепки қозғалыслар бойынша ең жақсы баҳаны беретугын болса, онда $\lambda_{\min}(C_0) = 0$ болады. Буннан

$$\varphi_2(H_0) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda_{\min}(C_0)}{\lambda_{\max}(H_0)}}\right)^{-1}$$

функциясы шексизге айланады.

Бирақ соған қарамастан интеграллық мәністе оптимал болатуғын Ляпунов функциясының бар болатуғынлығын көрсетейік.

3.2.4-теоремасы. Егерде A асимптотикалық орнықты болса, онда интеграллық мәністе оптимал болатуғын $\mathcal{Q}_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясы барлық ұақытта бар болады.

Дәлелденіуі. $\varphi_2(H)$ нолинши дәрежелі бір теклі функциясы. Сонлықтан бул функцияны $W_1(H)$ областа қарауға болады. Бул жерде минимизациялау мәселесі шешилетуғын болғаны себепли, $W_1(H)$ областының $\partial W^1(H)$ шегарасына жақынлағанда

$$\varphi_2(H) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda_{\min}(H - A^T H A)}{\lambda_{\max}(H)}}\right)^{-1} \rightarrow \infty,$$

функциясы $\bar{W}_1^\varepsilon(H)$ областы менен шегараланады. $\bar{W}_1^\varepsilon(H)$ компакт көплигі болады, $\varphi_2(H)$ функциясы бул көпликте мына түрине ийе болады:

$$\varphi_2(H) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(H)} \left(1 - \sqrt{1 - \lambda_{\min}(H - A^T H A)}\right)}.$$

(3.1.2) теңлемесі пайдаланғанлығы ушын, онда

$$\lambda_{\min}(H) = \lambda_{\min}(A^T H A + C) \geq \lambda_{\min}(A^T H A) + \lambda_{\min}(C) \geq \varepsilon.$$

хәм $\bar{W}_1^\varepsilon(H)$ көплигинде $\varphi_2(H)$ функциясы шегараланған болады, яғнай

$$0 \leq \varphi_2(H) \leq \left[\sqrt{\varepsilon} (1 - \sqrt{1 - \varepsilon})\right]^{-1},$$

H матрицасының h_{ij} элементлериниң үзликсиз функциясы болады хәм Вейерштрасс теоремасы бойынша экстремал мәнісіне жетиседи.

Улыўма жағдай ушын $n \geq 3$ болғанда интеграл мәнісиндеги Ляпуновтың функциясы бір мәнілі емес болып дүзиледи. Басланғыш өзгертиўлерди бақалау жағдайға уқсас, бунда аралық меншикли мәніслери базы бір дәрежеде вариациясына ийе болатуғынлығы тийкарғы себеп болады. Бунда мысал ретинде блоклы-диагоналы A матрицасы қаралады.

3.2.5-теоремасы. Егерде (3.1.1) системасының A матрицасы блоклы-диагоналы структурасына ийе болса, онда $\mathcal{G}_0(x) = x^T H_0 x$ функциясының оптимал интеграллық бағасын беріуіші H_0 матрицасы да блоклы-диагоналы структурасына ийе болады.

Дәлелленіуі. Алдыңғы баптан, егерде

$$H_0 = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & H_{12}^0 \\ (H_{12}^0)^T & H_{22}^0 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 \\ (C_{12}^0)^T & C_{22}^0 \end{bmatrix},$$

онда

$$H_0^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11}^0 & 0 \\ 0 & H_{22}^0 \end{bmatrix}, C_0^1 = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & 0 \\ 0 & C_{22}^0 \end{bmatrix}$$

матрицалары үшін мына төмендегі теңсіздіктері орынланады:

$$\lambda_{\min}(H_0) \leq \lambda_{\min}(H_0^1) \leq \lambda_{\max}(H_0^1) \leq \lambda_{\max}(H_0)$$

$$\lambda_{\min}(C_0) \leq \lambda_{\min}(C_0^1) \leq \lambda_{\max}(C_0^1) \leq \lambda_{\max}(C_0).$$

Сонлықтан

$$\varphi_2(H_0^1) = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(H_0^1)/\lambda_{\min}(H_0^1)}}{1 - \sqrt{1 - \lambda_{\min}(C_0^1)/\lambda_{\max}(H_0^1)}} \leq \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(H_0)/\lambda_{\min}(H_0)}}{1 - \sqrt{1 - \lambda_{\min}(C_0)/\lambda_{\max}(H_0)}} = \varphi_2(H_0).$$

Мысал ретінде бір мәнилі емес болып дүзілген H_0 матрицасы ретінде екі блоктан дүзілген A матрицасына ийе системасын алыуға болады. Олар $E - A_1^T A_1$ матрицасы оң анықланбаған асимптотикалық орнықтылығы болған A_1 матрицасы хәм $A_2 = -a < 0$ скаляры.

Оптимизациялаудың екі алгоритмин қарастырамыз

Нур бойынша оптимизациялау.

Мейли $C = E$ хәм сәйкес түрде $H = H_0$ (3.1.2) матрицалық теңлемениң шешими болсын. $\varphi_2(H)$ функциясы мына түрине ийе болады:

$$\varphi_2(H_E) = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(H_E)/\lambda_{\min}(H_E)}}{1 - \sqrt{1 - 1/\lambda_{\max}(H_E)}}.$$

Ляпунов теңлемесин мына түрине түрлендіреміз:

$$A^T(H_E + \delta E)A - (H_E + \delta E) = -[E + \delta(E - A^T A)].$$

H_E матрицасын белигилеп алғанымызда, $\varphi_2(H)$ функциясы δ параметринин функциясы болады:

$$\varphi_2(\delta) = \frac{\sqrt{\delta + \lambda_{\max}(H_E) / (\delta + \lambda_{\min}(H_E))}}{1 - \sqrt{1 - \lambda_{\min}[E + \delta(E - A^T A)] / (\delta + \lambda_{\max}(H_E))}}.$$

$\varphi_2(\delta)$ функциясының минимумын δ өзгеріушиси бойынша излейміз. Үш жағдайды қараймыз.

1. A -нормал, асимтотикалық орнықтылы матрицасы. Онда $H_0 = E$, $C_0 = E - A^T A$ болады.

2. A -нормал емес матрицасы, бірақ $E - A^T A$ оң анықланған болсын. Бұл жағдайда $\lambda_{\min}(E - A^T A) > 0$ болып хәм

$$\lambda_{\min}[\delta(E - A^T A)] = \begin{cases} \delta \lambda_{\min}(E - A^T A), & \delta > 0 \\ \delta \lambda_{\max}(E - A^T A), & \delta \leq 0 \end{cases}.$$

$\varphi_2(\delta)$ функциясы мына түрін қабыл етеди:

$$\varphi_2(\delta) = \begin{cases} \left[\frac{\sqrt{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}}{\sqrt{\delta + \lambda_{\min}(H_E)}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 + \delta \lambda_{\min}(E - A^T A)}{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}} \right] \right]^{-1}, & \delta > 0 \\ \left[\frac{\sqrt{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}}{\sqrt{\delta + \lambda_{\min}(H_E)}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 + \delta \lambda_{\min}(E - A^T A)}{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}} \right] \right]^{-1}, & \delta > 0 \\ \max \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), -\frac{1}{\lambda_{\max}(E - A^T A)} \right\} < \delta \leq 0. \end{cases}$$

Функцияның

$$\psi(\delta) = \sqrt{\frac{\delta + a}{\delta + b}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 + \delta C}{\delta + b}} \right]^{-1}$$

экстремумының зәрүрли шәрти болып $\psi'(\delta) = 0$ есапланады.

$\psi'(\delta_0) = 0$ болатуғын δ_0 дың мәнисин мына төмендеги шәртинен табылады:

$$1 - \frac{1 + \delta C}{\delta + a} - \sqrt{1 - \frac{1 + \delta C}{\delta + a}} + \frac{(1 - aC)(\delta + b)}{(a - b)(\delta + a)} = 0. \quad (3.2.3)$$

$\delta = \delta_0$ да $\psi(\delta)$ функциясы минимал мәнисине жетисиу үшін

$$\psi''(\delta_0) = \frac{(a-b)\sqrt{\frac{\delta_0+b}{\delta_0+a}}(1-ac)\left[4\sqrt{1-\frac{1+\delta_0c}{\delta_0+a}}-1\right]}{4(\delta_0+a)^2(\delta_0+b)^2\left[1-\frac{1+\delta_0c}{\delta_0+a}\right]\left[1-\sqrt{1-\frac{1+\delta_0c}{\delta_0+a}}\right]} > 0$$

болатуғынлығы жеткиликли болады.

Ямаса оң мәнистеги ағзаларын алдын ала алып таслап, мынаған ийе боламыз:

$$(1-ac)\left[4\sqrt{1-\frac{1+\delta_0c}{\delta_0+a}}-1\right] > 0. \quad (3.2.4)$$

Демек, егерде (3.2.3) теңлемеси δ_0 шешимине ийе болса хәм (3.2.4) теңsizлиги орынланса, онда $\delta = \delta_0$ да $\psi'(\delta)$ функциясы минимал мәнисине жетиседи. Алынған нәтийжелерди $\varphi_2(\delta)$ функциясына қолланамыз:

$$a = \lambda_{\max}(H_E), b = \lambda_{\min}(H_E), C_1 = \lambda_{\min}(E - A^T A), C_2 = \lambda_{\max}(E - A^T A).$$

Мейли (3.2.3) мына төмендеги теңsizлигин

$$\max\left\{-b, -\frac{1}{C_2}\right\} < \delta_2 \leq 0$$

канаатландыратуғын $C = C_1$ де $\delta_1 > 0$ шешимине, ал $C = C_2$ де δ_2 шешимине ийе болсын.

Онда

$$\delta_0 = \arg \min \{\varphi_2(\delta_1), \varphi_2(\delta_2)\}$$

деп есаплаймыз. Егерде қойылған шәртлериниң биреуде орынланбаса, онда $\delta_0 = 0$ болады.

III. Мейли $E - A^T A$ оң анықланбаған матрицасы болсын, яғный $\lambda_{\min}(E - A^T A) < 0$. A матрицасы асимптотикалық орнықлылы болғаны ушын, онда $\lambda_{\max}(E - A^T A) > 0$ болады. Сонлықтан

$$\lambda_{\min}[\delta(E - A^T A)] = \begin{cases} \delta \cdot \lambda_{\min}(E - A^T A), & \delta > 0 \\ \delta \cdot \lambda_{\max}(E - A^T A), & \delta \leq 0 \end{cases}$$

$\varphi_2(\delta)$ функциясы төмендегише түрине ийе болады:

$$\varphi_2(\delta) = \begin{cases} \left[\sqrt{\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 + \delta \lambda_{\min}(E - A^T A)}{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}} \right] \right]^{-1} \\ \left[\sqrt{\frac{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}{\delta + \lambda_{\min}(H_E)}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 + \delta \lambda_{\min}(E - A^T A)}{\delta + \lambda_{\max}(H_E)}} \right] \right]^{-1} \end{cases}, \delta > 0,$$

$$\max \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), -\frac{1}{\lambda_{\max}(E - A^T A)} \right\} < \delta \leq 0.$$

Мейли C_1 хэм C_2 лери (3.2.1) теңлемесиниң δ_1 хэм δ_2 шешимлерине сәйкес болған болсын, соның менен бирге

$$0 < \delta_1 < -\frac{1}{\lambda_{\min}(E - A^T A)}, \max \left\{ -\lambda_{\min}(H_E), -\frac{1}{\lambda_{\min}(E - A^T A)} \right\} < \delta_2 \leq 0.$$

Бул жағдайда

$$\delta_0 = \arg \min \{ \varphi_2(\delta_1), \varphi_2(\delta_2) \}$$

деп есаплаймыз. Егерде шәртлери орынланбаса, онда $\delta_0 = 0$, яғный квазиоптимал деп H_E алыў керек болады.

Көшерлерди созыў алгоритми.

Мейли U - H_E матрицасын диагонал түрине алып келиўши ортононал түрлендирийў болсын. Ляпунов теңлемесин шеп қаптал тәрәпинен U^T ға, ал оң қаптал тәрәпинен U ға көбейтип, мынаған ийе боламыз:

$$A_1^T \Lambda A_1 - \Lambda = -E,$$

бунда $A_1 = U^T A U$ болады. Алынған теңлемесин мына төмендеги түрине түрлендиремиз:

$$A_1^T \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} A_1 - \begin{bmatrix} \lambda_1(H_E) + \varepsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H_E) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n(H_E) \end{bmatrix} =$$

$$= -E + \varepsilon \begin{bmatrix} (a_{11}^1)^2 - 1 & a_{11}^1 a_{12}^1 & \cdots & a_{11}^1 a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 a_{11}^1 & (a_{12}^1)^2 & \cdots & a_{12}^1 a_{1n}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n}^1 a_{11}^1 & a_{1n}^1 a_{12}^1 & \cdots & (a_{1n}^1)^2 \end{bmatrix}$$

бунда a_{ij}^1 лары A_1 матрицасының элементлери. $\varphi_2(H)$ функциясы мына түрін кабыл етеди:

$$\varphi_2(\varepsilon) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(H_E)}{\varepsilon + \lambda_{\min}(H_E)}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda_{\min}(E - \varepsilon\Delta)}{\lambda_{\max}(H_E)}} \right]^{-1}.$$

Алдыңғы бапта көрсетилгендей $E - \varepsilon\Delta$ матрицасының меншикли санлары болып $\lambda_i = 0, i = \overline{1, n-2}$ есапланады.

$$\lambda_{\min} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \right) \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \right)^2 + 4 \sum_{i=2}^n (a_{1i}^1)^2} \right]$$

Белгилеулер киритемиз $a = \lambda_{\min}(H_E), b = \lambda_{\min}(H_E)$, сонда

$$C_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \right) \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n (a_{1i}^1)^2 - 1 \right)^2 + 4 \sum_{i=2}^n (a_{1i}^1)^2} \right].$$

Онда

$$\lambda_{\min}(E - \varepsilon\Delta) = \begin{cases} 1 - \varepsilon c_1, & \varepsilon > 0, \\ 1 - \varepsilon c_2, & \varepsilon \leq 0. \end{cases}$$

$\varphi_2(\varepsilon)$ функциясы мына түрине ийе болады:

$$\varphi_2(\varepsilon) = \begin{cases} \sqrt{\frac{a}{\varepsilon + b}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 - \varepsilon c_1}{a}} \right]^{-1}, & \varepsilon > 0 \\ \sqrt{\frac{a}{\varepsilon + b}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 - \varepsilon c_2}{a}} \right]^{-1}, & \varepsilon \leq 0. \end{cases}$$

Төмендегі берілген функцияның

$$\psi(\varepsilon) = \sqrt{\frac{a}{\varepsilon + b}} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1 - \varepsilon c_1}{a}} \right]^{-1}$$

ε бойынша минимум шартлерин қараймыз. $\psi'(\varepsilon) = 0$ болған экстремумның зәрүрли шартлери мына түрине ийе болады:

$$\psi'(\varepsilon) = -\frac{a}{2} \frac{\sqrt{a}\sqrt{(a-1)+\varepsilon c} - (a+bc-1) - 2\varepsilon c}{(\varepsilon+b)^{b/2} \sqrt{(a-1)+\varepsilon c} \left[\sqrt{a} - \sqrt{(a-1)+\varepsilon c} \right]} = 0.$$

Сонлықтан ε_0 ды мына теңлемесинен

$$\sqrt{a}\sqrt{a-1+\varepsilon \cdot c} - (a+bc-1) - 2\varepsilon \cdot c = 0 \quad (3.4.5)$$

анықлаймыз.

Минимум болатуғынлығының жеткиликли шәртлери болып $\psi''(\varepsilon_0) > 0$ есапланады, яғнай

$$\psi''(\varepsilon_0) = \frac{ac}{4} \frac{4\sqrt{a-1+\varepsilon c} - \sqrt{a}}{(\varepsilon_0 + b)^{3/2} [a-1+\varepsilon_0 c] [\sqrt{a} - \sqrt{a-1+\varepsilon_0 c}]^2} > 0,$$

ямаса

$$c(3a + 4bc - 5 + 8\varepsilon_0 c) > 0.$$

Мейли (3.4.5) теңлемесиниң c_1 хәм c_2 ге сәйкес болатуғын хәм мына төмендеги теңсизликлерин

$$0 < \varepsilon_1 < 1/c_1, \max\{-b, 1/c_2\} < \varepsilon_2 \leq 0$$

хәм мына қатнасларын

$$c_1(3a + 4bc_1 - 5 + 8\varepsilon_1 c_1) > 0$$

$$c_2(3a + 4bc_2 - 5 + 8\varepsilon_2 c_2) > 0$$

канаатландыратуғын ε_1 хәм ε_2 шешимлери болсын.

Онда квазиоптимал болатуғын Ляпунов функциясын бахалаў ушын

$$\varepsilon_0 = \arg \min \{\varphi_2(\varepsilon_1), \varphi_2(\varepsilon_2)\}$$

алыў керек болады. Егерде шәртлери орынланбаса, онда $\varepsilon_0 = 0, H_0 = H_E$.

3.3-§ Өтиўши процесслерди ўақыт бойынша бахалаў

Динамикалық систамаларында болып өтиўши процесслериниң және бир әхмийетли характеристикаларының бири болып, шешимниң берилген ε дәллігине жетисиў ушын жумсалатуғын ўақыт есапланады. Бул ўақыт аралығында шешим координата басының ε дөгерегине жетип барады. Бул шаманы болып өтиўши процессиниң ўақты деп аталады. Бул шаманы

$$N(H, x_0, \varepsilon) \leq \ln \left(\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)} \frac{\varepsilon^2}{|x(0)|^2} \right) / \ln \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \right).$$

деп бағалаймыз

Егерде дәслепки $x(0)$ жағдайы хәм мүмкин болған есаплау дәлликлери берилген болса, онда процесслердиң өтиўин ўақыт бойынша әдеўир дәл бағалаўшы баҳасын $H \in W(H)$ матрицасын өзгертиў есабынан алыўға болады.

3.3.1-анықламасы.

$$H_0 = \arg \inf_{k \in W(H)} \{\varphi_3(H)\}$$

болған $v_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпунов функциясы, бунда

$$\varphi_3(H) = \ln \left(\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)} \right) / \ln \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \right)$$

өтиўши процесслерди ўақыт бойынша бағалау ушын оптимал болады деп атаймыз.

Себеби $0 \leq \lambda_{\min}(C) / \lambda_{\max}(H) < 1$ болғаны ушын, онда $0 \leq \varphi_3(H) < \infty$ болады. $\varphi_3(H) = 0$ болатуғын жағдай ең жақсы баҳасы болып есапланатуғынлығы мәлим. Бул болса $\lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H_0) = 1$ сәйкес келеди, яғный шешим нормасының қатан түрде монотон кемиўине алып келеди. Алдыңғы баплардағы пикирлерди қайталап, келеси теоремасына ийе боламыз.

3.3.1-теоремасы. $\varphi_3(H_0) = 0$ өтиўши процесслердиң ўақтын бағалаўшы хәм $\varphi_3(H_0) = 0$, $H \in W(H)$ болатуғын Ляпуновтың оптимал функциясы сол жағдайда бар болады, егерде $E - A^T A$ оң анықланған матрицасы болса.

Дәлиллениўи. $\varphi_3(H_0) = 0$ болыўы ушын $\lambda_{\max}(H_0) / \lambda_{\min}(H_0) = 1$ болыўы зәрүр хәм жеткиликли. Ал ол ушын екинши параграфта көрсетилгендей $E - A^T A$ оң анықланған болыўы зәрүр хәм жеткиликли болады.

Егерде $E - A^T A$ толық емес оң анықланған матрицасы болса, онда

$$\lim_{H \rightarrow \lambda E} \ln \left(\frac{\lambda_{\min}(H)}{\lambda_{\max}(H)} \right) = 0, \quad \lim_{H \rightarrow \lambda E} \ln \left(1 - \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \right) = 0.$$

Сол ушын $\varphi_3(H)$ функциясы $\partial W(H)$ шегараның ноқатларында үзиліске түседі.

Мейли $E - A^T A$ толық оң анықланбаған матрицасы болсын. Бул жағдайда $v_0(x)$ Ляпунов функциясы бар болып, бірақ $\varphi_3(H_0) > 0$ болады.

3.3.2-теоремасы. Мейли $E - A^T A$ оң анықланған болмасын. $v_0(x) = x^T H_0 x$ Ляпуновтың оптимал функциясы барлық ұақытта бар болады.

Дәлелленіуі. $\varphi_3(H)$ бір текли нолинши дәрежелі функциясы. Сонлықтан, оның анықланыуы областы ретінде $W_1(H)$ көплигин қарауға болады. $E - A^T A$ толық емес оң анықланған болмағаны ушын, онда $E \notin \partial W_1(H)$. Буннан $H \in \partial W_1(H)$ болғанда, $\lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H) > 1$ болады. Сонлықтан $\lim_{H \in \partial W_1(H)} \varphi_3(H) = \infty$ хәм бунда $\varphi_3(H)$ функциясы бойынша минимизациялау мәселесі шешилетуғын болғаны себепли, барлық $W_1(H)$ областын қарамай, ал оның бір бөлегін $\bar{W}_1^\varepsilon(H)$ қарауға болады., бунда ε жеткиликли киши шамасы.

Бул көплиги компакт болады, $\varphi_3(H)$ функциясы онда H матрицасының h_{ij} элементлеринен үзликсиз байланысly болып хәм Вейерштрасс теоремасы бойынша минимал мәнисине жетиседи.

$\varphi_1(H)$ хәм $\varphi_2(H)$ мақсет функциялары ушындай $v_0(x)$ оптимал функциясы улыуға жағдайда бір мәнилі емес болып дүзилиуы мүмкин.

3.3.3-теоремасы. Егерде A матрицасы блоклы-диагоналлы структурасына ийе болса, онда $\varphi_3(H)$ функциясына оптимал мәнисін бериуіши H_0 матрицасы да блоклы-диагоналлы структурасына ийе болады.

Дәлелленіуі. 3.1 хәм 3.2 параграфлардағы уқсас болған теоремаларының дәлелленіуін қайталап, мынаған ийе боламыз:

$$0 < \lambda_{\min}(H_0) \leq \lambda_{\min}(H_0') \leq \lambda_{\max}(H_0') \leq \lambda_{\max}(H_0)$$

$$0 < \lambda_{\min}(C_0) \leq \lambda_{\min}(C'_0) \leq \lambda_{\max}(C'_0) \leq \lambda_{\max}(C_0).$$

Сонлықтан,

$$\begin{aligned} \varphi_3(H_0) &= \ln\left(\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\min}(H_0)}\right) / \ln\left(\frac{\lambda_{\max}(H_0)}{\lambda_{\max}(H_0) - \lambda_{\min}(C_0)}\right) \geq \\ &\geq \ln\left(\frac{\lambda_{\max}(H'_0)}{\lambda_{\min}(H'_0)}\right) / \ln\left(\frac{\lambda_{\max}(H'_0)}{\lambda_{\max}(H'_0) - \lambda_{\min}(C'_0)}\right) = \varphi_3(H'_0). \end{aligned}$$

H_0 матрицасы бир мәнили емес дүзилийүн көрсетиўши мысал ретинде A матрицасына ийе болған системаны алсақ болады. Бул матрицасы A_1 үлес матрицасынан хәм $A_2 = -a < 0$ скалярынан дүзилген болады.

Санлы мысал. 1. Мейли A матрица асимптотикалық орнықлылы болсын:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}$$

H^* – оң анықланған, симметриялық, $\varphi_0(H)$ функцияға максимум мәнис бериўши хәм көрсетилген шеклеўлерди қанаатландырыўшы матрицаны табамыз.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A^T H + HA = -C$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-h_{11} + 3h_{21} - h_{11} + 3h_{12} = 1$$

$$-h_{12} + 3h_{22} + 3h_{11} - 10h_{12} = 0$$

$$3h_{11} - 10h_{21} - h_{21} + 3h_{22} = 0$$

$$3h_{12} - 10h_{22} + 30h_{21} - 10h_{22} = 1$$

Кеңсликти созыў арқалы 13 итерация хәм 5 эпиўайы итерациядан соң (кеңсликти созбастан) төмендегиге ийе боламыз:

$$H_0 = H_{18} = \begin{bmatrix} 0.953 & 0.157 \\ 0.157 & 0.479 \end{bmatrix}$$

Меншикли санлар: $\lambda_{\min}(-A^T H_0 + H_0 A) = 0.1834$; $\lambda_{\max}(H_0) = 1$. Солай етип, $\|D\| < 0.0917$ өзгерислерде система орнықты болады.

Мысал 2. 5×5 - өлшемлі симметриялық асимптотикалық орнықты А матрицаны сайлап аламыз:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -8 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Оптималластырыу мәселесин кеңисликти созыу арқалы градиентлик усыл менен шешемиз.

$$H_0 = \begin{bmatrix} 3.19 & -0.03 & -0.118 & 0.44 & -2.898 \\ -0.03 & 0.295 & -0.397 & -0.35 & -0.336 \\ -0.11 & -0.397 & 0.449 & -0.14 & -0.3465 \\ 0.44 & -0.353 & -0.1408 & 0.639 & 0.362 \\ -2.89 & -0.336 & -0.3465 & 0.362 & 1.5027 \end{bmatrix}$$

Мақсет функцияның мәніси $\lambda_{\min}(-A^T H_0 - H_0 A) = 0.25624$ $\|D\| < 0.12$ өзгерислерде система орнықты болады.

Ж У Ы М А Қ Л А Ы

Бул магистрлик диссертациясында динамикалық ситсемалардың орнықтылығын Ляпуновтың екінші ұсылы менен изертлеу мәселесі қаралды. Бұнда динамикалық системалардың орнықтылық көрсеткіштері алынды және олар оптимизацияланды.

Магистрлик диссертациясында тұрақты коэффициентті сызықты дифференциалдық теңдемелер системасының орнықтылық көрсеткіштерін оптимизациялау мәселелері шешілді. Изертлеу аппараты сыпатында Ляпуновтың квадраттық формасындағы функциясы сайланып алынды. Орнықтылықтың көрсеткіштерінің бірі болып шешімнің тең салмақты жағдайына, оның монотонлық дәрежесі менен ұмтылуы болып есепланады. Ляпунов функциясы жәрдеминде бұл көрсеткіші айланыс эллипсоидтың көштерінің қатнасы менен анықталуы мүмкін. Бұл қатнастары Ляпунов функциясының бет қаддиси болып есепланады. Бұл қатнастардың аналитикалық түрі бұл Ляпунов функциясына кируіші матрицаның экстремал меншікті мәнісілерінің қатнасына тең болады. Тегіслікте жайласқан системасы үшін Ляпуновтың квадраттық функциялар топарында бұл орнықтылық көрсеткішінің оптимал бағаларының зәрүрлі және жеткілікті шарттері мәлім. Бұл диссертацияда системаның түріне байланысты Ляпуновтың «сфералық» көрінісіндегі функциясының бар болуы изертленген. «Квазиоптимал» функцияларды табуы алгоритмдері ұсыныс етілген. Системада өтуіші процесслердің сапасын тәрііплеуіші ең бір әхміетті көрсеткіштердің бірі болып сапасын тәрііплеуіші интегралдық критериясы есепланады, яғній шешімнің нормасының интегралы. Системаның шешімінің экспоненциал бағалары жәрдеминде бұл критерий Ляпунов теңдемесіне кируіші матрицаның меншікті санлары арқалы аңлатылады. Пайда болған мақсет функциясы қурамалы түріне ийе болады. Бұл функцияның берілген системаның матрицасының түріне ғәрезлі болған жағдайы қаралған, Ляпуновтың сфералық функцияларында

ең жақсы интеграллық бақаларына жетисетуғын матрицалар топары ажыратылған. Соның менен бирге өтиўши процесслердин ўақты үйренилген, яғный тең салмақлы жағдай дөгерегине шешими жетип барыў ушын жумсалатуғын ўақыт.

Бундағы алынған тийкарғы нәтийжелери:

1. шекли айырмалы теңлемелер системасы каралды, бул системасы ушын, оның $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ шешимлериниң Ляпунов бойынша орнықлылығы хәм асиптотикалық орнықлылы болыўының тийкарғы анықламалары келтирилди;

2. Системаның басланғыш өзгериўлерин бахалаў көрсеткишлери алынған;

3. Матрицасы Ляпуновтың айырмала матрицалық теңлемесин канаатландыратуғын, оң анықланған квадратлық формасының бар болыўы асиптотикалық орнықлылығының зөрүрли хәм жеткиликли шәртлери;

4. Басланғыш өзгериўлери ушын Ляпуновтың оптимал функциясы анықланды;

5. Системалардағы болып өтиўши процесслерды сапасы жағынан сыпатлаўшы интеграллық критериясы келтирилип шығарылды;

6. Сызықлы системалардағы болып өтиўши процесслерин ўақыт бойынша оптимизациялаў бақалары алынды;

7. Айырмалы теңлемелер системасының басланғыш өзгерислери бойынша оптимизациялаў бақалары алынды;

8. Ляпуновтың оптимал функциясын жасаў алгоритмы дүзилди;

9. Шекли айырмалы теңлемелер системасы ушын бул системаның каралып атырған ўақыт аралығында системаның сапасын баалаўшы интеграллық критерисы келтирилген;

10. Системадағы болып өтетуғын процесслердин өтиў ўақты бахалаўши характеристикалары алынған.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЯТЛАР ДИЗИМИ

1. Барбашин Е.А «Функция Ляпунова» М: Наука – 1970 г.
2. Бейко И.В., Бублик Б.Н., Зинько П.Н., «Методы и алгоритмы решение задач оптимизации» Киев: Выща-школа, 1983 г.
3. Беллман Р. «Введение в теорию матриц» М: Наука – 1969 г.
4. Валеев К.Г., Финин Г.С. «Построение функции Ляпунова» Киев: Наукова думка – 1981 г.
5. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. «Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем. I. Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов» Техническая кибернетика, 1991 г.
6. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. «Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем. Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов» Техническая кибернетика, 1991 г.
7. Демидович Б.П. «Лекции по математической теории устойчивости» М: Наука – 1967 г.
8. Джури Э.И. «Робастность дискретных систем» Автоматика и телемеханика 1990 г.
9. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М., Физматгиз. – 1959 г. – 212 с.
10. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М., – Наука. – 1966. - 530 с.
11. Зубов В.И. Устойчивость движения. Метод Ляпунова и их применение. – М., Высшая школа. – 1973 г. – 271 с.
12. Кириченко Н.Ф. Некоторые задачи устойчивости и управляемости движения. – К., Изд-во Киев. Ун-та, 1972 г. – 256 с.
13. Кириченко Н.Ф. Введение в теорию стабилизации движения. – Киев, Вища школа. – 1978 г. – 184 с.

14. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М., Наука. – 1971 г. – 235 с.
15. Оболенский А.Ю. Об экстремальных функциях Ляпунова для линейных систем с постоянными коэффициентами //Математическая физика, Наукова думка. – в. 34. – 1983 г. –с. 26-30.
16. Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф., Ляшко В.И. Практическая устойчивость, минимаксное оценивание и адаптивность динамических систем. – К.:, 1982 г. – 59 с.
17. Хусаинов Д.Я. Робастная устойчивость систем с запаздыванием//Укр.мат.журнал.-1995.-Т.47.,№6
18. Хусаинов Д.Я., Кожаметов А.Т., Утебаев Д. Оптимизация оценок характеристик решений в динамике систем. Нукус:-1992.
19. Мустафаева Р.,Аметова М. Ляпуновтың квадратлық функциялары жәрдемінде сызықты дифференциаллық системаның орнықтылығын изертлеу.- ҚМУ магистрлерінің илимий әмелій конференциясының материаллары.- Нөкіс: ҚМУ баспаханасы, 2011, 133-134 бетлери.
20. Бекмурзаева А. Айырмалы теңдемелер системасының орнықтылығын Ляпуновтың квадратлық функциялары жәрдемінде изертлеу.- Қарақалпақстан Республикасы XII-ші жас алымлар конференциясы-Нөкіс: «Илим» баспаханасы, 2012, 4 бет).
21. Бекмурзаева А. Асимптотическая устойчивость систем с одним запаздыванием. ҚМУ магистрлерінің илимий әмелій конференциясының материаллары.-Нөкіс: ҚМУ баспаханасы, 2012, 15-16 бетлери.