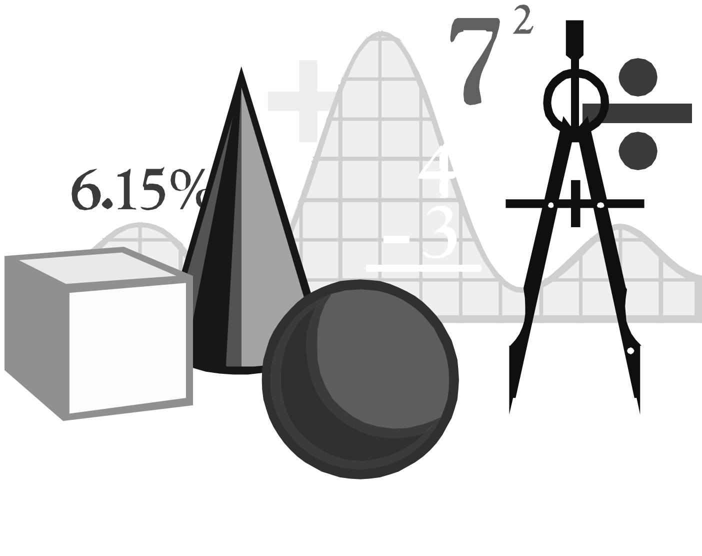
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ НИЗАМИ

**Бакирова А.Ю.**
**Рахмонов И.**

# Многогранники

***(методическое пособие)***




**Ташкент -2006**

Методическое пособие «Многогранники» представляет разработку практического характера. Рассмотрение темы с учащимися открывает возможности для решения широкого круга задач, начиная с простых и переходя затем к более сложным. В пособии рассмотрены вопросы построения сечений и различные виды задач, связанные с многогранниками.

**Авторы:** к.п.н. Бакирова А.Ю.
ст.преп. Рахмонов И.

**Рецензент:** доц.Юнусметов Р.
Учитель математики и информатики МСКХК Собитова Д.Т.

## Введение

Пространственное мышление значимо для каждого человека, независимо от уровня его образования и вида деятельности. Значительную роль в развитии пространственных представлений и пространственного мышления играет изучение свойств многогранников. Изучая планиметрию, учащиеся не только не должны забывать о пространственных фигурах, а наоборот, должны расширить знакомство с ними. Ведь нас окружают реальные предметы — пространственные фигуры.

Есть в школьной геометрии особые темы, которые ждешь с нетерпением, предвкушая встречу с невероятно красивым материалом. К таким темам можно отнести "Правильные многогранники". Здесь не только открывается удивительный мир геометрических тел, обладающих неповторимыми свойствами, но и интересные научные гипотезы. И тогда урок геометрии становится своеобразным исследованием неожиданных сторон привычного школьного предмета.

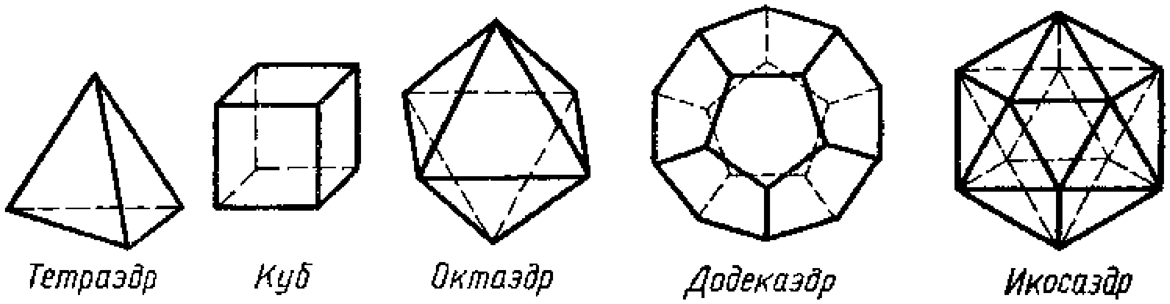
«Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук.»

Л. Кэрролл

Ни одни геометрические тела не обладают таким совершенством и красотой, как правильные многогранники. Каково же это вызывающе малое количество и почему их именно столько. А сколько? Оказывается, ровно пять - ни больше ни меньше. Подтвердить это можно с помощью развертки выпуклого многогранного угла.

В самом деле, для того чтобы получить какой-нибудь правильный многогранник согласно его определению, в каждой вершине должно сходиться одинаковое количество граней, каждая из которых является правильным многоугольником.

Сумма плоских углов многогранного угла должна быть меньше 360о , иначе никакой многогранной поверхности не получится. Перебирая возможные целые решения неравенств: 60к < 360, 90к < 360 и 108к < 360, можно доказать, что правильных многогранников ровно пять (к - число плоских углов, сходящихся в одной вершине многогранника)




Названия правильных многогранников пришли из Греции. В дословном переводе с греческого "тетраэдр", "октаэдр", "гексаэдр", "додекаэдр", "икосаэдр" означают: "четырехгранник", "восьмигранник", "шестигранник". "двенадцатигранник", "двадцатигранник". Этим красивым телам посвящена 13-я книга "Начал" Евклида. Их еще называют телами Платона, т.к. они занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания.

Четыре многогранника олицетворяли в ней четыре сущности или "стихии". Тетраэдр символизировал огонь, т.к. его вершина устремлена вверх; икосаэдр - воду, т.к. он самый "обтекаемый"; куб - землю, как самый "устойчивый"; октаэдр - воздух, как самый "воздушный". Пятый многогранник, додекаэдр, воплощал в себе "все сущее", символизировал все мироздание, считался главным.

Гармоничные отношения древние греки считали основой мироздания, поэтому четыре стихии у них были связаны такой пропорцией: земля / вода = воздух/огонь. Атомы "стихий" настраивались Платоном в совершенных консонансах, как четыре струны лиры. Напомним, что консонансом называется приятное созвучие. Важное место занимали правильные многогранники в системе гармоничного устройства мира И. Кеплера.

# 1. Основные определения. Теорема Эйлера

## 1.1. Плоские многоугольники

Многоугольником (точнее плоским многоугольником) называется (плоская) замкнутая ломаная линия, т.е. совокупность отрезков $A_1A_2$, $A_2A_3$, …, $A_{n-1}A_n$, $A_nA_1$, где $A_1A_2$, ….., $A_n$ – различные точки плоскости, не лежащие все на одной прямой. Точки $A_1$, $A_2$,…., $A_n$ называют вершинами многоугольника, а перечисленные выше отрезки - сторонами многоугольника. Две стороны, имеющие общую вершину, называются смежными сторонами.

Две вершины, являющиеся концами одной и той же стороны называются смежными вершинами многоугольника.

Очевидно, что во всяком многоугольнике число вершин равно числу сторон. Наименьшее возможное число вершин многоугольника равно трём. Многоугольник с тремя вершинами называется треугольником, многоугольник с четырьмя вершинами - четырёхугольником и т.д.

Многоугольник называется простым, если никакие две его не смежные стороны не имеют общих точек (внутренних или концевых); в противном случае многоугольник называется самопересекающимся. так, многоугольники, изображённые на рисунке 1.1, а, б, в, г, простые, а на рисунке 1.2, д, е, ж - самопересекающиеся.

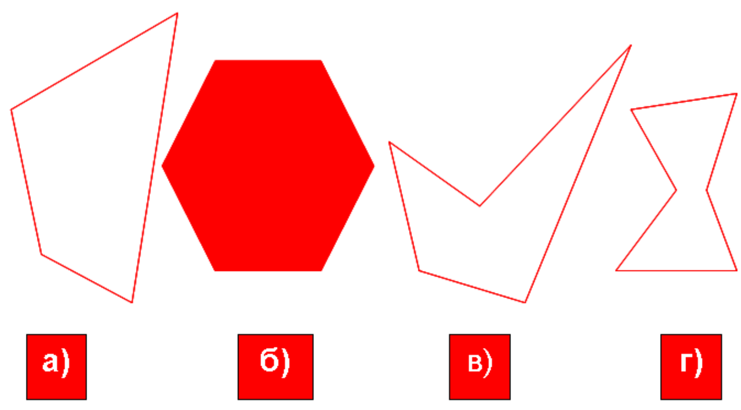



Рис. 1.1

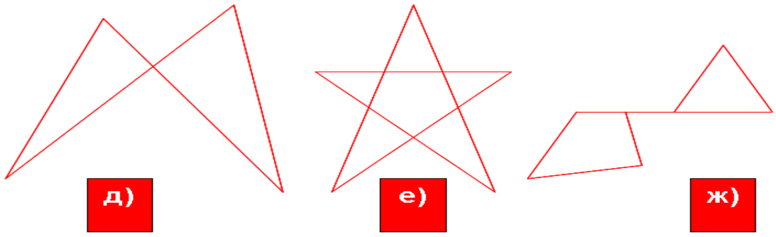



Рис.1.2

Многоугольник называется выпуклым, если для любой его стороны все прочие стороны расположены по одну сторону от прямой, на которой лежит данная сторона; так многоугольники, изображённые на рисунке 1.1 а, б – выпуклые, а на рисунке 1.1 в, г, 1.2 д, е, ж- невыпуклые.

## 1.2. Многогранники

Многогранником называется фигура, состоящая из конечного числа плоских многоугольников (называемых гранями многогранника), расположенных в пространстве так, что:

1)Любая сторона каждой из этих граней является стороной ещё одной и только одной грани (*называемой смежной с первой гранью*);

2) Для любых двух граней A и B можно указать такую цепочку граней $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, что грань A смежна с $A_1$, грань $A_1$ смежна с $A_2$, …., грань $A_n$ смежна с B;

3) Если грани A и B имеют общую вершину S, то выбор граней $A_1$, $A_2$, …, $A_n$, о которых говориться в предыдущем пункте, можно осуществить так, чтобы все они имели ту же вершину $S_1$.

Стороны и вершины граней многогранника называются соответственно *рёбрами и вершинами* этого многогранника.

Простейшими примерами многогранников могут служить призмы и пирамиды. Многогранник называется n-угольной пирамидой, если он имеет одной своей гранью (основанием) какой-либо n-угольник, а остальными гранями- треугольники с общей вершиной, не лежащей на плоскости основания. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром.*

Многогранник называется простым, если:

- Все его грани являются простыми многоугольниками;
- Никакие его несмежные грани не имеют общих точек (внутренних или граничных), за исключением, быть может, одной общей вершины;
- Две смежные грани имеют только одно общее ребро и не имеют других общих точек.

Многогранник называется *выпуклым*, если все его вершины, не принадлежащие произвольной грани этого многогранника, расположены по одну сторону от плоскости этой грани.

Рассмотрим произвольный правильный многогранник ***M***, у которого В вершин, Р ребер и Г граней. По теореме Эйлера для этого многогранника выполняется равенство: **В - Р + Г = 2.** (1)

Пусть каждая грань данного многогранника содержит **m** ребер (сторон), и в каждой вершине сходятся **n** ребер. Очевидно,

$m \geq 3,\ n \geq 3.$ (2)

Так как у многогранника В вершин, и каждой из которых сходятся n ребер, то получаем $n \cdot B$ ребер. Но любое ребро соединяет две вершины многогранника, поэтому в произведение $n \cdot B$ каждое ребро войдет дважды. Значит у многогранника имеется $\frac{n \cdot B}{2}$ **различных** ребер. Тогда

$\frac{n \cdot B}{2} = \text{Р} \Rightarrow \mathbf{В} = \frac{2P}{n}.$ (3)

Далее, в каждой грани многогранника **М** содержится m ребер, а число граней равно Г. Так как каждое ребро принадлежит двум смежным граням, то число **различных** ребер многогранника равно $\frac{m \cdot Г}{2}$. Тогда

$$\frac{m \cdot \Gamma}{2} = \text{Р} \Rightarrow \Gamma = \frac{2P}{m}. \quad (4)$$

Из (1), (3), (4) получаем $\frac{2P}{n}$ - Р + $\frac{2P}{m}$ = 2, откуда

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{P} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Таким образом, имеем

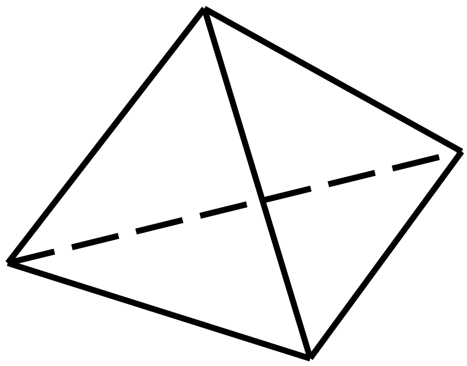
$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \\ m \geq 3, n \geq 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow 3 \leq n < 6;$$

$$\frac{1}{m} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow 3 \leq m < 6.$$

Из неравенств $3 \leq m < 6$ и $3 \leq n < 6$ следует, что **гранями правильного многогранника могут быть либо правильные треугольники, либо правильные четырехугольники, либо правильные пятиугольники.** Причем в случаях m = n = 4; m = 4, n = 5; m = 5, n = 4; m = n = 5 приходим к противоречию с условием $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2}$. Поэтому остаются возможными пять случаев: 1) m = n = 3; 2) m = 4, n = 3; 3) m = 3, n = 4; 4) m = 5, n = 3; 5) m = 3, n = 5.

Рассмотрим каждый из этих случаев, используя соотношения (5), (4) и (3).

1) **m = n = 3** (каждая грань многогранника – правильный треугольник. Это – известный нам ***правильный тетраэдр*** («*тетраэдр*» означает

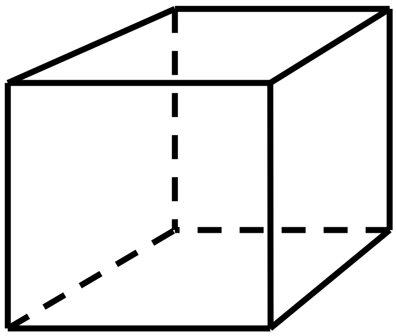


четырехгранник).

2) **m = 4, n = 3** (каждая грань квадрат, и в каждой вершине сходятся три ребра). Имеем

$\frac{1}{P}=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\Rightarrow$ **P = 12; В =** $\frac{2\cdot 12}{3}=$ **8; Г =** $\frac{2\cdot 12}{4}=$ **6.**

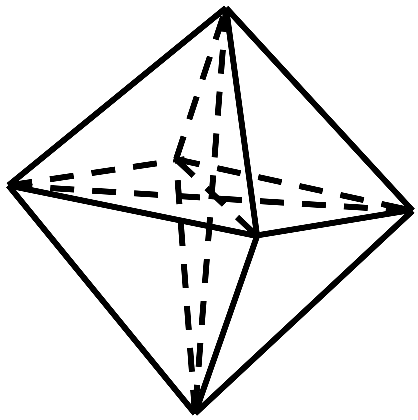
Получаем правильный шестигранник, у которого каждая грань – квадрат. Этот многогранник называется ***правильным гексаэдром*** и является кубом («*гексаэдр*» - шестигранник), любой параллелепипед – гексаэдр.



3) **m = 3, n = 4** (каждая грань – правильный треугольник, в каждой вершине сходятся четыре ребра). Имеем

$\frac{1}{P}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{12}\Rightarrow$ **P = 12; В =** $\frac{2\cdot 12}{4}=$**6; Г =** $\frac{2\cdot 12}{3}=$**8.**

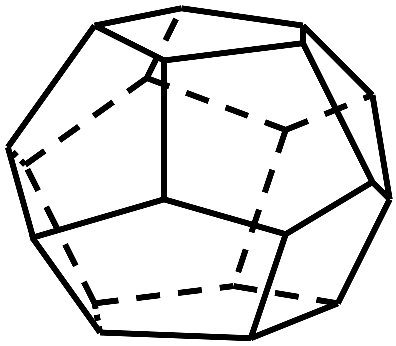
Получаем правильный восьмигранник, у которого каждая грань – правильный треугольник. Этот многогранник называется ***правильным октаэдром*** («*октаэдр*» - восьмигранник).



4) **m = 5, n = 3** (каждая грань – правильный пятиугольник, в каждой вершине сходятся три ребра). Имеем:

$\frac{1}{P}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}\Rightarrow$ **P = 30; В =** $\frac{2\cdot 30}{3}$ **= 20; Г =** $\frac{2\cdot 30}{5}$ **= 12.**

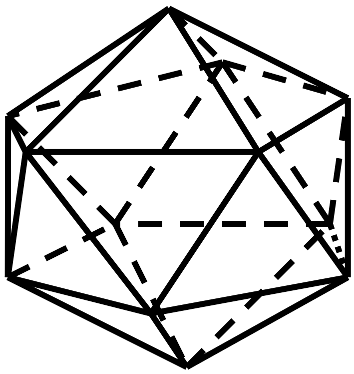
Получаем правильный двенадцатигранник, у которого каждая грань – правильный пятиугольник. Этот многогранник называется ***правильным додекаэдром*** («*додекаэдр*» - двенадцатигранник).



5) **m = 3,n = 5** (каждая грань – правильный треугольник, в каждой вершине сходятся пять ребер). Имеем

$\frac{1}{P}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\frac{1}{30}\Rightarrow$ **Р = 30; В =** $\frac{2\cdot 30}{5}$ **=12; Г =** $\frac{2\cdot 30}{3}$ **= 20.**

Получаем правильный двадцатигранник. Этот многогранник называется ***правильным икосаэдром*** («*икосаэдр*» - двадцатигранник).



Таким образом, мы получили следующую теорему.

**Теорема. Существует пять различных (с точностью до подобия) типов правильных многогранников: правильный тетраэдр, правильный гексаэдр (куб), правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр.**

К этому заключению можно прийти несколько иначе.

Действительно, если грань правильного многогранника – правильный треугольник, и в одной вершине сходятся $k$ ребер, т.е. все плоский углы выпуклого $k$-гранного угла равны $60°$, то $60° \cdot k < 360°$. Следовательно, натуральное число $k$ может принимать значения: 3;4;5. при этом Г = $\frac{B \cdot k}{3}$,

Р = $\frac{B \cdot k}{2}$. На основании теоремы Эйлера имеем: В+$\frac{B \cdot k}{3}$-$\frac{B \cdot k}{2}$ = 2 или

В $\cdot$( 6 – $k$ ) = 12. Тогда

при $k$ = 3 получаем: В = 4, Г = 4 , Р = 6 (правильный тетраэдр);\

при $k$ = 4 получаем: В = 6, Г = 8, Р = 12 (правильный октаэдр);

при $k$ = 5 получаем: В = 12, Г = 20, Р = 30 (правильный икосаэдр).

Если грань правильного многогранника – правильный четырехугольник, то $90° \cdot k < 360°$. Этому условию соответствует единственное натуральное число $k$ = 3. Тогда: Г = $\frac{B \cdot k}{4}$, Р= $\frac{B \cdot k}{2}$; В + $\frac{B \cdot k}{4}$ - $\frac{B \cdot k}{2}$ = 2 или $B \cdot (4 - k) = 8$. Значит, В = 8, Г = 6, Р = 12 – мы получаем куб (правильный гексаэдр).

Если гранью правильного многогранника является правильный пятиугольник, то $108° \cdot k < 360°$. Этому условию соответствует тоже только $k$ = 3 и Г = $\frac{B \cdot k}{5}$; Р = $\frac{B \cdot k}{2}$. Аналогично предыдущим вычислениям получаем: $B \cdot (10 - 3k) = 20$ и В = 20, Г = 12, Р = 30 (правильный додекаэдр).

Начиная с правильных шестиугольников, предположительно являющихся гранями правильного многогранника, плоские углы становятся не меньше $120°$, и уже $k$ = 3 их сумма становится не менее $360°$, что невозможно. Следовательно, существует всего пять видов правильных многогранников.

Некоторые свойства правильных многогранников приведены в следующей таблице.

| Вид грани | Плоский угол при вершине | Вид многогранного угла при вершине | Сумма плоских углов при вершине | В | Р | Г | Название многогранника |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Правильный треугольник | $60°$ | 3-гранный | $180°$ | 4 | 6 | 4 | Правильный тетраэдр |
| Правильный треугольник | $60°$ | 4-гранный | $240°$ | 6 | 12 | 8 | Правильный октаэдр |
| Правильный треугольник | $60°$ | 5-гранный | $300°$ | 12 | 30 | 20 | Правильный икосаэдр |
| Квадрат | $90°$ | 3-гранный | $270°$ | 8 | 12 | 6 | Правильный гексаэдр (куб) |
| Правильный пятиугольник | $108°$ | 3-гранный | $324°$ ё | 20 | 30 | 12 | Правильный додекаэдр |

У каждого из правильных многогранников, помимо уже указанных, нас чаще всего будут интересовать:

1. Величина его двугранного угла при ребре (при длине ребра *а*).

2. Площадь его полной поверхности (при длине ребра *а*).

3. Его объем (при длине ребра *а*).

4. Радиус описанной около него сферы (при длине ребра *а*).

5. Радиус вписанной в него сферы (при длине ребра *а*).

6. Радиус сферы, касающихся всех его ребер (при длине ребра *а*).

Наиболее просто решается вопрос о вычислении площади полной поверхности правильного многогранника; она равна $Г \cdot S_г$, где Г – количество граней правильного многогранника, а $S_Г$ - площадь одной грани.

Напомним, sin $18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, что дает нам возможность записать в радикалах: ctg $36° = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$. Учитывая это составляем таблицы:

а) для площади грани правильного многогранника

| Вид грани | Длина | Длина апофемы | Площадь грани |
|---|---|---|---|

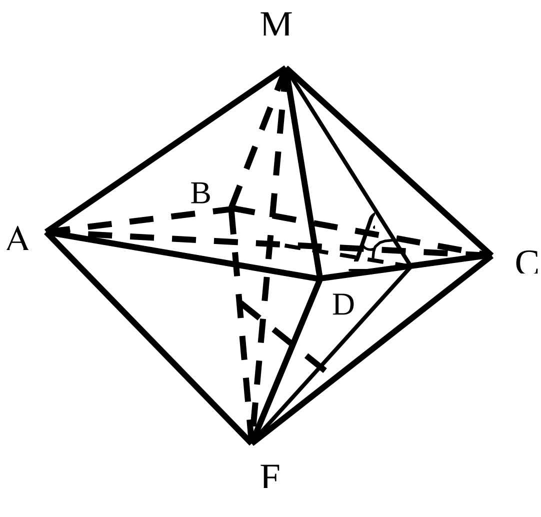
| | стороны | грани | |
|---|---|---|---|
| Правильный треугольник | $a$ | $0{,}5 \cdot a \cdot ctg\,\frac{180°}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{3a}{2}\,0{,}5actg60° = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ |
| Квадрат | $a$ | $0{,}5a$ | $a^2$ |
| Правильный пятиугольник | $a$ | $0{,}5actg\,\frac{180°}{5} = \frac{a}{2}ctg36°$ | $\frac{5a}{2}\,0{,}5ctg36° = \frac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$ |

б) для площади полной поверхности правильного многогранника

| Вид многогранника | Вид граней | Количество граней | Площадь полной поверхности |
|---|---|---|---|
| Правильный тетраэдр | Правильный треугольник | 4 | $4\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$ |
| Правильный октаэдр | Правильный треугольник | 8 | $8\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2a^2\sqrt{3}$ |
| Правильный икосаэдр | Правильный треугольник | 20 | $20\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 5a^2\sqrt{3}$ |
| Правильный гексаэдр (куб) | Квадрат | 6 | $6a^2$ |
| Правильный додекаэдр | Правильный пятиугольник | 12 | $12\frac{a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} = 3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ |

Теперь перейдем к вычислению величины двугранного угла $\beta$ правильного многогранника при его ребре. Для правильного тетраэдра и куба вы легко найдете величину этого угла.

В правильном додекаэдре все плоские углы его граней равны $108°$, поэтому, применив теорему косинусов для трехгранных углов к любому трехгранному углу данного додекаэдра при его вершине, получим: $\cos 108° = cos^2 108° + \sin^2 108° \cos\beta$,



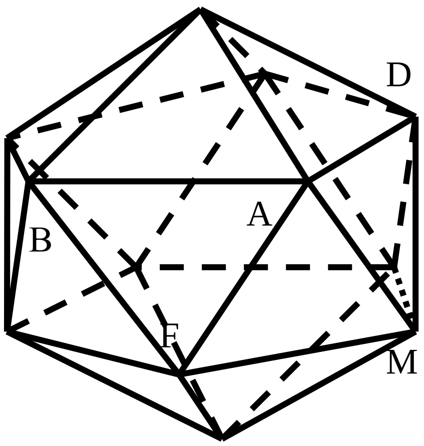
откуда

$$\cos\beta = \frac{\cos 108°}{1+\cos 108°} = \frac{-\sin 18°}{1-\sin 18°} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}{1-\frac{-1+\sqrt{5}}{4}} = -\frac{-1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\beta = \pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

На изображенном правильном октаэдре ABCDMF вы можете убедиться, что двугранный угол $\beta$ при ребре октаэдра равен 2arctg$\sqrt{2} \div \beta = 2arctg\sqrt{2}$.

Для нахождения величины двугранного угла $\varphi$ при ребре правильного икосаэдра можно рассмотреть трехгранный угол ABCD при вершине A: его плоские углы BAC и CAD равный $60°$, а третий плоский угол BAD, против которого лежит двугранный угол B(AC)D = $\varphi$, равен $108°$ (BCDMF – правильный пятиугольник). По теореме косинусов для трехгранного угла ABCD имеем: $\cos 108 = \cos^2 60° + \sin^2 60° \cos\varphi$. Учитывая, что $\cos 108° = -\sin 18° = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$, получаем $-\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos\varphi$, откуда $\cos\varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. Таким образом, двугранный угол $\varphi$ при ребре икосаэдра равен $\pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3} : \varphi = \pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$.




Итак, получаем следующую таблицу величин двугранных углов при ребрах правильных многогранников.

| Вид многогранника | Величина двугранного угла при ребре |
|---|---|
| Правильный тетраэдр | $\arccos\frac{1}{3}$ |
| Правильный  октаэдр | $2arctg\sqrt{2} = \pi - \arccos\frac{1}{3}$ |
| Правильный гексаэдр (куб) | $90°$ |
| Правильный додекаэдр | $\pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| Правильный икосаэдр | $\pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}$ |

Прежде чем находить объем того или иного правильного многогранника, сначала проведем рассуждения о том, как можно найти объем правильных многогранников в общем виде.

Попытайтесь сначала доказать, что если центр каждой грани любого правильного многогранника провести прямую, перпендикулярную плоскости этой грани, то все проведенные прямые пересекутся в некоторой одной точке *O*, удаленной от всех граней данного многогранника на одно и тоже расстояние, которое обозначим r. Точка *O* окажется центром сферы, вписанной в данный многогранник, а *r* – ее радиусом. Соединив полученную точку *O* со всеми вершинами данного многогранника, мы разобьем его на Г равных между собой пирамид (Г—число граней правильного многогранника): основаниями образованных пирамид равны *r*. Тогда объем данного многогранника равен сумме объемов всех этих пирамид. Так как многогранник правильный, то его объем *V* можно найти по формуле:

$$V = \frac{1}{3} r S_{полн.поверх.} \qquad (1)$$

Остается найти длину радиуса *r*. Для этого, соединив точку *O* с серединой *K* ребра многогранника, попробуйте убедиться, что наклонная *KO* к грани многогранника, содержащей ребро, составляет с плоскостью этой грани угол, равный половине величины $\beta$ двугранного угла при этом ребре многогранника; проекция же наклонной *KO* на плоскость этой грани принадлежит ее апофеме и равна радиусу вписанной в нее окружности. Тогда

$$r = r_{впис.окр.} \cdot tg\,\frac{\beta}{2} = \frac{S_{грани} \cdot tg\,\frac{\beta}{2}}{p}, \qquad (2)$$

где $p$—полупериметр грани. Тогда из (1) и (2) получаем общую для всех правильных многогранников формулу вычисления их объемов:

$$V = \frac{Г \cdot S^2_{грани} \cdot tg\,\frac{\beta}{2}}{3 \cdot p}.$$

Эта формула совершенно не нужна для нахождения объемов куба, правильных тетраэдра и октаэдра, но позволяет довольно легко находить объемы правильных икосаэдра и додекаэдра.

| Вид многогранника | Объем многогранника |
|---|---|
| Правильный тетраэдр | $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ |
| Правильный октаэдр | $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ |
| Куб | $a^3$ |
| Правильный икосаэдр | $\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$ |
| Правильный додекаэдр | $\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$ |

# 2. Задачи

## 2.1. Задачи на построение сечений многогранников

Существует 2 основных метода построения сечений многогранников:

1) Аксиоматический метод
   а) метод следов
   б) метод вспомогательных сечений
2) Комбинированный метод

### 2.1.1. Аксиоматический метод

### а) Метод следов

Пример1.

На ребрах AA' и B'C' призмы ABCA'B'C' зададим соответственно точку P и Q. Построим сечение призмы плоскостью (PQR), точку R которой зададим в одной из следующих граней:

а) BCCB'C'; б) A'B'C'; в) ABC

Решение.

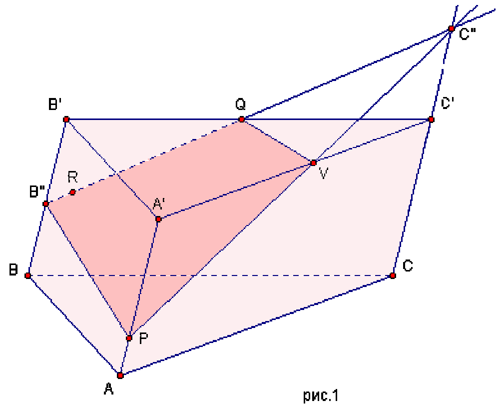


рис.1

а) 1) Так как точки Q и R лежат в плоскости (BCC'), то в этой плоскости лежит прямая QR. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскость (BCC'). (рис.1)

2) Находим точки B'' и C', в которых прямая QR пересекает соответственно прямые BB' и CC'. Точки B' и C' - это следы плоскости (PQR) соответственно на прямых BB' и CC'.

3) Так как точки B" и P лежат в плоскости (ABB'), то прямая B"P лежит в этой плоскости. Проведем ее. Отрезок B**P - след плоскости (PQR) на грани ABB'A'.

4) Так как точки P и C лежат в плоскости (ACC'), то прямая PC" лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ACC').

5) Находим точку V, в которой прямая PC" пересекает ребро A'C'. Это след плоскости (PQR) на ребре A'C'.

6) Так как точки Q и V лежат в плоскости (A'B'C'), то прямая QV лежит в этой плоскости. Проведем прямую QV. Отрезок QV - след плоскости (PQR) на грани ABC. Итак, мы получили многоугольник QB"PV - искомое сечение.

б) 1) Так как точки Q и R лежат в плоскости (A'B'C'), то в этой плоскости лежит прямая QR. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (A'B'C').(рис.2)

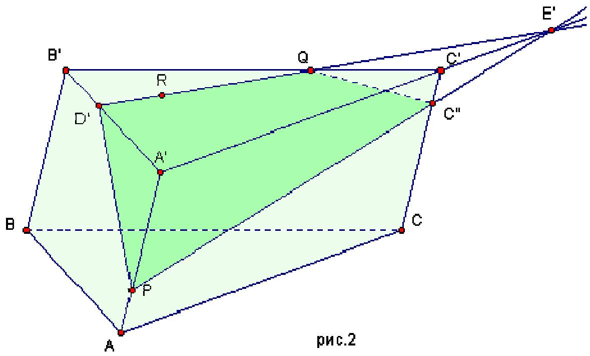


рис.2

2) Находим точки D' и E', в которых прямая QR пересекает соответственно прямые A'B' и B'C'. Так как точка D' лежит на ребре A'B', отрезок QD' - след плоскости (PQR) на грани A'B'C'.

3) Так как точки D' и P лежат в плоскости (ABB'), то прямая D'P лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ABB'), а отрезок D'P - след плоскости (PQR) на грани ABB'A'.

4) Так как точки P и E' лежат в плоскости (ACC'), то в этойплоскости лежит прямая PE'. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (ACC').

5) Находим точку C"=PE"CC'. Так как точка C" лежит на ребре CC', то отрезок PC" - это след плоскости (PQR) на грани ACC'A'.

б) Так как точки Q и C'' лежат в плоскости (BCC'), то прямая QC'' лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (BCC'), а отрезок QC''- след плоскости (PQR) на грани BCC'B'. Итак, мы получили многоугольник QD'PC'' - это и есть искомое сечение.

в) 1) Из трех заданных точек P, Q и R никакие две не лежат в какой-нибудь одной из плоскостей граней призмы, поэтому найдем основной след плоскости (PQR) (т. е. линию пересечения плоскости (PQR) с плоскостью (ABC), выбранной в качестве основной). Для этого сначала найдем проекции точек P, Q и R на плоскость (ABC) в направлении, параллельном боковому ребру призмы. Так как точка P лежит на ребре AA', то точка P' совпадает с точкой A. Так как точка Q лежит в плоскости (BCC'), то в этой плоскости через точку Q проведем прямую, параллельную прямой BB', и найдем точку Q', в которой проведенная прямая пересекает прямую BC. Так как точка R по условию лежит в плоскости, выбранной в качестве основной, то точка R' совпадает с точкой R.(Рис.3)

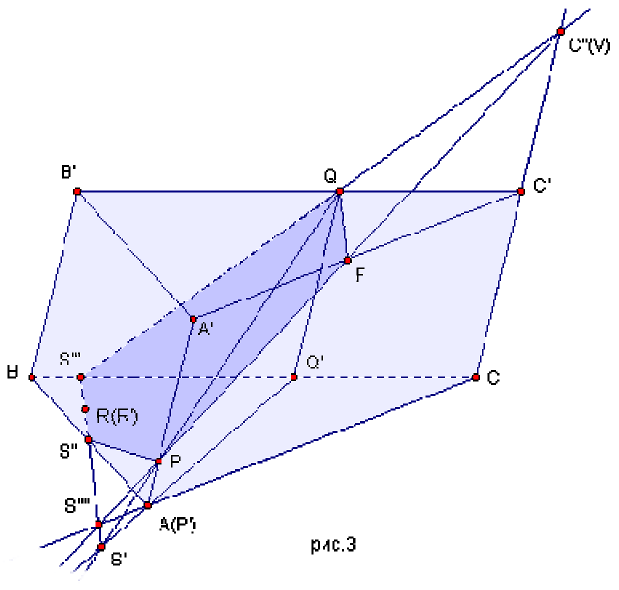



рис.3

2) Параллельными прямыми PP' и QQ' определяется плоскость. Проведем в этой плоскости прямые PQ и P'Q' и найдем точку S=PQ пересекает P'Q'. Так как точка S' лежит на прямой PQ, то она лежит в плоскости (PQR), и так как точка S' лежит на прямой P'Q', то она лежит в плоскости (ABC). Таким образом, точка S' является общей точкой плоскостей (PQR) и (ABC). Это

значит, что плоскости (PQR) и (ABC) пересекаются по прямой, проходящей через точку S'.

3) Так как точка R совпадает с точкой R', то точка R - это еще одна общая точка плоскостей (PQR) и (ABC). Таким образом, прямая S'R - основной след плоскости (PQR). Проведем эту прямую. Как видим нз рисунка, прямая S'R пересекает ребра AB и BC основания призмы соответственно в точках S''и S'''.

4) Так как точки S''' и Q лежат в плоскости (BCC'), то прямая S''' Q лежит в этой плоскости. Проведем ее. Это след плоскости (PQR) на плоскости (BCC'). А отрезок S''' Q, - след плоскости (PQR) на грани BCC'B'.

5) Аналогично находим отрезок S'' P - след плоскости (PQR) на грани ABB'A'.

6) Находим далее точку C,= S''' Q CC'. Так как точки C'' и P лежат в плоскости (ACC'), то прямая C''P лежит в плоскости (ACC'). Проведем эту прямую, являющуюся следом плоскости (PQR) на плоскости (ACC').

7) Находим точку F=PC'' пересекает A'C' и получаем затем отрезок PF - след плоскости (PQR) на грани ACC'A'.

8) Точки Q и F лежат в плоскости A'B'C', поэтому прямая QF лежит в плоскости (A'B'C'). Проведем прямую QF, получим отрезок QF - след плоскости (PQR) на грани A'B'C'. Итак, мы получили многоугольник QS'''S''PF- искомое сечение.

З а м е ч а н и е. Покажем другой путь нахождения точки C'', при котором не находим точку пересечения прямой S''' Q с прямой C'C''. Будем рассуждать следующим образом. Если следом плоскости (PQR) на прямой CC' является некоторая точка V, то ее проекция на плоскость (ABC) совпадает с точкой C. Тогда точка S''''= V'P' пересекает VP лежит на основном следе S'R плоскости (PQR). Строим эту точку S'''' как точку пересечения прямых V'P' (это прямая CA) и S'R. А далее проводим прямую S''''P. Она пересекает прямую CC' в точке V.

*Пример 2.*

На ребре MB пирамиды MABCD зададим точку P, на ее грани MCD зададим точку Q. Построим сечение пирамиды плоскостью (PQR), точку R которой зададим:

а) на ребре MC;

б) на грани MAD;

в) в плоскости (MAC), вне пирамиды.

Решение.

а) Следом плоскости (PQR) на грани MBC является отрезок PR, а ее следом на грани MCD является отрезок RD', где точка D' - это точка пересечения прямой RQ с ребром MD. Ясно, что плоскость (PQR) имеет следы на гранях MAD и MAB (так как с этими гранями плоскость (PQR) имеет общие точки). Найдем след плоскости (PQR) на прямой MA. Сделаем это следующим образом:

1) Построим точки P', Q' и R' - проекции точек P, Q и R из центра M на плоскость (ABC), принимаемую, таким образом, за основную плоскость. (Рис. 4)

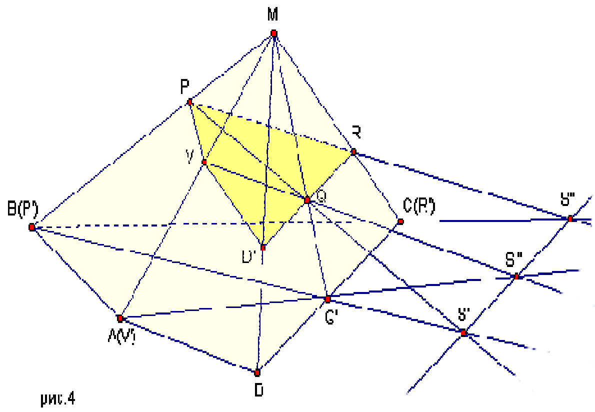



рис.4

2) Далее построим точки S'= PQ пересекает P'Q' и S'' = PR пересекает P'R' и проведем прямую S' S'' - основной след плоскости (PQR).

3) Если плоскость (PQR) пересекает прямую MA в некоторой точке V, то точка V' совпадает с точкой A и точка S'''= VQ пересекает V'Q' лежит на прямой S' S''. Другими словами, в точке S''' пересекаются три прямые: VQ,, V'Q'' и S' S''. Две последние прямые из этих трех на чертеже уже есть.

Поэтому точку S''' мы построим как точку пересечения прямых V'Q' и SS''.

4) Проведем прямую QS''' (она совпадает с прямой VQ, так как прямая VQ должна проходить через точку S''', т. е. точки V, Q и S''' лежат на одной прямой).

5) Находим точку V, в которой прямая QS''' пересекает прямую MA, Точка V - это след плоскости (PQR) на ребре MA. Далее ясно, что отрезки PV и VD' - следы плоскости (PQR) соответственно на гранях MAB и MAD. Таким образом, многоугольник PRD'V - искомое сечение.

б) 1) Принимаем плоскость (ABC) за основную плоскость и строим точки P', Q' и R' — проекции соответственно точек P, Q и R на плоскость (ABC). Центром этого внутреннего проектирования является точка M.(Рис.5.)

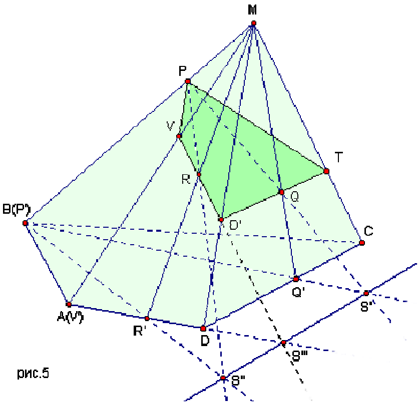


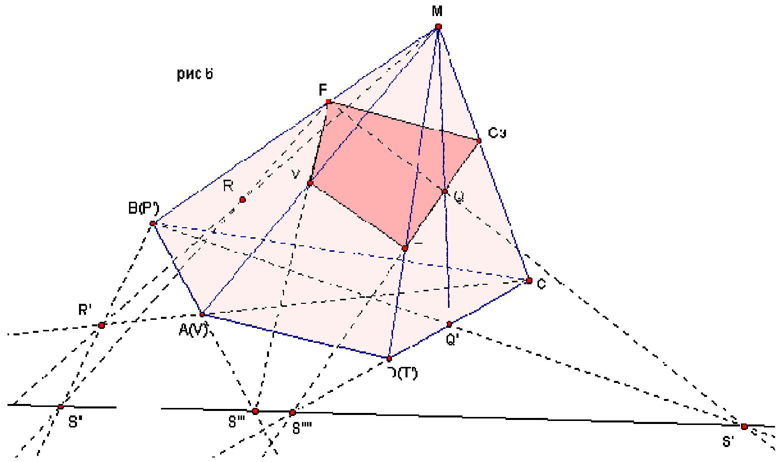
рис.5

2) Строим прямую S'S'' — основной след плоскости (PQR).

3) Если плоскость (PQR) пересекает прямую MA в точке V, то точка V' — проекция точки V на плоскость (ABC) из центра M— совпадает с точкой A, а прямые S'S'', V'R' и прямая VR, точка V которой пока нами не построена, пересекаются в точке S'''. Находим эту точку S'''=V'R' пересекается S'S'' .

4) Проводим прямую RS''', и находим точку V=RS''' пересекается MA. Дальнейшее построение ясно. Искомым сечением является многоугольник PVD'T.

в) (Рис.6.)




Пусть точка R расположена в плоскости (MAC) так, как это показано на рисунке 6.

1) Принимаем плоскость (ABC) за основную плоскость и строим точки P', Q' и R' — проекции соответственно точек P, Q и R на плоскость (ABC). (центром проектирования является точка M.)

2) Строим прямую S'S", — основной след плоскости (PQR).

3) Находим точку V — след плоскости (PQR) на прямой MA. Точка V' — проекция точки V на плоскость (ABC) из центра M— совпадает в этом случае с точкой A.

4) Находим точку S'"= P'V' пересекается S'S", а затем и точку V =PS'" пересекается MA. 5) Получаем след PV плоскости (PQR) на плоскости (MAB).

6) Находим точку T — след плоскости (PQR) на прямой MO. Ясно, что точка T' в этом случае совпадает с точкой D. Для построения точки T строим точку S""=Q'T' пересекается S'S", а затем точку T=QS""пересекается MT'.

7) Совокупность следов PV, VT, TC', и C'P, т. е. многоугольник PVTC' — искомое сечение.

## 2.1.1.Аксиоматический метод

## б) Метод вспомогательных сечений

Этот метод построения сечений многогранников является в достаточной мере универсальным. В тех случаях, когда нужный след (или следы) секущей плоскости оказывается за пределами чертежа, этот метод имеет даже определенные преимущества. Вместе с тем следует иметь в виду, что построения, выполняемые при использовании этого метода, зачастую получаются «скученными». Тем не менее в некоторых случаях метод вспомогательных сечений оказывается наиболее рациональным. Перейдем к рассмотрению примеров.

П р и м е р 3.

На ребрах BB' и D'E' призмы ABCDEA'B'C'D'E' зададим соответственно точки P и Q. Построим сечение призмы плоскостью PQR, точку R которой зададим; а) на ребре AA'; б) на грани AEE'A,; в) на грани ABCDE.

Решение.

а) (Рис. 7.)

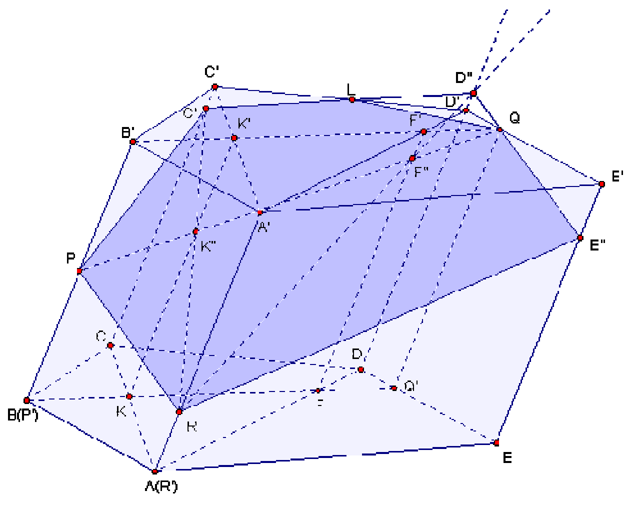



рис.7

Ясно, что отрезок PR — это след плоскости PQR на грани ABB'A'. Проиллюстрируем теперь идею построения сечения заданной призмы, находя след плоскости PQR, например, на прямой DD,,

l) Примем плоскость ABC за основную плоскость и построим проекции на эту плоскость точек P, R и Q (естественно, в направлении, параллельном боковому ребру призмы). Получаем точку P' (совпадающую с точкой B), точку R' (совпадающую с точкой A) и точку Q' — точку пересечения прямой DE с прямой, проходящей через точку Q параллельно прямой DD'.

2) Параллельными прямыми PP' и QQ' определяется плоскость бетта 1. Строим сечение призмы плоскостью бетта 1. Это — первое вспомогательное сечение.

3) Параллельными прямыми RR' и DD' определяется плоскость бетта 2. Строим сечение призмы плоскостью бетта 2. Это — второе вспомогательное сечение. (Отметим, что прямая DD', выбрана нами потому, что мы решили найти след плоскости PQR именно на этой прямой.)

4) Строим линию пересечения плоскостей бетта 1 и бетта 2. Это прямая FF', где точка F=P'Q' пересекается AD и точка F'=B'Q пересекается A'D'.

5) В плоскости бетта 1 проводим прямую PQ и находим точку F''=PQ пересекается FF'. Так как точка F'' лежит на прямой PQ, то она лежит в плоскости PQR. Тогда прямая RF'' лежит в плоскости PQR.

6) Проводим прямую RF'' и находим точку D''=RF'' пересекается DD'. Так как точка D'', лежит на прямой RF'' то она лежит в плоскости PQR, т. е. точка '' — это и есть след плоскости PQR на прямой DD'. Дальнейшие построения можно выполнить следующим образом:

7) Проводим прямую D''Q. Это след плоскости PQR на плоскости DEE'. На прямой EE', получаем точку E''=D''Q пересекается EE'. Отрезок QE'' — это след плоскости PQR на грани DEE'D'.

8) Проводим прямую RE''. Отрезок RE'' — это след плоскости PQR на грани AEE'A'. Для построения искомого сечения найдем еще след плоскости PQR на прямой CC'. Сделаем это также методом вспомогательных сечений. А именно:

9) Параллельными прямыми RR' и CC' определяется плоскость бетта 3. Строим сечение призмы плоскостью бетта 3. Это — третье вспомогательное сечение. Находим линию пересечения плоскостей бетта 1 и бетта 3. Это прямая КК', где точка К=R'C пересекается P'Q' и точка К'=A'C' пересекается

B'Q. Находим точку K"= PQ пересекается KK'. Проводим далее прямую RK" и находим точку C" =RK" пересекается CC'.

10) Проводим прямые PC" и C"D". Получаем отрезки PC", C"L и затем LQ — следы плоскости PQR соответственно на гранях BCC'B', CDD'C' и A'B'C'D'E'. Совокупность построенных следов плоскости PQR на гранях призмы образует многоугольник PRE"QLC", который и является искомым сечением.

б)(Рис.8.)

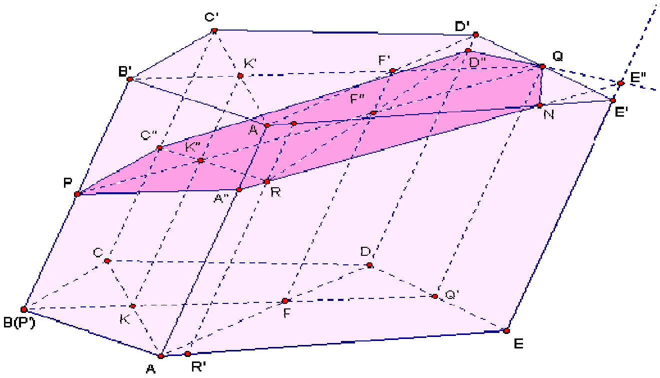



рис.8

Как в пункте а), находим точки P', Q' и R'. Затем строим вспомогательные сечения призмы плоскостями бетта 1 и бетта 2, прямую FF' — линию пересечения плоскостей бетта 1 и бетта 2, точку F"=PQ пересекается FF', прямую RF" и находим точку D". Далее, опять как в пункте а), строим вспомогательное сечение призмы плоскостью бетта 3, определяемой параллельными прямыми RR' и CC', строим прямую KK', по которой пересекаются плоскости бетта 1 и рбетта 3 и т. д. В итоге получаем сечение PA"NQD"C".

в) (Рис. 9.)

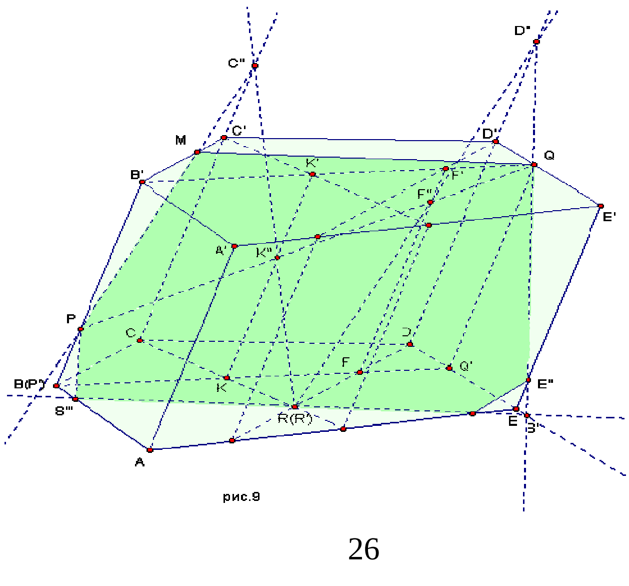



рис.9

Как в пунктах а) и б), строим точки P', Q' и R'. Затем строим вспомогательные сечения призмы плоскостями бетта 1 и бетта 2, находим линию пересечения этих плоскостей и т. д. Отметим только, что плоскость бетта 2 определяется здесь не парой параллельных прямых, а прямой DD' и точкой R', Плоскость бетта 3 также определяется прямой и точкой (CC' и R), Построение следа плоскости PQR на плоскости ABC видно из рисунка 9. Многоугольник PMQE"S"S'" — искомое сечение. Вернемся к п р и м е р у 2, б, решенному в этом параграфе методом следов. Дадим теперь его решение методом вспомогательных сечений.

*Решение*

l) Находим точки P', Q' и R' и затем строим вспомогательное сечение пирамиды плоскостью бетта 1 , определяемой какими-нибудь двумя пересекающимися прямыми из трех прямых MP, MQ и MR. Например, плоскостью MPQ.

2) Построим вспомогательное сечение пирамиды плоскостью бетта 2. определяемой двумя пересекающимися прямыми, одна из которых — это прямая MR, а другая прямая — та, на которой мы хотим найти след плоскости PQR. Например, прямая MC.

3) Находим точку F, в которой пересекаются прямые P'Q' и R'C, а затем строим прямую MF — линию пересечения плоскостей бетта 1 и бетта 2.

4) В плоскости бетта 1 проводим прямую PQ и находим точку F'=PQ пересекается MF.

5) Так как точка F' лежит на прямой PQ, то она лежит в плоскости PQR. Тогда и прямая RF, лежит в плоскости PQR. Проводим прямую RF', и находим точку C'=RF' пересекается MC. Точка C', таким образом, лежит и на прямой MC, и в плоскости PQR, т. е. она является следом плоскости PQR на прямой MC (в данном случае и на ребре MC).

6) Дальнейшие построения вполне понятны: строим C'Q, D', D'R, A', A'P, PC'. Четырехугольник PC'D'A' — искомое сечение.

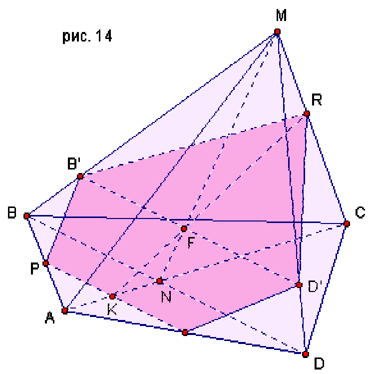
## 2.1.2. Комбинированный метод построения сечений

Суть комбинированного метода построения сечений многогранников состоит в применении теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве в сочетании с аксиоматическим методом.

Пример 1.

На ребрах AB и AD пирамиды MABCD зададим соответственно точки P и Q - середины этих ребер, а на ребре MC зададим точку R. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки P, Q и R.

Решение (рис.14):




1) Ясно, что основным следом плоскости PQR является прямая PQ.

2) Найдем точку K, в которой плоскость MAC пересекает прямую PQ. Точки K и R принадлежат и плоскости PQR, и плоскости MAC. Поэтому, проведя прямую KR, мы получим линию пересечения этих плоскостей.

3) Найдем точку N=AC BD, проведем прямую MN и найдем точку F=KR MN.

4) Точка F является общей точкой плоскостей PQR и MDB, то есть эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку F. Вместе с тем так как PQ - средняя линия треугольника ABD, то PQ параллельна BD, то есть прямая PQ параллельна и плоскости MDB. Тогда плоскость PQR, проходящая через прямую PQ, пересекает плоскость MDB по прямой, параллельной прямой PQ, то есть параллельной и прямой BD. Поэтому в плоскости MDB через точку F проведем прямую, параллельную прямой BD.

5) Дальнейшие построения понятны из рисунка. В итоге получаем многоугольник PQD'RB' - искомое сечение.

1. Построение сечения, проходящего через заданную прямую, параллельную другой заданной прямой.

Пусть, например, требуется построить сечение многогранника плоскостью $\alpha$, проходящей через заданную прямую p параллельную второй заданной прямой q. В общем случае решение этой задачи требует некоторых предварительных построений, которые можно выполнять по следующему плану:

1) Через вторую прямую q и какую-нибудь точку W первой прямой p проведем плоскость $\beta$ (рис. 15 ).

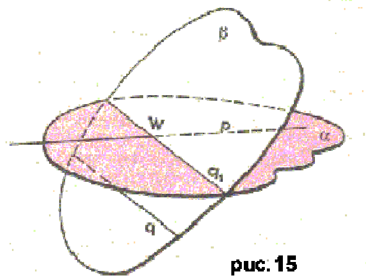


рис. 15

2) В плоскости $\beta$ через точку W проведем прямую q' параллельную q.

3) Пересекающимися прямыми p и q'. Определяется плоскость $\alpha$. На этом предварительные построения заканчиваются и можно переходить к построению непосредственно сечения многогранника плоскостью $\alpha$. В некоторых случаях особенности конкретной задачи позволяет осуществить и более короткий план решения. Рассмотрим примеры.

Пример 2.

На ребрах BC и MA пирамиды MABC зададим соответственно точки P и Q. Построим сечение пирамиды плоскостью $\alpha$, проходящей через прямую PQ параллельно прямой AR, точку R, которую зададим следующим образом: а) На ребре MB; б). Она совпадает с точкой B; в). В грани MAB.

Решение:

а) (рис.16)

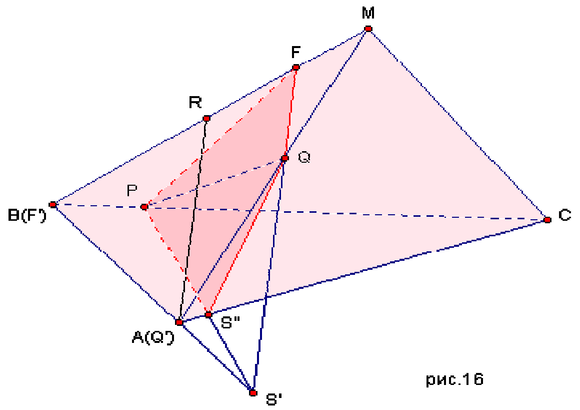


рис.16

1).Плоскость, проходящая через вторую прямую, то есть прямую AR, и точку Q, взятую на первой прямой, на изображении уже есть. Это плоскость MAB.

2) В плоскости MAB через точку Q проведем прямую QF параллельную AR.

3) Пересекающимися прямыми PQ и QF определяется плоскость $\alpha$ (эта плоскость PQF) - плоскость искомого сечения. Построим это сечение методом следов.

4) Точка B совпадает с точкой F' - проекцией точки F на плоскость ABC (из центра M), а точка A совпадает с точкой Q' - проекция точки Q на эту плоскость. Тогда точка S'=FQ F'Q' лежит на основном следе секущей плоскости $\alpha$. Так как точка P лежит на основном следе секущей плоскости, то прямая S'P - это основной след плоскости $\alpha$, а отрезок S''P - след плоскости $\alpha$ на грани ABC. Далее ясно, что точку P следует соединить с точкой F. В итоге получаем четырехугольник PFQS'' - искомое сечение.

б) (рис. 17)

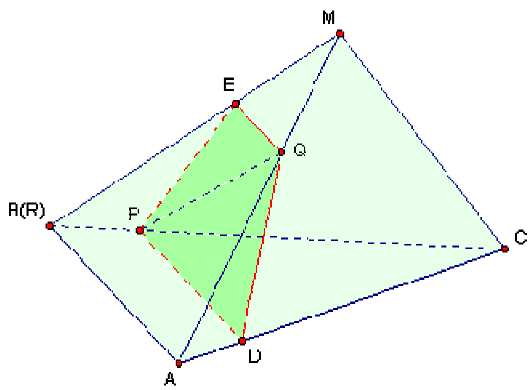


рис.17

1) Плоскость, проходящая через прямую AB и точку P прямой PQ, на изображении уже построена. Это плоскость ABC. Продолжим построение по вышеизложенному плану.

2) В плоскости ABC через точку P проведем прямую PD, параллельную прямой AB.

3) Пересекающимися прямыми PQ и PD определяется плоскость альфа (это плоскость PQD) - плоскость искомого сечения. Построим это сечение.

4) Ясно, что следом плоскости альфа на грани MAC является отрезок DQ.

5) Дальнейшие построения выполним, принимая во внимание следующие соображения. Так как прямая PD параллельна прямой AB, то прямая PD параллельна плоскости MAB. Тогда плоскость альфа, проходящая через прямую PD, пересекает плоскость MAB по прямой, параллельной прямой PD, то есть и прямой AB. Итак, в плоскости MAB через точку Q проведем прямую QE параллельную AB. Отрезок QE - это след плоскости $\alpha$ на грани MAB.

6) Соединим точку P с точкой E. Отрезок PE - это след плоскости $\alpha$ на грани MBC. Таким образом, четырехугольник PEQD - искомое сечение.

в) (рис.18)

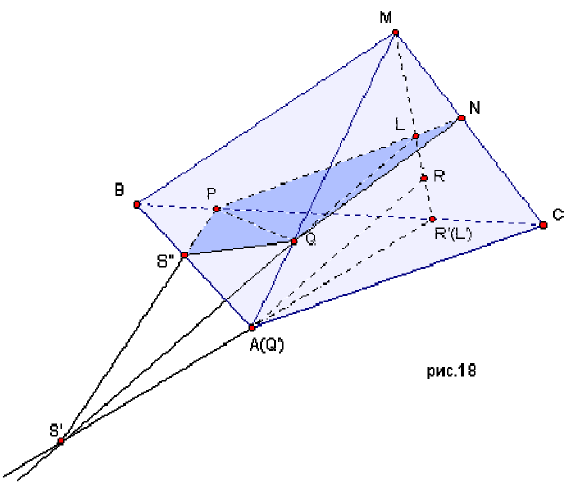



рис.18

1) Через вторую прямую AR точку Q первой прямой проведем плоскость. Это плоскость MAR.

2) В плоскости MAR через точку Q проведем прямую QL параллельную AR.

3) Пересекающимися прямыми PQ и QL определяется плоскость $\alpha$ (это плоскость PQL) - плоскость искомого сечения. Построим это сечение методом следов. Находим проекции точек Q и L на плоскость ABC. Ясно, что точка Q' совпадает с точкой A, а точка L' совпадает с R'=MR BC. Тогда точка S'=LQ L'Q' лежит на основном следе секущей плоскости $\alpha$. Этим основным следом является прямая S'P, а следом плоскости $\alpha$ на грани ABC является отрезок S''P. Далее прямая PL - это след плоскости $\alpha$ на плоскости MBC, а отрезок PN - след плоскости $\alpha$ на грани MBC. Итак, четырехугольник PS''QN - искомое сечение.

## 2.2. Задачи на использование свойств подобных треугольников

Во многих задачах использование свойств подобных треугольников, как правило, не является основным фактором процесса решения.

Поэтому далее представлены несколько простейших задач, в которых подобные треугольники играют главную роль, - тем более, что их нужно еще и построить (и увидеть!!!) с помощью стандартного стереометрического приема: одну плоскость пересечь другой плоскостью и построить их линию пересечения по двум общим для плоскостей точкам.

Задача №1.

В каком отношении диагональ A'C делится плоскостью, проходящей в кубе ABCDA'B'C'D' через вершины B и D' и 1) вершину A, 2) середину ребра AD?

Решение:

1) $\Delta A'MO' \infty \Delta CMA \quad \Rightarrow \quad A'M : CM = 1:2$

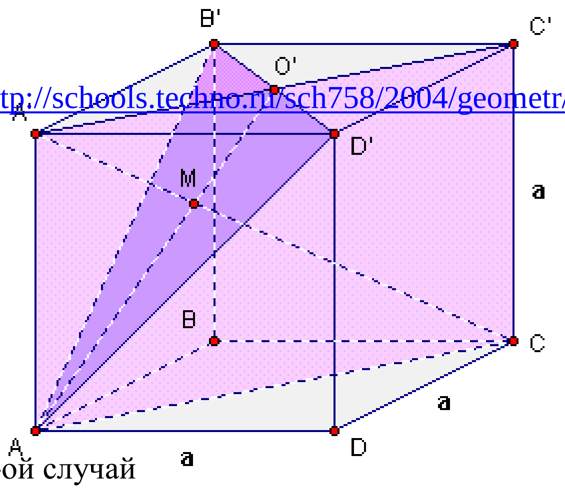
2) $\Delta A'MO' \infty \Delta CMN$

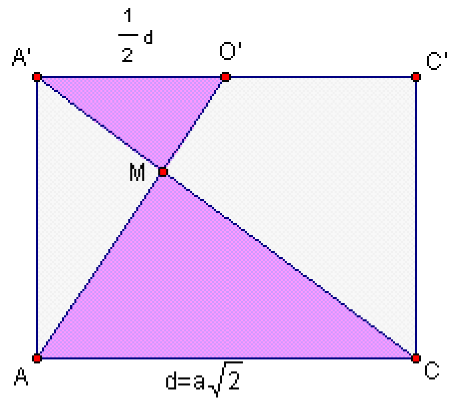
EF – средняя линия $\Delta A'MD \Rightarrow AN = \frac{1}{4}AC \Rightarrow CN = \frac{3}{4}AC = \frac{3}{4}d;$

$A'M : CM = 2:3$

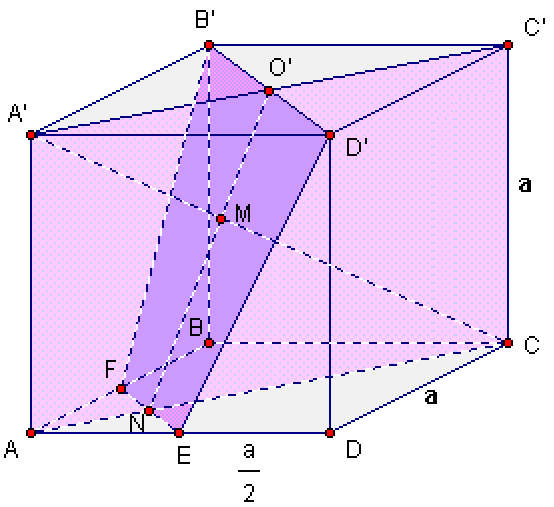
1-ый случай

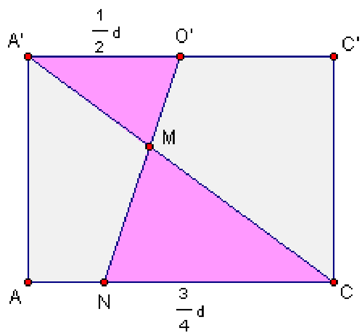
http://schools.techno.ru/sch758/2004/geometr/zadachi.htm




2-ой случай




## Задача №2

В каком отношении диагональ BD' делится плоскостью, проходящей в кубе ABCDA'B'C'D' через середины ребер AD и CD и точку F на ребре BB', если B'F=k*BF?

Решение:

1) $\Delta B'TF \infty \Delta BNF \Rightarrow \quad B^{'}T = \frac{3k}{4}d;$

2) $\Delta BNM \infty \Delta D'TM \Rightarrow \quad \frac{BM}{D'M} = \frac{BN}{D'T} \Rightarrow \frac{BM}{D'M} = \frac{\frac{3}{4}d}{d + \frac{3k}{4}d};$

$$\frac{BM}{D'M} = \frac{3}{3k+4}$$

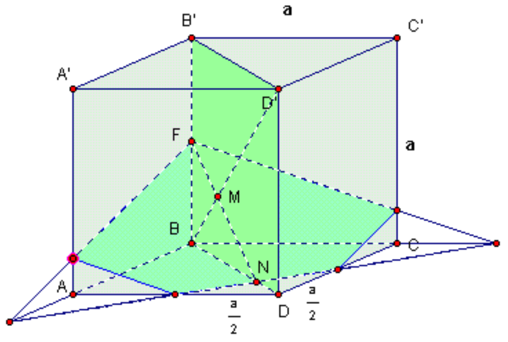
Возможные варианты:

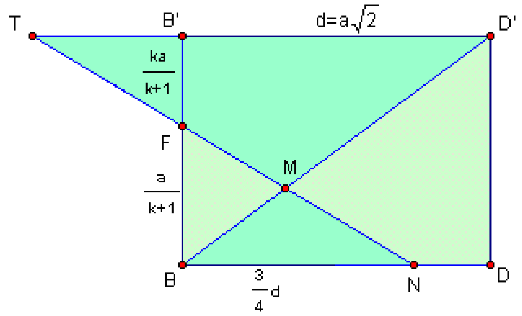
$k$=*0* (F совпадает с B)$\Rightarrow 3:4$;

k=1 $\Rightarrow 3:7$;

k=2$\Rightarrow 3:10$;

$$k=\frac{3}{2}\Rightarrow 6:7;$$




Задача №3

Построить сечение куба ABCDA'B'C'D' плоскостью, проходящей через вершины B' и D' и середину ребра AD. В каком отношении эта плоскость делит отрезок, соединяющий вершину A' с точкой F на ребре CC' , если C'F=k*CF?

Решение:

1) Из трапеции $NO^{'}C'C$:

$$\frac{\frac{3}{4}d-\frac{1}{2}d}{FT-\frac{1}{2}d}=\frac{a}{\frac{ka}{k+1}}\Rightarrow FT=\frac{3k+2}{4(k+1)}d;$$

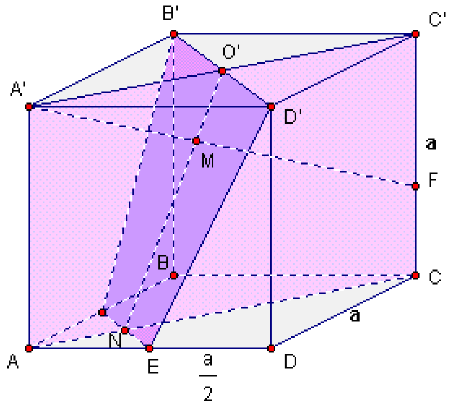
2) $\Delta A^{'}O^{'}M\infty\Delta FTM \quad \Rightarrow \quad \frac{A'M}{FM}=\frac{A'O'}{FT}\Rightarrow\frac{A'M}{FM}=\frac{\frac{1}{2}d}{\frac{3k+2}{4(k+1)}d};\ \frac{A'M}{FM}=\frac{2k+2}{3k+2}$

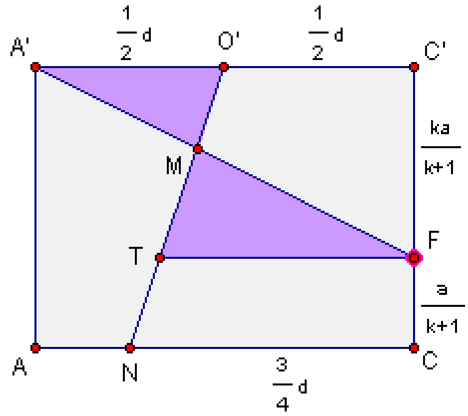
Возможные варианты:

$k\to\infty$ (F-совпадает с C) $\Rightarrow 2:3;$

$k=1\Rightarrow 4:5;\quad k=2\Rightarrow 3:4;\qquad k=3\Rightarrow 8:11;$

$k=\frac{1}{2}\Rightarrow 6:7;\quad k=\frac{3}{2}\Rightarrow 10:3;\quad k=\frac{2}{3}\Rightarrow 5:6;$




Задача №4

Построить сечение правильной треугольной пирамиды ABCM плоскостью, проходящей через сторону основания AC и точку F на боковом ребре MB при условии, что BF=k*MF. В каком отношении эта плоскость делит высоту пирамиды MO?

Решение:

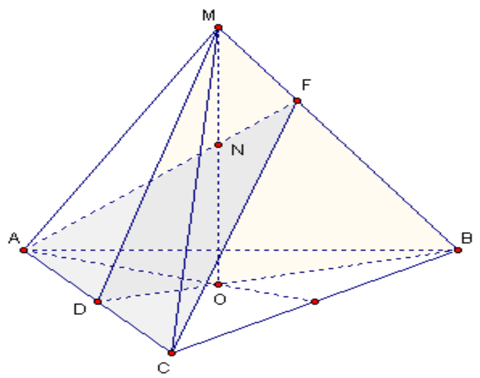
R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей для равностороннего $\Delta ABC$;

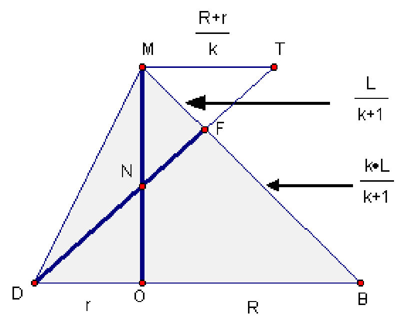
L-боковое ребро пирамиды;

1) $\Delta MTF \infty \Delta BDF \Rightarrow TM = \dfrac{R+r}{k}$;

2) $\Delta MTN \infty \Delta ODN \Rightarrow \dfrac{MN}{ON} = \dfrac{TM}{DO} \Rightarrow \dfrac{MN}{ON} = \dfrac{1+\frac{R}{r}}{k}$

так как $R = 2r$, то $\dfrac{MN}{ON} = \dfrac{3}{k}$.



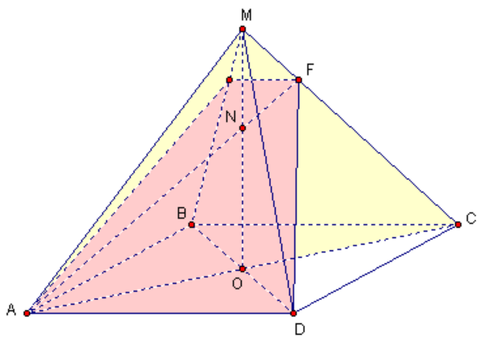



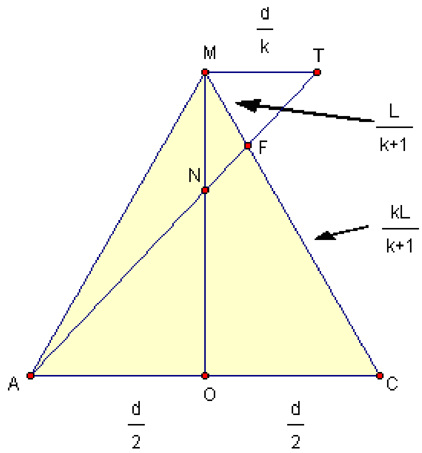
Задача №5

Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды ABCDM плоскостью, проходящей через сторону основания AD и точку F на боковом ребре MC, если CF=k*MF. В каком отношении эта плоскость делит высоту пирамиды MO?

Решение:

L-боковое ребро пирамиды;
d-диагональ основания (квадрата ABCD);
Задача решается аналогично предыдущей $\frac{MN}{ON}=\frac{2}{k}$.



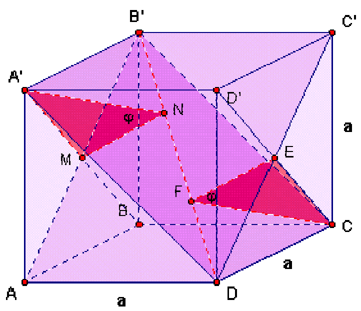




## 2.3. Задачи на нахождение угла между плоскостями

Задача №1.

В кубе ABCDA'B'C'D' определить угол между плоскостями сечений AB'C'D и CB'A'D

Решение:



Точка C принадлежит плоскости CB'A'D (так как CD' перпендикулярна C'D как диагонали квадрата и так как B'C' перпендикулярна плоскости CC'D'D, - из чего следует B'C' перпендикулярна CE, - то получаем CE перпендикулярна B'C' и CE перпендикулярна C'D). Затем проводим EF перпендикулярно B'D и тогда получаем B'D перпендикулярна CF (по теореме о трех перпендикулярах: CF по отношению к плоскости AB'C'D является наклонной, CE - перпендикуляром и EF- проекцией наклонной CF; то она перпендикулярна и самой наклонной CF). Так как EF и CF принадлежат соответственно обеим плоскостям, то угол фи (угол CFE) является искомым.

После этого обоснования следует несложная вычислительная часть.

$CE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; отрезок CF является высотой прямоугольного треугольника $B'CD$, опущенной из вершины прямого угла (C) на гипотенузу ($B'D$) и равен:

$$CF = \frac{CD \cdot B'C}{B'D} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

Теперь из прямоугольного треугольника CEF (“вставки ”) получаем:

$$\sin\varphi = \frac{CE}{CF} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

Задача №2.

В правильной четырехугольной призме ABCDA'B'C'D' со стороной основания $a$ и высотой $H = ka$ определить угол, образованный плоскостями сечений, проходящих соответственно через вершины B',D и середину ребра CC' и через вершины C', A и середину ребра DD'.

Решение:

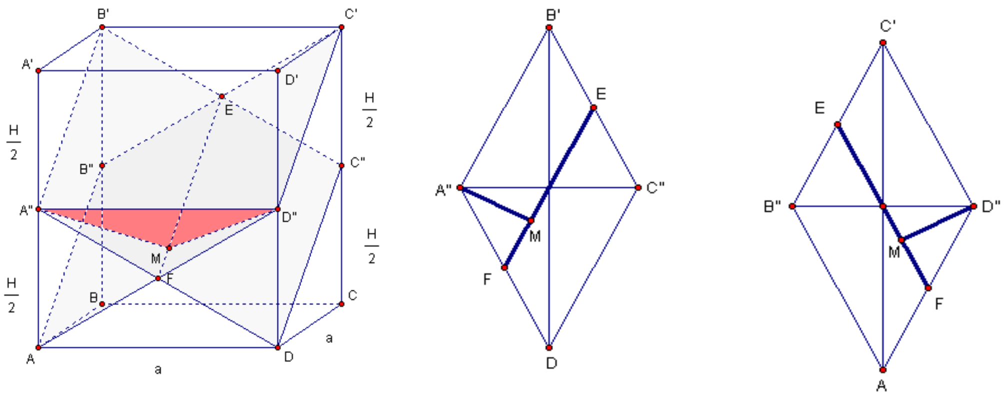
Нетрудно обосновать, что в сечениях - ромбы, половинки которых (см. рисунок) расположены в пространстве одинаково относительно линии пересечения плоскостей FE (фигуры A''B'EF и D''C'EF), в результате чего перпендикуляры A''M и D''M, проведенные в обеих фигурах к их линии пересечения, попадут в одну точку M, причем - внутри, а не снаружи призмы, так как углы B'A''D и C'D''A - тупые (B'D и больше BD=AC=A''C'' и C'A больше AC=BD=B"D"). Далее, найдя диагонали и стороны ромбов, можно найти отрезки A"M и D"M с помощью, например, двух формул для площади ромба

($S=\frac{1}{2}B'D\cdot A''C''$ и $S=2A''B'\cdot A''M$), после чего в $\Delta A''D''M$ применяется теорема косинусов для стороны $A''D''$. В результате получим:

$$\cos\varphi=-\frac{2}{k^2+2}\Rightarrow\varphi=\pi-\arccos\frac{2}{k^2+2}.$$

При k=1 (куб) $\varphi=\pi-\arccos\frac{2}{3}$

При $k\to\infty$ имеем $\varphi\to\pi$ (или $180^0$, то есть развёрнутый угол) и интересно, что если $k\to\infty$ то $\varphi\to\frac{\pi}{2}$, то есть $\varphi\in(\frac{\pi}{2};\pi)$




## 2.4. Задачи на нахождение площади сечения в многогранниках

Задача №1.

Найти площадь фигуры в сечении куба ABCDA'B'C'D' с ребром *a* плоскостью, проходящей через вершину D и точки E и F на ребрах A'D' и C'D' соответственно, если A'E=k*D'E и C'F=k*D'F.

Решение:

В сечении – равнобедренный треугольник DEF

$$h=\frac{\sqrt{2(k+1)^2+1}}{\sqrt{2}\cdot(k+1)}$$

$$S_{сеч}=S_{\Delta DEF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{2}}{k+1}\cdot h=\frac{\sqrt{2(k+1)^2+1}}{2(k+1)^2}\cdot a^2$$

Некоторые возможные варианты:

$k=0 \Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$ (равносторонний $\Delta A'C'D$);

$k=1{,}5 \Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{3a^2\cdot\sqrt{6}}{25}$ ($A'E:D'E=C'F:D'F=1:10$);

$k=0{,}1 \Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{15a^2\cdot\sqrt{38}}{121}$ ($A'E:D'E=C'F:D'F=1:10$);

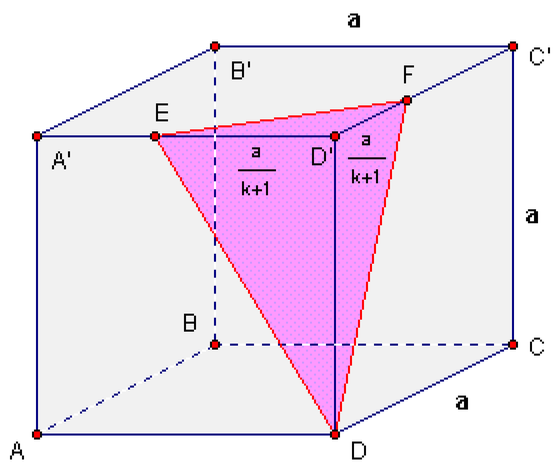
$k=0{,}5 \Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{22}}{9}$ ($A'E:D'E=C'F:D'F=1:2$);

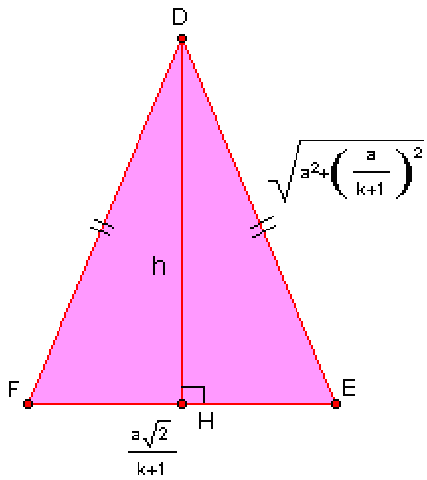
$k=4 \Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{51}}{50}$;

$k=1 \Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{3a^2}{8}$;

$k=3 \Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{33}}{32}$;

$k=2 \Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{19}}{18}$




Задача №2

Найти площадь фигуры в сечении куба ABCDA'B'C'D' с ребром *a* плоскостью, проходящей через вершины C' и D и точку E на ребре A'D', если A'E=k*D'E.

Решение:

В сечении – равнобедренный треугольник $C'DE$

$$h = \frac{a\sqrt{(k+1)^2+2}}{\sqrt{2}\cdot(k+1)};$$

$$S_{сеч} = S_{\Delta C'DE} = \frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot h = \frac{\sqrt{(k+1)^2+2}}{2(k+1)}\cdot a^2$$

Некоторые возможные варианты:

$$k=1 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{a^2\cdot\sqrt{6}}{4}; k=3 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{3a^2\cdot\sqrt{2}}{8};$$

$$k=0{,}75 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{9a^2}{14}$$

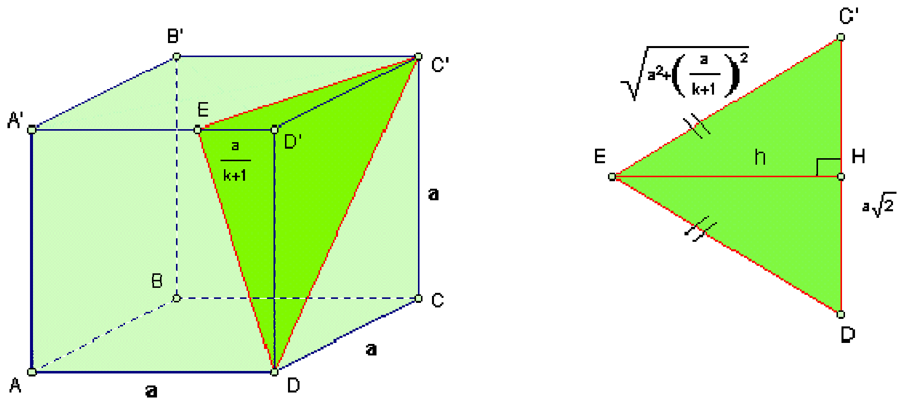
$(A'E : D'E = 3:4)$;

$$k=2 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{a^2\cdot\sqrt{11}}{6};$$

$$k=4 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{10};$$

$$k=0{,}4 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{3a^2\cdot\sqrt{11}}{14};$$

$(A'E : D'E = 2:5)$;



Задача №3.

Найти площадь фигуры в сечении куба ABCDA'B'C'D' с ребром $a$ плоскостью, проходящей через вершину D и точки E и F на ребрах A'D' и C'D' соответственно, если D'E=k*A'E и C'F=k*D'F.

Решение:

В сечении – произвольный треугольник DEF.

Алгоритм нахождения площади треугольника по трем сторонам, выраженным неравными иррациональными числами:

1) для стороны DE по теореме косинусов:

$$DE^2 = EF^2 + DF^2 - 2\cdot EF\cdot DF\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{k+1}\right)^2((k+1)^2+k^2) = \left(\frac{a}{k+1}\right)^2(k^2+1+(k+1)^2+$$

$$+1-\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(k+1)^2+1}\cdot\cos\alpha) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(k+1)^2+1}}$$

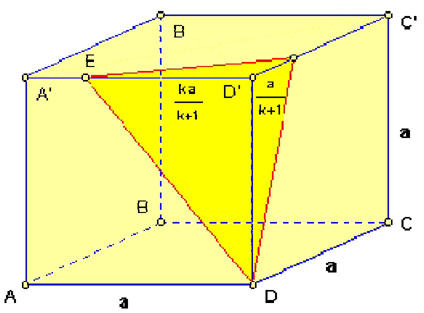
2) $$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{(k+1)^2k^2+(k+1)^2+k^2}}{\sqrt{k^2+1}\cdot\sqrt{(k+1)^2+k+1}}$$

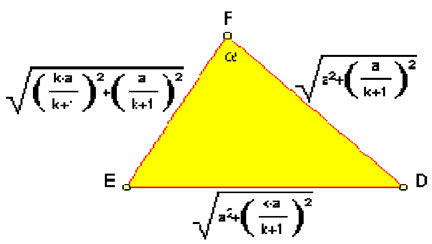
3) $$S_{сеч} = S_{\Delta DEF} = \frac{1}{2}\cdot EF\cdot DF\cdot\sin\alpha = \frac{k^2+k+1}{2(k+1)^2}\cdot a^2$$

Некоторые возможные случаи ($k\neq 0 \quad и \quad k\neq 1$):

$k=2\Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{7a^2}{18}$; $\qquad k=3\Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{13a^2}{32}$;

$k=5\Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{31a^2}{72}$; $\qquad k=1{,}5\Rightarrow S_{сеч}=\dfrac{19a^2}{50}$; (3:2)



Задача №4.

Найти площадь фигуры в сечении куба ABCDA'B'C'D' с ребром $a$ плоскостью, проходящей через вершины A' и C' и точку F на ребре AD, если AF=k*DF.

Решение:

Сначала устанавливается вид фигуры.
$FE // A'C'$ (методом «от противного»), затем, переходя от подобия $\Delta A'D'M$ и $\Delta FDM$ к подобию $\Delta C'D'M$ и $\Delta EDM$, устанавливается, что DF=DE.
Можно не строить точку M, а доказать, что $FE // A'C'$, применением теоремы о двух параллельных плоскостях, пересечённых третьей плоскостью; затем, применив теорему о двух прямых, параллельных третьей ($AC // A'C'$ и $FE // A'C' \Rightarrow FE // AC$), рассмотреть подобие $\Delta AA'F = \Delta CC'E$ (по двум катетам) $\Rightarrow A'F = C'E$.
В сечении – равнобокая трапеция.

$$h = \sqrt{a^2 + \left(\frac{ka}{k+1}\right)^2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{k+1}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2(k+1)^2 + k^2}}{\sqrt{2}(k+1)};$$

$$S_{сеч} = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{k+1}}{2} \cdot h = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)\sqrt{2 + \left(\frac{k}{k+1}\right)^2}$$

Некоторые возможные случаи:

$$k = 1 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{9a^2}{8};$$

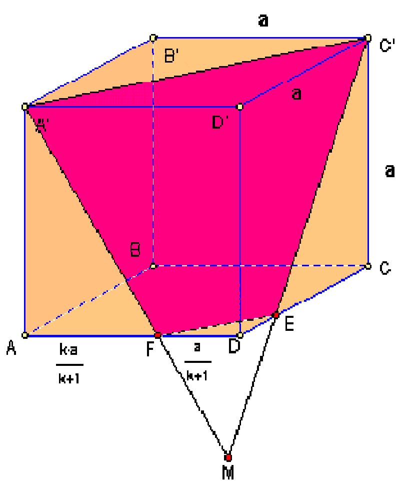
$$k = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{сеч} = \frac{12a^2 \cdot \sqrt{6}}{25};$$

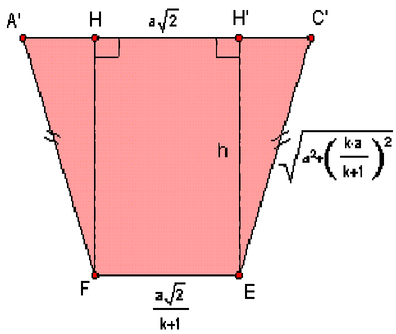
$$k = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{сеч} = \frac{7a^2 \cdot \sqrt{33}}{32};$$

$$k = 2 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{7a^2}{18};$$

$$k = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{сеч} = \frac{5a^2 \cdot \sqrt{19}}{18};$$

$$k = \frac{1}{10} \Rightarrow S_{сеч} = \frac{189a^2\sqrt{3}}{242};$$




Задача №5.

Найти площадь фигуры в сечении правильной четырехугольной пирамиды ABCDM с ребрами $a$ (половинка октаэдра) плоскость, проходящей через сторону основания AD и точку E на боковом ребре MC, если CE=k*ME.

Решение:

Сначала обосновывается, что EF//AD («от противного»)$\Rightarrow \Delta MEF$ - равносторонний $\Rightarrow EF = \dfrac{a}{k+1}$;

Затем DE находится из $\Delta CDE$ по теореме косинусов (и аналогично - AF).

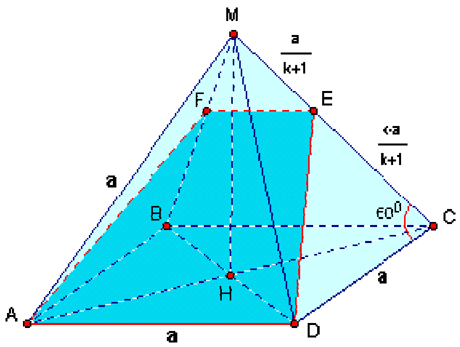
В сечении – равнобокая трапеция.

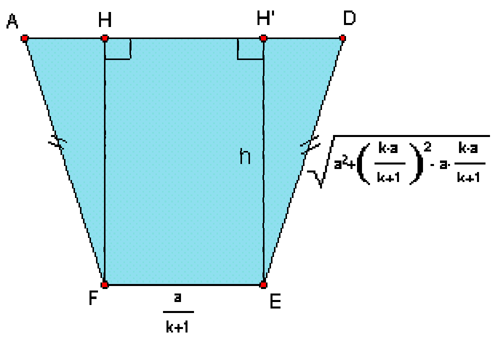
$$S_{сеч} = S_{\Delta AFED} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{k+2}{(k+1)^2} \cdot \sqrt{(k+2)^2 + 2k^2}$$

Некоторые возможные случаи:

$k = 1 \Rightarrow S_{сеч} = \dfrac{3a^2\sqrt{11}}{16}$; $\qquad k = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S_{сеч} = \dfrac{5a^2 \cdot \sqrt{3}}{12}$

$k = 2 \Rightarrow S_{сеч} = \dfrac{2a^2\sqrt{6}}{9}$; $\qquad k = 4 \Rightarrow S_{сеч} = \dfrac{3a^2 \cdot \sqrt{17}}{25}$



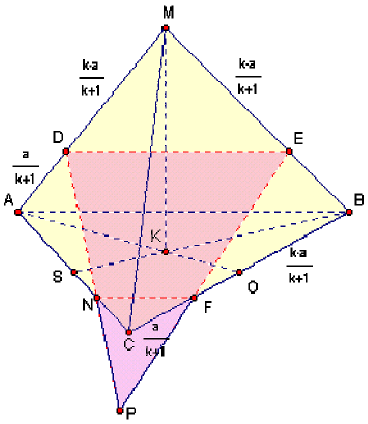
Задача №6.

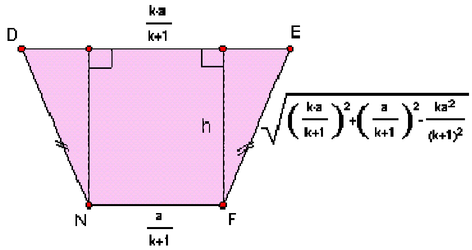
Найти площадь фигуры в сечении правильного тетраэдра АВСМ с ребром $a$ плоскостью, проходящей через точки D,E и F на ребрах МА, МВ и ВС соответственно, если MD:AD=ME:BE=BF:CF=k.

Решение:

В сечении – равнобедренная трапеция.

$$S_{сеч} = S_{\Delta DEFN} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3 - \frac{8k}{(k+1)^2}}$$




Некоторые возможные варианты:

$\left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow S_{сеч} = \frac{a^2\sqrt{11}}{12}$; $\left[\begin{array}{l} k=3 \\ k=\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow S_{сеч} = \frac{a^2\sqrt{6}}{8}$;

$\left[\begin{array}{l} k=\frac{5}{3} \\ k=\frac{3}{5} \end{array}\right. \Rightarrow S_{сеч} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{16}$;

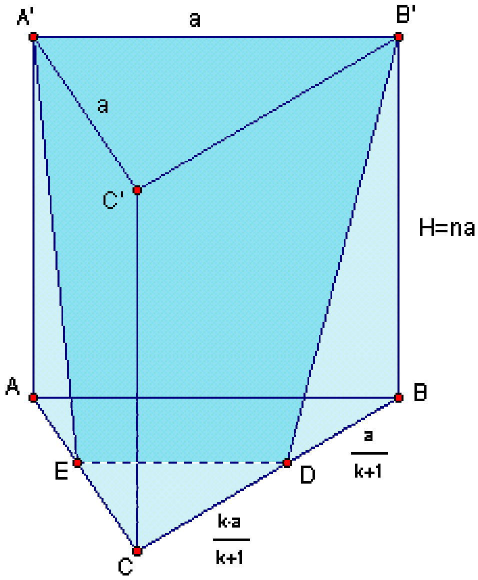
$\left[\begin{array}{l} k=5 \\ k=\frac{1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow S_{сеч} = \frac{a^2\sqrt{17}}{12}$; $\left[\begin{array}{l} k=\frac{3}{2} \\ k=\frac{2}{3} \end{array}\right. \Rightarrow S_{сеч} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{20}$;

$k=1 \Rightarrow S_{сеч} = \frac{a^2}{4}$ (квадрат).

Задача №7

Найти площадь фигуры в сечении правильной треугольной призмы АВСА'В'С' плоскостью, проходящей через сторону основания А'В' и точку D на стороне ВС другого основания, если CD=k*BD, сторона основания призмы равна $a$ и высота H=n$\cdot a$.

Решение:




В сечении – равнобокая трапеция.

$$S_{сеч} = \frac{a^2}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)$$

Для выбора вариантов удобно назначать: $n=\frac{H}{a}=\frac{6}{k+1}\Rightarrow$

$$S_{сеч} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right)$$

## 2.5. Задачи на нахождение расстояния и угла между скрещивающимися прямыми в многограннике

Для нахождения расстояния между скрешивающимися прямыми можно воспользоваться четырьмя основными способами:

1) Нахождение длины общего перпендикуляра двух скрешивающихся прямых, то есть отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного обеим.

2) Нахождение расстояния от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости, проходящей через другую прямую.

3) Нахождение расстояния между двумя параллельными плоскостями, проходящими через заданные скрещивающиеся прямые.

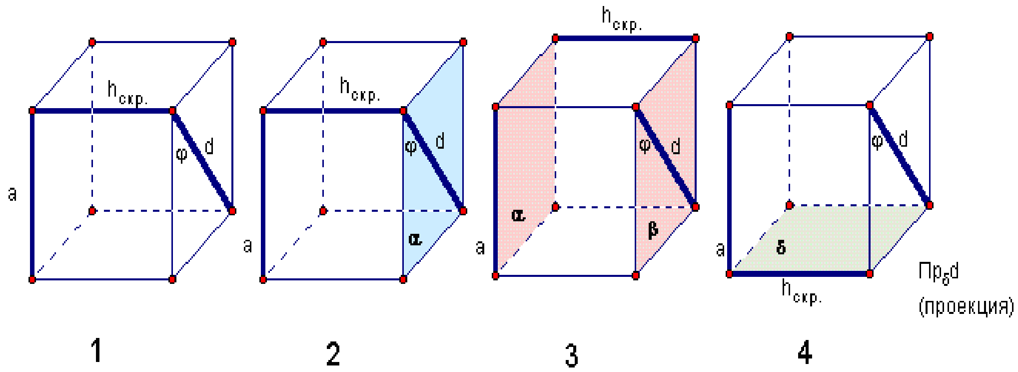
4) Нахождение расстояния от точки, - являющейся проекцией одной из скрещивающихся прямых на перпендикулярную ей плоскость, - до проекции другой прямой на ту же самую плоскость.

Задача №1

В кубе с ребром $a$ найти расстояние и угол между любым ребром и диагональю не пересекающей его грани.

Решение:

$a \div d$ $\qquad h_{скр.} = a; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$




Задача №2

В кубе ABCDA'B'C'D' с ребром $a$ найти расстояние и угол между прямыми AC и B'F при F принадлежащей DD' и DF=k*D'F.

Решение:

В данной задаче для выбора способа решения определяющим является перпендикулярность прямой AC диагональной плоскости BB'D'D (т.к. AC перпендикулярна BD и AC перпендикулярна BB'), которой принадлежит другая прямая B'F, т.е. секущая плоскость BB'D'D удобна для выбора ее в качестве плоскости проекции. А далее следует несложная вычислительная часть:

1) Из подобия треугольника DFT и треугольника D'FB' находим DT = kd; 2) Из подобия треугольника NOT и треугольника BB'T находим ON:

$$\frac{h_{скр}}{a} = \frac{kd + \frac{d}{2}}{\sqrt{a^2 + (kd + d)^2}} \Rightarrow h_{скр} = a\frac{2k+1}{\sqrt{4(k+1)^2 + 2}}$$

3) $\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (AC \perp B'F)$

Некоторые возможные варианты:

$k=0$ (точка F совпадает с точкой D; B'D – главная диагональ куба) $\Rightarrow h_{скр}=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

$k=1 \quad (DF=D'F)\Rightarrow h_{скр}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

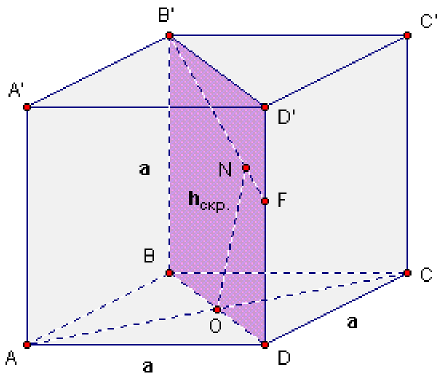
$k=0{,}5 \quad (1:2)\Rightarrow h_{скр}=\dfrac{2a\sqrt{11}}{11}$

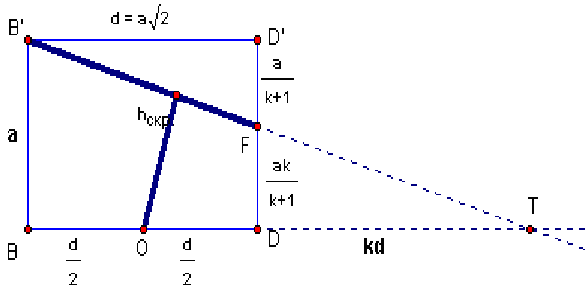
$k=6 \quad h_{скр}=\dfrac{13a\sqrt{22}}{66}$

$k=1{,}5 \quad (3:2)\Rightarrow h_{скр}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$k=1{,}9 \quad (19:10)\Rightarrow h_{скр}=\dfrac{8a\sqrt{11}}{33}$

$k=10 \quad \Rightarrow h_{скр}=\dfrac{7a\sqrt{6}}{18}$




Задача №3

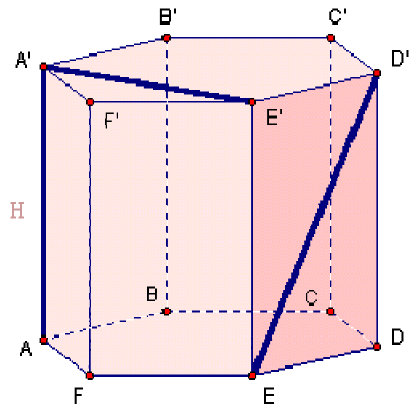
В правильной шестиугольной призме ABCDEFA'B'C'D'E'F' с высотой "H" и стороной основания $a$. Найти расстояние и угол между прямыми: 1).AA' и D'E; 2). AF и BE'.

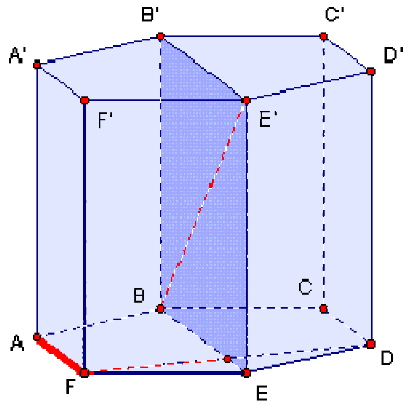
Решение:

Данная задача представлена здесь для демонстрации применения второго способа (построение перпендикуляра от первой прямой к параллельной плоскости, содержащей вторую прямую) к простейшим ситуациям расположения скрещивающихся прямых в таком непростом многограннике, каким является правильная шестиугольная призма.

1) $h_{скр}=a\sqrt{3}; \quad \varphi = arctg\,\dfrac{a}{H}$

2) $h_{скр}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \quad \varphi = arctg\,\dfrac{H}{2a}$




## 2.6. Задачи на нахождение отношения объемов частей многогранника

Задача №1.

Найти отношение объемов частей куба ABCDA'B'C'D' с ребром $a$, полученных разбиением его сечением плоскостью, проходящей через вершину D и точки E и F на ребрах A'D' и C'D' соответственно, если A'E=k*D'E и C'F=k*D'F.

Решение:

$$V_1 = V_{D'EFD} = \frac{1}{3} \cdot S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{k+1}\right)^2 \cdot a = \frac{a^3}{6(k+1)^2};$$

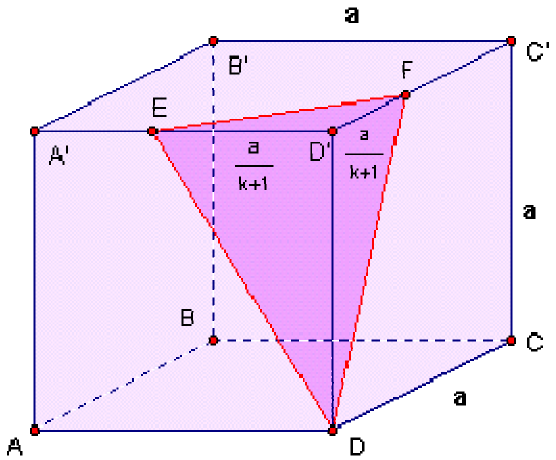
(пирамида)

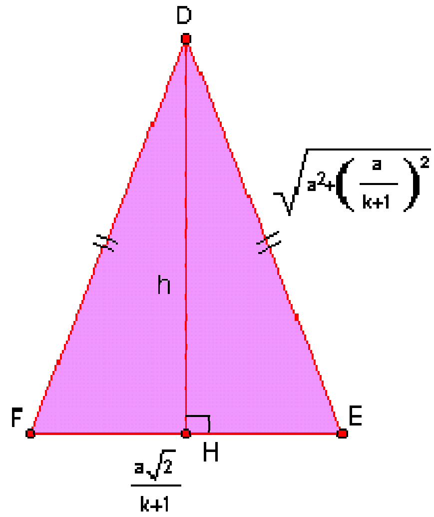
$$V_1 = V_{куба} V_1 = a^3 \cdot \frac{a^3}{6(k+1)^2} = \frac{a^3 \cdot 6(k+1)^2 - 1}{6(k+1)^2}$$

(оставшаяся часть)

$$V_1 : V_2 = 1 : \left(6(k+1)^2 - 1\right);$$

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad V_1 : V_2 = 1:5; \qquad k = 1 \Rightarrow V_1 : V_2 = 1:23;$$



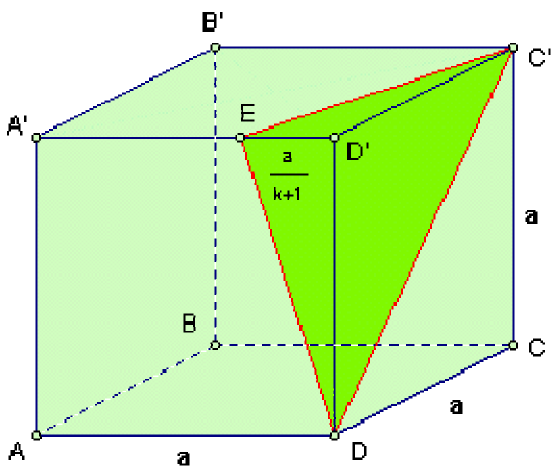



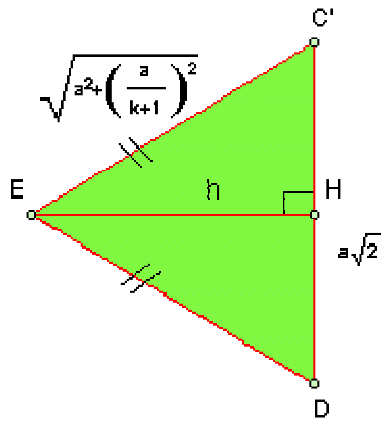

Задача №2.

Найти отношение объемов частей куба ABCDA'B'C'D' с ребром *a* полученных разбиением его сечением плоскостью, проходящей через вершины C' и D и точку E на ребре A'D', если A'E=k*D'E.

Решение:

$V_1 : V_2 = 1 : (6k+5);$



## 3. Построение правильных многогранников

Рассмотрим построение всех правильных многогранников и описание всех поворотов, при которых многогранник совмещается со своим первоначальным положением.

Напомним основные понятия.

Правильный $n$-угольник на плоскости- $n$-угольник, у которого равны все стороны и все углы- существует для любого $n$ : если указать на плоскости точку О (центр) и $A_1$ (одну из вершин), то поворотами на углы кратные 180є/ $n$ вокруг точки О из $A_1$ получатся все остальные вершины $A_2,\ldots,A_n$ правильного $n$-угольника с центром О.

Но в пространстве существует лишь конечное число различных правильных многогранников.

Пять платоновых тел. Многогранник называется правильным, если его грани- одинаковые правильные многоугольники и двугранные углы при всех ребрах равны. Из определения следует, что правильный многогранник «совершенно симметричен»: если отметит какую-то грань Г и одну из ее вершин А , то для любой другой грани Г′ и ее вершины А′ можно совместить многогранник с самим собой движением в пространстве так, что грань Г совместится с Г′ и при этом вершина А попадет в точку А′.

Таблица. Пять «платоновых тел»; здесь $n$ - число сторон у грани, $k$ - число ребер, примыкающих к вершине; В, Г, Р- общее число вершин, граней и ребер соответственно.

| | $n$ | $K$ | В | Г | Р |
|---|---|---|---|---|---|
| Тетраэдр | 3 | 3 | 4 | 4 | 6 |
| Куб | 4 | 3 | 8 | 6 | 12 |
| Октаэдр | 3 | 4 | 6 | 8 | 12 |
| Додекаэдр | 5 | 3 | 20 | 12 | 30 |
| Икосаэдр | 3 | 5 | 12 | 20 | 30 |

Со времен Платона и Евклида хорошо известно, сто существует ровно пять типов правильных многогранников (см.таблицу). докажем этот факт.

Пусть все грани некоторого многогранника - правильные $n$-угольники и $k$-число граней, примыкающих к вершине (оно одинаково для всех вершин). Рассмотрим вершину А нашего многогранника. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_k$ - концы $k$ выходящих из нее ребер; поскольку двугранные углы при этих ребрах равны, $AM_1M_2 \ldots M_k$ - правильная пирамида: при повороте на угол 360є/ $k$ вокруг высоты AH вершины $M_1$ переходит в $M_2$, вершина $M_2$-$M_3, \ldots, M_k$- в $M_1$ (рис.1).

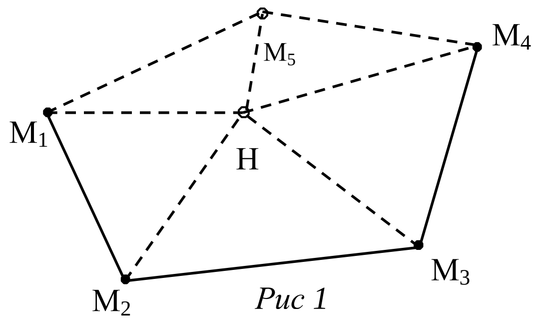


*Рис 1*

Сравним равнобедренные треугольники $AM_1M_2$ и $HM_1M_2$. У них основание общее, а боковая сторона $AM_1$ больше $HM_1$, поэтому $\angle M_1AM_2 < \angle M_1HM_2$=360є/ $k$. Но $\angle M_1AM_2$- это угол правильного $n$-угольника на плоскости, т.е. 180є($n$-2)/ $n$. Итак, 180є $k$($n$-2)/ $n$<360є, $k$ ($n$-2)<2$n$, $k < \frac{2n}{n-2}$.

Из этого неравенства (и того факта, что $k \geq 3$) нетрудно вывести, что для чисел $n$ и $k$ возможны лишь случаи, указанные в таблице. Все соответствующие многогранники можно построить, взяв за основу куб.

Чтобы получить правильный тетраэдр ,достаточно взять четыре несмежные вершины куба и отрезать от него пирамидки четырьмя плоскостями ,каждая из которых через три из взятых вершин (рис.2).

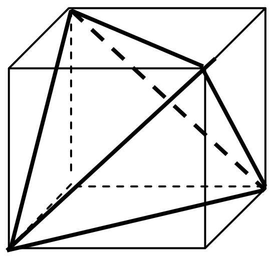


*Рис.2*

Такой тетраэдр можно вписать в куб двумя способами. Пересечение двух таких правильных тетраэдров –это как раз правильный октаэдр: многогранник из восьми треугольников с вершинами, расположенными в центрах граней куба. Остаётся построить два наиболее сложных правильных многогранника: додекаэдр – двенадцатигранник из правильных пятиугольников – и икосаэдр – двадцатигранник из правильных треугольников. Но прежде чем обратится к построению, мы сделаем отступление.

Это отступление – подготовка к построению додекаэдра. Мы напомним, как построить на плоскости правильный пятиугольник. Достаточно построить треугольник с углами 36є, 72є и 72є- описав вокруг такого треугольника ACD окружность (рис.3),мы легко найдём две другие вершины B и E правильного пятиугольника. Пусть AC=AD=1.Сторону CD нетрудно найти, заметив, что биссектриса CL делит треугольник на два равнобедренных, один из которых – CLD- подобен треугольнику ACE:

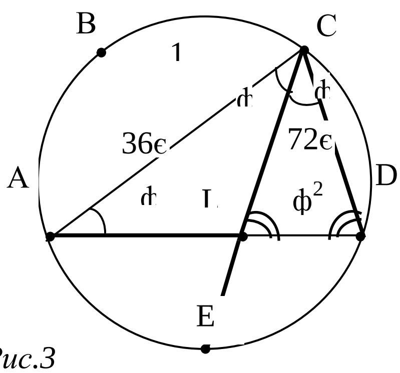


*Рис.3*

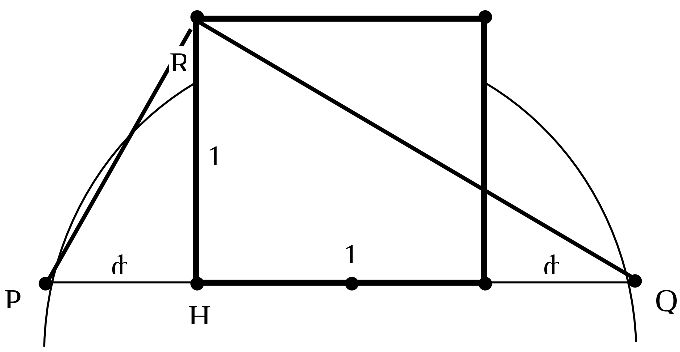


*Рис.4*

1-ф =ф$^2$, откуда ф=($\sqrt{5}$ -1)/2 (это число называют «золотым сечением», и греческая буква «тау» часто используется для его обозначения). На рис. 4 изображен удобный для запоминания способ построения ф: если вписать квадрат со стороной 1 в полукруг, то отрезки диаметра, лежащие вне квадрата, будут как раз равны ф (PH·HQ=RH$^2$, т.е. ф(1+ ф)=1).

Вернемся к построению правильных многогранников.

### 3.1. Построение додекаэдра

Возьмем за основу куб с единичным ребром. На каждой его грани построим четырехскатную крышу из двух треугольников и двух трапеций,

полученных разрезанием по диагонали двух правильных пятиугольников со стороной ф (диагональ такого пятиугольника как раз равна 1), см. рисунки 5-6.

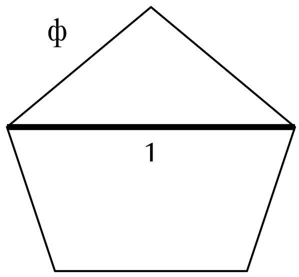



*Рис.5*

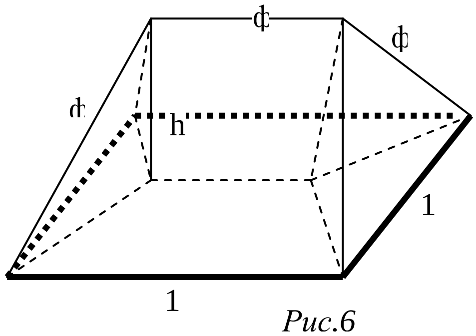



*Рис.6*

Если нам удастся расположить крыши на всех гранях так, чтобы треугольник и трапеция, примыкающие к каждому ребру куба, составляли

вместе плоский пятиугольник, то мы построим правильный додекаэдр (рис.7).

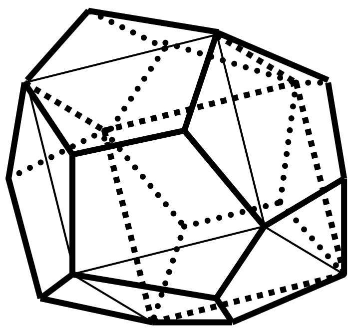


*Рис.7*

Подсчитаем высоту *h* такой крыши (рис.6.). Пусть *x* –длина проекции наклонного ребра ф на грань куба. Пользуясь теоремой Пифагора, получим: $x^2 = \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, x^2 + h^2 = \tau^2,$ откуда найдем (ввиду того, что ф$^2$=1- ф): *h*= ф/2. с другой стороны, чтобы треугольный скат крыши и трапеция, примыкающая к тому же ребру, лежали в одной плоскости, нужно, чтобы углы наклона треугольника и трапеции к грани в сумме составляли 90є, т.е. чтобы были подобны прямоугольные треугольники с катетами *h*, (1- ф)/2 и 1/2, *h*; для этого требуется выполнение равенства *h*$^2$=(1- ф)/4= ф$^2$/4, которое приводит нас к тому же значению *h*.

Конечно, совпадение двух формул, из которого следует возможность построения правильного додекаэдра, при таком способе построения выглядит как подарок судьбы. Но можно доказать существование додекаэдра, пользуясь только соображениями симметрии.

Ясно, что из трех правильных пятиугольников можно единственным образом составить трехгранный угол, у которого все двугранные углы равны( этот двугранный угол б – угол между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды со стороной основания 1 и боковым ребром ф). Начав с правильного пятиугольника 1, мы можем приклеить к его сторонам пять пятиугольников 2,3,4,5,6, образующих с ним нужный угол,- каждые два соседних пятиугольника (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,2) будут иметь общее ребро и образуют между собой такой же двугранный угол б. К ним можно поэтому приклеить следующий ряд таких же пятиугольников 7,8,9,10,11- пары соседних пятиугольников тоже будут иметь ребро и составлять двугранный угол б. Поэтому свободные стороны пятиугольников 7-11 образуют правильный пятиугольник, равный предыдущим, и образующий с каждым предыдущим двугранный угол б.

### 3.2. Самосовмещения многогранников

Какие самосовмещения (вращения переводящие в себя) есть у куба, тетраэдра и октаэдра? Заметим, что некоторая точка- центр многогранника- при любом самосовмещении переходит в себя, так что все самосовмещения имеют общую неподвижную точку.

Посмотри, какие вообще в пространстве бывают вращения с неподвижной точкой А. Покажем, что такое вращение обязательно является поворотом на некоторый угол вокруг некоторой прямой, проходящей через точку А. Достаточно у нашего движения F (с F(A)=A) указать неподвижную прямую. Найти её можно так: рассмотрим три точки $M_1$,$M_2$= F($M_1$) и $M_3$= F($M_2$), отличные от неподвижной точки А, проведем через них плоскость и опустим на неё перпендикуляр АН (рис.8) - это и будет искомая прямая. (Если $M_3$=$M_1$, то наша прямая проходит через середину отрезка $M_1M_2$, а F- осевая симметрия: поворот на угол 180є.)

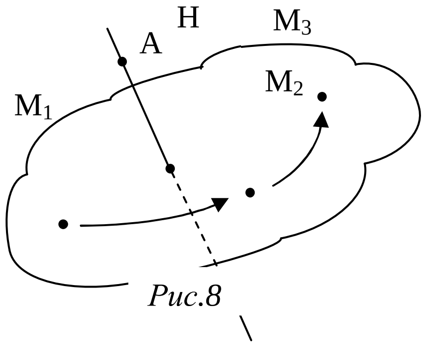



*Рис.8*

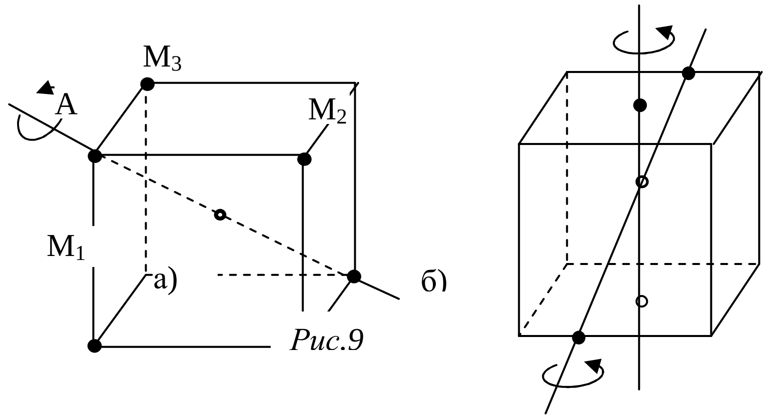



*Рис.9*

Итак, самосовмещение многогранника обязательно является поворотом вокруг оси, проходящей через центр многогранника. Эта ось пересекает наш многогранник в вершине или во внутренней точке ребра или грани. Следовательно, наше самосовмещение переводит в себя вершину, ребро или грань, значит, оно переводит в себя вершину, середину ребра или центр грани. Вывод: движение куба, тетраэдра или октаэдра, совмещающее его с собой, есть вращение вокруг оси одного из трех типов: центр многогранника – вершина, центр многогранника – середина ребра, центр многогранника - центр грани.

Проверим этот вывод для куба. У куба есть ось первого типа – это большая диагональ. Пусть $AM_1$, $AM_2$,$AM_3$- ребра, выходящие из вершины A куба, AB – его диагональ (рис.9,а). Рассмотрим поворот R, переводящий точки A,$M_1$, $M_2$, соответственно в A, $M_2$, $M_3$. При этом повороте куб совмещается сам с собой, причем вершина B остается на месте, так что ось поворота – диагональ AB. Повторим этот поворот R трижды; при этом $M_1$ перейдет в $M_2$ , затем в $M_3$ и вновь в $M_1$ – куб повернется на $360^0$ и совместится с первоначальным положением. Поэтому F – поворот вокруг оси AB на угол $120^0$.

Вообще, если многогранник совмещается с самим собой при повороте вокруг прямой на угол $360^0/\ m$ , то эту прямую называют *осью симметрии m-го порядка*. Для куба ось первого типа – ось симметрии 3-го порядка, ось второго типа – ось симметрии 4-го порядка (рис.9,б). Сколько всего имеется разных самосовмещений куба? Вокруг каждой оси 3-го порядка есть два разных нетождественных поворота: на угол $120^0$ и на угол $240^0$; а осей таких 4 – всего 8 движений. Осей 2-го порядка – 6, вокруг каждой – один поворот - ещё 6 движений. Осей 4-го порядка – 3, вокруг каждой 3 поворота (на углы $90^0$, $180^0$, $270^0$) – ещё 9 движений. Итого 8+6+9=23 нетождественных движения. Пар «грань – её вершина» у куба 24 (6 граней Ч 4 вершины) и любую пару можно перевести движением в любую из 23 оставшихся - на это и требуется 23 разных движения.

В случае тетраэдра оси первого и третьего типов совпадают: ось, проведенная через центр тетраэдра и его вершину, проходит и через центр противоположной грани. Эти оси имеют третий порядок; всего есть 4 таких оси. Оси второго типа – прямые, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра; таких осей три, и они имеют 2-й порядок. Таким образом, тетраэдр совмещается с собой 4*2+3*1=11 различными превращениями, и это согласуется с тем, что у тетраэдра 4*3=12 пар «грань – её вершина».

### 3.3. Движения и симметрия

Рассматривая самосовмещение многогранников, можно включить в их число не только вращения, но и любые движения, переводящие многогранники в себя. Здесь движение – это любое преобразование пространства, сохраняющие попарные расстояния между точками.

В число движений, кроме вращения, нужно включить и зеркальные движения. Среди них – симметрия относительно плоскости (*отражение*), а также композиция отражения относительно плоскости и поворота вокруг перпендикулярной ей прямой (это – общий вид зеркального движеия, имеющего неподвижную точку). Конечно, такие движения нельзя реализовывать непрерывным перемещением многогранника в пространстве (как нельзя совместить левый ботинок с его зеркальным отражением – правым ботинком).

Все правильные многогранники имеют плоскости симметрии (тетраэдра их – 6, у куба и октаэдра – по 9, у икосаэдра и додекаэдра – по 15). А общее число зеркальных самосовмещений у них оказывается точно таким же, как и число настоящих (собственных) самосовмещений – поворотов (включая тождественное).

Таким образом, мы приходим к окончательному выводу:
угол поворота многогранника при его перекатывании вдоль замкнутого контура равен сумме кривизне его вершин, лежащих внутри этого контура.

## 4. Это интересно знать

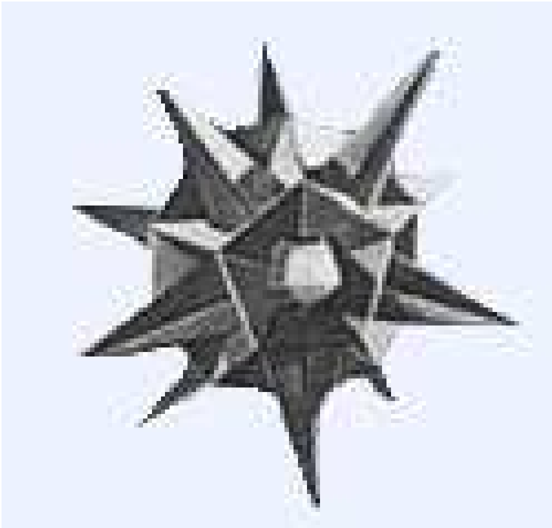
### 4.1. Мир звездчатых многогранников

Мир наш исполнен симметрии. С древнейших времен с ней связаны наши представления о красоте. Наверное, этим объясняется непреходящий интерес человека к удивительным символам симметрии, привлекавшим внимание множества выдающихся мыслителей, от Платона и Евклида до Эйлера и Коши.

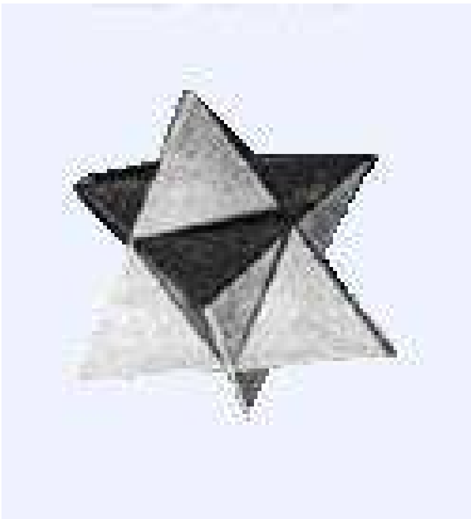
Впрочем, многогранники отнюдь не только объект научных исследований. Их формы – завершенные и причудливые, широко используются в декоративном искусстве.

Звездчатые многогранники очень декоративны, что позволяет широко применять их в ювелирной промышленности при изготовлении всевозможных украшений. Применяются они и в архитектуре.

Многие формы звездчатых многогранников подсказывает сама природа. Снежинки - это звездчатые многогранники. С древности люди пытались описать все возможные типы снежинок, составляли специальные атласы. Сейчас известно несколько тысяч различных типов снежинок.



**Звездчатый октаэдр**



Он был открыт Леонардо Да Винчи, затем спустя почти 100 лет переоткрыт И.Кеплером, и назван им "Stella octangula" – звезда восьмиугольная. Отсюда октаэдр имеет и второе название "stella octangula Кеплера".

У октаэдра есть только одна звездчатая форма. Её можно рассматривать как соединение двух тетраэдров.

**Звездчатый додекаэдр**

Большой звездчатый додекаэдр был впервые описан И. Кеплером в 1619 г. Это последняя звездчатая форма правильного додекаэдра.

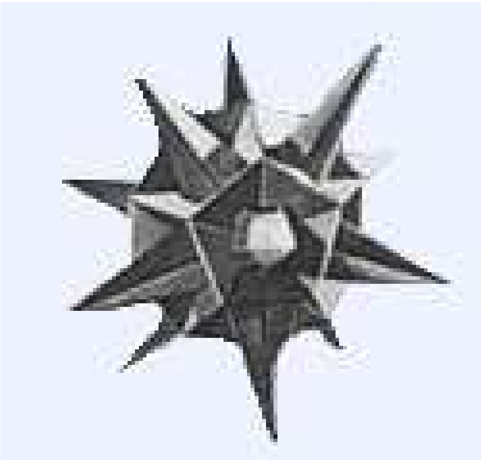
Большой звездчатый додекаэдр принадлежит к семейству тел Кеплера-Пуансо, то есть правильных невыпуклых многогранников. Грани большого звездчатого додекаэдра – пентаграммы, как и у малого звездчатого додекаэдра. У каждой вершины соединяются три грани. Вершины большого звездчатого додекаэдра совпадают с вершинами описанного додекаэдра.

**Звездчатый икосаэдр**

Икосаэдр имеет двадцать граней. Если каждую из них продолжить неограниченно, то тело будет окружено великим многообразием отсеков – частей пространства, ограниченных плоскостями граней. Все звездчатые формы икосаэдра можно получить добавлением к исходному телу таких отсеков.

Не считая самого икосаэдра, продолжения его граней отделяют от пространства 20+30+60+20+60+120+ 12+30+60+60 отсеков десяти различных форм и размеров. Большой икосаэдр (см. рис) состоит из всех этих кусков, за исключением последних шестидесяти.

Среди звездчатых форм икосаэдра встречаются некоторые соединения платоновых тел. Среди них: соединения пяти октаэдров, энентиоморфные формы соединения пяти тетраэдров и соединения десяти тетраэдров. Если бы Платон смог видеть эти формы, они привели бы его в восхищение. После того как были открыты эти и ряд других многогранников, ученые, естественно, задумались над вопросом: сколько существует звездчатых форм икосаэдра? В 1900 году Брюкнер опубликовал классическую работу о многогранниках, озаглавленную "Vielecke und Vielflache", в которой были представлены некоторые новые звездчатые формы икосаэдра. Открытием еще несколько форм мы обязаны Уиллеру(1924). В 1938 году систематическое и полное исследование вопроса провел Кокстер совместно с Дювалем, Флэзером, Петри.



**Звездчатый кубооктаэдр**

Кубооктаэдр – полуправильный многогранник. Он строится так: в кубе проводятся отсекающие плоскости через середину ребер, выходящих из одной вершины. В результате получится полуправильный многогранник - кубооктаэдр. Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название.

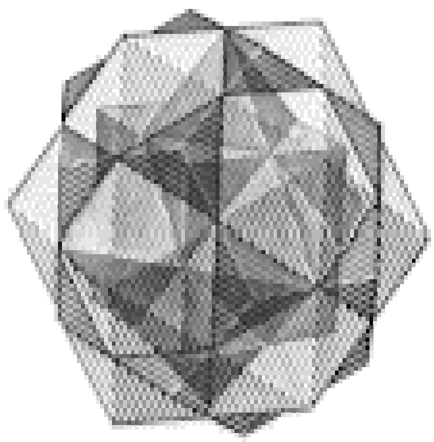
Полуправильные многогранники называются также телами Архимеда. Кубооктаэдров также несколько видов, мы приведем некоторые: Третья звёздчатая форма кубооктаэдра.

Этот многогранник весьма интересен по двум причинам. Во-первых, на его модели ясно заметно расположение квадратных граней: они группируются в пары таким образом, что грани каждой из них параллельны между собой и перпендикулярны к остальным подобным граням. Во-вторых, многогранник представляет собой своего рода соединение шести четырёхугольных пирамид, основаниями которых служат описанные выше квадраты, а боковые треугольные грани "вдавлены" в тело и касаются своими вершинами средних точек противоположных углублений.

Завершающая звёздчатая форма кубооктаэдра.

Итоговая звёздчатая форма кубооктаэдра особенно привлекает тем, что она является соединением двух тетраэдров, Кеплеровой *stella octangula*, итоговой звёздчатой формы октаэдра и трёх правильных четырёхугольных призм, общим пересечением которых является исходный куб. Каждое основание этих призм представляет собой глубокую впадину, образованную четырьмя рёбрами.

**Звездчатый икосододекаэдр**



Икосододекаэдр имеет 32 грани, из которых 12 являются правильными пятиугольными гранями, а остальные 20 – правильные треугольники.

Казалось бы, столь большое число граней потребует сложнейших исследований. Что касается вопроса о том, могут ли получившиеся многогранники оказаться правильными, то на него давно получен ответ.

Великий математик Коши ещё в 1811 году доказал, что список правильных многогранников исчерпывается пятью платоновыми телами вкупе с четырьмя многогранниками Кеплера - Пуансо.

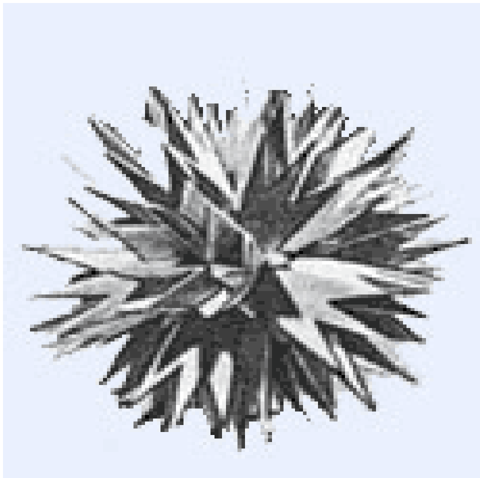
Первая звёздчатая форма икосододекаэдра. Этот многогранник являет собой пример соединения двух платоновых тел – додекаэдра и икосаэдра; его можно так же рассматривать как первую звёздчатую форму икосододекаэдра. С него начинается так называемая "основная линия" звёздчатых форм икосододекаэдра, к которой относятся многогранники, полученные добавлением к исходному телу отсеков, полностью покрывающих его поверхность. Поэтому 12 невысоких пятиугольных пирамид и 20 маленьких треугольных пирамид закрывают внутренний икосододекаэдр.

Девятая звёздчатая форма икосододекаэдра. Многогранник представляет собой соединение 10 тетраэдров, на котором "тень" большого додекаэдра оставила следы в виде отверстий на дне впадин; из-за этого нутро многогранника становится видимым и доступным. Розетки, о которых мы говорили выше, точно соответствуют размерам отверстий, но модель хороша и без них.

**Завершающая звёздчатая форма икосододекаэдра**.

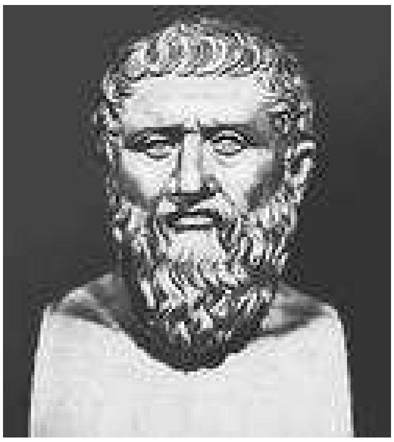
Завершающие звёздчатые формы любых многогранников всегда вызывают особый интерес. Перед нами завершающая форма икосододекаэдра. Не правда ли, чем-то она напоминает вспышку фейерверка, когда из одной точки в разных направлениях разлетаются огненные звёзды и путь их ясно виден на фоне ночного неба. Но никакой фейерверк не сможет передать удивительной упорядоченности и математической точности этого многогранника, лучи которого чётко группируются в 12 заметных "короноидальных" групп. Вы без труда обнаружите в нём завершающие звёздчатые формы додекаэдра и икосаэдра. Большой звёздчатый додекаэдр лишь слегка выступает из тела многогранника маленькими трёхгранными отсеками, похожими на кустики травы у подножия гигантского дуба.

А пятёрки вершинных пиков завершающего звёздчатого икосаэдра образуют основу каждой "короны". Но промежутки между этими пиками заполнены другими - тонкими и длинными, а всё соединение из пиков и составляет целую "корону".



**4.2. О Платоне**

(настоящее имя Аристокл)



Днем рождения Платона, которого еще при жизни за мудрость называли “божественным”, по преданию считается 7 таргелион (21 мая), праздничный день, в который, согласно древнегреческой мифологии, родился бог Аполлон. Год рождения в различных источниках указывается

429 - 427 до н.э.

Платон родился в Афинах в самый разгар беспощадных Пелопонесских войн, предшествовавших распаду Греции. Семья его была знатной, старинной, царского происхождения, с прочными аристократическими традициями.

Платон получил всестороннее воспитание, которое соответствовало представлениям классической античности о совершенном, идеальном человеке, соединяющем в себе физическую красоту безупречного тела и внутреннее, нравственное благородство.

Юноша занимался живописью, сочинял трагедии, изящные эпиграммы, комедии, участвовал в качестве борца в Истмийских греческих играх и даже получил там награду. Он отдавался жизни без излишеств, но и без суровости, окруженный молодыми людьми своего класса, любимый многочисленными своими друзьями.

Но этой безмятежной жизни неожиданно наступает конец. В 408 году Платон встречает в Афинах Сократа, мудреца и философа, беседовавшего с молодыми людьми в садах Академии. С этой минуты для Платона начался новый период его жизни. Платон обрёл в лице Сократа учителя, которому оставался верен всю жизнь и которого прославил в своих сочинениях, став поэтическим летописцем его жизни. Через восемь лет после того, как Платон стал учеником Сократа, последний был приговорен к смерти; оставшись без учителя, Платон отправился в странствие, продлившееся 12 лет. Затем Платон отправился в Южную Италию, чтобы познакомиться с пифагорейцами.

Вернувшись в Афины в 387 году, Платон основал философскую школу - Академию. По примеру Пифагорейской школы, занятия в Академии были двух типов: более общие, для широкого круга слушателей, и специальные, для узкого круга посвященных. Большое внимание уделялось математике и, в частности, геометрии, как науке о самых прекрасных мысленных фигурах, а также астрономии. Прямым учеником Платона был великий Аристотель.

Умер Платон в 347 году, по преданию в день своего рождения. Погребение свершили в Академии, роднее для него не было места. В течение всей жизни душу Платона волновали высокие нравственные цели, одной из которых был идеал возрождения Греции. Платон является первым в Европе философом, заложившим основы объективного идеализма и разработавшим его в целостном виде.

Мир Платона - это прекрасный, материальный космос, собравший множество единичностей в одно нераздельное целое, управляемый законами, находящимися вне его. Это самые общие закономерности, составляющие особый надкосмический мир называемый Платоном миром идей. Идеи определяют жизнь материального мира, это прекрасные вечные образцы, по которым строится множественность вещей, образованных из бесконечной материи. Самая высшая идея - это высшее благо, тождественное абсолютной красоте, это и есть по Платону начало всех начал, отец, умелый мастер, создающий видимый небесный и человеческий земной мир по самым мудрым, прекрасным законам.

Но однажды созданный физический мир подвержен тлению, деформации и старению. Так давайте же, говорит Платон, созерцать в мыслях этот великолепный, добрый и прекрасный мир идей и хотя бы умственно, шаг за шагом, представим себе лестницу духовного совершенства человека, которая приведет к познанию высшей идеи.

## Литература


1. В.В.Прасолов, И.Ф.Шарыгин "Задачи по стереометрии", МОСКВА "Наука", 1989г
2. А.Матросов, А.Сергеев,М.Чаунин, "HTML 4.0",Санкт-Петербург "БХВ-Петербург 2003г
3. Л.Е.Силаев "Универсальность метода сечений в стереометрии" 1990 - 1997 гг.
4. В.Н. Литвиненко "Решение типовых задач по геометрии" 10 - 11 Москва "Просвещение" 1999
5. Афонина С.И., Яркулов Р., Юнусметов Р. «Правильные многогранники» (методическое пособие), Т. 2003г.
6. Малый энциклопедический словарь Брокгауза и Ефрона

**Содержание**

Методическое пособие обсуждено и рекомендовано к печати ученым Советом ТГПУ им.Низами
«30 » ноября 2006 года