

**Н. Уразов, З.Х. Сиддиқов.**

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**ФАРҒОНА ПОЛИТЕХНИКА ИНСТИТУТИ**

**«Олий математика» кафедраси**

**АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА**

**ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА ИНТЕГРАЛ  
ТЕНГЛАМАЛАР**

**«Электроника ва микроэлектроника»  
йўналиши талабалари учун**

**УСЛУБИЙ      ҚЎЛЛАНМА**

**Фарғона – 2007 г.**



**Н. Уразов, З.Х. Сиддиқов.**

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**ФАРҒОНА ПОЛИТЕХНИКА ИНСТИТУТИ**

**«Олий математика» кафедраси**

**АМАЛИЙ МАТЕМАТИКА**

**ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ВА ИНТЕГРАЛ  
ТЕНГЛАМАЛАР**

**«Электроника ва микроэлектроника»  
йўналиши талабалари учун**

**УСЛУБИЙ ҚЎЛЛАНМА**

**( I – қисм )**

**Институт Услубий Кенгаши  
томонидан тасдиқланган  
«----» ----- 2007 й.  
№ ----- баённома**

**Фарғона – 2007 г.**

## **Сўз боши**

**Мазкур услубий қўлланма электроника ва микроэлектроника соҳаси бўйича шуғулланувчи талабаларучун мўлжалланган бўлиб, унда назарий материаллар билан биргаликда статик радиотехникага оид кўплаб мисоллар келтирилган. Уларни ҳал этиш услублари ёритилган. Талабаларнинг мустақил ишлашлари учун турли хилдаги масалалар ва уларнинг жавоблари келтирилган.**

**Услубий қўлланма 3 та қисмдан иборат бўлиб, уларда тасодифий жараёнлар ва уларни электрон қурилмаларга таъсирини аниқлашнинг математик услублари баён қилинган. Ҳар бир қисмда аввало зарурий ҳажмдаги назарий материаллар келтирилиб, бир қатор мисолларда бу назарий билимларни амалда қўллаш йўллари кўрсатилган. Иловаларда масалаларни ечиш учун зарур сонли маълумотлар жадваллари келтирилган. Мисол ва масалаларни танлашда бир қатор адабиётлардан фойдаланилган.**

**Мазкур услубий қўлланма ”Олий математика” кафедраси услубий семинарида кўриб чиқилган**

**Протокол № ----- 2007 й.**

**Иқтисод факультети услубий кенгаши йиғилишида тасдиқланган**

**Протокол № ----- 2007 й.**

**Тузувчилар:**

**т.ф.д. , проф.        Н.Уразов  
асс.т                З.Х.Сиддиқов**

**Тақризчи:**

**доц.                А.Абдуразақов**

## **Кириш**

**Бозор иқтисодиёти илм-фан ва техниканинг амалда тезроқ ва кўплаб қўлланилишини тақазо этади. Бу масалани электроника ва микроэлектроника соҳасида ҳал этиш ўта долзарбдир. Чунки электроника ва микроэлектроника турли жараён ва тизимларни автоматлаштиришнинг асосидир. Математик услубларнинг амалда кўпроқ қўлланиши иқтисодий самаранинг кескин ўсишини таъминлайди.**

**Шу мақсадда олий ўқув юртларида электроника ва микроэлектроника мутахассислиги бўйича таълим олаётган талабаларга “Амалий математика” фанини ўргатиш режалаштирилган.**

**Услубий қўлланмада эҳтимоллар назарияси, интеграл тенгламалар ҳамда тасодикий жараёнлар назариялари бўйича энг зарур бўлган маълумотлар келтирилиб, электрон қурилмалар ишларини оптималлаштиришда улардан фойдаланиш масалалари ёритилган.**

**Услубий қўлланмада мустақил ечиш учун бир қатор масала, мисоллар ва уларнинг жавоблари келтирилган.**

# 1. БИР ЎЛЧОВЛИ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ ВА СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

## НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Қабул қиладиган қийматлари олдиндан маълум бўлган миқдорлар тасодифий миқдорлар дейилади. Тасодифий миқдорлар дискрет ёки узлуксиз кўринишда бўлади. Дискрет тасодифий миқдорларни  $X_i$  кўринишида номерлаш мумкин, узлуксиз тасодифий миқдорлар эса бирор кесма ёки сонлар шқининг нуқталарига мос ҳамма қийматларини ҳамма ичига олади. Баъзан тасодифий миқдор дискрет ва узлуксиз қийматларни ҳам қабул қилиши мумкин.

Эҳтимолликнинг тақсимот қонуни бир тасодифий миқдорнинг тўла статистик хусусияти бўлиб ҳисобланади. Агар  $X$  дискрет тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар тўплами  $X_i$  бўлса, унинг эҳтимолий тақсимот қонуни  $P_i = P(X_i)$  кўринишида ёзилади.

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни жадвал, график ёки аналитик кўринишда берилиши мумкин.

Дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорлар учун умумий бўлган хусусият – бу тақсимот функцияси деб аталган.

$$F_1(x) = P(X < x) \quad (1)$$

эҳтимолликдир.

$F_1(x)$  тақсимот функция баъзан интеграл тақсимот функция ёки интервал тақсимот қонуни деб ҳам аталади. Тақсимот функция куйидаги хоссаларга эга:

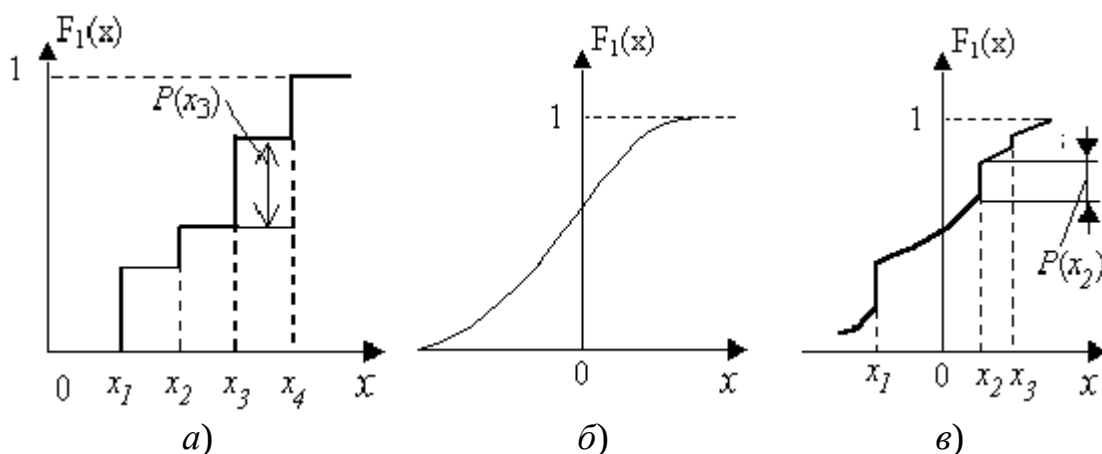
1.  $F_1(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_1(x) = 0$ .
2.  $F_1(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_1(x) = 1$ .
3.  $F_1(x_2) > F_1(x_1), x_2 > x_1$ .
4.  $P(x_2 \leq X < x_1) = F_1(x_2) - F_1(x_1)$ .

(2)

Дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси  $x_1, x_2, \dots$  нуқталарда сакрайдиган поғонасимон функциядан (1,а расм), узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси узлуксиз функциядан (1б расм), аралаш тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси санокли сондаги сакрашларга эга бўлган бўлакли-узлуксиз функциядан (1 в расм), иборат бўлади.

$$\text{Узлуксиз тасодифий миқдорлар } p_1(x) = dF_1(x)/dx \quad (3)$$

формула билан ифодаланувчи ва эҳтимолликнинг зичлик функцияси деб аталувчи функция билан ҳам аниқланади.



1-расм. Дискрет (а), узлуксиз (б) ва аралаш (в) тасодифий микдорнинг тақсимот функциялари.

Зичлик функция қуйидаги хоссаларга эга:

$$1. p_1(x) > 0.$$

$$2. (x_1, x_2) \text{ интервалда } P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p_1(x) dx = F_1(x_2) - F_1(x_1). \quad (4)$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) dx = 1. \quad (5)$$

Хусусий ҳолда, гаусс (нормаль) тақсимои учун:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (6)$$

$$p_1(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\rho^2(x-m)^2}{E^2}\right], \quad (7)$$

бунда  $m$ — $X$  тасодифий микдорнинг математик кутилмаси (ўрта қиймати),  $\sigma^2 = D(X) = D_x$  — дисперсия,  $\sigma = +\sqrt{D_x}$  — ўрта квадратик оғиш,  $E = \rho\sigma\sqrt{2}$  —  $X$  нинг эҳтимолли (ўрталантирилган) оғиши, бунда  $\rho = 0,476936\dots$

Гаусс тақсимои учун тасодифий микдорнинг берилган  $(\alpha, \beta)$  интервалга тушиш эҳтимоли

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-m}{\sigma}\right), \quad (8)$$

бунда

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx, \quad \Phi(-z) = 1 - \Phi(z). \quad (9)$$

$\Phi(z)$  нинг қийматлари 1- иловада келтирилган.

Дискрет тасодифий микдорлар учун зичлик функция

$$p_1(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i) \quad (10)$$

кўринишида ёзилиб, бунда  $x_i$  —  $x$  нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари,  $\delta(z - z_0)$  — дельта - функция (импульс функция, Дирак функцияси)

Дельта-функция куйидаги хоссаларга эга:

$z \neq z_0$  бўлганда  $\delta(z - z_0) = 0$ ,

$$\text{ихтиёрий } \varepsilon > 0 \text{ учун } \int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz = 1,$$

$$\int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0 + \varepsilon} f(z) \delta(z - z_0) dz = f(z_0), \quad (11)$$

$$\int_{z_0 - \varepsilon}^{z_0} \delta(z - z_0) dz = \int_{z_0}^{z_0 + \varepsilon} \delta(z - z_0) dz = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon > 0.$$

Баъзан, амалий масалаларни ҳал этишда тақсимот қонуни, тасодифий миқдорларнинг сонли хусусиятлари берилади. Булардан энг муҳимлари математик кутилма

$$m_x = M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (12)$$

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x) dx \quad (13)$$

ва дисперсия

$$\sigma_x^2 = M[(X - m_x)^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2 p_i, \quad (14)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_1(x) dx \quad (15)$$

бўлиб ҳисобланади.

Математик кутилма - тақсимот эгри чизиқли абсциссасининг оғирлик марказини аниқлайди.

Дисперсия - тасодифий миқдорнинг математик кутилмага нисбатан тарқоқлигини аниқлайди. Тасодифий миқдорнинг тарқоқлиги

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (16)$$

ўрта квадратик оғиш билан ҳам характерланади.

Амалда тасодифий миқдорнинг медианаси ва модаси деган сонли хусусиятларидан ҳам фойдаланилади.  $X$  тасодифий миқдорнинг медианаси деб

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = 1/2 \quad (17)$$

шартни қаноатлантирадиган  $M_e$  сонига айтилади. Узлуксиз тасодифий миқдор учун  $M_e$

$$F_1(M_e) = 1/2$$

ёки

$$\int_{-\infty}^{M_e} p_1(x) dx = \int_{M_e}^{\infty} p_1(x) dx$$

шартдан топилади. Дискрет тасодифий микдорлар учун медианадан фойдаланилмайди.

$X$  тасодифий микдорнинг модаси деб  $P(X=M)$  ёки  $P_1(M)$  катта бўладиган  $M$  сонига айтилади. Агар  $тах$  битта бўлса, тасодифий микдор бир модали, агар  $тах$  бирдан ортиқ бўлса, тасодифий микдор кўп модали бўлади.

Узлуксиз тақсимотни ёзишда баъзан квантин тушунчасидан фойдаланилади.

$P$  эҳтимолликнинг берилган сатҳга мос квантили деб

$$F_1(x_p) = p \quad (18)$$

шартни қаноатлантирувчи  $x=x_p$  сонга айтилади.

Тасодифий микдорни умумий ҳолда тасодифий бўлмаган моментлар ва энтропия тушунчалари ҳам хусусиятлайди. Тасодифий микдор ҳақидаги маълумотларни юқори тартибли моментларга қараганда паст тартибли моментлар кўпроқ беради.  $X$  тасодифий микдорнинг  $a$  нуктага нисбатан  $k$  – тартибли моменти деб

$$m_k(a) = M(X - a)^k \quad (19)$$

математик кутилмага айтилади. ( $a=0$ ) бўлганда бошланғич,  $(a=m_x)^k$  — бўлганда марказий момент дейилади.

Баъзан абсолют ва факториал моментлар тушунчаларидан фойдаланилади,

$$\beta_k(a) = M(|X - a|^k), \quad (20)$$

$$m_{[k]}(a) = M([X - a]^{[k]}), \quad (21)$$

бунда  $z^{[k]} = z(z-1)(z-2)\dots(z-k+1)$ .

$$\gamma_1 = m_3^0 / \sigma^3, \quad (22)$$

$X$  тасодифий микдорнинг ассимметрия коэффиценти,

$$\gamma_2 = m_4^0 / \sigma^4 - 3 \quad (23)$$

эса эксцесса коэффиценти дейилади, бунда  $m_3^0$  ва  $m_4^0$  — мос равишда 3 – ва 4 – тартибли марказий моментлардир.

Бундан ташқари тасодифий микдорнинг семииварианти ёки кумилянты деган тушунчалар ҳам мавжуд. Моментлар ва семиивариантлар ҳақида қуйидаги муносабатлар мавжуд:

$$m_k = \sum_{i=0}^k C_k^i m_{k-i}^0 m_1^i, \quad (24)$$

$$m_k^0 = \sum_{i=0}^k C_k^i m_{k-i} (-m_1)^i, \quad (25)$$

$$m_2 = m_2^0 + m_1^2, \quad m_3 = m_3^0 + 3m_1 m_2^0 + m_1^3 \quad (26)$$

$$m_4 = m_4^0 + 4m_1 m_3^0 + 6m_1^2 m_2^0 + m_1^4, \dots$$

$$m_2^0 = m_2 - m_1^2, \quad m_3^0 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3 \quad (27)$$

$$m_4^0 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4, \dots$$

$$m_{[1]} = m_1, \quad m_{[2]} = m_2 - m_1, \quad (28)$$

$$m_{[3]} = m_3 - 3m_2 + 2m_1, \quad m_{[4]} = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1, \dots$$

$$m_1 = m_{[1]}, \quad m_2 = m_{[2]} + m_{[1]}, \quad (29)$$

$$m_3 = m_{[3]} + 3m_{[2]} + m_{[1]}, \quad m_4 = m_{[4]} + 6m_{[3]} + 7m_{[2]} + m_{[1]}, \dots$$

$$m_2^0 = \chi_2, \quad m_3^0 = \chi_3, \quad m_4^0 = \chi_4 + 3\chi_2^2, \dots \quad (30)$$

$$\chi_2 = m_2^0, \quad \chi_3 = m_3^0, \quad \chi_4 = m_4^0 - 3m_2^0{}^2, \dots \quad (31)$$

$$m_1 = \chi_1, \quad m_2 = \chi_2 + \chi_1^2, \quad m_3 = \chi_3 + 3\chi_1\chi_2 + \chi_1^3, \quad (32)$$

$$m_4 = \chi_4 + 4\chi_1\chi_3 + 3\chi_2^2 + 6\chi_1^2\chi_2 + \chi_1^4, \dots$$

$$\chi_1 = m_1, \quad \chi_2 = m_2 - m_1^2, \quad \chi_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3, \quad (33)$$

$$\chi_4 = m_4 - 4m_1m_3 - 3m_2^2 + 12m_1^2m_2 - 6m_1^4, \dots$$

(28) ва (29) формулаларда тасодифий миқдор қабул қилиши мумкин бўлган миқдорлар бир – биридан биттага фарқ қилади деб фараз қилинади.

Характеристик функциялар апаратидан фойдаланилса, моментларни ҳисоблаш жараёни осонлашади.

$\Theta_1(jv)$  характеристик функция  $e^{jvx}$  тасодифий миқдорнинг математик кутилмаси сифатида аниқланади:

$$\Theta_1(jv) = M(e^{jvx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p_1(x) dx, \quad (34)$$

бунда  $v$  — ҳақиқий миқдор,  $j = \sqrt{-1}$ .

$$\text{Агар тасодифий миқдор дискрет бўлса, } \Theta_1(jv) = \sum_{i=1}^n p_i e^{jvx_i}, \quad (35)$$

бунда  $x_i$  —  $X$  тасодифий миқдорнинг қабул қилиниши мумкин бўлган қийматлари,  $p_i = P(X=x_i)$ .

$$p_i(x) \text{ зичлик функцияси одатда } p_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(jv) e^{-jvx} dv, \quad (36)$$

характеристик функция орқали ифодаланади.

Қуйидагилар ўринли:

$$m_k = \frac{1}{j^k} \left. \frac{d^k \Theta_1(jv)}{dv^k} \right|_{v=0}, \quad (37)$$

$$\ln \Theta_1(jv) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_k}{k!} (jv)^k. \quad (38)$$

Баъзан  $\Theta_1(jv)$  характеристик функциялар ўрнига

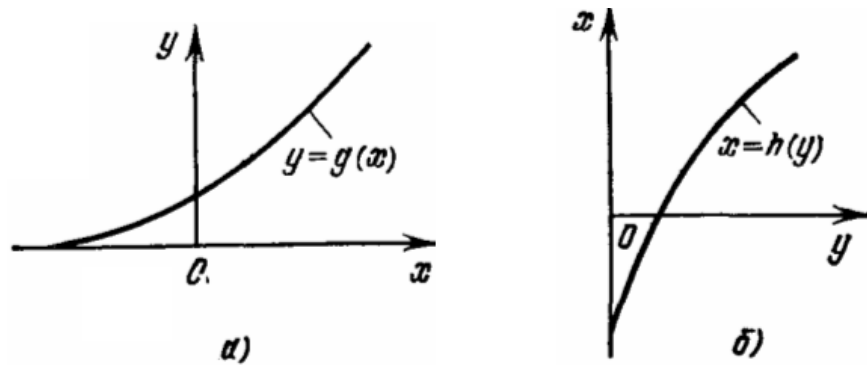
$$\varphi_1(v) = M(e^{vx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{vx} p_1(x) dx \quad (39)$$

кўринишдаги ҳосил қилувчи функциялардан ҳам фойдаланилади.

Тасодифий сигналларни чизикли ва ночизикли тизимлар ёрдамида ўрганишни тадқиқот қилишда тасодифий миқдор  $X$  нинг  $p_1(x)$  зичлик функцияси орқали  $Y=g(X)$  тасодифий миқдорнинг  $p_1(y)$  зичлик функциясини топиш масаласини ҳал этиш талаб қилинади.

Агар  $X=h(Y)$  тескари функция мавжуд бўлса (2–расм), изланган зичлик функцияси қуйидагича ёзилади:

$$p_1(y) = p_1(x) |d(x)/dy| = p_1[h(y)] |dh(y)/dy|. \quad (40)$$

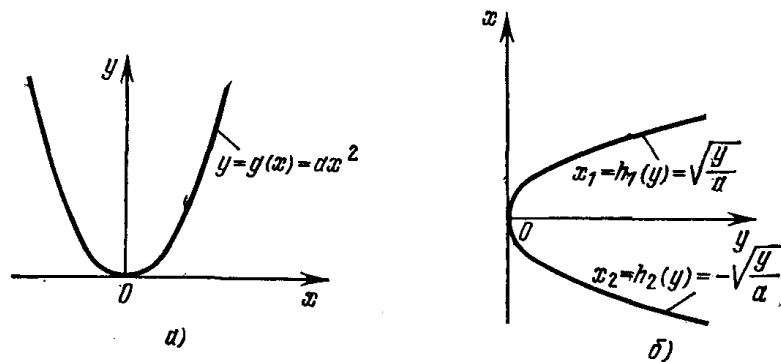


2-расм. Ўзаро бир қийматли функционал алмаштириш. а) - тўғри функция, б) – тескари функция.

Агар тескари функция бир қийматли бўлмаса, масалан,  $h_1(y)$  ва  $h_2(y)$  бўлса (3-расм), у ҳолда

$$p_1(y) = p_1[h_1(y)] |h'_1(y)| + p_1[h_2(y)] |h'_2(y)| \quad (41)$$

бўлади.



3-расм Квадратик (икки қийматли) алмаштириш. а)- тўғри функция б)- тескари функция.

$Y=g(X)$  тасодикий миқдор учун математик кутилма ва дисперсия қуйидагича ҳисобланади:

$$\text{узлуксиз ҳолда} \quad m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y p_1(y) dy, \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y)^2 p_1(y) dy, \quad (42)$$

$$m_y = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_1(x) dx, \quad \sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) - m_y]^2 p_1(x) dx. \quad (43)$$

$$\text{дискрет ҳолда} \quad m_y = M[g(X)] = \sum_i g(x_i) p_i, \quad (44)$$

$$\sigma_y^2 = D[g(X)] = \sum_i [g(x_i) - m_y]^2 p_i. \quad (45)$$

## МИСОЛЛАР

1.1. Душман эгаллаган жойга қарата ҳар бирининг тегиш эҳтимоли 0,8 га тенг бўлган бешта ракета отилган.

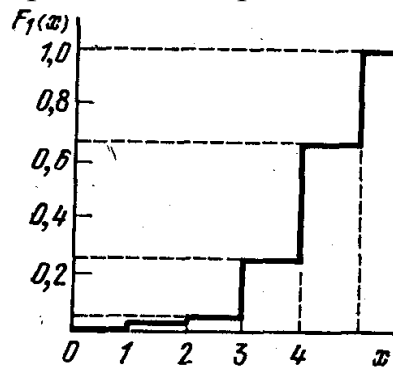
1) тегишлар сони тақсимоти; 2) тақсимот кўпбурчаги; 3) тегишлар сонининг тақсимот функцияси топилсин.

*Ечиш.* Тасодикий миқдор  $X$   $x_0=0, x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4, x_5=5$  қийматларни қабул қилиши мумкин.

1)

$$\begin{aligned} p_0 &= (1-p)^5 = 0,2^5 = 0,00032, \\ p_1 &= C_5^1 p(1-p)^4 = 5 \cdot 0,8 \cdot 0,2^4 = 0,006, \\ p_2 &= C_5^2 p^2(1-p)^3 = 10 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,05, \\ p_3 &= C_5^3 p^3(1-p)^2 = 10 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 = 0,20, \\ p_4 &= C_5^4 p^4(1-p) = 5 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 = 0,409, \\ p_5 &= p^5 = 0,8^5 = 0,32768. \end{aligned}$$

2) Тақсимот кўпбурчаги 4. – расмда келтирилган.



4-расм. Тақсимот кўпбурчаги.

3) Тақсимот функциялар қуйидагича ҳисобланади:

$$x \leq 0, F_1(x) = P(X < x) = 0,$$

$$0 < x \leq 1, F_1(x) = P(X = x_0 = 0) = 0,00032,$$

$$1 < x \leq 2, F_1(x) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,00032 + 0,00640 = 0,00672,$$

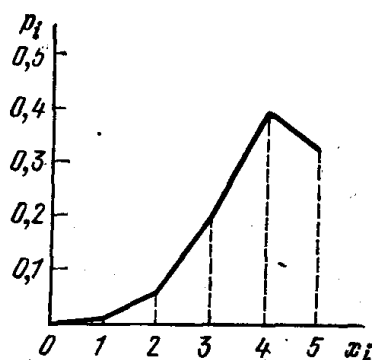
$$2 < x \leq 3 \text{ да } F_1(x) = \sum_{i=0}^2 P(X = x_i) = 0,05792,$$

$$3 < x \leq 4 \text{ да } F_1(x) = \sum_{i=0}^3 P(X = x_i) = 0,26272,$$

$$4 < x \leq 5 \text{ да } F_1(x) = \sum_{i=0}^4 P(X = x_i) = 0,67232,$$

$$x > 5 \text{ да } F_1(x) = \sum_{i=0}^5 P(X = x_i) = \sum_{i=0}^5 p_i = 1.$$

Тақсимот функциясини графиги 5. – расмда келтирилган.



5-расм. Тасодикий микдор тақсимот функциясининг графиги.

1.2.  $X$  тасодикий микдорнинг зичлик функцияси  $p_1(x) = \alpha \exp(-\beta |x|)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , бунда,  $\alpha$  ва  $\beta$  ўзгармас микдорлар

- 1)  $\alpha$  ва  $\beta$  - қаноатлантирадиган нисбатларни;
- 2)  $X$  тасодикий микдорнинг тақсимот функциясини ҳисоблашни;
- 3)  $\beta=2$  да  $p_1(x)$  зичлик ва  $F_1(x)$  тақсимот функциялар графикларини яшаш талаб этилади.

Ечилиш 1)  $\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) dx = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|x|} dx = \alpha \left[ \int_{-\infty}^0 e^{\beta x} dx + \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dx \right] = \frac{2\alpha}{\beta} = 1.$

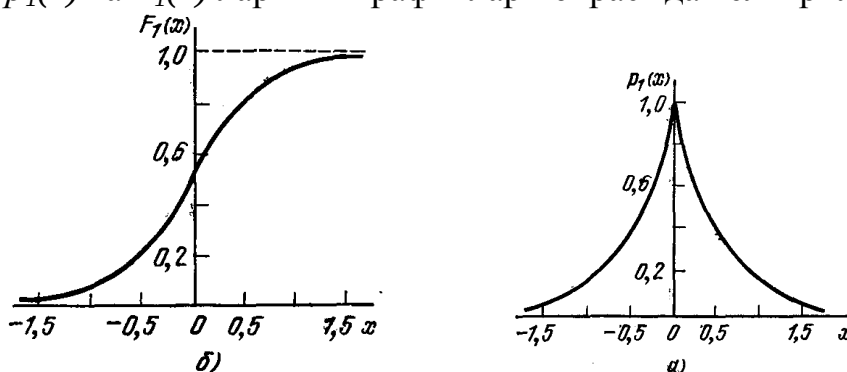
Демак,  $\beta=2\alpha$ .

2)  $F_1(x) = \int_{-\infty}^x p_1(z) dz$ .  $x < 0$  да  $F_1(x) = \alpha \int_{-\infty}^x e^{\beta z} dz = \frac{\alpha}{\beta} e^{\beta x} = \frac{1}{2} e^{\beta x}.$

$x > 0$  да  $F_1(x) = \frac{1}{2} + \alpha \int_0^x e^{-\beta z} dz = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\beta x} = 1 - \frac{1}{2} e^{-\beta x}.$

3)  $\beta=2$  да  $p_1(x) = e^{-2|x|}$ ,  $F_1(x) = \begin{cases} 0,5e^{2x}, & x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 1 - 0,5e^{-2x}, & x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

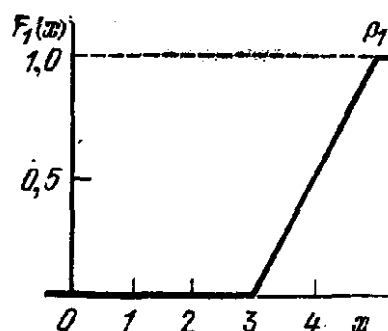
$\beta=2$  ҳол учун  $p_1(x)$  ва  $F_1(x)$  ларнинг графиклари 6-расмда келтирилган.



6. – расм. Узлуксиз тасодикий микдорнинг а) зичлик ва б) тақсимот функциялари графиклари.

1.3.  $X$  тасодикий микдорнинг  $F_1(x)$  тақсимот функцияси 7-расмда келтирилган.

- 1) Тақсимот функциясининг аналитик ифодасини;
- 2)  $p_1(x)$  нинг графигини;
- 3)  $P(3,5 \leq X < 4,5)$  эҳтимолликни аниқланг.



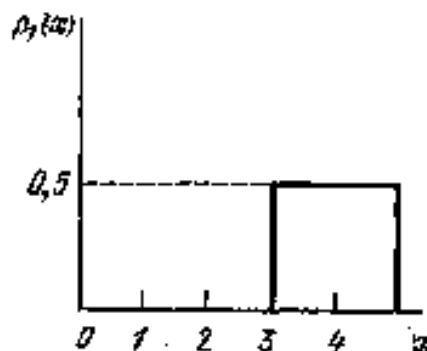
7-расм. Таксимот функция.

Ечиш: 1) Таксимот функция  $(3,0)$  ва  $(5,1)$  нукталардан ўтувчи тўғри чизикқа мос бўлгани учун, бу нукталардан ўтувчи тўғри чизик тенгламасини ёзамиз:  $(x-3)/(5-3)=F_1(x)/1$ ,  $F_1(x)=(x-3)/2$  бўлади. Демак

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \text{ бўлганда,} \\ (x-3)/2, & 3 < x \leq 5 \text{ бўлганда,} \\ 1, & x > 5 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

$$2) p_1(x) = dF_1(x)/dx \quad \text{бўлгани учун} \quad p_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \text{ бўлганда,} \\ 1/2, & 3 < x \leq 5 \text{ бўлганда,} \\ 0, & x > 5 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

Зичлик функциянинг графиги 8-расмда келтирилган.



8-расм. Зичлик функцияси.

$$3) P = P(3,5 \leq X < 4,5) = F_1(4,5) - F_1(3,5) = (4,5-3)/2 - (3,5-3)/2 = 0,5.$$

1.4.  $X$  тасодифий миқдор  $-1 \leq X \leq 1$ , интервалда текис тақсимланган бўлиб,  $-1$  ва  $+1$  қийматларининг ҳар бирини  $1/4$  эҳтимоллик билан қабул қилади.

$X$  тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг ва графигини чизинг;

1)  $P(-1/2 \leq X < +1/2)$  эҳтимоллигини топинг.

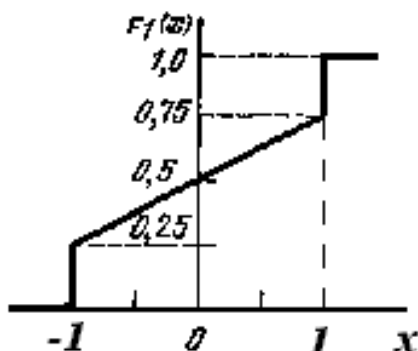
Ечиш. 1)  $x \leq -1$  да  $F_1(x) = P(X < x) = 0$ .

$$-1 < x \leq 1 \text{ да} \quad F_1(x) = P(X = -1) + \int_{-1}^x p_1(x) dx = \frac{1}{4} + \int_{-1}^x \frac{dx}{4} = \frac{1}{4} + \frac{x+1}{4} = \frac{x+2}{4}.$$

$$x > 1 \text{ да} \quad F_1(x) = P(X = -1) + \int_{-1}^1 \frac{dx}{4} + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.$$

$F_1(x)$  нинг графиги 9- расмда келтирилган.

$$2) P = F_1\left(\frac{1}{2}\right) - F_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2+0,5}{4} - \frac{2-0,5}{4} = \frac{1}{4}.$$



9-расм. Таксимот функция.

1.5. Қўзғалмас нишонгача бўлган масофани ўлчаш хатолиги математик кутилмаси  $m=5$  ва ўрта квадратик оғиши  $\sigma=10$  м бўлган гаусс таксимога бўйсунди.

1) Хатоликнинг 15 м дан кўп бўлмаслиги эҳтимолини топинг.

2) Учта бўлмаслиги бўлмаган ўлчашлардан камида биттасида хатоликнинг абсолют миқдори 15 м дан ошмаслиги эҳтимолини топинг.

Ечиш. 1) (8) Формула ва  $\Phi(z)$  нинг қийматлари жадвалидан фойдаланиб,

$$P_1 = P(|X| < 15) = P(-15 < X < 15) = \Phi\left(\frac{15-5}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-15-5}{10}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) - [1 - \Phi(2)] = 0,8413 - 1 + 0,97725 \approx 0,82$$

ни топамиз. 2)  $1 - [1 - P(-15 < X < 15)]^3 = 1 - (1 - 0,82)^3 \approx 0,994$ .

1.6. Алоқа канали орқали иккита импульсдан иборат кодлар комбинацияси тўсиқлар орқали ўтади. тўсиқлар импульсларга  $p$  эҳтимоллик билан таъсир этади.

Тўсилган импульсларнинг тасодикий сони  $X$  нинг характеристик функцияси  $\Theta_1(j\nu)$  ни аниқланг.

Ечиш: жараённинг таксимот қонуни:

|     |           |           |       |
|-----|-----------|-----------|-------|
| $X$ | 0         | 1         | 2     |
| $P$ | $(1-P)^2$ | $2P(1-P)$ | $P^2$ |

(35) формулага кўра

$$\begin{aligned} \Theta_1(j\nu) &= \sum_{i=1}^3 p_i e^{j\nu x_i} = (1-p)^2 + 2p(1-p)e^{j\nu} + p^2 e^{2j\nu} = 1 - 2p + p^2 + 2pe^{j\nu} - 2p^2 e^{j\nu} + p^2 e^{2j\nu} = \\ &= 1 + 2p(e^{j\nu} - 1) + p^2(e^{j\nu} - 1)^2 = [1 + p(e^{j\nu} - 1)]^2. \end{aligned}$$

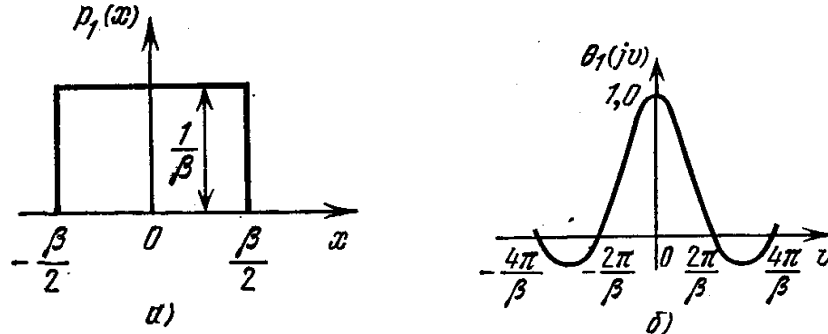
1.7.  $X$  тасодикий миқдор -  $\beta/2$  дан  $\beta/2$  гача бўлган интервалда текис таксимланган.

$X$  тасодикий миқдорнинг характеристик функциясини топинг ва графигини чизинг.

Ечиш. Шартга кўра зичлик функция  $p_1(x) = 1/\beta$ . Шунинг учун

$$\Theta_1(jv) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p_1(x) dx = \frac{1}{\beta} \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} e^{jvx} dx = \frac{1}{j\beta v} (e^{jv\beta/2} - e^{-jv\beta/2}) = \frac{\sin(v\beta/2)}{v\beta/2} \quad \text{бўлади.}$$

Зичлик ва характеристик функцияларга мос графиклар 10 – расмда келтирилган.



10- расм. Текис тақсимот зичлик функцияси ва унга мос характеристик функция.

1.8. Характеристик функцияси  $\Theta_1(jv) = 1/(1+v^2)$  бўлган  $X$  тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси топилсин.

Ечиш (36) формулага кўра

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_1(jv) e^{-jvx} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jvx}}{1+v^2} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos vx - j \sin vx}{1+v^2} dv = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos vx}{1+v^2} dv - \\ &- \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin vx}{1+v^2} dv = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos vx}{1+v^2} dv = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \\ &\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}. \end{aligned}$$

1.9.  $X$  тасодифий миқдор зичлик функцияси

$$P_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2-1} e^{-x/2}} & x > 0 \text{ бўлганда,} \\ 0 & x \leq 0 \text{ бўлганда} \end{cases}$$

$\chi^2$  тақсимот қонунига бўйсунди.

$X$  тасодифий миқдорнинг характеристик функцияси,  $k$  – тартибли  $m_k$  бошланғич моменти ҳисоблансин.

Ечиш:

$$\begin{aligned} \Theta_1(jv) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} p_1(x) dx = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} e^{jvx} x^{n/2-1} e^{-x/2} dx = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \int_0^{\infty} x^{n/2-1} e^{-(1/2-jv)x} dx. \\ \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx &= \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}} \quad \text{формуладан} \end{aligned}$$

$$\text{фойдаланиб, } \Theta_1(jv) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \frac{\Gamma(n/2-1+1)}{(1/2-jv)^{n/2-1+1}} = (1-2jv)^{-n/2} \text{ га эга бўламиз.}$$

(37) формулага кўра  $m_k = \frac{1}{j^k} \left. \frac{d^k \Theta_1(jv)}{dv^k} \right|_{v=0}$ . Бизнинг ҳол учун

$$\frac{d\Theta_1(jv)}{dv} = jn(1-2jv)^{-n/2-1},$$

$$\frac{d^2\Theta_1(jv)}{dv^2} = j^2 n(n+2)(1-2jv)^{-n/2-2},$$

$$\frac{d^3\Theta_1(jv)}{dv^3} = j^3 n(n+2)(n+4)(1-2jv)^{-n/2-3},$$

$$\frac{d^4\Theta_1(jv)}{dv^4} = j^4 n(n+2)(n+4)(n+6)(1-2jv)^{-n/2-4}, \dots,$$

$$\frac{d^k\Theta_1(jv)}{dv^k} = j^k n(n+2)(n+4)\dots(n+2k-2)(1-2jv)^{-n/2-k}.$$

Шундай қилиб,  $m_k = n(n+2)(n+4)\dots(n+2k-2)$ .

10.  $Y$  тасодифий миқдор  $X$  тасодифий миқдорнинг  $Y=g(X)=aX+b$ , кўринишидаги чизикли функциясида иборат,  $a$  ва  $b$  — ўзгармас тасодифий миқдор.  $X$  тасодифий миқдорнинг  $p_1(x)$  зичлик функцияси маълум бўлганда  $Y$  тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси  $p_1(y)$  ни топинг.

*Ечиш.* Тескари функция  $x=h(y)=(y-b)/a$

мавжуд бўлганлиги учун (40) формулага кўра

$$p_1(y) = \frac{1}{|a|} p_1\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

бўлади.

## МАСАЛАЛАР ВА ЖАВОБЛАР

1.1. Тўсиқли иккилик алоқа канали орқали 1 ва 0 рақамлари узатилади.  $p(1)=p(0)=1/2$ . Бирдан бирга нолдан нолга штиш эҳтимоллари  $p(1/1)=p(0/0)=q$ . Бир неча дақиқадан сўнг  $X$  тасодифий миқдорнинг бир қийматли сонни қабул қилиши тақсимотини аниқланг.

*Жавоб:*

|       |             |             |
|-------|-------------|-------------|
| $x_i$ | 0           | 1           |
| $p_i$ | $(1-p+q)/2$ | $(1-q+p)/2$ |

1.2. Икkitаси ишламайдиган ўнта транзистордан тасодифан икkitасининг параметрлари текширилган.

- 1) Танланган транзисторларда ишламайдигани бўлишининг тақсимотини аниқланг.
- 2) Шу тақсимотнинг функцияси  $F_1(x)$  ни аниқланг.

*Жавоб:* 1)

|       |      |       |       |
|-------|------|-------|-------|
| $x_i$ | 0    | 1     | 2     |
| $p_i$ | 1/45 | 16/45 | 28/45 |

$$2) F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ да} \\ 1/45, & 0 < x \leq 1 \text{ да} \\ 17/45, & 1 < x \leq 2 \text{ да} \\ 1, & x > 2 \text{ да} \end{cases}$$

1.3. Антеннани бир марта айлантирганда радиолокаторнинг керакли белгини экранда кўрсатиш эҳтимоли  $p$ . Экранда  $n$  та белги кўрсатилганда мақсадга эришилади. Антеннани айлантиришлар сони  $X$  тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

*Жавоб:*  $P(k) = P(X = k) = C_{k-1}^{n-1} p^n (1-p)^{k-n}, k = n, n+1, n+2.$

1.4. Хабарлар қадами  $\Delta = 1\text{В}$  бўлган квант импульслари орқали узатилади. Агар квантлаш хатолиги текис тақсимланган бўлиб, унинг ўрта қиймати нолга тенг бўлса, квантлаш шовқинининг дисперсияси  $\sigma^2$  ни топинг.

*Жавоб:*  $\sigma^2 = 1/12 \text{ В}^2.$

1.5.  $u(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$  гармоник тебранишга эга бўлган кучланишни чироқли вольтметр билан ўлчаганда, унинг стрелкаси тўсқинлик туфайли  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  қийматлар орасида тебранади.

1) Вольтметр кўрсатишининг  $m_\alpha$  қийматини; 2)  $u(t)$  амплитудасини ўлчашнинг нисбий хатолиги  $\Delta = \sigma_\alpha / m_\alpha$  ни ҳисобланг, бунда  $\sigma_\alpha$  — ўрта квадратик қиймат.

*Жавоб:* 1)  $m_\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2$ ; 2)  $\Delta = (\alpha_2 - \alpha_1) / \sqrt{3}(\alpha_2 + \alpha_1).$

1.6. Учиш даврида самолёт электрон жиҳозининг тўхтовсиз ишлаш вақти экспоненциал қонунга бўйсунди. Агар жиҳознинг ўртача тўхтовсиз ишлаш вақти 200 с бўлса, унинг 10 с тўхтовсиз ишлаши эҳтимолини аниқланг.

*Жавоб:* 0,951.

1.7. Ўчириш сигналини қабул қилиш амплитуданинг оний тасодифий қиймати  $X$  зичлик функцияси  $p_1(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, x > 0.$

бўлган Релье тақсимотига бўйсунди.  $X$  нинг ўрта қиймати ва дисперсиясини аниқланг.

*Жавоб:*  $m_x = \sigma \sqrt{\pi/2}, \sigma_x^2 = \sigma^2 (2 - \pi/2).$

1.8.  $X$  тасодифий миқдорнинг 4 – тартибли бошланғич факториал моменти бошланғич момент орқали  $m_{[4]} = m_4 - 6m_3 + 11m_2 - 6m_1$  кўринишида ифодаланиши исботлансин.

1.9. Зичлик функцияси  $p_1(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$  кўринишдаги гаусс тақсимо-  
тига эга бўлган  $X$  тасодифий миқдорнинг  $m_k^0$  марказий ва  $\beta_k^0$  абсолют мар-  
казий моментларини топинг.

*Жавоб:*  $k$  тоқ бўлганда  $m_k^0 = 0, \beta_k^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^k 2^{(k-1)/2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{(k-1)/2} \left(\frac{k-1}{2}\right)! \sigma^k$

$k$  жуфт бўлганда  $m_k^0 = \beta_k^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^k 2^{(k-1)/2} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right).$

1.10. Зичлик функцияси  $p_1(x) = \frac{1}{\beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)} x^\alpha e^{-x/\beta}, x > 0, \alpha > -1, \beta > 0$

бўлган гамма тақсимо-тига бўйсунувчи  $X$  тасодифий миқдорнинг характеристик  
функцияси  $\Theta_1(j\nu) = (1 - j\beta\nu)^{-(\alpha+1)}$  бошланғич моменти

$$m_k = \beta^k \Gamma(k + \alpha + 1) / \Gamma(\alpha + 1)$$

бўлишини исботланг.

## 2. КЎП ЎЛЧОВЛИ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ ВА СОНЛИ ХАРАКТЕРИСТИКАЛАРИ

### НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Электрон қурилмаларни тадқиқ қилишда икки ёки ундан ортиқ тасодифий  
миқдорлар билан ишлашга тўғри келади.  $n$  та тасодифий миқдорлар тизимини

$n$  ўлчовли фазодаги нуқтанинг  $X_1, X_2, \dots, X_n$  тасодифий координаталари деб қараш мумкин. Шунинг учун тасодифий миқдорлар тизими  $n$  ўлчовли вектор дейилади. Тасодифий миқдор  $n=2$  да текисликдаги,  $n=3$  да фазодаги нуқтанинг тасодифий координаталаридир.

Бир ўлчовли тасодифий миқдор сингари кўп ўлчовли тасодифий миқдор ҳам дискрет, узлуксиз ёки аралаш қийматларни қабул қилиши мумкин. Бу ерда ҳам тақсимот функция асосий роль ўйнайди.

Агар тасодифий миқдор дискрет бўлса унинг тақсимот қонуни узлуксиз кўринишда берилиб, узлуксиз бўлса формула кўринишида берилади. Дискрет ҳолда  $P_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j), i=1,2,3,\dots,n; j=1,2,3,\dots,m$

$$\sum_{i,j} P_{ij} = 1, \quad (2.1)$$

| $y_j$                      | $x_i$    |          |     |          |     |          | $\sum_{i=1}^n p(x_i, y_j)$ |
|----------------------------|----------|----------|-----|----------|-----|----------|----------------------------|
|                            | $x_1$    | $x_2$    | ... | $x_i$    | ... | $x_n$    |                            |
| $y_1$                      | $p_{11}$ | $p_{21}$ | ... | $p_{i1}$ | ... | $p_{n1}$ | $p(y_1)$                   |
| $y_2$                      | $p_{12}$ | $p_{22}$ | ... | $p_{i2}$ | ... | $p_{n2}$ | $p(y_2)$                   |
| ...                        | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...                        |
| $y_j$                      | $p_{1j}$ | $p_{2j}$ | ... | $p_{ij}$ | ... | $p_{nj}$ | $p(y_j)$                   |
| ...                        | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...                        |
| $y_m$                      | $p_{1m}$ | $p_{2m}$ | ... | $p_{im}$ | ... | $p_{nm}$ | $p(y_m)$                   |
| $\sum_{j=1}^m p(x_i, y_j)$ | $p(x_1)$ | $p(x_2)$ | ... | $p(x_i)$ | ... | $p(x_n)$ |                            |

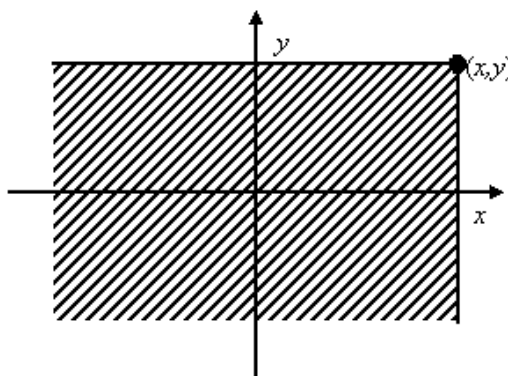
$$P(X = x_i) = p_i = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \quad P(Y = y_j) = p_j = \sum_{i=1}^n p_{ij}. \quad (2.2)$$

Агар  $X$  ва  $Y$  боғлиқ бўлмаса  $P_{ij} = P_{ji}$  бўлади.

Икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот функцияси

$$F_2(x,y)=P(X \leq x, Y \leq y). \quad (2.3)$$

2.1–расмда икки ўлчовли тасодифий миқдор қабул қилиши мумкин бўлган соҳа тасвирланган.



2.1-расм. Тақсимот функциянинг аниқланиш соҳаси.

Агар тақсимот функция  $F_2(x,y)$  ва унинг аралаш иккинчи тартибли ҳосилалари узлуксиз бўлса, унга мос зичлик функция

$$p_2(x, y) = \partial^2 F_2(x, y) / \partial x \partial y \quad (2.4)$$

бўлади.

Икки ўлчовли характеристик функция қуйидагича аниқланади

$$\Theta_2(j\nu_1, j\nu_2) = M[e^{j(\nu_1 x + \nu_2 y)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\nu_1 x + \nu_2 y)} p_2(x, y) dx dy. \quad (2.5)$$

Характеристик функциялар аппарати тасодифий микдорлар йиғиндисининг хоссаларини тадқиқ қилишда самарали имкониятлар яратади.

$F_2(x, y)$   $p_2(x, y)$  ва  $\Theta_2(j\nu_1, j\nu_2)$  функциялар қуйидаги асосий хоссаларга эга:

$x_2 > x_1$  да  $F_2(x_2, y) \geq F_2(x_1, y)$ ,  $y_2 > y_1$  да  $F_2(x, y_2) \geq F_2(x, y_1)$ .

$$1. F_2(x, -\infty) = F_2(-\infty, y) = F_2(-\infty, -\infty) = 0. \quad (2.6)$$

$$2. F_2(\infty, \infty) = 1. \quad (2.7)$$

$$3. F_2(x, \infty) = F_1(x), F_2(\infty, y) = F_1(y), \quad (2.8)$$

бунда  $F_1(x)$  ва  $F_1(y)$  лар  $X$  ва  $Y$  тасодифий микдорларнинг тақсимот функциялари.

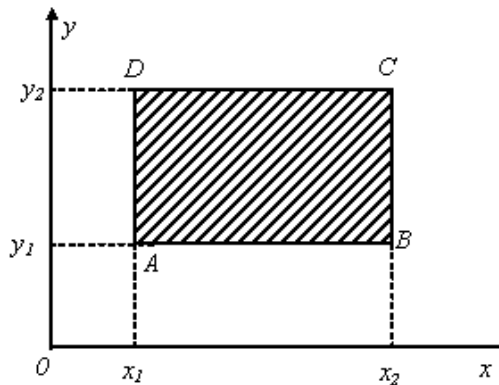
$$5. F_2(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p_2(u, v) du dv. \quad (2.9)$$

6.  $(x, y)$  тасодифий нуқтанинг  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$ ,  $D(x_1, y_2)$  нуқталардан ўтувчи,  $OX$  ва  $OY$  ўқларига параллел бўлган тўғри чизиклар билан чегараланган соҳа ичига тушиш эҳтимоли (2.2-расм)

$$P(R) = P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = F_2(x_2, y_2) - F_2(x_1, y_2) - F_2(x_2, y_1) + F_2(x_1, y_1). \quad (2.10)$$

$$7. p_2(x, y) \geq 0, \quad (2.11)$$

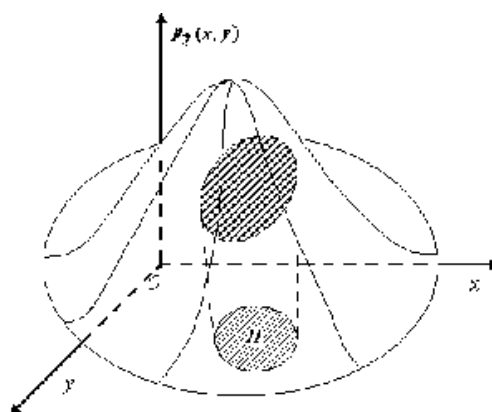
$$8. \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx dy = 1 \quad (\text{нормаллаштириш шарти}). \quad (2.12)$$



2.2-расм.  $(X, Y)$  тасодифий микдор қабул қилиши мумкин бўлган нуқталар соҳаси.

9.  $(X, Y)$  тасодифий микдорнинг ихтиёрий  $D$  соҳадаги нуқталарни қабул қилиш эҳтимоли  $P(D) = \iint_{(D)} p_2(x, y) dx dy$ , (2.13)

бунда  $p_2(x, y)$  - зичлик функция (2.3-расм).



2.3-расм.  $(X, Y)$  тасодифий микдор қабул қилиши мумкин бўлган нукталарнинг  $D$  соҳаси.

10.  $\Theta_2(0, 0) = 1$ .

11. Агар  $X$  ва  $Y$  тасодифий микдорларнинг характеристик функциялари  $\Theta_1(j\nu_1)$  ва  $\Theta_1(j\nu_2)$  бўлса,  $\Theta_2(j\nu_1, j\nu_2) = \Theta_1(j\nu_1) \Theta_2(j\nu_2)$ . (2.14)

Қуйидагилар ўринли:

$$F_1(x) = F_2(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx dy,$$

$$p_1(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dy,$$

$$F_1(y) = F_2(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx dy,$$

$$p_1(y) = \frac{\partial F_1(y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx.$$
(2.15)

$X$  ва  $Y$  тасодифий микдорларнинг боғлиқлик даражаси улардан биттаси бирор қийматни қабул қилади, деган шартда иккинчисининг тақсимот қонуни қуйидагича аниқланади:

$$p_2(x, y) = p_1(x)p_1(y|x) = p_1(y)p_1(x|y), \quad (2.16)$$

Бунда  $p_1(x|y) = \partial F_1(x|y) / \partial x$ ,  $p_1(y|x) = \partial F_1(y|x) / \partial y$  шартли зичлик функциялардир.

Агар  $X$  ва  $Y$  боғлиқ бўлмаса,  $p_2(x, y) = p_1(x)p_1(y)$  (2.17)

бўлади. (2.17) тенглик  $X$  ва  $Y$  боғлиқ эмаслигининг зарурий ва етарли шартидир. Узлуксиз тасодифий микдорлар учун қуйидагилар ўринли:

$$p_1(y|x) = \frac{p_2(x, y)}{p_1(x)} = \frac{p_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dy}, \quad p_1(x|y) = \frac{p_2(x, y)}{p_1(y)} = \frac{p_2(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx}, \quad (2.18)$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_1(y|x) dx, \quad p_1(x|y) = \frac{p_1(x)p_1(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_1(y|x) dx}. \quad (2.19)$$

$$p_1 = (x|y) = \frac{p_1(x)p_1(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)p_1(y|x)dx}. \quad (2.20)$$

Юқорида кўрилган хоссалар кўп ўлчовли тасодифий миқдорлар учун ҳам ўринли.

Икки ўлчовли дискрет ва узлуксиз тасодифий миқдорларнинг моментлари куйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

1.  $m_{k_1 k_2}$   $k_1 + k_2$  тартибли бошланғич момент:

$$m_{k_1 k_2} = (X^{k_1} Y^{k_2}) = \sum_i \sum_j x_i^{k_1} y_j^{k_2} p_{ij},$$

$$m_{k_1 k_2} = \int \int_{-\infty}^{\infty} x^{k_1} y^{k_2} p_2(x, y) dx dy. \quad (2.21)$$

2.  $k_1 + k_2$  тартибли марказий момент:

$$m_{k_1 k_2}^0 = (X_0^{k_1} Y_0^{k_2}) = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^{k_1} (y_j - m_y)^{k_2} p_{ij},$$

$$m_{k_1 k_2}^0 = \int \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{k_1} (y - m_y)^{k_2} p_2(x, y) dx dy. \quad (2.22)$$

3.  $k_1 + k_2$  тартибли абсолют бошланғич момент:

$$\beta_{k_1 k_2} = M(|X|^{k_1} |Y|^{k_2}) = \sum_i \sum_j |x_i|^{k_1} |y_j|^{k_2} p_{ij},$$

$$\beta_{k_1 k_2} = \int \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{k_1} |y|^{k_2} p_2(x, y) dx dy. \quad (2.23)$$

4.  $k_1 + k_2$  тартибли абсолют марказий момент:

$$\beta_{k_1 k_2}^0 = M(|X_0|^{k_1} |Y_0|^{k_2}) = \sum_i \sum_j |x_i - m_x|^{k_1} |y_j - m_y|^{k_2} p_{ij},$$

$$\beta_{k_1 k_2}^0 = \int \int_{-\infty}^{\infty} |x - m_x|^{k_1} |y - m_y|^{k_2} p_2(x, y) dx dy. \quad (2.24)$$

5.  $k_1 + k_2$  тартибли факториал бошланғич момент:

$$m_{[k_1][k_2]} = (X^{[k_1]} Y^{[k_2]}) = \sum_i \sum_j x_i^{[k_1]} y_j^{[k_2]} p_{ij},$$

$$m_{[k_1][k_2]} = \int \int_{-\infty}^{\infty} x^{[k_1]} y^{[k_2]} p_2(x, y) dx dy. \quad (2.25)$$

6.  $k_1 + k_2$  тартибли факториал марказий момент:

$$m_{[k_1][k_2]}^0 = (X_0^{[k_1]} Y_0^{[k_2]}) = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^{[k_1]} (y_j - m_y)^{[k_2]} p_{ij},$$

$$m_{[k_1][k_2]}^0 = \int \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{[k_1]} (y - m_y)^{[k_2]} p_2(x, y) dx dy. \quad (2.26)$$

Бошланғич моментлардан кўп ҳолларда биринчи тартибли, яъни

$$m_{10} = M(X^1 Y^0) = M(X) = m_x, \quad m_{01} = M(X^0 Y^1) = M(Y) = m_y \quad (2.27)$$

кўлланилади.

Марказий моментлардан эса кшпинча иккинчи тартибли

$$\begin{aligned} D_x = m_{20}^0 &= M[(X - m_x)^2 (Y - m_y)^0] = M[(X - m_x)^2], \\ D_y = m_{02}^0 &= M[(X - m_x)^0 (Y - m_y)^2] = M[(Y - m_y)^2] \end{aligned} \quad (2.28)$$

кўлланилади.

Аралаш моментлардан эса корреляцион моменти деб аталган иккинчи тартибли марказий момент

$$m_{11}^0 = K_{xy} = M(X_0^1 Y_0) = M[(X - m_x)(Y - m_y)] \quad (2.29)$$

кўп кўлланилади.

Дискрет ҳолда  $K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{ij}, \quad (2.30a)$

узлуксиз ҳолда  $K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) p_2(x, y) dx dy. \quad (2.30b)$

Корреляция коэффиценти  $-1 \leq R_{xy} \leq 1$  шартни қаноатлантириб,  $X$  ва  $Y$  тасодифий миқдорлар орасидаги чизиқли боғлиқлик даражасини аниқлайди.

Агар  $X$  ва  $Y$  боғлиқ бўлмаса,  $K_{xy}, R_{xy} = 0$  бўлади. Лекин уларнинг нолга тенг бўлишидан боғлиқмаслиги келиб чиқмайди (Гаусс тақсимоидан ташқари). Кўпинча,

$$\begin{aligned} M(X|y) &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x|y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x p_2(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx}, \\ D(X|y) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X|y)]^2 p_1(x|y) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X|y)]^2 p_2(x, y) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dx} \end{aligned} \quad (2.32)$$

шартли моментлардан фойдаланилади.  $n$  та  $X_1, X_2, \dots, X_n$  тасодифий миқдорлар учун

$$\begin{aligned} K_{x_i x_j} &= M\{[X_i - M(X_i)][X_j - M(X_j)]\}, \quad i \neq j, \\ R_{x_i x_j} &= K_{x_i x_j} / \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (2.33)$$

муносабатлардан фойдаланилади.

Агар  $Y_1 = g_1(X_1, X_2), Y_2 = g_2(X_1, X_2) \quad (2.34)$

бўлса, қуйидагилар ўринли:

$$F_2(y_1, y_2) = p[g_1(x_1, x_2) < y_1, g_2(x_1, x_2) < y_2] = \iint_D p_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (2.35)$$

$$p_2(y_1, y_2) = \partial^2 F_2(y_1, y_2) / \partial y_1 \partial y_2, \quad (2.36)$$

бунда  $D [g_1(x_1, x_2) < y_1, g_2(x_1, x_2) < y_2]$  шартни қаноатлантирувчи соҳа.

Агар  $X_1=h_1(Y_1,Y_2)$  ва  $X_2=h_2(Y_1,Y_2)$  тескари функциялар мавжуд бўлса,

$$p_2(y_1, y_2) = p_2[h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)] |D_2|, \quad (2.37)$$

$$\text{бунда } D_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} = \begin{vmatrix} \partial h_1 / \partial y_1 & \partial h_1 / \partial y_2 \\ \partial h_2 / \partial y_1 & \partial h_2 / \partial y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}}, \quad (2.38)$$

алмаштиришлар якобиани.

(2.34) – (2.38) га ўхшаш формулаларни юқори ўлчовли тасодифий микдорлар учун ҳам келтириш мумкин.

Агар  $P_2(x_1, x_2)$  зичлик функция маълум бўлса,  $Y=Y_1=g_1(X_1, X_2)=g(X_1, X_2)$ ,

$Y_2=g_2(X_1, X_2)=X_2$  (ёки  $X_1$ ) ларни аниқлаш мумкин.

$X_1=h_1(Y_1, Y_2)=h(Y, Y_2)$  тескари функция маълум бўлганда бу алмаштиришга (2.37) формулани қўллаш мумкин. Бу ҳолда алмаштириш якобиани

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial h(y, y_2)}{\partial y} & \frac{\partial h(y, y_2)}{\partial y_2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial h(y, y_2)}{\partial y}$$

$$\text{кўринишга эга бўлиб, (2.37) } p_2(y, y_2) = p_2[h(y, y_2), y_2] \left| \frac{\partial h(y, y_2)}{\partial y} \right|, \quad (2.39)$$

кўринишни олади. (2.39) ни  $y_2$  бўйича интеграллаб

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y_1, y_2) dy_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2[h(y_1, y_2), y_2] \left| \frac{\partial h(y, y_2)}{\partial y} \right| dy_2 \quad (2.40)$$

формулага эга бўламиз. Бу формула икки тасодифий микдор йиғиндисининг зичлик функциясини топиш имконини беради.

Икки тасодифий микдор айирмаси, кўпайтмаси ва нисбатининг зичлик функциялари қуйидагича аниқланади:

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y - x_2, x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y - x_1, x_1) dx_1, Y = X_1 + X_2, \quad (2.41)$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(y + x_2, x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x_1 - y, x_1) dx_1, Y = X_1 - X_2, \quad (2.42)$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2\left(\frac{y}{x_2}, x_2\right) \frac{1}{|x_2|} dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2\left(\frac{y}{x_1}, x_1\right) \frac{1}{|x_1|} dx_1, Y = X_1 / X_2 \quad (2.43)$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(yx_2, x_2) |x_2| dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2\left(\frac{x_1}{y}, x_1\right) \frac{x_1}{y^2} dx_1, Y = \frac{X_1}{X_2}. \quad (2.44)$$

Зичлик функциялари  $p_1(x_1)$  ва  $p_2(x_2)$  бўлган  $X_1$  ва  $X_2$  боғлиқмас тасодифий микдорлар учун  $p_1(x_1, x_2) = p_1(x_1) \cdot p_1(x_2)$  бўлиб, (2.41) – (2.44) формулалар қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y - x_2) p_1(x_2) dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y - x_1) p_1(x_1) dx_1, Y = X_1 + X_2, \quad (2.45)$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(y+x_2)p_1(x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x_1-y)p_1(x_1)dx_1, Y = X_1 - X_2, \quad (2.46)$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1\left(\frac{y}{x_2}\right)p_1(x_2)\frac{1}{|x_2|}dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1\left(\frac{y}{x_1}\right)p_1(x_1)\frac{1}{|x_2|}dx_1, Y = X_1 X_2, \quad (2.47)$$

$$p_1(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(yx_2)p_1(x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p_1\left(\frac{x_1}{y}\right)p_1(x_1)\left|\frac{x_1}{y^2}\right|dx_1, Y = \frac{X_1}{X_2}. \quad (2.48)$$

Амалда  $n > 2$  ҳол учун йиғиндининг тақсимот қонуни характеристик функциялар аппаратида фойдаланиб топилади. Боғлиқ бўлмаган тасодифий микдорлар йиғиндиси  $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  нинг характеристик функцияси

$$\Theta_n(j\nu) = M\{e^{j\nu Y}\} = \prod_{i=1}^n \Theta_{i1}(j\nu) \quad (2.49)$$

бўлиб, унга мос зичлик функция

$$p_n(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\nu y} \Theta_n(j\nu) d\nu \quad (2.50)$$

формула бўйича ҳисобланади.

$Z_1 = g_1(X, Y)$  ва  $Z_2 = g_2(X, Y)$  тасодифий микдорларнинг сонли характеристикалари қуйидагича ҳисобланади:

$$m_{z_k} = \sum_i \sum_j g_k(x_i, y_j) p_{ij}, \quad m_{z_k} = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(x, y) p(x, y) dx dy, \quad (2.51)$$

$$D(Z_k) = \sum_i \sum_j [g_k(x_i, y_i) - m_{z_k}]^2 p_{ij}, \quad D(Z_k) = \int_{-\infty}^{\infty} [g_k(x, y) - m_{z_k}]^2 p_2(x, y) dx dy, \quad (2.52)$$

$$K_{z_k} = \sum_i \sum_j [g_1(x_i, y_i) - m_{z_1}] [g_2(x_i, y_i) - m_{z_2}] p_{ij}, \quad (2.53)$$

$$K_{z_k} = \int_{-\infty}^{\infty} [g_1(x, y) - m_{z_1}] [g_2(x, y) - m_{z_2}] p_2(x, y) dx dy,$$

бунда  $k=1, 2$ ;  $x_i, y_i$  –  $X$  ва  $Y$  тасодифий микдорларнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар.

Хусусий ҳолларда (2.51) – (2.53) формулалар қуйидагича ёзилади.

1. Агар  $C$  – тасодифий бўлмаса  $M(C) = C, M(CX) = CM(X)$ . (2.54)

2.  $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$ . (2.55)

3.  $M\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i M(X_i) + b$ , (2.56)

бунда  $a_i, b$  – тасодифий коэффициентлар.

4.  $M(XY) = M(X) M(Y) + K_{xy}$ . (2.57)

Агар  $K_{xy} = 0$  бўлса,  $M(XY) = M(X) M(Y)$ . (2.58)

5. Агар  $C$  – тасодифий бўлмаса,  $D(C) = 0$  (2.59)

бўлади.

6.  $D(CX) = C^2 D(X)$ ,  $\sigma(CX) = |C| \sigma(X)$ . (2.60)

$$7. D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2K_{xy}. \quad (2.61)$$

$$\text{Агар } K_{xy} = 0 \text{ бўлса, } D(X \pm Y) = D(X) + D(Y). \quad (2.62)$$

$$8. D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}. \quad (2.63)$$

$$\text{Агар } K_{ij} = 0 \text{ бўлса, } D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i). \quad (2.64)$$

$$9. \text{ Агар } X \text{ ва } Y \text{ тасодифий миқдорлар боғлиқ бўлмаса,} \\ D(XY) = D(X)D(Y) + m_x^2 D(Y) + m_y^2 D(X). \quad (2.65)$$

бўлади.

## МИСОЛЛАР

2.1.  $(X, Y)$  икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни қуйидаги жадвалда берилган.

| $y_i$ | $x_i$ |       |
|-------|-------|-------|
|       | $x_1$ | $x_2$ |
| $y_1$ | 0,10  | 0,15  |
| $y_2$ | 0,15  | 0,25  |
| $y_3$ | 0,20  | 0,10  |

1)  $X$  ва  $Y$  ларнинг тақсимот қонунларини аниқланг; 2)  $Y$   $y_1$  қийматни қабул қилади деган шартда  $X$  тасодифий миқдорнинг ва  $X$   $x_2$  қийматни қабул қилади деган шартда  $Y$  тасодифий миқдорнинг шартли тақсимот қонунларини аниқланг.

*Ечиш.* 1) (1.2.2) формуладан фойдаланиб,

$$p(x_1) = \sum_{j=1}^3 p(x_1, y_j) = p(x_1, y_1) + p(x_1, y_2) + p(x_1, y_3) = 0,10 + 0,15 + 0,20 = 0,45,$$

$$p(x_2) = \sum_{j=1}^3 p(x_2, y_j) = p(x_2, y_1) + p(x_2, y_2) + p(x_2, y_3) = 0,15 + 0,25 + 0,10 = 0,50.$$

Шундай қилиб,

| $x_i$    | $x_1$ | $x_2$ |
|----------|-------|-------|
| $P(x_i)$ | 0,45  | 0,55  |

Шунга ўхшаш

$$p(y_1) = \sum_{i=1}^2 p(x_i, y_1) = p(x_1, y_1) + p(x_2, y_1) = 0,10 + 0,15 = 0,25,$$

$$p(y_2) = p(x_1, y_2) + p(x_2, y_2) = 0,15 + 0,25 = 0,40, \quad p(y_3) = p(x_1, y_3) + p(x_2, y_3) = 0,20 + 0,10 = 0,30.$$

Шундай қилиб,

| $y_i$    | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |
|----------|-------|-------|-------|
| $P(y_i)$ | 0,25  | 0,40  | 0,35  |

2) Эҳтимолликларни кшпайтириш формуласига кўра

$$p(x_1|y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,10}{0,25} = \frac{2}{5}, \quad p(x_2|y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,15}{0,25} = \frac{3}{5}$$

бўлиб,

|              |       |       |
|--------------|-------|-------|
| $x_i$        | $x_1$ | $x_2$ |
| $p(x_i y_1)$ | $2/5$ | $3/5$ |

бўлади. Шунга ўхшаш

$$p(y_1|x_2) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(x_2)} = \frac{0,15}{0,55} = \frac{3}{11}, p(y_2|x_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(x_2)} = \frac{0,25}{0,55} = \frac{5}{11}, p(y_3|x_2) = \frac{p(x_2, y_3)}{p(x_2)} = \frac{0,15}{0,55} = \frac{3}{11}.$$

|              |        |        |        |
|--------------|--------|--------|--------|
| $y_i$        | $y_1$  | $y_2$  | $y_3$  |
| $P(y_i x_2)$ | $3/11$ | $5/11$ | $3/11$ |

бўлади.

2.2. Боғлиқ бўлмаган дискрет тасодифий миқдорлар  $X$  ва  $Y$  тасодифий миқдорлар мос равишда 0,1,3 қийматларни  $1/2$ ,  $3/8$  ва  $1/8$  эҳтимолликлар ва 0,1 қийматларни  $1/3$   $2/3$  эҳтимолликлар билан қабул қилса,  $F_2(x,y)$  тақсимот функцияни ҳисобланг ва ясанг.

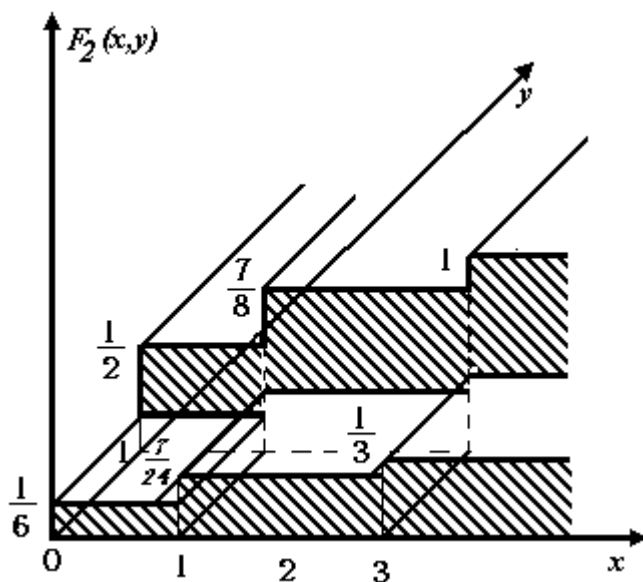
Ечиш: 
$$F_2(x, y) = P(X < x, Y < y) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i) \sum_{y_j < y} P(Y = y_j).$$

$$x \leq 0, y \leq 0 \text{ да } F_2(x, y) = 0. \quad 0 < x \leq 1, 0 < y \leq 1 \text{ да } F_2(x, y) = P(X = x_0 = 0)P(Y = y_0 = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

$0 < x \leq 1, y > 1$  да

$$F_2(x, y) = P(X = x_0 = 0)[P(Y = y_0 = 0) + P(Y = y_1 = 1)] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$F_2(x, y) = \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} \right) \left( \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) = 1.$$



2.4 – Икки ўлчовли тақсимот функция.

$F_2(x, y)$  тақсимот функциянинг графиги 2.4 – расмда келтирилган.

2.3.  $(X, Y)$  икки ўлчовли тасодифий миқдор зичлик функцияси

$$p_2(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-R_{xy}^2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)} \left[ \frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2R_{xy}(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\},$$

кўринишга эга бўлган Гаусс тақсимотига бўйсунди. Бунда  $m_x$ ,  $m_y$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $R_{xy}$  – тақсимот параметрлари.

1)  $X$  ва  $Y$  ларнинг  $p_1(x)$  ва  $p_1(y)$  зичлик функцияларини; 2)  $p_1(y/x)$  ва  $p_1(x/y)$  шартли зичлик функцияларини аниқланг.

Ечиш: (2.15) формулага кўра  $p_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_2(x, y) dy$ .

$$\frac{(x - m_x)}{\sqrt{2}\sigma_x} = u, \quad \frac{(y - m_y)}{\sqrt{2}\sigma_y} = v, \text{ алмаштиришлар қилсак,}$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-R_{xy}^2}} \exp\left(-\frac{u^2}{1-R_{xy}^2}\right) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{1-R_{xy}^2}v^2 + \frac{2R_{xy}u}{1-R_{xy}^2}\right) dv$$

га эга бўламиз.  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-p^2x^2 \pm qx) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} \exp\left(\frac{q^2}{4p^2}\right)$  формуладан фойдаланиб,

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \text{ ни топамиз.}$$

Шунга ўхшаш  $p_1(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left[-\frac{(y - m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]$ . 2) (2.18) формулага кўра

$$p_1(y|x) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}\sqrt{1-R_{xy}^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)\sigma_y^2} \cdot \left[y - m_y - R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x)\right]^2\right\},$$

$$p_1(x|y) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}\sqrt{1-R_{xy}^2}} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-R_{xy}^2)\sigma_x^2} \times \left[x - m_x - R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y)\right]^2\right\},$$

$$m_{y1x} = m_y + R_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x), \quad \sigma_{y1x} = \sigma_y \sqrt{1-R_{xy}^2}, \quad m_{x1y} = m_x + R_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - m_y), \quad \sigma_{x1y} = \sigma_x \sqrt{1-R_{xy}^2}.$$

2.4.  $(X, Y)$  икки ўлчовли дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот қонуни куйидаги жадвалда берилган:

| $y_j$    | $x_i$   |         |
|----------|---------|---------|
|          | $x_1=0$ | $x_2=1$ |
| $y_1=-1$ | 0,10    | 0,15    |
| $y_2=0$  | 0,15    | 0,25    |
| $y_3=1$  | 0,20    | 0,15    |

1)  $m_x$  ва  $m_y$  ни топинг; 2)  $\sigma_x^2$  ва  $\sigma_y^2$  ни топинг; 3)  $M(X/y=y_3)$  ни топинг;

4)  $K_{xy}$  ва  $R_{xy}$  ларни топинг.

Ечиш: Эҳтимолликларни устун бўйича қўшиб,

| $x_i$    | $x_1=0$ | $x_2=1$ |
|----------|---------|---------|
| $P(x_i)$ | 0,45    | 0,55    |

сатр бўйича қўшиб,

| $y_j$    | $y_1=-1$ | $y_2=0$ | $y_3=1$ |
|----------|----------|---------|---------|
| $P(y_j)$ | 0,25     | 0,40    | 0,35    |

тақсимот қонунларини топамиз.

$$p(x_1|y_3) = \frac{p(x_1, y_3)}{p(y_3)} = \frac{0,20}{0,35} = \frac{4}{7}, \quad p(x_2|y_3) = \frac{0,15}{0,35} = \frac{3}{7}.$$

$$1. m_x = \sum_i \sum_j x_i p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^2 x_i p(x_i) = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,55 = 0,55,$$

$$m_y = \sum_i \sum_j y_j p(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^3 y_j p(y_j) = -1 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,40 + 1 \cdot 0,35 = 0,10.$$

$$2. D(X) = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^2 p(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^2 (x_i - m_x)^2 p(x_i) = \\ = \sum_{i=1}^2 x_i^2 p(x_i) - m_x^2 = 0 \cdot 0,45 + 1 \cdot 0,55 - 0,55^2 \approx 0,248,$$

$$D(Y) = \sum_i \sum_j (y_j - m_y)^2 p(x_i, y_j) = \sum_{j=1}^3 (y_j - m_y)^2 p(y_j) = \sum_{j=1}^3 y_j^2 p(y_j) - m_y^2 = 1 \cdot 0,25 + 0 \cdot 0,40 + 1 \cdot 0,35 - 0,01 = 0,59;$$

$$3. M(X|y_3 = 1) = \sum_{i=1}^2 x_i p(x_i|y_3) = 0 \cdot \frac{4}{7} + 1 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7}.$$

4.

$$K_{xy} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (x_i - m_x)(y_j - m_y) p(x_i, y_j) = (x_1 - m_x)[(y_1 - m_y)p(x_1, y_1) + (y_2 - m_y)p(x_1, y_2) + \\ + (y_3 - m_y)p(x_1, y_3)] + (x_2 - m_x)[(y_1 - m_y)p(x_2, y_1) + \\ + (y_2 - m_y)p(x_2, y_2) + (y_3 - m_y)p(x_2, y_3)] = \\ = (0 - 0,55)[(-1 - 0,10) \cdot 0,10 + (0 - 0,10)0,15 + (1 - 0,10) \cdot 0,20] + \\ + (1 - 0,55) \cdot [(-1 - 0,10) \cdot 0,15 + (0 - 0,10)0,25 + (1 - 0,10) \cdot 0,15] = -0,055$$

$$R_{xy} = K_{xy} / \sigma_x \sigma_y = -0,055 / \sqrt{0,248} \sqrt{0,59} \approx -0,144.$$

2.5. (X,Y)икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг зичлик функцияси

$$p_2(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & x < 0, y < 0 \end{cases}$$

кўринишга эга.

1)  $m_x$  ва  $m_y$  ни аниқланг; 2)  $D(x)$  ва  $D(y)$  ни аниқланг.

Ечиш:  $P_1(x)$  ва  $P_1(y)$  ларни топамиз.

$$p_1(x) = \int_0^{\infty} p_2(x, y) dy = 4xe^{-x^2} \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy = 2xe^{-x^2}, \quad x > 0. \quad p_1(y) = \int_0^{\infty} p_2(x, y) dx = 2ye^{-y^2}, \quad y > 0.$$

$$. m_x = \int_0^{\infty} xp_1(x) dx = 2 \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx. \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\alpha \frac{n+1}{2}} \quad \alpha > 0, n > -1 \text{ бўлганда}$$

$$m_x = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{2} = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad m_y = 2 \int_0^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2.

$$D(X) = \int_0^{\infty} (x - m_x)^2 p_1(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 p_1(x) dx - m_x^2 = 2 \int_0^{\infty} x^3 e^{-x^2} dx - m_x^2 = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{2} - \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$D(Y) = D(X) = 1 - \pi/4.$$

2.6.  $X_1$  ва  $X_2$  боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар

$$P(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1}, \quad P(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}, \quad k = 0, 1, \dots$$

кўринишидаги Пуассон қонуни бўйича тақсимланган.  $Y = X_1 + X_2$  тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини аниқланг.

*Ечилиш:* Бу масалани тасодифий миқдорларнинг тақсимот қонунлари ва характеристик функциялари аппарати ёрдамида ечамиз.

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{k=0}^n P(k)P(n-k) = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} = e^{-\lambda_1-\lambda_2} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_2^n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k = \\ &= e^{-\lambda_1-\lambda_2} \frac{\lambda_2^n}{n!} \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k.$$

2  $X_1$  ва  $X_2$  тасодифий миқдорларнинг характеристик функцияларини аниқлаймиз;

$$\Theta_{x_1}(j\nu) = M(e^{j\nu k}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{j\nu k} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} = e^{-\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 e^{j\nu})^k}{k!} = \exp(-\lambda_1) \exp(-\lambda_1 e^{j\nu}) \exp[\lambda_1(e^{j\nu} - 1)].$$

Шунга ўхшаш  $\Theta_{x_2}(j\nu) = \exp[\lambda_2(e^{j\nu} - 1)]$ . (2.14) формулага кўра

$$\Theta_y(j\nu) = \Theta_{x_1}(j\nu) \Theta_{x_2}(j\nu) = \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)(e^{j\nu} - 1)].$$

Шундай қилиб,  $Y = X_1 + X_2$  тасодифий миқдор ҳам параметри  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$  бўлган Пуассон қонунига бўйсунди.

2.7.  $X_1$  ва  $X_2$  боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорлар

$$P(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \quad \text{ва} \quad P(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{кўринишдаги Пуассон қонуни}$$

бўйича тақсимланган  $Y = X_1 - X_2$  тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини аниқланг.

*Ечилиш:*

$$P(Y=n)=\sum_{k=0}^{\infty} P(k)P(n+k)=P(X_1=n)P(X_2=0)+$$

$$+P(X_1=n+1)P(X_2=1)+\dots+P(X_1=n+k)P(X_2=k)+\dots=$$

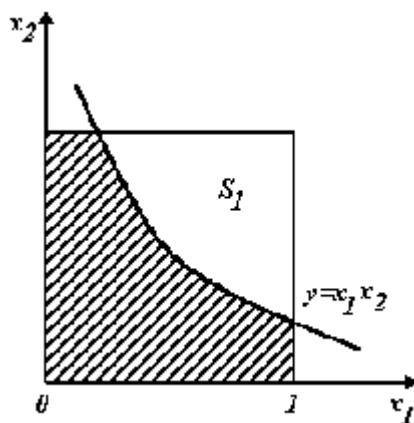
$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^{n+k}}{(n+k)!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \lambda_1^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{\lambda_1 \lambda_2})^{2k}}{(n+k)! k!}, \quad n \geq 0.$$

$n$  – тартибли  $I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(n+k)! k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ , Бессел функцияси дан фойдаланиб,

$$P(Y=n) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{n/2} I_{|n|}(2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \text{ ечимга эга бўламиз.}$$

2.8. Боғлиқ бўлмаган  $X_1$  ва  $X_2$  тасодифий миқдорлар  $(0,1)$  интервалда текис тақсимланган:  $Y=X_1X_2$  тасодифий миқдорнинг  $F_1(y)$  тақсимот функциясини,  $p_1(y)$  зичлик функциясини ҳисобланг.

*Ечиш:* Интеграллаш соҳаси 2.5 – расмда келтирилган.



2.5 – расм.  $F_1(y)$  ни аниқловчи интеграллаш соҳаси.

$$F_1(y) = P(Y < y) = 1 - P(Y > y) = 1 - \iint_{(S_1)} dx_1 dx_2 = 1 - \int_y^1 dx_1 \int_{y/x_1}^1 dx_2 = 1 - \int_y^1 \left(1 - \frac{y}{x_1}\right) dx_1 = y(1 - \ln y).$$

Демак,

$$F_1(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \text{ бўлса,} \\ y(1 - \ln y) & 0 < y \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & y > 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad p_1(y) = F_1'(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \text{ бўлса,} \\ y(1 - \ln y) & 0 < y \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 1, & y > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

2.9. Икки ўлчовли  $(X,Y)$  тасодифий миқдор

| $y_j$    | $x_i$   |         |
|----------|---------|---------|
|          | $x_1=0$ | $x_2=1$ |
| $Y_1=-1$ | 0,1     | 0,2     |
| $Y_2=0$  | 0,2     | 0,3     |
| $Y_3=1$  | 0       | 0,2     |

конун бўйича тақсимланган.

$Z=2X+Y^2$  тасодифий миқдорнинг  $M(Z)=m_z$  ўрта қийматини,  $D(Z)=\sigma_z^2$  дисперсияни аниқланг.

*Ечиш:* (2.51) ва (2.52) формулалардан фойдаланиб,

$$m_z = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (2x_i + y_j^2) p_{ij} = (2x_1 + y_1^2) p_{11} + (2x_2 + y_1^2) p_{21} + (2x_1 + y_2^2) p_{12} + (2x_2 + y_2^2) p_{22} + (2x_1 + y_3^2) p_{13} + (2x_2 + y_3^2) p_{23} = (2 \cdot 0 + 1) 0,1 + (2 \cdot 1 + 1) 0,2 + (2 \cdot 0 + 0) 0,2 + (2 \cdot 1 + 0) 0,3 + (2 \cdot 0 + 1) 0 + (2 \cdot 1 + 1) 0,2 = 1,9.$$

$$D(Z) = M(Z^2) - m_z^2,$$

$$M(Z^2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 (2x_i + y_j^2)^2 p_{ij} = (2x_1 + y_1^2)^2 p_{11} + (2x_2 + y_1^2)^2 p_{21} + (2x_1 + y_2^2)^2 p_{12} + (2x_2 + y_2^2)^2 p_{22} + (2x_1 + y_3^2)^2 p_{13} + (2x_2 + y_3^2)^2 p_{23} = 1^2 \cdot 0,1 + (2 \cdot 1 + 1)^2 0,2 + (2 \cdot 1 + 0)^2 0,3 + (2 \cdot 1 + 1)^2 0,2 = 4,9,$$

$$D(Z) = 4,9 - 1,9^2 = 1,29$$

ларни топамиз.

2.10.  $X$  ва  $Y$  тасодифий микдорларнинг сонли характеристикаларини маълум деб ҳисоблаб,  $U = aX + bY$ ,  $V = cX + dY$ , тасодифий микдорларнинг ўрта қийматларини, дисперсияларини ва корреляцион моментларини топинг.

*Ечиш:* (2.55), (2.61), (2.29), (2.57) формулаларга асосан

$$M(U) = M(aX + bY) = aM(X) + bM(Y), \quad M(V) = M(cX + dY) = cM(X) + dM(Y)$$

$$D(U) = D(aX + bY) = a^2 D(X) + b^2 D(Y) + 2K_{xy} = a^2 D(X) + b^2 D(Y) + 2abR_{xy} \sigma_x \sigma_y,$$

$$D(V) = D(cX + dY) = c^2 D(X) + d^2 D(Y) + 2K_{xy} = c^2 D(X) + d^2 D(Y) + 2cdR_{xy} \sigma_x \sigma_y,$$

$$K_{uv} = M\{[U - M(U)][V - M(V)]\} = M(UV) - M(U)M(V) =$$

$$= M[(aX + bY)(cX + dY)] - [aM(X) + bM(Y)][cM(X) + dM(Y)] =$$

$$= acD(X) + bdD(Y) + (bc + ad)K_{xy} = acD(X) + bdD(Y) + R_{xy} \sigma_x \sigma_y.$$

Агар  $X$  ва  $Y$  лар боғлиқ бўлмаса  $D(U)$ ,  $D(V)$  ва  $K_{uv}$  ларнинг ифодалари соддалашади:

$$D(U) = a^2 D(X) + b^2 D(Y), \quad D(V) = c^2 D(X) + d^2 D(Y), \quad K_{uv} = acD(X) + bdD(Y).$$

## МАСАЛАЛАР ВА ЖАВОБЛАР

2.1. Иккилик тўсиқли алоқа канали қуйидаги тақсимот қонуни бўйича берилган

| $y_j$ | $x_i$   |         |
|-------|---------|---------|
|       | $x_1=0$ | $x_2=1$ |
| $Y_1$ | 0,45    | 0,05    |
| $Y_2$ | 0,05    | 0,45    |

1)  $p(x_i)$   $x_i$  ва  $p(y_j)$  эҳтимолликларни топинг; 2)  $p(x_i|y_j)$ ; 3) ва  $p(y_j|x_i)$  шартли эҳтимолликларни топинг.

*Жавоб:*

$$1) p(x_1) = p(x_2) = 0,5, p(y_1) = p(y_2) = 0,5;$$

$$2) p(x_1|y_1) = p(x_2|y_2) = 0,9, p(x_2|y_1) = p(x_1|y_2) = 0,1;$$

$$3) p(y_1|x_1) = p(y_2|x_2) = 0,9, p(y_1|x_2) = p(y_2|x_1) = 0,1.$$

2.2. Икки ўлчовли тасодифий микдорнинг тақсимот қонуни

| $y_j$ | $x_i$ |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |

|       |      |      |      |
|-------|------|------|------|
| $y_1$ | 0,10 | 0,30 | 0,20 |
| $y_2$ | 0,06 | 0,18 | 0,16 |

жадвал бўйича берилган.

- 1)  $X$  ва  $Y$  ларнинг тақсимот қонунларини ёзинг; 2)  $X$  нинг  $Y = y_1$  қийматни қабул қилгандаги шартли тақсимот қонунини ёзинг.

*Жавоб:*

1.

|          |       |       |       |
|----------|-------|-------|-------|
| $x_i$    | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| $p(x_i)$ | 0,16  | 0,48  | 0,36  |

|          |       |       |
|----------|-------|-------|
| $y_j$    | $y_1$ | $y_2$ |
| $p(y_j)$ | 0,60  | 0,40  |

2.

|              |       |       |       |
|--------------|-------|-------|-------|
| $x_i$        | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
| $p(x_i y_j)$ | 1/6   | 1/2   | 1/3   |

2.3. Мўлжалга қараб икки марта отишлар амалга оширилди. Мўлжалга биринчи марта тегиш эҳтимоли  $P_1$ , иккинчи отишда тегиш эҳтимоли  $P_2$  га тенг. Биринчи отишда тегишлар сонини  $X$ , иккинчи отишда тегишлар сонини  $Y$  билан белгилаб, икки ўлчовли  $(X, Y)$  тасодифий миқдорнинг  $F_2(x, y)$  тақсимот функциясини топинг.

*Жавоб:*

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \quad y \leq 0 \text{ бўлганда,} \\ (1 - p_1)(1 - p_2) & 0 < x \leq 1, \quad 0 < y \leq 1 \text{ бўлганда,} \\ 1 - p_1 & 0 < x \leq 1, \quad y > 1 \text{ бўлганда,} \\ 1 - p_2 & x > 1, \quad 0 < y \leq 1 \text{ бўлганда,} \\ 1 & x > 1, \quad y > 1 \text{ бўлганда.} \end{cases}$$

2.4. Алоқа канали орқали битта сигнал берилди. Сигнални тўғри қабул қилиш эҳтимоли  $p=0,8$ .

Тўғри қабул қилишлар сонини  $X$ , нотўғри қабул қилишлар сонини  $Y$  десак,  $(X, Y)$  икки ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини жадвал ва тақсимот функция кўринишида ёзинг.

*Жавоб:*

| $y_j$ | $x_i$   |         |
|-------|---------|---------|
|       | $x_1=0$ | $x_2=1$ |
| $Y_1$ | 0       | 0,8     |
| $Y_2$ | 0,2     | 0       |

$$F_2(x, y) = \begin{cases} 0,2 & 0 < x \leq 1, y > 1, \\ 0,8 & x > 1, 0 < y \leq 1, \\ 1 & x > 1, y > 1, \\ 0. & \end{cases}$$

2.5.  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорларнинг зичлик функциялари  $p_1(x_1), p_1(x_2), \dots, p_n(x_n)$  лар берилган.  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$   $n$  ўлчовли тасодифий миқдорнинг тақсимот функциясини топинг.

Жавоб:  $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{x_i} p_1(y_i) dy_i$ .

2.6.  $n$  та боғлиқ бўлмаган ўлчашлар натижалари жадвалга ёзилди. Бу натижаларни математик кутилмаси  $m$  ва дисперсияси  $\sigma^2$  бўлган  $X$  тасодифий миқдорнинг қийматлари деб қараб: 1) ўлчашлар ўрта арифметигининг  $m_n$  – математик кутилмасини ва  $\sigma_n^2$  – дисперсиясини аниқланг;

2)  $\Delta = \sigma_x / m_n$  – нисбий хатоликни ҳисобланг.

Жавоб: 1)  $m_n = m$ ,  $\sigma_n^2 = \sigma^2 / n$ , 2)  $\Delta = \sigma \sqrt{n} / m$ .

2.7. Агар боғлиқ бўлмаган  $X$  ва  $Y$  тасодифий миқдорлар  $(a, b)$  ва  $(c, d)$  интервалларда текис тақсимланган бўлса,  $m_z = M(X, Y)$  ва  $\sigma_z^2 = D(X, Y)$  ларни топинг.

Жавоб:  $m_z = (a+b)(c+d)/4$ ,  $\sigma_z^2 = (a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2)9 - (a+b)^2(c+d)^2/16$ .

2.8. Квадратнинг юзини ҳисоблаш учун унинг икки томонини қандайдир хатолик билан ўлчаб, улар бир бирига қўпайтирилади.

Квадрат юзининг хатолиги 1% дан ошмаслиги учун  $\Delta = \sigma / m$  қанча бўлиши керак?

Жавоб:  $\Delta = 0,71\%$ .

2.9. Электрон нурли қувур қўлланилган радиолокацион станция экрани доирасининг радиуси  $a$  га тенг. Тўсиқ мавжудлиги туфайли экраннинг ихтиёрий жойида доғ пайдо бўлиши мумкин.

Доғнинг доира марказидан узоқлашиш масофасининг математик кутилмаси ва дисперсиясини топинг.

Жавоб:  $m_r = 2a/3$ ,  $\sigma_r^2 = a^2/18$ .

2.10.  $M(X) = M(Y) = M(Z) = 10$ ,  $D(X) = 1$ ,  $D(Y) = 4$ ,  $D(Z) = 9$   $R_{xy} = 0$ ,  $R_{xz} = 1/4$ ,  $R_{yz} = 1/2$  берилган. Қуйидагиларни ҳисобланг:

а)  $M(X+Y)$ ; б)  $D(X+Y)$ ; в)  $M(X+Z)$ ; г)  $D(X+Z)$ ; д)  $M(X-Z)$ ;

ж)  $M(X+Y-2Z)$ ; з)  $D(X+Y-2Z)$ ; и)  $M[M(X)]$ ; к)  $D[M(X)]$ ; л)  $M[D(X)]$ ;

м)  $D[D(X)]$ .

Жавоб: а) 20; б) 5; в) 20; г) 11,5; д) 0; е) 8,5; ж) 0; з) 26; и) 10; к) 0; л) 1; м) 0.

### 3. МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА АСОСЛАРИ

#### НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

Математик статистика математиканинг статистик маълумотлар натижаларини таълил қилиш асосида тасодифий жараёнлар ва рўй беришлар қонуниятларини очадиган қисмидир. Математик статистиканинг қуйидаги учта масаласи долзарб амалий аҳамиятга эга:

1. Номаълум тақсимот функция ёки зичлик функцияни баҳолаш.  
Бунда умумназарий мулоҳазаларга кўра  $X$  тасодифий миқдор ёки зичлик функциянинг кўриниши боғлиқ бўлмаган ўлчашлар натижалари  $x_1, x_2, \dots, x_n$  лар орқали баҳоланади;

2. Номаълум параметрни баҳолаш.  
Бунда  $X$  миқдорнинг сонли характеристикалари, радиоимпульснинг амплитудаси, частотаси ёки фазаси, тасодифий жараённинг корреляцион функцияси ёки спектрал зичлиги ва шунга ўхшашлар баҳоланади;

3. Фазаларни статистик текшириш.  
Бунда  $X$  тасодифий миқдор ёки унинг тақсимот функциясига нисбатан бир ёки бир неча фазалар ўртага ташланиб, бу фазаларни қанчалик тўғрилиги бирор мезон орқали текшириб кўрилади.

Математик статистикада дастлабки маълумотлар сифатида  $X$  тасодифий миқдор устида олиб борилган кузатишлар натижалари олинади.  $X$  нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари бош тўплам дейилиб,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  тажриба натижалари танланма қийматлар дейилади.

Ўсиш тартибида жойлаштирилган тажриба натижалари вариацион ёки статистик қатор дейилади. Тажриба натижаларининг сони  $n$  қанчалик катта бўлса, баҳолаш аниқлиги шунчалик юқори бўлади.

$F_1(x)$  тақсимот функцияни баҳоловчи  $F_1^*$  функция эмпирик ёки статистик тақсимот функция дейилади.

$$F_1^*(x) = P^*(X < x) = v/n, \quad (3.1)$$

бунда  $v$ - танланманинг  $x$  дан кичик қийматлари сони.

Агар танланма узлуксиз тақсимотга эга бўлган тасодифий миқдор бўйича олинган бўлиб, уларнинг сони 100 дан ортиқ бўлса, у ҳолда  $p_1(x)$  зичлик функцияни статистик баҳоловчи гистограмма қуриш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун тажриба натижаларини 2 та тенг бўлакка бўлиб (узунлиги  $h$ ), ҳар бир интервалда

$$p_i^*/h=v_i/nh, \quad i=1,2,\dots,r, \quad (3.2)$$

нисбий зичлик функциялар ҳисобланади, бунда  $v_i$ -  $i$ - интервалдаги тажрибалар сони,  $p_i^*=v_i/n$ - нисбий частота  $i$ - бўлакда бўйи  $p_i^*/h$ , эни  $h$  га тенг бўлган тўртбурчаклар ясадиб, зинапоясимон эгри чизик ҳосил қилинади. Бу чизик гистограмма дейилади. Амалда гистограммани бирор аналитик ифода билан алмаштириш талаб этилади. Бу аналитик ифода зичлик функцияга қўйилган талабларни қаноатлантириши лозим. Кўпчилик зичлик функциялар

$$\frac{dp_1(x)}{dx} = \frac{x+a}{bx^2+cx+d} p_1(x)$$

дифференциал тенглама билан берилувчи Пирсон эгри чизиклари тизимини беради. Бунда  $a, b, c, d$  параметрлар статистик тақсимотнинг биринчи тўртта моментларининг мавжудлиги шартидан статистик ва назарий моментларни тенглаб аниқланади. Статистик ва назарий моментларни солиштиришда амалда кўпинча  $\chi^2$  мезони қўлланилади:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^r \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^r \frac{v_i^2}{np_i} - n, \quad (3.3)$$

бунда  $n$  – танланманинг ҳажми;  $r$  – тажриба натижалари бўлинган интерваллар сони;  $v_i$  –  $i$  – интервалдаги қийматлар сони,  $p_i^*$  - нисбий частота;  $p_i$  –  $X$  тасодифий миқдорнинг  $i$  – интервалга тушиш эҳтимоли.  $\chi^2$  мезонини қўллаш алгоритми қуйидагича:

1. (3.3) формула бўйича  $\chi^2$  нинг қиймати ҳисобланади.
2.  $k=r-s-1$  – озодлик даражаси аниқланади, бунда  $s$  – назарий тақсимотнинг параметрлари сони.
3. Аҳамиятлилик сатҳи деб аталган  $\alpha$  эҳтимолликни танлаш (одатда  $\alpha=0,05$  ёки  $\alpha=0,01$ ) деб қабул қилинади.
4. III иловадаги жадвалдан  $k$  ва  $\alpha$  нинг қийматлари бўйича  $\chi^2_{k;\alpha}$  нинг қиймати топилади:

$$p(\chi^2 > \chi^2_{k;\alpha}) = \int_{\chi^2_{k;\alpha}}^{\infty} p(\chi^2) d\chi^2 = 1 - F_1(\chi^2_{k;\alpha}). \quad (3.4)$$

5. Агар  $\chi^2 < \chi^2_{k;\alpha}$  бўлса назарий ва эмпирик тақсимотлар мос тушади деган фараз қабул қилинади, акс ҳолда фараз қабул қилинмайди. Баъзан ўрта қиймат, дисперсия,  $k$  - тартибли моментлар ҳам баҳоланади:

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (3.5)$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - (m_x^*)^2, \quad (3.6)$$

$$M^*(X^k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad (3.7)$$

$$M^*[(X - m_x^*)^k] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^k. \quad (3.8)$$

Агар тажриба натижаларида бирор қиймат бир неча марта такрорланса, (3.5) ва (3.6) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_i x_i v_i, \quad (3.5a)$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_i (x_i - m_x^*)^2 v_i = \frac{1}{n} \sum_i x_i^2 v_i - (m_x^*)^2, \quad (3.6a)$$

бунда  $x_i$  –  $X$  тасодифий миқдорнинг  $i$  – тажрибадаги қиймати;  $v_i$  –  $x_i$  қийматнинг частотаси.

Шунга ўхшаш, гуруҳланган қийматлар учун:

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r v_i a_i = \sum_{i=1}^r a_i p_i^*, \quad (3.9)$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r v_i a_i^2 - (m_x^*)^2 = \sum_{i=1}^r a_i^2 p_i^* - (m_x^*)^2, \quad (3.10)$$

бунда  $r$  – интерваллар сони;  $a_i$  – интерваллар ширталари. Агар интерваллар сони оз бўлса хатолик ортади.

Бу хатоликни камайтириш учун Шеппард тузатмасидан фойдаланилади.

Интерваллар тенг бўлганда  $\bar{m}_1^* = m_1^*, \bar{m}_2^* = m_2^* - h^2 / 12,$

$$\bar{m}_k^* = \sum_{i=0}^k C_k^i (2^{k-i} - 1) B_i m_{(k-i)}^* h^i, k = 1, 2, \dots,$$

бунда  $B_i$  – Бернулли сони.  $X$  ва  $Y$  тасодифий миқдорларнинг боғлиқлик

даражасини  $K_{xy}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*)$ , статистик корреляцион момент ва

$R_{xy}^* = \frac{K_{xy}^*}{\sigma_x^* \sigma_y^*}$  статистик корреляция коэффиценти беради. Бунда  $m_x^*, m_y^*, \sigma_x^*, \sigma_y^*$  -

$X$  ва  $Y$  тасодифий миқдорлар танланмаларининг ўрта қийматлари ва ўрта квадратик оғишларидир.  $\lambda$  параметрининг  $\hat{\lambda}$  баҳоси амалий қийматга эга бўлиши учун улар силжимаслик, ҳолатлилик ва самаралилик хоссаларига эга бўлиши зарур.

Агар  $M[\hat{\lambda}] = \lambda,$  (3.11)

шарт бажарилса, баҳо силжимас баҳо дейилади.

Агар  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{\lambda} - \lambda| < \varepsilon\} = 1$  (3.12)

шарт бажарилса, баҳо ҳолатли баҳо дейилади.

Агар  $D_{\hat{\lambda}} = M[(\hat{\lambda} - \lambda)^2] = D_{\min} \leq M[(\hat{\lambda}_i - \lambda)^2]$  (3.13)

шарт бажарилса, силжимас ва ҳолатли баҳолар самарали баҳолар дейилади, бунда  $\bar{\lambda}_i$  - ихтиёрий бошқа баҳо,

$$D_{\min} = \frac{1}{n} \{M[(\frac{\partial \ln p_1(X; \lambda)}{\partial \lambda})^2]\}^{-1}, \quad (3.14)$$

бунда  $p_1(X; \lambda)$  – зичлик функция.  $D_x$  – дисперсия баъзан

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - m_x^*)^2 = \frac{n}{n-1} D_x^*, \quad (3.15)$$

силжимас баҳо билан баҳоланади.

Таксимотнинг номаълум параметрларини баҳолашда асосан тўртта услубдан фойдаланилади: моментлар услуби, баҳоларнинг минимал дисперсияси услуби, максимал апостериор эҳтимоллик услуби, максимал ҳақиқий ўхшашлик услуби.

Моментлар услубини қўллашда танланма бўйича ҳисобланган моментлар номаълум параметрли назарий моментлар билан тенгланиб, номаълум параметрларга нисбатан тенгламалар тизими тузилади. Агар зичлик функция  $p_1(x; \lambda)$  бўлиб,  $\lambda$  - номаълум параметр бўлса,  $\lambda$

$$m_x(\lambda) = m_x^* \quad (3.16)$$

тенгламадан топилади. Агар зичлик функция  $p_1(x; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  бўлиб,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$  лар номаълум параметрлар бўлса,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  лар

$$m_j(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = m_j^*(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (3.17)$$

тенгламалар тизимидан топилади.

Бу услуб соддалиги билан қулайдир. Максимал ҳақиқий ўхшашлик услуби

$$p_{ps}(\lambda) = p\left(\frac{\lambda}{x_1}, x_2, \dots, x_n\right) = k p_{pr}(\lambda) L(\lambda), \quad (3.18)$$

апостериор зичлик функцияга асосланади, бунда

$k = p^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – танланма натижаларига боғлиқ бўлиб,  $\lambda$  га боғлиқ бўлмаган коэффициент,  $p_{pr}(\lambda)$  –  $\lambda$  нинг априор (тажрибагача) зичлик функцияси,  $L(\lambda)$  – ҳақиқий ўхшашлик функцияси.

$p_1(x; \lambda)$  зичлик функцияга эга бўлган  $X$  тасодифий миқдор учун ҳақиқий

$$\text{ўхшашлик функцияси. } L(\lambda) = \prod_{i=1}^n p_i(x_i; \lambda) \quad (3.19)$$

$$\text{кўринишда бўлади. Номаълум } \lambda \quad \left. \frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\hat{\lambda}} = \frac{\partial \ln L(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}} = 0 \quad (3.20)$$

тенгликдан топилади. Агар номаълум параметрлар  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  лар бўлса, бу номаълумлар  $\partial \ln L(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) / \partial \lambda_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k$  (3.21)

тенгламалар тизимидан топилади. Бу услуб билан олинган баҳолар ҳолатли, асимптотик силжимас, асимптотик нормал ва асимптотик самарали бўлади.

Фараз қилайлик, тажрибалар натижасида номаълум  $\lambda$  параметр учун  $\hat{\lambda} = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$  силжимас баҳо олинган. Амалда  $|\hat{\lambda} - \lambda| < \delta$  тенгсизликнинг эҳтимоли

$$P\{|\hat{\lambda} - \lambda| < \delta\} = P\{-\delta < \hat{\lambda} - \lambda < \delta\} = P\{\hat{\lambda} - \delta < \lambda < \hat{\lambda} + \delta\} = \beta \quad (3.22)$$

ишончилилик интервалини баҳолаш дейилади. Бунда  $\delta$  - баҳонинг аниқлиги;  $(\hat{\lambda} - \delta; \hat{\lambda} + \delta)$  - ишончилилик интервали. Амалда шароитга қараб  $\beta = 0,95; 0,99$ ;

0,999 қилиб танланади.  $\delta$ ,  $\beta$ ,  $n$  лардан ихтиёрий иккитаси берилганда, (3.22) формуладан учинчисини топиш мумкин.

Агар  $n$  ҳажмли танланма параметрлари  $m_x$  ва  $\sigma_x^2$  бўлган нормал қонунга бўйсунса, у ҳолда  $\beta$  эҳтимолли ишончлилик интервали қуйидаги алгоритм бўйича ҳисобланади:

$$1. (3.22) \text{ формуладан } m_x^* - z_\beta \sigma_x / \sqrt{n} < m_x < m_x^* + z_\beta \sigma_x / \sqrt{n} \quad (3.23)$$

ифодага эга бўламиз, бунда  $z_\beta = \delta_\beta \sqrt{n} / \sigma_x$ , II - илова бўйича  $\Phi(z_\beta) = (1+\beta)/2$  тенгликдан аниқланади.

2.  $\sigma_x^2$  дисперсия номалум бўлганда  $m_x$  математик кутилма учун ишончлилик интервали озодлик даражаси  $k=n-1$  бўлган Стюдент тақсимотига бўйсунадиган  $T = (m_x^* - m_x) \sqrt{n} / s$  танланма функциядан фойдаланиб аниқланади:

$$m_x^* - t_{k,\alpha/2} s / \sqrt{n} < m_x < m_x^* + t_{k,\alpha/2} s / \sqrt{n}, k = n - 1, \quad (3.24)$$

$$\text{бунда } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 \quad t_{k,\alpha/2} - k=n-1 \text{ озодлик даражасига эга бўлган}$$

$$\text{Стюдент тақсимотининг } p(x > t_{k;\alpha}) = \int_{t_{k;\alpha}}^{\infty} p_1(t) dt = \alpha = 1 - \beta; t_{k;1-\alpha/2} = -t_{k;\alpha/2}$$

шартни қаноатлантирувчи IV - иловадаги жадвалининг  $\alpha$  фоизли нуктаси.

3.  $\sigma_x^2$  дисперсия учун ишончлилик интервали  $k=n-1$  озодлик даражасига эга бўлган  $\chi^2$  тақсимотига бўйсунувчи танланма функциядан фойдаланиб,

$$ks^2 / \chi_{k;\alpha/2}^2 < \sigma_x^2 < ks^2 / \chi_{k;1-\alpha/2}^2, \quad (3.25)$$

формулага мос равишда курилади. Бунда,  $\chi_{k;\alpha}^2$   $k=n-1$  озодлик даражасига эга

$$\text{бўлган ва } P\{\chi^2 > \chi_{k;\alpha}^2\} = \int_{\chi_{k;\alpha}^2}^{\infty} p_1(\chi^2) d\chi^2 = \alpha = 1 - \beta$$

тенгликдан аниқланувчи  $\chi^2$  тақсимотнинг  $\alpha$  фоизли нуктаси.  $\chi^2$  тақсимотнинг фоизли нукталари III - иловада келтирилган. Амалда  $\chi_1^2$  ва  $\chi_2^2$  ларни

$$P\{\chi^2 > \chi_1^2\} = P\{\chi^2 > \chi_2^2\} = \alpha/2$$

шарт бажариладиган қилиб танланади.

Статистик фаразлар маълум тақсимотнинг номаълум параметрларига нисбатан (параметрик фаразлар), номаълум тақсимотга нисбатан (нопараметрик фаразлар) ёки бошқа шаклларда қилиниши мумкин.

Иккита ҳодисадан биттаси рўй бериши мумкин бўлган ҳол учун иккита фараз қаралади: дастлабкиси (нолинчи ёки асосийси)  $H_0$  ва унга тескариси  $H_1$ . Кузатишлар натижалари бўйича бу фаразлардан биттаси тўғри деб қабул қилинади. Бунда икки хил хатоликка йўл қўйилиши мумкин. Булардан биринчиси тўғри фаразни қабул қилмаслик, иккинчиси эса нотўғри фаразни қабул

қилиш. Кузатилаётган ҳодиса иккита сабаб -  $\varphi_0$  ( $H_0$  фараз) ёки  $\varphi_1$  ( $H_1$  фараз) билан боғлиқ бўлсин;  $\Gamma$ -  $X$  миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари фазоси бўлсин;  $\Gamma_0$ - $H_0$  фаразни қабул қилиш соҳаси бўлсин;  $\Gamma_1$ - $H_1$  фаразнинг оғиш соҳаси (критик соҳа);  $p_0(x)=p_0(x|\varphi_0)$ ,  $p_1(x)=p_1(x|\varphi_1)$  -  $\Gamma$  фазо  $x$  нуқталарининг шартли зичлик функциялари;  $P_{pr}(\varphi_0)=p$ ,  $P_{pr}(\varphi_1)=q=1-p$  -  $\varphi_0$  ва  $\varphi_1$  ларнинг априор эҳтимолликлари;  $\alpha$  - 1- хилдаги хатоликнинг шартли эҳтимоли (мезон аҳамиятлилигининг даражаси);  $\beta$  - 2- хилдаги хатоликнинг шартли эҳтимоли ( $1-\beta$  - мезоннинг қуввати);  $p_\alpha$  ва  $p_\beta$  - биринчи ва иккинчи хилдаги хатоликларнинг шартсиз эҳтимолликлари;  $P$ - хатоликлар йиғиндисининг эҳтимоли. У ҳолда қуйидагилар ўринли:

$$\alpha = \int_{\Gamma_1} p_0(x)dx, \beta = \int_{\Gamma_0} p_1(x)dx, \quad (3.26)$$

$$p_\alpha = p \int_{\Gamma_1} p_0(x)dx, p_\beta = q \int_{\Gamma_0} p_1(x)dx, \quad (3.27)$$

$$p_e = p_\alpha + p_\beta = p \int_{\Gamma_1} p_0(x)dx + q \int_{\Gamma_0} p_1(x)dx, q = 1 - p. \quad (3.28)$$

Радиотехника масалаларини ечишда кўпинча Котелников-Зигерт мезони ва Нейман-Пирсон мезони қўлланилади. Котелников – Зигерт мезони  $\alpha$  ва  $\beta$  нинг аҳамиятлилиги бир хил бўлиб, априор эҳтимоллик берилганда қўлланилади. Фараз қуйидагича қабул қилинади:

$$\begin{cases} l(x) > h & \text{да } H_1, \\ l(x) < h & \text{да } H_0, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$l(x) = p_1(x)/p_0(x), \quad (3.30)$$

$$h = p/q - \text{бўлиб, } h \quad p_1(h)/p_0(h) = p/q \quad (3.31)$$

тенгликдан топилади. Бу мезон тўла хатолик

$$P_e = P \int_h^\infty p_0(x)dx + q \int_{-\infty}^h p_1(x)dx \quad (3.32)$$

ни минималлаштиради. Нейман – Пирсон мезони  $\alpha$  ва  $\beta$  хатоликларнинг аҳамиятлилиги ҳар хил бўлиб, фаразларнинг априор эҳтимоллиги номалум бўлганда қўлланилади. Бунда 1-хилдаги хатолик берилганда, 2-хилдаги хатоликнинг минималлигига эришиш лозим.

$$\text{Ечим} \quad l(x) \geq h \quad (3.33)$$

$$\text{шартга асосланади. } h \quad \alpha = \int_h^\infty p_0(x)dx \quad (3.34)$$

тенгликдан аниқланади.  $H_0$  фаразни текшириш учун  $\chi^2$  мезони қўлланилади.  $\alpha$  берилганда, агар  $\chi^2 > \chi^2_{k;\alpha}$  шарт бажарилса,  $H_0$  фараз қабул қилинмайди,  $\chi^2 < \chi^2_{k;\alpha}$  шарт бажарилса,  $H_0$  фараз қабул қилинади.  $\chi^2_{k;\alpha}$  нинг қиймати

$$\int_{\chi^2_{k;\alpha}}^{\infty} p_1(\chi^2) d(\chi^2) = \alpha$$

III - илова бўйича топилади. Амалда  $\alpha = 0,05$  ёки  $0,01$  га тенг қилиб олинади.

Агар баъзи интервалларда кузатишлар сони кам бўлса, бу интервални ёнидагисига қўшиш зарур.

## МИСОЛЛАР

3.1. Узоқликни шлчовчи радио ёрдамида нишонгача бўлган масофани 15 марта ўлчаш натижаларининг хатоликлари жадвалда келтирилган.

| Ўлчаш<br>номери          | 1  | 2   | 3  | 4 | 5   | 6 | 7  | 8  | 9   | 10 | 11 | 12  | 13 | 14  | 15 |
|--------------------------|----|-----|----|---|-----|---|----|----|-----|----|----|-----|----|-----|----|
| Хатолик<br>лар $x_{i,M}$ | 18 | -15 | -5 | 6 | -15 | 6 | 12 | -5 | -10 | 6  | -5 | -10 | 12 | -10 | -5 |

- 1) Танланманинг тақсимотини, статистик тақсимот функцияни топинг.
- 2) Танланманинг ўрта қиймати  $m_x^*$  ни ва дисперсияси  $D_x^*$  ни ҳисобланг.

*Ечиш:* Вариацион қатор қуйидаги кўринишга эга бўлади: -15, -15, -10, -10, -10, -5, -5, -5, -5, 6, 6, 6, 12, 12, 18. У олтига ҳар хил -15, -10, -5, 6, 12, 18 қийматларга эга. Бу қийматларнинг частоталари 2, 3, 4, 3, 2, 1 лардир.

1. Танланманинг тақсимотини қуйидаги жадвалга ёзамиз:

| $x_i, M$          | -15  | -10  | -5   | 6    | 12   | 18   |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|
| $\nu_i$           | 2    | 3    | 4    | 3    | 2    | 1    |
| $p_i^* = \nu_i/n$ | 2/15 | 3/15 | 4/15 | 3/15 | 2/15 | 1/15 |

$$F_1^*(x) = 0 \quad x \leq -15 \quad X < -10 \quad x_1 = -15 \quad F_1^*(x) = 2/15 + 3/15 = 5/15.$$

| $x$        | $x \leq -15$ | $-15 < x \leq -10$ | $-10 < x \leq -5$ | $-5 < x \leq 6$ | $6 < x \leq 12$ | $12 < x \leq 18$ | $x > 18$ |
|------------|--------------|--------------------|-------------------|-----------------|-----------------|------------------|----------|
| $F_1^*(x)$ | 0            | 2/15               | 5/15              | 9/15            | 12/15           | 14/15            | 1        |

$F_1^*(x)$  нинг графиги 3.1-расмда келтирилган.

2. (3.5a) ва (3.6a) формулалардан фойдаланиб,

$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 x_i \nu_i = \frac{-15 \cdot 2 - 10 \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 1}{15} = -\frac{3}{4} M,$$

$$D_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^6 x_i^2 \nu_i - (m_x^*)^2 = \frac{225 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 25 \cdot 4 + 36 \cdot 3 + 144 \cdot 2 + 324 \cdot 1}{15} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cong 103 M^2$$

ларни топамиз.

3.2. ҳисобга олувчи қурилма 24 соат мобайнида ҳар соатда тармоқнинг кучланишини ёзиб боради. Маълумотлар жадвалда келтирилган:

| Интерваллар,<br>$B$ | 213–215 | 215–217 | 217–219 | 219–221 | 221–223 |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $v_i$               | 1       | 3       | 6       | 10      | 4       |

Танланманинг гистограммасини қуринг.

*Ечиш:* Жадвалга кўра интервалларнинг узунлиги  $h_i=h=2$  В. Шунинг учун (3.2) формулага кўра:

$$p_1^*/h = 1/24 \cdot 2 = 0,0208, \quad p_2^*/h = 3/24 \cdot 2 = 0,0624, \\ p_3^*/h = 0,125, \quad p_4^*/h = 0,208, \quad p_5^*/h = 0,0834.$$

Бу қийматлар бўйича чизилган гистограмма 3.2-расмда келтирилган.

3.3. Бош тўплам параметрлари  $m$  ва  $\sigma$  бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган:

$$p_1(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right].$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$  боғлиқ бўлмаган қийматлар бўйича  $m$  ва  $\sigma$  ни:

- 1) моментлар услуби билан; 2) максимал ҳақиқий ўхшашлик услуби билан баҳоланг.

*Ечиш:* 1)  $\hat{m} = m_x^*, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{D_x^*}$ .

2) (3.19) формулага кўра ҳақиқий ўхшашлик функцияси қуйидагича ёзилади:

$$L(m, \sigma) = \prod_{i=1}^n p_1(x_i; m, \sigma) = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \prod_{i=1}^n \exp\left[-(x_i - m)^2/2\sigma^2\right] = (\sigma\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left[-\sum_{i=1}^n (x_i - m)^2/2\sigma^2\right],$$

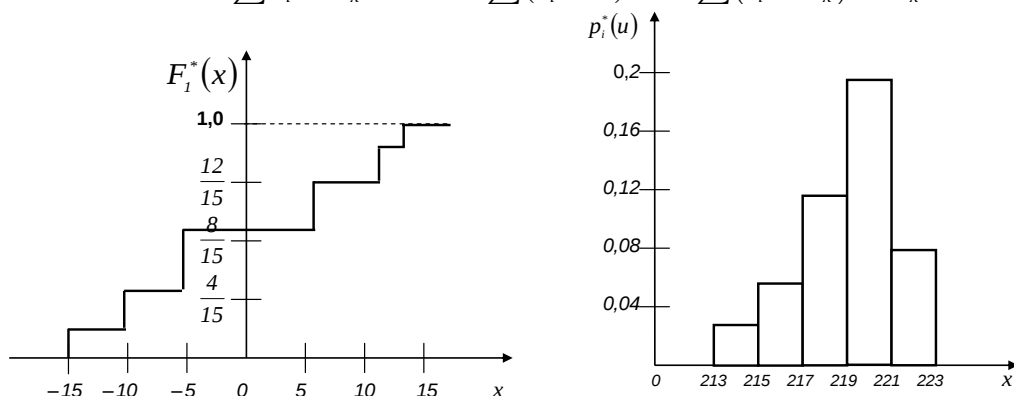
$$\ln L(m, \sigma) = -n \ln \sigma - \frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2.$$

(3.21) формула бўйича  $m$  ва  $\sigma$  га нисбатан икки номаълумли иккита тенгламалар тизимини тузамиз:

$$\frac{\partial \ln L(m, \sigma)}{\partial m} = -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial (x_i - m)^2}{\partial m} = \frac{1}{\sigma^2} \left( \sum_{i=1}^n x_i - nm \right) = 0, \quad \frac{\partial \ln L(m, \sigma)}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 = 0.$$

Бу тизимдан

$$m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = m_x^*, \quad \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 = D_x^*.$$



3.4. Нормал қонунга бўйсунувчи  $X$  тасодифий миқдорнинг 16 та боғлиқ бўлмаган қийматлари олинган  $m_x^* = 4,1$ . Агар  $\beta = 0,95$  бўлса,

1)  $\sigma_x = 1$ ,

2)  $\sigma_x^* = 1$  бўлганда  $m_x$  ни ишончилилик интервали ёрдамида баҳоланг.

*Ечиш:* 1)  $\Phi(z_\beta) = (1+\beta)/2 = (1+0,95)/2 = 0,975$ . II - иловадан  $z_\beta = 1,96$ .

$\delta_\beta = z_\beta \sigma_x / \sqrt{n} = 1,96 / \sqrt{16} = 0,49$ . (1.3.23) формуладан

$$m_x^* - 0,49 = 4,1 - 0,49 = 3,61, \quad m_x^* + 0,49 = 4,1 + 0,49 = 4,59 \quad . \quad 3,61 < m_x < 4,59.$$

2.  $T = (m_x^* - m_x) \sqrt{n/s}$  тасодифий миқдор  $k = n-1$  эркинлик даражасига эга бўлган Стюдент тақсимотига бўйсунди. Шунинг учун ишончилилик интервали (1.3.24) формула бўйича курилади.

$$k = n-1 = 16-1 = 15, \quad \alpha = 1-\beta, \quad \alpha/2 = (1-\beta)/2 = (1-0,95) = 0,025.$$

IV - иловадан  $t_{k;\alpha/2} = t_{15;0,025} = 2,131$ .

$$m_x^* - t_{k;\alpha/2} s / \sqrt{n} = 4,1 - 2,131 \cdot 1/4 \cong 3,57, \quad m_x^* + t_{k;\alpha/2} s / \sqrt{n} = 4,1 + 2,131 \cdot 1/4 \cong 4,63.$$

$$3,57 < m_x < 4,63.$$

3.5. Қўзғалмас нишонгача бўлган масофа радиолокатор ёрдамида тўрт марта ўлчаниб, қуйидаги маълумотлар олинган: 2470, 2490, 2580, 2520 м.

$\beta = 0,95$  бўлганда радиолокаторнинг аниқлигини баҳоланг.

*Ечиш:*  $m_x^*$  ва  $\sigma_x^{*2}$  ларни ҳисоблаймиз.

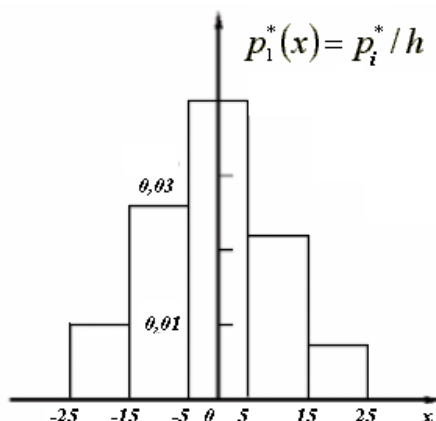
$$m_x^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{2470 + 2490 + 2580 + 2520}{4} = 2515 \text{ м.}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x^*)^2 = \frac{45^2 + 25^2 + 65^2 + 5^2}{3} = 2300 \text{ м}^2.$$

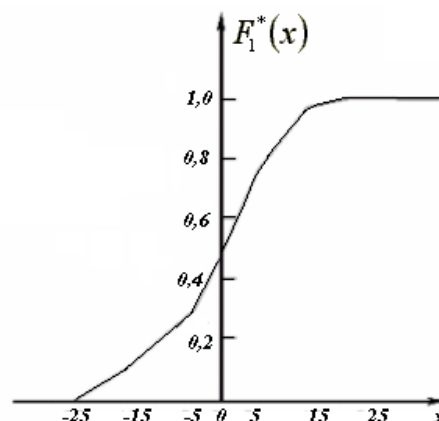
III - иловадан  $k=3$ ,  $\alpha/2 = (1-\beta)/2 = (1-0,95)/2 = 0,025$  ва  $1-\alpha/2 = 1-0,025 = 0,975$  бўлганда

$$\chi_{k;\alpha/2}^2 = \chi_{3;0,025}^2 = 9,35, \quad \chi_{k;1-\alpha/2}^2 = \chi_{3;0,975}^2 = 0,216. \quad \frac{ks^2}{\chi_{k;\alpha/2}^2} = \frac{3 \cdot 2300}{9,35} = 736, \quad \frac{ks^2}{\chi_{k;1-\alpha/2}^2} = \frac{3 \cdot 2300}{0,216} \approx 31900 \text{ м}^2$$

$$736 \text{ м}^2 < \sigma_x^2 < 31900 \text{ м}^2.$$



3.3-расм. Танланма гистограммаси



3.4-расм. Эмпирик тақсимот функция.

$$\sqrt{736} < \sigma_x < \sqrt{31900} \text{ ёки } 27,2 < \sigma_x < 178.$$

3.6. 500 та ўлчаш натижалари хатоликлари қуйидаги жалвалда келтирилган:

| Интервал ( $h_i$ ), м              | -25; -15 | -15; -5 | -5; 5 | 5; 15 | 15; 25 |
|------------------------------------|----------|---------|-------|-------|--------|
| Интервалдаги хатоликлар сони $v_i$ | 50       | 130     | 200   | 100   | 20     |
| Нисбий частота $p_i^*$             | 0,10     | 0,26    | 0,40  | 0,20  | 0,04   |

- 1) Ўлчаш натижалари хатолигининг  $p_i^*(x)$  гистограммасини ва  $F_i^*(x)$  тақсимот функциясини қуринг;
- 2) Танланма тақсимотни нормал қонун билан аппроксимацияланг;
- 3)  $\alpha=0,01$  бўлганда тақсимотни  $\chi^2$  мезони ёрдамида баҳоланг.

Ечиш: 1) Интерваллар сони  $r=5$  ва интервал узунлиги  $h=10$  м бўйича 3.3-ва 3.4-расмлардаги гистограмма ва тақсимот функцияларини қурамыз.

2) Моментлар услуби бўйича  $m_x$  ва  $\sigma_x^2$  ларни  $m_x^*$  ва  $D_x^*$  лар билан алмаштирамиз:

$$m_x^* = \sum_{i=1}^5 a_i p_i^* = -20 \cdot 0,1 - 10 \cdot 0,26 - 0 \cdot 0,40 + 10 \cdot 0,20 + 20 \cdot 0,04 = -1,8 \text{ м.}$$

$$D_x^* = \sum_{i=1}^5 a_i^2 p_i^* - (m_x^*)^2 = 400 \cdot 0,1 - 100 \cdot 0,26 + 100 \cdot 0,2 + 400 \cdot 0,04 - 3,24 = 98,76 \text{ м}^2.$$

$$\sigma_x^* = \sqrt{D_x^*} = \sqrt{98,76} \approx 9,93 \text{ м.}$$

Интервалларнинг ўрталари -20, -10, 0, 10, 20. Зичлик функция ва тақсимот функцияларнинг баҳолари қуйидагича бўлади:

$$\hat{p}_1(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-(x-m)^2/2\sigma^2\right] = (2\pi \cdot 98,76)^{-1/2} \exp\left[-(x+1,8)^2/98,76\right],$$

$$\hat{F}_1(x) = \int_{-\infty}^x \hat{p}_1(x) dx = \Phi\left(\frac{x+1,8}{9,93}\right).$$

Таксимот функциянинг сакрашлари миқдори

$$p_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1}-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-m}{\sigma}\right)$$

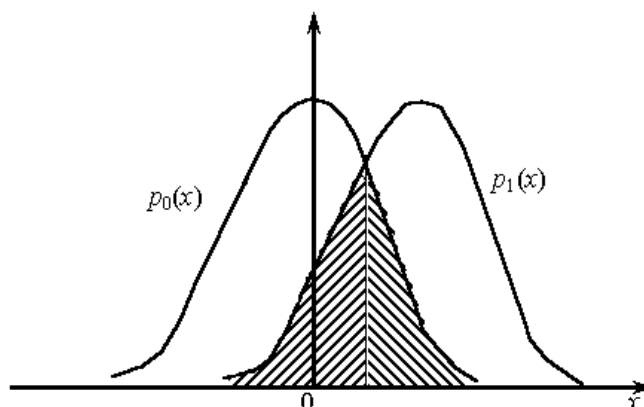
формула бўйича ҳисобланади, бунда  $x_i, x_{i+1} - i$  – интервалнинг  $k=5$  чегаралари,  $\Phi(x)$  II - иловадан қаралади. Натижалар қуйидаги жадвалда келтирилган:

| $h_i, \text{ м}$ | -25; -15 | -15; -5 | -5; 5  | 5; 15  | 15; 25 |
|------------------|----------|---------|--------|--------|--------|
| $p_i$            | 0,0821   | 0,2818  | 0,3794 | 0,2012 | 0,0417 |

(3.3) формулага кўра  $\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = 3,427$ . Эркинлик даражаси  $-1-2=2$ .

$\alpha=0,01$  ҳол учун III - иловадан  $\chi_{k;\alpha}^2 = \chi_{2;0,01}^2 = 9,21$ .  $\chi^2 = 3,427 < \chi_{k;\alpha}^2 = 9,21$  шарт бажарилганлиги учун ўлчаш хатоликлари нормал таксимот қонунига бўйсунади деган фараз қабул қилинади.

3.7. Вактнинг ҳар бир  $t$  дақиқасида радио қабули қурилмасига  $X(t), S(t)$  маълум сигнал ва  $n(t)$  шовқинлар йиғиндиси ( $H_1$  фараз), ёки фақат шовқин ( $H_0$  фараз) га мос тасодикий кучланиш  $X(t)$  таъсир қилади.  $n(t)$  шовқин ўрта қиймати нолга, дисперсияси  $D$  га тенг бўлган нормал қонунга бўйсунади. Априор эҳтимолликлар  $p=q=1/2$ .  $t=t_1$  дақиқада  $X(t)$  нинг қиймати шлчанган.



3.5-расм. Нормал таксимот зичлик функцияси ҳамда 1- ва 2- хилдаги хатоликлар.

- 1) Масалани ечиш қондасини ёзинг;
- 2) Биринчи ва иккинчи турдаги хатоликлар шартли эҳтимолини ва хатоликнинг тшлик эҳтимолини ҳисобланг.

Ечиш: Сигналнинг йўқлигида  $X=n$ ,  $p_0(x) = (2\pi D)^{-1/2} \exp(-x^2/2D)$ .

Сигналнинг борлигида  $X=s+n$ ,  $p_1(x) = p_0(x-s) = (2\pi D)^{-1/2} \exp[-(x-s)^2/2D]$ .

1) (1.3.29) формулага кўра ечиш қоидаси қуйидагича ёзилади:

$$l(x) = p_1(x)/p_0(x) = \exp\left[-(s^2 - 2xs)^2/2D\right] \geq 1,$$

бу  $x \geq s/2$  га эквивалентдир. Шундай қилиб,  $x \geq s/2$  да  $H_1$  фараз қабул қилинади,  $x < s/2$  да  $H_0$  фараз қабул қилинади.

2. (3.26) ва (3.28) формулалардан

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(x) dx = 1 - \Phi(s/2\sqrt{D}), \quad \beta = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(x) dx = 1 - \Phi(s/2\sqrt{D}), \quad P_e = \alpha p + \beta q = 1 - \Phi(s/2\sqrt{D})$$

бунда  $\Phi(x)$  П - иловадан қаралади. Зичлик функциялар ва  $\alpha, \beta$  лар графиклари 3.5-расмда келтирилган.

## МАСАЛАЛАР ВА ЖАВОБЛАР

3.1. Прибор ёрдамида беш марта ўлчаш натижасида  $X$  тасодифий миқдор қуйидаги қийматларни қабул қилган: 92; 94; 103; 105; 106.  $m_x^*$  ва  $D_x^*$  ларни топинг.

Жавоб:  $m_x^* = 100$ ;  $D_x^* = 34$ .

3.2. 100 та транзистордан ўртача иккитаси яроқсиз бўлади. Ўнта партия 100 талик транзистор текширилган. Қуйидаги жадвалда яроқсиз транзисторларнинг ўртачадан оғиш қийматлари берилган:

| Партиянинг<br>номери | 1  | 2 | 3 | 4 | 5  | 6 | 7 | 8  | 9 | 10 |
|----------------------|----|---|---|---|----|---|---|----|---|----|
| Ўртачадан оғиш       | -1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 1 | 0 | -2 | 2 | 1  |

Танланманинг тақсимотини ва  $F_1^*(x)$  – эмпирик тақсимот функциясини топинг.

Жавоб:

|         |     |     |     |     |     |
|---------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$   | -2  | -1  | 0   | 1   | 2   |
| $n_i$   | 1   | 2   | 2   | 4   | 1   |
| $P_i^*$ | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

$$F_1^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ 0,1, & -2 < x \leq -1, \\ 0,3, & -1 < x \leq 0, \\ 0,5, & 0 < x \leq 1, \\ 0,9, & 1 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

3.3. Жадвалда келтирилган тақсимотнинг гистограммасини ҳисобланг.

| Интерваллар | 0-2 | 2-4 | 4-6 |
|-------------|-----|-----|-----|
| $n_i$       | 20  | 30  | 50  |

Жавоб:  $p_1^*/h = 0,2/2 = 0,1$ ;  $p_2^*/h = 0,15$ ;  $p_3^*/h = 0,25$ .

3.4. 200 та бир хил радиостанция тасодифан танлаб олинган. Уларнинг биринчи марта ишламай қолишлари вақти жадвалда келтирилган.

| Радиостанциянинг биринчи | 900-1100 | 1100-1300 | 1300-1500 |
|--------------------------|----------|-----------|-----------|
|--------------------------|----------|-----------|-----------|

|                                |    |     |    |
|--------------------------------|----|-----|----|
| ишламай қолишигача вақти,<br>с |    |     |    |
| Радиостанциялар сони           | 10 | 120 | 70 |

$m_t^*$ ,  $D_t^*$ ,  $\sigma_t^*$  ларни ҳисобланг.

Жавоб:  $m_t^* = 1260$  с,  $D_t^* = 1260$  с<sup>2</sup>,  $m_t^* = 12400$  с,  $\sigma_t^* = 111,4$  с.

3.5. Ўлчовчи приборда 5 марта ўлчаш натижалари жадвалда келтирилган.

|                 |      |      |      |      |      |
|-----------------|------|------|------|------|------|
| Ўлчаш<br>номери | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
| $x_i$           | 2781 | 2836 | 2807 | 2763 | 2858 |

Агар ўлчанаётган миқдор 2800 бўлса,  $D_x^*$  ни ҳисобланг.

Жавоб:  $D_x^* = 1287,8$ .

3.6. Радиосигнални прибор ёрдамида 12 марта ўлчанганда  $\sqrt{D^*} = 0,6$  В бўлиши ҳисобланган. 0,99 ишончлилик билан приборнинг аниқлигини топинг.

Жавоб:  $0,39 \text{ В} < \sigma < 1,24 \text{ В}$ .

3.7. Радиочирокнинг ишлаш муддати нормал қонунга бўйсунди. 16 та радиочирокнинг ишлаш муддати текширилиб,  $m_x^* = 3000$  с ва  $\sqrt{D_x^*} = 20$  с лар ҳисобланган.

- 0,9 ишончлилик эҳтимоли билан  $m_x$  ва  $\sqrt{D_x^*}$  ларнинг ишончлилик интервалларини аниқланг;
- $m_x$  ни аниқлаш хатолиги 10 с дан,  $\sigma_x$  ни аниқлаш хатолиги 2 с дан ошмаслиги эҳтимолигини топинг.

Жавоб: 1)  $2991,235 \text{ с} < m_x < 3008,765 \text{ с}$ ,  $15,50 \text{ с} < \sigma_x < 28,74 \text{ с}$ ; 2) 0,93; 0,41.

3.8. Бир минут ичида телефон станциясидан нотўғри уланишлар сони жадвалда келтирилган.

|       |   |    |    |    |   |   |   |   |
|-------|---|----|----|----|---|---|---|---|
| $x_i$ | 0 | 1  | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $v_i$ | 8 | 17 | 16 | 10 | 6 | 3 | 0 | 1 |

- $m_x^*$  ва  $\sqrt{D^*}$  ларни ҳисобланг ҳамда Пуассон тақсимотининг асосий шarti бажарилишини текширинг.
- Танланманинг Пуассон тақсимотига бўйсунлигини  $\alpha = 0,05$  бўлганда  $\chi^2$  мезони ёрдамида текширинг.

Жавоб: 1)  $m_x^* \cong D_x^* = 2$ , яъни Пуассон тақсимотининг асосий шarti бажарилади;  
2)  $\chi^2 = 0,2 < \chi_{2;0,05}^2 = 9,5$ .

3.9. 500 та радионинг сезувчанлиги текширилди. Натижалар жадвалда келтирилган.

|                                     |       |       |       |      |     |     |     |     |
|-------------------------------------|-------|-------|-------|------|-----|-----|-----|-----|
| Сезувчанлик<br>интерваллари,<br>мкВ | -4;-3 | -3;-2 | -2;-1 | -1;0 | 0;1 | 1;2 | 2;3 | 3;4 |
| $v_i$                               | 6     | 25    | 72    | 133  | 120 | 88  | 46  | 10  |

$\alpha=0,01$  бўлганда танланма нормал қонунга бўйсунлигини  $\chi^2$  мезони ёрдамида текширинг.

Жавоб:  $\chi^2 = 3,94 < \chi_{5;0.01}^2 = 15,1$ .

3.10. 200 та радиочирокнинг ишлаш муддати жадвалда келтирилган.

| Ишлаш муддати, с | 300-400 | 400-500 | 500-600 | 600-700 | 700-800 | 800-900 | 900-1000 | 1000-1100 | 1100-1200 |
|------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|-----------|-----------|
| $\nu_i$          | 1       | 9       | 18      | 33      | 40      | 52      | 29       | 14        | 4         |

1) Радиочирок ишлаш муддатининг тақсимот қонунини,  $m_x^*$  ни,  $D_x^*$  ни ва  $\sqrt{D_x^*}$  ни топинг;

2)  $\hat{p}_1(x)$  ва  $\hat{F}_1(x)$  ларни ёзинг; 3) Тақсимот қонунини  $\chi^2$  мезони билан баҳоланг.

Жавоб: 1) Танланма нормал тақсимот қонунига бўйсунди,

$m_x^* = 784$  с,  $D_x^* = 26884$  с<sup>2</sup>,  $\sqrt{D_x^*} = 163,8$  с;

$$2) \hat{p}_1(x) = \frac{1}{163,8\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-784)^2}{53688}\right], \quad \hat{F}_1(x) = \Phi\left(\frac{x-784}{163,8}\right);$$

3) Нормал қонунга бўйсунди.

## 4. ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИЯЛАР

### НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

$\xi$  тасодикий миқдорнинг характеристик функцияси деб  $e^{it\xi}$  тасодикий миқдорнинг математик кутилмасига айтилади, яъни

$$f(t) = \int e^{itx} dF(x), \quad (4.1)$$

бунда  $i$  – мавҳум бирлик,  $t$  – ҳақиқий ўзгарувчи.  $|e^{itx}| = 1$  бўлганлигидан характеристик функция ҳар қандай тасодикий миқдор учун мавжуд бўлади.

1-Теорема. Характеристик функция сонлар ўқининг ҳамма ерида текис узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантиради:

$$f(0)=1, \quad |f(t)| \leq 1 \quad (-\infty < t < \infty). \quad (4.2)$$

2-Теорема. Агар  $\eta = a\xi + b$  бўлса,  $f_\eta(t) = f_\xi(at)e^{ibt}$  бўлади, бунда  $a$  ва  $b$  лар ўзгармас сонлар.

3-Теорема. Иккита боғлиқ бўлмаган тасодикий миқдорлар йиғиндисининг характеристик функцияси улар характеристик функцияларининг кўпайтмасига тенг.

Натижа.  $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  бўлиб,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  лар боғлиқ бўлмаса,  $f_\eta(t) = \prod_{i=1}^n f_{\xi_i}(t)$

бўлади.

4-Теорема. Агар  $\xi$  тасодифий микдорнинг  $n$ - тартибли абсолют моменти мавжуд бўлса, унинг характеристик функцияси  $n$  марта дифференциалланувчи

$$\text{бўлади ва } k \leq n \text{ бўлганда } f^{(k)}(0) = i^k M\xi^k \quad (4.3)$$

$$\text{бўлади. } \psi(t) = if(t) \quad (4.4)$$

$$\text{бўлсин. У ҳолда } \psi'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad \psi''(t) = \frac{f''(t) \cdot f(t) - [f'(t)]^2}{f^2(t)} \quad \text{бўлади. Булардан}$$

$$\left. \begin{aligned} M\xi &= \frac{1}{i} \psi'(0), \\ D\xi &= -\psi''(0). \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Характеристик функция логарифмидан олинган  $k$ -тартибли ҳосиланинг  $t=0$  даги қийматини  $i^k$  га кўпайтирилгани тасодифий микдорнинг семинварианти дейилади. Масалан, 3- ва 4- тартибли семинвариантлар қуйидагича ҳисобланади:

$$i^3 \psi'''(0) = -\{M\xi^3 - 3M\xi^2 \cdot M\xi + 2[m\xi]^3\}, \quad i^4 \psi^{IV}(0) = M\xi^4 - 4M\xi^3 M\xi - 3[M\xi^2]^2 + 12M\xi^2 [M\xi]^2 - 6[M\xi]^2$$

5-Теорема.  $f(t)$  ва  $F(x)$  -  $\xi$  тасодифий микдорнинг характеристик ва тақсимот функциялари бўлсин. Агар  $F(x)$  функция  $x_1$  ва  $x_2$  нукталарда узлуксиз бўлса,

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^c \frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it} f(t) dt \quad (4.6)$$

бўлади. (4.6) тенглик алмаштириш формуласи дейилади. Бу формуладан қуйидаги хулоса келиб чиқади.

6-Теорема. Тақсимот функция шзининг характеристик функцияси билан бир қийматли аниқланади.

7-Теорема. Агар  $|f(t)|$  интегралланувчи бўлса, у ҳолда  $F(x)$  абсолют узлуксиз

$$\text{бўлади ва } p(x) = F'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt \quad (4.7)$$

тенглик ўринли бўлади.

$n$  ўлчовли  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  тасодифий микдорнинг  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  характеристик функцияси деб  $e^{i(t_1\xi_1 + t_2\xi_2 + \dots + t_n\xi_n)}$  тасодифий микдорнинг математик кутилмасига айтилади, яъни

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = M\left[\exp\left(i \sum_{k=1}^n t_k \xi_k\right)\right]. \quad (4.8)$$

Агар  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функция,  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  тасодифий микдорнинг тақсимот

$$\text{функцияси бўлса, } f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int \dots \int \left( \exp i \sum_{k=1}^n t_k \xi_k \right) dF(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.9)$$

бўлади.

Бир ўлчовли ҳолдагига ўхшаш кўп ўлчовли тасодифий микдорларнинг ҳам характеристик функцияси ҳамма аргументлар бўйича текис узлуксиз,

$$f(0,0,...,0)=1, |f(t_1,t_2,...,t_n)| \leq 1 \quad (-\infty < t_k < +\infty, k=1,2,...) \quad f(-t_1,-t_2,...,-t_n) = \overline{f(t_1,t_2,...,t_n)}.$$

Агар  $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$  тасодикий микдорнинг таъкил этувчилари бир-бирларига боғлиқ бўлмаса  $f(t_1, t_2, \dots, t_n) = f_1(t_1), f_2(t_2), \dots, f_n(t_n)$  бўлади.

Ҳар хил тартибли моментлар қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$M_{\xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \dots \xi_n^{k_n}} = \int \int \dots \int x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} dF(x_1, x_2, \dots, x_n) = (i)^{\sum_{j=1}^n k_j} \left[ \frac{\partial^{k_1, k_2, \dots, k_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \dots \partial t_n^{k_n}} \right]_{t_1=t_2=\dots=t_n=0}$$

Амалда қуйидаги теоремаларнинг тасдиғидан кенг фойдаланилади.

**8-теорема.**  $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$  тасодикий микдорнинг характеристик функцияси

$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  бўлса,  $(\sigma_1 \xi_1 + a_1, \sigma_2 \xi_2 + a_2, \dots, \sigma_n \xi_n + a_n)$  тасодикий микдорнинг

характеристик функцияси  $\exp\left(i \sum_{k=1}^n a_k t_k\right) \cdot f(\sigma_1 t_1, \sigma_2 t_2, \dots, \sigma_n t_n)$  кўринишда бўлади.

**9-теорема.** Агар  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$   $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  тасодикий микдорнинг характеристик функцияси бўлса,  $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  нинг характеристик функцияси  $f(t) = f(t, t, \dots, t)$  бўлади.

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тақсимот функция ўзининг характеристик функцияси билан бир қийматли аниқланади.

Агар  $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$  функция  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  тақсимот функцияга мос характеристик функция бўлса,

$$P\{a_k \leq \xi_k < b_k, k=1, 2, \dots, n\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \dots \int_{-T}^T \prod_{k=1}^n \frac{e^{it_k a_k} - e^{it_k b_k}}{it_k} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots$$

тенглик ўринли бўлади, бунда  $a_k, b_k$  — ҳақиқий сонлар  $(k=1, 2, \dots, n)$

## МИСОЛЛАР

4.1. Тасодикий микдор  $\xi$  математик кутилмаси  $a$  ва дисперсияси  $\sigma^2$  бўлган нормал қонун бўйича тақсимланган.

Бу тақсимотга мос характеристик функция  $\varphi(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int e^{itx - \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$

$z = \frac{x-a}{\sigma} - it\sigma$  алмаштириш қилиб,  $\varphi(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - it\sigma}^{\infty + it\sigma} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$  га эга бўламиз.

$\int_{-\infty - i\alpha}^{\infty - i\alpha} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}$  бўлгани учун  $\varphi(t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$  бўлади.

4.2. Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодикий микдорнинг характеристик функциясини топинг. Шартга кўра,

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

бунда  $\lambda > 0$  — ўзгармас. Бу тақсимотга мос характеристик функция

$$f(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} e^{it} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{(-\lambda + \lambda e^{it})} = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

кўринишда бўлади.

4.3.  $\xi$  тасодифий миқдор  $(-a, a)$  интервалда текис тақсимланган. Бу тасодифий миқдорнинг характеристик функцияси

$$f(t) = \int_{-a}^a e^{itx} \frac{dx}{2a} = \frac{\sin at}{at} \quad \text{кўринишда бўлади.}$$

4.4.  $A$  ҳодиса устида  $n$  та боқлиқмас тажриба ўтказилган. Ҳар бир тажрибада  $A$  ҳодиса рўй берса,  $p$  эҳтимоллик билан 1 ни, рўй бермаса,  $q=1-p$  эҳтимоллик билан 0 ни қабул қилади. Бу ҳолатни  $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$  боғлиқ бўлмаган тасодифий миқдорларнинг йиғиндиси кўринишида ифодалаш мумкин.  $\mu_k$  тасодифий миқдорнинг характеристик функцияси  $f_k(t) = Me^{it\mu_k} = e^{it*0} \cdot q + e^{it*1} \cdot p = q + pe^{it}$ .

$\mu$  тасодифий миқдорнинг характеристик функцияси  $f(t) = \prod_{k=1}^n f_k(t) = (q + pe^{it})^n$ .

4.5.  $f(-t) = \bar{f}(t)$  бўлишини исботланг.

Ҳақиқатан,  $f(-t) = \int e^{-itx} dF(x) = \overline{\int e^{itx} dF(x)} = \bar{f}(t)$ .

4.6.  $r$  радиусли айлананинг устига тасодифан иккита нуқта қўйилиб, бу нуқталар бир-бирлари ва айлана маркази билан туташтирилган. Ҳосил бўлган учбурчак юзининг математик кутилмасини топинг.

Масалани ечиш учун нуқталардан бирини ўзгармас, иккинчисини тасодифий деб олиш мумкин. У ҳолда ҳосил бўлган учбурчакнинг юзи  $Ox$  ўқи ва тасодифий нуқтадан ўтувчи радиус вектор орасидаги тасодифий бурчак  $\Phi$  билан характерланади ва бу бурчакнинг зичлик функцияси

$$f_{\Phi}(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{агар } \varphi \notin (0, 2\pi), \\ \frac{1}{2\pi}, & \text{агар } \varphi \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

бўлган текис тақсимот қонунига бўйсунди. Учбурчакнинг юзи  $\delta = \frac{r^2}{2} |\sin \Phi|$

формула бўйича ҳисоблангани учун изланган математик кутилма

$$M[S] = \frac{1}{2} r^2 \int_0^{2\pi} |\sin \varphi| \frac{1}{2\pi} d\varphi = \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi = \frac{r^2}{\pi} \quad \text{га тенг бўлади.}$$

4.7. Ўлчов приборининг кириш қисмига сонли характеристикалари:

$m_X = -1, m_Y = 1, D_X = 2, D_Y = 3, k_{XY} = 0,5$  бўлган  $(X, Y)$  тасодифий вектор келиб тушади.

Приборнинг чиқиш қисмида  $Z = (X - Y)^2$  тасодифий миқдор ўлчанади.  $Z$  нинг математик кутилмасини аниқланг.

$$M[Z] = M[X^2 + Y^2 - 2XY] = M[X^2] + M[Y^2] - 2M[XY] = D_X + m_X^2 + D_Y + m_Y^2 - 2(m_X m_Y + K_{XY}) = 11.$$

4.8.  $X$  тасодифий миқдор  $N(m, \sigma)$  нормал қонунга бўйсунди. Унинг характеристик функциясини топинг.

$Y = \frac{X - m}{\sigma}$  тасодифий миқдорни киритамиз.  $M[Y] = 0, D[Y] = 1$  бўлади. Демак,  $Y$

тасодифий миқдор  $N(0, 1)$  нормал қонун бўйича тақсимланган.

$$f_Y(t) = M[e^{itY}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} dx = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty-it}^{+\infty-it} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$X = \sigma Y + m \text{ бўлгани учун } f_X(t) = M[e^{itX}] = e^{itm} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

4.9. Қуйида келтирилган функциялардан қайси бирлари характеристик функциялар эмас?

$$f_1(t) = \frac{1}{1+t}, \quad f_2(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad f_3(t) = \sin bt, \quad f_4(t) = \cos bt, \quad f_5(t) = 1 - it.$$

$|f_1(t)| \leq 1$ ,  $f_3(0) = 1$ ,  $|f_5(t)| \leq 1$  шартлар бажарилгани учун бу функциялар характеристик функциялар бўла олмайди.

4.10.  $\lambda$  параметрли Пуассон қонуни бўйича тақсимланган тасодифий миқдор  $X$  нинг характеристик функциясини топиб, унинг ёрдамида  $m_X$  ва  $D_X$  ларни топинг.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}. \quad f'(t)|_{t=0} = e^{\lambda(e^{it}-1)} \lambda i e^{it} |_{t=0} = \lambda i,$$

демак,  $m_X = \lambda$ .

$$f''(t)|_{t=0} = i\lambda(1 + \lambda i e^{it}) e^{it+\lambda(e^{it}-1)} |_{t=0} = i^2 \lambda(1 + \lambda), \quad D_X = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

## МАСАЛАЛАР ВА ЖАВОБЛАР

4.1.  $r$  радиусли айланага тасодифий иккита нуқта қўйилган. Ҳосил бўлган тасодифий ватар  $L$  узунлигининг математик кутилмасини ва дисперсиясини топинг.

$$\text{Жавоб: } m_L = \frac{4r}{\pi}, \quad D_L = 4r^2 \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right).$$

4.2. Узунлиги  $l$  га тенг  $AB$  кесмага тасодифий  $M$  нуқта қўйилган ва  $MA$  радиусли айлана ясалган. Агар  $L$  – тасодифий айлана узунлиги,  $S$  – тасодифий доиранинг юзи бўлса,  $M[L]$ ,  $D[L]$ ,  $M[S]$  ва  $D[S]$  ларни топинг.

$$\text{Жавоб: } m_L = \pi l, \quad D_L = \frac{\pi^2 l^2}{3}, \quad m_S = \frac{\pi l^2}{3}, \quad D_S = \frac{4\pi^2 l^4}{45}.$$

4.3.  $[0, l]$  кесмага иккита тасодифий  $A$  ва  $B$  нуқталар қўйилган. Агар  $R$  –  $A$  ва  $B$  нуқталар орасидаги тасодифий масофа,  $S = R^2$  бўлса,  $M[R]$  ва  $M[S]$  ни топинг.

$$\text{Жавоб: } M[R] = \frac{l}{3}, \quad M[S] = \frac{l^6}{6}.$$

4.4.  $a$  радиусли доирасимон экранга  $(x, y)$  тасодифий координатали нуқта туширилади. Бу нуқтадан экран марказигача бўлган  $R$  тасодифий масофанинг математик кутилмасини ва дисперсиясини топинг.

$$\text{Жавоб: } m_R = \frac{2}{3}a, \quad D_R = \frac{a^2}{18}.$$

4.5. Томонлари  $a$  ва  $b$  ( $a > b$ ) га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг қўшни томонларига биттадан бир-бирига боғлиқ бўлмаган нуқталар қўйилган. Бу нуқталар орасидаги тасодифий масофа квадрати  $R^2$  нинг математик кутилмаси ва дисперсиясини топинг.

$$\text{Жавоб: } M[R^2] = \frac{1}{3}(a^2 + b^2), \quad D[R^2] = \frac{4}{45}(a^4 + b^4).$$

4.6. Характеристик функциянинг  $|f(t+\tau) - f(t)| \leq \sqrt{2(1 - \operatorname{Re} f(\tau))}$  хоссасини исбот қилинг, бунда  $\operatorname{Re} f(\tau) = \operatorname{Re} M[e^{itX}] = M[\cos tX]$ .

*Жавоб:*  $X$  – зичлик функцияси  $p(x)$  бўлган узлуксиз тасодифий миқдор бўлсин. У ҳолда, Коши-Буняковский тенгсизлигига кўра

$$|f(t+\tau) - f(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (e^{i\tau x} - 1) p(x) dx \right| \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx} (e^{i\tau x} - 1)|^2 p(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\tau x} - 1|^2 p(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{itx}|^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1 \quad \text{бўлгани учун}$$

$$|f(t+\tau) - f(t)| \leq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{i\tau x} - 1|^2 p(x) dx} = \sqrt{2 \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \tau x) p(x) dx} = \sqrt{2(1 - \operatorname{Re} f(\tau))}.$$

4.7. Агар  $t=T \neq 0$  бирор қийматда  $f(T)=1$  бўлса,  $f(t)$  характеристик функциянинг  $T$  даврли даврий функция бўлишини исботланг.

4.8. Агар  $X$  дискрет тасодифий миқдор  $x_k = a + kh$  арифметик прогрессия кўринишидаги қийматларни қабул қилса, тақсимот қонуни  $h$  қадамли панжарали тақсимот дейилади, бунда  $k \in \mathbb{Z}$ . Тасодифий миқдорнинг панжарали бўлиши учун

$$f\left(\frac{2\pi}{h}\right) = 1 \quad \text{тенглик бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.}$$

Кўрсатма:  $Y=X-a$  тасодифий миқдор учун  $\operatorname{Re} f(2\pi/h) = 1$  бўлишини кўрсатиш керак.

4.9.  $X$  – тасодифий миқдор  $\lambda$  параметрли кўрсаткичли тақсимот қонунига бўйсунди. Характеристик функция ёрдамида  $m_x$  ва  $D_x$  ни ҳисобланг.

$$\text{Жавоб: } f(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad m_x = \frac{1}{\lambda}, \quad D_x = \frac{1}{\lambda^2}.$$

4.10.  $X$  – тасодифий миқдор  $[a, b]$  кесмада текис тақсимот қонунига бўйсунди. Характеристик функциядан фойдаланиб  $m_x$  ва  $D_x$  ни топинг.

$$\text{Жавоб: } f(t) = e^{\frac{a+b}{2}it} \frac{2 \sin\left(\frac{b-a}{2}t\right)}{(b-a)t}, \quad m_x = \frac{a+b}{2}, \quad D_x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

## 5. ИНТЕГРАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

### НАЗАРИЙ МАЪЛУМОТЛАР

#### 5.1. Мос қўйилган масалалар.

##### 1. Масалаларнинг қўйилиши.

Агар тенгламада номаълум  $u(x)$  функция интеграл белгиси остида ҳам катнашса, бундай тенглама интеграл тенглама дейилади. Бир ўлчовли нозичиқ-ли интеграл тенглама қуйидаги қўринишга эга бўлади.

$$\int_a^b K(x, \xi, u(\xi)) d\xi = F(x, u(x)), \quad a \leq x \leq b, \quad (5.1)$$

бунда  $K(x, \xi, u)$  ядро ва  $F(x, u)$  – берилган функциялар.

Кўпгина физик масалалар интеграл тенгламалар қўринишига келтирилади. Масалан, узатилган радиосигнал  $u(t)$  ни қабул қилинган сигнал  $f(t)$  қўри-

нишида тиклаш масаласи 
$$\int_0^t K(t-\tau)u(\tau) d\tau = f(t) \quad (5.2)$$

интеграл тенгламани ечиш масаласига келтирилади. Бунда  $K(\xi)$  ядро сигнал ўтадиган қабул қилиш аппарати ва воситаларининг хоссаларига боғлиқ бўлади.

Интеграл тенгламалар баъзи бир муносабатлар бўйича дифференциал тенгламаларга нисбатан қулайроқдир. Масалан,

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x f(\xi, u(\xi)) d\xi \quad (5.3)$$

интеграл тенглама Коши масаласидаги

$$\frac{du(x)}{dx} = f(x, u), \quad u(x_0) = u_0 \quad (5.4)$$

дифференциал тенгламага эквивалент бўлиб, интеграл тенгламада ҳеч қандай бошланғич ёки чегаравий шартлар талаб этилмайди.

Интеграл тенгламаларда бир ўлчовлидан кўп ўлчовлига ўтиш қўшимча шартларни талаб этмайди. Бир ўлчовли интеграл тенглама учун масаланинг қўйилиши, ечиш услуби кўп ўлчовли дифференциал тенглама учун тўғридан – тўғри умумлаштирилади. Кўп ўлчовли

$$\int_G K(x, \xi, u(\xi)) d\xi = F(x, u(x)), \quad x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\} \in G(x) \quad (5.5)$$

интеграл тенгламада, бир ўлчовли интеграл тенгламадан фарқли, интеграллаш жараёни кўп ўлчовли  $G(x)$  соҳа бўйича бажарилади.

Дифференциал тенгламаларда бир ўлчовли ўзгарувчидан кўп ўлчовлига ўтишда кўпгина мураккаб операцияларни бажаришга тўғри келади.

Бу параграфда 5.1) интеграл тенглама ва унинг баъзи хусусий ҳолларини қараш билан чегараланамиз.

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5.6)$$

тенглама иккинчи жинс Фредгольм тенгламаси дейилади. Бунда  $K(x, \xi)$  ядро  $a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b$  квадратда аниқланган.

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (5.7)$$

тенглама иккинчи жинс Вольтер тенгламаси дейилади. Агар (5.6) ва (5.7) тенгламаларда  $u(x)$  ҳадни олиб ташласак, биринчи жинс Фредгольм ва Вольтер тенгламаларига эга бўламиз.

Агар (5.6) тенглама бир жинсли бўлса

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad a \leq x \leq b \quad (5.8)$$

кўринишга келади. Бу тенгламани ечиш учун шундай  $\lambda = \lambda_i$  ни топиш керакки, (5.8) тенглама  $u = \varphi_i(x) \neq 0$  тривиал бўлмаган ечимга эга бўлсин.  $\lambda_i$   $K(x, \xi)$  ядронинг хос қиймати дейилиб,  $\varphi_i(x)$  эса ядронинг хос функцияси дейилади.

Агар ядро ҳақиқий ва симметрик бўлса, яъни  $K(x, \xi) = K(\xi, x)$  бўлса, бу ядро камида битта хос қийматга эга бўлади. Бундай ядронинг ҳамма хос қийматлари ҳақиқий бўлиб, хос функциялари эса бир – бирларига ортогонал бўлади.

(5.6) тенгламада  $\lambda_i$  хос қийматлар нолга тенг бўлмаса, бу тенглама ягона ечимга эга бўлади.

Агар  $K(x, \xi)$  ядро ва ўнг томон  $f(x)$  ҳамда уларнинг  $p$  - тартибгача ҳосилалари узлуксиз бўлса, ечим ҳам  $p$  марта узлуксиз дифференциалланувчи бўлади. Бунга (5.6) тенгламани  $p$  марта дифференциаллаб, ишониш мумкин:

$$u^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) + \lambda \int_a^b \frac{\partial^p K(x, \xi)}{\partial x^p} u(\xi) d\xi.$$

Агар  $K(x, \xi)$ ,  $f(x)$  ва уларнинг квадратлари интегралланувчи бўлса, у ҳолда Шмидт ёйилмаси кўринишидаги

$$u(x) = f(x) + \sum_{i \geq 1} \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} \varphi_i(x) \int_a^b f(x) \varphi_i(\xi) d\xi \quad (5.9)$$

қатор абсолют ва текис яқинлашувчи бўлади. Бу формуладан  $\lambda \neq \lambda_i$  да ягона ечим  $u(x)$  мавжудлиги келиб чиқади.

## 2. Айирмали усул.

(5.1) бир ўлчовли тенгламани қараймиз.  $[a, b]$  кесмада  $x_n$  тугунлар ва  $C_n$  коэффициентларга эга бўлган

$$\int_a^b \Phi(\xi) d\xi \approx \sum_{n=1}^N c_n \Phi(x_n) \quad (5.10)$$

формулани олайлик.  $[a \leq x \leq b, a \leq \xi \leq b]$  квадратда  $x_n, \xi_n$  тўрни киритамиз. (5.1) тенгламада интегрални (5.10) суммага алмаштириб,  $u_n \approx u(x_n)$  тугунларда

тенгламанинг тақрибий қийматларини аниқлаш учун алгебраик тенгламалар

$$\text{тизимини оламиз: } \sum_{m=1}^N c_m K(x_n, x_m, y_m) = F(x_n, y_n), 1 \leq n \leq N. \quad (5.11)$$

Бу тизимни Ньютон усули билан ечиш мақсадга мувофиқдир.  $N \rightarrow \infty$  да  $y_n$  нинг  $u(x)$  ечимга яқинлашиши ҳақида аниқ жавоб айтиш қийин.

(5.8) Фредгольм тенгламаси бир жинсли бўлганлиги учун (5.11) тизим ҳам чизиқли бўлади. Уни қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$\sum_{m=1}^N c_m K_{nm} y_m = \frac{1}{\lambda} y_n, 1 \leq n \leq N, K_{nm} = K(x_n, x_m). \quad (5.12)$$

(5.6) бир жинсли бўлмаган Фредгольм тенгламасини чизиқли бир жинсли

$$\text{бўлмаган } y_n - \lambda \sum_{m=1}^N c_m K_{nm} y_m = f_n, 1 \leq n \leq N, f_n = f(x_n). \quad (5.13)$$

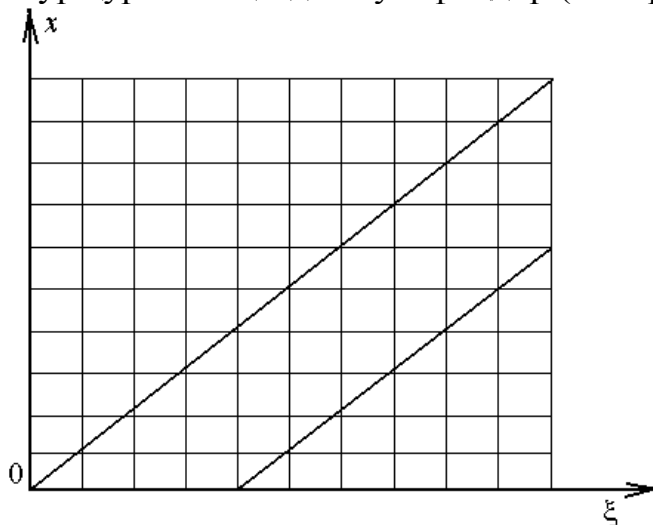
алгебраик тизим кўринишига келтирилади.

Бу тенгламани Гаусс усули билан осон ечиш мумкин. (5.7) Вольтер тенгламаси учун (5.13) алгебраик тизим

$$y_n - \lambda \sum_{m=1}^n c_m K_{nm} y_m = f_n, 1 \leq n \leq N, \quad (5.14)$$

кўринишга эга бўлади.

Агар  $K(x, \xi)$  ёки  $f(x)$  узилишга эга бўлса, махсус чизиқлар  $\xi = x_m$  тугунлар кесишадиган махсус тўр қуриш мақсадга мувофиқдир (5.1 - расм).



5.1 – расм.

(5.10) формула ўрнига умумлашган трапециялар формуласи танланади. Агар махсус чизиқлардан ташқарида функциялар узлуксиз бўлса, ечимни Рунге усули билан аниқлаштириш мумкин.

Агар ядро узлуксиз бўлиб,  $\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi$  бўлса, (5.6) тенглама

$$z(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) z(\xi) d\xi = \varphi(x), \quad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (5.15)$$

кўринишга келади. Бу тенгламани (5.6) тенгламага нисбатан ечиш қулайроқдир.

3. Кетма – кет яқинлашиш усули.

Бир жинсли бўлмаган Фредгольм тенгламаси учун итерацион жараёни ёзамиз:

$$u_0(x)=0, u_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)u_n(\xi)d\xi. \quad (5.16)$$

Агар ядро чегараланган бўлса  $|\lambda|$  нинг етарлича кичик қийматларида бу жараён (5.6) тенгламанинг ечимига яқинлашади.

Мисол. 
$$u(x)-\lambda\int_0^\infty e^{-(x+\xi)}u(\xi)d\xi=x \quad (5.17)$$

тенгламани қараймиз. Бу тенгламага (5.6) жараёни қўлаймиз.

$$u_0(x)=0, u_1(x)=x, u_2(x)=x+\lambda e^{-x}, u_3(x)=x+\lambda e^{-x}+\frac{1}{2}\lambda^2 e^{-x}, u_4(x)=x+\left(\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^3\right)e^{-x}$$

ва ҳоказо. Бунда аниқ ечим 
$$u_1(x)=x+\left(\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^3+\dots\right)e^{-x}=x+\frac{2\lambda}{2-\lambda}, \quad (5.18)$$

кўринишда бўлади ( $|\lambda|<2$  шартда).

#### 4. Хос ядрога алмаштириш.

Фредгольм тенгламасининг ядроси 
$$\bar{K}(x,\xi)=\sum_{n=1}^N A_n(x)B_n(\xi) \quad (5.19)$$

кўринишда бўлса, бу ядро хос ядро дейилади. Хос ядроли тенгламанинг ечимини чекли сондаги амаллар бажарилганда топилади. (5.19) ядрони (5.6)

тенгламага қўйиб, 
$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^N \alpha_n A_n(x), \quad (5.20a)$$

$$\alpha_n=\int_a^b B_n(\xi)u(\xi)d\xi \quad (5.20b)$$

тенгликларга эга бўламиз. Булардан

$$\sum_{m=1}^N [\delta_{nm}-\lambda\int_a^b B_n(\xi)A_m(\xi)d\xi]\alpha_m=\int_a^b B_n(\xi)f(\xi)d\xi, \quad 1\leq n\leq N \quad (5.21)$$

чизиқли тизимга эга бўламиз. Бу тизимдан  $\alpha_n$  ларни топиб ва уларни (5.20 a) га қўйиб, изланган ечимни топамиз.

(5.8) бир жинсли Фредгольм тенгламасида  $f(x)=0$  бўлади.

Ядрони ҳар доим ҳам аппроксимациялаб бўлавермайди. Баъзан  $K(x,\xi)$  ни  $B_n(\xi)$  – тўла ортонормалланган функциялар тизими бўйича Фурье қаторига ёйилади:

$$K(x,\xi)=\sum_{n=1}^\infty A_n(x)B_n(\xi), A_n(x)=\int_a^b B_n^*(\xi)K(x,\xi)d\xi. \quad (5.22)$$

(5.19) ядро сифатида (5.22) ёйилма кесмаси олинади.

Изоҳ. (5.19) хос ядроли (5.6) тенгламада  $f(x)\neq 0$  бўлиб,

$$\int_a^b f(\xi)B_n(\xi)d\xi=0 \quad 1\leq n\leq N \quad (5.23)$$

бўлсин. У ҳолда  $\lambda$  ядронинг бирорта  $\lambda_i$  хос қийматига тенг бўлганда (5.21) тизим бир неча тривиал бўлмаган ечимларга эга бўлади. Бу ҳолда (5.6) тенгламанинг  $u(x)$  ечими мавжуд бўлади.

Мисол. (5.17) тенглама  $K(x, \xi) = e^{-x} e^{-\xi}$  хос ядрога эга. Унинг ягона ечимини топамиз. (5.21) да  $N=1$  ва  $f(x)=0$  деб фараз қилсак,  $\left(1 - \lambda_1 \int_0^{\infty} e^{-2\xi} d\xi\right) \alpha_1 = 0$  тенгликка эга

бўлиб,  $\lambda=2$  ни топамиз. Бундан (5.17) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг  $\lambda=\lambda_1$  да (5.18) аниқ ечими мавжуд эмаслигини топамиз.

## 5. Галеркин усули (моментлар усули).

Ечимни  $\psi_k(x)$  функцияларнинг тўла тизими бўйича ёйилма кўринишида кидирамиз:

$$u(x) \approx f(x) + \lambda \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k(x) \quad (5.24)$$

(5.24) ни (5.6) тенгламага қўйиб,  $\alpha_k$  га нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар тизимига эга бўламиз:

$$\sum_{k=1}^N a_{mk} \alpha_k = b_m, \quad 1 \leq m \leq N,$$

$$a_{mk} = \int_a^b \psi_m(x) \psi_k(x) dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi_m(x) \psi_k(\xi) dx d\xi, \quad (5.25)$$

$$b_m = \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \psi_m(x) f(\xi) dx d\xi.$$

Бу усулни (5.1) ночизиқли тенгламага ҳам қўллаш мумкин. Бу ҳолда ночизиқли тенгламалар тизимига келамиз.

Бу усулни қўллашнинг қийинлиги (5.25) тенгламадаги икки каррали интегралларни ҳисоблашнинг мураккаблигидадир. Шунинг учун (5.24) ифодада ҳадлар сонини камайтириш зарур.

Изоҳ. Агар  $\psi_k(x)$  тизим ортогонал бўлса, моментлар усули ядрони махсус хос ядрога алмаштириш усулига эквивалентдир:

$$K(x, \xi) = \sum_{k=1}^N \psi_k(x) \psi_k(\xi), \quad \psi_k(\xi) = \int_a^b K(x, \xi) \psi_k(x) dx. \quad (5.26)$$

## 5.2. Мос тушмаган масалалар.

### 1. Регуляриштириш.

Агар (5.1) тенгламада  $u(x)$  фақат интеграл остида қатнашса, бундай масала мос тушмаган масала дейилади. Мос тушмаган масаланинг классик мисоли биринчи жинсли Фредгольм ва Вольтер тенгламасидир:

$$\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (5.27)$$

$$\int_a^x K(x, \xi) u(\xi) d\xi = f(x), \quad c \leq x \leq d. \quad (5.28)$$

(5.27) масаланинг турғун эмаслигини кўрсатамиз. Бунинг учун чекли  $\delta u(\xi) = \exp(i\omega\xi)$ ,  $\omega \geq 1$  амплитудали юқори частотали оғишни қараймиз. Унга оғишнинг ўнг томони мос келади  $\mathcal{J}(x) = \int_a^b K(x, \xi) \delta u(\xi) d\xi = \int_a^b K(x, \xi) e^{i\omega\xi} d\xi$ .

Бўлаклаб интеграллаб,

$$\mathcal{J}(x) = \frac{1}{i\omega} e^{i\omega\xi} K(x, \xi) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} - \frac{1}{i\omega} \int_a^b \frac{\partial K(x, \xi)}{\partial \xi} e^{i\omega\xi} d\xi = O\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (5.29)$$

натижага эга бўламиз. Шундай қилиб, ўнг томоннинг шундай кичик оғиши мавжудки,  $\delta u(\xi)$  ечимнинг катта оғишига мос келади, яъни, (5.27) масала турғун эмас. Бу тасдиқ Вольтер тенгламаси учун ҳам ўринли.

Биринчи жинс Вольтер тенгламасининг  $K(x, \xi) = 1$  бўлгандаги

$$\int_a^x u(\xi) d\xi = f(x) \quad (5.30)$$

хусусий ҳолини қараймиз. Бу масала  $f(x)$  дифференциалланувчи бўлганда ечимга эга бўлади. (5.27) тенгламада ядро ўрнига (5.19) ифодани қўйсак,

$$\sum_{n=1}^N \beta_n A_n(x) = f(x), \quad \beta_n = \int_a^b B_n(\beta) u(\xi) d\xi. \quad (5.31)$$

натижага эга бўламиз.

$$A[x, u(\xi)] = f(x), \quad u(\xi) \in U, \quad f(x) \in F. \quad (5.32)$$

мос қўйилмаган масалани ечиш талаб этилсин, бунда  $A$  – оператор,  $U$  ва  $F$  – нормалланган фазо. (5.32) масала ҳамма  $f(x)$  лар учун ҳам ечимга эга бўлавермайди. (5.32) тенгламада кичик мусбат  $\alpha$  регуляриштириш параметри бўлган қўшимча ҳадлар киритамиз. Ўзгартирилган тенгламани символик тарзда қуйидагича ёзамиз:  $A_\alpha[x, u_\alpha(\xi)] = f(x)$ , (5.33)

унинг ечимини  $u_\alpha(\xi)$  орқали белгилаймиз.

## 2. Регуляриштиришнинг вариацион усули.

(5.27) Фредгольм тенгламасини қараймиз. Ядро узлуксиз бўлса,  $f(x) = 0$  да бу тенглама фақат  $u(\xi) = 0$  тривиал ечимга эга бўлади. Интеграл оператор

$$f(x) \in F, \quad A[x, u(\xi)] = \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (5.34)$$

$U$  ни  $F$  га бир қийматли акслантиради. (5.27) масалани вариацион шаклда

$$\text{қуйидагича ёзамиз: } \int_c^d \{A[x, u(\xi)] - f(x)\}^2 dx = \min, \quad (5.35)$$

бунда  $A$  оператор (5.34) формула билан аниқланган.

## МИСОЛЛАР

5.1.  $y'' = 2y - y'^2$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  Коши масаласига мос интеграл тенгламалар системасини тузинг.

*Ечиш.*  $y_1(x) = y(x)$ ,  $y_2(x) = y'(x)$  деб белгилаб, берилган масалани 2 - тартибли нормал тизим учун Коши масаласига келтирамиз:

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = 2y_1 - y_2^2, \quad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

Тенгликларни иккала томонларини интеграллаб ва бошланғич шартлардан фойдаланиб,  $Y_1(x) = 1 + \int_0^x Y_2(t) dt$ ,  $Y_2(x) = \int_0^x (2Y_1(t) - Y_2^2(t)) dt$  интеграл тенгламаларга эга бўламиз.

5.2.  $y(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt$  интеграл тенгламани ечинг.

*Ечиш.* Тенгламани кетма-кет икки марта дифференциаллаймиз:

$$y'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-t)y(t) dt, \quad y''(x) = -\sin x + y(x) - \int_0^x \sin(x-t)y(t) dt.$$

Берилган ва охирги тенгламалардан  $y''(x) = 0$  дифференциал тенгламага эга бўламиз,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ . Бу тенгламани ечиб,  $y(x) = x$  ечимга эга бўламиз.

5.3.  $y(x) = 1 + \int_0^x \frac{cht}{chx} y(t) dt$  интеграл тенгламани ечинг.

*Ечиш.*  $u(x) = \int_0^x chy(t) dt$  белгилаш киритиб,  $y(x) = 1 + \frac{1}{chx} u(x)$  тенгликка эга

бўламиз.  $u'(x) = chy(x) = chx \left( 1 + \frac{1}{chx} u(x) \right)$ , ёки  $u' - u = chx$ . Буни  $u(0) = 0$

бошланғич шартда ечиб,  $u(x) = \frac{1}{2} (xe^x + shx)$ ,  $y(x) = 1 + \frac{1}{2} \frac{xe^x + shx}{chx}$  ечимга эга бўламиз.

5.4.  $y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t) dt$  интеграл тенгламани кетма – кет яқинлашиш усули билан ечинг.

*Ечиш.*  $y_0(x) = 1$ .

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t) dt = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t) \left( 1 - \frac{t^2}{2} \right) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \text{изланган ечим}$$

$$y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x.$$

5.5.  $y(x)=1+\int_0^x ch(x-t)y(t)dt$  интеграл тенгламани Лаплас алмаштиришидан фойдаланиб ечинг.

*Ечиш.*  $1=\frac{1}{p}$   $chu=\frac{p}{p^2-1}$  бўлгани учун,  $Y(p)=\frac{1}{p}+\frac{p}{p^2-1}Y(p)$  бўлади.

$$Y(p)=\left(1-\frac{p}{p^2-1}\right)=\frac{1}{p}, \quad Y(p)=\frac{p^2-1}{p(p^2-1)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}. \quad \text{Бундан,}$$

$$y(x)=1+\frac{2}{\sqrt{5}}e^{x/2}sh\frac{\sqrt{5}}{2}x.$$

5.6.  $\int_0^x (2+x^2-t^2)y(t)dt=x^2$  тенгламани иккинчи жинсдаги Вольтер тенгламасига келтириб ечинг.

*Ечиш.* Тенгламани иккала томонини дифференциаллаб,  $2y(x)+\int_0^x 2xy(t)dt=2x$ ,

ёки  $y(x)=x-\int_0^x xy(t)dt$ , иккинчи жинсдаги Вольтер тенгламасига эга бўламиз.

$u(x)=\int_0^x y(t)dt$  деб белгилаб,  $y(x)=x-xu(x)$ ,  $u'(x)=y(x)=x-xu(x)$ , ёки

$u'+xu=x$ ,  $u(0)=0$  тенгликларга эга бўламиз.

Бундан,  $u(x)=1-e^{-x^2/2}$  ва  $y(x)=xe^{-x^2/2}$ .

5.7.  $y(x)-\frac{1}{2}\int_0^x y(t)dt=\sin(\pi x)$  тенгламани кетма – кет яқинлашиш усули билан ечинг.

*Ечиш.*  $|\lambda|<\frac{1}{B_k}\left(\int_a^b\int_a^b|K(x,t)|^2dxdt=B_k^2=1\right)^{-1/2}$  шарт бажарилишини текшираимиз.

$\lambda=1/2$  ва  $K(x,t)=I$ ,  $\int_0^1\int_0^1|K(x,t)|^2dxdt=B_k^2=1$ . Бундан,  $|\lambda|<1/B_k$ ,  $y_0(x)=\sin\pi x$  деб қабул қилиб,

$$y_1(x)=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int_0^1 y_0(t)dt=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int_0^1 \sin\pi tdt=\sin\pi x+\frac{1}{\pi};$$

$$y_2(x)=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int_0^1 y_1(t)dt=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin\pi t+\frac{1}{\pi}\right)dt==\sin\pi x+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi};$$

$$y_3(x)=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int_0^1 y_2(t)dt=\sin\pi x+\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sin\pi t+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}\right)dt==\sin\pi x+\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{2^2\pi};$$

.....

$$y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\pi} = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{1}{k}}, \quad \text{изланган ечим,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{1}{k}} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}, \quad y(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}, \quad \text{бўлади.}$$

## МАСАЛАЛАР ВА ЖАВОБЛАР

5.1. Коши масаласига мос интеграл тенгламани тузинг:

$$y' = 1 + x \sin y, \quad y(\pi) = 2\pi.$$

*Жавоб:*  $y(x) = x + \pi + \int_{\pi}^x t \sin y(t) dt$

Интеграл тенгламаларни оддий ҳосилали дифференциал тенгламаларга келтириб ечинг:

5.2.  $y(x) = e^x + \int_0^x y(t) dt.$

*Жавоб:*  $y(x) = e^x(x+1).$

5.3.  $y(x) = 1 + \int_0^x t y(t) dt.$

*Жавоб:*  $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$

Интеграл тенгламаларни кетма – кет яқинлашиш усули билан ечинг:

5.4.  $y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt, \quad y_0(x) = 0.$

*Жавоб:*  $y(x) = e^x.$

5.5.  $y(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x y(t) dt$ , а)  $y_0(x) = 1$ ; б)  $y_0(x) = \frac{x^2}{2} + x.$

*Жавоб:*  $y(x) = x.$

5.6. Лаплас алмаштириши ёрдамида берилган интеграл тенгламанинг ечимини

топинг:  $y(x) = e^x - x - 1 + \int_0^x y(t) dt.$

*Жавоб:*  $y(x) = e^x(x-1)+1.$

Биринчи жинсдаги Вольтер тенгламасини иккинчи жинсдаги Вольтер тенгламасига келтириб ечинг.

$$5.7. \int_0^x (x-t)y(t)dt = e^x - x - 1.$$

Жавоб:  $y(x)=e^x$ .

$$5.8. \int_0^x e^{x-t}y(t)dt = \frac{x^2}{2}.$$

Жавоб:  $y(x) = x - \frac{x^2}{2}$ .

(5.36) шарт бажарилади деб ҳисоблаб, қуйидаги икки жинсдаги Фредгольм тенгламаларини кетма – кет яқинлашиш усули билан ечинг.

$$5.9. y(x) - \int_0^1 xty(t)dt = 2x.$$

Жавоб:  $y(x)=3x$ .

$$5.10. y(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 ty(t)dt = 1.$$

Жавоб:  $y(x)=\frac{2}{3}$ .

## Ф о й д а л а н и л г а н      а д а б и ё т л а р

1. Лэнинг Дж.Х., Бэттинг Р.Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления: Пер.с англ. / Под ред. В.С. Пугачева. – М.: ИЛ, 1958.- 388 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник для университетов. – М.: Наука, 1969. -400 с
3. Cox Д R., Miller Н. D. The theory of stochastic processes. London: Methuen, 1965-398 p.

4. Сборник задач по математике. Спец. Курсы. Вуколов Э.А. и др. –М : Наука, 1984- 607 с
5. Тихонов В.И., Миранов М.А. Марковские процессы – М.: Сов радио, 1977 -488с
6. Торяинов В.Т., Журавлев А.Г., Тихонов В.И. Примеры и задачи по статистической радиотехнике: Учебное пособие для вузов / Под ред В.И. Тихонова. –М.: Сов радио, 1970-600с.
7. Уразов Н., Мухитдинов М.М., Ахунов К.Х. Моделирование процессов и систем. Учебное пособие для вузов /Под ред. Уразова Н. – Фергана – Техника, 2002. -191с

## МУНДАРИЖА

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Сўз боши .....                                                                                | 4  |
| Кириш .....                                                                                   | 5  |
| <br>1. Бир ўлчовли тасодифий микдорлар тақсимот функциялари ва сонли характеристикалари ..... | 6  |
| 2. Кўп ўлчовли тасодифий микдорлар тақсимот функциялари ва сонли характеристикалари .....     | 20 |

|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| 3. Математик статистика асослари..... | 37 |
| 4. Характеристик функциялар.....      | 51 |
| 5. Интеграл тенгламалар .....         | 57 |
| Адабиётлар .....                      | 67 |