

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS
TA’LIM VAZIRLIGI

SAMARQAND IQTISODIYOT VA SERVIS INSTITUTI
OLIV MATEMATIKA KAFEDRASI

M.RAISOV
R.X.MUKUMOVA

MATEMATIK PROGRAMMALASH

SAMARQAND-2008

M.Raisov, R.X.Mukumova «Matematik programmalash». Uslubiy qo'llanma. Samarqand, SamISI, 2008 y., 188 bet.

Uslubiy qo'llanma 810000 – “Xizmat ko'rsatish” hamda 340000 – “Biznes va boshqaruv” sohalari bakalavriat yo'nalishlari bo'yicha tahsil olayotgan talabalarga mo'ljallangan.

Mazkur o'quv qo'llanma Davlat ta'lim standartlari hamda o'quv dasturi talablari asosida yozilgan bo'lib matematik programmalashning quyidagi bo'limlarini o'z ichiga oladi: chiziqli programmalash, chiziqli programmalashning maxsus masalalari, dinamik programmalash.

Taqrizchilar:

1. Begmatov A.X. – fizika-matematika fanlari doktori, professor. (Samarqand Davlat Universiteti).
2. Toshev N.T. – fizika-matematika fanlari nomzodi. dosent (Samarqand Iqtisodiyot va servis instituti)

Institut o'quv Uslubij Kengashining 2008 yil 26 noyabr yig'ilishi qarori bilan chop etishga tavsiya etilgan (4-sonli bayonnoma).

Samarqand Iqtisodiyot va servis instituti, 2008.
M.Raisov, Mukumova R.X.

SO‘Z BOSHI

O‘zbekiston Oliy o‘quv yurtlarida ko‘p bosqichli ta’lim tizimi joriy qilinib, bakalavriatda va magistraturada mutaxassislar tayyorlash yo‘lga qo‘yilgan. Bu esa oliy o‘quv yurti o‘qituvchilaridan jahon andozalariga to‘la javob beradigan, mustaqillik talab va ehtiyojlariga javob beradigan bakalavr va magistrlar o‘quv rejasi, o‘quv rejaga to‘la mos keluvchi o‘quv dasturlari, oliy kasbiy ta’limining davlat standartlari asosida darslik, uslubiy qo‘llanma, o‘quv qo‘llanma kabi adabiyotlarining yaratilishini taqozo etadi. Ushbiy qo‘llanmada matematik programmalash faniga tegishli masalalarni yechish metodikasi keltirilgan. O‘quv qo‘llanmada matematik modellarning optimal yechimlarini EHM ni qo‘llab topish mumkin.

Ushbiy o‘quv qo‘llanmada kamchiliklar bo‘lishi mumkin. Shuning uchun bunda o‘quv qo‘llanma bo‘yicha bildirilgan barcha taklif va fikrlar muallif tomonidan minnatdorchilik bilan qabul qilinadi.

KIRISH

Matematika fanining fundamental rivojlanishi boshqa fanlarning ham rivojlanishiga olib keldi. Hozirgi vaqtda matematika usullari qo'llanilmagan fan va texnikaning biror sohasi yo'q. Xalq xo'jaligini rejalashtirish va boshqarish masalalari juda murakkab bo'lib, bu masalalarni yechish uchun matematik modellarni qo'llashga to'g'ri keladi.

Ayniqsa bozor iqtisodiyotiga o'tish davrida va undan keyin barcha iqtisodiy masalalarni yechganda matematik modellashtirishning tatbiqi juda katta ahamiyatga ega bo'ladi. Shuning uchun o'quv qo'llanmada har bir masala, iqtisodiy masala ekanligiga asosiy e'tibor beriladi. Masalalar shunday tanlab olindiki talabalar uni yechganda ortiqcha tashvishga tushmasin. Har bir mavzuni boshlaganda bu mavzuda ishlatiladigan formulalar berildi. Shu bilan bir qatorda har bir mavzuga doir masalalar yechildi. Ayrim boblarda kerak bo'lgan nazariy qoidalar ham berildi. Masalalar tuzilganda, ularni soddalashtirishga harakat qilindi. Masalalar shunday tanlab olindiki, kelgusida bu masalalarni EHM da hisoblash mumkin bo'lsin. Masalalarni tanlashda juda ko'p adabiyotlardan foydalanildi.

«Matematik programmalash» fani quyidagi bo'limlarni o'z ichiga oladi: optimizatsiya metodlari, o'yinlar nazariyasi, stoxastik usullar, iqtisodiy usullar, chiziqli programmalash, modellarning sezgilik darajasining tahlili, ikki taraflama baholash, egri chiziqli programmalash, Lagranjning ko'paytmalar usuli, qavariq programmalash masalalari, Kun-Taker nazariyasi, kvadratik programmalash masalalari va boshqa asosiy tushunchalar.

Halq xo'jaligining iqtisodiy masalalarini yechish uchun yuqoridagi usullar keyingi vaqtda ko'p qo'llanilmoqda. Lekin shuni ham takidlash lozimki, barcha ishlab chiqarish korxonalarining mablag' va xom ashyo bilan ta'minlanishi chegaralangan. Shuni hisobga olib iqtisodiy masalalarni yechganda bu yechimlar ichida kerakli yechimlarni tanlashga to'g'ri keladi. Demak, har bir aniq iqtisodiy masalani yechish uchun harakat programmasini tuzib tanlash kerak.

Yuqoridagi usullarni tassavur qilish uchun bir nechta masalalarni ko'rsatamiz.

1. Materiallarni optimal bichish masalasi

Masala 1. Yarim tayyor mahsulotlar korxonaga to'qilgan materiallar, temir, taxta va oyna varaqlari sifatida keltiriladi. Bu yarim tayyor mahsulotlardan iloji boricha ko'proq detallar komplekti tayyorlash talab etiladi. Shu bilan birga quyidagi shartlar bajarilishi lozim. Jami n -partiya material bo'lib, i -partiya q_i -birlikka ega. Komplekt esa m -xil turli detaldan iborat. Har bir komplektga esa k -xil detaldan p_k -ta kiradi. Yarim tayyor mahsulotlar birligi s -ta turli usul bilan bichilishi mumkin.

i -chi partiya yarim tayyor mahsulot j -chi usul bilan bichilganda k -xil detaldan a_{ikj} -ta hosil bo'ladi deb faraz qilaylik.

x_{ij} -bilan i -chi partiyaning j -usul bilan bichilgandagi sonini (miqdorini) belgilaylik. Bu usulda bichilgandagi k -xil detal miqdori $a_{ikj}x_{ij}$ bo'ladi. Bichishning barcha usullaridan hosil bo'ladigan k -xil detal soni $\sum_{i=1}^s a_{ikj}x_{ij}$ ga teng. Har bir partiya material belgilangan k -xil detalning k -xil umumiy soni

$$\sum_{j=1}^s a_{1kj}x_{1j} + \sum_{j=1}^s a_{2kj}x_{2j} + \dots + \sum_{j=1}^s a_{nkj}x_{nj} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s a_{ikj}x_{ij} \quad \text{teng bo'ladi.}$$

Har bir komplekt k -xil detaldan p_k -taga ega. Shuning uchun k xil detal bilan ta'minlangan komplekt soni quyidagiga teng:

$$Z_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s a_{ikj}x_{ij}.$$

Komplekt barcha xil detallar bilan ta'minlangan bo'lishi shart, ya'ni materiallarni optimal bichish masalasida shunday x_{ij} sonlarni topish kerakki, ular Z_k nisbatining minimal qiymatiga maksimum qiymat bersinlar, ya'ni

$$Z_k > Z \quad (k = \overline{1, n}) \quad (1)$$

shart bajarilganda Z -ga maksimum qiymat berish talab qilinadi. Shu bilan bir qatorda

$$\sum_{j=1}^s x_{ij} = q_i, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Yuqoridagilardan ko‘rinib turibdiki (2) formuladagi shartlar, i -chi partiya q_i birlik materialga ega bo‘lganligini ko‘rsatadi, (3) formula esa mahsulot sonining manfiy bo‘lmasligini ko‘rsatadi.

2. Transport masalasi

Masala 2. Samarqand viloyatining ikkita bazasidan uchta tumanga bir jinsli tovarlarni tashish kerak bo‘lsin. Tovarlar zaxirasi birinchi bazada 400 tonna, ikkinchi bazada 600 tonna. Birinchi tumanning tovarga ehtiyoji 350 tonna, ikkinchisidiki 450 tonna va uchinchisidiki 200 tonna. Birinchi bazadan uchta tumangacha masofalar mos holda 10 km, 20 km va 30 km. Ikkinchi bazadan uchta tumangacha bo‘lgan masofalar mos ravishda 40 km, 50 km va 60 km –ga teng. Tumanlarga tovar tashish harajatlarning optimal variantlarini topish talab etiladi.

Bu masalani yechish uchun quyidagi jadvalni tuzamiz.

Jadval 1.

Bazalar	Tovar zaxiralari	Tumanlar		
		1	2	3
Jomboy	400 t	10 x_{11}	20 x_{12}	30 x_{13}
Juma	600 t	40 x_{21}	50 x_{22}	60 x_{23}
Tovarlarga bo‘lgan talab	1000 t	350 t	450 t	200 t

Tumanlarning bazalardan olgan yuklari x_{ij} ($i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,3}$) har xil taqsimlanishi mumkin. Misol uchun 1-chi bazadagi yuklarni quyidagicha taqsimlash mumkin:

$$x_{11} = 150, x_{12} = 150, x_{13} = 100 \text{ t}$$

2-chi bazadagi yuklarni esa mos ravishda istimolchilarga quyidagicha taqsimlaymiz $x_{21} = 200$, $x_{22} = 300$, $x_{23} = 100 \text{ t}$.

Bu taqsimot bo‘yicha transport harajatlari quyidagicha bo‘ladi:

$$F_1 = 150 \cdot 10 + 150 \cdot 20 + 100 \cdot 30 + 200 \cdot 40 + 300 \cdot 50 + 100 \cdot 60 = 36500 \text{ m.km.}$$

Agar x_{ij} larni ikkinchi marta boshqacha tanlab taqsimlangan, ya’ni

$$x_{11} = 50 \text{ m}, x_{12} = 200 \text{ m}, x_{13} = 150 \text{ m}, x_{21} = 300 \text{ m}, x_{22} = 250 \text{ m}, x_{23} = 100 \text{ m}.$$

U vaqtda transport harajatlari quyidagicha bo‘ladi:

$$F_2 = 50 \cdot 10 + 200 \cdot 20 + 150 \cdot 30 + 300 \cdot 40 + 250 \cdot 50 + 100 \cdot 60 = 39000 \text{ m.km} .$$

1 va 2 variantlardagi harajatlarning farqi quyidagicha bo‘ladi.

$$F_2 - F_1 = 39000 \text{ m.km} - 36500 \text{ m.km} = 2500 \text{ m.km} .$$

Demak, transport harajatlari oshadi. Ya’ni F_1 F_2 -dan ko‘ra yaxshiroq. Shunday qilib F_i -ko‘p variantlari ichidan optimalini ya’ni eng kam transport harajatlarini talab kiladigan variantni topish kerak.

Birinchi jadvalga asoslanib quyidagi matematik modelni tuzish mumkin:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600. \\ x_{11} + x_{21} = 350, \\ x_{12} + x_{22} = 450, \\ x_{13} + x_{23} = 200 . \end{cases} \quad (4)$$

Bu shartlarga asoslanib transport harajatlarini quyidagicha yozish mumkin

$$F = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 40x_{21} + 50x_{22} + 60x_{23} . \quad (5)$$

Shunday qilib (4) sistemaning shunday musbat yechimlarini topish kerakki, (5) chiziqli forma (maqsad funksiyasi) minimum qiymatga ega bo‘lsin.

3. Ratsion haqidagi masala

Faraz qilaylikki, mahalliy sayyohning bir oylik ratsionini 12 kg birlik, ya’ni tarkibi tashkil topgan mahsulotdan iborat. Sayyohning ratsioni gusht, makoron buyumlari va sabzavotlardan iborat.

Mahsulotlar tarkibi bo‘yicha ma’lumotlar quyidagi jadvalda berilgan.

2-jadval

Ko‘rsatgichlar	Birlik o‘lchovi	Sabza-votlar x_1	Makaron buyumlari x_2	Go’sht x_3	Jami kerakli mahsulotlar
Oqsilning koefitsent birligi	kg	0,18	0,24	1,2	12
Oqsilning miqdori	t	10	8	200	1000
Vitaminlar	m_2	15	1	1,5	450
1 kg-ni narxi	Tiyin	1	1,2	7,5	

Masalaning matematik modelini tuzing

Jadvalga asosan quyidagi modelni tuzamiz.

$$\left. \begin{array}{l} 0,18x_1 + 0,24x_2 + 1,2x_3 \geq 12 \\ 10x_1 + 8x_2 + 200x_3 \geq 1000 \\ 15x_1 + 1x_2 + 1,5x_3 \geq 450 \end{array} \right\} \quad (6)$$

Chiziqli funksiya esa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 1x_1 + 1,2x_2 + 1,75x_3 \quad (7)$$

Shunday qilib, (6) tizim (sistema)ning shunday nulli va musbat yechimlarini topish kerakki (7) maqsadli funksiya qiymati minimum bo'lsin.

Bunday masalalarni yechish hollarini kelgusida ko‘ramiz.

1. Bob. CHIZIQLI PROGRAMMALASH

§1. Chiziqli programmalashning asosiy masalasi va chiziqli programmalash masalalarini asosiy masalaga keltirish.

Chiziqli programmalashning asosiy masalasi ta’rifini quyidagicha berish mumkin.

Bizga chiziqli funksiya (maqsadli funksiya)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.1)$$

va n -noma'lumli m -ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

Bu yerda (1.2) sistemaning shunday yechimlarini topish kerakkim (1.1) chiziqli funksiya (maqsad funksiyasi) eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat qabul qilsin.

Ko'p masalalarni yechganda $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarga qo'yilgan cheklovlar chiziqli tengsizliklar sistemasi ko'rinishida beriladi, ya'ni

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right\} \quad (1.3)$$

Haqiqatan ham, (1.3) sistemasining birinchi tengsizligiga y_1 , ikkinchisiga y_2 va h.k. m -chi tengsizligiga y_m qo'shsak (1.3) sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi sistema hosil bo'ladi

[illegible]

Tengsizliklar sistemasi quyidagi ko‘rinishda

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m. \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

9

(1.1) – chiziqli forma (maqsadli funksiya) eng katta (max) yoki bo‘lmasa eng kichik (min) qiymat qabul qilsin.

Ta’rif. (1.2) sistemaning manfiy bo‘lmagan har qanday yechimlar to‘plamiga mumkin bo‘lgan yechimlari yoki masalaning tayanch rejasi deyiladi.

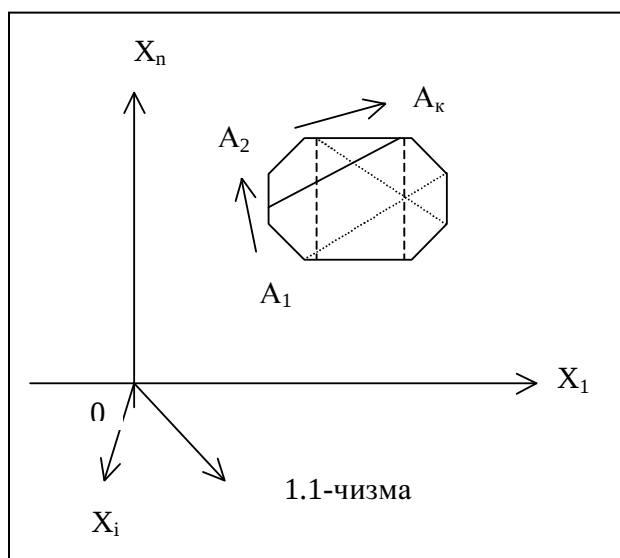
$$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bundan keyin chiziqli funksiyaning maqsad funksiyasi deb yuritamiz. Maqsad funksiyasini maksimumlashtiruvchi (minimumlashtiruvchi) mumkin bo‘lgan barcha yechimlariga optimal yechimlar deyiladi yoki optimal reja ham deb yuritiladi.

Chiziqli programmalashning asosiy masalasini yechganda odatda simpleks usulidan foydalanamiz.

§2. Simpleks usuli

Chiziqli programmalashning asosiy masalasini geometrik usul yordamida yechganda tenglamalar sistemasiga va maqsad funksiyasiga kiruvchi o‘zgaruvchilar soni qancha kam bo‘lsa shuncha masalani yechish osonlashadi. Agar o‘zgaruvchilar soni juda ko‘p bo‘lsa, masalan qavariq shakl uchlarining soni bir necha millionta bo‘lsa, u holda maqsad funksiyasining eng katta (eng kichik) qiymatlarini topish hozirgi zamon hisoblash mashinalariga ham og‘irlik qiladi.



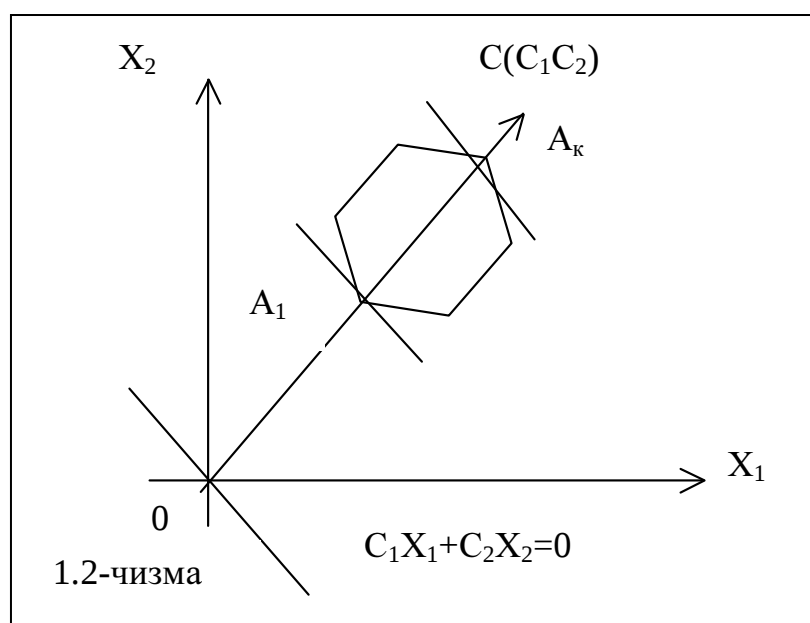
Haqiqatan ham, $n!$ -ta uchga ega bo‘lgan qavariq ko‘pyoqli berilgan bo‘lsin (1.1-chizma) Masalani yechish uchun ko‘pyoqlining $n!$ -ta uchlarining koordinatalarini topib maqsad funksiyaning bu nuqtalardagi

qiymatlarini taqqoslash kerak. Agar operatsiyalar soni $n > 15$ bo'lsa, u holda masalaning zarur bo'lgan yechimini topish hozirgi zamon hisoblash mashinalariga ham og'irlik qiladi. Buni ko'rsatish uchun Stirling formulasidan foydalanamiz.

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Agar qavariq ko'pyoqli uchlarining soni $n = 20$ bo'lsa, masalaning shartlari $2 \cdot 10^{18}$ -dan ham oshib ketadi. Bu yerda qavariq ko'pyoqlining lozim bo'lgan uchi koordinatalarini tanlab olish uchun sekundiga 10 million operatsiyani bajaradigan hozirgi zamon hisoblash mashinalariga 5000 yil ham kamlik qiladi.

Yuqoridagi ko'rsatilgan misoldan ko'rinib turibdiki, bunday masalalarni yechish uchun maxsus usullar ishlab chikarish lozimki, ko'pyoqlining uchlarini tanlash tartibsiz emas, balki maqsadli ravishda amalga oshirilsin. Masalan, kupyoqlining qirralari bo'ylab shunday harakat qilish lozimki, har bir qadamda maqsad funksiyasi F -ning qiymati maksimum (minimum) qiymatga tomon tartibli ravishda intilsin (1.2-chizma).



Simpleks usul birinchi bo'lib amerikalik olim D. Dansig tomonidan 1949 yili taklif etilib, keyinchalik 1956 yilda Dansig, Ford, Fulkeron va boshqalar tomonidan to'la rivojlantirildi. Lekin, 1939 yilda rus matematigi L.V. Kantorovich va uning shogirdlari asos solgan yechuvchi ko'paytuvchilar usuli simpleks usulidan ko'p farq qilmaydi.

“Simpleks” soʻzi n -oʻlchovli fazodagi $n + 1$ ta uchga ega boʻlgan oddiy qavariq koʻp yoqlini ifodalaydi. Simpleks bu

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \leq 1$$

ko‘rinishdagi tengsizliklarning yechimlari sohasidir.

Simpleks usuli yordamida chiziqli programmalashning ko'pgina masalalarini yechish mumkin. Bu usul yordamida chekli qadamlarda optimal yechimlarni topish mumkin. Har bir qadamda shunday mumkin bo'lgan yechimlarni topish kerakki, maqsad funksiyasining qiymati oldingi qadamdagi qiymatidan (miqdoridan) katta (kichik) bo'lsin. Bu jarayon maqsad funksiyasi optimal (maksimum yoki minimum) yechimga ega bo'lguncha davom ettiriladi.

Simpeks usulini tushintirish uchun quyidagi masalani ko‘rib chiqaylik.

Masala. Qo‘yidagi tengsizliklar sistemasining

[illegible]

manfiy bo'lmagan shunday yechimlari $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$
topilsinki, maqsad funksiya

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad (1.6)$$

maksimum yoki minimum qiymatga ega bo'lsin.

Bu masalani yechish uchun (1.5) chiziqli tengsizliklar sistemasiga shunday $y_1, y_2, \dots, y_n$ manfiy bo'lmagan o'zgaruvchilarni mos ravishda qo'shib, qo'yidagi ekvivalent sistemani hosil qilamiz

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + \acute{o}_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + \acute{o}_2 = b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + \acute{o}_m = b_m. \end{array} \right\} \quad (1.7)$$

bunda $x_i \geq 0, y_j \geq 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$

U holda maqsad funksiyasini quyidagi ko‘rinishda yozamiz

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \dots + 0 \cdot y_m. \quad (1.8)$$

Agar (1.7) dan $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ deb olsak, birinchi mumkin bo'lgan yechimlar to'plami $y_j = b_j, j = \overline{1, m}, x_i = 0, i = \overline{1, n}$ hosil bo'ladi. Bu holda maqsad funksiyasi 0 –ga teng, ya'ni

$$F(0,0,\dots,0,b_1,b_2,\dots,b_m)=0.$$

Simpleks usulini ishlatganda ketma-ket jadvallarni almashtirish ancha kulay bo‘ladi. Jadvalni tuzishga o‘tamiz:

1. Eng yuqoridagi $m+1$ satriga maqsad funksiyasining koefitsiyentlarini joylashtiramiz
2. Jadvalning yuqoridagi 2 – satriga o‘zgaruvchi $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m$ -larni yozamiz;
3. $x_1, x_2, \dots, x_n$ -larning koefitsiyentlari jadvalning asosiy qismini tashkil qiladi (asosiy matritsa), $y_1, y_2, \dots, y_m$ o‘zgaruvchilarning koefitsiyentlari esa bosh diagonal bo‘yicha yozilib, birlik matritsani tashkil etadi;
4. Jadvalning oxirgi satriga indekslar satri deyiladi va bu satr maqsad funksiyasiga qatnashuvchi o‘zgaruvchilarning koefitsiyentlarini teskari ishora bilan olingan koefitsiyentlar orqali to‘ldiriladi.

Natijada quyidagi jadval hosil bo‘ladi.

Dastlabki berilaganlarning asosiy jadvali

m+1	I	II	III	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0	Maqsad funksiya satri
				x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	y_m	O‘zgaruvchilar satri
1	0	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	Birlik matritsa
2	0	y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2m}	0	1	...	0	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	0	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	
Indks satri			0	$-s_1$	$-s_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	

Maqsadli ustun

o‘zgarmaslar ustuni

Asosiy matritsa

O‘zgaruvchilar ustuni

Bu jadvalga asoslanib birinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvalini tahlil qilamiz. Indeks satri tahlil qilganda satr elementlarining musbat va manfiylariga e‘tibor beramiz. Agar indeks catri elementlarining hammasi musbat bo‘lsa, u

holda mumkin bo'lgan yechimini o'zgartirib bo'lmaydi va bu yechim optimal yechim bo'ladi. Faraz qilaylikki indeks satri elementlarining ichida bir nechta manfiy sonlar mavjud va bu manfiy son $(-s_1)$ -ga teng bo'lsin. $(-s_1)$ ni qora chiziqli to'rtburchak ichiga olamiz. Bu ustunga yechuvchi ustun deyiladi. $(-s_1)$ joylashgan ustun elementlarini ham qora chiziq bilan chizilgan to'rtburchak ichiga olamiz. Bu yerda shuni ham aytish kerakki, agar bordiyu indeks satrida bir – biriga teng bir nechta kichik manfiy sonlar bo'lsa, u holda chap tomondan boshlab birinchi katakdagi manfiy sonni tanlaymiz. Yechuvchi satrni topish uchun o'zgaruvchilar ustunidagi sonlarni kalitli ustundagi mos musbat sonlarga bo'lib, ular ichidan eng kichik musbat sonni tanlab olamiz. Faraz qilaylikki bu son $\frac{b_1}{a_{12}}$ bo'lsin, ya'ni

$$K = \text{eng kichik} \left\{ \frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, \frac{b_m}{a_{m2}} \right\} = \frac{b_1}{a_{12}}.$$

Birinchi simpleks jadvalda $S_1, S_2, \dots, S_{m+1}$ ning qiymatlari quyidagicha topiladi

$$S_1 = 1 + b_1 + \sum_{i=1}^n a_{1i},$$

$$S_2 = 1 + b_2 + \sum_{i=1}^n a_{2i},$$

.....

$$S_m = 1 + b_m + \sum_{i=1}^n a_{mi},$$

$$S_{m+1} = 0 - \sum_{i=1}^n c_i,$$

$$S = \sum_{i=1}^{m+1} S_i = m + 1 + \sum_{i=1}^m b_i + \sum_{i=1}^m a_{1i} + \sum_{i=1}^m a_{2i} + \dots + \sum_{i=1}^m a_{mi} - \sum_{i=1}^n c_i.$$

Ikkinchi simpleks jadvalni tuzishga o'tamiz

Ikkinchi simpleks jadvalda o'zgaruvchilar ustuni o'zgaradi. Bu ustunda yangi o'zgavchi x_1 yechuvchi satrdagi u_1 ning o'rnini egallaydi. Ya'ni yechuvchi ustundagi o'zgaruvchi yechuvchi satrdagi o'zgaruvchini o'rnini egallaydi. Bundan keyingi jadvallarni tuzganda ham bu qoida saqlanadi. Birinchi simpleks jadvaldagi yechuvchi satrga

ikkinchi simpleks jadvalda bosh satr deb ataladi va bu satrdagi har bir katak quyidagi formula yordamida to'ldiriladi

$$B_i = \frac{O_i}{K},$$

K- yechuvchi son;

O_i- oldingi son;

B_i- bosh satr elementlari.

Ikkinchi simpleks jadvalida bosh satrlardagi kataklar quyidagi formula yordamida to'ldiriladi. Yechuvchi ustun bilan yechuvchi satr kesishgan kataklarda turgan son $K = \frac{b_1}{a_{11}}$ -ga yechuvchi son deyiladi.

Yechuvchi satrni ham qora chiziq bilan to'rtburchak ichiga olamiz. Dastlabki berilganlar jadvalini oxirgi ustuniga tekshirish ustunini joylashtiramiz. Tekshirish ustunidagi har bir son o'zgarmaslar ustunidan boshlab satrdagi sonlar yig'indisiga tengdir. Tekshirish ustunidagi sonlar yechuvchi ustunni topishda qo'llanilmaydi. Natijada birinchi simpleks jadval hosil bo'ladi.

Birinchi simpleks jadval

M+1	I	II	III	s ₁	s ₂	...	s _n	0	0	...	0	
				x ₁	x ₂	...	x _n	y ₁	y ₂	...	y _m	Tekshirish ustuni
1	0	y ₁	b ₁	a ₁₁	a ₁₂	...	A _{1n}	1	0	...	0	S ₁ yechuvchi satr
2	0	y ₂	b ₂	a ₂₁	a ₂₂	...	A _{2n}	0	1	...	0	S ₂
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
M	0	y _m	b _m	a _{m1}	a _{m2}	...	a _{mn}	0	0	...	1	S _m
Indeks satri	Maqsadli ustuni		F=0	-C ₁	C ₂	...	C _n	0	0	...	0	S _{m+1}

Yechuvchi ustuni

Yechuvchi son

Boshqa satrdagi kataklar quyidagi formula yordamida to'ldiriladi

$$A_{ij} = O_i - \frac{K_1 K_2}{K},$$

O_i -oldingi son;

K- yechuvchi son;

K_1 - O_i -ga mos bo'lgan yechuvchi satrdagi son;

K_2 - O_i -ga mos bo'lgan yechuvchi ustundagi son.

Yuqoridagi formulalar asosida yangi elementlarni birinchi simpleks jadval elementlari orqali hisoblab chiqsak, natijada ikkinchi simpleks jadval hosil bo'ladi. Bundan keyin maqsadli satrni yozmasak ham bo'ladi, chunki bu satr elementlari keyingi jadvallarda qo'llanilmaydi.

Ikkinchi simpleks jadval

M+1	I	II	III	x_1	x_2	...	x_n	s_1	s_2	...	s_n	Tekshirish ustuni
1	0	x_1	F_1	$s_{11}=1$	s_{12}	...	s_{1n}	$1/a_{11}$	0	...	0	S'_1 -bosh satr
2	0	y_2	F_2	$c_{21}=0$	c_{22}	...	c_{2n}	d_{21}	d_{22}	...	d_{2m}	S'_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
M	0	y_m	F_m	$c_{m1}=0$	c_{m2}	...	c_{mn}	d_{m1}	d_{m2}	...	d_{mn}	S'_m
Indeks satri			F'_1	α_1	α_2	...	α_n	β_1	β_2	...	β_m	S'_{m+1}

Bu jadval kataklaridagi sonlar quyidagilarga teng:

$$S'_1 = F_1 + \frac{1}{a_{11}} + \sum_{i=1}^n c_{1i},$$

$$S'_2 = F_2 + \sum_{i=1}^n c_{2i} + \sum_{j=1}^m d_{2j},$$

.....

$$S'_m = F_m + \sum_{i=1}^n c_{mi} + \sum_{j=1}^m d_{mj},$$

$$S'_{m+1} = F'_1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^m \beta_j.$$

Bosh satr elementlari:

$$F_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, c_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1, c_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \dots, c_{1n} = \frac{a_{1n}}{a_{11}}, d_{11} = \frac{1}{a_{11}}, d_{12} = \frac{0}{a_{11}} = 0, \dots, d_{1n} = \frac{0}{a_{11}} = 0.$$

Ikkinchi satr kataklaridagi sonlar:

$$F_2 = b_2 - \frac{b_1 a_{21}}{a_{11}}, c_{21} = a_{21} - \frac{a_{11} a_{21}}{a_{11}} = 0, \dots, c_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21} a_{1n}}{a_{11}}$$

.....

m-chi satr elementlari:

$$F_m = b_m - \frac{b_1 a_{m1}}{a_{11}}, c = a_{m1} - \frac{a_{m1} a_{11}}{a_{11}} = 0, c_{mn} = a_{mn} - \frac{a_{m1} a_{1n}}{a_{11}}, d_{m1} = 0 - \frac{a_{m1} \cdot 1}{a_{11}}, \dots, d_{m2} = 1 - \frac{0 \cdot a_{m1}}{a_{11}}$$

Indeks satr elementlari:

$$F_1 = 0 - \frac{(-c_1)b_1}{a_{11}}, \alpha_1 = -c_1 - \frac{(-c_1)a_{11}}{a_{11}} = 0, \alpha_2 = -c_2 - \frac{(-c_1)a_{12}}{a_{11}}, \dots, \alpha_n = -c_n - \frac{(-c_1)a_{1n}}{a_{11}}$$

$$\beta_1 = 0 - \frac{1 \cdot (-c_1)}{a_{11}}, \dots, \beta_m = 0 - \frac{0 \cdot (-c_1)}{a_{11}} = 0.$$

Agar ikkinchi simpleks jadvalning indeks satridagi kataklardagi sonlarning hammasi musbat bo'lsa, u holda bu jadvaldagi yechimlarga optimal yechimlar deyiladi va maqsad funksiyasining optimal qiymati

$$F_1(F_1, 0, 0, \dots, 0, 0, F_2, F_3, \dots, F_m) = c_1 F_1 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 + 0 \cdot 0 + \dots + F_2 \cdot 0 + F_3 \cdot 0 + \dots + F_m \cdot 0 = c_1 F_1,$$

bo'ladi, bu yerda

$$x_1 = F_1, x_2 = 0, x_3 = 0, \dots, x_n = 0, y_1 = 0, y_2 = F_2, y_3 = F_3, \dots, y_m = F_m.$$

Agar indeks satrida manfiy sonlar mavjud bo'lsa, yuqoridagi yechimlar optimal yechim bo'lmaydi. Shuning uchun yuqoridagi qoidalarni ikkinchi simpleks jadvalga qo'llab, uchinchi simpleks jadvalni tuzamiz. Jadvallarni almashtirish (yaxshilash) indeks satrida hamma kataklardagi sonlar musbat bo'lguncha davom ettiriladi.

Simpleks jadvallarni tuzganda quyidagi qoidalariga asosiy e'tiborni berish kerak:

1. Agar yechuvchi ustunda nol bo'lsa, kelgusi jadvalda shu nol turgan satr o'zgarmaydi;
2. Yechuvchi satrda nol bo'lsa, bu nol turgan ustun kelgusi jadvalda o'zgarmaydi;
3. Har bir o'zgaruvchi ustun va mos o'zgaruvchi satr kesishgan katakdagi son 1- ga teng bo'lsa, bu ustundagi boshqa katakdagi sonlar nolga teng

Shu vaqtgacha maqsad funksiyasining maksimum qiymatini izlagan edik. Lekin ayrim masalalarda maqsad funksiyasining minimum qiymatlarini topish talab etiladi, yani

$$F_{\min} = -F_{\max} = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n \text{ yoki, } F_{\max} = -F_{\min} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n.$$

Bundan ko'rinadiki masalani maksimumini topsak yetarli. Shunday qilib, har qanday maksimum qiymat talab qilingan masalalarni unga ekvivalent bo'lgan minimum qiymatni talab qilgan masalalar bilan almashtirish mumkin.

Yuqoridagi qoida va formulalardan foydalanib quyidagi masalani yechamiz.

Masala 1. Korxonada ikki tur buyum ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Birinchi tur buyum ishlab chiqarish uchun birinchi xil

xomashyodan 6 kg, ikkinchi xil xom ashyodan 3 kg, uchinchi xil xom ashyodan 4 kg ishlatladi. Agar korxona birinchi xom ashyodan 600 kg, ikkinchi xil xom ashyodan 520 kg, uchunchi xil xom ashyodan 600 kg tamin etilgan va birinchi xil buyumni sotganda har bir donasidan 6 so'm , ikkinchi xil buyumni sotganda esa 3 so'm foyda olganda, korxona ishlab chikarishni shunday rejalashtirinki olingan daromad maksimal bo'lsin.

Yechish. Faraz qilaylikki birinchi tur buyumdan x_1 dona, ikkinchi tur buyumdan x_2 dona ishlab chiqarilsin.

Masalaning shartini x_1 va x_2 o'zgaruvchilarni o'z ichiga olgan quyidagi tengsizliklar sistemasi ko'rinishda yozish mumkin

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &\leq 600, \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 520, \\ 3x_1 + 4x_2 &\leq 600. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

U holda maqsad funksiyasi

$$F(x_1, x_2) = 6x_1 + 3x_2 \quad (1.9)$$

bo'ladi.

Demak, (1.8) chiziqli tengsizliklar sohasida shunday manfiy bo'lmagan yechimlarini topish kerakki maqsad funksiyasi $F(x_1, x_2)$ maksimal qiymatga ega bo'lsin.

Masalani simpleks usuli bilan yechish uchun (1.8) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga keltiramiz

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + y_1 &= 600, \\ 4x_1 + 3x_2 + y_2 &= 520, \\ 3x_1 + 4x_2 + y_3 &= 600. \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Maqsad funksiya esa quyidagicha bo'ladi

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 6x_1 + 3x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3. \quad (1.11)$$

Agar (1.10) dan $x_1=0$, $x_2=0$ deb olsak, u holda $y_1=600$, $y_2=520$, $y_3=600$ -ga teng bo'ladi. Demak, birinchi bazisli yechimlar $x_1=0$, $x_2=0$, $y_1=600$, $y_2=520$, $y_3=600$ bo'ladi. Endi maqsad funksiyani bu yechimlarga mos qiymatini topamiz

$$F(0, 0, 600, 520, 600) = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 600 \cdot 0 + 520 \cdot 0 + 600 \cdot 0 = 0.$$

Bundan ko'rinib turibdiki ishlab chiqarish hali boshlanmagan. Simpleks usul qondalaridan foydalanib dastlabki berilganlarning asosiy jadvalini tuzamiz.

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvali

	I	II	III	6	3	0	0	0	Maqsad satri
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	O'zgaruvchilar satri
1	0	y_1	600	6	2	1	0	0	Asosiy matritsa
2	0	y_2	520	4	3	0	1	0	Birlik matritsa
3	0	y_3	600	3	4	0	0	1	
Indeks satri	Maqsad ustuni	O'zgaruvchilar ustuni	$F=0$	-6	-3	0	0	0	

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvaliga asosanib birinchi simpleks jadvalni tuzamiz

Birinchi simpleks jadval

IV	I	II	III	6	3	0	0	0	Tekshirish
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Ustuni
1	0	Y_1	600	6	2	1	0	0	609 kalitli satr
2	0	Y_2	520	4	3	0	1	0	528
3	0	Y_3	600	3	4	0	0	1	608
Indeks satri		Maqsad ustuni	$F_0=0$	-6	-3	0	0	0	

Yechuvchi ustun Yechuvchi son

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, indeks satrida manfiy sonlar bor. Bu sonlar ichidan eng kichigini topamiz. Eng kichigi $\{-6, -3\} = -6$ bo'lgani uchun bu ustun yechuvchi ustundir. O'zgaruvchilar ustunidagi sonlarni mos ravishda yechuvchi ustundagi sonlarga bo'lib, ular ichidan eng kichigini topamiz

$$\min \left\{ \frac{600}{6}, \frac{520}{4}, \frac{600}{3} \right\} = \frac{600}{6} = 100.$$

Bu satrga yechuvchi satr deyiladi. Yechuvchi ustun va yechuvchi satr kesishgan katakda joylashgan $K=6$ songa yechuvchi son deyiladi.

Simpleks jadval tuzish qoida va formulalardan foydalanib ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

Ikkinchi simpleks jadval

IV	I	II	III	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Tekshirish ustuni
III	6	x_1	100	1	1/3	1/6	0	0	$101\frac{1}{2}$ bosh satr
II	0	y_2	120	0	5/3	-2/3	1	0	122 yechuvchi satr
I	0	y_3	300	0	3	-1/2	0	1	$303\frac{1}{2}$
Indeks satri			$F_1=600$	0	-1	1	0	0	600

Yechuvchi ustun

Yechuvchi son

Indeks satrida manfiy son mavjud bo'lgan uchun ikkinchi simpleks jadval tuzilgani kabi uchinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

Uchinchi simpleks jadval

IV	I	II	III	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Tekshirish ustuni
I	6	x_1	76	1	0	3/10	-1/5	0	$77\frac{1}{10}$
II	3	x_2	72		1	-2/5	3/5	0	$73\frac{1}{5}$ bosh satr
III	0	y_3	272		0	7/5	-9/5	1	$272\frac{3}{5}$
Indeks satri			$F_2=672$		0	3/5	3/5	0	$673\frac{1}{5}$

Shunday qilib uchinchi simpleks jadvalning indeks satrida manfiy sonlar yo'q. Shuning uchun bu jadval optimal programmadir. Optimal yechim esa $x_1=76$, $x_2=72$, $y_1=0$, $y_2=0$, $y_3=272$ ga teng. Bu yechimni (1.11) formulaga qo'ysak quyidagi hosil bo'ladi

$F(76, 72, 0, 0, 272) = 6 \cdot 76 + 3 \cdot 72 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 272 = 6 \cdot 76 + 3 \cdot 72 = 672$, $F_{\max} = 672$ so'm.

Demak, maksimum daromad olish uchun birinchi tur buyumdan $x_1=76$ dona, ikkinchi tur buyumdan esa $x_2=72$ dona ishlab chiqarish

kerak ekan. Endi yuqoridagi simpleks usul bilan yechilgan masalaning geometrik talqinini beramiz. Oldin (1.8) tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi sohani chizamiz. Buning uchun (1.8) tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasi ko‘rinishida yozamiz ($x_i \geq 0, i = \overline{1,2}$)

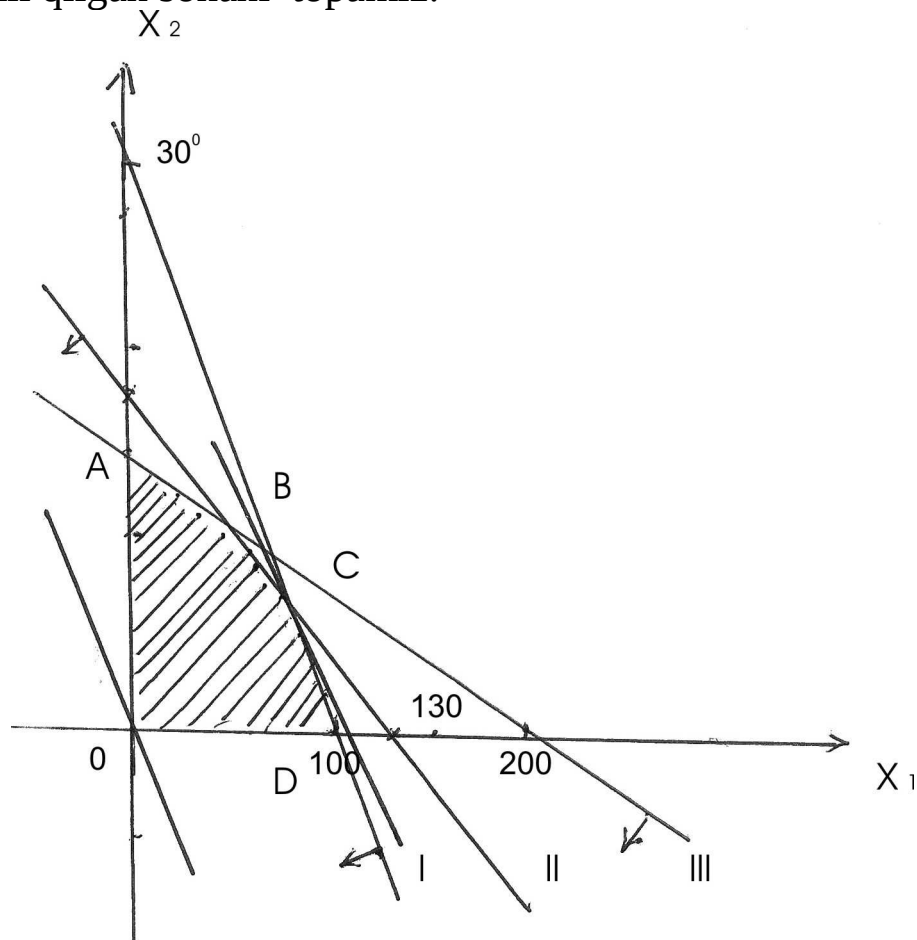
$$6x_1 + 2x_2 = 600, \quad (I)$$

$$4x_1 + 3x_2 = 520, \quad (II)$$

$$3x_1 + 4x_2 = 600, \quad (III)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Bu sistemaga kiruvchi to‘g‘ri chiziqlarni chizib, yarim tekisliklar tashkil qilgan sohani topamiz.



1.3-chizma

OABCD ko‘pburchakning uchlarining koordinatalari to‘plami optimal yechimlar to‘plamiga kiradi (1.3-chizma): $O(0; 0)$, $B(14; 119,5)$, $C(76; 72)$, $D(100; 0)$, $A(0; 150)$.

Endi maqsad funksiyaning OABSD ko‘p burchakning uchlaridagi qiymatlarini hisoblaymiz

$F_O(0; 0) = 0$ so‘m,

$$F_A(0; 150) = 6 \cdot 0 + 3 \cdot 150 = 450 \text{ so'm,}$$

$$F_B(14; 119,5) = 6 \cdot 14 + 3 \cdot 119,5 = 84 + 358,5 = 442,5 \text{ so'm,}$$

$$F_C(76; 72) = 6 \cdot 76 + 3 \cdot 72 = 456 + 216 = 672 \text{ so'm,}$$

$$F_D(100; 0) = 6 \cdot 100 + 3 \cdot 0 = 600 \text{ so'm.}$$

Demak,

$$F_{\max} = \max\{F_O, F_A, F_B, F_K, F_D\} = 672 \text{ so'm.}$$

Agar sath chizig'i $6x_1 + 3x_2 = K$ bo'lsa, K -ga 0,1,2, ... qiymatlar berib $\bar{C}(6,3)$ vektori yo'nalishini o'zgartirmasdan siljitib borsak, tayanch chizig'i S nuqtada urinib o'tadi. Maqsadli funksiya shu nuqtada optimal yechimga ega bo'ladi. Tayanch chizig'inng tenglamasi: $x_2 - 72 = -2(x_1 - 76)$; $F(76; 72) = 672$ so'm maksimum daromad bo'lib, simpleks usul yordamida topilgan optimal yechimga mos keladi.

Masala 2 Quyidagi masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishda yozing:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 &\leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 &\leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &\leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 &\geq 8. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \quad \max.$$

Yechish. Bu masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishida yozish uchun musbat bazisli o'zgaruvchilar x_6, x_7, x_8, x_9 ni « $\leq$ » belgi bo'lgan tengsizliklarning chap tarafiga qo'shamiz yoki « $\geq$ » ishorasi bo'lgan tengsizliklarning chap tarafidan ayiramiz. U holda quyidagi hosil bo'ladi

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 &= 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 &= 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 &= 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 &= 8. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0.$$

Shunday qilib bu masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko‘rinishda yozish mumkin. Quyidagi shartlar

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 &= 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 &= 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 &= 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 &= 8. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0.$$

bajarilganda

$F(x_1, x_2, \dots, x_9) = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 + 0 \cdot x_9$ funksiyaing maksimum qiymatini toping.

Masala 3 Quyidagi masalani quyidagi chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko‘rinishda yozing

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &\geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 15. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \rightarrow \min.$$

Yechish. Bu masalada maqsad funksiyaning minimum qiymatini topish talab etilyapti. Shuning uchun maqsadli funktsiyani minimum qiymatini topish o‘rniga $F_1 = -F$ ning maksimum qiymatini yuqoridagi shartlar bo‘yicha topamiz.

Demak masala quyidagicha qo‘yiladi.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 &= 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 &= 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 0 &= 15. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0, ,$$

shartlar bajarilganda

$F(x_1, x_2, \dots, x_7) = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7$ ning maksimum qiymatini toping.

Topshiriqlar quyidagi masalalarni chiziqli programmashning asosiy masalasiga keltiring.

1.1

$$\left. \begin{array}{l} 5x_1 - 2x_2 \leq 3, \\ x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ -3x_1 + 8x_2 \leq 3. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

1.2.

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 \geq 14, \\ x_1 \geq 2. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

1.3.

$$\left. \begin{array}{l} 7x_1 + 2x_2 \geq 14, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

1.4.

$$\left. \begin{array}{l} -5x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + 5x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 7. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$$

1.5.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4, \\ 8x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ x_1 + 5x_2 \geq 4. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

1.6.

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 22, \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 28. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 7x_1 + 4x_2 \rightarrow \min$$

1.7.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \min$$

1.8.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 3x_1 + 8x_2 \rightarrow \min$$

1.9.

1.10.

$$\left. \begin{array}{l} 18x_1 + 9x_2 \leq 720, \\ 8x_1 + 28x_2 \leq 56. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 11x_1 + 7x_2 \rightarrow \min$$

1.11.

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 = 14, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 18. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$F = -2x_1 - 12x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$$

1.13.

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 16, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 18. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$F = -x_1 + x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

1.15.

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 5. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = -x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

1.17.

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \geq 20, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 25, \\ 8x_1 + 0 \cdot x_2 - 3x_3 \geq 3. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$F = 8x_1 - 3x_2 + x_4 \rightarrow \max$$

1.19.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \geq 70, \\ 15x_1 + 12x_2 \leq 36, \\ 7x_1 + 13x_2 \geq 200. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$F = 27x_1 + 50x_2 \rightarrow \max$$

1.12.

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 24, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18, \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 27. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$F = -4x_1 + x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$

1.14.

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 \leq 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 \geq 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 = 25, \\ 9x_1 + 18x_2 + x_3 - 27x_4 \leq 9. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3, x_4 \geq 0.$$

$$F = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \rightarrow \max$$

1.16.

$$\left. \begin{array}{l} 0,3x_1 + 0,1x_2 + x_3 \leq 150 \\ 0,7x_1 + 0,3x_2 + 2x_3 \leq 270 \\ 0,1x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leq 0. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$F = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$$

1.18.

$$\left. \begin{array}{l} 10x_1 + 5x_2 \leq 50, \\ 6x_1 + 0x_2 \leq 26, \\ 12x_1 + 4,5x_2 = 1. \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 10x_1 + 20x_2 \rightarrow \min$$

1.20.

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &\geq 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 &\leq 4, \\ 5x_1 - 3x_2 + 15x_3 &\leq 30. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\left. \begin{aligned} 7x_1 - 5x_2 &\geq 2, \\ x_1 - 3x_2 &\leq 4, \\ 6x_1 + 5x_2 &\leq 30. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$$

1.21.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 30, \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 &\leq 45. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 5x_1 + 14x_2 - 7x_3 \rightarrow \max$$

1.22.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4, \\ x_1 + 5x_2 &\leq 20, \\ x_1 &\leq 8, \\ x_2 &\geq 4. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 3x_1 + x_2 \rightarrow \min$$

1.23.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 12x_3 &\leq 36, \\ 4x_1 + x_2 + 36x_3 &\geq 14, \\ x_1 + x_2 + 8x_3 &= 10. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = x_1 + 10x_2 - 20x_3 \rightarrow \max$$

1.24.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 12x_3 &= 24, \\ 4x_1 - 5x_2 + 5x_3 &\leq 10, \\ 7x_1 + x_2 + 14x_3 &\leq 28. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 5x_1 - 10x_2 + 15x_3 \rightarrow \min$$

1.25.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 9x_2 + 18x_3 &= 36, \\ 9x_1 + 18x_2 - x_3 &\leq 36, \\ 21x_1 + 42x_2 - 84x_3 &\geq 168. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 10x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max$$

Quyidagi masalalarni chiziqli programmalashning asosiy masalasiga keltiring va simpleks usuli va grafik usul bilan yeching.

Yechimni talqin eting.

1.26.

1.27.

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \leq 470, \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 365, \\ 4x_1 + x_2 \leq 310. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 11x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 \leq 614, \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 455, \\ 5x_1 + x_2 \leq 320. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 20x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

1.28.

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \leq 740, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 690, \\ 6x_1 + x_2 \leq 456. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

1.29.

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \leq 350, \\ 6x_1 + 6x_2 \leq 366, \\ 9x_1 + 3x_2 \leq 81. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 9x_1 + 11x_2 \rightarrow \max$$

1.30.

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 \leq 630, \\ 4x_1 + 13x_2 \leq 420, \\ 8x_1 + x_2 \leq 320. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 11x_1 + 14x_2 \rightarrow \max$$

1.31.

$$\begin{cases} 20x_1 + 15x_2 + 14x_3 \geq 10, \\ 28x_1 + 9x_2 + x_3 \geq 2. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 1238x_1 + 1118x_2 + 523x_3 \rightarrow \min$$

1.32.

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 12x_3 \geq 5, \\ 21x_1 + 15x_2 + 3x_3 \geq 3. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 740x_1 + 740x_2 + 822x_3 \rightarrow \min$$

1.33.

$$\begin{cases} 44x_1 + 12x_2 + 8x_3 \geq 7, \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 3. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 620x_1 + 545x_2 + 380x_3 \rightarrow \min$$

1.34.

$$\begin{cases} 19x_1 + 16x_2 + 20x_3 \geq 5, \\ 26x_1 + 17x_2 + 8x_3 \geq 4. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 620x_1 + 372x_2 + 540x_3 \rightarrow \min$$

1.35.

$$\begin{cases} 14x_1 + 15x_2 + 20x_3 \geq 5, \\ 40x_1 + 27x_2 + 4x_3 \geq 13. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 1200x_1 + 990x_2 + 1100x_3 \rightarrow \min$$

1.36.

$$\begin{cases} 9x_1 + 15x_2 + 15x_3 \geq 11, \\ 27x_1 + 15x_2 + 3x_3 \geq 6. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 600x_1 + 400x_2 + 820x_3 \rightarrow \min$$

1.37.

$$\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 + 14x_3 \geq 5, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 \geq 7. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 60x_1 + 80x_2 + 400x_3 \rightarrow \min$$

1.38.

$$\begin{cases} 19x_1 + 16x_2 + 19x_3 \geq 16 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 \geq 19 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 1121x_1 + 706x_2 + 1066x_3 \rightarrow \min$$

1.39.

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 \geq 11, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 480x_1 + 364x_2 + 320x_3 \rightarrow \min$$

1.40.

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 3x_3 \geq 11, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$F = 1240x_1 + 1120x_2 + 53x_3 \rightarrow \min$$

§3-Sun'iy bazis usuli

Yuqorida ko'rgan edikki, chiziqli programmalashning asosiy masalasida P_i vektorlar ichida m ta birlik vektor mavjud bo'lsa, u vaqtda tayanch yechimni topish mumkin. Lekin chiziqli programmalashning ko'p masalalari chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishida berilgan bo'lib tayanch yechimi

mavjud bo'lsada, P_i vektorlar ichida hamma vaqt m ta birlik vektorlar bo'lmaydi. Bunday hollarida sun'iy bazis usulidan foydalanib quyidagi masalani yechamiz:

Masala. Quyidagi chegaraviy shartlar

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (1.12)$$

$$x_i \geq 0 (i = \overline{1, n})$$

bajarilganda

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1.13)$$

F-funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Bu yerda $\epsilon_j \geq 0 (j = 1, m), m < n$

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{11} \\ a_{m1} \end{pmatrix} ; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{m2} \end{pmatrix} ; \quad \dots, P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

R_i vektorlar ichida m - ta birlik vektorlar yo'q.

Ta'rif. Quyidagi chegaraviy shartlarda:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \quad (1.14)$$

$$x_i \geq 0 (i = \overline{1, n+m})$$

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \dots - Mx_{n+m} \quad (1.15)$$

F-funksiyaning maksimum qiymatini topishga (1.14) - (1.15) masalaga nisbatan kengaytirilgan masala deyiladi.

Bu yerda M -oldindan berilmagan yetarli katta musbat son.

Kengaytirilgan masala quyidagi ko‘rinishdagi tayanch yechimga ega bo‘lib

$$X = (0, 0, 0, \dots, 0, b_1, b_2, \dots, b_n),$$

$R_{n+1}, R_{n+2}, \dots, R_{n+m}$, birlik vektorlari sistemasi orqali aniqlanadi va bu bazis m -o‘lchovli vektor fazasini tashkil qiladi. Tashkil bo‘lgan bazisga sun‘iy bazis deyiladi.

Shunday qilib kengaytirilgan masala tayanch yechimga ega bo‘lgani uchun, bu masalani sipleks usul bilan yechish mumkin bo‘ladi.

Bu yerda quyidagi teorema o‘rinlidir

1.1 teorema. Agar kengaytirilgan masalani (1.14) – (1.15)

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, x_{n+m}^*) \text{ optimal rejasida}$$

$x_{n+i} = 0 (i = 1, m)$ bo‘lsa, u vaqtda $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ rejaga (1.12) – (1.13) masalani optimal rejasi deyiladi.

Teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

Shunday qilib kengaytirilgan masalani optimal rejasini sun‘iy bazis o‘zgaruvchilari nolga teng bo‘lganidan dastlabki masalaning optimal rejasi kelib chiqadi.

Masalaning tayanch yechimi $X = (0; 0; 0; \dots; e_1; e_2; \dots; e_m)$ bo‘lganidan kengaytirilgan masala uchun chiziqli forma qo‘yidagicha bo‘ladi

$$F_0 = -M \sum_{i=1}^m e_i, \text{ va } \Delta_j = z_j - c_j \text{ ning qiymati } -M \sum_{i=1}^m a_{ij} - c_j \text{ ga teng.}$$

Demak F_0 va $Z_j - s_j$ ayirma bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan ikkita qisimdan iborat bo‘lib, birinchisi M -ga bog‘liq, ikkinchisi M -ga bog‘liq emas.

F_0 va Δ_i – larning qiymatlari hisoblangandan keyin kengaytirilgan masalaning dastlabki berilganlarni jadvalga kiritamiz. Hosil bo‘lgan simpleks jadvalni faqat satrlar soni bittaga ko‘payadi.

Shu bilan bir qatorda $(m+2)$ - satrga M ning koeffitsientlari, $(m+1)$ satrga esa M qatnashmagan qo‘shiluvchilarga asosan to‘ldiriladi. Endi $(m+2)$ satrdagi eng kichik manfiy songa mos bo‘lgani vektorni bazisga kiritamiz va tayanch rejani yaxshilaymiz. Simpleks jadvallarni hisoblash simpleks jadvallarni tuzishni umumiy qoidalarga asoslanadi.

Shuni ham aytish kerakki $(m+2)$ satrga asoslangan iteratsiya jarayoni quyidagicha bo‘lguncha davom ettiriladi:

1) Hamma su‘niy vektorlar man etilmagan hol;

2) Qisman su‘niy vektorlar man etilmagan bo‘lib $(m+2)$ satrdagi

$R_1, R_2, \dots, R_{n+m}$ –ga mos bo‘lgan ustunlarda manfiy sonlar bo‘lmagan hol;

Birinchi holda bazis dastlabki masalani bironta tayanch rejasiga javob beradi va masalani optimal rejasini topish $(m+1)$ satrga asoslanib davom ettiriladi.

Ikkinchi holda esa $(m+2)$ satrdagi R_0 vektorga mos bo'lgan son manfiy; bu holda masala yechimga ega emas deyiladi. Agar $R_0 = 0$ bo'lsa, topilgan tayanch reja dastlabki masalaning paydo bo'lgan rejasi bo'ladi, bazisga esa su'niy vektorlarni hech bo'lmaganda birortasi qatnashadi.

Agar dastlabki masala bironta vektor birliklar qatnashsa, u vaqtda bu vektorlarni su'niy bazisga kiritish kerak.

Shunday qilib (1.12) – (1.13) masalani su'niy bazis usuli bilan yechish uchun quyidagi qadamlarni bajarish kerak:

- 1) (1.14) – (1.15) kengaytirilgan masala tuziladi;
- 2) Kengaytirilgan masalani tayanch rejasi topiladi;
- 3) Simpleks usulini qo'llab su'niy vektorlar bazisdan chiqariladi (man etiladi). Natijada (1.12) – (1.13) masalani tayanch rejasi topiladi yoki bo'lmasa masalani yechish mumkin emasligi ko'rsatiladi;
- 4) (1.12)- (1.13) masalaning tayanch rejasiga asoslanib dastlabki masalani optimal rejasi topiladi yoki bo'lmasa masalani yechish mumkin emasligi ko'rsatiladi.

Masala 4. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 22; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$ funksiyaning minimum qiymatini toping.

Yechish. Masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasi ko'rinishiga keltiramiz:

Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1,6})$$

$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4$ -funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Masalaning oxirgi sistemasidagi no'malumlarini koeffitsentlaridan tuzilgan vektorlarni ko'rib chiqaylik:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; P_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix};$$

R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 , va R_6 vektorlar ichida, faqat ikkita birlik vektor mavjud (R_4 va R_5). Shuning uchun sistemadagi 3-tenglamaning chap qismiga musbat qo'shimcha o'zgaruvchi x_7 ni kiritamiz va kengaytirilgan masalani yechamiz:

Ya'ni quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,7)$$

$F(X) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$ - funksiyaning maksimum qiymatini

topamiz. Bu yerdla $P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Kengaytirilgan masalani R_4, R_5 , va R_6 birlik vektorlari orqaldi aniqlangan tayanch yechimi

$X = (0; 0; 0; 24; 22; 0; 10)$ ga teng.

Dastlabki berilganlarga qarab quyidagi jadvalni tuzamiz.

									1-chi jadval	
	bazis	S_0	P_0	2	-3	6	1	0	0	-M
				P_0	P_1	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	-M	10	1	-1	2	0	0	-1	1
4			24	0	4	-8	0	0	0	0
5			-10	-1	1	-2	0	0	1	0

Bu jadvalni 4-chi va 5-chi ($m+1$ $m+2$) satrlarini to'ldirish uchun

$$F(x_0) = -M \sum_{i=1}^m b_i \text{ va } \Delta_j = c_{11}x_{1j} + c_{i2}x_{i2j} + \dots + c_{im}x_{imj} - c_j$$

Bu yerda $i_1, i_2, \dots, i_m$ bazisli vektorlarni tartib raqamlari, $x_{i_1j}, x_{i_2j}, \dots, x_{imj}$ esa P_{ij} - vektor yoyilmasining koeffitsiyentlari.

Bazis vektorlarga mos bo'lgan X_i ($i = \overline{1,7}$) ni yozib olamiz. U quyidagicha bo'ladi:

$$X_1 = (0; 0; 0; 2; 10; 7);$$

$$X_2 = (0; 0; 0; 1; 2; 0; -1);$$

$$X_3 = (0; 0; 0; -2; 4; 0; 2);$$

$$X_4 = (0; 0; 0; 1; 0; 0; 0);$$

$$X_5 = (0; 0; 0; 0; 1; 0; 0);$$

$$X_6 = (0; 0; 0; 0; 0; 0; -);$$

$$X_7 = (0; 0; 0; 0; 0; 0; 1);$$

yuqoridagi tayanch yechimlarga mos bo'lgan $F_0(x)$ va $Z_i(x_i)$ ($i = \overline{1,7}$) larni qiymatlarini hisoblab chiqamiz:

$$F_0(x) = 24 - M;$$

$$Z_1(X_1) = 2 - M;$$

$$Z_2(X_2) = 1 + M;$$

$$Z_3(X_3) = -2 - 2M;$$

$$Z_4(X_4) = 1 + 0 \cdot M;$$

$$Z_5(X_5) = 0 + 0 \cdot M;$$

$$Z_6(X_6) = 0 + M;$$

$$Z_7(X_7) = 0 - M$$

Endi $\Delta_i = z_i - c_i$ ayirmalarni hisoblab chiqamiz:

$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = 0 - M;$$

$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = 4 + M;$$

$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = -8 - 2M;$$

$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = 1 - 1 = 0;$$

$$\Delta_5 = z_5 - c_5 = 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_6 = z_6 - c_6 = 0 + M;$$

$$\Delta_7 = z_7 - c_7 = -M + M = 0;$$

Bu yerda F_0 va Δ_i larni tarkibiy qismlari ikkita yig'indidan iborat. Shuning uchun bu yig'indilarni M ga bog'liq bo'lmaganlarini 4-satrga, bog'liq bo'lganlarini koeffitsiyentlarini 5-satrga yozamiz. Bunday yozish jadvallarni almashtirishni osonlashtiradi. (1-jadvalga qarang).

1-jadvalni 5-satrida ikkita manfiy son mavjud (1-; -2). Bu shuni ko'rsatadiki kengaytirilgan masalani rejasi optimal emas. Simpleks usulni qo'llab bu rejani yaxshilaymiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

2-chi jadval

i	bazis	S_0	P_0	2	-3	6	1	0	0	
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_4	1	34		3	0	1	0	-1	
2	P_5	0	2		-1	4	0	1	2	
3	P_7	0	5		1/2	-1/2	0	0	-1/2	
4	indeks		64	4	0	0	0	0	-4	

Bu jadvalda 4 ta satr mavjud, chunki su'niy bazis P_7 vektor bazisdan chiqarildi. 2-chi javdaldan ko'rinib turibdiki $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 34$, $x_5 = 2$ dastlabki masalaning tayanch yechimlaridir. $X = (0; 0; 5; 34; 2)$ - esa tayanch rejadir. $F(0; 0; 5; 34; 2) = 64$ maqsad funksiyani bu rejaga mos bo'lgan qiymatidir.

2-chi jadvalni indeks satrida R_6 vektor ustunida (-4)manfiy son mavjud. Shuning uchun R_6 vektorni bazisga kiritib, R_5 vektorni bazisdan chiqoramiz va simpleks jadval tuzamiz.

3-chi jadval

i	bazis	S_0	P_0	2	-3	6	1	0	0	
				P_0	P_1	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0	
2	P_5	0	1	-1/2	2	0	0	1/2	1	
3	P_7	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0	
4	Indeks satri		F=68	2	8	0	0	2	0	

Jadvalda $\Delta_i = z_i - c_i$ lar ichida manfiy sonlar yo'q. Shuning bu jadvalga asosan topilgan yangi tayanch reja optimaldir. Demak dastlabki masalani tayanch rejasi $X^* = (0; 0; 11/2; 0; 1)$ optimal rejadir. Bu rejaga asosan maqsad funksiyaning qiymati $F_{mak} = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot \frac{11}{2} + 1 \cdot 35 = 68$ teng.

Masala 5. Quyidagi shartlar

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3. \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4, \end{cases}$$

bajarilganda

$$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish: Ma'lumki, sistemada birlik matritsa mavjud emas. Har bir tenglamaga bittadan manfiy bo'lmagan, mos ravishda $x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ sun'iy bazisli o'zgaruvchilarni kiritamiz. Natijada berilgan masalaga nisbatan kengaytirilgan masala deb ataluvchi masalaga o'tamiz.

Quyidagi shartlar

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1-6}$$

bajarilganda

$$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6$$

maqsad funksiyani maksimum qiymatini toping (bunda M yetarlicha kichik manfiy son, masala minimumga yechilayotgan bo'lsa yetarlicha katta musbat son deb ataladi).shartlarni vektor shaklida yozamiz.

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 + P_6x_6 = Px_0.$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

x_5, x_6 o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar bo'lsin. U holda birinchi tayanch yechim $X_0 = (0, 0, 0, 0, 3, 3)$ hosil bo'ladi. Simpleks usulni qo'llab optimal yechimni topamiz.

1-simpleks jadvalni tuzamiz:

Jadvalning 3 va 4 satrlarini to'ldirishda

$$F(X_0) = C_6 X_0 = -M \cdot 3 = M \cdot 3 + 0 = 0 - 6M,$$

Bazisli vektorlarga mos bo'lgan x_i ($i = \overline{1-6}$) larni va $Z_i(x_i)$ larni hisoblab chiqamiz:

$$X_1 = (0; 0; 0; 0; 1; 2) \quad Z_1(X_1) = -3M$$

$$X_2 = (0; 0; 0; 0; 3; 2) \quad Z_2(X_2) = -5M$$

$$X_3 = (0; 0; 0; 0; 2; 1) \quad Z_3(X_3) = -3M$$

$$X_4 = (0; 0; 0; 0; 2; 1) \quad Z_4(X_4) = -3M$$

$$X_5 = (0; 0; 0; 0; 1; 0) \quad Z_5(X_5) = 0 \cdot M$$

$$X_6 = (0;0;0;0;0;1) \quad Z_1(X_1) = 0 \cdot M$$

Endi $\Delta_i = Z_i - c_i$ ayirmani hisoblab chiqamiz:

$$\Delta_1 = -5 - 3M ;$$

$$\Delta_2 = -3 - 5M ;$$

$$\Delta_3 = -4 - 3M ;$$

$$\Delta_4 = 1 - 3M ;$$

$$\Delta_5 = 0 + 0 \cdot M ;$$

$$\Delta_6 = 0 + 0 \cdot M$$

hisoblashlarni bajarib, $Z_j - c_j$ qiymatlarini topamiz va M ning chiziqli funksiyasi ekanligini aniklaymiz.

Bu yerda F_0 va Δ_i larning tarkibiy qismlari ikkita yig'indidan iborat. Shuning uchun bu yig'indilarni M - ga bog'liq bo'lganlarni 1-chi jadvalni 3-satriga ($m+1$ satriga), M ga bog'liq bo'lganlarni 4-satriga yozamiz. Natijada 1-chi jadval to'la to'ldiradi.

1- simpleks jadval

i	Bazislar	Bazis koefitsiyentlar	R_0	5	3	4	1	-M	-M
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
1	R_5	-M	3	1	3	2	2	1	0
2	R_6	-M	3	2	2	1	1	0	1
m+1	$Z_j - c_j$		0	-5	-3	-4	1	0	0
m+2	$Z_j - c_j$		-6	-3	-5	-3	-3	0	0

Jadvalning (m+2) -satrida manfiy sonlarning mavjudligi tayanch yechimning optimal emasligini bildiradi va uni yaxshilash mumkin bo'ladi. Jadvalning (m+2) satrida eng kichik son (-5) R_2 vektor bahosi bo'lganligi uchun kalit ustun R_2 ustuni bo'ladi. $\min(\frac{3}{3}, \frac{3}{2}) = 1$, ularning kesishishmasdagi 3 element bo'lganligi uchun R_5 vektor satri kalit satr, yechuvchi (kalit) element bo'ladi. Demak, R_5 ni bazisdan chiqarib o'rniga R_2 vektorni bazisga kiritamiz. 2-simpleks jadvalni tuzamiz.

2- simpleks jadval

I	Bazislar	Bazis koefitsiyentlar	R_0	5	3	4	1	-M	-M
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
1	R_2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0

2	R_6	$-M$	1	$1/3$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-2/3$	1
m+1	$Z_j - c_j$		3	-4	0	-2	3	1	0
m+2	$Z_j - c_j$		-1	$-4/3$	0	$1/3$	$1/3$	$5/3$	0

2-simpleks jadvalining (m+2) satri asosiy kismida ($-4/3$) manfiy son bo'lganligi uchun R_1 vektor ustuni kalit ustun, R_6 vektor satri kalit satr, $4/3$ yechuvchi (kalit) element bo'ladi. Bazisdan R_6 sun'iy vektorni chiqarib, R_1 vektorni bazisga kiritib, 2-simpleks jadvaldagidek, 3-simpleks jadvalni hosil qilamiz:

3-simpleks jadval

i	Bazislar	Bazis koeffitsiyentlar	R_0	5	3	4	1	$-M$	$-M$
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
1	R_2	3	$3/4$	0	1	$3/4$	$3/4$	$1/2$	$-1/4$
2	R_6	5	$3/4$	1	0	$-1/4$	$-1/4$	$-1/2$	$3/4$
M+1	$Z_j - c_j$		6	0	0	-3	2	-1	3
M+2	$Z_j - c_j$		0	0	0	0	0	1	1

Z-jadvalda (m+2) satrda sun'iy bazis qiymatlaridan tashqari hamma qiymatlar 0 ga teng bo'ladi:

M sonning tanlanishiga asosan R_5 va R_6 vektorlar endi bazisga tushmaydi.

$\bar{X}_0 = (3/4, 3/4, 0, 0, 0, 0)$ yechim berilgan masalaning yechimi bo'ladi, lekin u optimal emas, chunki (m+1) satrda manfiy qiymat mavjud. Endi yechimni yaxshilash (m+1) satr bo'yicha olib boriladi. $Z_3 - C_3 = -3 < 0$, bo'lganligi uchun R_3 vektor ustuni kalit ustun, R_2 vektor satri kalit satr, $3/4$ yechuvchi (kalit) element bo'lib, m+2 -satr endi hisobga olinmaydi. Yuqorida ko'rsatilgan usul bilan 4-simpleks jadvalni tuzamiz:

4-simpleks jadval

i	Bazislar	Bazis koeffitsiyentlar S_6	R_0	5	3	4	1	$-M$	$-M$
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
1	R_3	4	1	0	$4/3$	1	1	$2/3$	$-1/3$
2	R_1	5	1	1	$1/3$	0	0	$-1/3$	$2/3$
M+1	$Z_j - c_j$		9	0	4	0	5	$1+M$	$2+M$

3-simpleks jadvaldan qo'yilgan masalaning optimal yechimi $\bar{X} = (1, 0, 1, 0, 0)$ bo'lib, $z_{\max}(\bar{X}) = 9$ bo'ladi. Birinchi va ikkinchi satrlarni o'zaro almashtirib, R_5 va R_6 vektorlar ustunida teskari matritsani hosil qilamiz.

II. Bob. Chiziqli programalashning ikkilanish masalalari

§ 1. Ikkilangan masalalar haqida asosiy tushunchalar

Bizga chiziqli programmalash masalasi berilgan bo'lsin.

[illegible]

$$x_1, x_2, \dots, x_3 \geq 0$$

maksad funksiya

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n \quad (2.2)$$

ning maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin.

Har qanday chiziqli programalash masalasini ikkilangan masala deb ataluvchi masala bilan uzviy bog‘liq ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Ta'rif. Quyidagi shartlar

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n. \end{array} \right\} \quad (2.3)$$
$$y_1, y_2, ..., y_m \geq 0$$

qanoatlantirilganda

$$F = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \quad (2.4)$$

funksiyaning minimum qiymatini topishga (2.1), (2.2) chiziqli programmash masalasining ikkilangan masalasi deyiladi.

Bu masalalarning optimal yechimlari o‘zaro quyidagi teorema asosida bog‘langan.

Teorema. Agar berilgan masala yoki unga ikkilangan masalalardan birortasi optimal yechimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo'ladi, hamda bu masalalardagi chiziqli funksiyaning optimal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$F_{\max} = F_{\min}^*.$$

Agar $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yoki $F'(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – chiziqli funksiyalardan birontasi chegaralanmagan bo'lsa, u holda masala hech qanday yechimga ega bo'lmaydi.

Ikkilanganlik masalalari simmetrik va simmetrik bo'lmagan masalalarga bo'linadi. Yuqoridagi teorema simmetrik bo'lmagan masalalarni yechishda qo'llaniladi. Shuni ham aytish kerakki tengsizliklar sistemasini qo'shimcha o'zgaruvchilar yordamida tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltirish mumkin. Demak, simmetrik ikkilanmalik masalalarni simmetrik bo'lmagan ikkilanmalik masalaga keltirish mumkin. Shuning uchun simmetrik bo'lmagan ikkilanish masalalarining optimal yechimlari haqidagi teorema simmetrik ikkilangan masalalar uchun ham o'rinlidir.

Masala 2.1 Quyidagi shartlar bilan berilgan masalani ikkilangan masalaga keltiring

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 7x_2 - 4x_3 &\leq -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 3 \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

Masalani ikkilangan masalaga keltirish uchun oldin chegaralovchi shartlarni bir xil ko'rinishdagi tengsizliklarga keltiramiz. Buning uchun birinchi tengsizlikni teskari ko'rinishga keltiramiz

$$\left. \begin{aligned} -x_1 + 7x_2 + 4x_3 &\geq 3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &\geq 3. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min.$$

Hosil bo'lgan masalaga ikkilangan masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\left. \begin{aligned} -y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 &\leq 1, \\ 7y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 &\leq 2, \\ 4y_1 - 2y_2 - y_3 - 2y_4 &\leq 4. \end{aligned} \right\}$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

$$F^* = 3y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 3y_4 \rightarrow \max.$$

Ikkilangan masalani chiziqli programmalashning asosiy masalasiga keltirib simpleks usul bilan yechish mumkin.

§ 2. Ikkilangan simpleks usul

Bu usul oldin akademik L.V. Kantorovich tomonidan ko'rsatilgan edi. Lekin bu usulni boshqa ko'rinishda Lemks degan olim ko'rsatgan. Shuni ham aytish kerakki, agar bironta chiziqli programmalash

masalasini yechish kerak bo'lsa, uning o'rniga ikkilangan masalani yechish mumkin. Agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, u holda dastlabki berilgan masala ham optimal yechimga ega bo'ladi.

Dastlab A matritsaga A^t – transponirlangan matritsani yozib olamiz. Matritsaga transponirlangan matritsani yozganda ustunlar va satrlarning roli o'zgaradi, ya'ni berilgan masalaning satri to'g'risida so'z ketsa u ustunga o'tadi.

Xususiyl holda simpleks jadvallarning indeks satri to'g'risida gap ketsa ikkilangan masalalarda ozod hadlar ustuni to'g'risida gap ketadi. Buni quyidagi ikkita masalada ko'ramiz.

2.2 - masala. Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \leq 56, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 37, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2. \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$F = 3x_1 + 4x_2$ - funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Simpleks usul qoidalaridan foydalanib dastlabki berilganlarning asosiy jadvalini tuzamiz.

1-jadval

	I	$-x_1$	$-x_2$	Tek. Ustuni
y_1	56	4	9	69
y_2	37	5	3	45
y_3	2	-1	2	3
F	0	-3	-4	-7

1. Indeks satridan F dan absolyut

qiymat bo'yicha eng katta manfiy sonni olamiz. Bu son yechuvchi ustunni ko'rsatadi.

1. Ozod hadlarni mos ravishda

echuvchi ustundagi musbat sonlarga bo'lib ularning eng kichigini

tanlaymiz. Bu satrga yechuvchi satr deyiladi $\left\{ \frac{56}{9}, \frac{37}{3}, \frac{2}{2} \right\} = \frac{2}{2} = 1$.

2. Yechuvchi ustun va yechuvchi satr kesishgan katakdagi songa yechuvchi son deyiladi.
3. Simpleks jaldvallarni to'ldirish formulalardan foydalanib qolgan kataklarni to'ldiramiz. Natijada 2 – chi jadval hosil bo'ladi. Bu jadvalda x_2 – ni asosiy o'zgaruvchilar safiga o'tkazamiz. y_3 –ni qo'shimcha o'zgaruvchilar safiga o'tkazamiz.

2-chi jadval

	I	$-x_1$	$-y_3$	Tekshirish ustuni
y_1	47	7/2	$-\frac{9}{2}$	51
y_2	34	13/2	-3/2	39
x_2	1	1/2	$\frac{1}{2}$	1
F	4	-5	2	1

F - indeks satrida manfiy son (-5) bo'lgani uchun 3 – chi simpleks jadvalni tuzamiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

3- chi jadval

	I	$-y_2$	$-y_3$
y_1	$\frac{33}{13}$	$-\frac{17}{13}$	$-\frac{33}{13}$
x_1	$\frac{68}{13}$	$\frac{2}{13}$	$-\frac{3}{13}$
x_2	$\frac{47}{13}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{5}{13}$
F	$\frac{392}{13}$	$\frac{10}{13}$	$\frac{11}{13}$

F- indeks satri hadlarining hammasi musbat bo'lgani uchun quyidagi yechim:

$$y_1 = \frac{33}{13}; \quad x_1 = \frac{68}{13}; \quad x_2 = \frac{47}{13}; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 0,$$

Optimal yechim bo'ladi. Unga maqsad funksiyasining quyidagi qiymati mos keladi.

$$F_{\max} = \frac{10}{13}(-y_2) + \frac{11}{13}(-y_3) + \frac{392}{13} = \frac{392}{13}$$

MASALA.2.3. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{aligned} 4u_1 + 5u_2 - u_3 &\geq 3, \\ 9u_1 + 3u_2 + 2u_3 &\geq 4, \end{aligned} \right\}$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0.$$

$F' = 56u_1 + 37u_2 + 2u_3$ - funksiyani minimum qiymatini toping.

Simpleks usul qoidalaridan foydalanib berilganlarning asosiy jadvalini tuzamiz.

Jadval 1.

	I	u_1	u_2	u_3
v_1	-3	4	5	-1
v_2	-4	9	3	2
F	0	56	37	2

1. Ozod hadlar ustunidan manfiy sonlar ichidan eng kichik manfiy sonni olamiz. Bu son turgan satr yechuvchi satrni ko'rsatadi.
2. F satr hadlarini mos ravishda yechuvchi satrdagi sonlarga bo'lib eng kichigini

olamiz $\min \left\{ \frac{56}{9}; \frac{37}{3}; \frac{2}{2} \right\} = \frac{2}{2}.$

Bu ustunga yechuvchi ustun deyiladi.

3. Yechuvchi satr va yechuvchi ustun kesishgan katakdagi son yechuvchi son deyiladi.
4. Qo'shimcha o'zgaruvchi u_3 - ni, v_2 asosiy o'zgaruvchi sifatida bazisga kiritamiz. Simpleks jadvallarni tuzish formulalaridan foydalanib 2-chi simpleks jadvalni tuzamiz

2 – jadval

	1	u_1	u_2	v_2	Tekshirish ustuni
v_1	-5	$\frac{17}{2}$	$\frac{13}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{91}{2}$
u_3	2	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$
F^*	4	47	34	1	83

O'zgarmaslar ustunida manfiy son (-5) bo'lgani uchun bu jadvalni ham yuqoridagi kabi almashtiramiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

3-jadval

	1	u_1	v_1	v_2
u_2	$\frac{10}{13}$	$-\frac{17}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$
u_3	$\frac{11}{13}$	$-\frac{33}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$
F^*	$\frac{392}{13}$	$\frac{33}{13}$	$\frac{68}{13}$	$\frac{47}{13}$

Erkin hadlar ustunida hamma hadlar musbat bo'lgani uchun quyidagi yechim optimal bo'ladi

$$u_2 = \frac{10}{13}; u_3 = \frac{11}{13}; u_1 = 0; v_1 = 0; v_2 = 0,$$

$$F_{\min} = \frac{33}{13}u_1 + \frac{68}{13}v_1 + \frac{47}{13}v_2 + \frac{392}{13} = \frac{392}{13}$$

Shunday qilib ikkilangan simpleks usul orqali masala yechildi.

Quyidagi masalalarni chiziqli programmalashning ikkilangan masalasiga keltiring va ikkilangan simpleks usul bilan yeching

2.4.

$$\left. \begin{array}{l} 5x_1 + 3x_2 \leq 52, \\ x_2 \leq 2, \\ 10x_1 + 4x_2 \leq 70, \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

2.5.

$$\left. \begin{array}{l} 9x_1 + 11x_2 \leq 46, \\ 5x_1 + x_2 \leq 42, \\ x_1 + 13x_2 \leq 4, \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 5x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

2.6.

$$\left. \begin{array}{l} 8x_1 + 2x_2 \leq 90, \\ 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 6x_2 \leq 60. \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 9x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

2.7.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 11x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + x_2 \leq 28, \\ 2x_1 + 13x_2 \leq 11. \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 8x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

2.8.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 2, \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 35, \\ 5x_1 + 13x_2 &\leq 18. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 7x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

2.9.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 1, \\ 5x_1 + x_2 &\leq 42, \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 11. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 7x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

2.10.

$$\left. \begin{aligned} 8x_1 + 14x_2 &\leq 14, \\ 13x_1 + 5x_2 &\leq 100, \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 5. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$$

2.11.

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 1, \\ 17x_1 + x_2 &\leq 152, \\ 5x_1 + 14x_2 &\leq 13. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 13x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

2.12.

$$\left. \begin{aligned} 11x_1 + 17x_2 &\leq 72, \\ x_1 + 11x_2 &\leq 20, \\ 5x_1 + 3x_2 &\leq 20. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 9x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

2.13.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 9x_2 &\leq 16, \\ 2x_1 + 4x_2 &\leq 1. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 7x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

2.14.

$$\left. \begin{aligned} 9x_1 + 11x_2 &\leq 48, \\ 5x_1 + x_2 &\leq 44, \\ x_1 + 13x_2 &\leq 6. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

2.15.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\leq 5, \\ 5x_1 + x_2 &\leq 46, \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

2.16.

$$\left. \begin{aligned} 8x_1 + 14x_2 &\leq 14, \\ 13x_1 + 5x_2 &\leq 100, \\ 5x_1 + 9x_2 &\leq 5. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 11x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

2.17.

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leq 2, \\ 17x_1 + x_2 &\leq 153, \\ 8x_1 + 14x_2 &\leq 14. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 3x_1 + 15x_2 \rightarrow \max$$

2.18.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 11x_2 &\leq 11, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 28, \\ 5x_1 + 13x_2 &\leq 11. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 10x_1 + 8x_2 \rightarrow \max$$

2.19.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 1, \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 34, \\ 5x_1 + 13x_2 &\leq 17. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

§ 3. Ikkilangan masalalarning geometrik talqini

Agar berilgan va unga ikkilangan masalalarda o'zgaruvchilar soni ikkiga teng bo'lsa, chiziqli programmalash masalalarining geometrik tahlilini berish osonlashadi. Bu holda bir –birini istsino qiluvchi quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin: 1) ikkala masala ham optimal yechimga ega; 2) faqat bitta masala optimal yechimga ega; 3) ikkala masalaning optimal rejalari bo'sh to'plamni tashkil qiladi.

Masala 2.20. Quyidagi shartlar bo'yicha

$$\left. \begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\leq 14, \\ x_1 + x_2 &\leq 8. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$F = 2x_1 + 7x_2 \rightarrow \max$$

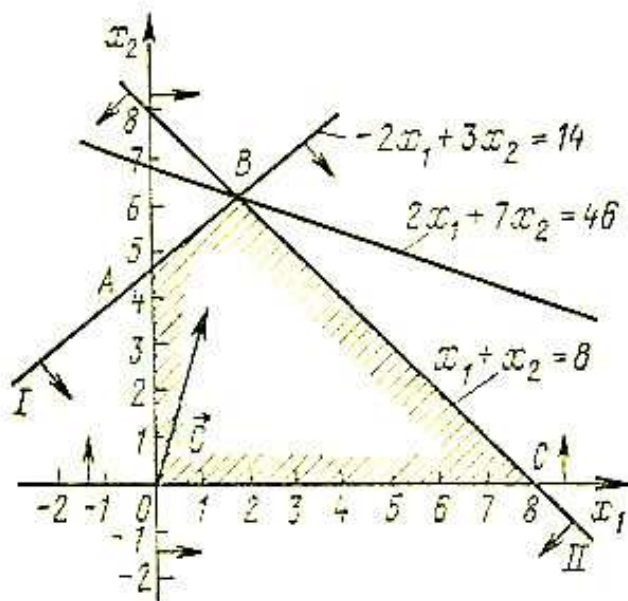
masalani ikkilangan masalaga keltiring va ikkala masalaning yechimlarini toping.

Yechish. Bu masalaga ikkilangan masala: $F^* = 14y_1 + 8y_2$ funksiyaning quyidagi shartlarda

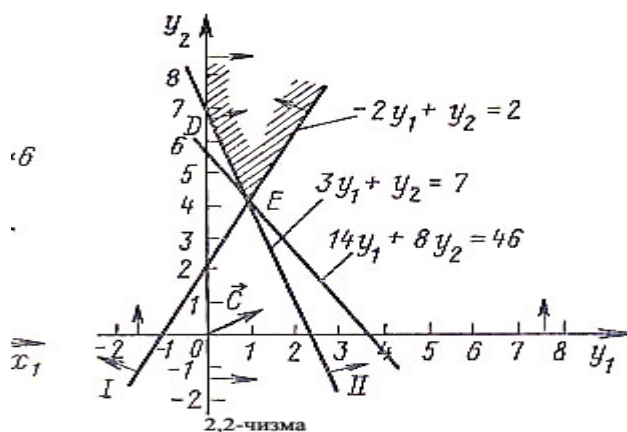
$$\left. \begin{aligned} -2y_1 + y_2 &\geq 2, \\ 3y_1 + y_2 &\geq 7, \end{aligned} \right\}$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

minimum qiymatini topishdan iborat bo'ladi



2.1-chizma



2.2-чизма

Berilgan va unga ikkilangan masalada ham noma'lumlar soni ikkita (x_1 va x_2), (u_1 va u_2) uning uchun geometrik usul bilan yechish mumkin. Dastlabki masalada maqsad funksiyasi V nuqtada maksimum qiymatga ega. Shuning uchun $V(2; 6)$ nuqtada

$F(2; 6) = 2 \cdot 2 + 7 \cdot 6 = 46$ maqsad funksiyasi optimal rejaga (planga) ega (2.1-chizma). Ikkilangan masala esa $Y_e(1; 4)$ nuqtada minimum qiymatga (2.2-chizma) ega. Shuning uchun $F^*(1; 4) = 14 \cdot 1 + 8 \cdot 4 = 46$ – maqsad funksiyasining minimal qiymatidir.

Masala 2.21. Ikkilangan masalalar juftligining yechimlarini toping.

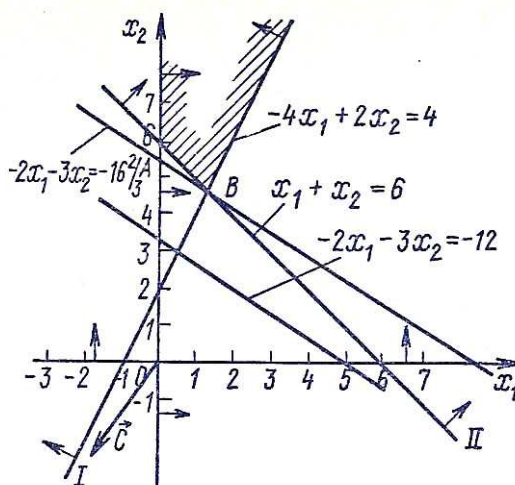
Dastlabki masala

$$\left. \begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\geq 4, \\ x_1 + x_2 &\geq 6. \end{aligned} \right\}$$
$$x_1, x_2 \geq 0.$$
$$F = -2x_1 - 3x_2 \rightarrow \min$$

Ikkilangan masala

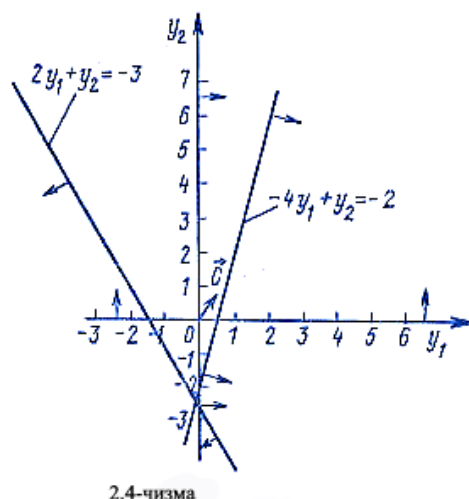
$$\left. \begin{aligned} -4y_1 + y_2 &\leq -2, \\ 2y_1 + y_2 &\leq -3. \end{aligned} \right\}$$
$$y_1, y_2 \geq 0.$$
$$F' = 4y_1 + 6y_2 \rightarrow \max$$

Yechish. Dastlabki masala va unga ikkilangan masala ham ikkitadan o'zgaruvchiga ega. Shuning uchun ularni geometrik usul bilan yechamiz. Ikkala masala uchun ham shakllarni chizamiz. (chizmalar 2.3, 2.4)



2.3-chizma

2.3 -chizmadan ko'rinib turibdiki dastlabki masala yechimga ega emas. Chunki maqsad funksiyasi $F = -2x_1 - 3x_2$ mumkin bo'lgan yechimlar to'plamida quyidan chegaralanmagan. Chizma 2.4-dan ko'rinib turibdiki ikkilangan masalaning ham optimal rejaları yo'q, chunki yechimlar ko'p burchagi bo'sh to'plamni tashkil qiladi. Shunday qilib dastlabki masala optimal rejaga ega bo'lmasa (maqsad funksiyasi mumkin bo'lgan yechimlar to'plamida chegaralanmagan bo'lgani uchun) unga ikkilangan masala ham optimal rejaga ega bo'lmaydi.



III. Bob. Transport masalasi

§1. Taqsimot usuli

Faraz qilaylik m – ta ishlab chiqarish korxonasi berilgan bo‘lsin. Bu korxonalarda mos ravishda $a_1, a_2, \dots, a_m$ - tonnadan bir jinsli mahsulotlar ishlab chiqarilgan bo‘lib, $B_1, B_2, \dots, B_n$ - iste’molchilarga mos ravishda $b_1, b_2, \dots, b_n$ tonnadan tarqatish kerak. A_j - ishlab chiqarish korxonasidan B_i iste’molchilargacha mahsulotlarni tashish bahosi quyidagi tarif matritsasi ko‘rinishda berilgan bo‘lsin

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Yuqoridagilarga asosan quyidagi jadvalni tuzish mumkin

1-chi jadval

Ishlab chiqarish korxonalari	Korxonada bo‘lgan ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna hisobida)	Iste’molchilar va ularning talabi				
		B_1	B_2	B_3	$\dots$	B_n
		b_1 t	b_2 t	b_3 t	$\dots$	b_n t
A_1	a_1 t	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	$\dots$	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2 t	c_{21}	c_{22}	c_{23}	$\dots$	c_{2n}

		x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_m t	c_{m1}	c_{m2}	c_{m3}	...	c_{mn}
		x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}		x_{mn}

Agar ishlab chiqarish korxonasidagi jami bir jinsli mahsulotlar miqdori iste'molchilarning talabini to'la qondirsa, ya'ni

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_m,$$

$$b = b_1 + b_2 + \dots + b_n,$$

$$a = b$$

bo'lsa, yuqoridagi jadvalga asoslanib tuzilgan modelga yopiq matematik model deyiladi.

Agar masalan $a > b$ bo'lsa, tuzilgan matematik modelga ochiq model deyiladi.

Iste'molchilar safiga soxta iste'molchi B_{n+1} - ni kiritamiz.

Soxta iste'molchi mahsulot joylashgan korxona bo'lgani uchun mahsulotlarni tashish bahosi 0 ga teng.

Shunday qilib, ochiq matematik modelni yopiq matematik modelga keltirsa bo'ladi.

Jadvalni quyidagicha tushuntirish mumkin: $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$ lar A_1 - chi ishlab chiqarish korxonasidagi mahsulotni mos ravishda $B_1, B_2, \dots, B_n$ iste'molchilarga tarqatiladigan miqdori

$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$ lar A_2 -chi ishlab chiqarish korxonasidagi mahsulotni mos ravishda $B_1, B_2, \dots, B_n$ iste'molchilarga tarqatiladigan miqdori va hokazo. C_{ij} -lar esa 1 tonna mahsulotni i-chi ishlab chiqarish korxonasidan j - chi iste'molchigacha tashish bahosi ya'ni tarif.

Shunday qilib transport masalasining shartini berilgan jadvalga asoslanib x_{ij} larni o'z ichiga olgan quyidagi $n+m$ -- ta tenglamalar sistemasi ko'rinishida yozish mumkin

$$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2, \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m. \end{array} \right\} \quad (a) \\ \left. \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2, \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n. \end{array} \right\} \quad (b) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$$

Transport harajatlari (maqsadli funksiya) esa quyidagiga

teng:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \dots + c_{mn}x_{mn} \quad (3.2)$$

Demak (3.1) chiziqli tenglamalar sistemasida shunday 0–li va musbat yechimlarini topish kerakki (3.2) maqsad funksiyasi minimum qiymat qabul qilsin.

(3.1) – chi tenglamalar sistemasini va (3.2) tenglikni quyidagi ko‘rinishda ixcham yozish mumkin

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, \quad (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{j=1}^m x_{ij} &= b_i, \quad (j = \overline{1, n}) \end{aligned} \right\} \quad (3.1')$$

$$\text{va} \quad f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (3.2)$$

Shuni ham aytish kerakkim (3.1) tenglamalar sistemasining hamma tenglamalari bir—biri bilan chiziqli bog‘liq yoki chiziqli bog‘liq emas bo‘lishi mumkin. Chiziqli bog‘liq bo‘lmaganlar soni $m + n - 1$ dan kichik yoki teng bo‘ladi.

Taqsimot usulini umumiy holda algoritmini tushuntirish ancha og‘ir.

1. Shimoliy - g‘arb burchak usuli

«Shimoliy - g‘arb burchak» usulini umumiy qoidasi quyidagilardan iborat. Eng avval dastlabki berilganlarning jadvalidan «Shimoliy g‘arbida joylashgan x_{11} no‘malumning qiymatini aniqlaymiz».

$$x_{11} = \min(a_1, b_1)$$

Bu yerda ikki hol bo‘lishi mumkin:

- 1) $a_1 \leq b_1$ bo‘lsa $x_{11} = a_1$ va $x_{1j} = 0$ ($j = \overline{2, n}$); $e_1^1 = e_1 - a_1$;
- 2) $a_1 \geq b_1$ bo‘lsa $x_{11} = a_{e1}$ va $a_1^1 = a_1 - e_1$; A

Agar birinchi hol bajarilsa birinchi qadamdan so‘ng masalaning yechimlaridan tashkil topgan matritsa quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\begin{pmatrix} x_{11} = a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & a_m \\ b_2 - a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & f \end{pmatrix}.$$

Endi ikkinchi qatordagi birinchi elementni topamiz.

Bu yerda ham ikki hol bo'lishi mumkin:

- 1) Agar $a_2 \geq b_1 - a_1$ bo'lsa $x_{21} = b_1 - a_1$ va $x_{2j} = 0, j = \overline{2, m}$; $a_2^1 = a_2 - (b_1 - a_1)$
- 2) Agar $a_2 \leq b_1 - a_1$ bo'lsa $x_{21} = a_2$, va $b_1^1 = b_1 - a_1 - a_2$;

Agar bu yerda ham birinchi hol bajarilsa, u holda ikkinchi qadamdan so'ng yangi matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$\begin{pmatrix} x_{11} = a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{21} = b_1 - a_1 & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & a_2^1 = a_2 - (b_1 - a_1) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & a_m \\ b_1^1 = b_1 - a_1 - a_2 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & f \end{pmatrix}$$

Bu jarayon qadamba-qadam barcha a_i va b_j -lar nolga aylanguncha davom ettiriladi. Ma'lumki, har bir x_{ij} -ning qiymati a_i va b_j -larning turli kombinatsiyalarini ayirish yoki qo'shish yordamida topiladi. Shundan keyin (3.2) formula orqali transport hisoblaniladi.

2. Minimal xarajatlar usuli.

Minimal harajatlar usulining qoidasi quyidagicha:

1. Transport masalasi harajatlaridan tashkil topgan ta'rif matritsasi belgilab olinadi

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. T - matritsaning minimal elementini topamiz

$$\min\{c_{ij}\} = k.$$

Faraz qilaylikki bu element

$$C_{i_1 j_2} = k.$$

U holda

$$x_{i_1} \cdot x_{j_2} = \min(a_{i_1} \cdot b_{j_2}).$$

Berilganlarga asosan quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

- 1) $a_{i_1} \leq b_{j_1}$,
- 2) $a_{i_1} > b_{j_1}$.

Birinchi holda i_1 satrning barcha elementlari $x_{i_1 j} = 0$, ($j \neq j_1$) bo'ladi, bunday holda i_1 satr elementlarini o'chiramiz.

Ikkinchi holda j_1 ustunning barcha elementlari $x_{ij_1} = 0$, ($i \neq i_1$) va bu holda barcha j_1 ustun elementlari o'chiriladi.

Ustun va satr elementlarini o'chirish natijasida hosil bo'lgan yangi matritsaning ustun va satrlar soni T matritsaga nisbatan bittaga kamayadi. Ikkinchi qadamda yuqoridagi jarayon yangi matritsa uchun yana bajariladi. Shunday qilib qo'yilgan masalaning boshlang'ich optimal planini topish uchun minimal harajatlar usulida $n + m - 1$ -ta qadamni bajarish kerak.

Endi quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

Masala. Samarqand viloyatining Jomboy va Juma bazasidan Katta Ko'rg'on, Ishtixon va Narpay tumanlariga bir jinsli tovarlarni tashish kerak tovarlar zaxirasi Jomboy bazasida 400 tonna, Juma bazasida esa 600 tonna. Katta Qo'rg'on tumanining tovarga muxtoji 350 tonna, Ishtixon tumaniniki 450 tonna va Narpay tumaniniki esa 200 tonna. Jomboy bazasidan uchta tumangacha bo'lgan masofalar mos ravishda 100 km, 60 km va 110 km. Juma bazasidan uchta tumangacha bo'lgan masofalar mos ravishda 40 km, 70 km va 50 km – ga teng. Tumanlarga tovar tashishning optimal variantini toping.

Yechish. Masalaning shartiga asosan quyidagi jadvalni tuzamiz.

1-chi jadval

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxiralari	Tumanlar		
		Katta Qo'rg'on	Ishtixon	Narpay
Jomboy I	400 _T	100 x_{11}	60 x_{12}	110 x_{13}
Juma II	600 _T	40 x_{21}	70 x_{22}	50 x_{23}
Tovarlarga bo'lgan talab	1000 _T	350 _T	450 _T	200 _T

Bu masalada bazalar soni $m = 2$, Iste'molchilar soni esa $n = 3$ ta. Shuning uchun mahsulotlarni taqsimlagandan keyin to'ldirigan kataklar soni $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$ - ta bo'lishi kerak.

1 - chi jadvalga asoslanib 2 - chi jadvalni tuzamiz.

2-chi jadval

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxiralari	Tumanlar va ularning tovar mahsulotlariga talabi.		
		Katta Qo'rg'on 350 1	Ishtixon 450 2	Narpay 200 3
Jomboy I	400 _T	100 350	60 50	110 0
Juma II	600 _T 2	40 0	70 400	50 200

Transport harajatlarini 2 - chi jadvalga asoslanib hisoblasak

$$f_1 = 350 \cdot 100 + 50 \cdot 60 + 400 \cdot 70 + 200 \cdot 50 =$$

$$= 35000 + 3000 + 28000 + 10000 = 76000 \text{ t.km ni}$$

tashkil etadi. 2 -- chi jadvalning optimalligini tekshiramiz.

Buning uchun bo'sh kataklarga nisbatan zanjirlar tuzamiz.

Bunday zanjirlar Δ_{13} va Δ_{21} -lardan iborat.

Δ_{13} -- zanjir quyidagi ko'rinishga ega. Bo'sh katakni indeksining ishorasini musbat ishora bilan olamiz. Qolgan indekslar ishorasi almashib turadi.

$$\begin{array}{cc} 60 & 110 \\ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cc} - & + \\ \Delta_{13} = 110 - 60 + 70 - 50 = 70 \\ + & - \end{array} \\ \hline \end{array} & \\ 70 & 50 \end{array}$$

Bu zanjir musbat, shuning uchun boshqa bo'sh zanjirni, ya'ni Δ_{21} -ni tekshiramiz.

Δ_{21} -zanjirning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{array}{cc} 350 & 60 \end{array}$$

-	+
$\Delta_{21} = 40 - 100 + 60 - 70 = -70$	
+	-

400

Demak Δ_{21} –zanjir manfiy ishoraga ega, shuning uchun bu zanjirni yaxshilaymiz. Manfiy uchlarda joylashgan yuklarning eng kichigini olamiz, ya'ni $\min\{350, 400\} = 350$.

Bundan keyin 350 -- ni manfiy uchlardagi yuklardan ayiramiz va musbat uchlarda turgan yuklarga qo'shamiz.

$$350 - 350 = 0$$

$$50 + 350 = 400$$

-	+
+	-

$$0 + 350 = 350$$

$$400 - 350 = 50$$

Δ_{21} –zanjirdagi o'zgarishlarni hisobga olib 3 – chi jadvalni tuzamiz.

3-chi jadval

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxiralari	Tumanlar va ularning tovar mahsulotlarga talabi.		
		Katta Qo'rg'on 350 t 1	Ishtixon 450 t 2	Narpay 200 t 3
Jomboy I	400 _T 1	100 0 +	60 400	110
Juma II	600 _T 2	40 350	70 50	50 200

3 – chi jadvaldagi programma bo'yicha transport harajatlari

$$f_2 = 100 \cdot 0 + 400 \cdot 60 + 110 \cdot 0 + 350 \cdot 40 + 50 \cdot 70 + 200 \cdot 50 =$$

$$= 0 + 24000 + 0 + 14000 + 3500 + 10000 = 51500 \text{ t km} - \text{ni tashkil etadi.}$$

2 – chi va 3 – chi jadvalga joylashtirilgan programmalarining farqi
 $f_1 - f_2 = 76000 - 51500 = 24500 \text{ t} \cdot \text{km} - \text{ni tashkil etadi.}$ Demak iqtisodiy tejash 24500 tonna .km – ni tashkil etadi.

Endi 3 – chi jadvaldagi bo‘sh kataklarga nisbatan tuzilgan zanjirlarning ishorasini yuqoridagi kabi tekshirib chiqsak

Δ_{11}, Δ_{13} – larni ishoralari musbat ekaligini ko‘ramiz.

Shuning uchun 3 – chi jadvalga joylashtirilgan programma optimal programma bo‘lib, bu programma bo‘yicha: Katta Qo‘rg‘on tumani Juma bazasidan 350 tonna yuk olishi kerak bo‘lib transport harajatlari

$$F_1 = 0 \cdot 100 + 350 \cdot 40 = 14000 \text{ t.km} - \text{ni tashkil etadi.}$$

Ishtixon tumani 400 tonna yukni Jomboy bazasidan, 50 tonna yukni esa Juma bazasidan olganda transport harajatlari

$$F_2 = 400 \cdot 60 + 50 \cdot 70 = 24000 + 3500 = 27500 \text{ t.km} - \text{ni tashkil etadi.}$$

Narpay tumani 200 tona yukni Juma bazasidan oladi va transport harajatlari

$$F_3 = 0 \cdot 110 + 200 \cdot 50 = 10000 \text{ t.km} - \text{ni tashkil etadi.}$$

Jami transport harajatlari

$$f_2 = F_1 + F_2 + F_3 = 14000 + 27500 + 10000 = 51500 \text{ t.km} - \text{ni tashkil etadi.}$$

2 – chi jadvalga joylashtirilgan programma bo‘yicha transport harajatlari tumanlar bo‘yicha:

$$\text{Katta Qo‘rg‘on } f_1 = 100 \cdot 3500 = 35000 \text{ t.km}$$

$$\text{Ishtixon } f_2 = 50 \cdot 60 + 400 \cdot 70 = 3000 + 28000 = 31000 \text{ t.km}$$

$$\text{Narpay } f_3 = 200 \cdot 50 = 10000 \text{ t.km;}$$

$$\text{Jami } f_1 + f_2 + f_3 = 76000 \text{ t.km.}$$

Tumanlar bo‘yicha tejalgan transport harajatlari:

$$\text{Katta Qo‘rg‘on } f_1 - F_1 = 35000 - 14000 = 21000 \text{ t.km}$$

$$\text{Ishtixon } f_2 - F_2 = 3100 - 27500 = 4500 \text{ t.km}$$

$$\text{Narpay } f_3 - F_3 = 10000 - 10000 = 0 \text{ t.km}$$

Shunday qilib 1 tonna yukni 1 km-ga tashish uchun 100 so‘m mablag‘ sarflanganda tumanlar bo‘yicha iqtisodiy tejash:

$$\text{Katta Qo‘rg‘on } 21000 \cdot 100 = 2100000 = 2_{\text{mln}} \text{ 100 ming so‘m;}$$

$$\text{Ishtixon } 4500 \cdot 100 = 450000 = 450 \text{ ming so‘mni tashkil etadi.}$$

Jami viloyat bo‘yicha iqtisodiy tejash 3 – chi jadvaldagi programma bo‘yicha 2 million 550 ming so‘mni tashkil etadi.

1 – chi jadvalga asoslanib quyidagi modelni tuzib olishimiz mumkin

$$\left. \begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 400, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 600, \\ x_{11} + x_{21} &= 350, \\ x_{12} + x_{22} &= 450, \\ x_{13} + x_{23} &= 200. \end{aligned} \right\}$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

$$f = 100x_{11} + 60x_{12} + 110x_{13} + 40x_{21} + 70 \cdot x_{22} + 50 \cdot x_{23}$$

Yuqoridagi sistemani yechsak:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 0, & x_{21} &= 350, \\ x_{12} &= 400, & x_{22} &= 50. \end{aligned}$$

$$x_{13} = 0, \quad x_{23} = 200 - \text{lar bo'ladilar.}$$

$$f = 100 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 110 \cdot 0 + 40 \cdot 50 + 70 \cdot 50 + 50 \cdot 200 = 51500 \text{ tonna km.}$$

Yuqoridagi optimal programma matematik model yechimlari bilan mos keldi.

Shuni ham aytish kerakki masalalar yechganda Δ_{ij} larni bir nechta manfiy bo'ladilar. U vaqtda manfiy Δ_{ij} -- lar ichidan eng kichik zanjir tanlanadi va u yaxshilanadi.

Agar zanjirlarda bir nechta o'zaro teng manfiy sonlar paydo bo'lsa, u vaqtda birinchi (istalgan) manfiy zanjir yaxshilanadi. Ayrim vaqtda to'ldirilgan kataklar soni $n + m - 1$ dan kam bo'ladilar. Shuning uchun bironta katakka 0 qo'yib u katak yuk bilan ta'minlanadi va to'ldirilgan kataklar soni $n + m - 1$ -- ga teng bo'ladilar. Bo'sh katakka 0 qo'yishda katakni shunday tanlash kerakki, u katak bilan tuzilgan barcha zanjirlarda Δ_{ij} -- lar musbat bo'lsin.

Minimal harajatlar usul bilan masalalar yechishni talabalarning o'zlariga tavsiya qilamiz.

§ 2. Transport masalasini potensiallar usuli bilan yechish.

Faraz qilaylik transport masalasi quyidagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsin

Ishlab	Korxonalarda	Iste'molchilar va ularning talabi
--------	--------------	-----------------------------------

chiqarish korxona-lari	ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna)	B_1	B_2	B_3	...	B_n
		$b_1 \text{ t}$	$b_2 \text{ t}$	$b_3 \text{ t}$	...	$b_n \text{ t}$
A_1	$a_1 \text{ t}$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	$a_2 \text{ t}$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_m	$a_m \text{ t}$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}

Bu jadval «shimoliy-g'arb burchak» usulidan foydalangandan keyin boshlang'ich tayanch reja bo'lsin, x_{ij} – taqsimlangan yuklar (zaxiralar) c'_{ij} – yuklar bo'lmagan, ya'ni to'ldirilmagan kataklar, c_{ij} – lar esa to'ldirilgan kataklar bo'lsin.

Boshlang'ich tayanch rejaga asosan transport harajatlari

$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{23}x_{23} + \dots + c_{2n}x_{2n} + \dots + c_{m3}x_{m3} + \dots + c_{mn}x_{mn}$ – ga teng bo'ladi.

1 – chi jadvalga $A_1, A_2, \dots, A_m$ – korxonalarga mos ravishda $u_1, u_2, \dots, u_m$ – shartli variantalar kiritamiz (potensiallar) $B_1, B_2, \dots, B_n$ – iste'molchilarga mos ravishda $v_1, v_2, \dots, v_n$ – shartli variantalar (potensialar) kiritamiz. Demak A - korxonaning potentsiali (shartli variantasi) u_i – miqdor. B_j - iste'molchining potentsiali (shartli variantasi) v_j – miqdor $\begin{pmatrix} i = \overline{1, m} \\ j = \overline{1, n} \end{pmatrix}$

Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

1 –reja

Kor- xona- lar	Korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna)	Iste'molchilar va ularning talabi					u_i – variant sharti
		B_1	B_2	B_3	...	B_n	
		$b_1 \text{ t}$	$b_2 \text{ t}$	$b_3 \text{ t}$	...	$b_n \text{ t}$	
A_1	$a_1 \text{ t}$	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	u_1

A_2	$a_2 t$	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	u_2
A_3	$a_3 t$	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	...	c_{3n} x_{3n}	u_3
...	...	...		...	...	...	...
A_m	$a_m t$	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	u_m
$v_j -$	Shartli varianti	v_1	v_2	v_3	...	v_n	

u_i va v_j sonlarini shunday tanlab olish kerakki, ularning yig'indisi to'ldirilgan katakdagi tarif c_{ij} -ga teng bo'lsin. U vaqtda yuqoridagi jadvalga asosan quyidagi $n + m - 1$ - ta, hozircha no'malum bo'lgan u_i va v_j - larga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi

$$\left. \begin{aligned} u_1 + v_1 &= c_{11}, & u_3 + v_2 &= c_{32}, \\ u_1 + v_2 &= c_{12}, & u_3 + v_3 &= c_{33}, \\ u_1 + v_3 &= c_{13}, & & \\ u_2 + v_3 &= c_{23}, & \dots\dots\dots & \\ u_2 + v_3 &= c_{23}, & u_m + v_n &= c_{mn}. \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemada no'malumlar soni $n + m$ - ta. Shuning uchun ulardan ixtiyoriy birontasini ixtiyoriy qiymatga tenglashtirib (masalan 0 - ga) olib qolgan u_i va v_j - larni birin - ketin topamiz.

Endi bo'sh kataklar uchun jadvalga asoslanib yuqoridagi kabi chiziqli tenglamalar sistemasini tuzib olamiz.

$$\left. \begin{aligned} u_1 + v_3 &= c'_{13}, \\ \dots\dots\dots \\ u_1 + v_n &= c'_{1n}, \\ u_2 + v_1 &= c'_{21}, \\ u_2 + v_2 &= c'_{22}, \\ \dots\dots\dots \\ u_m + v_1 &= c'_{m1}, \\ u_m + v_2 &= c'_{m2}. \end{aligned} \right\} c'_{ij} - \text{larga bilvosita tariflar deyiladi.}$$

u_i va v_j - larning qiymatlarini quyib bilvosita tariflarni - c'_{ij} - hisoblab chiqamiz

Agar birinchi programmada quyidagi hamma ayirmalar $c'_{ij} - c_{ij} < 0$ bo'lsa, u vaqtda bu rejaga optimal reja bo'ladi.

Agar ayirmani birontasi $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ bo'lsa u vaqtda optimal yechim hali topilmagan bo'ladi.

Demak 1 – chi programmani yaxshilash kerak.

Buning uchun $\max\{(c'_{ij} - c_{ij}) > 0\}$ topib olamiz va shu zanjirni taqsimot usuli bilan o'zgartiramiz (yaxshilaymiz).

Natijada yangi reja hosil bo'ladi.

Hosil bo'lgan reja uchun transport harajatlarini hisoblab chiqamiz.

2 – chi rejaga ham potentsiallar usulini qo'llaymiz. Potentsiallar usulini qo'llash jarayoni barcha $c'_{ij} - c_{ij} < 0$ bo'lguncha davom ettiriladi.

Shunday qilib potentsiallar usuli yordamida boshlang'ich tayanch rejadan boshlab, optimal yechimga yaqinroq bo'lgan yangi tayanch rejaga o'tamiz va chekli sondagi almashtirishlardan (iteratsiyalardan) so'ng masalaning optimal yechimini topamiz.

Potentsiallar usulining algoritmi quyidagilardan iborat:

1. Shimoliy - g'arb burchak yoki minimal harajatlar usulini qo'llab boshlang'ich tayanch reja (birinchi bazisli yechim) topiladi.
2. Ishlab chiqaruvchilar va iste'molchilarning potentsiallari hisoblanadi (u_i va v_j -lar).
3. c'_{ij} – bilvosita tariflar topiladi.
4. Hamma $c'_{ij} - c_{ij}$ ayirmalar hisoblaniladi. 1) Agar $c'_{ij} - c_{ij} \leq 0$ bo'lsa, tuzilgan reja optimal reja bo'ladi va bu rejaga asosan transport harajatlari hisoblanadi. 2) $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ bo'lsa u vaqtda bularning ichidan $\max\{(c'_{ij} - c_{ij}) > 0\}$ – ni topib olib bu zanjirni yaxshilaymiz. Ya'ni yangi bazisli o'zgaruvchi x_{kl} – ni kiritamiz yangi tayanch reja tuzamiz.

Masala. Berilgan bo'lsin taqsimot usulidagi masalaning birinchi tayanch rejasi. Bu jadvalga shartli variantlarni kiritib quyidagi ko'rinishda yozamiz.

2 – chi jadval.

Baza-lar	Bazalardagi tavar zaxirasi (tonna)	Tumanlar va ularni tavarlarga talabi 1 – chi tayanch reja (1 tn. hisobi).			
		Katta Qo'rg'on 350	Ishtixon 450	Narpay 200	
A_1	400	100 350	60 50	110	u_1

A_2		40	70	50	u_2
	600		400	200	
v_j		v_1	v_2	v_3	

$f_1 = 76000 \text{ t.km}$ – transport harajati.

To'ldirilgan kataklar uchun quyidagi sistemani tuzamiz.

$$\left. \begin{aligned} u_1 + v_1 &= 100, \\ u_1 + v_2 &= 60, \\ u_2 + v_2 &= 70, \\ u_2 + v_3 &= 50, \end{aligned} \right\} \text{ bu sistemada 5 – ta no'malum bor. Shuning uchun}$$

noma'lumlardan birontasini 0 – ga tenglashtiramiz, faraz qilaylik $u_1 = 0$ bo'lsin. U vaqtda sistema quyidagi yechimlarga ega

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0, \\ v_1 &= 100, \\ v_2 &= 60, \\ u_2 &= 10, \\ v_3 &= 40. \end{aligned} \right\} \quad (A)$$

Bo'sh kataklar uchun u_i va v_j potentsiallarga asoslanib quyidagi sistemani tuzamiz.

$$\left. \begin{aligned} u_1 + v_3 &= c'_{13}, \\ u_2 + v_1 &= c'_{21}. \end{aligned} \right\}$$

bu sistemaga

(A) -- yechimlarni qo'ysak, bilvosita tariflar kelib chiqadi.

$$c'_{13} = 110, \quad c'_{21} = 40$$

Endi $c'_{ij} - c_{ij}$ – ayirmalarni hisoblaylik

$$c'_{13} - c_{13} = 40 - 110 = -70 < 0,$$

$$c'_{21} - c_{21} = 110 - 40 = 70 > 0,$$

$c'_{21} - c_{21} = 70 > 0$ bo'lgani uchun bu zanjirni yaxshilaymiz. Oldin zanjirning ko'rinishini chizib olamiz

$$\begin{array}{ccc} 350 & & 50 \\ \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cc} - & + \\ \Delta_{21} = -110 \\ + & - \end{array} \\ \hline \end{array} & & \\ & & 400 \end{array}$$

Bu zanjirdagi yuklarni qaytadan §1 da taqsimlagan edik. Uning ko'rinishi quyidagicha

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & & 400 \end{array}$$

-	+
+	-
350	50

Yuqoridagi o'zgarishlarga asoslanib tayanch rejaning jadvalini tuzamiz

3 – jadval.

Baza-lar	Bazalardagi yuk zaxirasi	Iste'molchilar va ularning talab			
		Katta Qo'rg'on 350	Ishtixon 450	Narpay 200	u_i
A_1	400	100	60 400	110	u_1
A_2	600	40 350	70 50	50 200	u_2
v_j		v_1	v_2	v_3	

$f_2 = 51500$ t km. – transport harajatlari.

To'ldirilgan kataklar uchun quyidagi sistemani u_i va v_j -- potentsiallarni qo'llab tuzamiz.

Yuqoridagi kabi ni $u_1 = 0$ deb olsak

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 60, \\ u_2 + v_1 = 40, \\ u_2 + v_2 = 70, \\ u_2 + v_3 = 50. \end{array} \right\} \begin{array}{l} u_1 = 0, \\ u_2 = 60, \\ u_2 = 10, \\ u_1 = 30, \\ v_3 = 40. \end{array} \quad (B)$$

Bo'sh kataklar uchun $u_i + v_i = c'_{ij}$ - larni hisoblaymiz

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + v_1 = c'_{11}, \\ u_1 + v_3 = c'_{13}, \end{array} \right\}$$

u_i va v_j larni (V) dan bu sistemaga qo'ysak $c'_{11} = 30$, $c'_{13} = 40$ kelib chiqadi.

Endi $c'_{ij} - c_{ij}$ - ayirmalarni hisoblaylik.

$$c'_{11} - c_{11} = 30 - 100 = -70 < 0,$$

$$c'_{13} - c_{13} = 40 - 110 = -70 < 0.$$

Bu reja optimal reja hisoblanadi, chunki $c'_{ij} - c_{ij} < 0$.

Optimal yechimlar (tonna hisobida)

$$x_{11} = 0, \quad x_{21} = 350$$

$$x_{12} = 400, \quad x_{22} = 50$$

$$x_{13} = 0, \quad x_{23} = 200$$

Bu yechim uchun

$$f_{\text{tayanch reja}} = 100x_{11} + 60x_{12} + 110x_{13} + 40 \cdot x_{21} + 70 \cdot x_{22} + 50 \cdot x_{23} = 51500 \text{ t.km,}$$

$$f_1 - f_{\text{tayanch}} = 76000 - 51500 = 24500 \text{ t.km.}$$

Topshiriqlar

Quyidagi transport masalalarini yeching. (3.1 - 3.25).

Masala. Viloyatning uchta A_1, A_2 va A_3 korxonalarida bir jinsli mahsulotlar ishlab chiqarilib, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni beshta B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 iste'molchilarga jo'natish kerak. A_1, A_2 va A_3 korxonalarda mos ravishda a_1, a_2, a_3 tonna bir jinsli ishlab chiqarilgan mahsulotni B_1, B_2, B_3, B_4 va B_5 iste'molchilarga mos ravishda b_1, b_2, b_3, b_4 va b_5 tonna yuklarni jo'natish kerak.

Ishlab chiqarish korxonalaridan iste'molchilargacha bo'lgan masofalar quyidagi T matritsada berilgan

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

Ishlab chiqarish korxonalaridan mahsulotlarni iste'molchilarga tashish harajatlarining minimal variantini toping:

3.1.

$$\begin{aligned} b_1 &= 220, \\ a_1 &= 330, \quad b_2 = 170, \\ a_2 &= 270, \quad b_3 = 150, \\ a_3 &= 350, \quad b_4 = 150, \\ b_5 &= 200. \end{aligned} \quad T = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 6 & 12 & 32 \\ 14 & 10 & 2 & 10 & 36 \\ 14 & 11 & 5 & 8 & 34 \end{pmatrix}.$$

3.2.

$$\begin{aligned} a_1 &= 260, \quad b_2 = 70, \\ a_2 &= 150, \quad b_3 = 130, \\ a_3 &= 200, \quad b_4 = 110, \\ b_1 &= 100. \quad b_5 = 200. \end{aligned} \quad T = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 12 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 68 & 62 \end{pmatrix}.$$

3.3.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 200, & b_2 = 130, \\ a_2 = 350, & b_3 = 100, \\ a_3 = 300, & b_4 = 190, \\ b_1 = 270, & b_5 = 110. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 27 & 19 & 20 & 10 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}.$$

3.4.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 250, & b_2 = 135, \\ a_2 = 300, & b_3 = 120, \\ a_3 = 200, & b_4 = 150, \\ b_1 = 135, & b_5 = 210. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.5.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 300, & b_2 = 150, \\ a_2 = 350, & b_3 = 190, \\ a_3 = 200, & b_4 = 150, \\ b_1 = 110, & b_5 = 250. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

3.6.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 170, & b_2 = 110, \\ a_2 = 250, & b_3 = 160, \\ a_3 = 230, & b_4 = 90, \\ b_1 = 150, & b_5 = 140. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \\ 49 & 26 & 27 & 16 & 38 \\ 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \end{pmatrix}.$$

3.7.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 200, & b_2 = 110, \\ a_2 = 250, & b_3 = 100, \\ a_3 = 200, & b_4 = 120, \\ b_1 = 130, & b_5 = 190. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \end{pmatrix}.$$

3.8.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 300, & b_2 = 195, \\ a_2 = 200, & b_3 = 200, \\ a_3 = 350, & b_4 = 140, \\ b_1 = 145, & b_5 = 170. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \end{pmatrix}.$$

3.9.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 200, & b_2 = 135, \\ a_1 = 250, & b_3 = 120, \\ a_3 = 300, & b_4 = 150, \\ b_1 = 135. & b_5 = 270. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 4 & 8 & 13 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.10.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 270, & b_2 = 200, \\ a_3 = 330, & b_3 = 150, \\ a_3 = 350, & b_4 = 220, \\ b_1 = 210. & b_5 = 170. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 & 1 & 7 \\ 7 & 4 & 11 & 2 & 10 \\ 3 & 12 & 9 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

3.11.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 200, & b_2 = 100, \\ a_2 = 200, & b_3 = 100, \\ a_3 = 250, & b_4 = 130, \\ b_1 = 140. & b_5 = 120. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 27 & 36 & 35 & 31 & 29 \\ 35 & 42 & 33 & 32 & 39 \\ 22 & 23 & 25 & 32 & 35 \end{pmatrix}.$$

3.12.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 250, & b_2 = 325, \\ a_2 = 450, & b_3 = 125, \\ a_3 = 200, & b_4 = 100, \\ b_1 = 250. & b_5 = 100. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 & 9 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 6 \\ 5 & 8 & 70 & 10 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.13.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 225, & b_2 = 190, \\ a_2 = 175, & b_3 = 80, \\ a_3 = 200, & b_4 = 130, \\ b_1 = 100. & b_5 = 100. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & 7 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.14.

$$\begin{array}{ll} a_1 = 210, & b_2 = 220, \\ a_2 = 450, & b_3 = 200, \\ a_3 = 290, & b_4 = 170, \\ b_1 = 150. & b_5 = 210. \end{array} \quad T = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 28 & 27 & 30 \\ 39 & 21 & 12 & 21 & 47 \\ 19 & 27 & 32 & 32 & 20 \end{pmatrix}.$$

3.15.

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 330, & b_2 = 230, \\
a_2 = 450, & b_3 = 200, \\
a_3 = 270, & b_4 = 210, \\
b_1 = 220. & b_5 = 190.
\end{array}
\quad T = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \\ 37 & 30 & 15 & 19 & 37 \end{pmatrix}.$$

3.16.

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 270, & b_2 = 230, \\
a_2 = 420, & b_3 = 200, \\
a_3 = 330, & b_4 = 210, \\
b_1 = 210. & b_5 = 130.
\end{array}
\quad T = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \\ 36 & 30 & 15 & 19 & 37 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \end{pmatrix}.$$

3.17.

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 300, & b_2 = 190, \\
a_2 = 250, & b_3 = 150, \\
a_3 = 300, & b_4 = 130, \\
b_1 = 250. & b_5 = 130.
\end{array}
\quad T = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 24 & 32 & 24 \\ 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}.$$

3.18.

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 250, & b_2 = 190, \\
a_2 = 300, & b_3 = 150, \\
a_3 = 310, & b_4 = 130, \\
b_1 = 260. & b_5 = 130.
\end{array}
\quad T = \begin{pmatrix} 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 17 & 21 & 24 & 32 & 24 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}.$$

3.19.

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 300, & b_2 = 160, \\
a_2 = 320, & b_3 = 120, \\
a_3 = 230, & b_4 = 180, \\
b_1 = 190. & b_5 = 200.
\end{array}
\quad T = \begin{pmatrix} 32 & 31 & 22 & 20 & 25 \\ 20 & 11 & 19 & 18 & 18 \\ 26 & 30 & 17 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

3.20.

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 260, & b_2 = 150, \\
a_2 = 290, & b_3 = 125, \\
a_3 = 300, & b_4 = 215, \\
b_1 = 140. & b_5 = 220.
\end{array}
\quad T = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 23 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 11 & 6 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.21.

$$\begin{array}{ll}
a_1 = 200, & b_2 = 140, \\
a_2 = 350, & b_3 = 200, \\
a_3 = 300, & b_4 = 195, \\
b_1 = 170. & b_5 = 145.
\end{array}
\quad T = \begin{pmatrix} 18 & 31 & 35 & 25 & 13 \\ 16 & 25 & 21 & 9 & 9 \\ 45 & 30 & 25 & 33 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.22.

Chiziqli programmalashning ko'pgina masalalarini yechganda x_i – o'zgaruvchilarga butun sonli bo'lish sharti qo'yiladi. Bunday masalalarga butun sonli programmalash masalalari deb ataladi. Butun sonli programmalash, materiallarni optimal bichish, transport masalalarini marshrutlarga optimal taqsimlash, bo'linmaydigan mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalarining ishini optimal planlashtirish kabi masalalarni yechishda qo'llaniladi. Yuqoridagilarni yaxshi anglab olish uchun quyidagi masalani ko'rib chiqamiz.

§1. Marketolog haqidagi masala.

Faraz qilaylikki A_i shaharda yashovchi marketolog n – ta $A_1, A_2, \dots, A_n$ shaharlarda bir martadan bo'lib, minimal vaqt ichida A_i shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin. Bu masalaning matematik modelini tuzish uchun marketologning A_i shahardan A_j shaharga borishi uchun sarf qilgan vaqtini $t_{ij} (i, j = \overline{1, n})$ bilan hamda uning har bir A_i shahardan A_j shaharga borishi ko'rsatgichini x_{ij} bilan belgilab olsak, u vaqtda marketolog A_i shahardan A_j shaharga borsa $x_{ij}=1$, bormasa $x_{ij}=0$ - ga teng.

Yuqoridagi masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (4.1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (4.2)$$

$$x_{ij}=0, \text{ yoki } x_{ij}=1. \quad (4.3)$$

$$F_{\min} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}. \quad (4.4)$$

Butun sonli programmalash masalalaridagi x_{ij} -- larning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti quyilsa, bunday masalalar to'liq butun sonli programmalash masalalari, agar ularning ma'lum bir qismi uchun bu shart qo'yilsa, qisman butun, sonli programmalash masalalari deyiladi.

Agar (4.3) ko'rinishdagi shartlar butun sonli programmalash masalalaridagi o'zgaruvchilarga qo'yilgan bo'lsa, u vaqtda bunday masalaga Butun sonli programmalash masalasi deyiladi.

Butun sonli programmalash masalalarni yechish uchun uning xususiyatlarini etiborga oluvchi usullar yaratilgan. Ulardan biri amerika olimi R. Gomori tomonidan yaratgan bo'lib optimal yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi.

R. Gomori usul quyidagidan iborat.

Oldin chiziqli programmalash masalasi simpleks usul bilan yechiladi.

Agar $x_i (i = \overline{1, n})$ yechim butun sonli bo'lsa, u butun sonli programmalash masalasining ham yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylikki p_{i-1} – chi masala simpleks usul bilan yechilgan va uning yechimi x_{i-1} butun bo'lish shartini qanoatlantirmaydi. Yuqoridagilarni hisobga olib quyidagilarni belgilab olaylik:

$\{a\} - x_i = a$ yechimning kasr qismi;

k – oxirgi simpleks jadvaldagi erkli o‘zgaruvchilarning indeksi

$s - \{a_{s0}\}$ – larning jadvaldagi eng kattasi joylashgan satr.

U vaqtda R. Gomori x_i nomalumlarning butun bo‘lishlik shartini e‘tiborga oluvchi va "kesuvchi tenglama" deb ataluvchi qo‘shimcha tenglama tuzadi.

Bu holda to‘liq butun sonli masalani yechish uchun Gomoring I -- chi kesimini quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin.

$$\{a_{s0}\} - \sum_k \{a_{sk}\} x_k \leq 0. \quad (4.5)$$

Qisman butun sonli masalani yechish uchun Gomoring II -- chi kesimini (bu kesimni to‘liq butun sonli masalani yechish uchun ham qo‘llasa bo‘ladi) quyidagi yozish mumkin

$$\{a_{s0}\} - \sum_k \{a_{sk}\} x_k \leq 0, \quad (4.6)$$

bu yerda a_{sk} -- koeffitsiyentlar quyidagi nisbatlardan topiladi.

1) x_k – lar butun son bo‘lmasligi talab qilinmagan holda

$$a_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, & \text{arap } a_{sk} \geq 0. \\ \frac{\{a_{s0}\}}{1 - \{a_{s0}\}} \{a_{sk}\}, & \text{arap } a_{sk} < 0. \end{cases}$$

2) x_k – larga butun son bo‘lishi talab qilingan holda

$$a_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, & \text{arap } \{a_{sk}\} \leq \{a_{s0}\}, \\ \frac{\{a_{s0}\}}{1 - \{a_{s0}\}} (1 - \{a_{sk}\}), & \text{arap } \{a_{sk}\} > \{a_{s0}\}. \end{cases}$$

To‘liq yoki qisman butun sonli masalalarni yechish uchun ketma - ket jadvallarni almashtirish jarayonlarni bajarish quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1) p_{i-1} masala yechilib x_{i-1} optimal yechimlar topiladi:

2) Agar x_{i-1} yechimlar butun sonli bo‘lsa simpleks jadvallar tuzish to‘xtatiladi;

3) Agar p_{i-1} masalada x_{i-1} yechimlar butun sonli bo‘lmasa, u vaqtda Gomoring I – chi yoki II kesimlari tuziladi;

4) p_{i-1} masalaga 3) holdagi shartlar to‘ldirilib p_i masala tuziladi va ya’na 1) holni bajarishga to‘g‘ri keladi.

§2. To‘la butun sonli programmalash masalalari

1. Quyidagi shartlarda butun sonli masalani yeching:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + y_1 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + y_2 = 6. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

hamma $x_k (k=1,2)$ – butun son $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ $F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$.

Yechish. Masalani dastlab butun sonli yechimlari bo‘lishini talab qilmasdan simpleks usul bilan chiqamiz.

1 -- chi simpleks jadval

№	c_δ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmlar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	x_2	2	-1	2	1	0	1
2.	0	y_2	6	3	2			3
3.		F	$F = 0$	-1	-4	0	0	

2 -- chi simpleks jadval

№	c_δ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmlar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	4	x_1	1	-1/2	1	1/2	0	
2.	0	y_1	4	2	0	-1	1	
3.		F	$F = 4$	-3	0	2	0	

3 -- chi simpleks jadval

№	c_δ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmlar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	4	x_2	3/2	0	1	3/8	1/8	
2.	1	x_1	2	1	0	-1/2	1/2	
3.		F	$F = 7$	0	0	5/4	3/4	

3 – chi simpleks jadvaldan ko‘rinib turibdiki $\bar{P}$ masalani optimal yechimlari $x_1=1$, $x_2=3/2$, $y_1=0$, $y_2=0$ teng. Bu yechimlar ichida $x_2=3/2$ - kasr son. Shuning uchun yuqoridagi 3 -- chi va 4 -- hollarni qo‘llab $\bar{P}_1$ chi masalani tuzamiz. 3 – chi simpleks jadvalda yagona 1 -- satrda kasr yechimlar bor (1 chisi – a_{i0} , $s=1$).

U vaqtda Gomorining birinchi kesimini quydagicha yozamiz

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\left\{\frac{3}{8}\right\}y_2 + \left\{\frac{1}{8}\right\}y_2\right) \leq 0 \text{ yoki}$$

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2\right) \leq 0.$$

Bu tengsizlikga bazisli o'zgaruvchi y_3 - ni kiritib quyidagi tenglama ko‘rinishida yozamiz.

$$\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2 - y_3 = \frac{1}{2}.$$

Bu tenglamani oldingi 2 – chi tenglamalar safiga birlashtirib yozsak, u vaktida $\bar{P}_1$ - masala hosil bo‘ladi.

Oxirgi simpleks jadval $\bar{P}_1$ masalasi uchun quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2 - y_3 = \frac{1}{2}$ – tenglamada y_3 o‘zgaruvchi bazisli o‘zgaruvchi bo‘lishi mumkin, lekin uni oldidagi koeffitsiyenti manfiy son. Shuning uchun p_1 – chi masala uchun tuzilgan 4 – chi jadvaldagi yechimlar optimal yechimlar bo‘la olmaydi. ($y_3 = -1/2$). Demak 4 -- chi simpleks jadvalni yana almashtirish (yaxshilash) kerak.

4 -- chi simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o‘zgaruvchilar	O‘zgarmaslar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
1.	4	x_2	3/2	0	1	3/8	1/8	0	4	12
2.	1	x_1	2	1	0	-1/2	1/2	0	0	0
3.		y_3	1/2	0	0	3/8	1/8	-1	4/3	4
4.		F	$F = 7$	0	0	5/4	3/4	0	0	0

4 - chi jadvalni 3 - chi satrini kalitli satr deb tanlab (3- chi va 4 - chi shartlarni qo‘llab) $\min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{ip}} \right\}$ topamiz. U vaqtda $\min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{ip}} \right\}$ joylashgan uchinchi ustun kalitli ustun bo‘ladi.

Agar bunday ustun topilmasa, u vaqtda kalitli ustun deb tanlangan satrdagi eng kichik elementga ega bo‘lgan ustun tanlab olinadi (ya’ni $\min \left\{ \frac{a_{i0}}{a_{ip}} \right\}$).

Bundan keyin y_3 ni baziga kiritib 5 -- chi simpleks jadvalni tuzish mumkin. Bu yerda tanlangan satr va ustun yuqoridagi talabga javob beradi.

5 -- chi simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o‘zgaruvchilar	O‘zgarmaslar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
1.	4	x_2	1	0	1	0	0	1		
2.	1	x_1	4/3	1	0	0	1/3	-2/3		
3.		y_1	4/3	0	0	1	1/3	-8/3		
4.		F	16/3	0	0	0	1/3	10/3		

Bu jadvaldagi yechimlar ham optimal yechimlar bo‘lib quyidagilarga teng;

$$x_1=4/3, x_2=1, y_1=4/3, y_2=0, y_3=0.$$

Lekin bu yechim ham butun sonli emas. Shuning uchun P_2 -- chi masalani tuzishga kirishamiz.

Mos kesimlar quyidagicha bo'ladi.

$$\left\{\frac{4}{3}\right\} - \left(\left\{\frac{1}{3}\right\}y_2 + \left\{\frac{-2}{3}\right\}y_3\right) \leq 0.$$

Bu yerda

$$\left\{\frac{4}{3}\right\} = \frac{1}{3}, \quad \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3} \quad \text{va} \quad \left\{\frac{-2}{3}\right\} = \frac{-2}{3} - \left[\frac{-2}{3}\right] = \frac{-2}{3} - (-1) = \frac{1}{3} \quad \text{bo'lgani uchun}$$

kesuvchi tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$\frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 - y_4 = \frac{1}{3},$$

u vaktida 5 -- chi jadvaldagi 4 -- chi satrni bu tenglamaga asosan yozsak quyidagi jadval hosil bo'ladi

5' -- chi simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgar-maslar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i5}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4		
1.	4	x_2	1	0	1	0	0	0	0	4	
2.	1	x_1	4/3	1	0	0	1/3	-1/3	0	4	1
3.	0	y_1	4/3	0	0	1	1/3	-8/3	0	1	
4.		y_4	1/3	0	0	0	1/3	1/3	-1		
5.		F	$F = 16/3$	0	0	0	1/3	10/3			

Bu jadvaldan kalitli ustun, kalitli satr va kalitli sonni topib almashtirsak (yaxshilasak) quyidagi jadval hosil bo'ladi.

6 -- chi simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgar-maslar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i5}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4		
1.	4	x_2	1	0	1	0	0	1	0		
2.	1	x_1	1	1	0	0	0	-1	1		
3.	0	y_1	1	0	0	1	0	-3	1		
4.		y_2	1	0	0	0	1	1	-3		
5.	Indeks satri.	F	$F = 5$	0	0	0	0	3	1		

Indeksi satrida hamma sonlar butun sonlar bo'lgani uchun bu jadval optimal yechimni beradi:

$$x_1=1, x_2=1, y_1=1, y_2=1, y_3=0, y_4=0 \quad \text{va}$$

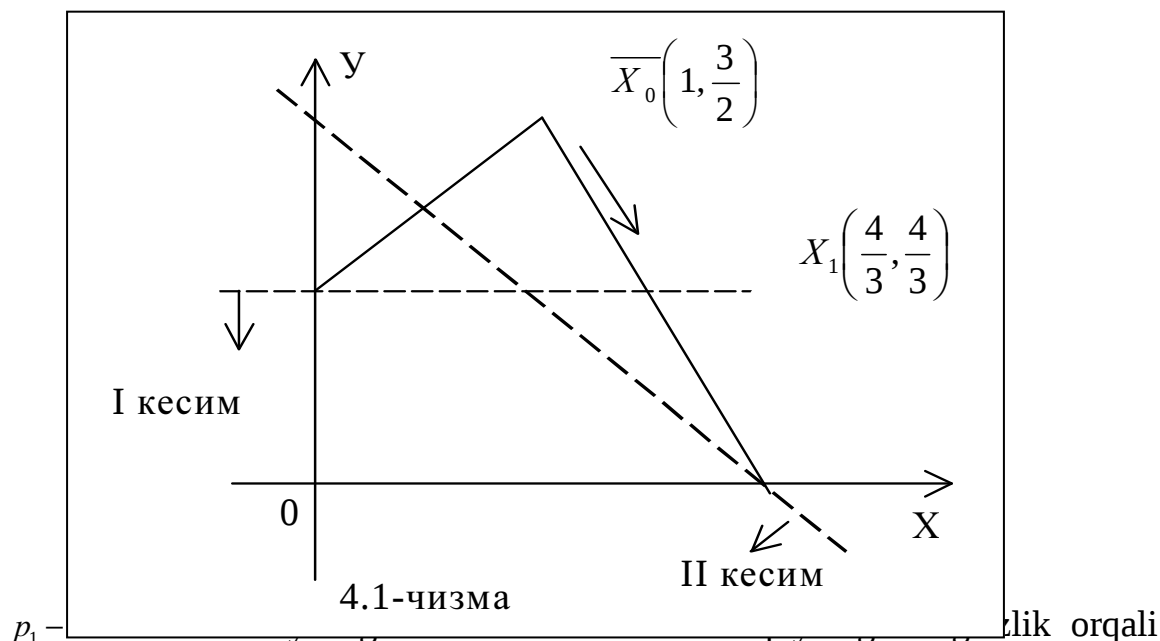
$$f_{\max} = 1x_1 + 4x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 =$$

$$= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 5.$$

$$f_{\max} = 5.$$

Agar indeks satrida manfiy sonlar bo'lganda simpleks jadvallar tuzish davom ettirilardi.

Masalani geometrik izohi quyidagi ko'rinishda bo'ladi. Oldin P_0 masalani optimal yechimi shaklni chizamiz.



kiritgan edik:

$\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2 \geq \frac{1}{2}$. Bu tengsizlikka dastlabki tengsizliklarni qo'llab y_1 va y_2 larni qisqartirsak $x_2 \leq 1$ kelib chiqadi. Shuning uchun bu tengsizlikka $x_2 = 1$ to'g'ri chiziq mos keladi. $x_2 = 1$ chiziq butun sonli bo'lmagan optimal yechimlarni $x_0(1; \frac{3}{2})$ ajratadi, lekin hamma butun sonli yechimlar sohasini $(0; 1)$, $(1; 1)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$ -- saqlab qoladi. P_1 - chi masalada yangi optimal yechimlar: $\bar{x}_1(4/3, 1, 0, 4/3)$ sohasi hosil bo'ladi. Endi $\frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4 \geq \frac{1}{2}$ - II - chi kesimni kiritib P_2 - chi masalani tuzamiz. Bu masaladan yuqoridagi kabi bazisli o'zgaruvchilarni qisqartirsak $x_1 = x_2 \leq 2$ hosil bo'ladi. Yangi soha butun sonli optimal soha bo'ladi (chizma 4.1 - ga karang).

Topshiriqlar

Quyidagi masalalarning to'liq butun sonli yechimlarini toping va geometrik izohini (mumkin bo'lgan joyda) bering (bu yerda $x_k \geq 0$).

4.1.

4.2.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 36, \\ x_2 &\leq 13. \end{aligned} \right\}$$

$$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max.$$

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 8, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 10. \end{aligned} \right\}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max.$$

4.3.

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 5, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 2. \end{aligned} \right\}$$

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

4.4.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12, \\ 3x_1 - 8x_2 + x_4 &= 24. \end{aligned} \right\}$$

$$F = x_1 \rightarrow \max.$$

4.5.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 9, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 &= 4, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 &= 6. \end{aligned} \right\}$$

$$F = x_1 \rightarrow \max.$$

4.6.

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_4 &= 3, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5, \\ 3x_1 + x_4 + x_5 &= 4. \end{aligned} \right\}$$

$$F = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \rightarrow \max.$$

4.7.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 4, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 &= 8. \end{aligned} \right\}$$

$$F = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max.$$

4.8.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

$$F = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min.$$

4.9.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9. \end{aligned} \right\}$$

$$F = 2x_1 + 2x_2 + 10 \rightarrow \max.$$

4.10.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9. \end{aligned} \right\}$$

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

4.11.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_4 + 6x_6 &= 9, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 &= 6. \end{aligned} \right\}$$

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \rightarrow \min.$$

4.12.

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 8, \\ x + 4x_2 + x_4 &= 10. \end{aligned} \right\}$$

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

§3. Qisman butun sonli programmalash masalalari

Quyida shartlarda qisman butun sonli masalani yeching.

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 9, \\ 0,16x_1 + x_2 &\leq 1,9. \end{aligned} \right\} \quad f = x_1 + 8x_2 \rightarrow \max.$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

va x_k – butun sonli ($k=1,2,..$).

Yechish. Bu masala to'liq butun sonli masala emas, chunki sistemadagi ikkinchi tengsizlikni kanonik ko'rinishga keltirsak quyidagi tenglama hosil bo'ladi $0,16x_1 + x_2 + y_2 = 1,9$. Bu tenglamada y_2 ning butun qiymatlarida x_1 va x_2 butun sonli qiymatlarni qabul qilmaydi. Shuning uchun bu masalaga qisman butun sonli masala deyiladi. Masalani yechish uchun oldin P_0 masalani simpleks usulni qo'llab yechamiz.

Birinchi simpleks jadval

№	$\bar{C}_\sigma$	Bazisli yechimlar	O'zgarmaslar ustuni a_{i0}	1	8	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	y_1	9	1	1	1	0	9
2.	0	y_2	1,9	0,16	1	0	1	1,9
3.	indeks satri		$F = 0$	-1	-8	0	0	

Bu jadvalning indeks satrida manfiy sonlar bo'lgani uchun simpleks uslubni qo'llab ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

Ikkinchi simpleks jadval.

№	c_δ	Bazisli yechimlar	O'zgarmas ustuni a_{i0}	1	8	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	y_1	7,1	2,84	0	1	-1	
2.	8	x_2	1,9	0,16	1	0	1	
3.	indeks satri	F	$F = 15,2$	0,28	0	0	8	

Ikkinchi satrda manfiy sonlar yo'q. Demak 1 – chi almashtirishdan (yaxshilashdan) keyin optimal yechimlar quyidagidan iborat

$$x_1=0, x_2=1,9; y_1=7,1, y_2=0.$$

Optimal yechim ichida $y_1=7,1$ butun sonli yechim emas. Shuning uchun p_1 –chi masalani tuzish kerak. (6.6) – chi formuladan foydalanib 2 – chi satrga asoslanib ($s=2$) P_1 –chi masala uchun Gomoring kesimini tuzamiz. U vaqtda jadvaldan quyidagi hosil bo'ladi

$$\{a_{20}\} - (a_{21}x_1 + a_{24}y_2) \geq 0.$$

Yuqorida ko'rdikki x_1 -- butun sonli o'zgaruvchi va $\{a_{21}\} < \{a_{20}\}$ bo'lgani uchun, $\{a_{21}\} = \{a_{21}\} = 0,16$. (4.7)

(4.7) – chi tenglikdan foydalanib a_{24} – ni topamiz (1 – chi kesimdan foydalanib).

y_2 -- ga butun sonli bo'lishi talab qilinmagani va $a_{24} > 0$ bo'lgani uchun yuqoridagi kesimdan foydalansak, bu kesim quyidagicha bo'ladi: $a_{24} = 1$, $0,16x_1 + y_2 - y_3 = 0,9$.

Bu tenglamani yuqoridagi jadvalga kiritsak p_1 – chi masala chiqadi.

P_1 – chi masalada sim

pleks jadvallarni ikki marta almashtirgandan keyin optimal yechim quyidagicha bo'ladi:

$x_1=8/3$, $x_2=1$; $y_1=0$, $y_2=71/150$. Optimal yechim ichida 1 chi satrdagi $x_1=8/3$ butun son emas. Shuning uchun yuqoridagi qoidalaridan foydalanib yangi kesimni tuzib butun optimal yechimni topamiz

P_1 – chi masala uchun tuzilgan simpleks jadvallar quyidagicha:

1 -- chi simpleks jadval

№	$\bar{C}_\sigma$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmas ustuni a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	0	y_1	7,1	2,84	0	1	-1	0	0
2.	8	x_2	1,9	0,16	1	0	1	0	1,9
3.	0	y_3	0,9	0,16	0	0	1	-1	0,16
4.	indeks satri		$F=15,2$	0,28	0	0	8	0	

2 -- chi simpleks jadval

№	$\bar{C}_\sigma$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmas ustuni a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	0	y_1	8	3	0	1	0	-1	8/3
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0

3.	0	y_2	0,9	0,16	0,16	0	0	1	90/16
4.	indeks satri		$F=8$	-1	0	0	0	8	

3 -- chi simpleks jadval

№	$\overline{C}_\sigma$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmlar ustuni a_{i0}	1	8	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	1	x_1	8/3	1	0	1/3	0	-1/3	
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	
3.	0	y_2	71/150	0	0	-4/75	1	71/75	
4.	indeks satri	F	$F=32/3$	0	0	1/3	0	23/3	

3 – chi jadvalning 1 – chi satridan ko‘rinadiki $x_1=8/3$ optimal yechim butun sonli emas.

Shuning uchun 1 – satrga asoslanib Gomoring kesimini tuzamiz

$$\left\{\frac{8}{3}\right\} - (a_{13}y_1 + a_{15}y_3) \geq 0, \text{ bu yerda}$$

$$a_{12} = \frac{1}{3}, \quad a_{15} = \frac{\left\{\frac{8}{3}\right\}}{1 - \left\{\frac{8}{3}\right\}} \{a_{15}\} = \frac{2}{3}.$$

Yuqoridagilardan quyidagi tenglama kelib chiqadi.

$$y_1 + 2y_3 - y_4 = 2.$$

Bu tenglamani 3 – chi jadvalga kiritsak P_2 masala hosil bo‘ladi.

P_2 -- chi masalani simpleks usul bilan yechamiz.

1 -- chi simpleks jadval

№	$\overline{C}_\sigma$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmlar ustuni a_{i0}	1	8	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
1.	1	x_1	8/3	1	0	1/3	0	0	0	8
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	0	0	0
3.		y_3	71/150	0	0	-4/75	1	71/75	0	0
4.		y_4	2	0	0	1	0	2	-1	2
4.	Ind.		$F=32/3$	0	0	1/3	0	23/3	0	0

	satr							3		
--	------	--	--	--	--	--	--	---	--	--

2 -- chi simpleks jadval

№	$\bar{C}_\sigma$	Bazis o'zgaruvchilar	O'zgarmlar ustuni a_{i0}	1	8	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
1.	1	x_1	2	1	0	0	0	-1	1/3	0
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0	0
3.		y_3	0,58	0	0	0	1	0,84	- 4/7 5	0
4.		y_4	2	0	0	1	0	2	0	0
4.	Ind. satr		$F = 10$	0	0	0	0	7	1/3	0

Ikkichi simpleks jadvaldan ko'rinadiki qisman optimal yechimlar quyidagiga teng.
 $x_1=2, x_2=1, y_3=0,58, y_4=2, y_1=0, y_2=0$.

Bu yechim ichida $y_3=0,58$, lekin bu yechimni ham to'liq butun songa keltirish mumkin. Xususan sistemadagi 2 – chi tengsizlikni 100 ga ko'paytirib bazisli o'zgaruvchi kiritsak quyidagi tenglama hosil bo'ladi.
 $16x_1 + 100x_2 + y_3 = 190$. Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki y_3 , butun bo'lganida x_1 va x_2 lar butun qiymatlarida butun qiymat qabul qilishi mumkin.

Topshiriqlar.

Quyidagi shartlarda qisman butun sonli masalani yeching ($x_k \geq 0$ shart bajarilganda).

4.13.

$$\left. \begin{aligned} -2,9x_1 + 6x_2 &\leq 17,4, \\ 3x_1 - x_2 &\leq 1. \end{aligned} \right\}$$

x_1 va x_2 бутун сон.,
 $F = 6x_1 + x_2 \rightarrow \max$.

4.15.

$$\left. \begin{aligned} 0,5x_1 + x_2 &\leq 1,75, \\ x_1 + 0,3x_2 &\leq 1,5. \end{aligned} \right\}$$

x_1 va x_2 бутун сон.,
 $F = 0,25x_1 + x_2 \rightarrow \max$.

4.17

4.14.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 12, \\ 3x_1 - 8x_2 &\leq 24. \end{aligned} \right\}$$

x_1 бутун сон.,
 $F = x_1 \rightarrow \max$.

4.16.

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4. \end{aligned} \right\}$$

x_2 бутун сон.,
 $F = x_1 + x_2 \rightarrow \max$.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 &= 3,5, \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 1,5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 &= 4. \end{aligned} \right\}$$

$$x_2 \text{ бутун сон.},$$

$$F = 8x_1 + 6x_2 \rightarrow \max.$$

V. Bob. Parametrik programmalash

Xalq xo‘jaligini boshqarish va rejalashtirish jarayonida iqtisodda quyidagi xususiyatlarga ega bulgan masalalarga duch keladi:

- 1) Izlanayotgan miqdorlarning juda ko‘p parametrlarga bog‘liqligi.
- 2) Yechilayotgan masala cheksiz yechimga ega bo‘lib, ulardan optimal yechimini tanlab olish.

Optimalashtirish masalalarini chiziqli programmalash usullari bilan to‘liq yechish uchun bu masalalarda qatnashayotgan koeffitsiyentlar aniq qiymatlarni qabul qiladi deb faraz qilinadi. Lekin amalda ko‘pchilik masalalarda bu koeffitsiyentlarning taqribiy qiymatlari yoki ularning mavjud bo‘lish oralig‘i ma‘lum bo‘ladi. Shuning uchun chiziqli programmalash masalasining optimal yechimi har bir qatnashayotgan koeffitsiyentning mavjud bo‘lish oralig‘ida o‘zgarishiga qanchalik bog‘liqligiga, ya’ni masaladagi koeffitsiyentlarning o‘zgarishi uning yechimlar to‘plamiga qanday ta’sir qilishini aniqlash masalasi talab etiladi.

Ana shunday qo‘yilgan masalalarni hal qilish parametrik programmalashning predmetini tashkil etadi.

§ 1. Parametrik programmalash masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini

Chiziqli programmalashning asosiy masalasini ko‘rib chiqaylik

$$AX = B, \text{ bu yerda } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$X \geq 0, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F(X) = CX \rightarrow \max.$$

Keltirilgan masalada A matritsaning a_{ij} elementlari, B va C vektorlarning tarkibiy qismlari qandaydir t parametrغا bog‘liq o‘zgarishi mumkin. Bunday masalalarga parametrik programmalash masalalari deyiladi.

Agar faqat C vektorning tarkibiy qismlari t parametrغا bog‘liq bo‘lsa, ya’ni $C' = C' + C''t$, $t \in [\alpha, \beta]$ berilgan masala maqsad funksiyasi parametrغا bog‘liq masala deyiladi.

Agar B vektorning tarkibiy qismlari t parametrغا bog‘liq bo‘lsa, ya’ni $B = B' + tB''$, $t \in [\alpha', \beta']$ u vaqtda bu masalaga ozad hadi parametrغا bog‘liq bo‘lgan masala deyiladi. Bu yerda $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Demak t parametrning o‘zgarish sohasida F - maqsad funksiyaning maksimum (minimum) qiymatini topish kerak.

Agar bordiyu maqsadli funksiyaning koefitsiyentlari va ozod hadning tarkibiy qismlari t -- parametrغا chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u vaqtda quyidagi shartlarda

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b'_i + b''_i t \quad (i = \overline{1, m}), \quad (5.1)$$

$$X_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5.2)$$

Maqsad funksiyasi

$$F = \sum_{i=1}^n (c'_i + c''_i t) x_i \quad (5.3)$$

ning maksimum (minimum) qiymatini $t \in [a, b]$ oraliqda topish kerak.

Yuqorida ko‘rilgan masalalarni umumlashtiruvchi masalaga parametrik programmalashning umumiy masalasi deyiladi. Boshqacha aytganda

Quyidagi shartlarda

$$\sum_{i=1}^n (a'_{ij} + a''_{ij} t) x_i = b'_j + b''_j t \quad (j = \overline{1, m})$$

$$X_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n})$$

t ning $[\alpha; \beta]$ oraliqda o'zgarish sohasida $F = \sum_{i=1}^n (c'_i + c''_i t) x_i$ ning maksimum (minimum) qiymatini topishga parametrik programmalashning umumiy masalasi deyiladi.

Yuqoridagi kabi masalalarni chiziqli programmalash usullari bilan yechish mumkin.

Kelgusida bunday masalalarni to'la o'rganamiz.

Endi (5.1) – (5.3) masalaning geometrik talqinini ko'ramiz.

Faraz qilaylikki (5.1) sistemaning musbat yechimlar to'plami (qavariq yechimlar to'plami: ko'p burchak, ko'pyoqli – uchlarining koordinatalari to'plami) bo'sh to'plam bo'lmasin va bu nuqtalar soni birdan ortiq bo'lsin. U vaqtda berilgan t parametrning $[\alpha, \beta]$ da joylashgan qavariq to'plamdagi ko'pyoqlining uchlarini koordinatalarida (5.3) maqsadli funksiyani maksimum qiymatga erishtiradigan nuqtaning koordinatalarini topishga to'g'ri keladi.

Bu nuqtani topish uchun t ga $t = t_0$ qiymat berib masalani chiziqli programmalashning geometrik uslubi bilan yechamiz. Bu yerda ikki xil hol bo'lishi mumkin:

1. Ko'pyoqli uchlarini koordinatalarini birontasida F – optimal qiymat qabul qiladi.
2. $t = t_0$ -- da yechish mumkin bo'lmasligi aniqlanadi.

Agar birinchi shart bajarilsa u vaqtda F – maqsadli funksiyani maksimum qiymatga ega bo'ladigan nuqtani topamiz.

Endi t ni yangi qiymatini $t = t_1$ qiymatini olamiz va ya'na yuqoridagi kabi yechishni davom ettiramiz. Chekli qadamlardan keyin t parametrni $[\alpha, \beta]$ qiymatlarida F – maqsadli funksiyani optimal rejasi topiladi.

Yuqoridagi qoida va formulalardan foydalanib quyidagi masalalarni yechamiz.

Masala 5.1. Korxonada ikki tur mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xom ashyo ishlatiladi. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotga ketadigan xomashyo me'yori va xom ashyo zaxirasi quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo xillari	Har bir ishlab chiqarilgan buyumga ketadigan xom ashyo me'yori		Xom ashyo zaxirasi
	1 tur	2 tur	
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36

Shu bilan birga birinchi tur mahsulotlarni realizatsiya qilganda narxi 2 soʻmdan 12 soʻmgacha, ikkinchi xil mahsulotlarni realizatsiya qilganda narxi 13 soʻmdan to 3 soʻmgacha oʻzgarib, bu oʻzgarishlar quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi $c_1 = 2 + t$, $c_2 = 13 - t$, $0 \leq t \leq 10$.

Ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi yuqoridagi koʻrsatilgan oraliqlarda oʻzgarganda ishlab chiqarishdan maksimum daromad olish rejasini toping?

Yechish. Faraz qilaylikki birinchi tur mahsulot x_1 birlik, ikkinchi tur mahsulot x_2 birlik ishlab chiqarish kerak boʻlsin. U vaqtda $t \in [0, 10]$ oraliqda oʻzgarganda quyidagi shartlarda

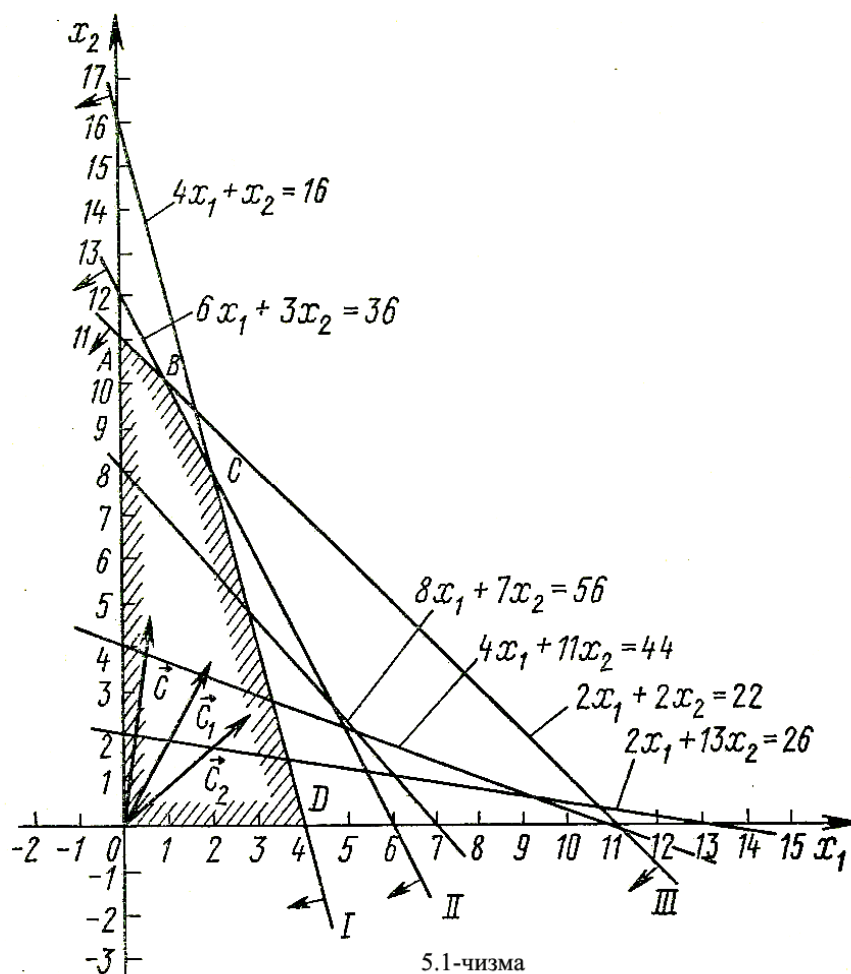
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \leq 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 22, \\ 6x_1 + 3x_2 \leq 36. \end{cases} \quad (5.4)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (5.5)$$

$$F(x_1, x_2) = (2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 \quad (5.6)$$

(5.6) – ning maksimum qiymatini topish talab etiladi. Endi (5.4) -- (5.6) masalaning yechimini topish uchun (5.4) sistemaga asoslanib yechimlar toʻplamini izohlovchi koʻpburchak shaklini chizamiz. (Chizma 5.1.)

Agar $[0, 10]$ oraliqda t ni qiymatini $t = 0$ deb olib $2x_1 + 13x_2 = k$, (bu yerda, $k = 0, 1, 2, \dots, 26$) shaklini chizsak va uni $\overline{C}(2; 13)$ vektor boʻyicha $OABCD$ koʻpburchak tomon harakatlantirsak bu toʻgʻri chiziq $A(0; 11)$ nuqtada koʻpburchakka urinadi.



Shunday qilib $t=0$ bo'lganda birinchi qadamda $x_1=0$, $x_2=11$ optimal yechim bo'ladi.

Bu yechimga asosan birinchi tur mahsulot narxi $2+0=2$ so'mni, ikkinchi tur mahsulot narxi esa $13-0=13$ so'mni tashkil etadi. Optimal rejada maqsad funksiyasining qiymati.

$$F_{1\max} = (2+0) \cdot 0 + (13-0) \cdot 11 = 13 \cdot 11 = 146 \text{ so'm}$$

bo'ladi.

Agar $t=2$ deb olsak sath chizig'i quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$(2+2)x_1 + (13-2)x_2 = 4x_1 + 11x_2 = k$, k - ga qiymatlar berib $\bar{C}(4;11)$ vektor bo'yicha siljitsak $k=44$ bo'lganda $OABCD$ ko'pburchakka $A(0;11)$ nuqtada urinadi. Demak A nuqtada F -maqsadli funksiya maksimum qiymatga ega bo'ladi va $x_1=0$, $x_2=11$ -lar optimal yechimlar bo'ladi. Bu yechimga asosan birinchi tur mahsulot narxi $2+2=4$ so'mni, ikkinchi tur mahsulot narxi $13-2=11$ so'mni tashkil etadi.

$$\text{Demak } F_{\max} = (2+2) \cdot 0 + (13-2) \cdot 11 = 121 \text{ so'm.}$$

Yuqoridagi 5.1-chizmadan ko‘rinib turibdiki mahsulotlarni ishlab chiqarish t –ning har qanday qiymatida optimal bo‘ladi, toki to‘g‘ri chiziq $2x_1 + 2x_2 = 22$, $\frac{2+t}{2} = \frac{13-t}{2}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa. Bu shart bajariladi agarda $t = 5,5$ – bo‘lsa, t –ning bu qiymatida AB kesmaning istalgan nuqtasi optimal rejani beradi.

Shunday qilib t –ning quyidagi oraliqdagi $t \in [0; 5,5]$ barcha qiymatlarida $x_1 = 0$, $x_2 = 11$ optimal yechim bo‘ladi va maqsadli funksiyaning maksimum qiymati

$$F_{1\max} = 143 - 11t \text{ teng.}$$

Endi t –ning qiymatini 5,5 dan katta kilib olsak, masalan $t = 6$ bo‘lganda berilgan masalaning yechimini topish uchun $(2 + 6)x_1 + (13 - 6)x_2 = k$ to‘g‘ri chiziqni tuzamiz (bu yerda $k = 0, 1, 2, \dots$).

Misol uchun $k = 56$ bo‘lganda bu to‘g‘ri chiziq quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi. $8x_1 + 7x_2 = 56$.

Bu to‘g‘ri chiziqni $\bar{C}(8; 7)$ vektor bo‘yicha siljitsak $OABCD$ ko‘pburchak bilan eng chetki $B(1; 10)$ nuqtada urinadi. Shunday qilib $t = 6$ bo‘lganda uchinchi qadamda $x_1 = 2 + 6 = 8$ so‘m, $x_2 = 13 - 6 = 7$ so‘m optimal yechim bo‘ladi va ishlab chiqarish natijasida maqsad funksiya

$$F_{\max} = 8 \cdot 1 + 7 \cdot 10 = 78 \text{ so‘mga teng.}$$

5.1-chizmadan ko‘rinib turibdiki $B(1, 10)$ nuqtaning koordinatalari $t > 5,5$ qiymatida optimal yechim bo‘ladi, toki $2x_1 + 13x_2 + (x_1 - x_2)t = k$ to‘g‘ri chiziq $6x_1 + 3x_2 = 36$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lguncha.

Bu shart bajariladi agar $\frac{2+t}{6} = \frac{13-t}{3}$ bo‘lsa, ya‘ni $t = 5,5$ – ga teng bo‘lganda t –ning bu qiymatida AB kesmaning istalgan nuqtasi optimal rejani beradi.

Shunday qilib $t \in [5,5; 8]$ oraliqda t –ning barcha qiymatlarida $x_1 = 1$; $x_2 = 10$ yechim optimal reja bo‘ladi. Shu bilan birga $t \in [5,5; 8]$ oralig‘ida AB kesmaning barcha koordinatalari optimal yechim bo‘ladi, ya‘ni $F_{2\max} = (2 + t)1 + (13 - t)10 = 132 - 9t$ ga teng.

Yuqoridagi kabi $t \in [8; 10]$ oralig‘ida $x_1 = 2$; $x_2 = 8$ optimal yechimni topamiz. (5.1 –chizmaga qarang). Demak birinchi tur mahsulotning bahosi 10 so‘mdan 12 so‘mgacha, ikkinchi tur mahsulotning bahosi 3 so‘mdan 5 so‘mgacha o‘zgaradi, birinchi tur mahsulotlar 2 birlik, ikkinchi tur mahsulotlar 12 birlik ishlab chiqariladi.

Shu bilan birga $t \in [8; 10]$ oraliqdagi qiymatlarida ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi

$$F_{3\max} = 108 - 6t \text{ ga teng.}$$

Shunday qilib masalani geometrik talqinidan quyidagi optimal yechimlarni topdik:

- 1) $t \in [0; 5,5]$ oraliqda $x_1 = 0$; $x_2 = 11$, $F_{1\max} = 143 - 11t$;
- 2) $t \in [5,5; 8]$ oraliqda $x_1 = 1$; $x_2 = 10$, $F_{2\max} = 132 - 9t$;
- 3) $t \in [8; 10]$ oraliqda $x_1 = 2$; $x_2 = 8$, $F_{3\max} = 108 - 6t$.

§ 2. Maqsad funksiyasi parametrga bog'liq bo'lgan masalalarni yechish

§ 1 da ko'rib chiqilgan (5.1) – (5.3) masalalar berilgan bo'lsin.

$[\alpha; \beta]$ oraliqda t parametrni bironta $t = t_0$ qiymatni olib, bu masalani simpleks usul – bilan yechamiz. Bu yerda ikki hol bo'lish mumkin:

- 1) $t = t_0$ nuqtada masala optimal rejaga ega bo'ladi;
- 2) $t = t_0$ masalani yechish mumkin emasligi aniqlanadi.

Faraz qilaylikki birinchi hol bajarilgan bo'lsin. U vaqtda oxirgi simpleks jadvalni $(N + 1)$ (indekis satridan) satridan $J_i(t_0) = J'_i + t_0 J''_i$ ni yozib olamiz. Bundan quydagilarni topamiz:

$$T_0 = \begin{cases} \max\left(-\frac{J'_i}{J''_i}\right), & \text{агар } J''_i > 0 \\ -\infty, & \text{агар } J''_i \leq 0. \end{cases} \quad \text{mavjud bo'lsa}$$

$$T = \begin{cases} \min\left(-\frac{J'_i}{J''_i}\right), & \text{агар } J''_i < 0 \\ \infty, & \text{агар жами } J''_i \geq 0. \end{cases} \quad \text{mavjud bo'lsa}$$

U vaqtda $T_0 \leq t \leq T$ –da berilgan masala (barcha t lar uchun) $t = t_0$ qiymatda bir xil optimal rejaga ega bo'ladi.

Аgar $t = t_0$ qiymatda masalani yechish mumkin bo'lmasa va oxirgi simpleks jadvalni $N + 1$ satrida uni yechimi $J_k = J'_k + t_0 J''_k$, ($x_{ik} < 0$, $i = \overline{1, m}$) songa teng bo'lsa: U vaqtda:

- 1) $J''_k = 0$ bo'lganda berilgan masalani istalgan t uchun yechish mumkin emas.

2) Agar $J''_k < 0$ bo'lsa, berilgan masalani $t < t_1 = -\frac{j'_k}{j''_k}$ larning barchasi uchun yechish mumkin emas.

3) Agar $J''_k > 0$ bo'lsa, berilgan masalani barcha $t > t_1$ lar uchun yechish mumkin emas.

4) Birinchi qadamda t ning o'zgarish sohasini aniqlaymiz, yuqoridagi qadamni $t \in [\alpha, \beta]$ oraliqda t -- ni boshqa qiymatini olib ya'na simpleks usulini qo'llaymiz.

5) Chekli almashtirishlar natijasida masalaning optimal rejasini topamiz yoki masalani yechish mumkin emasligini aniqlaymiz.

Masala 5.2. Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6. \end{cases} \quad (5.7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = 2x_1 + (3+4t)x_2$ maqsadli funksiyani (5.8).

$t \in (-\infty, +\infty)$ oraliqda t ning barcha qiymatlari uchun maksimum qiymatini toping.

Yechish. Berilgan oraliqda t parametrning istalgan qiymatini olishimiz mumkin.

Oldin dastlabki berilganlarga asoslanib birinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

1 – simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruv-chilar	O'zgarma koeffitsiyentlar ustuni	2	$3+4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	0	x_3	12	1	1	1	0	0
2.	0	x_4	10	1	-1	0	1	0
3.	0	x_5	6	-1	1	0	0	1
4.	indeks satri		$F=0$	-2	$-3-4t$	0	0	0

Bu jadvalga asoslanib ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

2 – simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruv-chilar	$C(t)$ O'zgarma koeffitsiyentlar ustuni	2	$3+4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	0	x_3	6	2	0	1	0	-1

2.	0	x_4	16	0	0	0	1	1
3.	$3+4t$	x_2	6	-1	1	0	0	1
4.	indeks satri		$F = 18 + 24t$	$-5 - 4t$	0	0	0	$3 + 4t$

2 – chi jadvalni.

indeks satrida manfiy mikdorlar bo'lgani uchun 3 – chi simpleks jadvalni tuzamiz.

3 – simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	$C(t)$ O'zgarmas koefitsiyentlar ustuni	2	$3 + 4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	2	x_1	3	1	0	1/2	0	-1/2
2.	0	x_4	16	0	0	0	1	1
3.	$3 + 4t$	x_2	9	0	1	1/2	0	1/2
4.	indeks satri		$F = 33 + 36t$	0	0	$2,5 + 2t$	0	$0,5 + 2t$

Bu jadvalga $t = 0$ qiymatni indeks satridagi t ning o'rniga qo'ysak $x_1 = 3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ optimal yechim bo'ladi va maqsadli funksiya $F_{1\max} = 2 \cdot 3 - (3 + 4 \cdot 0) \cdot 9 = 6 + 27 = 33$ qiymatga ega bo'ladi.

Endi F_1 ning qiymatiga asosanib t ning qiymatini topamiz.

3 – chi simpleks jadvalning indeks satr elementlari musbat bo'lishi uchun $2,5 + 2t \geq 0$ va $0,5 + 2t \geq 0$ bo'lishi kerak. Bu tengsizliklardan $t \geq -0,25$ kelib chiqadi. Demak $t \in [-0,25; +\infty)$ oraliqda t ning barcha qiymatlarida $x_1 = 3$, $x_2 = 9$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$ yechim optimal yechim bo'ladi va $F_{1\max} = 33 + 36t$ ga teng.

Ikkinchi qadamda t -- ning $-0,25$ -- dan kichik qiymatini olib 3 – chi simpleks jadvalning indeks satridan x_5 -- ni bazisli yechimlar safiga o'tkazamiz u vaqtda x_4 qo'shimcha o'zgaruvchilar safiga o'tadi. Natijada 4 – chi simpleks jadval hosil bo'ladi (3 – chi simpleks jadvalni almashtirgandan keyin).

4 – simpleks jadval

№	c_δ	Bazisli o'zgaruvchilar ustuni	$C(t)$ O'zgarmas koefitsiyentlar ustuni	2	$3 + 4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	2	x_1	11	1	0	0,5	0,5	0
2.	0	x_5	16	16	0	0	1	1

3.	$3+4t$	x_2	1	0	1	0,5	-0,5	0
4.	indeks satri		$F = 25 + 4t$	0	0	$2,5 + 2t$	-0,5	0

Bu jadvalga asosan $x_1=11$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=16$ yechim $2,5 + 2t \geq 0$ va $-0,5 - 2t \geq 0$ bo'lganda berilgan masala uchun optimal yechim bo'ladi. Demak $t \in [-1,25; -0,25]$ –da $F_{\max} = 25 + 4t$ bo'ladi. Uchinchi qadamda $t < -1,25$ bo'lganda x_3 indeks satridagi qiymati manfiy bo'ladi. Shuning uchun simpteks usulni qo'llab 4- chi jadvaldan 5 – chi jadvalga o'tamiz.

5 – simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli yechimlar	$c(t)$ O'zgarma s koeffi- siyentlar ustuni	2	$3 + 4t$	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	2	x_1	10	1	-1	0	1	0
2.	0	x_5	16	0	0	0	1	1
3.	0	x_3	2	0	2	1	-1	0
4.	indeks satri		$F = 20$	0	$-5 - 4t$	0	2	0

Bu jadvalda bazis yechim: $x_1=10$, $x_2=0$, $x_3=4$, $x_4=0$, $x_5=16$ optimal yechimlar bo'ladi va $t \in (-\infty, -1,25]$ –da $F_{3\max} = 20$;

Shunday qilib yuqoridagi jadvallardan quyidagi optimal rejani yozish mumkin:

- 1) $t \in [-\infty, -1,25]$ oraliqda $x_1=10$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=0$, $x_5=16$. $F_{\max} = 20$;
- 2) $t \in [-1,25, -0,25]$ oraliqda $x_1=11$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=16$.
 $F_{\max} = 25 + 4t$;
- 3) $t \in [-0,25, +\infty)$, oraliqda $x_1=3$, $x_2=9$, $x_3=0$, $x_4=16$, $x_5=0$.
 $F_{\max} = 33 + 36t$.

Masala 5.3. Korxonada uch tur mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulot birligiga ketadigan xomashyo me'yori va narxi, xomashyo zaxirasi quyidagi jadvalda berilgan.

Xomashyo xillari	Har bir ishlab chiqarilgan buyumga ketadigan xomashyo me'yori		
	1 tur buyum	2 tur buyum	3 tur buyum
1	18	15	12
2	6	4	8
3	5	3	3
Har bir ishlab chiqarilgan mahsulot narxi	9	10	16

(so'm)			
Hamoshyo zaxirasi	360 kg	192 kg	180 kg

Shu bilan birga ishlab chiqarilgan mahsulotlarni to'la sotish ta'min etilgan. Ishlab chiqarishni shunday rejasini tuzingki ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishga tarqatganda qiymat jihatidan maksimum daromad olinsin. Shu bilan birga narx- navoning o'zgarishini hisob olib optimal rejaning turg'unligini tahlili berilsin.

Yechish. Faraz qilaylik birinchi tur mahsulot x_1 birlik, ikkinchi tur mahsulot x_2 birlik, uchunchi tur mahsulot x_3 birlik ishlab chiqarilgan kerak bo'lsin.

U vaqtda masalaning matematik modelini ushbu ko'rinishda yozsa bo'ladi.

Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{aligned} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 &\leq 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 &\leq 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 &\leq 180. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (5.10)$$

$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$ funksiya maksimum qiymatini toping.

(5.9) tengsizliklar sistemasiga y_1, y_2, y_3 bazis o'zgaruvchilar kiritib tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltiramiz.

$$\left. \begin{aligned} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + y_1 &\leq 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + y_2 &\leq 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + y_3 &\leq 180. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

U vaqtda (5.10) maqsadli funksiya quyidagi ko'rinishni oladi

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 \quad (5.12)$$

Bunda $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ deb olsak $F = 0$ bo'ladi.

(simpleks usulga qarang).

(5.11) – (5.12) larga asoslanib birinchi simpleks jadvalni tuzamiz va simpleks jadvallarni ketma – ket almashtirib masalaning optimal yechimlarini topamiz.

1 – simpleks jadval

№	C_σ	Bazis o'zgaruvchilar	O'zgarmas koeffitsiyentlar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	0	y_1	360	18	16	12	1	0	0
2.	0	y_2	196	6	4	8	0	1	0
3.	0	y_3	180	5	3	3	0	0	1

4.	indeks satri		$F = 0$	-9	-10	-16	0	0	0
----	--------------	--	---------	----	-----	-----	---	---	---

2 – simpleks jadval

№	C_σ	Bazis o'zgaruv-chilar	O'zgarma s koeffi-siyentlar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	0	y_1	72	9	9	0	1	-3/2	0
2.	16	x_3	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3.	0	y_3	180	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4.	indeks satri		$F = 384$	3	-2	0	0	2	0

3 – simpleks jadval

№	C_σ	Bazis o'zgaruv-chilar	O'zgarma s koeffi-siyentlar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	10	x_2	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2.	16	x_3	20	1/4	0	1	-1/18	5/24	0
3.	0	y_3	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4.	indeks satri		$F = 400$	5	0	0	2/9	5/3	0

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki birinchi tur mahsulotlar $x_1=0$ dona, ikkinchi tur mahsulotlar $x_2=8$ dona, uchinchi tur mahsulotlar $x_3=20$ dona ishlab chiqariladi.

Bu reja optimal reja bo'lib daromad

$$F_{1\max} = 9 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + 16 \cdot 20 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot 96 = 80 + 320 = 400. \text{ so'mni tashkil etadi.}$$

Endi yuqoridagi optimal rejaga asoslanib ishlab chiqarilgan mahsulot turlari bahosining o'zgarish chegaralarini aniqlaymiz.

Oldin birinchi tur mahsulotdan boshlaymiz. Faraz qilaylikki birinchi tur mahsulotni qiymati $c_1 = 9$ so'm emas, ya'ni $c_1 = (9 + t_1)$ so'm bo'lsin.

Bu yerda t_1 parametr $t_1 \in (9; \infty)$ oraliqda o'zgarishi mumkin. u vaqtda yuqoridagi optimal rejaga asoslanib masalaning shartiga ko'ra $F = (9 + t_1)x_1 + 10x_2 + 16x_3$ maqsad funksiyasini maksimum qiymatini topish talab etiladi. Maqsad funksiyani bu qiymatini hisobga olib 3 – chi simpleks jadvalni shunday yozish mumkin.

4 – simpleks jadval

№	C_σ	Bazis o'zgaruv- chilar	O'zgarma s koeffi- siyentlar ustuni	$9+t_1$	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	10	x_2	8	1	1	0	1/2	-1/6	0
2.	16	x_3	20	1/4	0	1	- 1/1 8	5/2 4	0
3.	0	y_3	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4.	Indeks satri		$F = 400$	$5-t_1$	0	0	2/9	5/3	0

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=20$ yechimlar parametrik programmalashning optimal rejasi bo'ladi, agarda $5-t_1 \geq 0$ bo'lsa ($t \leq 5$). Demak birinchi tur mahsulotning qiymati $c_1 \leq 14$ so'm bo'lsa, $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=20$ optimal yechim bo'ladi. Ishlab chiqarish korxonasi birinchi tur mahsulotning qiymati 14 so'mdan oshmasligidan manfaatdor emas. Shu bilan birinchi tur mahsulotning qiymati o'zgarganda, ikkinchi va uchunchi tur mahsulotning qiymati berilgan masalaning shartlarida o'zgarmaydi deb hisoblaymiz. Xuddi shunday ikkinchi tur mahsulotlarning qiymati $8 \leq c_2 \leq 20$ oraliqda o'zgarganda masalaning dastlabki shartlarida ikkinchi tur mahsulotning qiymati $x_2=8$ so'm, uchunchi tur mahsulotning qiymati 20 so'mni tashkil etadi va bu reja optimal reja bo'ladi. Lekin shuni ham aytish kerakki ko'rsatilgan reja optimal bo'lishiga qaramasdan c_2 -ning har xil qiymatlarida maqsadli funksiya har xil qiymatlar qabul qiladi. Agar uchunchi tur mahsulotning narxi $8 \leq c_2 \leq 20$ oraliqda o'zgarganda ham ikkinchi tur mahsulotning narxi 8 so'm, uchunchi tur mahsulotni narxi 20 so'mni tashkil etadi va bu reja optimal reja bo'ladi. Shunday qilib berilgan masala maqsad funksiyaning bitta koefitsiyentiga parametr kiritib optimal rejani sezgirlik darajasini tahlil qildik.

Xuddi shunday optimal rejani sizgirlik darajasini hamma tur mahsulotlarning qiymatlari o'zgarganda ham tahlil qilish mumkin.

§ 3. Ozod hadlari parametrga bog'liq bo'lgan masalalarni yechish

Berilgan bo'lsin (5.1) – (5.3) masala. Bu masalani yechish uchun yuqoridagi kabi t parametrning qiymatini $t \in [\alpha, \beta]$ oraliqda $t=t_0$ songa tenglashtirib chiziqli programmalash usulini qo'llab masalaning yechilishini ko'rsatamiz. Bu yerda ham ikki hol bo'lishi mumkin:

- 1) $t=t_0$ qiymatda masala optimal rejaga ega;
- 2) $t=t_0$ qiymatda masalani yechish mumkin emasligi aniqlanadi.

Birinchi holda $T_0 \leq t \leq T$ oraliqda t ning barcha qiymatlarida topilgan reja optimal reja bo'ladi, bu yerda

$$T_0 = \begin{cases} \max(-j'_i / j''_i), & \text{arap } j''_i > 0, \\ -\infty, & \text{arap } j''_i \leq 0. \end{cases} \quad \text{mavjud bo'lsa,}$$

$$T = \begin{cases} \min(-j'_i / j''_i), & \text{arap } j''_i < 0, \\ \infty, & \text{arap } j''_i \geq 0. \end{cases} \quad \text{mavjud bo'lsa,}$$

J'_i va J''_i lar quyidagi $J_i = J'_i + t_0 J''_i$ optimal rejani tarkibiy qismlari bo'lib, t_0 -- ga bog'liqdir.

Agar $t = t_0$ qiymatda berilgan masalani yechish mumkin bo'lmasa, u vaqtda bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

- 1) Maqsad funksiya optimal rejalar to'plamida chegaralanmagan.
- 2) Berilgan sistema musbat yechimlarga ega emas.

Birinchi holda masala $t \in [\alpha, \beta]$ oraliqda t ning istalgan qiymatida yechimga ega emas.

Ikkinchi holda sistemaning $t \in [\alpha, \beta]$ oralikda t ning qaysi qiymatlarida birgalikda mavjud bo'lmagan qiymatlarini aniqlaymiz va uni masalaning aniqlanish sohasidan chiqarib tashlaymiz. Shundan keyin t -- ni boshqa qiymatini $t \in [\alpha, \beta]$ oraliqda olib yana simpleks usulni qo'llaymiz va chekli almashtirishlar natijasida masalaning optimal rejasini topamiz yoki masalani yechish mumkin emasligini aniqlaymiz.

Shunday qilib (5.1) – (5.3) masalani yechish uchun quyidagi jaryonlarni amalga oshiramiz:

1. t -- parametrni bironta aniq t_0 qiymatini $[\alpha, \beta]$ oraliqda olib chiziqli programmalash uslubini qo'llab masalaning optimal rejasini topamiz yoki masalani yechish mumkin emasligini ko'rsatamiz.
2. Parametr $t \in [\alpha, \beta]$ ning qaysi qiymatlarida bir xil optimal rejaga ega bo'lishini yoki yechish mumkin emasligini aniqlaymiz va t -- ni bu qiymatlarini $[\alpha, \beta]$ oralikdan chiqaramiz.
3. $[\alpha, \beta]$ oralikning qolgan qismidan t ning bironta qiymatini olib masalani optimal rejasini topamiz. Buni yechish uchun ikkilamchi simpleks usulni qo'llaymiz.
4. Chekli almashtirishlar natijasida t parametrni qaysi to'plamlar qiymatida bir xil optimal rejaga ega bo'lishini yoki bo'lmashini $[\alpha, \beta]$ oraliqda aniqlaymiz.

Masala 5.4. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 &= 10 - 6t. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

$$F = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 \quad (5.14)$$

funksiyaning $t \in (-\infty + \infty)$ oraliqqa maksimum qiymatini toping.

Yechish. $(-\infty + \infty)$ oraliqda t parametrni istalgan qiymatini olib chiziqli programmalash usullarini qo'llab masalani yechamiz. Faraz qilaylik $t = 0$ bo'lsin, u vaqtda quyidagi simpleks jadvalni tuzish mumkin.

Jadval 1 ga asosanib masalaning optimal yechimini topamiz. Birinchi jadvaldan ko'rinib turibdiki $x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0 \quad t = 0$ bo'lganda berilgan masalaning optimal rejasi bo'ladi.

1 – chi jadval

№	G_σ	Bazis o'zgaruv-chilar	x_0	3	-2	5	0	-4
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	5	x_3	$12 + t$	1	1	1	0	0
2.	0	x_4	$8 + 4t$	2	-1	0	1	0
3.	-4	x_5	$10 - t$	-2	2	0	0	1
4.			$F = 20 + 29t$	10	-1	0	0	0
1.	5	x_3	$7 + 4t$	2	0	1	0	-1/2
2.	0	x_4	$13 + t$	1	0	0	1	1/2
3.	-2	x_2	$5 - 3t$	-1	1	0	0	1/2
4.	indeks satri		$F = 25 + 26t$	9	0	0	0	1/2

Yuqoridagi yechimlar to'plami optimal yechim bo'ladi, agarda $7 + 4t \geq 0, 13 + t \geq 0, 5 - 3t \geq 0$ bo'lsa, ya'ni

- 1) $t \geq -\frac{7}{4}$
- 2) $t \geq -13$
- 3) $t \leq \frac{5}{3}$ bo'lsa.

Shunday qilib $t \in \left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right]$ oraliqda

$x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0$ bo'lsa optimal reja $F_{1\max} = 25 + 26t$ bo'ladi.

Endi $t > \frac{5}{3}$ bo'lgan qiymatlarida berilgan masala optimal yechimga egami yoki yo'qligini tekshiraylik. $t > \frac{5}{3}$ bo'lganda $5 - 3t < 0$ bo'lgani uchun $x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0$ optimal reja bo'la olmaydi.

Shuning uchun $t \geq \frac{5}{3}$ bo'lganda yangi rejaga o'tish kerak. Lekin yangi rejaga o'tish uchun oldin x_2 – bazis o'zgaruvchi joylashgan satr elementlarini tekshiramiz.

Bu satr elementlari ichida manfiy son $x'_{21} = -1$ bo'lgani uchun yangi tayanch rejaga o'tamiz (agar bu satrda manfiy son bo'lmaganda yangi tayanch rejaga o'tib bo'lmas edi).

Bu yerda x_2 o'zgaruvchini bazis o'zgaruvchilar safidan chiqarib, uning o'rniga x_1 o'zgaruvchini kiritamiz va yangi tayanch rejaga o'tamiz.

Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

2 – jadval

№	G_σ	Bazis o'zgaruv- chilar	x_0	3	-2	5	0	-4
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	5	x_3	$17 - 2t$	0	2	1	0	1/2
2.	0	x_4	$18 - 2t$	0	1	0	1	1
3.	3	x_1	$-5 + 3t$	1	-1	0	0	-1/2
4.	indeks satri		$70 - t$	0	9	0	0	5

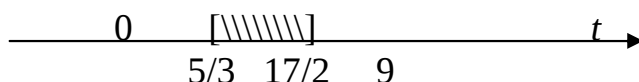
Demak 2 -- chi jadvalga asosan dastlabki masalaning kerakli rejasi

$$x_1 = -5 + 3t, x_2 = 0, x_3 = 17 - 2t, x_4 = 18 - 2t, x_5 = 0.$$

bo'ladi, agarda barcha t -- lar uchun $-5 + 3t \geq 0$, $17 - 2t \geq 0$, $18 - 2t \geq 0$ bo'lsa.

Bu tengsizliklarni yechsak $t \geq \frac{5}{3}$, $t \leq \frac{17}{2}$, $t \leq 9$ hosil bo'ladi. Shunday qilib

$t \in \left[\frac{5}{3}, \frac{17}{2} \right]$ oraliqda maqsad funksiyasi



$F_{\max} = 70 - t$ dastlabki masalani optimal rejasi bo'ladi.

Agar $t > \frac{17}{2}$ bo'lsa, $x_1 = -5 + 3t$, $x_3 = 17 - 2t$,

$x_2 = 0$, $x_3 = 18 - 2t$, $x_5 = 0$ optimal reja bo'lmaydi, chunki optimal reja tarkibida $x_3 = 17 - 2t$ manfiy songa teng. Birinchi jadvalning x_{1j} satrida manfiy elementlar

bo'lmagani uchun $t > \frac{17}{2}$ bo'lganda masalani yechish mumkin emas.

Endi 1 -- chi jadvaldan $t < -\frac{7}{4}$ bo'lganda masalaning yechimini tekshiramiz.

Bu holda $x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0$ optimal reja bo'la olmaydi, chunki $x_3 = 7 + 4t$ manfiy qiymatga ega.

Shuning uchun t parametrning bu qiymatlarida optimal reja mavjudligini tekshirish uchun birinchi jadvaldan x_3 -ni bazis o'zgaruvchilar safidan chiqarib uning o'rniga x_5 -- ni kiritamiz. (x_3 -turgan satrda $x'_{15} - \frac{1}{2}$ manfiy son bo'lgani uchun bu jarayonni bajarish mumkin).

Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

3 – jadval

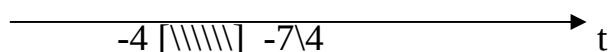
№	G_σ	Bazis o'zgaruv-Chilar	x_0	3	-2	5	0	-4
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	-4	x_5	$-14 - 8t$	-4	0	-2	0	1
2.	0	x_4	$20 + 5t$	3	0	1	1	0
3.	2	x_1	$12 + t$	1	1	1	0	0
4.	Indeks satri		$F = 32 + 30t$	11	0	1	0	0

Uchinchi jadvalga asosan

$x_1 = 12 + t, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 20 + 5t, x_5 = -14 - 8t$ va t parametrning quyidagi shartlarni $-14 - 8t \geq 0, 20 + 5t \geq 0, 12 + t \geq 0$ qanoatlantiruvchi barcha

qiymatlarida, ya'ni

$$\begin{aligned} t_1 &\leq -\frac{7}{4} \\ t_2 &\geq -4 \\ t_3 &\geq -12 \end{aligned} \text{ bo'lganda}$$



optimal reja bo'ladi.

Shunday qilib $t \in [-4; -\frac{7}{4}]$ oraliqda berilgan masalaning yechimlari

$x_1 = 0, x_2 = 12 + t, x_3 = 0, x_4 = 20 + 5t, x_5 = -14 - 8t$ bo'ladi va $F_{\max} = 32 + 30t$

Uchinchi jadvaldan ko'rinib turibdiki $t < -4$ bo'lganda berilgan masala yechimga ega emas, chunki x_4 element joylashgan satrda manfiy elementlar yo'q.

Demak,

1. agar $t \in (-\infty; -4]$ bo'lsa masala optimal yechimga ega emas;

2. agar $t \in [-4; -\frac{7}{4}]$ bo'lsa masalaning optimal yechimlari

$x_1 = 0, x_2 = 12 + t, x_3 = 0, x_4 = 20 + 5t, x_5 = -14 - 8t$ bo'lib, $F_{2\max} = 32 + 30t$ ga teng.

3. agar $t \in [-7; \frac{5}{3}]$ bo'lsa masalaning optimal yechimlari $x_1 = 0, x_2 = 5 - 3t, x_3 = 7 + 4t, x_4 = 13 + t, x_5 = 0$ bo'lib, $F_{0\max} = 25 + 26t$ ga teng.

4. agar $t \in [\frac{5}{3}; \frac{17}{2}]$ bo'lsa masalaning optimal yechimlari $x_1 = -5 + 3t, x_2 = 0, x_3 = 17 - 2t, x_4 = 18 - 2t, x_5 = 0$ bo'lib, $F_{1\max} = 70 - t$ ga teng.

5. agar $t \in [\frac{17}{2}, \infty)$ bo'lsa masalani yechish mumkin emas.

Masala 5.5. Korxonada uch tur mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Korxona birinchi xil xomashyodan 180 t, ikkinchi xil xomashyodan 210 t va uchunchi xil xomashyodan 244 t ta'min etilgan.

Har bir ishlab chiqarilgan mahsulot birligiga ketadigan xomashyo me'yori va narxi quyidagi jadvalda berilgan.

4 – chi jadval

Xomashyo xillari	Har bir ishlab chiqarilgan buyumga ketadigan xomashyo me'yori		
	1 tur buyum	2 tur buyum	3 tur buyum
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotning narxi (so'm)	10	14	12

Ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzingki ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishga tarqatganda qiymat jihatidan maksimum daromad olinsin.

Shu bilan birga xomashyo miqdorini hisobga olib, optimal reja turg'unligining tahlili berilsin.

Yechish. Faraz qilaylik birinchi tur mahsulot x_1 birlik, ikkinchi tur mahsulot x_2 birlik, uchunchi tur mahsulot x_3 birlik ishlab chiqarilsin u vaqtda masalaning matematik modelini ushbu ko'rinishda yozish mumkin.

Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 244. \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \quad (5.16)$$

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \quad (5.17)$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Masalani simpleks usulni qo'llab yechamiz.

Yechish jarayonining hammasini bitta jadval ko'rinishida yozamiz.

5 – chi jadval

№	G_{σ}	Bazis o'zgaruv -chilar	x_0	10	14	12	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.	0	x_4	180	4	2	1	1	0	0
2.	0	x_5	210	3	1	3	0	1	0
3.	0	x_6	244	1	2	5	0	0	1
4.	Indeks satri		$F_1 = 0$	-10	-14	-12	0	0	0
1.	14	x_2	90	2	1	1/2	1/2	0	0
2.	0	x_5	120	1	0	5/2	-1/2	1	0
3.	0	x_6	64	-3	0	4	-1	0	1
4.	Indeks satri		$F_2 = 1260$	18	0	-5	7	0	0
1.	14	x_2	82	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
2.	0	x_5	80	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
3.	12	x_3	16	-3/4	0	1	-1/4	0	1/4
4.	Indeks satri		1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Bu jadvalga asosan optimal yechim

$x_1 = 0, x_2 = 82, x_3 = 16, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$ – ga teng.

Bu yechimni (5.7) qo'ysak quyidagi hosil bo'ladi

$$F = 10 \cdot 0 + 14 \cdot 82 + 12 \cdot 16 = 1340 \text{ so'm.}$$

Demak bu rejaga asosan daromad $F_{\max} = 1340$ so'mni tashkil etadi.

Endi bu rejaning turg'unligi tahlilini ko'rsatamiz. Buning uchun xom ashyo xillarining (hajmlarining) miqdorlarini o'zgartirib uni maqsad funksiyaga ta'sirini ko'rib chiqamiz.

Oldin birinchi xil xom ashyo hajmini t_1 tonnaga o'zgartiramiz, yani birinchi xil xom ashyo $180 + t_1$ tonna bo'lsin. Bu yerda t – parametr. t_1 --parametr umum holda $(-\infty, +\infty)$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin u vaqtda masalaning sharti quyidagicha bo'ladi. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 180 + t_1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 244. \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \quad (5.19)$$

$$F = (x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \quad (5.20)$$

(5.20) -- funksiyaning maksimum qiymatini shunday topingki $x_1 = 0, x_2 = 82, x_3 = 16$ optimal yechim bo'lsin. Buning uchun (5.18) – (5.20) parametrik programmalash masalasini yechamiz.

Beshinchi jadvalning oxirgi qismini quyidagicha yozib olamiz.

6 – chi simpleks jadval

№	G_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	x_0	10	14	12	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.	14	x_2	b'_2	19/8	1	0	5/8	0	-1/8
2.	0	x_5	b'_5	23/8	0	0	1/8	1	-5/8
3.	12	x_3	b'_3	-3/4	0	1	1/4	0	1/4
4.	indeks satri		F'_0	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Oltinchi jadval 5 -- chi jadvaldan x_0 vektor joylashgan ustun elementlari bilan farq qiladi. x_0 vektorning tarkibiy qismlarini b'_2, b'_5, b'_3 oxirgi jadvaldagi bazisli vektorlar x_2, x_5, x_3 bo'yicha yoyib quyidagicha yozish mumkin

$$B^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{pmatrix}, \quad (5.21)$$

bu yerda B^{-1} matritsa B matritsaga teskari matritsa bo'lib x_2, x_5, x_3 vektorlarning dastlabki tarkibiy qismlaridan iborat.

Matritsa B^{-1} 5 -- chi simpleks jadvalning X_4, X_5, X_6 vektorlar joylashgan ustun elementlaridan iborat, x_0 vektor esa 5 -- chi jadvalning dastlabki x_0 jadvalida joylashgan ustun elementlaridan iborat.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 1 & -5/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 180 + t_1 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix}$$

B^{-1} va X_0 matritsalarini (5.21) formulaga qo'ysak quyidagi hosil bo'ladi.

$$X'_0 = \begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 1 & -5/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 + t_1 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 + 5/8t_1 \\ 80 + 1/8t_1 \\ 16 - 1/4t_1 \end{pmatrix}.$$

Yuqorida topilgan X'_0 vektor (5.15) – (5.17) masalaning optimal yechimi bo'ladi.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 82 + 5/8t_1, \quad x_3 = 16 - 1/4t_1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 80 + 1/8t_1, \quad x_6 = 0.$$

$$\text{va } F_{\max} = 10 \cdot 0 + (82 + 5/8t_1) \cdot 14 + (16 - 1/4t_1) \cdot 12 = 1340 + 5\frac{3}{4}t_1.$$

Demak yuqoridagi yechim bo'lsa musbat t parametrlarning barcha qiymatlarida 7 optimal reja bo'ladi.

$t_1 = 0$ bo'lsa $F_{\max} = 1340$ so'm bo'lib 5 -- chi simpleks jadvalning maqsad funksiyaning miqdori qiymatiga to'g'ri keladi. Bu shuni ko'rsatadiki t_1 parametrlarning o'zgarishi x_i optimal yechimga ta'sir qiladi. Misol uchun $t_1 = 16$ ga teng deb olsak, ishlab chiqarishning optimal rejasi $x_1 = 0$, $x_2 = 92$, $x_3 = 12$ ga teng bo'ladi va ikkinchi tur buyum 92 birlik, uchinchi tur buyum 12 birlikga teng bo'ladi.

Bu holda

$$F_{\max} = 92 \cdot 14 + 12 \cdot 12 = 1432 \text{ so'mni tashkil qiladi.}$$

Agar ikkinchi xil xomashyo miqdorini eng ko'pi bilan 80 tonnaga kamaytirsak u vaqtda reja optimal reja bo'ladi, va ikkinchi tur mahsulotdan 82 birlik, uchinchi tur mahsulotdan 16 birlik ishlab chiqariladi.

Bu holda $F_{\max} = 14 \cdot 82 + 12 \cdot 16 = 1148$ so'mni tashkil etadi. Ko'rsatish mumkinki uchunchi xil xomashyo miqdorini o'zgartirsak $x_1 = 0$, $x_2 = 82$, $x_3 = 16$ tayanch yechim o'zgaradi. Yani bu yechim turgun yechim emas.

Shunday qilib (5.15) – (5.17) masalaning optimal rejasi hamda xomashyolarning hajmini o'zgartirganda sezgirlik tahlilini ko'rsatdik. Xuddi shunday optimal reja sezgirlik tahlilini uch xil xomashyo miqdorini bir vaqtning o'zida o'zgartirganda ham ko'rsatish mumkin

§ 4. Ozod hadlar va maqsad funksiya parametrga bog'liq bo'lgan masalalarni yechish

§ 1da ko'rib chiqqan (5.1) – (5.3) masalalar berilgan bo'lsin. § 1 -- § 3 paragraflarda yechgan parametrik programmalash masalalarini yechish usulidan foydalanib quyidagi masalani yechamiz.

Masala 5.6. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 24 - 12t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= -18 + 10t. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, t \in (-\infty, +\infty).$$

$$F = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (8 - 5t)x_1 + (9 - 3t)x_2 + (-3 + 5t)x_3 - (2 + 4t)x_4 \rightarrow \max$$

qiymatini toping.

Yechish. t parametrlarning qiymatini ixtiyoriy tanlab olamiz. Faraz qilaylikki $t = 2$ bo'lsin. Dastlabki berilganlarga asosan masalani simpleks usul bilan yechamiz.

1 – chi simpleks jadval

No	G_δ	Bazis o'zgaruv-chilar	x_0	$8 - 5t$	$9 - 3t$	$-3 + 5t$	$-2 - 4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4

1.	$-3+5t$	x_3	$24+2t$	1	-1	1	0
2.	$-2-4t$	x_4	$-18+10t$	-1	2	0	1
4.	Indeks satri		$F=0$	$-8+5t$	$-9+3t$	$3-5t$	$2+4t$

2 – chi simpleks jadval

№	G_δ	Bazis o'zgaruv-chilar	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-2t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$-3+5t$	x_3	$24+2t$	1	-1	1	0
2.	$-2-4t$	x_4	$-18+10t$	-1	2	0	1
4.	Indeks satri		$F=-36+208t-100t^2$	$-11+10t$	$-6t-2t$	0	$2+4t$

3 – chi simpleks jadval

№	G_δ	Bazis o'zgaruv-chilar	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3+5t$	$-2-4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$-3+5t$	x_3	$15-7t$	1/2	0	1	1/2
2.	$9-3t$	x_2	$-9+5t$	-1/2	1	0	1/2
4.	Indeks satri		$F_{\max}=-126+168t-50t^2$	$9t-14$	0	0	$5+5t$

Uchinchi simpleks jadvaldan ko'rinib turibdiki $t=2$ bo'lganda $x_1=0$, $x_2=-9+5t$, $x_3=15-7t$, $x_4=0$ berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

Bu yechim $9t-14 \geq 0$ bo'lganda, ya'ni $t \geq \frac{14}{9}$ qiymatlarda ham musbat yechim bo'ladi. Shunday qilib $t \in [9/5, 15/7]$ oraliqda t -ning barcha qiymatlarida masalaning optimal yechimlari $x_1=0$, $x_2=15-7t$, $x_3=-9+5t$, $x_4=0$ bo'lganda $F_{\max}=-126+168t-50t^2$ ga teng.

Agar $t < \frac{9}{5}$ bo'lsa, ya'ni $-9+5t < 0$ bo'lsa yuqorida ko'rsatilgan yechim optimal reja bo'lmaydi.

Shuning uchun $t < \frac{9}{5}$ bo'lganda yangi simpleks jadval tuzish mumkin, chunki x_2 element joylashgan satrda (3 -- chi simpleks jadval) $-1/2$ manfiy son mavjud. $x'_{21}=-1/2$ sonni kalitli son deb tanlab olib yangi simpleks jadval tuzamiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

4 – chi simpleks jadval

№	G_δ	Bazis o'zgaruv-chilar	x_0	$8 - 5t$	$9 - 3t$	$-3 + 5t$	$-2 - 4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$-3 + 5t$	x_3	$6 - 2t$	0	1	1	1
2.	$8 - 5t$	x_1	$18 - 10t$	1	-2	0	-1
4.	Indeks satri		$F = 126 - 134t + 40t^2$	0	$-28 + 18t$	0	$14t - 9$

To'rtinchi jadvaldan ko'rinib turibdiki $6 - 2t \geq 0$ va $18 - 10t \geq 0$ bo'lganda (yuqorida $t \geq \frac{14}{9}$ qimatini ko'rgan edik) $t \in [14/9, 9/5]$ oraliqdagi qiymatlarida

$x_1 = 18 - 10t$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6 - 2t$, $x_4 = 0$ masalaning optimal yechimi bo'lib, $F_{\max} = 126 - 134t + 40t^2$ ga teng.

Endi $t > \frac{15}{7}$ bo'lganda masalani yechimlarining tekshiraylik. $t > \frac{15}{7}$ bo'lsa, $x_1 = 0$, $x_2 = -9 + 5t$, $x_3 = 15 - 7t$, $x_4 = 0$ yechim optimal reja bo'la olmaydi, chunki $15 - 7t < 0$. Shu bilan birga x_3 turgan satrda manfiy son yo'q bo'lgani uchun masalani yechish mumkin emas.

Shunday qilib biz masalani $t \in [14/9, +\infty)$ oraliqda yechdik. Masalani to'la yechish navbati $t \in [-\infty, 14/9)$ keldi. Agar $t < \frac{14}{9}$ bo'lsa $-28 + 18t < 0$ bo'ladi. Shuning uchun yangi simpleks jadvalga o'tamiz.

5 – chi simpleks jadval.

№	G_δ	Bazis o'zgaruv-chilar	x_0	$8 - 5t$	$9 - 3t$	$-3 + 5t$	$-2 - 4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	$9 - 3t$	x_2	$6 - 2t$	0	1	1	1
2.	$8 - 5t$	x_1	$30 - 14t$	1	0	2	1
3		$F = 294 - 298t + 76t^2$		0	0	$28 - 18t$	$19 - 4t$

Beshinchi simpleks jadvaldan ko'rinib turibdiki $t \in [-\infty, 14/9)$ oraliqdagi t - ning barcha qiymatlarida $x_1 = 30 - 14t$, $x_2 = 6 - 2t$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ optimal yechim bo'lib $F_{\max} = 294 - 298t + 76t^2$ ga teng.

Demak:

1. Agar $t \in [-\infty, 14/9]$ bo'lsa, masala optimal rejaga ega bo'lib $x_1 = 30 - 14t$, $x_2 = 6 - 2t$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. va

$$F_{2\max} = 294 - 298t + 76t^2. \text{ ga teng}$$

2. Agar $t \in [14/9, 9/5]$ masala bo'lsa, optimal rejaga ega bo'lib $x_1 = 18 - 10t, x_2 = 0, x_3 = 6 - 9t, x_4 = 0$. va

$$F_{1\max} = 126 - 134t + 40t^2 \text{ teng}$$

3. Agar $t \in [9/5, 15/7]$ masala optimal rejaga ega bo'lib $x_1 = 0, x_2 = -9 + 5t, x_3 = 15 - 7t, x_4 = 0$.

$$F_{0\max} = -126 + 168t - 50t^2. \text{ ga teng}$$

Topshiriqlar

Quyidagi 5.7 – 5.14 parametrik programmalash masalalarini $t \in (-\infty, +\infty)$ oraliqda optimal rejasini toping.

5.7.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$$

$$F = (t-1)x_1 + (4-t)x_2 + (t-2)x_3 + (2-t)x_4 + (2t-3)x_5 \rightarrow \max.$$

5.8.

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 20, \\ -1/2x_1 + 2x_2 + x_5 &= 24. \end{aligned} \right\}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$$

$$F = 6x_1 - (4+t)x_2 + (12-t)x_4 \rightarrow \max.$$

5.9.

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 - 2t, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 + t, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 &= 8 - 3t. \end{aligned} \right\}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$$

$$F = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

5.10

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 - 2t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 2 + t, \\ 3x_1 + x_5 &= 3 - t. \end{aligned} \right\}$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}.$$

$$F = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max.$$

5.11.

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 6 + 8t, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 &= -10 - 12t. \end{aligned} \right\}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

$$F = (2 - 3t)x_1 - 4tx_2 + (2 + 6t)x_4 \rightarrow \max.$$

5.12.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 + 6t, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 &= 9 - 12t, \\ x_1 - x_2 + x_5 &= 8 + 9t. \end{aligned} \right\}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

$$F = (2 + t)x_1 - (3 - t)x_2 + 3(2 + 4t)x_5 \rightarrow \max.$$

5.13. Korxonada uch tur buyum ishlab chiqarish uchun uch xil xom ashyo ishlatiladi. Birinchi tur buyum ishlab chiqarish uchun birinchi xil xom ashyodan $a_1 = 1$ kg, ikkinchi xil xom ashyodan $a_2 = 1$ kg, uchinchi xil xom ashyodan $a_3 = 2$ kg ishlatiladi. Ikkinchi tur buyum ishlab chiqarish uchun birinchi xil xom ashyodan $b_1 = 2$ kg, ikkinchi xil xom ashyodan $b_2 = 0$ kg, uchinchi xil xom ashyodan $b_3 = 1$ kg ishlatiladi. Uchunchi tur buyum ishlab chiqarish uchun birinchi xil xom ashyodan $c_1 = 0$ kg, ikkinchi xil xom ashyodan $c_2 = 1$ kg, uchinchi xil xom ashyodan $c_3 = 2$ kg ishlatiladi.

Korxona birinchi xil xom ashyodan eng ko‘pi bilan 20 kg, ikkinchi xil xom ashyodan eng ko‘pi bilan 42 kg uchinchi xil xom ashyodan eng ko‘pi bilan 36 kg ta‘min etilgan. Shu bilan birga ishlab chiqarilgan buyumlarning narxi t – parametrga bog‘liq va mos ravishda quyidagilarga teng: $2 + t, 12 - t, 6 + t$ ($t \in [0, 10]$). t – parametarning $t \in [0, 10]$ oralig‘ida shunday qiymatlarini topinki ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishga tarqatganda qiymat jihatidan maksimum daromad olingan.

5.14. Korxonada uch tur buyum ishlab chiqarish uchun turli xil xom ashyo ishlatiladi. Xom ashyolardan buyumlarni ishlab chiqarish me‘yori quyidagi A matritsada berilgan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Xom ashyo zaxirasi va har bir ishlab chiqarilgan mahsulot birligidan sotish natijasida tushadigan foyda quyidagi jadvalda berilgan.

Xom ashyo xillari	Xom ashyo zaxirasi	Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotga ketadigan xom ashyo me'yor		
		1 tur	2 tur	3 tur
1 xil	200	x_{11}	x_{12}	x_{13}
2 xil	120	x_{21}	x_{22}	x_{23}
3 xil	180	x_{31}	x_{32}	x_{33}
4 xil	138	x_{41}	x_{42}	x_{44}
Har bir ishlab chiqaril-gan mahsulotdan keladi-gan daromad (so'm hisobi-da)		25	28	27

Masalaning bu shartida ishlab chiqarilgan mahsulotlarni to'la sotish ta'min etilgan. Ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzingki, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishga tarqatganda qiymat jihatidan maksimum daromad olinsin. Shu bilan birga daromad va xom ashyoni o'zgarishini hisobga olib optimal rejaning tahlili berilsin.

VI. Bob. Dinamik programmalash

§ 1. Dinamik programmalash masalalarining umumiy xususiyatlari

Chiziqli programmalash masalalarini yechganda vaqtga bog'liq bo'lmagan statik va iqtisodiy jarayonlarni ko'rgan edik. Masalalarning optimal yechimlarini topganda bu yechimlar vaqtga bog'liq bo'lmagan bir bosqichli optimal yechimlardan iborat deb hisobladik. Shuning uchun vaqtga bog'liq bo'lmagan bunday masalalarni bir bosqichli masalalar deb ataymiz. Lekin ko'p iqtisodiy masalalarni yechish jarayonida bu masalalar o'z – o'zidan bir nechta bosqichlarga bo'lingan bo'ladi. Shu bilan birga iqtisodiyotni rivojlanish jarayoni ayniqsa bozor iqtisodiyotiga o'tish davrida ko'p omillarga bog'liqdir. Shuning uchun bunday masalalarning yechimi yagona bo'lmaydi. Balki har bir bosqichga mos keluvchi yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi. Bu yechimlar to'plamidan eng maqbullini tanlab olishga optimal strategiya deyiladi.

Dinamik programmalash iqtisodiyotda uchraydigan ko'p masalalarni bosqichma - bosqich yechish uchun ishlatiladi.

Bunga misol sifatida quyidagi masalalar kiradi: Yuklarni optimal joylashtirish; eng qisqa yo'lni aniqlash, tezlikka bog'liq bo'lgan

masalalarda optimal tezlikni topish; sarmoyalarni optimal joylashtirish; optimal rejalashtirish masalalari.

Demak dinamik programmalash quyidagi xususiyatga ega bo'lgan masalalarni yechadi;

1. Ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonning birdan bir yagona yechimini emas, har bir qadamga mos keluvchi va asosiy manfaatni ko'zlovchi yechimlar to'plamini topishga yordam beradi;
2. Dinamik programmalash uslub va usullari yordamida yechilayotgan ko'p bosqichli masalaning ma'lum bir bosqichi uchun topilgan yechimi undan oldingi bosqichlarda topilgan yechimga bog'liq bo'lmaydi. Unda faqat shu bosqichni ifodalovchi omillar nazarga olinadi;
3. Dinamik programmalash yordamida ko'p bosqichli masalani yechish jarayonida har bir bosqichida asosiy maqsadni ko'zlovchi yechimni aniqlash kerak, yana yechimlar to'plami orasida asosiy maqsadga erishishga maksimal ulush qo'shuvchi yechimni tanlab olishga to'g'ri keladi.

Dinamik programmalashning asosiy usul va uslublari amerikalik matematik R. Bellman va uning shogirdlari tomonidan asoslangan bo'lib optimallik prinsipiga amal qiladi. Endi dinamik programmalash uslub va usullari bilan yechiladigan ba'zi iqtisodiy masalalarni ko'rib chiqamiz.

§ 2. Yuklarni optimal joylashtirish haqidagi masalalar.

Masala 6.1. Muzxonaga N har xil xom ashyolarni joylashtirish kerak. Muzxonaga jami W tonna xom ashyoni joylashtirish mumkin. Xom ashyolar to'g'risida quyidagi ma'lumotlar mavjud:

$P_i - i$ – chi xil xom ashyoning og'irligi;

$V_i - i$ – chi xil xom ashyoning bahosi (narxi);

X_i – Muzxonaga joylashtiriladigan i – chi xil xom ashyoning soni.

Muzxonaga xom ashyolarni shunday joylashtiringki maksimum qiymatga ega bo'lgan xom ashyolar joylashsin.

Demak bu masalani umumiy holda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

Quyidagi shartlarda

$$1. \sum_{i=1}^N X_i P_i \leq W ;$$

2. $X_i = 0, 1, 2, 3, \dots$ (konteynerlarga joylashgan xom ashyolar soni yoki yashiklar soni);

3. $f(W) = \sum_{i=1}^N X_i V_i$ – ning maksimum qiymatini toping.

Masalada X_i – xom ashyolar butun qismlardan iborat.

Agar 2-chi shart bo‘lmaganda edi u vaqtda masalani chiziqli programmalash masalasi ko‘rinishda yechish mumkin edi. Shuning uchun masalani quyidagi ko‘rinishda yechamiz.

1. Oldin muzxonaga birinchi xil xom ashyolarni joylashtiramiz. Joylashtirilgan yuklarning qiymatini $f_1(W)$ deb belgilasak

$f_1(W) = \max\{X_1 W\}$, (6.1) agarda quyidagi shartlar bajarilsa.

1. $X_1 P_1 \leq W$ (6.2)

2. $X_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$

(6.2) tengsizlikdan $X_1 \leq \frac{W}{P_1}$ bo‘lgani uchun $f_1(W) = \left\{ \frac{W}{P_1} \right\} V_1$ bo‘ladi.

Bu funksiyaning grafigi 6.1-chizmada ko‘rsatilgan. Shunday qilib muzxona birinchi xil xom ashyo bilan to‘ldirilganda $f_1(W)$ uning qiymatini topdik. Endi muzxonaga x_1 va x_2 xil xom ashyolar joylashtirilganda $f_2(W)$ ning maksimum qiymatini topaylik.

Agar ikkinchi xil xom ashyodan x_2 dona joylashtirilgan bo‘lsa, u vaqtda muzxonaning hajmini hisobga olsak birinchi xil xom ashyodan $W - X_2 P_2$ tonna olish mumkin va uning qiymati $f_1(W - X_2 P_2)$ so‘mga teng bo‘ladi. Umumiy qiymat esa $X_2 V_2 + f_1(W - X_2 P_2)$ ga teng bo‘ladi. Bularga asoslanib faqat x_2 -- ning qiymatini topsak bas. Shunday qilib muzxonaga joylashtirilgan birinchi va ikkinchi xil xom ashyolarning maksimum qiymati quyidagicha bo‘ladi

$$f_2(W) = \max\{X_2 V_2 + f_1(W - X_2 P_2)\}.$$

$$0 < X_2 < \left\{ \frac{W}{P_2} \right\}$$

Ketma – ket yuqoridagi usulni qo‘llasak

$$f_N(W) = \max\{X_N V_N + f_{N-1}(W - X_N P_N)\}.$$

$$0 < X_N < \left\{ \frac{W}{P_N} \right\}$$

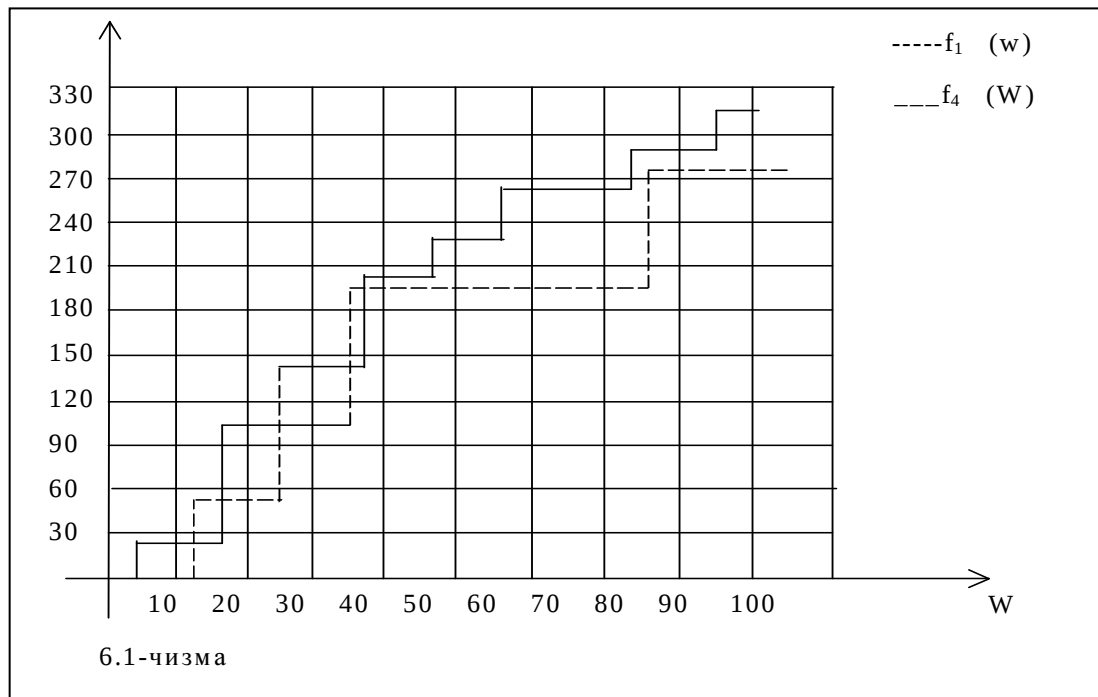
teng bo‘ladi.

Bu yerda $f_N(W)$ – muzxonaga joylashtirilgan N – xil yuklarning maksimum narxi;

$X_N V_n - N$ – chi xil joylashtirilgan mahsulotning qiymati;

$f_{N-1}(W - X_N P_N)$ – umumiy og‘irligi $W - X_N P_N$ tonnadan ko‘p bo‘lmaydigan $(N - 1)$ --xil yuklarning maksimum qiymati.

Bu yerda $\left\{ \frac{W}{P_i} \right\}$ soni $\frac{W}{P_i}$ dan oshmaydigan butun son.



– ket

$f_1(W), f_2(W), \dots, f_N(W)$ funksiyalarning qiymatlarini topish mumkin.

Masala 6.2. Muzxonasini umumiy hajmi $v = 83 m^3$ bo‘lgan firmaga hajmlari $p_1 = 24 m^3$, $p_2 = 22 m^3$, $p_3 = 16 m^3$, $p_4 = 10 m^3$ bo‘lgan konteynerlar bilan yuk olib kelindi.

Bu yuklarning har bir birining narxi mos ravishda $v_1 = 96$ ming so‘m, $v_2 = 85$ so‘m, $v_3 = 50$ so‘m, va $v_4 = 20$ so‘mni tashkil etadi. Konteynerlar ochmasdan saqlanishi kerak. Muzxonaga konteynerlarni shunday joylashtirish kerakki, joylashgan yuklar maksimum qiymatga ega bo‘lsin.

Yechish. Masalani yechish uchun $f_N(W)$ ni N —ning har xil qiymatida hisoblashimiz kerak:

$f_4(83)$ ni hisoblash uchun $f_3(83 - x_4 p_4)$ ni topish kerak. Shuning uchun pog‘onama pog‘ona W ning har qanday qiymatlarida har xil yuklarni muzxonaga bittama - bitta hisoblab joylashtiramiz.

Natijada quyidagi jadval hosil bo‘ladi.

6.1. jadval

W	$f_1(W)$ – funk- siya	x_1
---	--------------------------	-------

0-23	0	0
24-47	96	1
48-71	192	2
72-87	288	3

Birinchi xil yukni joylashtirish uchun (x_1) 0-23 tonnaga x_1 yo‘q. 24-47 tonnagacha yuklarni joylashtirsak $x_1=1$ dona bo‘ladi va uning qiymati 96 ming so‘mni tashkil etadi 48-71 tonnagacha yuklarni joylashtirsak $x_1=2$ dona bo‘ladi va uning qiymati 192 ming so‘mni tashkil etadi. 72-87 tonnagacha yuklarni joylashtirsak $x_1=3$ dona bo‘ladi va uning qiymati $f = 288$ ming so‘mni tashkil etadi.

Endi $f_2(W)$, $f_3(W)$ va $f_4(W)$ funksiyalar uchun jadvallar tuzamiz:

6.2. jadval

W	$f_2(W)$ – funksiya	x_2
0-21	0	0
22-23	85	1
24-45	96	0
46-47	181	1
48-69	192	0
70-71	277	1
72-87	288	0

6.3. jadval

W	$f_3(W)$ – funksiya	x_3
0-15	0	0
16-21	50	1
22-23	85	0
24-37	96	0
38-39	135	1
40-45	146	1
46-47	181	0
48-63	192	0
64-69	242	1
70-71	277	0
72-87	288	0

6.4. jadval

W	$f_4(W)$ – funksiya	x_4
0-9	0	0

10-15	20	1
16-21	50	0
22-23	85	0
24-33	96	0
34-37	116	1
38-39	135	0
40-45	146	0
46-47	181	0
48-57	192	0
58-63	212	1
64-69	242	0
70-71	277	0
72-81	288	0
81-87	308	1

Quyidagi

$$f_2(W) = \max \{ X_2 V_2 + f_1(W - X_2 P_2) \}$$

$$0 < X_1 < \left\{ \frac{W}{P_1} \right\}.$$

tenglikdan foydalanib $f_2(W)$ funksiyani hisoblanish yo'lini ko'rsatamiz. x_2 -- miqdor 0,1,2,3 qiymatlar qabul qilishi mumkin bo'lgani uchun 6.1. – jadvaldan foydalanib $\{X_2 \cdot 85 + f_1(70 - x_2 \cdot 22)\} = f_2(W)$ funksiyani hisoblaymiz.

$$x_2 = 0; \quad f_1(70) = 192. \quad f_2(W) = 192;$$

$$x_2 = 1; \quad f_2(70) = 85 + f_1(48) = 277;$$

$$x_2 = 2; \quad f_2(70) = 2 \cdot 85 + f_1(26) = 266;$$

$$x_3 = 3; \quad f_2(70) = 3 \cdot 85 + f_1(4) = 255;$$

Hisoblash shuni ko'rsatdiki, $x_2 = 1$ bo'lganda $f_2(70) = 277$ eng katta qiymatga ega. Xuddi yuqoridagi kabi $f_3(W)$ va $f_4(W)$ funksiyalarning qiymatini hisoblab 6.3; 6.4; jadvallarni tuzish mumkin.

6.4 jadvalga asosan $f_4(83) = 308$ ming so'mga teng. Demak 4-chi xil konneynirdan $x_4 = 1$ donasini muz xonaga joylashtirish mumkin.

$P_4 = 10$ tonna bo'lgani uchun muzxonaga yana $83 - 10 = 73$ tonna yuk joylashtirish talab etiladi. 6.3 va 6.2 jadvallardan ko'rinib turibdiki $W = 73$ bo'lganda yukning soni $x_3 = 0$; $x_1 = 0$ donaga teng. 6.1 jadvaldan ko'rinadiki $x_3 = 3$ dona konteyner joylashtirish mumkin. Demak

$$f_4 \max = 96 \cdot x_1 + 20 \cdot x_4 = 96 \cdot 3 + 20 \cdot 1 = 288 + 20 = 308 \text{ ming so'm.}$$

§ 3. Dinamik programmalash usullarining iqtisodiy masalalarni yechishdagi tahlili. Optimal rejalashtirish masalasi

Faraz qilaylik viloyatda n – ta korxonani o‘z ichiga olgan sanoat birlashmasining T – yillik rejasini tuzish masalasi o‘rtaga qo‘yilgan bo‘lsin. Rejalashtirilayotgan T – davrning boshida birlashmaga K_0 miqdorda mablag‘ ajratilgan. Bu mablag‘ n – ta korxonaga taqsimlanadi. Taqsimlanayotgan mablag‘ korxonalarda to‘la yoki qisman ishlatilishi mumkin va shunga qarab ma‘lum miqdorda foyda (daromad) olish mumkin. Keyingi qadamlarda mablag‘lar korxonalararo qayta taqsimlanishi mumkin. Natijada quyidagi masala hosil bo‘ladi. Korxonalararo K mablag‘ni qadamba – qadam shunday taqsimlash va qayta taqsimlash kerakki birlashmaning T yil davomida olgan daromadlar yig‘indisi maksimum qiymatga ega bo‘lsin.

Har bir ishlab chiqarish boshqariluvchi jarayon hisoblanadi va bu jarayon ajratilayotgan xom ashyo, mablag‘, uskunularning yangilanish kabi muammolarga bog‘liqdir. Bu muammolarni hal qilishni qadamba - qadam tashkil qilishga boshqarish deyiladi.

Demak t bosqichdagi boshqarish

$$U^t = (u_1^t, u_2^t, \dots, u_n^t)$$

vektor funksiya kabi ifodalanadi. Bu yerda U_j^t $j(j=\overline{1,n})$ korxona uchun qadamning boshida ajratilgan xom ashyo, mablag‘ va hokazolarning miqdorini ko‘rsatuvchi vektor.

Jami korxonalar birlashmasining T davr ichida boshqarishini $U = (u^1, u^2, \dots, u^T)$ vektor funksiya orqali ifodalash mumkin.

Birlashmadagi korxonalarning taraqqiyot dinamikasini ifodalash uchun ularning holat darajasini ko‘rsatuvchi $X_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^T)$ vektorni kiritamiz, bu yerda X_i^t $t(t=\overline{1,T})$ qadam boshida korxonalarning moddiy va moliyaviy ahvol darajasini ko‘rsatuvchi ko‘rsatkich bo‘lib, uning tarkibiy qismlari korxonadagi mehnat resurslari, asosiy fondlar moliyaviy ahvol darajasini ko‘rsatadi, ya‘ni $X_i^t = (x_{i1}^t, x_{i2}^t, \dots, x_{ik}^t)$.

Shunday qilib, yuqoridagidan xulosa qilib aytish mumkinki, boshqarish vektori U^t korxonalarning t qadamning boshidagi holatini ko‘rsatuvchi vektordir, ya‘ni

$$U^t = U^t(X^{t-1}).$$

Demak sistemaning boshlang'ich halati X^0 berilgan bo'ladi. Maqsadli funksiya sifatida korxonalar birlashmasining T davr ichida oladigan daromadlar yig'indisini ifodalavchi

$$Z = \sum_{i=1}^T Z^t \rightarrow \max \text{ funksiyanini kiritamiz.}$$

Har bir t qadamning boshida sistemaning X^t holat darajasiga va U^t boshqarish vektoriga ma'lum bir chegaralovchi shartlar qo'yiladi. Bu shartlar birlashmasini G bilan belgilaymiz va uni mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami deb ataymiz. Natijada quyidagi dinamik programmalash masalasiga ega bo'lamiz:

$$U^t \in G \quad (6.1)$$

$$Z = \sum_{i=1}^T Z^t \rightarrow \max. \quad (6.2)$$

Hosil bo'lgan (6.1), (6.2) modelga ishlab chiqarishning dinamik modeli deyiladi.

Masala 6.2. Katta talabga ega bo'lgan mahsulotni ishlab chiqarish maqsadida korxonalarga kapital qurilish uchun S – ming so'mlik mablag' ajratildi. Bu mablag'dan i korxona X_i ming so'm ishlatganda $f_i(x_i)$ (egri chiziqli funksiya) ko'rinishdagi o'sishga ega bo'ladi.

Kapital qurilishga ajratilgan mablag'ni korxonalar o'rtasida shunday taqsimlangki, korxonalar ishga tushganda maksimal daromad beruvchi mahsulotlar ishlab chiqarish qobiliyatiga ega bo'lsin.

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. Demak quyidagi shartlarda

$$\sum_{i=1}^n X_i = S.$$

$$X_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n})$$

$F = \sum_{i=1}^n f(X_i)$ funksiyaning eng katta qiymatini topish kerak. Agar

$F = \sum_{i=1}^n f(X_i)$ funksiya qavariq yoki botiq funksiya bo'lsa, u vaqtda bu masalani egri chiziqli programmalashdagi Lagranjning ko'paytmalar usulini qo'llab yechish mumkin. Agar F funksiya qavariq yoki botiq bo'lmasa, u vaqtda bu masalani dinamik programmalash usulidan foydalanib yechamiz.

Har bir korxonaga ajratilgan mablag'ni qadamba - qadam qanday samara berishini hisoblab chiqamiz va bularning ichidan optimal strategiyani tanlab olamiz.

Masala 6.3. Ishlab chiqarish jarayonini tashkil qilish uchun korxonani yangi uskunalar bilan jihozlash kerak. Uskunalarini ish unimdorligi vaqt o'tishiga bog'liq bo'lib, unga ketadigan harajatlar quyidagi jadval ko'rinishida berilgan.

6.5. jadval

	Uskunalarini ishlash vaqti (yil hisobida)					
	0	1	2	3	4	5
Bir yilda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi (qiymati) $R(y)$ (ming so'm hisobida)	80	75	65	60	60	55
Uskunalarini ta'mirlash va saqlash uchun ketadigan harajatlar $Z(\tilde{u})$ (ming so'm hisobida)	20	25	30	35	45	55

Korxonani yangi uskunalar bilan jihozlash uchun 40 ming so'm ketganini hisobga olib, uskunalarining xizmatini o'taganlarini hisobdan chiqarishning besh yillik rejasini shunday tuzinki korxona maksimum umumiy daromad olsun.

Yechish. Bu masalani yechish uchun boshqaruv jarayonini ikkiga bo'lib ko'ramiz:

a) U_1 – uskunalarining ishlab chiqarish qobiliyatini saqlovchi yechimlar to'plami bo'lsin;

b) U_2 – ishlash qobiliyati tamom bo'lgan uskunalarini almashtiruvchi yechimlar to'plami bo'lsin.

Birinchi bosqichda beshinchi besh yillikning boshidan, birinchi yilning boshiga qadar uskunalarining holatini shartli optimal boshqaruvchi yechimlar to'plamini topamiz. Ikkinchi bosqichda Ishlab chiqarish harakatini birinchi yilni boshlanish qismidan, beshinchi yilni boshlanish qismigacha, har yil uchun tuzilgan shartli optimal yechimlarga asosan uskunalarini almashtirish besh yillik optimal rejasini tuzamiz.

Shartli optimal yechimlar to'plamini tuzish uchun oldin bu masalaga moslashtirib Bellmanning funksional tenglamasini tuzib olamiz.

Har bir yil boshida (K – chi yil, $K = \overline{1,5}$) ikkita holatdan bittasi bo'ladi: uskunalar kerakmi yoki yo'qmi?

U vaqtda k -chi ($k=1, 2, 3, 4, 5$) yilda korxonaning daromadi quyidagicha bo'ladi

$$F_k(\check{Y}^{(k)}, U_k)_k = \begin{cases} R(\check{Y}^{(k)}) - Z(\check{Y}^{(k)}), U_1 \\ R(\check{Y}^{(k)} = 0) - Z(\check{Y}^{(k)} = 0) - C_n, U_2 \end{cases} \text{ bo'lganda,}$$

bu yerda $Y^{(k)}$ – uskunalarining k- chi yil boshidagi ishlagan yillar soni (yoshi), U_k – k-chi yil boshidagi boshqaruv vektori; S_n – yangi uskunalarni qiymati, $k=1,2,\dots, 5$.

Shunday qilib, bu holda Bellmaning funksional tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$F_k(\check{Y}^{(k)}) = \max_{\check{Y}} \begin{cases} R(\check{Y}^{(k)}) - Z(\check{Y}^{(k)}) + F_{k+1}(\check{Y}^{(k+1)}), \\ R(\check{Y}^{(k)} = 0) - Z(\check{Y}^{(k)} = 0) - C_n + F_{k+1}(\check{Y}^{(k)} = 1). \end{cases} \quad (6.1')$$

Endi (6.1') tenglamani qo'llab dastlabki masalaning yechimini topamiz. Besh yillikning boshida hamma uskunalar yangi bo'lgani uchun $\check{Y}^{(1)} = 0$ bo'ladi. Beshinchi yilning boshlanishida esa uskunalardan foydalanish muddati 1, 2, 3, 4 bo'lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo'lgan holati quyidagicha bo'ladi:

$$\check{Y}_1^{(5)} = 1, \check{Y}_2^{(5)} = 2, \check{Y}_3^{(5)} = 3, \check{Y}_4^{(5)} = 4.$$

Bu holatlarning har biriga mos ravishda shartli optimal yechimlarni va ularga mos bo'lgan $F_5(\check{Y}^{(5)})$ funksiyaning qiymatlarini aniqlaymiz. Endi (6.1) tenglamadan foydalanib, $F_5(\check{Y}^{(k+1)}) = 0$ ni hisobga olgan holda quyidagini topamiz

$$F_5(\check{Y}^{(5)}) = \max \begin{cases} R(\check{Y}^{(5)}) - Z(\check{Y}^{(5)}), \\ R(\check{Y}^{(5)} = 0) - Z(\check{Y}^{(5)} = 0) - C. \end{cases} \quad (6.2')$$

(6.2') – chi formulaga $Y^{(5)}=1$ va 6.5-jadvaldagi berilganlarni qo'ysak quyidagi hosil bo'ladi

$$F_5(\check{Y}_1^{(5)}) = \max \begin{cases} R(\check{Y}_1^{(5)} = 1) - Z(\check{Y}_1^{(5)} = 1) \\ R(\check{Y}_1^{(5)} = 0) - Z(\check{Y}_1^{(5)} = 0) - C_n \end{cases} = \max \begin{cases} 75 - 25 \\ 80 - 20 - 40 \end{cases} = 50, \quad U^0 = U_1$$

Demak, bu holda shartli optimal yechim $U^0=U_1$ ga teng.

Xuddi shunday hisoblarni 5 –chi yil boshida boshqa holatlar uchun ham yuqoridagi kabi bajaramiz.

$$F_5(\check{Y}_2^{(5)}) = \max \begin{cases} 65 - 30 \\ 80 - 20 - 40 \end{cases} = 35, U^0 = U_1,$$

$$F_5(\check{Y}_3^{(5)}) = \max \begin{cases} 66 - 35 \\ 80 - 20 - 40 \end{cases} = 25, U^0 = U_2,$$

$$F_5(\check{Y}_4^{(5)}) = \max \begin{cases} 60 - 45 \\ 80 - 20 - 40 \end{cases} = 20, U^0 = U_3$$

Hosil bo'lgan bu qiymatlarni quyidagi jadval ko'rinishida yozish mumkin.

6.6 jadval

Uskunalaridan	$F_5(U^{(5)})$ funksiyaning	Shartli optimal
---------------	-----------------------------	-----------------

foydalanish muddati (yil)	qiymatlari (ming so'm hisobida)	yechimlar U^0
1	50	U^0
2	35	U_1
3	25	U_2
4	20	U_3

To'rtinchi yilning boshlanishida uskunalardan foydalanish muddati 1,2,3 bo'lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo'lgan holati quyidagicha bo'ladi: $\check{Y}_1^{(4)} = 1, \check{Y}_2^{(4)} = 2, \check{Y}_3^{(4)} = 3$.

Bu holatlarning har biriga mos ravishda shartli optimal yechimlar to'plamini va ularga mos bo'lgan $F_n(\check{Y}^{(4)})$ uckunaning qiymatlarini yuqoridagi kabi 6.5 va 6.6 jadvaldan foydalanib hisoblaymiz

$$F_4(\check{Y}_1^{(4)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} R(\check{Y}^{(4)} = 1) - Z(\check{Y}^{(4)} = 1) + F_5(\check{Y}^{(5)} = 2) \\ R(\check{Y}^{(4)} = 0) - Z(\check{Y}^{(4)} = 0) - C_n + F_5(\check{Y}^{(5)} = 1) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{array} \right\} = 85, U^0 = U_1$$

$$F_4(\check{Y}_2^{(4)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{array} \right\} = 70, U^0 = U_2,$$

$$F_4(\check{Y}_3^{(4)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{array} \right\} = 70, U^0 = U_2.$$

Hosil bo'lgan natijalarga asoslanib quyidagi jadvalni tuzamiz.

6.7 Jadval

Uskunalarini foydalanish muddati (yil)- $Y^{(4)}$	$F_4(Y^{(4)})$ funksiyaning qiymati(ming so'm hisobida)	Shartli optimal yechimlari U^0
1	85	U_1
2	70	U_2
3	70	U_3

Uchinchi yilning boshida uskunalardan foydalanish muddati 1,2 bo'lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo'lgan holati $U_1^{(3)} = 1, U_2^{(3)} = 2$ bo'ladi. Bu holatlarning har biriga mos ravishda shartli optimal chimlar to'plamini va ularga mos bo'lgan $F_3(Y^{(3)})$ funksiyaning qiymatlarini yuqoridagi kabi (6.1') formuladan foydalanib hisoblaymiz

$$F_3(\check{Y}_1^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} R(\check{Y}^{(3)} = 1) - Z(\check{Y}^{(3)} = 1) + F_4(\check{Y}^{(4)} = 2), \\ R(\check{Y}^{(3)} = 0) - Z(\check{Y}^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\check{Y}^{(4)} = 1). \end{array} \right\};$$

$$F_3(\check{H}_2^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} R(\check{H}^{(3)} = 2) - Z(\check{H}^{(3)} = 2) + F_4(\check{H}^{(4)} = 3, \\ R(\check{H}^{(3)} = 0) - Z(\check{H}^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\check{H}^{(4)} = 1) \end{array} \right\}$$

6.5 va 6.6 jadvaldagi berilganlardan foydalanib quyidagilarni topamiz

$$F_3(\check{H}_1^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{array} \right\} = 120, U^0 = U_1;$$

$$F_3(\check{H}_2^{(3)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{array} \right\} = 105, U^0 = U_2.$$

Oxirgi tenglikdan ko‘rinib turibdiki $F_3(U_2^{(3)}) = 105$ da boshqaruv shartli optimal yechimlardan Y_1 yoki Y_2 qaysisini olmaylik uskunalarni ishlash muddati besh yillikning uchinchi yili boshida ishlash muddati 2 yilni tashkil qilgani uchun mehnat unumdorligi bir xil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan natijalarni 6.8 jadvalga yozib olamiz.

6.8 jadval

Uskunalarining ishlash muddati (yil hisobida)	$F_3(\check{H}^{(3)})$ funksiyaning qiymati (ming so‘m hisobida)	Shartli optimal yechimlar
1	120	U_1
2	10	U_2

Besh yillik ikkinchi yilining boshida uskunalaridan foydalanish muddati 1 yil bo‘ladi, $Y^{(2)}=1$. Bu yerda uskunani almashtirish kerakmi degan savol tug‘iladi. Bu savolga javob berish uchun quyidagilarni hisoblaymiz:

$$F_2(U_2^{(2)}) = \max \left\{ \begin{array}{l} R(\check{H}^{(2)} = 1) - Z(\check{H}^{(2)} = 1) + F_3(\check{H}^{(3)} = 2) \\ R(\check{H}^{(2)} = 0) - Z(\check{H}^{(2)} = 0) - C_n + F_3(\check{H}^{(3)} = 1) \end{array} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 105 \\ 80 - 20 - 40 + 120 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 155 \\ 144 \end{array} \right\} = 155, U_1;$$

Bu natijaga asoslanib quyidagi jadvalni tuzamiz.

6.9 jadval

Uskunalarining ishlash muddati (yil hisobida) $Y^{(2)}$ yil	$F_2(\check{H}^{(2)})$ funsiyaning qiymati (ming so‘m hisobida)	Shartli optimal yechimlar
1	155	U_1

Masalaning shartiga ko‘ra besh yillikning boshida uskunalarni yangi uskunalar bilan almashtirish shart emas. Demak, boshqaruv vektori yoki shartli optimal yechim U_1 bo‘ladi. Korxonaning daromadi esa

$$F_1(\check{H}_1^{(1)}) = R(\check{H}_2^{(1)} = 0) - Z(\check{H}_1^{(1)} = 1) = 80 - 20 + 155 = 215 \text{ x so‘m}$$

Demak korxonaning maksimum daromadi $F_1(Y^{(1)})=215$ so‘mni tashkil qiladi. Shunday qilib korxona uskunalarini almashtirishning optimal rejasini quyidagi jadval orqali ifodalash mumkin.

6.10 Jadval

	Uskunalarini ishlash yillari				
	1 yilda	2 yilda	3 yilda	4 yilda	5 yilda
Masala-ning optimal yechimlari	Uskunalar ni almashtiri sh kerak emas	Uskunalar ni almashtiri sh kerak emas	Uskunalar ni almashtiri sh kerak	Uskunalar ni almashtiri sh kerak emas	Uskunalar ni almashtiri sh kerak emas

Masala 6.4. Katta ehtiyojga ega bo‘lgan mahsulotni ishlab chiqarish uchun uchta korxona kapital qurilishiga $S=700$ ming so‘m mablag‘ ajratilgan. Bu mablag‘dan uchta korxonaga mos x_i ravishda x_1, x_2, x_3 ming so‘mdan ishlatganda kapital qurilish hajmini o‘shishga mos ravishda ishlab chiqarilgan mahsulotlarni hajmi o‘shishi $F_i(x_i)$ so‘mni tashkil qiladi. Kapital qurilishga ajratilgan mablag‘ni korxonalar o‘rtasida shunday taqsimlangki korxonalar ishga tushganda maksimum daromad beruvchi mahsulotlar ishlab chiqarish qobiliyatiga ega bo‘lsin x_i va $F_i(x_i)$ miqdorlar quyidagi jadvalda berilgan.

6.11 jadval

Kapital qurilishga ajratilgan mablag‘ning hajmi x_i , (ming so‘m)	Kapital qurilishga ajratilgan mablag‘ hajmiga mahsulotlar ishlab chiqarishni o‘shish ko‘rsatkichi $F_i(x_i)$ (ming hisobida).		
	1-korxona	2-korxona	3-korxona
0	0	0	0
10	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
50	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Yechish. Masalani yechish uchun Bellmannning o‘zaro bog‘lanish rekurent formulalarini tuzamiz. Bu masala uchun o‘zaro bog‘lanish quyidagi funksional tenglamalar ko‘rinishida yozish mumkin:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \max_{0 \leq x_1 \leq x} [F_1(x_1)]; \\ \varphi_2(x) &= \max_{0 \leq x_2 \leq x} [F_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)]; \\ \varphi_{n-1}(x) &= \max_{0 \leq x_{n-1} \leq x} [F_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_{n-1})].\end{aligned}\quad (6.3)$$

(6.3) formulada $\varphi_i(x) (i = \overline{1, n-1})$ uchta korxonalar 0 taqsimlangan x ming so‘m kapital mablag‘ natijasida o‘shish surati (ko‘rsatkichi). Shuning uchun $f_n(x)$ ning qiymatini $x = S = 700$ ming so‘m deb olamiz. Chunki uchta korxona kapital qurilishiga $S = 700$ ming so‘m ajratilgan. (6.3) formulani 6.11 jadval yordamida hisoblab chiqsak, u vaqtda birinchi korxona uchun ajratilgan shartli optimal kapital mablag‘ni aniqlash uchun $\varphi_i(x)$ ni $x = 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600$ va 700 qiymatlarida 6.11 jadvalni qo‘llab hisoblab chiqamiz:

1. $x=0, \varphi_1(0)=0$. o‘shish yo‘q ya’ni $X_1^0 = 0$
2. $x=100, \varphi_2(100) = \max_{0 \leq x_1 \leq 100} \{0, 30\} = 30, X_2^0 = 100$
3. $x=200, \varphi_1(200) = \max_{0 \leq x_1 \leq 200} \{0, 30, 50\} = 50, X_3^0 = 200$
4. $x=300, \varphi_1(300) = \max_{0 \leq x_1 \leq 300} \{0, 30, 50, 90\} = 90, X_4^0 = 300$
5. $x=400, \varphi_1(400) = \max_{0 \leq x_1 \leq 400} \{0, 30, 50, 90, 110\} = 110, X_5^0 = 400$
6. $x=500, \varphi_1(500) = \max_{0 \leq x_1 \leq 500} \{0, 30, 50, 90, 110, 170\} = 170, X_6^0 = 500$
7. $x=600, \varphi_1(600) = \max_{0 \leq x_1 \leq 600} \{0, 30, 50, 90, 110, 170, 180\} = 180, X_6^0 = 600$
8. $x=700, \varphi_1(700) = \max_{0 \leq x_1 \leq 700} \{0, 30, 50, 90, 110, 170, 180, 210\} = 210, X_1^0 = 700$

Hisoblash natijalarini va shartli optimal yechimlarni quyidagi jadvalga yozib olamiz:

6.12 jadval

Birinchi koronaga ajratilgan x kapital mablag‘ning hajmi (ming so‘m)	$\varphi_i(x)$ maksimum o‘shish ko‘rsatkichi (ming so‘m)	Birinchi korxonaga ajratilgan shartli optimal mablag‘ (ming so‘m)
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

6.11 va 6.12 jadvaldagi natijalarga asosan ikkinchi korxonaga ajratilgan kapital mablag‘ning shartli optimal hajmini hisoblash uchun

$\varphi_2(x) = \max_{0 \leq x_2 \leq x} [F_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)]$ ni $x=0, 100, 200, 300, 400, 500, 600$ va 700

qiymatlarida hisoblaymiz:

1. $x=0, \varphi_2 = 0, X_1^0 = 0;$

2. $x=100, \varphi_2(100) = \max_{0 \leq x_2 \leq 100} \begin{Bmatrix} 0 + 50 \\ 50 + 0 \end{Bmatrix} = 50, X_2^0 = 100;$

3. $x=200, \varphi_2(200) = \max_{0 \leq x_2 \leq 200} \begin{Bmatrix} 0 + 50 \\ 50 + 30 \\ 80 + 0 \end{Bmatrix} = 80, X_3^0 = 100;$

4. $x=300, \varphi_2(300) = \max_{0 \leq x_2 \leq 300} \begin{Bmatrix} 0 + 90 \\ 50 + 50 \\ 80 + 30 \\ 90 + 0 \end{Bmatrix} = 110, X_4^0 = 200;$

5. $x=400, \varphi_2(400) = \max_{0 \leq x_2 \leq 400} \begin{Bmatrix} 0 + 110 \\ 50 + 90 \\ 80 + 50 \\ 90 + 30 \\ 150 + 0 \end{Bmatrix} = 150, X_5^0 = 400;$

6. $x=500, \varphi_2(500) = \max_{0 \leq x_2 \leq 500} \begin{Bmatrix} 0 + 170 \\ 50 + 110 \\ 80 + 90 \\ 90 + 50 \\ 150 + 30 \\ 190 + 0 \end{Bmatrix} = 190, X_6^0 = 500;$

7. $x=600, \varphi_2(600) = \max_{0 \leq x_2 \leq 600} \begin{Bmatrix} 0 + 180 \\ 50 + 170 \\ 80 + 110 \\ 90 + 90 \\ 150 + 50 \\ 190 + 30 \\ 210 + 0 \end{Bmatrix} = 220, X_7^0 = 100;$

$$8. x=700, \varphi_2(700) = \max_{0 \leq x_2 \leq 700} \begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+80 \\ 80+170 \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 210+30 \\ 22+0 \end{Bmatrix} = 250, X_8^0 = 200.$$

Olgan natijalarni va korxonaga ajratiladigan kapital mablag'ining shartli optimal hajmlarini 6.13 jadvalga yozamiz.

6.13 jadval

Ikkita korxonaga ajratiladigan kapital mablag' hajmi, x , (ming so'm)	$\varphi_2(x)$ maksimum o'sish ko'rsatkichi (ming so'm)	Ikkinchi korxonaga ajratiladigan shartli optimal mablag', x_2^0 , (ming so'm)
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	300
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

6.11 va 6.13 jadvalga asoslanib $\varphi_3(x) = \max_{0 \leq x_3 \leq x} [F_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)]$

funksiyaning qiymatlarini hisoblaymiz. Bu yerda korxonalar soni $n=3$ bo'lgani uchun hisoblashni faqat $x=700$ ming so'm uchun bajaramiz

$$X=700, \varphi_3(700) = \max_{0 \leq x_3 \leq 700} \begin{Bmatrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 100+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ 220+50 \\ 240+0 \end{Bmatrix} = 270, X_1^0 = 600.$$

Demak, maksimum o'sish ko'rsatkichi $\varphi_3(700)=270$ ming so'mni tashkil qiladi. Bu ko'rsatkichga erishish mumkin, faqatgina uchinchi korxona 600 ming so'm, birinchi va ikkinchi korxonalarga esa 100 ming so'm kapital mablag' ajratilsa. 6.13 jadvaldan ko'rinib turibdiki ikkinchi korxonaga 100 ming so'm ajratish kerak.

Topshiriqlar

Dinamik programmash usullarini qo'llab quyidagi masalalarni yeching. (6.5-6.8).

Masala.6.5. To'rtta korxona qurish uchun 200 ming so'm sarmoya ajratilgan. Har bir korxona o'ziga ajratilgan sarmoyaning miqdoriga bog'liq ravishda turli miqdordagi daromadga erishadi. Bu daromadlar 6.14jadvalda ko'rsatilgan.

6.14 jadval

Korxonalarga ajratiladigan sarmoya miqdori (ming so'm)	Korxonalarning daromadi			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
20	90	85	92	68

Mavjud sarmoyalarni korxonalararo shunday taqsimlash kerakki, natijada hamma korxonalarning olgan daromadlarining yig'indisi maksimal bo'lsin.

Masala 6.6. Ishlab chiqarish jarayonini tashkil qilish uchun korxona yangi uskunar bilan yil boshida jihozlangan. Ishdan chiqqan uskunar o'z vaqtida hisobdan chiqarilib, uning o'rniga narxi 10 ming so'mga teng bo'lgan yangi uskunar qo'yiladi. Uskunalarining ish unumdorligi vaqt o'tishiga bog'liq bo'lib, unga ketadigan harajatlar quyidagi jadvalda ko'rsatilgan.

6.15 jadval

	Uskunalarini ishlash vaqti (y), (yil hisobida)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
'Y' ish muddatiga ega bo'lgan uskunani bir yilda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi $R(Y)$ (ming so'm)	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20
Uskunalarini ta'mirlash va saqlash uchun ketadigan bir yillik harajatlar, $Z(Y)$, (ming so'm)	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

Jadvalda berilgan muddatga korxona uskunalarini almashtirishning optimal rejasini tuzing.

Masala 6.7. 6.2 masalani shartiga asosan kapital qurilishga ajratilgan mablag' $S=100$ ming so'mni tashkil etadi. Bu mablag'ni to'rtta korxonalarga taqsimlashning optimal rejasini tuzing. Dastlabki berilganlar (x_i va $F_i(x_i)$ qiymatlar) 6.16 jadvalda berilgan.

6.16 jadval

Kapital qurilishga ajratilgan mablag'nini hajmi, x_i , (ming so'm)	Kapital qurilishga ajratilgan mablag' hajmiga asosan mahsulotlar ishlab chiqarishning o'sish ko'rsatkichi $F_i(x_i)$ (ming so'm)			
	1-korxona	2-korxona	3-korxona	3-korxona
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

Masala 6.8. Omborni umumiy hajmi $W=90 \text{ m}^3$. Firmaga hajmlari $v_1=24 \text{ m}^3, v_2=19 \text{ m}^3, v_3=16 \text{ m}^3$ bo'lgan konteynerlar bilan yuk olib kelindi. Bu konteynerlarning har birining narxi mos ravishda $c_1=960$ so'm, $c_2=500$ so'm, $c_3=250$ so'm. Omborga konteynerlarni shunday joylashtiringki yuklar maksimum qiymatga ega bo'lsin.

VII. Bob. Chiziqsiz programmalash

§1. Chiziqsiz programmalash masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini

Faraz qilaylik bizga yuklarni optimal joylashtirish masalalari berilgan bo'lsin. Bu vaqtgacha bunday masalalarni yechganda har bir ishlab chiqarilgan mahsulot maksimal bo'lishi uchun ishlab chiqarish harajatlarini o'zgarmas deb hisoblagan edik. Bundan keyin bu harajatlarni o'zgaruvchi (o'zgarmas emas) deb qaraymiz. Ishlab chiqarish harajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmiga proporsional emas. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi x_i -chi korxona uchun x_i , korxona harajatlari esa $f_i(x_i)$ funksiyaga teng bo'ladi. Ishlab chiqarish quvvati esa har xil bo'lishi mumkin (butun sonli, kasr sonli va h.k.).

Natijada ushbu iqtisodiy masala kelib chiqadi.

Quyidagi shartlar:

1. $x_i \geq 0$ (musbat miqdorda mahsulotlar tashilgan);

1. $X_i = \sum_{j=1}^m x_{ij}$ (ishlab chiqarilgan mahsulotlar to'la istemolchilarga yetkazilgan);

2. $\sum_{i=1}^n x_{ij} = B_j, j=1, m$ (har bir iste'molchi eng kamida talabini qondiruvchi mahsulotlar hajmini oladi);
bajarilganda

$F(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n C_{ij}(x_{ij})$ $F(x)$ funksiyani minimumini toping.

$F(x)$ maqsad funksiya va yuqoridagi shartlardan birortasi chiziqsiz bo'lsa, bunday masalalar chiziqsiz programmalash masalalariga kiradi.

Shunday qilib chiziqsiz programmalashning masalasi ta'rifini quyidagicha yozish mumkin:

Quyidagi shartlar bajarilganda

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j, (i = \overline{1, k}) \\ q_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_j, (j = \overline{k+1, m}) \end{cases} \quad (7.1)$$

$$F(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.2)$$

$F(X)$ funksiyaning maksimum(minimum) qiymatini toping. Bu yerda f va q_i n - o'zgaruvchili funksiyalar, b_i - berilgan sonlar, $\{ \geq, \leq, = \}$ belgilardan masalaning shartiga ko'ra faqat bittasi bo'ladi va shu bilan bir qatorda, turli munosabatlarga turli belgilar mos bo'lishi mumkin.

(7.1) va (7.2) shartlarda chegaraviy shartlar qatnashmasa, u vaqtda bu masalaga shartsiz optimallashtirish masalasi deyiladi. Chegaraviy shartlar (7.1) shartga kiritilgan bo'lishi mumkin yoki bo'lmasa (7.1), (7.2) masala quyidagicha berilgan bo'lishi mumkin

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, (i = \overline{1, m}); \quad (7.3)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}); \quad (7.4)$$

$$F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad (7.5)$$

Noma'lumlarning manfiy emaslik sharti (7.4) qatnashmagan masalalarga, bu shartlarni osonlik bilan kiritish mumkin.

E_n Yevklid fazosida (7.1) sistema masalaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasini ifodalaydi.

Agar (7.1), (7.2) masalani mumkin bo'lgan yechimlari sohasi aniqlangan bo'lsa, u vaqtda bu sohaning eng yuqori (eng chetki) yoki

bo'lmasa eng quyi nuqtalari $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = R$ giperbolik sirtning (sath tekisligining) o'tgan nuqtalariga mos keladi.

Bu nuqtalar yechimlar sohasini chegara nuqtalarida yoki bo'lmasa sohaning ichki nuqtalarida ham joylashgan bo'lishi mumkin.

Chiziqsiz programmalash masalalarining geometrik talqini quyidagi bosqichlardan iborat:

1. (7.1) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi aniqlanadi (agar bu yechimlar sohasi bo'sh to'plamni tashkil qilsa, u vaqtda masala yechimga ega emas);
2. $f(x_1, x_2, \dots, x_i) = R$ giperbolik sirt chiziladi;
3. Eng yuqori va eng quyi giperbolik sath sirti aniqlanadi yoki bo'lmasa $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yuqoridan (quyidan) chegaralanmagani aniqlanadi (bu holda masala yechimga ega emas);
4. Giperbolik sath tekisligi o'tgan eng chetki, eng quyi urinib o'tgan nuqta aniqlanadi va bu nuqtada $F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_i)$ qiymati aniqlanadi;

Masala 7.1. Quyidagi shartlar

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ x_1 + 2x_2 \leq 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ x_2 \leq 4 \end{array} \right\} \quad (7.6)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (7.7)$$

bajarilganda

$$F(x) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \quad (7.8)$$

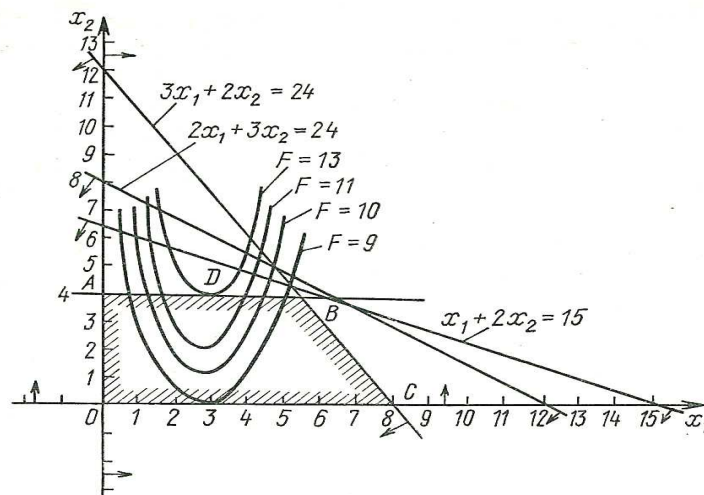
funksiyaning maksimum qiymatini toping

Yechish. Oldin (7.6) sistemaning aniqlanish sohasini topamiz (Chizma 7.1.) Bu sistemaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasi OABC ko'pburchak bo'ladi. OABC ko'pburchakning qaysi nuqtasida (7.8) funksiya maksimum qiymat qabul qilishini izlaymiz. Buning uchun $F = k = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ sath egri chizig'idagi k-ga qiymatlar berib chizamiz va (7.8) egri chiziq paraboladan iborat bo'lib k-ga qiymatlarni o'sib borish tartibida: 9, 10, 11, 13 bersak, bu parabola OX o'qidan borgan sayin yuqoriga ko'tariladi. Natijada OABC ko'pburchagining D nuqtasida urinadi. Demak D nuqtada $F(x)$ funksiya maksimum qiymatga ega bo'ladi.

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Bu istemani yechib D nuqtani topamiz $D(3, 4)$

$$F_{D \max} = F_{D \max} = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 4 - 9 + 6 \cdot 3 = 13$$



7.1-чизма

Masala 7.2. Quyidagi shartlar

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 7 \\ 10x_1 - x_2 &\leq 8 \\ -18x_1 + 4x_2 &\leq 12 \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (7.10)$$

bajarilganda

$$F(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

funksiyaning maksimum va minimum qiymatlarini toping.

Yechish: (7.9)-(7.10) masalaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasi ABC uchburchakdan iborat. Maqsad funksiya $F(x_1, x_2) = k$ deb olsak $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = k$ aylana hosil bo'ladi.

Bu aylananing markazi $E(3, 4)$ nuqtada bo'lib, radiusi $R = \sqrt{k}$ teng.

Agar k -ga qiymatlar bersak $F(x_1, x_2)$ funksiyaning qiymatlari k o'sganda o'sadi (k kamaysa $F(x_1, x_2)$ kamayadi) va D nuqtada maqsadli funksiya yechimlari sohasi ABC uchburchakka urinib, urinish nuqtasida minimal qiymatga ega bo'ladi. D nuqta koordinatalarini topish uchun quyidagi to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsientlarining tengligidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 &= 8 \text{ va aylanaga } D \text{ nuqtada o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq} \\ 2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4) x'_2 &= 0 \end{aligned}$$

Bu yerdan

$$x'_2 = -(x_1 - 2)/(x_2 - 4)$$

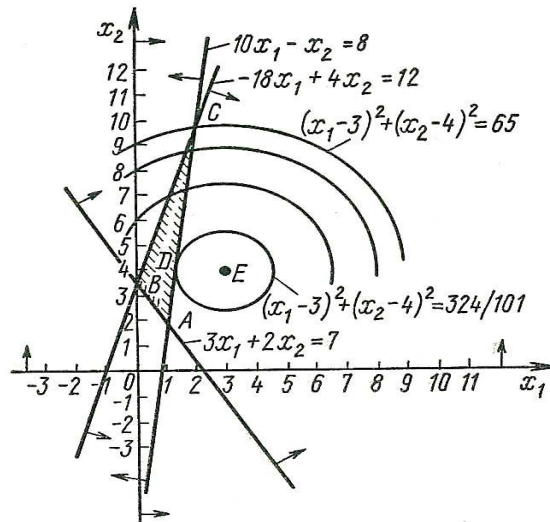
$x_2=10x_1+8$, $k=10$, $x'_2=k=10$ bo'lgani uchun qo'yidagi sistemani yechib

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 43, \\ 10x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$$

$E(x_1^*, x_2^*)$ nuqtaning koordinatalarini topamiz:

$$x_1^* = 123/101, \quad x_2^* = 422/101.$$

$$\text{Shunday qilib } F_{\min} = (123/101 - 3)^2 + (422/101 - 4)^2 = 324/101 = 3\frac{24}{101};$$



7-чизма

7.2 - chizmadan ko'rinib turibdiki, agar (7.10) aylana radiusi k ni qiymatlarini oshirib borsak, u C nuqtada maksimum qiymatga ega bo'ladi.

C nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 = 8, \\ -18x_1 + 4x_2 = 12. \end{cases}$$

Natijada $x_1^* = 2$; $x_2^* = 12$ optimal yechim bo'ladi, va

$$F_{\max} = f(2, 12) = (2-3)^2 + (12-4)^2 = 65.$$

Demak $F_{\max} = 65$ maqsad funksiyaning maksimal qiymatidir.

Masala: 7.3. Quyidagi shartlar

$$\left. \begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 3, \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 36. \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

$$x_1, x_2 \geq 0. \quad (7.12)$$

bajarilganda

$$F(x_1, x_2) = 12x_1 + 4x_2 \quad (7.13)$$

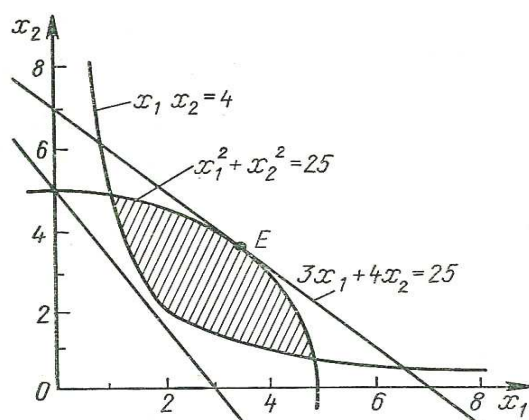
$F(x_1, x_2)$ funksiyaning maksimum qiymatini toping

Yechish. Bu masalaning aniqlanish sohasi 7.3 chizmada ko'rsatilgan. Chizmadan ko'rinib turibdiki, maqsad funksiya $x_1^2 + x_2^2 = 36$ maksimum qiymatga, to'g'ri chiziq aylanaga uringan E nuqtada erishadi. E nuqtaning koordinatalarini topish uchun $12x_1 + 4x_2 = k$ va $x_1^2 + x_2^2 = 36$ aylanaga o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziqlarning burchak koefesentlari tengligidan foydalanamiz. Aylananing tenglamasidan x_2 ni x_1 ga nisbatan oshkormas funksiya deb olib differensiallasak, quyidagi hosil bo'ladi

$$2x_1 + 2x_2 \cdot x'_2 = 0 \text{ bu yerdan } x'_2 = -\frac{x_1}{x_2} = r = -3$$

Demak urinma to'g'ri chiziqning tenglamasi $2x_1 - 6x_2 = 0$ yoki $x_1 - 3x_2 = 0$ bo'ladi.

Shunday qilib E nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani



7.3-чизма

echamiz

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 36. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2, \\ 9x_2^2 + x_2^2 = 36. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2, \\ x_2 = \pm \frac{6}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Demak

$$x_1^* = \frac{18}{\sqrt{10}}, x_2^* = \frac{6}{\sqrt{10}} \text{ . optimal yechim bo'lib,}$$

$$F_{\max} = \frac{18^2}{10} + \frac{6^2}{10} = 36 \text{ teng.}$$

Topshiriqlar

Chiziqsiz programmalash masalalarini yeching. (7.4-7.9)

Masala 7.4. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \cdot x_2 \geq 4, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 25. \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping

Masala 7.5. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} 6x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12. \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = x_1 x_2$ -funksiyaning maksimum qiymatini toping

Masala 7.6. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4. \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = 9(x_1 - 5)^2 + 4(x_2 - 6)^2$ -funksiyaning

Masala 7.7. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, \\ x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \geq 0. \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = x_1 x_2$ -funksiyaning maksimum qiymatini toping

Masala 7.8. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \\ x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 4x_2 - 68 \geq 0. \end{array} \right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = 10x_1 x_2$ -funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Quyidagi masalalarning matematik modelini tuzing (7.9-7.10).

Masala 7.9. Korxonalar tarmoqlarini rivojlantirish uchun 220 mln. so'm mablag' ajratilgan. Taqsimlashning har bir turi korxonaga yil oxirida aniq daromad berishini hisobga olib korxonalar o'rtasida ajratilgan mablag'ni shunday taqsimlangki, taqsimlangan kapital mablag' har bir ishlab chiqarish tarmog'iga yil oxirida maksimum daromad bersin (jadval 7.1 qarang)

Jadval 7.1

Korxo— nalar	Kapital mablag‘ning hajmi (mln. so‘m)	Daromad λ (mln. so‘m)	Kapital mablag‘ning hajmi (mln. so‘m)	Daromad d (mln. co‘m)	Kapital mablag‘ning hajmi (mln.so‘m)	Daromad λ (mln. so‘m)
1	10 dan 30 gacha	14.3	30 dan 60 gacha	16.2	60 va undan ko‘p	17.2
2	10 dan 40 gacha	13.5	40 dana 70 gacha	17.8	70 va undan ko‘p	18.3
3	10 dan 50 gacha	18.4	50 dan 60 gacha	19.3	60 va undan ko‘p	19.4

Masala 7.10 Kuyidagi shartlarda

$$\left. \begin{aligned} x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \\ x_1^2 - 2x_2 + 2x_2 - 36 \geq 0. \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \right\}$$

$F(x_1, x_2) = 4x_1 \cdot x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

§2. Lagranjning ko‘paytmalar usuli

Faraz qilaylikki bizga (7.1), (7.2) masalalar berilgan bo‘lsin va sistema (7.1)da faqat tenglamalar qatnashsin (nomanfiylik sharti qatnashsin). Shu bilan bir qatorda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya va ulardan olingan xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz bo‘lsin, ya’ni

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ell_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (7.14)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi va

$$F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.15)$$

funksiyaga maksimum (minimum) qiymat yo‘nalishlarni $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yechimlar to‘plamini topish kerak bo‘lsin. Matematik analizda (7.14), (7.15) masalaga shartli ekstremum yoki optimallashtirishning klassik masalasi deyiladi. Bu masalani yechish uchun X funksiya $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ o‘zgaruvchilarni kiritamiz. Bu o‘zgaruvchilarga Lagranj ko‘paytuvchilari deb aytiladi. Shunday qilib yuqoridagilarga asosan Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2, \dots, X_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) &= f(X_1, X_2, \dots, X_n) + \\ &+ \sum_{i=1}^m \lambda_i [\ell_i - q_i(X_1, X_2, \dots, X_n)] \end{aligned} \quad (7.16).$$

Lagranj funksiyasidan quyidagi xususiy hosilalarni olamiz

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_m}, \text{ va } \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} \quad (7.17)$$

va quyidagi $n+m$ nomalumli $n+m$ tenglamalar sistemasini

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} &= 0, (j = \overline{1, m}); \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i} = e_i - g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 (i = \overline{1, m}), \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ yechimlarni topamiz.

(7.18) sistemaning har qanday yechimlari shunday $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtani aniqlaydikim, bu nuqtada $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ maqsad funksiya ekstremumga ega bo'lishi mumkin. Shunday qilib (7.18) sistemaning yechimlarida (7.15) funksiya ekstremal qiymatlarga ega bo'lishi mumkin. Keyingi tekshirishlar shartsiz ekstremumlarni tekshirish kabi olib boriladi.

Demak (7.14), (7.15) masalalarni Lagranjning ko'paytmalar usuli bilan ekstremal nuqtalarni topish quyidagi hollarni o'z ichiga oladi:

1. Lagranj funksiyasi tuziladi;
2. Lagranj funksiyasidan x_j va λ_i bo'yicha xususiy hosilalar olinib, nolga tenglashtiriladi;
3. (7.18) sistemani yechib $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ maqsad funksiya ekstremumga ega bo'lishi mumkin bo'lgan nuqtalari topiladi;
4. Ekstremumga bo'lishi mumkin bo'lgan nuqtalar ichidan ekstremumga ega bo'lgan nuqtalarni topib, maqsadli funksiyaning bu nuqtalardagi qiymati hisoblanadi.

Masala 7.11. Ishlab chiqarish korxonasining rejası bo'yicha 180 ta buyum chiqarilishi mo'ljallangan. Bu buyumlarni ishlab chiqarish uchun ikki xil texnologik jarayon ishlatiladi. Birinchi texnologik usulni qo'llab x_1 -dona buyumlarni tayyorlaganda, harajatlar $4x_1 + x_1^2$ so'mni, ikkinchi xil jarayon x_2 dona buyumlarni tayyorlaganda esa harajatlar $8x_2 + x_2^2$ so'mni tashkil etadi. Korxona rejasini shunday tuzinki ikki xil usul bilan ishlab chiqarish buyumlarga ketgan harajatlar minimal bo'lsin.

Yechish. Masalaning sharti bo'yicha $F(x) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$ funksiyaning minimal qiymatini $x_1 + x_2 = 180$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ shartlar bajarilganda topish kerak,

$$\text{ya'ni } x_1 + x_2 = 180, \quad (7.19)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (7.20)$$

shartlar bajarilganda

$$F(x)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2=(x_1+2)^2+(x_2+4)^2-20 \rightarrow \min. \quad (7.21)$$

Oldin masalani geometrik usulni qo'llab yechamiz. (7.21) funktsiya, markazi $(-2;-4)$ nuqtada bo'lgan aylanadan iborat. Bu masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi $x_1+x_2=180$ to'g'ri chiziq tashkil qilgan AV kesma ustida joylashgan bo'lib, (7.4 chizma) sath chizig'ini markazi $Ye(-2;-4)$ nuqtada joylashgan aylanadan iborat. Ushbu

$$(x_1+2)^2+(x_2+4)^2=S \quad (7.22)$$

aylananing $x_1+x_2=180$ to'g'ri chiziqqa uringan D nuqtada maqsad funktsiya $F(x)$ minimum qiymatga ega bo'ladi.

(7.22) tenglamadagi S-ga qiymatlar berib borsak, aylana $x_1+x_2=180$ to'g'ri chiziqqa D nuqtada urinadi.

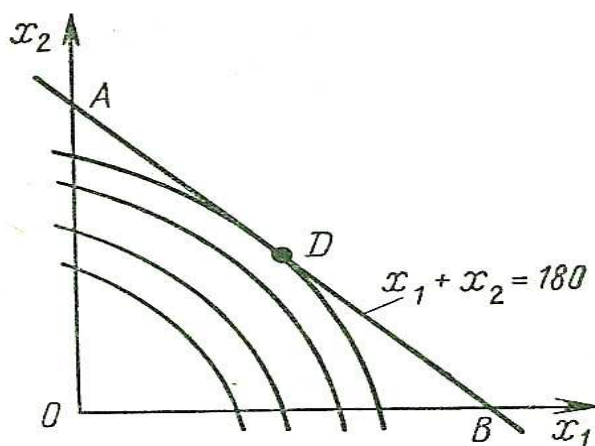


Рис. 3.5

7.4-чизма

Aylanaga D nuqtada o'tkazilgan urinma chiziqning burchak koeffitsiyenti AV to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentiga teng bo'lib $k=-1$ teng.

Agar aylaning tenglamasidagi x_2 -ni oshkormas funktsiya deb, x_1 argument bo'yicha hosila olsak quyidagi hosil bo'ladi.

$$4+2x_1+8x_2+2x_2x_2'=0 \text{ yoki } x_2'=-\frac{2+x_1}{4+x_2}$$

$$\text{Yukordagilarga asosan } k=x_2'=-1$$

$$\text{Demak } -\frac{2+x_1}{4+x_2}=-1 \text{ yoki } x_1-x_2=2.$$

D nuqtaning koordinatalarni topish uchun quyidagi sistemani yechamiz

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 2, \\ X_1 + X_2 = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 91, \\ X_2 = 89 \end{cases}$$

Bu yerdan optimal yechim $x_1^*=91$, $x_2^*=89$ ga teng. Shunday qilib birinchi xil texnologik jarayon bilan $x_1^*=91$, ikkinchi texnologik jarayon bilan $x_2^*=89$ dona buyum ishlab chiqarilganda maqsad funksiya eng kam qiymat qabul qiladi va harajatlar $F_{\min}=4 \cdot 91 + 91^2 + 8 \cdot 89 + 89^2 = 17278$ so'mni tashkil etadi.

Endi (7.19)-(7.21) masalani Lagranjning ko'paytmalar usulini qo'llab yechamiz. Buning uchun oldin Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$F(x_1, x_2, \lambda) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2)$$

Endi

x_1 , x_2 , λ bo'yicha xususiy hosilalarni topamiz va xususiy hosilalarni nolga tenglashtiramiz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalardan λ -ni topib olib tenglashtirsak quyidagi sistema hosil bo'ladi

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 &= 180. \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemani yechib $D(x_1^*, x_2^*)$ nuqtaning kordinatalarini topamiz: $x_1^*=91$, $x_2^*=89$.

Bu nuqta ekstremumga shubhali nuqta hisoblanadi.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni (7.22)-dan topamiz

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = (4 + 2x_1 - \lambda)'_{x_1} = 2, \\ B &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = (4 + 2x_1 - \lambda)'_{x_2} = 0, \\ C &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = (8 + 2x_2 - \lambda)'_{x_2} = 2. \end{aligned} \right\}$$

Ikki o'zgaruvchi funksiya ekstremumi haqidagi teorema asosan

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2 > 0 \quad \text{va} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

bo'lgani uchun $D(91; 89)$ nuqtada $F(x_1, x_2)$ minimumga minimumga ega.

Masala 7.12. Quyidagi shartlar

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

bajarilganda

$F=x_1x_2+x_2x_3$ funksiyaning shartli ekstremumga ega bo'lgan nuqtasini toping.

Yechish. Masalaning shartiga asosan Lagranj funksiyasi Quyidagi ko'rinishga ega

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + x_3 - 2)$$

Bu funksiya dan 1-chi tartibli xususiy hosilalarni olib nolga tenglashtirsak quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= x_2 + \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= x_1 + x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_3} &= x_2 + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} &= x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} &= x_2 + x_3 - 2 = 0. \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemadagi birinchi va uchunchi tenglamadan $\lambda_1 = -x_2$, $\lambda_2 = -x_2$. Shuning uchun

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemani yechsak $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ bo'ladi. U vaqtda $f = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$.

Masala 7.13. quyidagi shartda $x_1 + x_2 = 7$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_3 - 3)^2$ funksiyaning $0 \leq x_1 \leq 5$, $0 \leq x_2 \leq 10$ sohada shartli ekstremumini tekshiring.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 - \lambda(3 - x_1 - x_2)$$

$F(x_1, x_2, \lambda)$ funksiya dan x_1, x_2, λ bo'yicha xususiy hosilalarni olib nolga tenglashtirsak Quyidagi sistema hosil bo'ladi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 2(x_1 - 2) - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 2(x_2 - 3) - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 3 - x_1 - x_2 = 0. \end{aligned} \right\}$$

sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalaridan λ -ni topib tenglashtirib olsak, quyida hosil bo'ladi

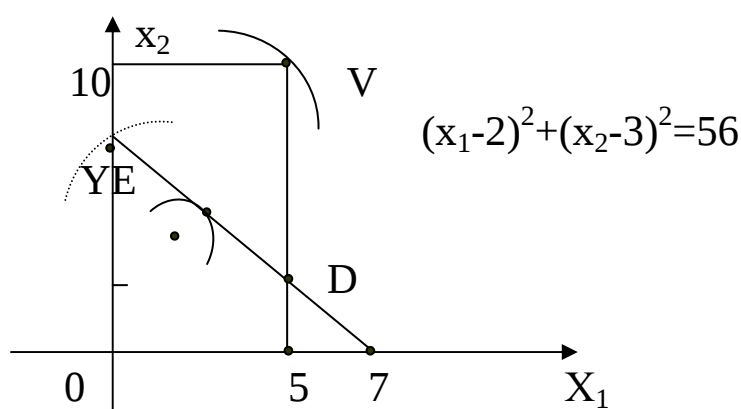
$$2(x_1 - 2) = 2(x_2 - 3).$$

Bu tenglamani Sistemaning uchinchi tenglamasi bilan birgalikda yechsak,

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7 = 0. \end{cases}$$

$x_1=3$ va $x_2=2$ yechimlar topiladi.

Masalaning geometrik shaklini chizsak quyidagi 7.5 chizma hosil bo'ladi.



7.5-chizma

sistemaning aniqlanish sohasi OAVS yopiq soha. Shuning uchun global va lokal ekstremumlar mavjud. Bog'lanish tenglamasi DE kesma to'rtburchak BC to'rtburchak ichiga joylashgan. Demak $F(x_1, x_2)$ funksiyaning qiymatlarini DE kesmada yotgan nuqtalarda taqqoslab tekshiramiz. $(x_1-2)^2 + (x_2-3)^2 = k$ sath chizig'i tenglamasi bo'lib markazi $O_1(2;3)$ nuqtada joylashgan. Chizma 7.5 dan ko'rinib turibdiki shartsiz ekstremumga $O_1(2;3)$ va $V(5;2)$ nuqtalarda erishiladi:

$$F_{0_1 \min} = (2-2)^2 + (3-3)^2 = 0, \quad f_{B_{\max}} = (5-2)^2 + (10-3)^2 = 9 + 49 = 58.$$

Shu bilan bir qatorda $F_{0_1 \min} = 0$ ham lokal ham global minimum bo'ladi. $F_V = 58$ esa global maksimum ega bo'ladi.

Agar faqat DE to'g'ri chiziq ustida yotgan nuqtalarni ko'rib chiqsak, shartli global maksimum $Y_e(0,7)$ nuqtada erishiladi va $F_{E_{\max}} = (0-2)^2 + (7-3)^2 = 20$. G nuqtaning koordinatalarini topish uchun aylanaga urinma chiziq tenglamasini tuzamiz

$$F_{x_2}^{1'}(x_1, x_2) = 2(x_1-2) + 2(x_2-3)x_2^1 - 0, \quad 2(x_1-2) + 2(x_2-3) \cdot (-1) = 0,$$

$$x_2^1 = k_{DE} = -1 \text{ bo'lgani uchun} \quad \begin{aligned} 2x_1 - 2 - 2x_2 + 6 &= 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2 &= 0. \end{aligned}$$

va quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{array}{r} + \quad x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ \quad x_1 + x_2 - 7 = 0 \\ \hline 2x_1 - 6 = 0 \\ x_1 = 3, x_2 = 4. \end{array}$$

Demak G nuqtaning koordinatalari $x_1 = 3, x_2 = 4$ bo'lib,
 $F_{G \min} (3-2)^2 + (4-3)^2 = 1 + 1 = 2$. Shunday qilib G statsionar nuqtaning koordinatalarini topdik.

quyidagi masalalarda (7.18)-(7.19) Lagranj usulini qo'llab statsionar nuqtalarni toping va shartli ekstremumlarni aniqlang.

$$7.14 \quad F = x_1^2 + x_2^2, \quad x_1 + x_2 = 1 \text{ bo'lganda}$$

$$7.15 \quad F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1, \quad x_1^2 + x_2^2 = 4 \text{ bo'lganda,}$$

$$7.16 \quad F = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2, \quad x_1 + x_2 \leq 10 \text{ sohada } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad x_1 + x_2 = 6 \text{ bo'lganda,}$$

$$7.17 \quad F = x_1^2 - x_2^2, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 16 \text{ sohada } x_1 - x_2 = 4 \text{ bo'lganda,}$$

$$7.18 \quad F = x_1 + x_2, \quad 0 \leq x_1 \leq 6, \quad 0 \leq x_2 \leq 4 \text{ sohada } (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = 4 \text{ bo'lganda,}$$

$$7.19 \quad F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq 10 \text{ sohada } x_2 - 2x_1 = 5 \text{ bo'lganda.}$$

Quyidagi masalalarda (7.20-7-24) Lagranj usulini qo'llab shartli ekstremumlarni tekshirib, statsionar nuqtalarni toping:

$$7.20 \quad F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3, \quad \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1 \text{ bo'lganda;}$$

$$7.21 \quad F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 6 \text{ va } x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 12 \text{ bo'lganda;}$$

$$7.22 \quad F(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1 \text{ bo'lganda;}$$

$$7.23 \quad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4, \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \text{ va } x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4} \text{ bo'lganda;}$$

$$7.24 \quad F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 8 \text{ va } x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3} \text{ bo'lganda;}$$

§3 Qavariq programmalash masalalari

Quyidagi shartlarni

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (7.23)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i=1, n) \quad (7.24)$$

$$F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \quad (7.25)$$

qanoatlantiruvchi chiziqsiz programmalash masalasi berilgan bo'lsin. Bu yerda f va q_i - $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarda bog'liq funksiyalar. Yuqorida ko'rsatilgan masalani Yechish uchun bironta umumiy usul yo'q. Shuning uchun f va q_i funksiyalarga har xil shartlar qo'yib chiziqsiz programmalash masalalarini kerakli usullar yordamida yechish mumkin.

xususiyl holda (7.25) funksiyaga qavariq (botiq) funksiya, (7.24) va (7.23) qavariq soha shartlari bajarilganda masalalarni yechish mumkin.

Shuning uchun Quyidagi ayrim zarur ta'rif va teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

Ta'rif 7.1. Agar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya $G \subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $x_1 \in G$, $x_2 \in G$ nuqtalar va $0 \leq \lambda \leq 1$ son uchun

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \leq \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1) \quad (7.26)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya pastga qavariq deyiladi.

Ta'rif 7.2. Agar $f(x)$ funksiya $G \subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $x_1 \in G$, $x_2 \in G$ nuqtalar va $0 \leq \lambda \leq 1$ son uchun

$$f(\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1) \geq \lambda f(x_2) + (1-\lambda)f(x_1) \quad (7.27)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya yuqoriga qavariq deyiladi.

Ta'rif 7.3. Agar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qavariq (botiq) funksiya bo'lib $q_i(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1, m$) qavariq bo'lsa, u vaqtda (7.23) – (7.25) masalaga qavariq programmalash masalasi deyiladi.

Teorema 7.1. Qavariq programmalash masalasining istalgan lokal maksimumi (minimumi) global maksimum (minimum) bo'ladi.

Ta'rif 7.4. $L(x)$ funksiyaga (7.23) – (7.25) qavariq programmalash masalasining Lagranj funksiyasi deyiladi, bu yerda

$$L(x) = L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)], \quad (7.28)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – Lagranj ko'paytuvchilari.

Ta'rif 7.5. $(x_0, \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi deyiladi, agar barcha $x_i \geq 0$ ($i=1, m$) va $\lambda_i \geq 0$ ($i=1, m$) – lar uchun $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0) \leq L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0) \leq L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ bo'lsa,

Qavariq funksiyalarning ayrim xossalari va teoremlarni isbotsiz keltiramiz:

1. G qavariq to‘plamda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya pastga qavariq bo‘lsa, ixtiyoriy haqiqiy b son uchun $f(x) \leq b$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami qavariq bo‘ladi.

2. G qavariq to‘plamda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya yuqoriga qavariq bo‘lsa, b ixtiyoriy son bo‘lganda $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami qavariq bo‘ladi.

3. Ikkita G_1 va G_2 qavariq to‘plamning kesishmasi ham qavariq to‘plam bo‘lganligi sababli: G qavariq to‘plamda aniqlangan $q_i(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ ($i=1, m$) funksiyalar pastga (yuqoriga) qavariq bo‘lib b_i ($i=1, m$) ixtiyoriy sonlar bo‘lganda.

$q_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq b_i$ ($q_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq b_i$), ($i=1, m$), tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami pastga (yuqoriga) qavariq to‘plam bo‘ladi (1-chi va 2-chi xossalarga asosan).

4. G qavariq to‘plamda aniqlangan $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1, m$) funksiya pastga (yuqoriga) qavariq bo‘lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lgan

$$q(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i q_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (7.29)$$

funksiya ham pastga (yuqoriga) qavariq bo‘ladi.

5. G qavariq to‘plamda aniqlangan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya pastga (yuqoriga) qavariq bo‘lishi uchun u o‘z ichiga olgan noma‘lumlarining ixtiyoriy biri bo‘yicha, qolganlarining belgilab olgan (misol uchun $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}, \dots, \overline{x_n}$) qiymatlarida, pastga (yuqoriga) qavariq bo‘lishi zarur va yetarlidir.

6. Agar $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ($i=1, n$) funksiyalar G qavariq to‘plamda aniqlangan qavariq funksiyalar bo‘lsa, $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($1 \leq i \leq m$) funksiya ham qavariq bo‘ladi. Agar kamida bitta $x \in G$ nuqtada $q_i(x) > b_i$ ($i=1, m$) tengsizlik bajarilsa, ya‘ni Sleyter sharti bajarilsa, u vaqtda quyidagi teorema o‘rinli bo‘ladi. (Kun – Takker teoremasi).

Teorema 7.2. $x = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \geq 0$ nuqta (7.23) – (7.25) Masalaning optimal yechimi bo‘lishi uchun bu nuqtada

$$\frac{\partial L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial x_j} \leq 0, \quad (7.30)$$

$$x_j^0 \frac{\partial L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^0 \geq 0, \quad (7.31)$$

$$\frac{\partial L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_j} \geq 0, \quad (7.32)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial L(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)}{\partial \lambda_j} = 0, \quad \lambda_i^0 \geq 0 \quad (7.33)$$

$$(i=1, m, j=1, n)$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Masala 7.25. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 8, \\ 2x_1 - x_2 &\leq 12. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (7.35)$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \quad (7.36)$$

f-funksiyaning maksimum qiymatini toping.

yechish. $f(x_1, x_2)$ funksiya botiq funksiya, chunki $f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$ chiziqli funksiyalar yig'indisidan iborat (Shuning uchun uni botiq funksiya sifatida ko'rish mumkin) va $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$ funksiya esa manfiy aniqlangan funksiya bo'lib, botiq funksiya hisoblanadi. (7.34) sistema esa chiziqli tengsizliklar sistemasidan iborat.

Demak Kun – Takker teoremasidan foydalansa bo'ladi.

Boshlab Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1 (8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2 (12 - 2x_1 + x_2)$$

Lagranj funksiyasi $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ ga (7.30)-(7.33) shartlarni qo'llasak, quyidagilar hosil bo'ladi.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 12 - 2x_1 + x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

va

$$\left. \begin{aligned} x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_1 (2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0, \\ x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_2 (4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= \lambda_1 (8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ \lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= \lambda_2 (12 - 2x_1 + x_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

$$X_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0. \quad (7.39)$$

(7.37) sistemani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz.

$$\left. \begin{aligned} 2X_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 2, \\ 4X_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 &\geq 4, \\ X_1 + 2X_2 &\leq 8, \\ 2X_1 - X_2 &\leq 12. \end{aligned} \right\} \quad (7.40)$$

(7.40) sistemaga qo‘shimcha musbat bazisli o‘zgaruvchilar kiritib quyidagi sistemani hosil qilamiz ($\vartheta_1, \vartheta_2, W_1, W_2$)

$$\left. \begin{aligned} 2X_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \vartheta_1 &= 2, \\ 4X_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - \vartheta_2 &= 4, \\ X_1 + 2X_2 + W_1 &= 8, \\ 2X_1 - X_2 + W_2 &= 12. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \vartheta_1 \geq 0, \vartheta_2 \geq 0, W_1 \geq 0, W_2 \geq 0. \quad (7.42)$$

(7.41) tenglikni hisobga olib quyidagini yozib olish mumkin:

$$\vartheta_1 x_1 = 0, \vartheta_2 x_2 = 0, W_1 \lambda_1 = 0, W_2 \lambda_2 = 0. \quad (7.43)$$

Agar (7.41) Sistemaning bazisli yechimlarini (7.43) shartlarini hisobga olib yechsak, Lagranj funksiyasining egarli nuqtasi topiladi va shu bilan Masalaning optimal yechimi aniqlanadi. (7.41) sistemaning bazisli yechimlarini topish uchun chiziqli programmalashning sun‘iy bazis usulidan foydalanamiz. Bu usulidan foydalanish uchun sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalarga qo‘shimcha z_1 va z_2 musbat o‘zgaruvchilar kiritib chiziqli programmalashning Quyidagi masalasiga keltiramiz

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \vartheta_1 + z_1 &= 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - \vartheta_2 + z_2 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + W_1 &= 8, \\ 2x_1 - x_2 + W_2 &= 12. \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

$$f = -Mz_1 - Mz_2 \rightarrow \max \quad (7.45)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \quad (7.46)$$

(7.44) – (7.46) masalani yechish paytida hamma vaqt (7.43) shartni hisobga sistemaning (7.44) sistemaning yechimini topamiz.

Jadval 7.1

№	Bazis	So	Ro	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	M
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	Z_1	z_2
1	z_1	-M	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	z_2	-M	4	0	4	2	-1	0	-1	0	0	0	1
3	w_1	O	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	w_2	O	12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			-										
6			-6	-2	-4	-3	-1	1	1	0	0	0	0

Jadval 7.2

№	Bazis	So	Ro	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2	
1	z_1	-M	2	2	0	1	2	-1	1	0	0	1	0	
2	z_2	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	-1/4	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	
3	w_1	0	6	1	0	0-1	$\frac{1}{2}$	0	-1/4	1	0	0	-1/2	
4	w_2	0	13	2	0	$\frac{1}{2}$	-1/4	0	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$	
5			0	0	0	0	0	0	-1/4	0	1	0	0	
6			-2	-2	0	-1	-2	1	0	0	0	0	1	

Jadval 7.3

№	Bazis	So	Ro	0	0	0	0	0	0	0	0	-M	-M	
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2	
1	z_1	0	1	1	0	1/2	1	-1/2	0	0	0	1/2	0	
2	z_2	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	w_1	0	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
4	w_2	0	11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Bu Jadvalga asosan yechim quyidagilarga teng $x_1^0=1$, $x_2^0=1$, $w_1=5$; $w_2=11$, $\lambda_1^0=\lambda_2^0=v_1=v_2=0$.

Yuqoridagilarga asosan

$x_1^0 v_1=0$, $x_2^0 v_2=0$, $\lambda_1^0 w_1=0$, $\lambda_2^0 w_2=0$, $(x_0, \lambda_0)=(1,1,0,0)$ nuqta (7.23)-(7.25) masalaga tuzilgan Lagranj funksiyasi uchun egar nuqtasi bo'ladi.

Demak $x_1=1$, $x_2=2$ (7.23)-(7.25) masalaning optimal qiymati $F_{\max}=2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 1 - 2 = 3$ ga teng.

Masala 7.26. Kun-Takker shartlaridan foydalanib $x^0=(1;0)$ nuqta quyidagi chiziqsiz programmalash masalasining yechimi ekanligini ko'rsating.

$$\left. \begin{aligned} 4X_1 + 5X_2 &\leq 8, \\ 2X_1 + X_2 &\leq 4. \end{aligned} \right\}$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0.$$

$$F_{\min}=f(x)=x_1^2-2x_1+3x_2^2$$

Yechish. $X^0=(1,0)$ nuqtada Sleyter shartlari bajariladi. (Shartlar qat'iy tengsizlikka aylanadi). Demak bu holda $\lambda_0=1$ deb qabul qilishimiz mumkin.

Yuqoridagi asosiy masala shartlariga asoslanib Lagranj funksiyasini tuzamiz

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^2 - 2x_1 + 3x_2^2 - \lambda_1(8 - 4x_1 - 5x_2) - \lambda_2(4 - 2x_1 - x_2),$$

$$X_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2}, \quad \lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2}.$$

Kun-Takker shartlarining bajarilishini tekshirib chiqsak:

$$\frac{\partial L(X_1^0, X_2^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0)}{\partial X_1} = (2X_1 - 2 + 4\lambda_1 + 2\lambda_2)x^0 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0, \lambda^0)}{\partial X_2} = (6X_2 + 5\lambda_1 + \lambda_2)x^0 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X_1^0, X^0)}{\partial \lambda_1} = (4X_1 + 5X_2 - 8)X^0 = -4 < 0,$$

$$\frac{\partial L(X_1^0, \lambda_2^0)}{\partial \lambda_2} = (2x_1 + x_2 - 4)x^0 = -2 < 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0, \lambda^0)}{\partial x_1} \cdot X_1^0 = 0, \frac{\partial L(X^0, \lambda^0)}{\partial x_2} \cdot X_2^0 = 0, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0, \lambda^0)}{\partial \lambda_{T1}} \cdot \lambda_1^0 = 0 \Rightarrow (-4) \cdot 0 \rightarrow \lambda_1^0 = 0,$$

$$\frac{\partial L(X_2^0, X^0)}{\partial \lambda_2} \cdot \lambda_2^0 = 0 \Rightarrow (-2)\lambda_2^0 \Rightarrow 0 \Rightarrow \lambda_2^0 = 0.$$

shunday qilib $(x^0, \lambda^0) = (1, 0; 0; 0)$ nuqta Kun-Takker teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Demak $(x^0, \lambda^0) = (1, 0; 0; 0)$ nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun $X^0 (1; 0)$ nuqta dastlabki berilgan chiziqsiz programmalash masalasini yechimi bo'ladi va

$$f_{\min} = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = -1 \text{ ga teng.}$$

Topshiriqlar

Masala 7.27. Kun-Takker teoremasining shartlaridan foydalanib $x^0(0, 8; 0, 4)$ nuqtaning quyidagi qavariq programmalash masalasining yechimi ekanligini ko'rsating;

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 2, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1 + x_2 &\leq 6. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$f_{\max} = f_1(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \quad (7.28)$$

Quyidagi qavariq programmalash masalalarini yeching

Masala 7.28.

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 12, \\ 3x_1 + x_2 &\leq 15, \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \rightarrow \max$$

Masala 7.29

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 7, \\ x_2 &\leq 5, \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

Masala 7.30

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 12, \\ -x_1 + x_2 &\geq -8, \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$$f(x_1, x_2) = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max$$

Masala 7.31

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leq 18, \\ x_2 &\leq 12, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 14. \end{aligned} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \cdot x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 \rightarrow \max.$$

§4. Kvadratik programmalash masalalari

Kvadratik programmalash masalasi qavariq programmalash masalasining Xususiy bir holidir. Faqat uning matematik modelidagi chegaraviy shartlar chiziqli tenglama va tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa umumiy holda chiziqli va kvadratik formalarning yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_j \{ \leq, =, \geq \} b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (7.47)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (7.48)$$

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \dots + d_{nn}x_n^2 \rightarrow \max (\min). \quad (7.49)$$

(7.47)-(7.49) kvadratik programmalash masalalarini Yechish uchun ayrim zarur bo'lgan ta'rif va teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

Ta'rif 7.6. Quyidagi ko'rinishdagi

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j = & d_{11}x_1^2 + d_{22}x_2^2 + \dots + d_{nn}x_n^2 + 2d_{12}x_1x_2 + \\ & + 2d_{13}x_1x_3 + \dots + 2d_{n-1}x_{n-1}x_n \end{aligned} \quad (7.50)$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan o'zgaruvchi sonli funksiyaga kvadratik forma deyiladi.

(7.50) formani vektor ko'rinishda yozish mumkin

$$f(x) = x^1 D X, \quad (7.51)$$

bu yerda

$$X^1 = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (d_{ij} = d_{ji}), \quad i, j = \overline{1, n}.$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(7.49) kvadratik funksiyaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishi
(7.50) kvadratik formaning pastga (yuqoriga) qavariq bo'lishiga bog'liqdir.

Ta'rif 7.7. $X=0$ dan boshqa barcha $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar uchun $f(X) < 0$ o'rinli bo'lsa, $f(X)$ ga manfiy aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

Ta'rif 7.8 $X=0$ dan boshqa barcha $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ lar uchun $f(X) > 0$ o'rinli bo'lsa, $f(X)$ ga musbat aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

Ta'rif 7.9. Agar $x^1 D x$ kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'lsa, $x^1 D x$ kvadratik formaga nomanfiy aniqlangan deyiladi.

Ta'rif 7.10 Agar $X^1 D X \leq 0$ tengsizlik barcha $X \neq 0$ lar uchun to'g'ri bo'lsa va $X=0$ uchun $X^1 D X = 0$ bajarilsa, $X^1 D X$ ga nomusbat aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

$$\text{Teorema 7.3. Agar } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}$$

kvadratik formada barcha tartibdagi

$$D_1 = d_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_i = \overline{1, n}$$

aniqlovchilar noldan farqli bo'lsa, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik formani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2,$$

$$\text{bu yerda } \alpha_i = \frac{D_i}{D_1}, i = \overline{1, n}$$

Demak, α_i koeffitsientlarning ishorasi D_i aniqlovchilarning ishoralariga bog'liq bo'lib kvadratik formaning ko'rinishini aniqlaydi va quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1. Agar $D_1, D_2, \dots, D_n$ aniqlovchilarning har biri musbat bo'lsa, $f(X)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'ladi.
2. Agar, $D_i, i = \overline{1, n}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar navbat bilan almashib kelsa, α_i koeffitsientlar manfiy bo'lsa, $f(X)$ forma manfiy aniqlangan bo'ladi.
3. Agar D matritsaning rangi $r < n$ bo'lsa, hamda $D_i, i = \overline{1, n}$ aniqlovchilar musbat ishorali bo'lib, qolganlari nolga teng bo'lsa, $f(X)$ kvadratik forma nomanfiy aniqlangan bo'ladi.
4. Agar D matritsaning rangi $r < n$ bo'lib, $1, D_i, i = \overline{1, n}$ qatorda ishoralar almashib kelsa hamda $D_{r+i} = 0, i = \overline{1, n}$ bo'lsa, kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'ladi.
5. Agar, $1, D_i, i = \overline{1, n}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar almashmasa hamda manfiy ishorali aniqlovchilar mavjud bo'lsa, $f(X)$ kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan bo'ladi.

Masala 7.32. quyidagi kvadratik formaning ko'rinishi aniqlansin:

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 - x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_3^2$$

Yechish.

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad D_1 = -2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +2 - 1 = 1, \quad D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -4 \end{vmatrix} = -2\frac{3}{4};$$

Demak $1, D_1, D_2, D_3$ ya'ni $1, -2, 1, -2\frac{3}{4}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar navbat bilan almashgani uchun $F(x_1, x_2, x_3)$ formaning forma manfiy aniqlangandir.

Nomanfiy 7.4. nomanfiy $F(X) = XDX$ kvadratik forma E_n Yevklid fazosida qavariq funksiyadir. Agar kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsa, u qat'iy qavariq funksiya bo'ladi.

Teorema 7.5. nomusbat $F(X) = XDX$ kvadratik forma E_n Yevklid fazosida yuqoriga qavariq funksiyadir. Agar kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lsa, u qat'iy yuqoriga qavariq funksiya bo'ladi.

Shunday qilib kvadratik programmalash masalasini Ta'rifini Quyidagicha berish mumkin.

Ta'rif 7.11. Quyidagi shartlarni

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq \epsilon_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (7.52)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (7.53)$$

qanoatlantiruvchi

$$f(X) = \sum_{j=1}^n d_j x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj} x_k x_j \quad (7.54)$$

funksiyaning maksimum (minimum) qiymatini topishga formaning programmalash masalasi deyiladi. Bu yerda $\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj} x_j$ – manfiy (musbat) – yarim aniqlangan kvadratik forma.

(7.52)-(7.54) kvadratik programmalash ta'rifini yechish uchun funksiyasining funksiyasini quyidagicha tuzib olamiz

$$L(X, \lambda) = \sum_{j=1}^n d_j x_j + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n C_{kj} x_k x_j + \lambda_1 \left(\epsilon_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \right) \quad (i = \overline{1, m})$$

Agar $L(X, \lambda)$ funksiya $(X_0, \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ egar nuqtaga ega bo'lsa, yani quyida shartlar qanoatlantirilsa:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \leq 0, \quad (j = \overline{1, n}); \quad (7.55)$$

$$x_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, \quad (j = \overline{1, n}); \quad (7.56)$$

$$x_j^0 \geq 0. \quad (j = \overline{1, n}); \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} \geq 0, \quad (i = \overline{1, m}); \quad (7.58)$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} = 0, \quad (i = \overline{1, m}); \quad (7.59)$$

$$\lambda_i^0 \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}); \quad (7.60)$$

bu yerda $\frac{\partial L_0}{\partial x_j}$ va $\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}$ Lagranj funksiyasidan olingan xususiy

hosilalarning egar nuqtadagi qiymatlari. Endi (7.55) va (7.58) tengsizliklarga $\vartheta_j (j = \overline{1, n})$ va $W_i (i = \overline{1, m})$ qo'shimcha o'zgaruvchilar

kiritib (7.55)-(7.60) tengsizliklarni tenglamalar sistemasi ko‘rinishiga keltiramiz

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} + \vartheta_j = 0 \quad (j = \overline{1, n}); \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} - W_j = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \quad (7.62)$$

$$X_i^0 \vartheta_j = 0 \quad (i = \overline{1, n}); \quad (7.63)$$

$$\lambda_i^0 W_j = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \quad (7.64)$$

$$X_i^0 \geq 0, \vartheta_j \geq 0, W_i \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}) \quad (7.65)$$

Demak (7.52)-(7.54) kvadratik programmalash masalasini hal qilish uchun (7.61) va (7.65) sistemalarning shunday manfiy bo‘lmagan yechimlarini topish kerakki, bu yechimlar (7.63) va (7.64) shartlarni albatta qanoatlantirsin.

Bu yechimlar to‘plamini bazislar Bazislar usulidan foydalanib,

$$f(X, \lambda) = - \sum_{i=1}^m M \lambda_i \quad \text{funksiyaning} \quad (7.61) - (7.64) \quad \text{shartlarini}$$

qanoatlantiruvchi maksimum (minimum) qiymatlarini topamiz.

Shunday qilib (7.52) – (7.54) kvadratik programmalash masalasini yechish uchun quyidagi bosqichlarni bajarish kerak

1. Lagranj funksiyasini tuzamiz;
2. Egar nuqtasi mavjudligining zarur va yetarli shartlarini Lagranj funksiyasi uchun (7.61) – (7.65) ko‘rinishda yozamiz.
3. Sun‘iy bazis usulini qo‘llab, Lagranj funksiyasi uchun egar nuqtasini mavjudligini yoki mavjud emasligini ko‘rsatamiz va bu nuqtaning koordinatalarini topamiz.
4. Otimal yechimlarini yozib olamiz va optimal rejani tuzamiz.

Yuqoridagi formulalar va qoidalarning qo‘llanishini 7.25 yechilgan masalada ko‘rish mumkin.

Topshiriqlar

quyidagi kvadratik programmalash Masalalarini (7.32-7.45) yeching:

7.32. Quyidagi kvadratik programmalash masalasining yechimlarini
 Kun-shartlarining teoremasining shartlaridan foydalanib
 toping

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 13, \\ 2x_1 + x_2 \leq 9. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$f(X) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 \rightarrow \max.$$

$$\begin{aligned}
 7.33. \quad & \left. \begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 4, \\ x_1 + x_2 &\leq 2. \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \\
 & f_{\max} = 2x_1 + 3x_2 - 2x_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.34. \quad & \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geq 5, \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\geq 2. \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\
 & f_{\min} = 4x_1^2 + 3x_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.35. \quad & \left. \begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\leq 9, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 12. \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\
 & f_{\max} = 5x_1 + 6x_2 - x_1^2 + x_1 \cdot x_2 - x_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.36. \quad & 3x_1 + 2x_2 \leq 16 \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\
 & f_{\max} = 8x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.37. \quad & \left. \begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 20, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 8. \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \\
 & f_{\max} = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.38. \quad & \left. \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 6, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 4. \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\
 & f_{\max} = -x_1 - 2x_2 + x_2^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.39. \quad & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0. \\
 & f(X) = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7.40. \quad & \left. \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 16, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 &= 4. \end{aligned} \right\} \\
 & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7.41. \quad & \left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leq 6, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10. \end{aligned} \right\} \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \\
& f_{\max} = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \\
7.42. \quad & \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 6. \end{aligned} \right\} \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
& f_{\min} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 \\
7.43. \quad & \left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 8, \\ x_2 + x_3 &= 4. \end{aligned} \right\} \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
& f_{\max} = x_1 - x_2^2 - 2x_1x_2 \\
7.44. \quad & \left. \begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 2, \quad 0 \leq x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_3 \leq 6. \end{aligned} \right\} \\
& f_{\min} = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \\
7.45. \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\
& x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \\
& f_{\max} = x_1 - x_2^2 - x_3^2
\end{aligned}$$

§5. Gradiyentlar usuli

vaqtdgacha vaqtdgacha chiziqsiz programmalash masalalarini simpleks usulni qo'llab yechgan edik. Lekin simpleks usul chekli imkoniyatga ega bo'lganligi uchun chegaraviy shartlari va maqsad funksiyasining tarkibiy qismi murakkab bo'lgan masalalarga qo'llab bo'lmaydi. Shuning hollarda bunday hollarda kvadratik va qavariq programmalash masalalarini yechish uchun gradiyent usullarini qo'llash ancha qulaylik yaratadi. chiziqsiz masalasining masalalarini gradiyent usullarini qo'llab yechish uchun ayrim zarur bo'lgan ta'rif va qoidalarini keltiramiz.

Bizga n o'lchovli E_n Yevklid fazosi berilgan bo'lsin. E_n fazosining biror Sohasida $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiya o'zining xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz funksiyalar to'plamini tashkil etsin. Bu funksiyalar to'plamini S^1 birgalikda belgilasak, E_n da $f \in C^1$ funksiyaning gradiyenti pRoeksiyalarini quyidagicha yozish MuMkin

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

Demak E_n da $f \in C^1$ funksiyaning proyeksiyalarini proyeksiyalari vektor ustun bo'lib, u simvolik ravishda quyidagicha yoziladi.

$$g \text{ ga } df = \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{\ell}_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} \bar{\ell}_2, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \bar{\ell}_n$$

bu yerda $\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \dots, \bar{\ell}_n$ ortlar.

Gradiyentni E_n da koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha yoziladi

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \bar{\ell}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \bar{\ell}_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \bar{\ell}_n \right)$$

$f(X)$ funksiyaning berilgan x^0 nuqtadagi gradiyentini quyidagi

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} \right)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

berilgan $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada $f(X)$ funksiya dan gradiyent yo'nalishi bo'yicha olingan hosila eng katta qiymatga erishadi, ya'ni

$$|\nabla f(X^0)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} \right)^2}$$

ga teng bo'ladi va gradiyent yo'nalishi eng tez o'sish yo'nalishi bo'ladi.

$f(X)$ funksiyaning E_n ishi x^0 nuqtasidagi gradiyenti $\nabla f(X^0)$ nuqtadan o'tuvchi yuksaklik sirti ($f(X) = \text{const}$) ga perpendikulyar bo'ladi.

$$-\nabla f(X^0) = \left(-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, -\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}, \dots, -\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n} \right)$$

vektor $f(X)$ funksiyaning x^0 nuqtadagi eng tez kamayish yo'nalishini ko'rsatadi va uning x^0 nuqtadagi antigradiyenti deyiladi.

Agar X nuqtada $f(X)$ funksiya uchun $\nabla f(X) = 0$ bo'lsa, u vaqtda nuqtasidagi $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtaga stasionar nuqta deyiladi.

Endi $f(X) \in C^1$ funksiya dan ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha hosilalarning hosila olish tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif 7.12. Berilgan $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in C^1$ funksiya dan $S(s_1, s_2, \dots, s_n)$ ($\|S\| = 1$) yo'nalish bo'yicha olingan hosila deb quyidagi limitga aytiladi.

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(X^0 + \lambda S) - f(X^0)}{\lambda}.$$

Agar $f(X)$ funksiya $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ nuqtada

differentiallanuvchi funksiya bo'lsa, ixtiyoriy $S(\|S\|=1)$ uchun $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ mavjud bo'ladi, hamda

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = (\nabla f(X^0), S) \quad (7.66) \text{ o'rinli bo'ladi.}$$

Haqiqatan ham ixtiyoriy cheksiz kichik $\lambda > 0$ uchun quyidagi tenglik

$$f(X^0 + \lambda S) - f(X^0) = (\nabla f(X^0), (X^0 + \lambda S - X^0)) + o(\|X^0 + \lambda S - X^0\|).$$

bajariladi.

jadvalganda

$$f(X^0 + \lambda S) = f(X^0) + \lambda (\nabla f(X^0), S) + o(\|\lambda S\|)$$

va

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{f(X^0 + \lambda S) - f(X^0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\lambda (\nabla f(X^0), S) + o(\|\lambda S\|)}{\lambda} = (\nabla f(X^0), S)$$

Bizga ma'lumki

$$(\nabla f(X^0), S) = \|\nabla f(X^0)\| \|S\| \cos(\nabla f(X^0)^\wedge, S).$$

Demak

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = \|\nabla f(X^0)\| \|S\| \cos(\nabla f(X^0)^\wedge, S).$$

Shunday qilib Bundan ko'rinadikim, $f(X)$ funksiya X^0 nuqtada S yo'nalish bo'yicha olingan hosila

$$\cos(\nabla f(X^0)^\wedge, S) = 1$$

bo'lganda maksimal qiymatga ega bo'ladi.

Demak, S yo'nalish x^0 nuqtadagi funksiya gradiyentining $(\nabla f(X^0))$

yo'nalish bilan bir xil bo'lganda $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ maksimal qiymatga erishadi.

Masala 7.46. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 12x_2^2$ funksiya $x^0 = (3; 4)$ nuqtada $S = (1, 1)$, $S(\|S\|=1)$ yo'nalish bo'yicha olingan hosila topilsin.

Yechish.

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} \right)'$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 6x_1, \quad \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = 24x_2$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} = 6 \cdot 3 = 18$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} = 24 \cdot 4 = 96.$$

Demak, $\nabla f(X^0) = (18; 96)$

(7.66) asosan

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = (\nabla f(X^0), S),$$

yani $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = (18, 96), (1, 1).$

Bunda $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} = 18 + 96 = 114.$

Masala 7.47. $f(X) = 4x_1^2 + 7x_2^2$ funksiyaning $x^0 = (1; 2)$ nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi aniqlansin.

Yechish. $f(X)$ funksiyaning x^0 nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi: $S = \nabla f(X^0).$

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} \right),$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} = 8x_1,$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} = 14x_2.$$

Demak $S = \nabla f(X^0) = (8, 1; 14; 2)$
 $S = (8; 2)$

yo'nalish berilgan $f(X) = 4x_1^2 + 7x_2^2$ gradiyentiningning $x^0 = (1; 2)$ nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalish bo'ladi.

Masala 7.48. $f(X) = 5x_1^2 + 10x_2^2$ funksiyaning $x^0 = (2, 3)$ nuqtadagi $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} \leq 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha S yo'nalishlari topilsin.

Yechish. $S = (X - X^0) = (x_1 - 2; x_2 - 3)$

Shartga ko'ra $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} \leq 0$

$$(\nabla f(X^0), S) \leq 0$$

$$\nabla f(X^0) = \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} \right)$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1} = 10x_1 \Big|_{x=2} = 20$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2} = 20x_2 \Big|_{x_2=3} = 60$$

$$\nabla f(X^0) = (20; 60).$$

Demak,

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S} ((20; 60), (x_1 - 2; x_2 - 3)) \leq 0$$

$$20(x_1 - 2) + 60(x_2 - 3) \leq 0,$$

yoki

$$20x_1 + 60x_2 - 220 \leq 0,$$

$$x_1 + 3x_2 - 11 \leq 0$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday nuqtalar to'plami $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$

noldan katta bo'lmagan qiymat beruvchi yo'nalishlarni aniqlaydi.

Shuni ham aytish kerakki ayrim vaqtlarda bu yo'nalish ichida mumkin bo'lgan yoki mumkin bo'lmagan yo'nalishlar ham bo'lishi mumkin.

Ta'rif 7.13. Shunday $\bar{\lambda}$ son mavjud bo'lib, har qanday $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ uchun $x^0 + \lambda S \in M$ o'rinli bo'lsa, $X^0 \in M$ boshlanadigan boshlanadigan yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish deyiladi.

Teorema 7. 6. Agar M to'plam

$g_i(x) \leq 0 \quad (i = \overline{1, m})$ tengsizliklar sistemasi orqali aniqlangan to'plam bo'lib, $x^0 \in M$ va $g_i(x) = 0$ shartni bajaruvchi i indekslar to'plami $I(x)$ bo'lsa, u holda

$$(\nabla g(x^0), S) + \varepsilon \leq 0, \quad (i \in I(x^0)) \quad (7.66)$$

tengsizliklar sistemasini ba'zi $\varepsilon > 0$ da qanoatlantiruvchi S yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'ladi.

Nomusbat 7.7. Agar $x^0 \in M$ nuqtadagi S yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lsa, u holda har qanday $i \in I(x^0)$ uchun

$$(\nabla g_i(X^0), S) \leq 0 \quad (7.67)$$

tengsizlik o'rinlidir.

Yuqoridagi gradiyent usullaridan foydalanib har qanday Chiziqsiz programmalash masalalari yechiladi va umumiy holda lokal ekstremumlarni topish mumkin bo'ladi.

Shuning uchun gradiyent usullarini qo'llab qavariq programmalash masalalarini lokal ekstremumlarini topish mumkin. Har qanday lokal ekstremum, bir vaqtning o'zida global ekstremum ham bo'ladi.

Gradiyent usullarini qullab Masalalarni yechish jarayoni bironta $x^{(k)}$ nuqtadan boshlab ketma-ket izlash natijasida dastlabki masalaning quyidagilargai topiladi.

Gradiyent usullarini ikkita guruhga ajratish mumkin:

1. Izlanadigan $x^{(k)}$ nuqtalar mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan chetga chiqmaydigan masalalarning yechish usuli;

2. Izlanadigan $X^{(k)}$ nuqtalar mumkin bo'lgan yechimlar sohasida va izlanadigan yechim mumkin bo'lgan sohadan tashqarida bo'lgan masalalarni yechish usullari.

birinchi guruhga qarashli masalalarni Frank-Vulf usuli bilan, ikkinchi guruhga qarashli masalalarni esa jarima funksiyasi usuli yoki Errou – Gurvits usuli bilan yechish mumkin.

1. Frank –Vulf usuli. Faraz qilaylikki quyidagi shartlarda

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq \epsilon_i \quad (i=\overline{1,m}) \quad (7.68)$$

$$x_i \geq 0, \quad (i=\overline{1,n}) \quad (7.69)$$

$$f(X)=f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (7.70)$$

botiq funksiyaning maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin.

bu masalaning xususiyatlaridan biri tengsizliklar sistemasi chiziqli tengsizliklardan iborat bo'lganidadir. Shu xususiyatlardan foydalanib chiziqsiz programmalash masalalar ko'rinishiga keltirish mumkin va masalani ketma-ket almashtirishlar yordamida yechish mumkin.

(7.68)-(7.80) masalani yechish jarayoni masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan bironta $x^{(k)}$ nuqtasini topishdan boshlanadi va $x^{(k)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyenti topiladi.

Endi $x^{(k)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyentini topamiz

$$\nabla f(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} \right)$$

va bunga asosan chiziqli funksiBunda tuzamiz

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial f(x^{(k)})}{\partial x_n} x_n \quad (7.71)$$

Bundan keyin (7.68)-(7.69) shartlarga asosan $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, funksiyaning maksimum qiymatini topamiz. Faraz qilaylikki $Z^{(k)}$ nuqtada $F(X)$ funksiya maksimum qiymat qabul qilsin. U vaqtda dastlabki Masalani mumkin bo'lgan yechimining koordinati $x^{(k+1)}$ nuqtada bo'ladi:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \lambda_k (Z^{(k)} - X^{(k)}), \quad (7.72)$$

bu yerda λ_k – ixtiyoriy son bo‘lib, hisoblash qadami deb aytiladi va $0 \leq \lambda_k \leq 1$ ga teng.

λ_k – ixtiyoriy son bo‘lib, uni shunday tanlash kerakki $f(X)$ funksiyaning $X = X^{(k+1)}$ nuqtadagi λ_k bog‘liq bo‘lgan qiymati maksimum qiymat bo‘lsin, ya’ni $f_{\max} = f(X^{(k+1)})$ bo‘lsin. Shuning uchun $\frac{df}{d\lambda_k} = 0$ tenglamani yechib, λ_k ildizlari ichidan eng kichigini tanlab olamiz.

Agar bu izlanadigan ildizlar birdan katta bo‘lsa, u vaqtda $\lambda_k = 1$ deb olamiz va shundan keyin nuqtadagi $X^{(k+1)}$ nuqtaning koordinatlarini hisoblab maqsad funksiyani bu nuqtadagi qiymatini topamiz. Shundan keyin yangi $X^{(k+2)}$ nuqtaga o‘tish zarurmi yoki yo‘qligini aniqlaymiz. Agar zarur bo‘lsa, u vaqtda $X^{(k+1)}$ nuqtada maqsad funksiyasini gradiyentini hisoblab chiziqli programmalash masalasini yechib, $X^{(k+2)}$ yechimlarini topamiz. $X^{(k+2)}$ nuqtani ham yuqoridagi kabi tekshiramiz.

Demak chekli qadamlar natijasida, ma’lum aniqlikda dastlabki masalani yechimlarini topish mumkin. Shunday qilib (7.68)-(7.70) masalani Fran-Vulf usuli bilan yechish jarayoni quyidagi bosqichlarni o‘z ichiga oladi:

1. Dastlabki mumkin bo‘lgan yechimi topiladi;
2. (7.70) funksiyaning mumkin yechimini aniqlovchi nuqtada gradiyenti hisoblaniladi;
3. (7.71) funksiyaning tuzib (7.68) va (7.69) shartlarda maksimal qiymati hisoblaniladi;
4. Hisoblash qadami λ_k topiladi;
5. (7.72) formula yordamida mumkin bo‘lgan yechimini tarkibiy qismlari yangidan topiladi;
6. Keyingi mumkin bo‘lgan yechimga o‘tish zarurligi ko‘rib chiqiladi. Agar zarur bo‘lsa, ikkinchi bosqichga o‘tiladi. Agar zarur bo‘lmasa dastlabki masalaning kerakli yechimi topilgan hisoblaniladi.

Masala.7.49. Frank-Vulf usulini qo‘llab quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{cases} \quad (7.73)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (7.74)$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \quad (7.75)$$

$f(x_1, x_2)$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. $f(X_1, X_2)$ funksiyaning gradiyentini topamiz

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = [2(1-x_1); 4(1-x_2)]$$

va masalaning mumkin bo'lgan dastlabki yechimi deb $x^{(0)} = (0; 0)$, topilgan yechimining aniqlik sifatini esa $|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})| < \varepsilon$, bu yerda $\varepsilon = 0,01$ deb olamiz. Endi bu yechimni qadamba-qadam yaxshilaymiz

1. Almashtirish (yaxshilash, o'zgartirish, yangilash).
 $x^{(0)}$ nuqtada $f(x_1, x_2)$ funksiyaning gradiyentini $x_1 = 0; x_2 = 0$ nuqtada topamiz.

$$\nabla f(X^0) = (2; 4).$$

Demak birinchi bosqichda masalani Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{array} \right\} \quad (7.76)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (7.77)$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \quad (7.78)$$

$f(x_1, x_2)$ funksiyaning maksimum qiymatini topish talab etiladi.

(7.76)-(7.78) masalani simpleks usul bilan yechib dastlabki optimal reja $Z^0 = (0, 4)$ topiladi.

Masalaning mumkin bo'lgan yechimini (7.72) formula yordamida topamiz

$$x^{(k)} = x^{(0)} + \lambda_1 (Z^{(0)} - X^{(0)}), \text{ bu yerda } 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (7.79)$$

$X^{(0)}$ va $Z^{(0)}$ lar qiymatlarni (7.79) qo'ysak,

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(1)} = 0 + \lambda; 0, \\ x_2^{(2)} = 0 + \lambda; 4. \end{array} \right\} \quad (7.80)$$

kelib chiqadi. Bu yerdan λ_1 ni topish uchun x_1 va x_2 larning qiymatlarini (7.80)dan topib (7.78) ga quysak, quyidagi kelib chiqadi

$$f(\lambda_1) = 16\lambda_1 - 32\lambda_1^2.$$

$f(\lambda_1)$ funksiya dan hosila olib 0-ga tenglashtirsak va yechsak quyidagi hosil bo'ladi

$$F^1(\lambda_1) = 16 - 64\lambda_1 = 0, \quad \lambda_1 = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$0 \leq \lambda_1 \leq 1$ bo'lgani uchun, λ_1 ning bu qiymatini qadam deb qabul qilamiz. U vaqtda $x^{(1)} = (0; 1)$

$$f(x^{(1)}) = 2$$

$$f(x^{(1)}) - f(x^{(0)}) = 2 > \varepsilon = 0,01.$$

II Almashtirish. Dastlabki masalaning $X^{(1)}$ nuqtadagi gradiyenti

$\nabla f(X^{(1)}) = (2; 0)$ bo'lgani uchun $f_2(x_1, 0) = 2x_1$ maqsadli funksiyani (7.76) va (7.77) shartlarga asosan maksimum qiymatini topish talab etiladi. Bu masalani simleks usulni qo'llab yechsak $Z^{(1)} = (6, 4; 0, 8)$ yechim kelib chiqadi.

Endi $X^{(2)} = X^{(1)} + \lambda_2(Z^{(1)} - X^{(1)})$ aniqlaymiz. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin.

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= 6,4\lambda_2, \\ x_2^{(2)} &= 1 - 0,2\lambda_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

(7.81) ni (7.75) ga quysak λ_2 ga nisbatan quyidagi tenglik hosil bo'ladi

$$F(\lambda_2) = 2 + 12,8\lambda_2 - 41,76\lambda_2^2, \quad \text{bu yerdan}$$

$$F^1(\lambda_2) = 12,8 - 83,52\lambda_2. \quad F^1(\lambda_2) \text{ ni } 0\text{-ga tenglashtirsak}$$

$$\lambda_2 \approx 0,15 \text{ hosil bo'ladi}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0,96, \\ x_2^{(2)} &= 0,97. \end{aligned} \right\}$$

$$X^{(2)} = (0,96; 0,97), \quad f(X^{(2)}) = 2,996 \text{ bo'lgani uchun}$$

$$f(X^{(2)}) - f(X^{(1)}) = 2,9966 - 2 = 0,9966 > \varepsilon = 0,01 \text{ kelib chiqadi.}$$

III. Almashtirish. $X^{(2)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyentini hisoblaymiz

$$\nabla f(X^{(2)}) = (0,08; 0,12)$$

Demak $F_3(X)$ funksiyaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi

$$F_3(x_1, x_2) = 0,08x_1 + 0,12x_2 \quad (7.82)$$

Endi (7.92) funksiyaning (7.73) va (7.74) shartlarga asosan qiymatini topamiz. Bu qiymat quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi $Z^{(2)} = (6; 0)$.

Yuqoridagilarga asosan $x^{(3)}$ ni aniqlaymiz

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda_3(Z^{(2)} - X^{(2)}).$$

Natijada quyidagilar topiladi

$$\left\{ \begin{aligned} x_1^{(3)} &= 0,96 + \lambda_3(6 - 0,96) = 0,96 + 5,04\lambda_3, \\ x_2^{(3)} &= 0,97 + \lambda_3(0 - 0,97) = 0,97 - 0,97\lambda_3. \end{aligned} \right.$$

$$F(\lambda_3) = 2,9384 + 0,4032\lambda_3 - 27,3416\lambda_3^2,$$

$$F^1(\lambda_3) = 0,4032 - 54,6832\lambda_3,$$

$$0,4032 - 54,6832\lambda_3 = 0,$$

$$\lambda_3 = \frac{0,4032}{54,6832} \approx 0,007.$$

Demak $x^{(3)}=(0,99528 ; 0,96321)$

$F(x^{(3)})=2,99957$

$F(x^{(3)})-F(x^{(2)})=2,99957-2,9966=0,00297<\varepsilon=0,01$.

Shunday qilib $x^{(3)}=(0,99528 ; 0,96321)$ (7.83)-(7.85) masalaning izlanayotgan yechimi hisoblanadi va bu yechim qavariq programmalash masalalarini yechganda ko'rgan 7.26 masalaning yechimiga $x^x=(1 ; 1)$ -ga ancha yaqindir. Agar ε miqdorga yana kamroq qiymat bersak $x^{(k)}=(1,1)$ yechimga yanada yaqinroq maksimal yechimni topish mumkin.

2. Jarima funksiya usuli. Quyidagi shartlarda

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq v_i \quad (i = \overline{1, m})$$
$$x_i \geq 0, \quad (i = \overline{1, n})$$

$F(X) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ botiq funksiyaning maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin.

Bu yerda $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = \overline{1, m})$ funksiya qavariq funksiya to'plamini tashkil qiladi.

bundan keyin maqsad funksiyaning maksimum qiymatini izlash o'rniga $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning maksimum qiymatini izlaymiz, ya'ni

$$F(X) = f(X) + H(X) \rightarrow \max, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Demak $F(X)$ funksiya maqsad funksiya va $H(X)$ ma'lum chegaralar sistemasi bilan aniqlangan jarima funksiyasi yig'indisidan iborat.

$N(X)$ jarima funksiyasini har xil usullar bilan tuzish mumkin.

Ko'pinchalik jarima funksiyasi quyidagi ko'rinishda izlanadi

$$N(X) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) g_i(x), \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bu yerda shunday

$$\alpha_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } g_i(x) \geq 0, \\ \alpha_i, & \text{agar } g_i(x) \leq 0. \end{cases}$$

(7.83)

$\alpha_i(x) \geq 0$ - o'zgarmas sonlar bo'lib, og'irlik koeffitsientlari deb ataladi.

Jarima funksiyasidan foydalanib ketma-ket bir nuqtadan ikkinchisi va hokazo nuqtalarga qadamba-qadam davom etib, bu jarayon kerakli yechimlar topilguncha davom etdiriladi.

Shu bilan birga har bir kelgusi nuqtaning koordinatasi quyidagi formula yordamida topiladi.

$$X_i^{(k+1)} = \max \left\{ 0; X_j^k + \left[\frac{\partial f(X^k)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \frac{\partial g_i(X^{(k)})}{\partial x_j} \right] \right\} \quad (7.84)$$

(7.84) dan ko‘rinib turibdiki, agar kelgusi nuqta dastlabki masalaning mumkin bo‘lgan yechimlar sohasida bo‘lsa, kvadrat qavs ichidagi qo‘shiluvchi nolga teng va kelgusi nuqtani kordinatasida maqsad funksiyasini gradiyenti topiladi. Agar nuqta mumkin bo‘lgan yechimlar sohasidan tashqarida bo‘lsa u vaqtda yana qaytadan yechimlar sohasiga o‘tishga to‘g‘ri keladi va qaytadan o‘zgartiriladi.

Shunday qilib jarima funksiyasi usuli qavariq programmalash masalalarini yechish jarayonida quyidagi bosqichlarni o‘z ichiga oladi:

1. Dastlabki masalani mumkin bo‘lgan yechimlari aniqlanadi;
2. Hisoblash qadami aniqlaniladi;
3. Maqsadli funksiyadan hamma o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosilalar va mumkin bo‘lgan yechimlar sohasini aniqlovchi funksiya topiladi;
4. (7.84) formula yordamida mumkin bo‘lgan yangi yechim nuqtalari aniqlanadi;
5. Topilgan nuqtalarni koordinatlari berilgan chegara shartlarni qanoatlantirishi tekshiriladi. Qanoatlantirmasa kelgusi bosqichga o‘tiladi. Agar topilgan nuqtaning koordinatlari mumkin bo‘lgan yechimlar sohasida aniqlansa, u vaqtda kelgusi mumkin bo‘lgan yechimlariga o‘tish zarurligi o‘rganiladi. Agar zarur bo‘lsa, masalani yechishning ikkinchi bosqichiga o‘tiladi. Agar zarur bo‘lmasa topilgan yechimlar dastlabki masalaning kerakli yechimlari hisoblaniladi.
6. Og‘irlik koeffitsiyentlarining qiymatlari aniqlanadi va 4-chi bosqichga o‘tiladi.

Masala .7.50. Quyidagi chegara shartlarida

$$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2 \leq 18, \quad (7.85)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (7.86)$$

$$f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max \quad (7.87)$$

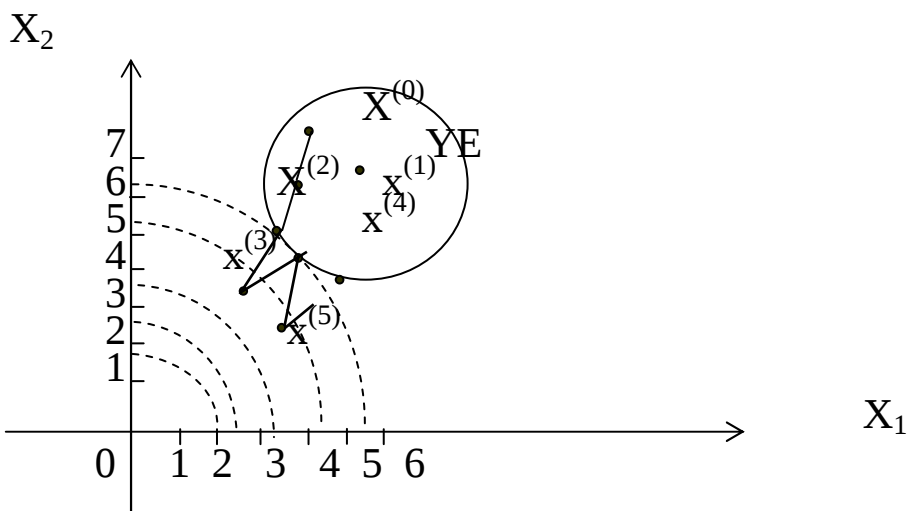
Yechish. Maqsadli funksiya manfiy aniqlangan kvadratik forma bo‘lani uchun, u botiq funksiyaadir. Mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi (7.85), (7.86) esa qavariq sohadir. Demak (7.85)-(7.87) masala qavariq programmalash sohasining masalasidir. Masalani yechish uchun jarima funksiyalar usulini qo‘llaymiz. Oldin mumkin bo‘lgan yechimlar sohasini aniqlaymiz (chizma 7.6). Keyin sath chizig‘ini $f(x_1, x_2) = h$ chizib olamiz. Sath chizig‘i markazi $O(0;0)$ nuqtada bo‘lgan aylanalardan iboratdir. Shu aylanalar to‘plamidan birontasi mumkin bo‘lgan yechimlar sohasiga urinadi. Bu nuqtada maqsad funksiyasi izlanayotgan maksimum qiymatga ega bo‘ladi. X^0 nuqtani aniqlanish sohasidan olsak $X^0 = (6,7)$ teng bo‘ladi. λ ni qiymatini $\lambda = 0,1$ olib va

$g(x_1, x_2) = 18 - (x_1 - 7)^2 - (x_2 - 7)^2$ deb belgilab, undan x_1 va x_2 o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosilalar olsak quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -2x_1; \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2x_1 + 14;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = -2x_2; \quad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2x_2 + 14;$$

Endi (7.84) formulani qo'llab nuqtalar ketma-ketligini tuzib chiqamiz. Natijada tuzilgan nuqtalarning ichidan kerak bo'lgan yechim topiladi.



Chizma 7.6.

I Almashtirish. $X^{(0)} = (6, 7)$ nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasida bo'lgani uchun (7.84) formuladagi kVadrat qavs ichidagi ifoda nolga teng. Demak kelgusi nuqtaning koordinatlari quyidagi formula yordamida hisoblaniladi

$$x_1^{(1)} = \max \left\{ 0; X_1^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_1} \right\} = \max \{ 0; 6 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 6 \} =$$

$$= \max \{ 0; 4,8 \} = 4,8,$$

$$x_2^{(1)} = \max \left\{ 0; X_2^{(0)} + \lambda \frac{\partial f(X^{(0)})}{\partial x_2} \right\} = \max \{ 0; 7 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 7 \} = 5,4.$$

Endi $X^{(1)} = (4,8 ; 5,6)$ nuqtani masalaning yechimlar to'plami sohasiga kiradimi tengsizlikni yo'qligini tekshiramiz. $g(X^{(1)}) = 18 - 4,8^2 - 1,96 = 11,2$ bo'lgani uchun $g(X^{(1)}) = -54,4$.

II. olmashtirish yuqoridagilarga asosan quyidagilarni topamiz:

$$x_1^{(2)} = \max \{ 0; 0,48 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,8 \} = 3,48;$$

$$x_2^{(2)} = \max \{ 0; 0,56 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 5,6 \} = 4,48;$$

$$g(X^{(2)}) = 18 - 9,9856 - 6,3504 = 1,664 > 0, f(x^{(2)}) = -34,816.$$

III Almashtirish. Endi quyidagilarni hisoblaymiz:

$$x_1^{(3)} = \max\{0; 0,384 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 3,84\} = 3,072;$$

$$x_2^{(3)} = \max\{0; 4,48 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,48\} = 3,584;$$

$$g(x^{(3)}) = 18 - 15,429184 - 11,669056 \approx -9,0981.$$

IV. Almashtirish $X^{(3)}$ nuqta masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga kirmaydi.

Shuning uchun,

$$\begin{aligned} x_1^{(4)} &= \max\left\{0; x_1^{(3)} + \lambda \left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_1} \right] \right\} = \\ &= \max\{0; 3,072 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,072] + \\ &+ \alpha \cdot (-2) \cdot 3,072 + 14\} = \max\{0; 2,4576 + \alpha \cdot 0,7856\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2^{(4)} &= \max\left\{0; x_2^{(3)} + \lambda \left[\frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} + \alpha \frac{\partial f(X^{(3)})}{\partial x_2} \right] \right\} = \\ &= \max\{0; 3,584 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,584] + \\ &+ \alpha \cdot (-2) \cdot 3,584 + 14\} = \max\{0; 2,8672 + \alpha \cdot 0,6832\}. \end{aligned}$$

Bu yerda α sonni tanlash muammosi kelib chiqadi. α sonni Shunday tanlash kerakki $X^{(4)}$ nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasining chegarasiga yaqin bo'lsin va shu sohada joylashgan bo'lsin.

Bu talabni $\alpha = 1,9$ qiymat qondiradi.

$\alpha = 1,9$ qiymatda $x_1^{(4)}, x_2^{(4)}$ larni hisoblaymiz:

$$x_1^{(4)} = \max\{0; 2,4576 + 1,9 \cdot 0,7856\} \approx 3,950;$$

$$x_2^{(4)} = \max\{0; 2,8672 + 1,9 \cdot 0,6832\} \approx 4,165;$$

$$g(X^{(4)}) = 9,3025 + 8,037225 \approx 0,660;$$

$$f(X^{(4)}) \approx -32,950.$$

V. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz

$$\begin{aligned} x_1^{(5)} &= \max\{0; 3,950 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 3,950\} = \\ &= \max\{0; 3,950 - 0,790\} = \max\{0; 3,18\} = 3,18. \end{aligned}$$

$$x_2^{(5)} = \max\{0; 4,165 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,165\} = 3,332;$$

$$g(X^{(5)}) = 18 - 14,7456 - 13,454224 \approx -10,2$$

VI. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz

$$x_1^{(6)} = \max\{0; 3,18 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,18 + 1,9 \cdot (-2) \cdot 3,18 + 14]\} \approx 3,987;$$

$$x_2^{(6)} = \max\{0; 3,332 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,332 + 1,9 \cdot (-2) \cdot 3,332 + 14]\} \approx 4,059;$$

$$g(X^{(6)}) = 18 - 9,078169 - 8,649481 \approx 0,272;$$

$$f(X^{(6)}) \approx -32,372.$$

VII. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz

$$x_1^{(7)} = \max\{0; 3,987 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 3,987\} \approx 3,189;$$

$$x_2^{(7)} = \max\{0; 4,059 + 0,1 \cdot (-2) \cdot 4,059\} \approx 3,247;$$

$$g(X^{(7)}) = 18 - 10,169721 - 10,543009 \approx -2,713$$

$$f(X^{(7)}) \approx -3,189^2 - 3,247^2 \approx -10,24.$$

VIII. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz

$$x_1^{(8)} = \max\{0; 3,189 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,189 + 1,9((-2) \cdot 3,189 + 14)]\} \approx 3,999;$$

$$x_2^{(8)} = \max\{0; 3,247 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,247 + 1,9((-2) \cdot 3,247 + 14)]\} \approx 4,027;$$

$$g(X^{(8)}) = 18 - 9,006001 - 8,856576 \approx 0,137;$$

$$f(X^{(8)}) \approx -32,185.$$

XIX. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz

$$x_1^{(9)} = \max\{0; 3,999 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,99]\} \approx 3,199;$$

$$x_2^{(9)} = \max\{0; 4,024 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,024]\} \approx 3,219;$$

$$g(X^{(9)}) = 18 - 14,447601 - 14,29596 \approx -10,744$$

$$f(X^{(9)}) \approx -3,199^2 - 3,219^2 \approx -10,22.$$

X. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz

$$x_1^{(10)} = \max\{0; 3,199 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,199 + 1,9((-2) \cdot 3,199 + 14)]\} \approx 4,004;$$

$$x_2^{(10)} = \max\{0; 3,219 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,219 + 1,9((-2) \cdot 3,219 + 14)]\} \approx 4,012;$$

$$g(X^{(10)}) = 18 - 8,976016 - 8,928144 \approx 0,096$$

$$f(X^{(10)}) \approx -32,128;$$

XI. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz

$$x_1^{(11)} = \max\{0; 4,004 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,004]\} \approx 3,203;$$

$$x_2^{(11)} = \max\{0; 4,012 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,012]\} \approx 3,210;$$

$$g(X^{(11)}) = 18 - 14,417209 - 14,3641 \approx -10,781$$

$$f(X^{(11)}) \approx -3,203^2 - 3,210^2 \approx -10,18$$

XII. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz

$$x_1^{(12)} = \max\{0; 3,203 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,203 + 1,9((-2) \cdot 3,203 + 14)]\} \approx 4,005;$$

$$x_2^{(12)} = \max\{0; 3,210 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,210 + 1,9((-2) \cdot 3,210 + 14)]\} \approx 4,008;$$

$$g(X^{(12)}) = -32,104$$

$$f(X^{(12)}) \approx -4,005^2 - 4,008^2 \approx -32,104;$$

Agar X va XII almashtirishlarni o‘zaro taqqoslasak 10^{-1} aniqlikda bir-biriga teng bo‘ladi. Demak bu yechim oxirgi almashtirish natijasida maksimal yechim bo‘ladi. Xuddi yuqoridagi kabi maqsad funksiya

qiymatlarini $f(X)$ va $g(X)$ funksiyalar gradiyentini $X^{(12)}=(4,005 ; 4,008)$ nuqtada tekshirib ko‘rish mumkin; ya’ni

$$\nabla f(X^{(12)})=(-8,01; -8,016); \nabla g(X^{(12)})=(5,99; 5,984);$$

Mos koordinatlarining nisbatini hisoblasak;

$$\frac{-8,01}{5,99} \approx -1,337, \quad \frac{-8,016}{5,984} \approx -1,339 .$$

Bu koordinatlardan ko‘rinib turibdiki ular deyarlik bir-biriga teng. Demak $\nabla f(X^{(12)})$ va $\nabla g(X^{(12)})$ vektorlar deyarlik parallel vektorlardir. Shu bilan bir qatorda $X^{(12)}=(4,005 ; 4,008)$ nuqta mumkin bo‘lgan yechimlar sohasi chegarasiga nihoyat yaqin joylashgan, chunki $\nabla g(X^{(12)}) \approx 0,078$ bo‘lgani uchun $x_1^{(12)}=4,005$ va $x_2^{(12)}=4,008$ yechimlarni masalaning kerakli yechimlari desa bo‘ladi. Yuqoridagi ko‘rsatilgan almashtirishlarni davom etdirib yechimlarni kattaroq aniqlikda topish mumkin.

Bu masalani geometrik talqini 7.6- chizmada ham ko‘rinib turibdi.

3. Errou – Gurvits usuli. Yuqorida jarima funksiyasi usulini qo‘llab egri chiziqli programmash masalasini yechdik. Lekin bu usulni qo‘llaganda α_i -larni qiymatlarini ixtiyoriy tanlab olgan edik va har bir aniqlangan $X^{(i)}$ ($i=\overline{1,n}$) nuqta dastlab mumkin bo‘lgan yechimlar sohasidan ancha uzoqlashib siljigan edi. Bu kamchilikka Errou-Gurvits usulini qo‘llaganda o‘rin qolmaydi. Bu usulga asosan har bir kelgusi qadam $\alpha_i^{(k)}$ quyidagi formula yordamida hisoblaniladi

$$\alpha_i^{(k)} = \max\{0; \alpha_i^{(k-1)} - \lambda g_i(X^{(k)})\} ; \quad (i=\overline{1,m}) \quad (7.88)$$

$\alpha_i^{(k)}$ - ning dastlabki $\alpha_i^{(0)}$ qiymati deb ixtiyoriy musbat son olinadi.

Masala 7.51. Errou –Gurvits usulini qo‘llab (7.50) masalani yeching: ya’ni Quyidagi chegara shartlarida

$$(x_1-7)^2 + (x_2-7)^2 \leq 18, \quad (7.89)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (7.90)$$

$$F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2 \rightarrow \max.$$

yechish. Errou-Gurvits usulini qo‘llab (7.50) masalani yechganda birinchi uchta almashtirishda $\lambda=0,1$ bo‘lganda yechimlar bir-biriga to‘g‘ri keladi. Bu shuni ko‘rsatadiki har-bir topilgan nuqta mumkin bo‘lgan yechimlar sohasida joylashgan bo‘lib $X_i^{(k)}$ larni qiymatlarini (7.83) va (7.88) formulalar bilan hisoblaganda bir-biridan farq qilmaydi, ya’ni $X_I^{(k)}=0$ ($k=\overline{1,3}$), bo‘ladi.

IV. Almashtirish . $g(X^{(3)}) < 0$ bo‘lgani uchun kelgusi $X^{(4)}$ nuqtani (7.84) formula yordamida hisoblaymiz:

$$x_1^{(4)} = \max \left\{ 0, x_1^{(3)} + \lambda \left[\frac{gf(X^{(3)})}{gx_1} + \alpha^{(4)} \frac{dg(X^{(3)})}{dx_1} \right] \right\} = \max \{ 0, 3,072 + 0,1[(-2) \cdot 3,072 + \alpha^{(4)}((-2) \cdot 3,072 + 14)] \}.$$

$$x_2^{(4)} = \max \left\{ 0, x_2^{(3)} + \lambda \left[\frac{df(X^{(3)})}{dx_2} + \alpha^{(4)} \frac{dg(X^{(3)})}{dx_2} \right] \right\} = \max \{ 0, 3,584 + 0,1[(-2) \cdot 3,584 + \alpha^{(4)}((-2) \cdot 3,584 + 14)] \}.$$

$\alpha^{(4)}$ -ni (7.88) formula yordamida xisoblaymiz:

$$\alpha^{(4)} = \max \{ 0; \alpha^{(3)} - 0,1 \cdot g(X^{(3)}) \} = \max \{ 0; 0 - 0,1 \cdot (-9,0981) \} \approx 0,91$$

Demak $x_1^{(4)} \approx 3,172$; $x_2^{(4)} \approx 3,489$; $g(x^{(4)}) \approx -8,981$.

V. Almashtirish. Topilgan $X^{(4)} = (3,172; 3,489)$ dastlabki berilgan masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga kirmaydi. Shuning uchun (7.84) formula yordamida topamiz. Lekin oldin (7.88) formula yordamida quyidagini hisoblaymiz:

$$\alpha^{(5)} = \max \{ 0; 0,91 - 0,1(-8,981) \} \approx 1,81$$

$$x_1^{(5)} = \max \{ 0; 3,172 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,172 + 1,81((-2) \cdot 3,172 + 14)] \} \approx 3,923.$$

$$x_2^{(5)} = \max \{ 0; 3,489 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,489 + 1,81((-2) \cdot 3,489 + 14)] \} \approx 4,062$$

$$g(X^{(5)}) \approx -0,1.$$

VI. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\alpha^{(6)} = \max \{ 0; 1,81 - 0,1(-0,1) \} \approx 1,82$$

$$x_1^{(6)} = \max \{ 0; 3,923 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,923 + 1,82((-2) \cdot 3,923 + 14)] \} \approx 4,258.$$

$$x_2^{(6)} = \max \{ 0; 4,062 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,062 + 1,82((-2) \cdot 4,062 + 14)] \} \approx 4,319$$

$$g(X^{(6)}) \approx 1,294;$$

$$f(X^{(6)}) \approx -36,784.$$

VII. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$$x_1^{(7)} = \max \{ 0; 4,258 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,258] \} \approx 3,406.$$

$$x_2^{(7)} = \max \{ 0; 4,319 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 4,319] \} \approx 3,455$$

$$g(X^{(7)}) \approx -7,484.$$

VIII. Almashtirish. Quyidagilarni hisoblaymiz:

$$\alpha^{(8)} = \max \{ 0; 1,82 - 0,1(-7,484) \} \approx 2,57;$$

$$x_1^{(8)} = \max \{ 0; 3,406 + 0,1[(-2) \cdot 3,406 + 2,57((-2) \cdot 3,406 + 14)] \} \approx 4,572;$$

$$x_2^{(8)} = \max \{ 0; 3,455 + 0,1 \cdot [(-2) \cdot 3,455 + 2,57((-2) \cdot 3,455 + 14)] \} \approx 4,586;$$

$$g(X^{(8)}) \approx 6,278;$$

$$f(X^{(8)}) \approx -41,935.$$

IX. Almashtirish. $x_1^{(9)}$, $x_2^{(9)}$, va $g(X^{(9)})$ larni topamiz:

$$x_1^{(9)} = \max\{0; 4,572 + 0,1[(-2) \cdot 4,572]\} \approx 3,658,$$

$$x_2^{(9)} = \max\{0; 4,586 + 0,1[(-2) \cdot 4,586]\} \approx 3,669,$$

$$g(X^{(9)}) \approx 4,265.$$

X. Almashtirish. $\alpha^{(10)}$, $x_1^{(10)}$, $x_2^{(10)}$, va $g(X^{(10)})$ larni topamiz:

$$\alpha^{(10)} = \max\{0; 2,57 - 0,1 \cdot (-4,265)\} \approx 3,0$$

$$x_1^{(10)} = \max\{0; 3,658 + 0,1[(-2) \cdot 3,658 + 3,0 \cdot ((-2) \cdot 3,658 + 14)]\} \approx 4,931;$$

$$x_2^{(10)} = \max\{0; 3,669 + 0,1[(-2) \cdot 3,669 + 3,0 \cdot ((-2) \cdot 3,669 + 14)]\} \approx 4,934;$$

$$g(X^{(10)}) \approx 9,451.$$

XI. Almashtirish. $x_1^{(11)}$, $x_2^{(11)}$, va $g(X^{(11)})$ larni hisoblaymiz:

$$x_1^{(11)} = \max\{0; 4,931 + 0,1[(-2) \cdot 4,931]\} \approx 3,945;$$

$$x_2^{(11)} = \max\{0; 4,934 + 0,1[(-2) \cdot 4,934]\} \approx 3,947;$$

$$g(X^{(11)}) \approx -0,654.$$

XII. Almashtirish. $\alpha^{(12)}$, $x_1^{(12)}$, $x_2^{(12)}$, va $g(X^{(12)})$, $f(X^{(12)})$ larni topamiz:

$$x_1^{(12)} = \max\{0; 3,945 + 0,1[(-2) \cdot 3,945 + 3,06 \cdot ((-2) \cdot 3,945 + 14)]\} \approx 5,026;$$

$$x_2^{(12)} = \max\{0; 3,947 + 0,1[(-2) \cdot 3,947 + 3,06 \cdot ((-2) \cdot 3,947 + 14)]\} \approx 5,026;$$

$$g(X^{(12)}) \approx 10,207;$$

$$f(X^{(12)}) \approx -50,521.$$

XIII. Almashtirish. $x_1^{(13)}$, $x_2^{(13)}$, $g(X^{(13)})$ va $f(X^{(13)})$ larni hisoblaymiz:

$$x_1^{(13)} = \max\{0; 5,026 + 0,1[(-2) \cdot 5,026]\} \approx 4,021;$$

$$x_2^{(13)} = \max\{0; 5,026 + 0,1[(-2) \cdot 5,026]\} \approx 4,021;$$

$$g(X^{(13)}) \approx 0,251;$$

$$f(X^{(13)}) \approx -32,337.$$

Bu almashtirishda topilgan $X=(4,021; 4,021)$ yechimlarni kerakli yechimlar deb hisoblasa bo'ladi. Shuni aytish kerakki yuqoridagi almashtirishlar jarayonini davom ettirsa dastlabki masalaning yechimlarini istalgan aniqlikda topsa bo'ladi.

Topshiriqlar

Quyidagi chiziqsiz programmalash masalalarini (7.52-7.54) gradiyent usullarini qo'llab yeching.

7.52. Quyidagi funksiyalarning Berilgan nuqtalarda gradiyentlarini toping.

$$1) Z = x^2y - 2xy + \frac{x}{y}, \quad X^{(0)} = (1; 2)$$

$$2) Z = x_1^3 - 2x_1x_2, \quad X^{(0)} = (0; 1);$$

$$3) Z = x_1^2 + x_2^2, \quad X^{(0)} = (2; 0)$$

$$4) Z = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 + x_2}, \quad X^{(0)} = (1; 0).$$

7.53. Quyidagi funksiyalarning sath chizig'ini va gradiyentlarini Berilgan nuqtalarda hisoblab tuzing:

$$1) Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, \quad X^{(0)} = (4; 5);$$

$$2) Z = (x_1 - 2)^2 - (x_2 - 3)^2, \quad X^{(0)} = (6; 4);$$

$$3) Z = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 2)^2, \quad X^{(0)} = (3; 3);$$

$$4) Z = 2x_1 - x_2^2 - x_2, \quad X^{(0)} = (1; 2);$$

7.54. Gradiyentlar usulini qo'llab $Z = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 5$ funksiyani almashtirish jarayonini $X^{(0)} = (4; 5)$ nuqtadan boshlab maksimum qiymatini toping va yechimni topishning geometrik talqinini ko'rsating.

Frank-Vulf usulini qo'llab 7.55 - 7.56 masalalarni yeching.

7.55. Boshlang'ich nuqtasi $X^{(0)} = (2; 2)$ bo'lganda quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.56. Boshlang'ich nuqtasi $x^{(0)} = (0; 0; 0)$ nuqta va almashtirish jarayonini ko'rsatgichi $f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)}) < 0,01$ bo'lganda, quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 6. \end{array} \right\}$$

$$x_3 \geq 3,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2, x_3) = 6x_2 + 6x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Jarima funksiyasi va Errou-Gurvits usulini qo'llab 7.57-7.59 masalalarni yeching.

7.57. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_2 \leq 2. \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = 4x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.58. Quyidagi shartlarda

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 \leq 8, \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.59. Quyidagi shartlarda

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \end{array} \right\}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

VIII. Bob. Matritsali o‘yinlar nazariyasi masalalari va chiziqli programmalash.

§1. Matritsali o‘yinlar nazariyasining iqtisodiy va geometrik talqini

Bir-biriga zid, manfaatlarning to‘qnash kelishida eng optimal (foydali) yo‘l tanlash nazariyasiga o‘yinlar nazariyasi deyiladi. O‘yinning matematik tushunchasi har xil o‘yinlar to‘plamini qarab chiqishdan paydo bo‘lgan. Lekin uning tadbiq etilish sohasi ancha keng bo‘lib, bir-biriga zid manfaatlarni to‘qnashadigan xilma-xil holatlar to‘plamini o‘z ichiga oladi. Bu o‘yinlar to‘plamiga quyidagilar misol bo‘la oladi: shaxmat, shashka, karta o‘yinlari va boshqalar. O‘yinlar nazariyasiga asos solgan olim Fon Neymandir. Fon Neyman quyidagi masalani o‘rtacha qo‘yadi: agar n ta $R_1, R_2, \dots, R_n$ o‘ynovchilar biror G o‘yinni o‘ynayotgan bo‘lsa, I-o‘ynovchi bu uyinda yutib chiqishi uchun qanday strategiyani tanlashi kerak?

Masalan ikkita raqib (birinchi R_1 va ikkinchi R_2 o‘ynovchi) bo‘lib, ulardan har biri ish tutishining yo‘lini strategiyani ikkinchisidan mustaqil ravishda tanlab oladi.

Misol uchun oq donalar bilan R_1 o‘ynovchi shaxmatchining strategiyasini tanlash birinchi yurishni ko‘rsatish va R_2 qora donalarning mumkin bo‘lgan birinchi, ikkinchi, uchinchi va hakazo

yurishlariga oq donalarning qanday javob berishini ko'rsatish demakdir; qora donalar bilan o'ynovchining strategiyasini tanlash oq donalarning mumkin bo'lgan har bir yurishiga qora donalarning qanday javob berishini ko'rsatish demakdir. Shunday qilib, o'yin natijalari faqat tanlab olingan strategiyalargagina (va ehtimol, natijasi o'yinchilarga bog'liq bo'lmagan tasodifiy sinovlarga) bog'liq bo'lgan to'plamga ega bo'ladi. Demak, agar o'yin V natija olgan bo'lsa, ikkinchi o'yinchi birinchiga $f(v)$ so'm to'laydi yoki teskarisi.

R_1 o'yinchi yutug'ining $M(X,U)$ matematik kutilmasi mos ravishda R_1 -chi va R_2 -chi o'yinchi tanlab olgan X va U strategiyalargagina bog'liq bo'ladi.

Yuqoridagilardan asosan ko'rinadiki o'yinlar nazariyasi quyidagi masalalarni o'rganadi:

1. R_1 -chi o'yinchi R_2 -chi o'yinchining qanday yo'l tutishga bog'liq bo'lmagan holda imkon boricha ko'proq yutuq olishi uchun, ya'ni $\min_u M(X_0, U) = \max_x \{ \min_u M(x, y) \}$ bo'lishi uchun u qanday X_0 strategiya tanlab olish kerak;

2. R_2 -chi o'yinchi R_1 -chi o'yinchining qanday yo'l tutishidan qat'i nazar imkon boricha kamroq yutqizishi uchun, ya'ni $\max_x M(X, U_0) = \min_u \{ \max_x M(x, y) \}$ bo'lishi uchun u qanday U_0 strategiya tanlab olish kerak.

Har bir o'yinchining strategiyalar soni chekli bo'lgan holdagina bu masalalar prinsipial jihatdan yechiladi. Bu yerda umuman har bir o'yinchi qandaydir aniq bir strategiyani emas, balki har bir o'yinni takrorlaganda R_1 -chi o'yinchi uchun ehtimollari $R_1, R_2, \dots, R_n$ bo'lgan $X_1, X_2, \dots, X_n$ strategiyalardan birini, R_2 -chi o'yinchi uchun esa ehtimollari $q_1, q_2, \dots, q_n$ bo'lgan $U_1, U_2, \dots, U_m$ strategiyalardan birini tanlash foydali bo'ladi.

$(R_1, R_2, \dots, R_n)$ va $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ to'plamlarga o'yinchilarning aralash strategiyalari deyiladi. $\{P_n\}$ va $\{q_m\}$ to'plamlarni va R_1 -chi o'yinchi yutug'ining matematik kutilmasini topishga o'yining yechimi deyiladi.

Endi o'yinlar nazariyasiga oid ayrim ta'rif va teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

1- ta'rif. Har qanday G o'yini o'yin matritsasi deb ataluvchi

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa orqali aniqlash mumkin. Bu matritsa R_1 o'yinchi uchun yutuqlar matritsasi deb ataladi.

2- ta'rif. O'yinning miqdoriy natijasiga yutuq deyiladi.

3-ta'rif. Agar o'yinga faqat ikkita ta'raf (ikkita shaxs) qatnashsa, bunday o'yinga juft o'yin deyiladi.

4-ta'rif. Agar juft o'yinda yutuqlar nolga teng bo'lsa, ya'ni birinchi o'yinchining yutug'i, ikkinchi o'yinchining boy berishiga teng bo'lsa, bunday o'yinga yig'indisi nolga teng o'yin deyiladi.

4-ta'rif. Agar A yutuq matritsasi n -ta ustun va m -ta satrga ega bo'lsa, bunday o'yinga $n \times m$ o'lchovli chekli o'yin deyiladi.

5-ta'rif. Yutuq matritsasi topilgan $\alpha = \max_i (\min_j \alpha_{ij})$ songa o'yinning quyi yutug'i deyiladi (yoki maksmin strategiyasi deyiladi).

6-ta'rif. Yutuq matritsasi topilgan $\beta = \min_j (\max_i \alpha_{ij})$ songa o'yinning yuqori yutug'i qiymati (yoki minmaks strategiyasi deyiladi).

7-ta'rif. Agar $\max_i (\min_j \alpha_{ij}) = \min_j (\max_i \alpha_{ij}) = V$ bo'lsa, u vaqtda V -ga o'yinning yutuq qiymati deyiladi.

8- ta'rif. $\alpha = \beta$ o'yinga egar nuqtali o'yin deyiladi.

9-ta'rif. Egari nuqtali o'yinda maksimin va minimaksni topishga optimal strategiya deyiladi.

10-ta'rif. Agar $\alpha \neq \beta$ bo'lsa (egari nuqtaga ega bo'lmasa), u vaqtda sof strategiyani ko'rsatuvchi vektorning tarkibiy qismlariga siljigan strategiya deyiladi.

Teorema 8.1. O'yinning quyi yutug'i yuqori yutug'idan katta bo'la olmaydi.

10-chi ta'rifdan ko'rinib turibdiki sof strategiyani izoh etuvchi vektorning tarkibiy qismlari har bir o'yinchining nisbiy takrorlanish darajasini bildiradi va uning yig'indisi birga teng.

Agar birinchi o'yinchining siljigan strategiyasini $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ va ikkinchi o'yinchining siljigan strategiyasini

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ deb belgilasak, u vaktida } \sum_{i=1}^m x_i = 1, \quad \sum_{j=1}^n y_j = 1$$

bo'ladi, bu yerda $x_i \geq 0, (i = \overline{1, m})$ $y_j \geq 0 (j = \overline{1, n})$. Yuqoridagilarga asoslanib birinchi o'yinchining optimal strategiyasini X^* , ikkinchi o'yinchining optimal strategiyasini U^* belgilasak, u vaqtda ikkala o'yinchining o'yin yutug'i quyidagicha teng bo'ladi.

$$\vartheta = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} x_i^* y_j^* .$$

Optimal strategiya va o'yin yutug'ini aniqlash jarayoniga o'yinning yechimi deyiladi.

Teorema 8.2. Har qanday yig'indisi nolga teng matritsa o'yini siljigan strategiyali yechimga ega.

Teorema 8.3. A matritsaning V- o'yin yutug'i U^* va Z^* optimal strategiya bo'lishi uchun quyidagi tengsizliklarning

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} u_i^* \geq v \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{va} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} z_j^* \leq v \quad (i = \overline{1, m}) \quad \text{bajarilishi zarur}$$

va yetarlidir.

Teorema 8.4. Agar o'yinchilardan birontasi siljigan optimal strategiyani qo'llasa, u vaqtda optimal strategiyaga (sof strategiya) qo'shilgan ikkinchi o'yinchining qanday chastotalar bilan o'yinga kirishidan qat'iy nazar yutuq qiymati v -ga teng bo'ladi.

Masala 8.1. Quyidagi matritsa $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ bilan berilgan o'yin yechimini toping va geometrik talqinini bering.

Yechish. Oldin masalaning egar nuqtaga ega yoki yo'qligini tekshiramiz

Buning uchun quyidagilarni topamiz

$$\min\{2;5\}=2, \quad \max\{2;6\}=6,$$

$$\min\{6;4\}=4, \quad \max\{5;4\}=5,$$

Demak o'yinning quyi yutug'i $\alpha = \max\{2;4\}=4$, yuqori yutug'i esa $\beta = \min\{6;5\}=5$, $\alpha=4 \neq \beta=5$ bo'lgani uchun $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan

berilgan o'yin yechimi siljigan optimal strategiyaga ega bo'lib, uning yutug'i V quyidagi oraliqda joylashgan $4 \leq v \leq 5$.

Agar A o'yinchining strategiyasi $U (u_1, u_2)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda 8.4 teoremaga asosan V o'yinchi V_1 yoki V_2 strategiyani qo'llaganda A o'yinchining o'rtacha yutug'ini qiymati quyidagi tengliklar bilan belgilanadi:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = v, & (V_1 \text{ strategiyani ku'llaganda}) \\ 5u_1^* + 4u_2^* = v. & (V_2 \text{ strategiyani ku'llaganda}) \end{cases}$$

Bu o'yinlarning chastotalarining yig'indisi esa

$$u_1^* + u_2^* = 1.$$

Yuqoridagilarga asosan quyidagi sistema hosil bo'ladi

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

Bu sistemani yechsak $u_1^*=0,4$; $u_2^*=0,6$; $v=4,4$ yechim hosil bo'ladi.

Agar V_1 o'yinchining strategiyasi $Z=(z_1^*, z_2^*)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda 8.4 teoremaga asoslanib quyidagi sistemani keltirib chiqarish mumkin

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = 4,4, \\ 6z_1^* + 4z_2^* = 4,4, \\ z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases}$$

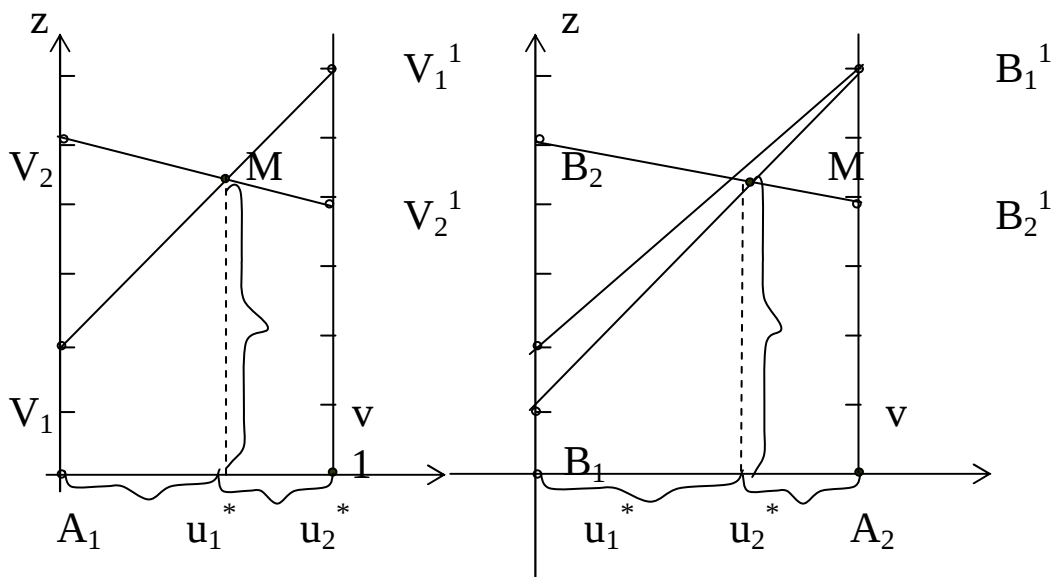
Sistemani yechsak quyidagi yechim hosil bo'ladi;

$$z_1^*=0,2; \quad z_2^*=0,8.$$

Shunday qilib $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o'yin siljigan optimal strategiyasi $U^*=(0,4; 0,6)$, $Z^*=(0,2; 0,8)$ bo'lib, yutuq qiymati esa $v=4,4$ teng.

Endi masalaning geometrik talqinini beramiz. Buning uchun uOz teksligida A o'yinchining siljigan strategiyasini $U=(u_1, u_2)$ bilan belgilasak, u vaqtda xususiy holda $A_1(0;1)$ nuqta A_1 strategiyani, $A_2(0;1)$ nuqta esa A_2 strategiyasini belgilaydi va h.k.

Agar A_1 va A_2 nuqtalarga perpendikulyar chiziqlar o'tkazib, bu chiziqlarga o'yinchilarning yutuqlarini joylashtirib chiqsak quyidagi 8.1 chizma hosil bo'ladi.



8.1-chizma.

Agar A o'yinchi A_2 strategiyani tanlaganda V o'yinchining strategiyasi V_1 bo'lsa, u vaqtda A o'yinchining yutug'i 6 ga teng, V_2 bo'lganda esa 4 ga teng. Bu ikkala son A_2 nuqtaga o'rnatilgan perpendikulyar ustida yotgan V_1^1 va V_2^1 nuqtalarni aniqlaydi. V_1 va V_1^1 , V_2 va V_2^1 nuqtalarni birlashtirsa ikkita to'g'ri chiziq hosil bo'ladi. Bu to'g'ri chiziqlardan ou o'qigacha bo'lgan masofalar har qanday strategiyani tanlagandagi o'rtacha yutuqni ko'rsatadi. Masalan, $V_1 V_1^1$ kesmadan ou o'qigacha bo'lgan masofalar A_1 va A_2 strategiyalarning istalganini tanlagandagi o'rtacha yutug'i $v_1(A_1$ va A_2 strategiyalarni chastotalari mos ravishda u_1 va u_2 -ga teng). V o'yinchining strategiyasi esa V_1 ga teng bo'lib masofa $2u_1+6u_2=v_1$ ga teng. Xuddi shunday V_2 strategiyani qo'llaganda o'rtacha yutuq V_2 , V_2^1 kesmadan ou o'qigacha bo'lgan masofalarga teng bo'lib, bu masofa $5u_1+4u_2=v_2$ ga teng. Shunday qilib $V_1MV_2^1$ siniq chiziqning ordinatalari A o'yinchining har qanday siljigan strategiyasi minimal yutug'i bo'ladi. Bu minimal yutug'lar ichida M nuqtaning ordinatasida maksimum qiymatga ega bo'ladi. Demak M nuqtaning ordinatalari optimal yechimlar bo'ladi. Optimal strategiyasi $u^*=(u_1^*; u_2^*)$ o'yin yutug'ini qiymati esa v teng. $M=(u_1^*; u_2^*)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun $V_1 V_1^1$ va $V_2 V_2^1$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini quyidagi uchta tenglamalar sistemasini yechib topamiz;

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = v, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = v, \\ u_1^* + u_2^* = 1. \end{cases}$$

bu yerdan $u_1^* = \frac{2}{5} = 0,4$, $u_2^* = \frac{3}{5} = 0,6$, $v = \frac{22}{5} = 4,4$.

Xuddi yuqoridagi kabi V o'yinchining optimal strategiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \frac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1 \end{cases}$$

sistemani yechib $z_1^* = \frac{1}{5} = 0,2$; $z_2^* = \frac{4}{5} = 0,8$ siljigan optimal yechimlarning topamiz. Natijada o'yinning siljigan optimal strategiyalarini yechimlari

$U^*=(0,4; 0,6)$ va $Z^*=(0,2; 0,8)$ bo'ladi. O'yin yutug'ining qiymati esa $v=4,4$ ga teng.

Masala 8.2. Quyidagi matritsa bilan berilgan o'yinning yechimini toping.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

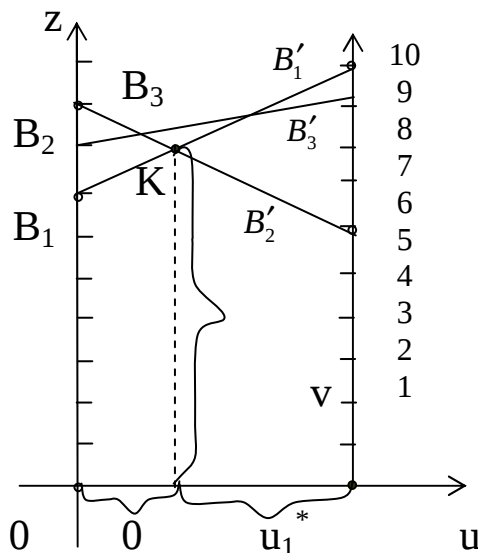
Yechish. Oldin masalaning ega nuqtaga ega yoki yo'qligini tekshiramiz.

Buning uchun quyidagilarni topamiz

$$\min \{7 \ 9 \ 8\} = 7, \quad \max \{7 \ 10\} = 10,$$

$$\min \{10 \ 6 \ 9\} = 6, \quad \max \begin{Bmatrix} 9 \\ 6 \end{Bmatrix} = 9,$$

$$\max \{8 \ 9\} = 9.$$



8.2-chizma.

Demak uyinning quyi yutug'i

$\alpha = \max \{7 \ 6\} = 7$, yuqori yutug'i esa $\beta = \min \{10 \ 9 \ 9\} = 9$,
 $\alpha = 7 \neq \beta = 9$ bo'lgani uchun A matritsa bilan berilgan o'yin yechimi
 siljigan optimal strategiyaga ega bo'lib, yutug'i V quyidagi oraliqda
 joylashgan

$$7 < V < 9.$$

Agar A o'yinchining strategiyasi $U (u_1, u_2)$ vektor bilan berilgan
 bo'lsa, u vaqtda 8.4 teoremaga asosan V o'yinchi V_1 yoki V_2 yoki V_3
 strategiyani qo'llaganda A o'yinchining o'rtacha yutug'ini qiymati
 quyidagi tengliklar bilan belgilanadi.

$$\left. \begin{aligned} 7u_1^* + 10u_2^* &= v, \\ 9u_1^* + 6u_2^* &= v, \\ 8u_1^* + 9u_2^* &= v, \\ u_1^* + u_2^* &= v. \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemani yechsak quyidagi yechim hosil bo'ladi
 $u_1^*=2/3$; $u_2^*=1/3$. $u^*=(2/3, 1/3)$, $v=8$. V o'yinchining strategiyasi $Z^*=(z_1^*, z_2^*, z_3^*)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda 8.4 teoremaga asoslanib quyidagi sistemani keltirib chiqarish mumkin.

$$\left. \begin{aligned} 7z_1^* + 9z_2^* + 8z_3^* &= 8, \\ 10z_1^* + 6z_2^* + 9z_3^* &= 8, \\ z_1^* + z_2^* + z_3^* &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Bu sistemani yechsak, quyidagi yechimlar hosil bo'ladi:

$z_1^*=1/2=0,5$, $z_2^*=1/2=0,5$, $z_3^*=0$, $Z^*=(0,5; 0,5; 0)$ optimal yechim.

Yuqoridagi o'yin yechimining geometrik talqinini chizma 8.2 dan ko'rsatish mumkin: $V_1 V^1$, $V_2 V_2^1$ va $V_3 V^1$ to'g'ri chiziqlar siljigan optimal strategiya bo'lib, $V_1 K V_2^1$ siniq chiziq V o'yinchining yutug'ini quyi chegarasini ko'rsatadi.

Shunday qilib 2×2 ko'rinishdagi o'yin yechimlarini topish usulidan foydalanib, $2 \times n$ va $n \times 2$ ko'rinishdagi o'yinlarni yechimlarini topishni umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

1. Ikkinchi (birinchi) o'yinchining strategiyalariga mos bo'lgan to'g'ri chiziqlar chiziladi;
2. O'yin yutug'ining quyi (yuqori) chegaralari aniqlanadi.
3. Ikkinchi (birinchi) o'yinchining ikkita strategiyasi topiladi va ularga mos bo'lgan to'g'ri chiziqlar aniqlanadi. Shu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini maksimal (minimal) ordinataga ega bo'lgan qiymati topiladi.
4. O'yin yutug'ining qiymati va optimal strategiyasi aniqlanadi.

§2. Matritsali o'yinlar nazariyasi masalalarini chiziqli programmalash masalalariga keltirish

Faraz qilaylik $m \times n$ ko'rinishdagi matritsa bilan aniqlangan o'yin berilgan bo'lsin

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

§1 dagi teorema 8.1 asosan R_1 o'yinchining optimal strategiyasi $U^* = (u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*)$ ga teng bo'lib, o'yin yutug'i V uchun quyidagi tengsizlik bajariladi

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} U_i^* \geq v \quad (j = \overline{1, n}).$$

Masalaning yechimini aniqlash uchun yutuq $v > 0$ deb hisoblaymiz. U vaqtda quyidagi hosil bo'ladi

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} \frac{U_i^*}{v} \geq 1, \quad (j = \overline{1, n})$$

Bu tengsizlikka $\frac{U_i^*}{v} = y_i^*$ almashtirish kiritsak

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i^* \geq 1 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_i^* \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad \text{kelib chiqadi.}$$

Agar $\sum_{i=1}^m U_i^* = 1$ shartdan foydalansak, quyidagi hosil bo'ladi

$$\sum_{i=1}^m y_i^* = \frac{1}{v}. \quad \text{Shart bo'yicha } R_1 \text{ o'yinchi maksimum yutuqqa erishish}$$

uchun harakat qiladi, ya'ni $1/v$ miqdorni minimum qiymatini topishga intiladi. Demak, p_1 o'yinchining optimal strategiyasini topish uchun

$$\text{quyidagi shartlarda } \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i^* \geq 1 \quad (j = \overline{1, n}), \quad y_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \quad F^* = \sum_{i=1}^m y_i$$

funksiyaning minimum qiymatini topish kerak.

Xuddi shunday R_2 o'ynovchi optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarda

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq 1 \quad (i = \overline{1, m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

$$F = \sum_{j=1}^n x_j \quad \text{funksiyaning maksimum qiymatini topish kerak}$$

(bu yerda $x_i = \frac{z_i}{v}$). Shunday qilib, A o'yin matritsasi bilan berilgan

$m \times n$ ko'rinishdagi bir juft o'yinni chiziqli programmalash masalasi bilan almashtirib quyidagi simmetrik, ikkilangan masalalar ko'rinishda yozish mumkin:

Berilgan dastlabki masala. Quyidagi shartlarni

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \leq 1 \quad (i = \overline{1, m}), \quad x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n})$$

qanoatlantiruvchi

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Ikkilamchi masala Quyidagi shartlarni

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}), \quad u_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m})$$

qanoatlantiruvchi

$F(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{j=1}^n y_j$ funksiyaning minimum qiymatini toping.

Ko'rsatilgan ikkilangan masalalarni yechimlaridan foydalanib o'yin strategiyasini va yutug'ini quyidagi formulalar bilan aniqlaymiz

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{i=1}^m y_i^*} = v y_i^*, \quad z_j^* = \frac{z_j^*}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = v x_j^*$$

$$v = \frac{1}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m y_i^*}; \quad (i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$$

Demak R_1 o'yin yechimini chiziqli programmalash usullarini qo'llab, topish jarayoni quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi:

1. O'yin matritsasiga ekvivalent bo'lgan bir juft ikkilangan chiziqli programmalash masalasi tuziladi;

2. Bir juft ikkilangan masalaning optimal rejasi topiladi;

3. Ikkilangan bir juft masalaning optimal rejasi bilan optimal strategiya va o'yin yutug'idan foydalanib o'yinning yechim topiladi.

Masala 8.3. Quyidagi matritsa bilan berilgan o'yinning yechimi topilsin

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu matritsa egar nuqtaga $a_{32}=5$ ega. Shuning uchun uning yechimi sof strategiya A_3 va V_2 bo'ladi, ya'ni $\bar{X}=(0,0,1)$ va $\bar{Y}=(0,1; 0)$ $v=5$ bo'lganda.

Bu matritsaga mos bo'lgan bir juft chiziqli programmalashning ikkilangan masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Daslabki masala:

Ikkilangan masala.

Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$ funksiyaning
minimum qiymatini toping

Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} 6y_1 + 2y_2 + 5y_3 \leq 1, \\ 4y_1 + 3y_2 + 7y_3 \leq 1, \\ 5y_1 + 5y_2 + 6y_3 \leq 1. \end{cases}$$

$$u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0.$$

$f(u_1, u_2, u_3) = u_1 + u_2 + u_3$ funksiyaning
maksimum qiymatini toping

Ikkilangan masalani simpleks usul bilan yechsak quyidagi jadvallar hosil bo'ladi.

1-chi simpleks jadval

4	I	II	III	I	1	1	0	0	0	Σ
	C_6		A_{i0}	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
3	0	U_4	1	6	2	5	1	0	0	
2	0	u_5	1	4	3	7	0	1	0	
I	0	u_6	1	5	5	6	0	0	1	
			$Z=0$	-1	-1	-1	0	0	0	

Ikkinchi simpleks jadval

4	1	2	3	1	1	1	0	0	0	Tekshirish ustuni
	C_6			u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	$6\frac{4}{5}$
3	0	u_4	$3/5$	4	0	$13/5$	0	0	$-2/5$	$4\frac{1}{5}$
2	0	u_5	$2/5$	1	0	$17/5$	0	0	$-3/5$	$3\frac{3}{5}$
I	1	u_2	$1/5$	1	1	$6/5$	0	0	$1/5$	$3/5$
Indeks satri			$Z=1/5$	0	0	$1/5$	0	0	$1/5$	$3/5$

Demak indeks satrida hamma kataklardagi sonlar musbat bo'lgani uchun optimal yechim quyidagicha $u_1=0, u_2=\frac{1}{5}, u_3=0, u_4=\frac{3}{5}; u_5=\frac{2}{5}$ va $Z_{\max}=f_{\min}=\frac{1}{5}$ bo'ladi. O'yin yutug'i $\vartheta=\frac{1}{Z_{\max}}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$ bo'lgani uchun

optimal yechimlar $y_1^*=0$, $y_2^*=1$, $y_3^*=0$ ga teng. Shunday qilib V o'yinchining optimal strategiyasi $\overline{Y}^*(0; 1; 0)$ ga teng.

A o'yinchining yutug'ini optimal yechimlarini, ya'ni dastlabki masalani optimal yechimlarini o'zgarmaslar ustunidan u_4 , u_5 , u_6 qarshisidagi sonlarni tanlab olamiz:

$x_1^*=0$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{5}$, optimal strategiyasi ega $\overline{X}^*(0; 0; 1)$ ga teng bo'ladi.

Topshiriqlar

Masala 8.4-8.16. Quyidagi matritsalar bilan berilgan o'yinlarni yechimlari topilsin.

$$8.4. \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$8.5. \quad A_2 = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$8.6. \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8.7. \quad A_4 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8.8. \quad A_5 = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8.9. \quad A_6 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8.10. \quad A_7 = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8.11. \quad A_8 = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8.12. \quad A_9 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$8.13. \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$8.14. \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$8.15. \quad A_{13} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \\ 7 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$8.16. \quad A_{14} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$8.17. \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Masala 8.17- Quyidagi juft simmetrik masalalar uchun matritsalar bilan aniqlangan o'yinni tuzing va optimal strategiyalarini toping:

$$8.17. \quad \begin{cases} 30x_1 + 10x_2 \leq 1, \\ 20x_1 + 50x_2 \leq 1, \\ 25x_1 + 25x_2 \leq 1. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$Z(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 30y_1 + 20y_2 + 25y_3 \geq 1, \\ 10y_1 + 50y_2 + 25y_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

$$\rightarrow \max$$

$$8.18. \quad \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 \leq 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \leq 1, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0.$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 3y_1 + 4y_2 + 5y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + 6y_2 + y_3 \geq 1, \\ 2y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

$$Z(y_1, y_2, y_3) = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min$$

$$8.19. \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 16. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max$$

$$\rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 3, \\ 3y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 4, \\ -4y_1 + y_2 + y_3 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$$

$$Z(y_1, y_2, y_3) = 12y_1 + 14y_2 + 16y_3$$

$$8.20. \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 18, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 24. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 5, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 7, \\ 5y_1 + y_2 + y_3 \geq 8. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 \rightarrow \max$$

$$\rightarrow \min$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

$$Z(y_1, y_2, y_3) = 18y_1 + 16y_2 + 24y_3$$

Javoblar.

I Bob.

- 1.26 $x_1=39,99;$ $x_2=28,94.$ $y_3=121,7$ $F=669,2.$
- 1.27 $y_1=74;$ $x_2=2\frac{9}{13};$ $x_1=63\frac{6}{13}$ $F=1288\frac{1}{13};$
- 1.28 $x_2=105\frac{5}{7};$ $y_2=372\frac{6}{7};$ $y_3=350\frac{2}{7};$ $F=634\frac{2}{7};$
- 1.29 $y_1=161;$ $y_2=204;$ $x_2=27.$ $F=297$
- 1.30 $y_1=182;$ $x_2=20,7;$ $x_1=37,4;$ $F=701.$
- 1.31 $x_1=36;$ $x_2=18;$ $y_2=411,5;$ $F=400.$
- 1.32 $x_1=0;$ $x_2=0;$ $x_3=0;$ $v_1=0;$ $v_2=0;$ $F_{\min}=\frac{4200}{13}$
- 1.33 $x_1=0;$ $x_2=0;$ $x_3=0;$ $v_1=0;$ $v_2=0;$ $F_{\min}=232,9$
- 1.34 $y_1=1;$ $x_1=49,83;$ $x_2=21,9;$ $y_3=366,2;$ $F_{\min}=372,77$
- 1.36 $x_1=0,$ $x_2=0;$ $x_3=0;$ $v_1=14;$ $v_2=0;$ $F_{\min}=335\frac{5}{9}$
- 1.38 $x_1=0;$ $x_2=0;$ $x_3=0;$ $v_1=17,8;$ $v_2=0;$ $F_{\min}=14,90$
- 1.39 $y_1=66,16;$ $y_2=11,13;$ $x_1^1=105,5;$ $F=617,2$
- 1.40 $y_1=2925\frac{5}{3};$ $y_2=961;$ $x_2=53;$ $F=1024\frac{4}{3}$

II. Bob

- 2.4 $x_1=39,99;$ $x_2=28,94;$ $y_3=121,7$ $y_1=y_2=0.$ $F=669,2$
- 2.5 $y_1=0,$ $y_2=0,$ $y_3=4,$ $v_1=0,$ $v_2=54,$ $F_{\min}=230$
- 2.6 $y_1=0,$ $y_2=0,$ $y_3=639/8;$ $v_1=3,$ $V_2=21/2;$ $F_{\min}=219/2$
- 2.7 $y_1=0;$ $y_2=0;$ $y_3=0;$ $v_1=0,$ $v_2=50.$ $F_{\min}=44$
- 2.8 $y_1=0;$ $y_2=0;$ $y_3=0;$ $v_1=0,$ $v_2=20.$ $F_{\min}=14$
- 2.9 $y_1=0;$ $y_2=0;$ $y_3=0;$ $v_1=0;$ $v_2=9$ $F_{\min}=7/2;$
- 2.10 $y_1=0;$ $y_2=0;$ $y_3=0,$ $v_1=0;$ $v_2=7.$ $F_{\min}=8$
- 2.11 $y_1=0,$ $y_2=0,$ $y_3=0,$ $v_1=0,$ $v_2=1,2;$ $F_{\min}=4,3.$
- 2.12 $y_1=0,$ $y_2=0,$ $y_3=0,$ $v_1=0,$ $v_2=14,$ $F_{\min}=38,4.$

- 2.13 $y_1=0, y_2=0, y_3=0, v_1=0, v_2=12, F_{\min}=32$
 2.16 $y_1=0, y_2=0; y_3=0; v_1=0, v_2=12,8. F_{\min}=11$
 2.17 $y_1=0; y_2=0; y_3=0; v_1=0, v_2=12; F_{\min}=4,3$
 2.18 $y_1=0, y_2=0; y_3=0, v_1=14; v_2=0, F_{\min}=22$
 2.19 $y_1=0, y_2=0; y_3=0; v_1=1, v_2=0. F_{\min}=4.$

III.Bob

- 3.1 $x_{12}=170; x_{15}=160, x_{21}=120; x_{23}=150; x_{31}=100; x_{34}=150; x_{45}=40;$
 $x_{36}=60;$
 $f=11570 \text{ t.km}$
 3.2 $x_{11}=50; x_{14}=100; x_{21}=50; x_{25}=200; x_{31}=0; x_{32}=70; x_{33}=130;$
 $f=18990 \text{ t.km}$
 3.3 $x_{14}=190; x_{15}=10; x_{21}=220; x_{22}=130; x_{31}=50; x_{33}=100; x_{35}=100;$
 $x_{35}=50;$
 $f=13320;$
 3.4 $x_{12}=100; x_{14}=150, x_{23}=120; x_{25}=180; x_{31}=135; x_{32}=35; x_{35}=30;$
 $f=24510$
 3.5 $x_{11}=60; x_{13}=190; x_{15}=70; x_{24}=150; x_{25}=200; x_{31}=50; x_{32}=150;$
 $f=14400$
 3.6 $x_{11}=150; x_{23}=160; x_{32}=90; x_{12}=20; x_{24}=90; x_{33}=6; x_{35}=140;$
 $f=19810$
 3.7 $x_{13}=80; x_{14}=120; x_{21}=130; x_{25}=120; x_{32}=110; x_{33}=20; x_{35}=70;$
 $f=15430$
 3.8 $x_{14}=140; x_{15}=160; x_{21}=145; x_{22}=55; x_{32}=140; x_{33}=200; x_{35}=10;$
 $f=20900;$
 3.9 $x_{11}=135; x_{13}=5; x_{14}=60; x_{22}=135; x_{23}=115; x_{34}=90; x_{35}=210;$
 $f=2920 \text{ t.km}$
 3.11 $x_{11}=80; x_{15}=120; x_{23}=10; x_{24}=130; x_{26}=60; x_{31}=60; x_{32}=100;$
 $x_{33}=90;$
 $f=16000;$
 3.13 $x_{11}=100; x_{12}=125; x_{22}=65; x_{23}=80; x_{24}=30; x_{25}=100; f=1510;$
 3.14 $x_{11}=70; x_{12}=140; x_{22}=80; x_{23}=200; x_{24}=170; x_{31}=80; x_{35}=210;$
 $f=13380.$
 3.15 $x_{11}=220; x_{12}=110; x_{22}=120; x_{23}=140; x_{25}=190; x_{33}=60; x_{34}=210;$
 $f=17380$
 3.16 $x_{11}=210; x_{12}=60; x_{23}=170; x_{24}=210; x_{26}=30; x_{32}=30; x_{35}=135;$
 $f=15340.$
 3.17 $x_{11}=210; x_{13}=90; x_{22}=190; x_{23}=60; x_{31}=40; x_{34}=130; x_{35}=130;$

- 3.18 $x_{12}=190; x_{13}=60; x_{21}=210; x_{23}=90; x_{31}=50; x_{34}=130; x_{35}=130;$
 $f=15510.$
- 3.19 $x_{14}=180; x_{15}=120; x_{21}=160; x_{22}=160; x_{31}=30; x_{33}=120; x_{35}=80;$
 $f=15960$
- 3.20 $x_{11}=60; x_{14}=200; x_{22}=150; x_{23}=125; x_{34}=15; x_{31}=80; x_{35}=220;$
 $f=11375$

IV. Bob

- 4.1. $X(3, 13), F_{\max}=48.$
- 4.2. $X(1; 2), F_{\max}=11.$
- 4.3. $X(0; 2)$ yoki $X(1; 1), F_{\max}=2.$
- 4.4. $X(9; 1), F_{\max}=9.$
- 4.5. $X(5; 3) F_{\max}=5.$
- 4.6. $X(0; 0; 11; 3; 1), F_{\max}=24.$
- 4.7. $X(2; 2; 3; 1), F_{\max}=2$
- 4.8. $X(1; 3; 0; 0; 1), F_{\min}=2$
- 4.9. $X(0; 3; 2; 0)$ yoki $X(1; 2; 1; 1),$ yoki $X(2; 1; 0; 2) F_{\max}=16$
- 4.10. $X(0; 3; 3; 0)$ yoki $X(1; 2; 2; 1),$ yoki $X(2; 1; 1; 2)$ yoki $X(3; 0;$
 $0; 3), F_{\max}=3$
- 4.11. $X(1; 1; 1; 2; 1; 1), F_{\min}=3$
- 4.12. $X(1; 2; 1; 1); F_{\max}=11$
- 4.13. $X(0; 2), F_{\max}=2$
- 4.14. $X(9; \frac{3}{8} \leq X_2 \leq 1), F_{\max}=9$
- 4.15. $X(1; 1), F_{\max}=\frac{5}{4}$
- 4.16. $X(1,5; 1), F_{\max}=\frac{5}{2}$
- 4.17. $X(0; 1; \frac{1}{6}; \frac{2}{3}) F_{\max}=10\frac{5}{6}$

V Bob.

- 5.7. $X(0; 1; 0; 1; 0), F_{\max}=6-2t,$ agarda $t \in (-\infty; -0,5]$
 $X(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; 0; 0; 0), F_{\max}=-\frac{19}{3}-\frac{4}{3}t,$ agarda $t \in [-0,5; 1,75]$
 $X(2; 0; 0; 0; 5), F_{\max}=-17+12t,$ agarda $t \in [\frac{7}{4}; \infty)$
- 5.8. $X(28; 0; 0; 48; 38), F_{\max}=744-48t$ agarda $t \in (-\infty; 9]$
 $X(52; 24; 0; 0; 2), F_{\max}=312$ agarda $t \in [9; +\infty)$
- 5.9. $X(0; 0; 0; 1; -2t; 2+t; 3-t); F_{\max}=1-2t,$ agarda $t \in (\infty; -2]$
 $X(0; 0; 1-2t; 2+t; 3-t), F_{\max}=-1-3t;$ agarda $t \in [-2; 0,5]$
 $t \in (0,5, +\infty)$ oraliqda masalani yechib bo'lmaydi.

- 5.10. $X(14-2t; 34-3t; 58-2t; 0; 0)$, $F_{\max}=198-19t$, agarda $t \in (-\infty; 7]$; $t \in (7; +\infty)$ da esa masalalarni yechib bo'lmaydi.
- 5.11. $t \in (-\infty; -\frac{1}{14})$ oraliqda masalani yechib bo'lmaydi;
 $X(0; 5-6t; 17-6t; 1+14t; 0)$ $F_{\max}=2+14t+108t^2$, agarda $t \in [-\frac{1}{4}; \frac{5}{6}]$
 $X(0; 0; 12; 6+8t; -10+12t)$, agarda $t \in [\frac{5}{6}; +\infty)$.
- 5.12. Masalani $t \in (-\infty; -\frac{2}{3})$ oraliqda yechish mumkin emas;
 $X(4+6t; 0; 0; 13-6t; 4+3t)$, $F_{\max}=32+82t+42t^2$, agarda $t \in [-\frac{2}{3}; -\frac{4}{11}]$,
 $X(0; 0; 4+6t; 9-12t; 8+9t)$, $F_{\max}=48+150t+108t^2$, agarda $t \in [-\frac{4}{11}; -\frac{3}{13}]$,
 $X(0; 2+3t; 0; 3-21t; 10+12t)$, $F_{\max}=54+185t+147t^2$, agarda $t \in [-\frac{3}{13}; \frac{1}{7}]$,
 $X(0; 3-4t; -2+14t; 0; 11+5t)$, $F_{\max}=57+177t+56t^2$, agarda $t \in [\frac{1}{7}; \frac{3}{4}]$,
 $X(-9+12t; 0; 13-6t; 0; 17-36t)$, $F_{\max}=84+201t-24t^2$, agarda $t \in [\frac{3}{4}; \frac{13}{6}]$;
 $t \in (\frac{13}{6}; +\infty)$ oraliqda masalani yechish mumkin emas.

VI Bob

- 6.5 . $X^*=(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)=(120, 0, 0, 80)$.
 $F_{\max}=95+60=155$ ming so'm.
- 6.6. Uskunalarni 3-chi va 6-chi yillar boshida olmashtirish kerak.
- 6.7. 3-chi va 4-chi korxonaga 40 ming so'mdan 2-chi korxonaga esa 20 ming so'm kapital mablag' ajratish kerak.
- 6.8. v_1 va v_3 konteynerlardan 3 tadan joylashtirish kerak.
 $F_{\max}=3v_1 \cdot c_1 + v_3 \cdot c_3 = 3 \cdot 24 + 3 \cdot 16 \cdot 250 = 72 \cdot 960 + 48 \cdot 250 = 69120 + 1200 = 81120$ so'm.

VII Bob

- 7.1. $x_1^*=3$, $x_2^*=4$, $F_{\max}=13$.
- 7.2. $x_1^*=\frac{123}{101}$, $x_2^*=\frac{422}{101}$, $F_{\min}=3\frac{24}{101}$, $F_{\max}=65$.
- 7.3. $x_1^*=\frac{18}{\sqrt{10}}$, $x_2^*=\frac{6}{\sqrt{10}}$, $F_{\max}=36$.

- 7.4. $x_1^*=4$; $x_2^*=3$, $F_{\max}=25$.
- 7.5. $x_1^*=6$, $x_2^*=4$, $F_{\max}=24$.
- 7.6. $x_1^*=5$, $x_2^*=4$, $F_{\min}=16$.
- 7.7. $x_1^*=5,8$; $x_2^*=4,6$ $F_{\max}=37$.
- 7.14. $F_{\min}=0,25$, $x_1=0,5$ va $x_2=0$ bo'lganda, $F_{\max}=1$, $x_1=0$, $x_2=1$ yoki $x_1^*=1$, $x_2^*=0$, bo'lganda.
- 7.15. $F_{\min}=6,25$, $x_1^*=1,5$, $x_2^*=\pm 0,5\sqrt{7}$ bo'lganda; $F_{\max}=19$, $x_1^*=-2$, $x_2^*=0$ bo'lganda.
- 7.16. $F_{\min}=4,8$, $x_1^*=2,2$, $x_2^*=3,8$ bo'lganda; $F_{\max}=77$, $x_1^*=6$, $x_2^*=0$ bo'lganda.
- 7.17. $F_{\min}=-16$, $x_1^*=0$, $x_2^*=-4$ bo'lganda; $F_{\max}=16$, $x_1^*=4$, $x_2^*=0$ bo'lganda.
- 7.18. $F_{\max}=6,5-0,5\sqrt{10}$, $x_1^*=3,5-0,3\sqrt{10}$, $x_2^*=3-0,2\sqrt{10}$ bo'lganda; $F_{\max}=8+\sqrt{3}$, $x_1^*=4+\sqrt{3}$, $x_2^*=3$; bo'lganda.
- 7.19. $F_{\min}=20$, $x_1^*=-1$; $x_2^*=3$; $F_{\max}=72$, $x_1^*=-3$, $x_2^*=-1$ bo'lganda
- 7.20. $(3; 3; 3)$, $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$.
- 7.21. $(2, 2, 2)$.
- 7.22. $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.
- 7.23. $(0; 0; 0; 4)$, $(0, 0, 4, 0)$, $(0, 4, 0, 0)$, $(4, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$.
- 7.24. $(2,18; 1,45; 4,36)$, $\lambda=8,73$ bo'lganda.
- 7.28. $F_{\min}=\frac{38}{15}=2\frac{8}{15}$; $x_1^*=\frac{8}{15}$, $x_2^*=\frac{17}{15}$ bo'lganda.
- 7.29. $F_{\max}=\frac{65}{4}$; $x_1^*=\frac{1}{2}$, $x_2^*=4$ bo'lganda.
- 7.30. $F_{\max}=16$, $x_1^*=0$, $x_2^*=4$ bo'lganda.
- 7.31. $F_{\max}=\frac{17}{8}$, $x_1^*=0$, $x_2^*=1$, $x_3^*=\frac{3}{4}$ bo'lganda.
- 7.35. $F_{\max}=96$, $x_1^*=2$, $x_2^*=4$ bo'lganda.
- 7.36. $F_{\max}=230$, $x_1^*=2,5$, $x_2^*=3$, $x_3^*=0$, $x_4^*=6$ bo'lganda.
- 7.37. $F_{\min}=-\frac{22}{9}$, $x_1^*=\frac{14}{9}$, $x_2^*=\frac{2}{3}$ bo'lganda.
- 7.39. $F_{\min}=-\frac{273}{13}$, $x_1^*=\frac{4}{13}$, $x_2^*=\frac{33}{13}$ bo'lganda.
- 7.40. $F_{\max}=1,75$ $x_1^*=1$, $x_2^*=0,5$, $x_3^*=4,5$, $x_4^*=8$ bo'lganda.
- 7.41. $F_{\max}=0$, $x_1^*=x_2^*$, $0\leq x_1\leq\frac{10}{3}$ bo'lganda.
- 7.42. $F_{\min}=-1$, $x_1^*=1$, $x_2^*=x_3^*=0$, bo'lganda.
- 7.43. $F_{\max}=-12$ $x_1^*=x_2^*=4$, $x_3^*=0$ bo'lganda.
- 7.44. $F_{\min}=0$ $x_1^*=x_2^*=x_3^*=0$ bo'lganda.
- 7.45. $F_{\max}=6$ $x_1^*=x_3^*=0$, $x_2^*=3$ bo'lganda.
- 7.53. 1) $(4; 8)$; 2) $(8,-2)$, 3) $(8; 6)$; 4) $(0;-1)$.

7.54. $x^*=(2;1)$, $Z_{\max}=10$, $x_0=-10$.

7.55. $x^*=(1;1)$, $F_{\max}=3$.

7.56. $x^*=(0;1,8;2,4)$ $F_{\max}=16,2$.

7.57. Almashrish jarayoni $x^*=(2;2)$ nuqtaga yaqinlashadi.

7.58. Almashrish jarayoni $x^*=(3;3)$ nuqtaga yaqinlashadi.

7.59. Almashtirish jarayoni $X^*=(0,8;0,4)$ nuqtaga yaqinlashadi.

VIII Bob

8.4. $\bar{X}^* = \left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$; $\bar{Y}^* = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)$, $\vartheta = \frac{23}{5}$.

8.5. $\bar{X}^* = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right)$; $\bar{Y}^* = \left(0, 0, \frac{1}{7}, \frac{6}{7}, 0\right)$, $\vartheta = \frac{39}{7}$.

8.6. $\bar{X}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\bar{Y}^* = \left(0, 0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$, $\vartheta = \frac{7}{2}$.

8.7. $\bar{X}^*=(1,0)$, $\bar{Y}^*=(0,1,0,0,0)$ $V=3$.

8.8. $\bar{X}^* = \left(\frac{5}{14}, \frac{9}{14}\right)$, $\bar{Y}^* = \left(0, \frac{2}{7}, 0, \frac{5}{7}, 0\right)$, $\vartheta = \frac{4}{7}$.

8.9. $\bar{X}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right)$, $\bar{Y}^* = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$, $\vartheta = \frac{11}{3}$.

8.10. $\bar{X}^* = \left(0, \frac{4}{5}, \frac{1}{15}, 0, 0\right)$; $\bar{Y}^* = \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$, $\vartheta = \frac{21}{3}$.

8.11. $X^* = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$; $\bar{Y}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $V=4$.

8.12. $X^* = \left(\frac{7}{9}, 0, 0, \frac{7}{9}, 0\right)$; $\bar{Y}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\vartheta = \frac{44}{9}$.

8.13. $\bar{X}^* = \left(0, 0, 0, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$; $\bar{Y}^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, $\vartheta = \frac{7}{6}$.

8.14. $\bar{X}^* = \left(0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$, $\bar{Y}^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $V=7$.

8.15. $\bar{X}^*=(0,0,1)$, $\bar{Y}^*=(0,1,0)$, $V=7$.

8.16. $\bar{X}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$; $\bar{Y}^* = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$, $\vartheta = \frac{13}{2}$.

8.17. $X^* = \left(\frac{2}{65}, \frac{1}{130}\right)$; $\bar{Y}^* = \left(\frac{3}{130}, \frac{1}{65}, 0\right)$, $\mu = \frac{1}{26}$, $\vartheta = \frac{1}{\mu} = 26$.

8.18. $X^* = \left(\frac{3}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}\right)$; $\bar{Y}^* = \left(\frac{3}{14}, 0, 0, \frac{1}{14}\right)$, $\vartheta = \frac{7}{2}$.

ADABIYOTLAR.

1. Abdullayev O. Axmedov T. Ziyoxo'jayeva I. Hisoblash texnikasining injenerlik va iqtisodiy hisoblashlarda ishlatilishi. –«O'qituvchi nashriyoti». Toshkent –1976.
2. Абрамов Л.М., Капустин В.Ф. Математическое программирование. –Ленинград: ЛГУ, 1976.
3. Акулич Н.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. –М: Высшая школа, 1986.
4. Баумоль У. Экономическая теория исследований операций. «Прогресс», М.,1985.
5. Вентцель Е.С. Элементы теории игр-М: физматгиз, 1969.
6. Гольштейн В.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. –М.:1966.
7. Гуревич Т.Ф., Лушук В.О. Сборник задач по математическому программированию. –М.: Колос, 1977.
8. Давидов Э.Г. Исследование операций. =М.: «Высшая школа» 1990.
9. Данциг Д. Линейное программирование его применение и обобщение. –М.: Прогресс. 1975.
10. Доморяд А.П. Математические игры и развлечения. –М.: физмат. из. 1961.
11. Заславский Ю.Л. Сборник задач по линейному программированию. –М.: Наука, 1969.
12. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. –М.: Высшая школа, 1975.
13. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. – М.: Знание. 1968.
14. Козлова О.В., Брянский Г.А., Разу М. Л. Хозяйственные ситуации - М.: Экономика. 1976. из.
15. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б. Математическое программирование. -М.: Высшая школа, 1976.
16. Крынский Х.З. Математика для экономистов. -М.: Изд. «Статистика», 1970.
17. Михалевич В.С., Кукса А.И. Методы последовательной оптимизации.- М.: Наука, 1983.
18. Мулин Э. Теория Игр с примерами из математической экономике.-М.: Мир, 1985.
19. Nasriddinov G'.N. Matematik ekonomika elementlari .-Toshkent," «O'qituvchi».1984.

20. Нестеров Е.П. Транспортные задачи линейного программирования. – М.:Изд. Иностранной литературы,1960.

21. Рейнфельд Н., Фогель У. Математическое программирование. -М.:изд. Иностранной литературы,1960.

22. Safayeva K., Beknazarova N.R. Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. 1qism,-Toshkent, «O‘qituvchi»,1984.

23. Safayeva Q., Beknazarova N.R. Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. 2qism ,Toshkent, «O‘qituvchi»,1990.

24. Sicheva N.I Baltayeva L.R., Ishnazarov A.I., Saidov Z.X., Saidov M.M. Transportni boshqarishda kompyuter texnologiyalari.Uquv qo‘llanma. T.. TAYI, 2003.

25 Sicheva N.I Baltayeva L.R., Ishnazarov A.I. Kompyuter texnologiyalari asosida firma va tarmoqlarda yuklarni tashishni moddelashtirish va boshqarish. Uquv qo‘lanma. T..TDIU,TAYI, 2003.

26.Тарасевич., Гальперин В.М., Гребинников П.И., Леусский А.И. Макро Экономика. Издательство Санкт-Петербургский государственного университета экономики и финансов,1999.

27. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир. 1967.

28. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х. Исследования по линейному и нелинейному программированию. –М.: Изд.иностр. л-ры, 1962.

29. Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации. –М.: Изд. «Сов Радио» 1974.

30. Юдин Д.Б., Юдин А. Д. Экстремальные модели в экономике. –М.: «Экономика» 1979.

Internet saytlari

1. <http://www.uzsci.net> - O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi qoshidagi O'zbek milliy va maorif tarmog'ining serveri.

2. www.search.re.uz- O'zbekiston axborotlarini izlab topish tizimi.

3. www.msu.ru.-MDU serveri. Fanlar bo'yicha namunaviy, ishchi dasturlari, elektron adabiyotlarni olishni ta'minlaydi.

4. www.mesi.ru.-Maskva iqtisod-statistika instituti serveri. Fanlar bo'yicha namunaviy ishchi dasturlari elektron adabiyotlarni olishni ta'minlaydi.

5. www.atv-emmm.narod.ru-Rossiya Federatsiyasining matematik modellashtirish bo'yicha turli mavzulardagi ma'lumotlarini olishni ta'minlovchi sayti.

6. www.oup.com.uk- Buyuk Britaniyadagi OKSFORD universiteti sayti. Matematik modellashtirish ekonomertika sohalari bo'yicha ma'lumotlarni olishni ta'minlaydi.

MUNDARIJA

Soʻzi boshi	3
Kirish	4
I. Bob. Chiziqli programmalash	9
§1. Chiziqli programmalashning asosiy masalasi va chiziqli programmalash masalalarini asosiy masalaga keltirish	9
§2. Simpleks usuli	10
§3. Sunʼiy bazis usuli	29
II. Bob. Chiziqli programmalashning ikkilanish masalalari	39
§1 Ikkilangan masalalar haqida asosiy tushunchalar	39
§2 Ikkilangan simpleks usul	41
§3 Ikkilangan masalalarning geometrik talqini	46
III. Bob. Transport masalasi	50
§1 Taqsimot usuli	50
§2 Transport masalasini potentsiallar usuli bilan yechish	58
IV. Bob. Butun sonli programmalash	68
§1 Marketolog haqidagi masala	68
§2 Toʻla butun sonli programmalash masalalari	70
§3 Qisman butun sonli programmalash masalalari	75
V. Bob. Parametrik programmalash	80
§1. Parametrik programmalash masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini	80
§2. Maqsad funksiya parametrga bogʻliq boʻlgan masalalarni yechish	85
§3. Ozod hadlar parametrga bogʻliq boʻlgan masalalarni yechish	92
§4. Ozod hadlar va maqsad funksiya parametrga bogʻliq boʻlgan masalalarni yechish	100
VI Bob Dinamik programmalash	105
§1. Dinamik programmalash masalalarini umumiy xususiyatlari	105
§2. Yuklarni optimal joylashtirish haqidagi masalalar	106

§3. Dinamik programmalash usullarini iqtisodiy masalarni yechishdagi tahlili. Optimal rejalashtirish masalalari	110
VII Bob Chiziqsiz programmalash	122
§1. Chiziqsiz programmalash masalalarning iqtisodiy va geometrik talqini	122
§2. Lagranjning ko'paytmalar usuli	129
§3. Qavariq programmalash masalalari	135
§4. Kvadrat programmalash masalalari	142
§5. Chiziqsiz programmalash masalalarini gradiyent usullari yordamida yechish	148
VIII Bob Matrisali o'yinlar nazariyasi masalalari va chiziqli programmalash	167
§1. Matritsali o'yinlar nazariyasining iqtisodiy va geometrik talqini	167
§2. Matritsali o'yinlar nazariyasi masalalarini chiziqli programmalash masalalariga keltirish	174
Javoblar	180
Adabiyotlar	186