



**O'zbekiston respublikasi oliy va o'rta
maxsus ta'lim vazirligi**



**Buxoro oziq – ovqat va engil sanoat
texnologiyasi instituti**

«OLIIY MATEMATIKA» kafedrası

**«Oliy matematika»
fanidan I kurs talabalari uchun
tajriba ishlarini bajarish bo'yicha
uslubiy ko'rsatmalar.**

BUXORO–2011

Ushbu uslubiy ish «Oliy matematika» kafedlasining 2010 yil 29 avgust kundagi №1 majlisida va institut uslubiy kengashining 2010 yil 13 noyabr kungi №2 yig'ilishida muhokama qilingan va chop etishga tavsiya etilgan.

M U A L L I F L A R :

RASULOV N. P.	«Oliy matematika» kafedrası mudiri, dotsent.
RAHMATOV. N.H.	«Oliy matematika» kafedrası dotsenti.

T A Q R I Z C H I L A R :

RASULOV I. G.	BuxDU «Fakultetlararo matematika va informatika» kafedrası dotsenti.
MUMINOV Sh. R.	BuxOOvaESTI «Informatika» kafedrası dotsenti.

M U X A R R I R :

ISMATOV X. B.	«Oliy matematika» kafedrası dotsenti.
----------------------	--

Uslubiy ishda I kurs talabalariga «Oliy matematika» fani bo'yicha o'tiladigan tajriba ishlari topshiriqlari va ularni bajarish uchun kerak bo'lgan ko'rsatmalar, namunaviy echim, kompyuterda amalga oshirish dasturi keltirilgan.

K I R I Sh

Bakalavriyatning bir kator texnik va texnologik yo'nalishlari o'quv rejalarida «Oliy matematika» fanidan tajriba mashg'ulotlari o'tkazilishi ko'zda tutilgan. Bu yo'nalishlarning ishchi o'quv rejalariga asosan I va II kurslarda 18 soatdan tajriba mashg'ulotlari o'tilishi kerak.

Ushbu uslubiy ish I kurs talabalariga muljallangan bo'lib, unda tenglamalarni taqribiy echish va «Oliy matematika» ishchi dasturidagi asosiy mavzular bo'yicha to'qqizta tajriba ishlarini bajarish uchun ko'rsatmalar berilgan. Bu tajriba ishlari talabalarni ko'rsatilgan mavzular bo'yicha nazariy bilimlarini mustahkamlash, tegishli amaliy malakalarni hosil qilish, mustaqil ishlarini tashkil etish kabi maksadlarni amalga oshirishga mo'ljallangan.

Uslubiy ishda xar bir tajriba ishi mavzusi bo'yicha qisqacha, ammo etarli hajmda nazariy ma'lumotlar, tajriba ishida quyilgan masalaning namunaviy echimi, talabalarni mustaqil bajarishi uchun 25 variantdan iborat topshiriqlar majmuasi, nazariy bilimlarni o'zlashtirilishini tekshirish uchun savollar to'plami hamda adabiyotlar ro'yxati keltirilgan.

Tajriba ishining topshiriqlar variantlari bir xil tipdagi masalalardan iborat bo'lib, ular bir-birdan faqat parametrlarining qiymatlari bilangina fark qiladi. Adabiyotlar ro'yxatida tegishli mavzu yoritilgan bob, paragraf va betlar ko'rsatilgan.

Ushbu uslubiy ko'rsatmada tajriba ishlarini kompyuterda amalga oshirish uchun topshiriqni bajarish algoritmi va uning Paskal tilidagi dasturi xam keltirilgan.

Talaba xar bir tajriba ishini o'z varianti bo'yicha o'qituvchi tomonidan ko'rsatilgan muddatda dastlab kalkulyator yoki jadvallar yordamida «qo'lda» bajarishi va uni aloxida daftarga yozib, belgilangan vaqtda tekshirish va baholash uchun o'qituvchiga topshirishi lozim. Tajriba ishlari topshiriklarining echimida tegishli nazariy ma'lumotlar o'z o'rnida keltirilgan, xisoblashlar talab etilgan aniqlikda bajarilgan, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati ko'rsatilgan bo'lishi kerak. So'ngra talaba tajriba ishi topshirigini kompyuterda bajarib, «qo'lda» hisoblab topgan javoblarini tekshirib ko'rishi va kompyuterda olingan natijalarni o'z ishiga ilova sifatida qo'shib qo'yishi kerak. Talabalarning tajriba ishlari bo'yicha olgan baholari reyting nazoratining joriy baholashida hisobga olinadi.

BIRINCHI TAJRIBA ISHI

M a v z u: Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni ikkiga bo'laklash usulida taqribiy echish.

Tajriba ishining maqsadi: Chizikli bulmagan tenglamalarni ikkiga bulaklash usulida takribiy echish buyicha talabalarda malaka xosil kilish.

I. Tajriba ishi mavzusi bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar.

Juda ko'p amaliy masalalarni echish $f(x)=0$ ko'rinishdagi tenglamalarga olib keladi. Bunda $f(x)$ qandaydir funksiya bo'lib, x noma'lum qiymatini topish talab etiladi. Bu funktsiya chiziqli yoki kvadratik bo'lganda tenglama ildizlarini aniq topish formulalari mavjud. Ammo chiziqli bo'lmagan $f(x)$ funktsiya uchun bu tenglamani umumiy holda aniq echimini topish formulalari mavjud emas. Shu sababli bunday hollarda tenglamani taqribiy echish, ya'ni uning ildizlarining taqribiy qiymatini topish masalasi paydo bo'ladi.

Tenglamani taqribiy echish quyidagi ikki bosqichdan iborat bo'ladi.

1-boskich. Tenglamaning fakat bitta ildizi joylashgan oraliqlarni topish. Bu **tenglama ildizlarini ajratish** deb ataladi.

Berilgan $f(x)=0$ chiziqli bo'lmagan tenglama ildizlarini ajratish uchun quyidagi teoremadan foydalaniladi:

Teorema: Agarda $y=f(x)$ funktsiya biror (a,b) oralikda uzluksiz bo'lib, uning chegaralarida $f(a)f(b)<0$ shartni kanoatlantirsa, $f(x)=0$ tenglama bu oralikda kamida bitta haqiqiy ildizga ega bo'ladi. Agarda bu shartda $f(x)$ funktsiya (a,b) oralikda monoton bo'lsa, unda bu erda $f(x)=0$ tenglama yagona ildizga ega bo'ladi.

Agar $f(x)=0$ tenglamadagi $y=f(x)$ funktsiya $y'=f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, bu tenglama ildizlarini quyidagicha ajratish mumkin:

A) $f'(x)=0$ tenglamaning $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ ildizlarini topamiz va ular ushbu tartibida joylashgan, ya'ni $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n$ deb olamiz;

B) Butun to'g'ri chiziqni

$$(-\infty, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, \infty)$$

oraliklarga ajratamiz;

C) Bu oraliqlar ichidan shunday (x_{i-1}, x_i) oraliqlarni tanlaymizki, ularda $f(x_{i-1})f(x_i)<0$ shart bajarilsin. Unda bu tanlangan (x_{i-1}, x_i) oraliqlarda berilgan $f(x)=0$ tenglamaning bittadan ildizlari joylashgan bo'ladi

Misol sifatida $x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 5 = 0$ chiziqli bo'lmagan tenglama ildizlarini ko'rsatilgan usulda ajratamiz. Bu tenglamada $f(x) = x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 5$ bo'lib, bu funktsiya uchun hosila mavjud va

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 40x = 4x(x^2 + 3x - 10) = 0$$

tenglamaning ildizlari $x_1=-5, x_2=0, x_3=2$ ekanligini ko'ramiz. Demak

$$(-\infty, -5), (-5, 0), (0, 2), (2, \infty)$$

oraliqlarda $f(x)=0$ tenglamaning bittadan ildizlari joylashgan bo'lishi mumkin. Buni aniqlash uchun bu oraliqlarning chegaralarida $f(x)$ funktsiya qiymatlarining ishoralarini aniqlaymiz:

$$f(-5)=(-5)^4+4(-5)^3-20(-5)^2+5=-370<0, \quad f(0)=(0)^4+4(0)^3-20(0)^2+5=5>0,$$

$$f(2)=(2)^4+4(2)^3-20(2)^2+5=-27<0, \quad f(\pm\infty)=+\infty>0.$$

Demak har bir oraliq chegaralarida $f(x)$ funktsiya o'z ishoralarini o'zgartiradi va shu sababli yuqorida ko'rsatilgan oraliqlarning har birida $f(x)=0$ tenglamaning bittadan ildizi mavjud.

Ba'zan qo'shimcha hisoblashlar orqali bu oraliqlarni toraytirish mumkin. Masalan, biz ko'rayotgan holda

$$f(-7)=54>0, \quad f(-1)=-18<0, \quad f(1)=-10<0, \quad f(3)=14>0$$

bo'lgani uchun berilgan tenglama

$$(-7, -5), (-1, 0), (0, 1), (2, 3)$$

oraliqlarda bittadan ildizga ega bo'ladi va tenglama ildizlarini ajratish bosqichini nihoyaga etdi deb hisoblash mumkin.

2-boskich. Tenglama ildizlarini berilgan $\varepsilon>0$ aniqlikda hisoblash. Buning ma'nosi shuki, agar x_0 berilgan $f(x)=0$ tenglamaning aniq ildizi, x_0 esa takribiy ildizi bo'lsa, unda $|x_0 - x_0| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi kerak. Bu **tenglama ildizlarini aniqlashtirish** deb ataladi.

Tenglama ildizlarini aniqlashtirishning turli usullari mavjud. Ularni ichida eng soddasi **ikkiga bulaklash usuli** bo'lib hisoblanadi. Berilgan $f(x)=0$ tenglama biror (a, b) oralikda bitta ildizga ega bo'lsin. Ikkiga bo'laklash usulining 1-kadamida bu oraliq $c=(a+b)/2$ nuqta bilan ikkita (a, c) va (c, b) oraliqlarga ajratiladi. Bu oraliqlarni qaysi birining chegaralarida $f(x)$ funktsiyaning ishoralari o'zgaruvchan bo'lsa, shu oraliq qoldiriladi va u (a_1, b_1) kabi belgilanadi. Navbatdagi 2-qadamda qoldirilgan (a_1, b_1) oraliq $c_1=(a_1+b_1)/2$ nuqta bilan yana ikkiga bo'linib, (a_1, c_1) va (c_1, b_1) oraliqlar hosil qilinadi. Bu oraliqlar chegaralarida yana $f(x)$ funktsiya ishoralari aniqlanadi va ishora o'zgargan oraliq qoldirilib, u (a_2, b_2) kabi belgilanadi. Xuddi shunday tarzda davom ettirilib, birin-ketin $(a_3, b_3), (a_4, b_4), \dots, (a_n, b_n)$ oraliqlarni hosil etamiz. Bu jarayonni (a_n, b_n) oralik uzunligi $d_n=b_n-a_n=(b-a)/2^n < \varepsilon$ shart bajarilguncha davom ettiramiz. Bunda $\varepsilon>0$ taqribiy ildizning aniqligini ifodalovchi va oldindan berilgan kichik bir sonni ifodalaydi. Bu holda tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy ildizi sifatida $x_n=c_n=(a_n+b_n)/2$ soni olinadi.

II. Tajriba ishining bajarilish namunasi.

Masalaning kuyilishi: Ushbu chiziqli bo'lmagan $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ tenglama uchun quyidagilarni bajaring:

- 1) Berilgan tenglamaning ildizlarini ajrating;
- 2) Bu ildizlardan birining taqribiy qiymatini ikkiga bo'laklash usulida $\varepsilon=0,001$ aniqlikda hisoblang;
- 3) Bu ildizning aniq qiymati joylashgan oraliqni ko'rsating.

Echish: 1) Berilgan tenglama bo'yicha $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ funktsiyani hosil qilamiz. Bu funktsiya hosilaga ega va

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0$$

tenglamadan $x_1=0$ va $x_2=2$ ildizlarni topamiz. Bu ildizlar orqali butun sonlar o'qini uchta $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$ oraliqlarga ajratamiz. Bu oraliqlar chegaralarida $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ funktsiya ishoralarini aniklaymiz:

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1 > 0, f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = -3 < 0, f(-\infty) < 0, f(\infty) > 0.$$

Demak, $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$ oraliqlarning har birining chegaralarida funktsiya ishorasini o'zgartiradi va shuning uchun ularning har birida berilgan tenglamaning bittadan ildizi joylashgan. $x_1=0$ va $x_2=2$ nuqtalarga yaqin bo'lgan nuqtalarni qarab, $f(-1)=-3<0$ va $f(3)=1>0$ ekanligini ko'ramiz. Shu sababli berilgan tenglama ildizlarini $(-1, 0)$, $(0, 2)$ va $(2, 3)$ oraliqlarda izlash kerak.

2) Berilgan tenglamaning uchta ildizlaridan birini, masalan $(0, 2)$ oraliqdagisini, ikkiga bo'laklash usulida $\varepsilon=0,001$ aniqlikda topamiz. Buning uchun dastlab $(a, b)=(0, 2)$ oraliqni $c=(a+b)/2=(0+2)/2=1$ nuqta bilan ikkita $(0, 1)$ va $(1, 2)$ oraliqlarga ajratamiz. Bu oraliqlar chegaralarida $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ funktsiya ishoralarini aniqlaymiz:

$$f(0)=1>0, f(1)=-1<0, f(2)=-3<0.$$

Bu erdan $(0, 1)$ oraliq chegaralarida funktsiya o'z ishoralarini o'zgartirishini ko'ramiz va bu oraliqni keyingi hisoblashlar uchun qoldiramiz, ya'ni $(a_1, b_1)=(0, 1)$ deb olamiz. Bu oraliq uzunligi $d_1=1-0=1>\varepsilon$ bo'lgani uchun hisoblashlarni davom ettiramiz va $c_1=(a_1+b_1)/2=(0+1)/2=0.5$ nuqta bilan uni yana ikkiga bo'laklab, $(0, 0.5)$ va $(0.5, 1)$ oraliqlarni hosil qilamiz. Bu oraliq chegaralarida

$$f(0)=1>0, f(0.5)=(0.5)^3-3 \cdot (0.5)^2+1=0.375>0, f(1)=-1<0$$

bo'lgani uchun $(a_2, b_2)=(0.5, 1)$ deb olamiz. Bu oraliq uzunligini hisoblab, $d_2=1-0.5=0.5>0.001=\varepsilon$ ekanligini ko'ramiz va shu sababli hisoblashlarni davom ettiramiz. Ikkiga bo'laklash usulining hisoblashlarini quyidagi jadval ko'rinishida ifodalaymiz:

N	a_n	b_n	$c_n=(a_n+b_n)/2$	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$d_n=b_n-a_n$
0	0	2	1	1	-1	2
1	0	1	0.5	1	0.375	1
2	0.5	1	0.75	0.375	-0.2656	0.5
3	0.5	0.75	0.625	0.375	0.0723	0.25
4	0.625	0.75	0.6875	0.0723	-0.0930	0.125
5	0.625	0.6875	0.6562	0.0723	-0.0094	0.0625
6	0.625	0.6562	0.6406	0.0723	0.0318	0.0312
7	0.6406	0.6562	0.6484	0.0318	0.0113	0.0156
8	0.6484	0.6562	0.6523	0.0113	0.0011	0.0078
9	0.6523	0.6562	0.6542	0.0011	-0.0041	0.0039
10	0.6523	0.6542	0.6532	0.0011	-0.0015	0.0019
11	0.6523	0.6532	0.6528	0.0011	-0.0010	0.0009

Bu jadvalda hisoblashlar 0.0001 aniqlikda bajarilgan va $d_{11}=0.0009<0.001=\varepsilon$ bo'lgani uchun shu qadamda ikkiga bo'laklash usulini qo'llash to'xtatilgan. Demak, berilgan $x^3-3x^2+1=0$ tenglamaning (0,2) oraliqdagi ildizining $\varepsilon=0.001$ aniqlikdagi taqribiy qiymati $x=c_{11}=0.6528$ bo'ladi.

3) Ikkiga bo'laklash usulining mohiyatidan tenglamaning (0,2) oraliqdagi ildizining aniq qiymati (0.6523, 0.6532) oraliqda joylashganligini ta'kidlay olamiz.

III. Tajriba ishini mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Masalaning qo'yilishi: Ushbu chiziqli bo'lmagan $f(x)=0$ tenglama uchun quyidagilarni bajaring:

- 1) Berilgan tenglamaning ildizlarini ajrating;
- 2) Bu ildizlardan birining taqribiy qiymatini ikkiga bo'laklash usulida berilgan $\varepsilon>0$ aniqlikda hisoblang;
- 3) Bu ildizning aniq qiymati joylashgan oraliqni ko'rsating.

Izox: 1. $f(x)$ funktsiya va ε qiymati quyidagi jadvaldan talabning variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabning varianti o'qituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib raqami bilan belgilanadi.

Variant №	Funktsiya $f(x)$	Aniqlik ε	Variant №	Funktsiya $f(x)$	Aniqlik E
1	$x^3-12x+7$	0.008	14	$3x^3+3x^2-8x-6$	0.002
2	$x^3-27x+6$	0.002	15	$2x^3-6x-1$	0.005
3	$2x^3-21x^2+60x-1$	0.007	16	$4x^3+x^2-4x-2$	0.008
4	x^3+3x^2+4	0.001	17	x^3-12x^2+4	0.001
5	$2x^3-3x^2-72x+1$	0.005	18	$6x^3+5x^2-8x-1$	0.007
6	x^3+9x^2-6	0.008	19	$2x^3-9x^2+1$	0.009
7	$2x^3-3x^2-12x+9$	0.002	20	$2x^3-5x^2-4x+1$	0.003
8	x^3+9x^2-2	0.004	21	$x^3-12x+6$	0.004
9	$5x^3+15x^2-3$	0.003	22	x^3-3x+1	0.008
10	$x^3-27x+3$	0.001	23	$x^3-27x-9$	0.006
11	$2x^3-6x+3$	0.007	24	x^3-3x^2+11	0.004
12	x^3-9x^2-7	0.006	25	$2x^3-3x^2-12x+5$	0.005
13	$x^3-12x-8$	0.009	26	$6x^3+5x^2-8x-3$	0.006

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. Tenglama va uning ildizi qanday ta'riflanadi?
2. Tenglamani taqribiy echimi deb nimaga aytiladi?
3. Nega tenglamani taqribiy echishga xojat paydo bo'ladi?
4. Tenglamani taqribiy echish qanday bosqichlardan iborat?
5. Tenglama ildizlarini ajratish deganda nima tushuniladi?
6. Tenglama ildizlarini qanday ajratish mumkin?
7. Tenglama ildizlarini aniqlashtirish nimadan iborat?
8. Ikkiga bo'laklash usulining mohiyati nimadan iborat?
9. Ikkiga bo'laklash usulida taqribiy ildizning aniqligi qanday baholanadi?

V. Adabiyotlar ro'yxati.

1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 2-jild. Toshkent, «O'qituvchi», 1994 y. 15-bob, 2-§, 362-366 betlar.
2. Isroilov M.I. Hisoblash usullari. I kism. Toshkent, «O'zbekiston», 2003 yil. 2-bob, 1-§, 30-35 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajarish algoritmi va dasturi.

Chiziqli bo'lmagan $f(x)=0$ tenglama ildizlarini ajratish va uni ikkiga bo'lish usulida talab etilgan $\varepsilon>0$ aniqlikda hisoblash nazariy jixatdan murakkab bo'lmasada, uni amaliy qo'llanilishi katta hajmdagi hisoblashlarni talab etadi. Ammo bu hisoblashlar bir xil ko'rinishda bo'lib, siklik xarakterga ega va shu sababli uni kompyuterda oson amalga oshirish mumkin. Yuqorida ko'rsatilgan

nazariy ma'lumotlarga asosan bu jarayonni quyidagi algoritm asosida kompyuterda bajarish mumkin.

1. Berilgan tenglamaning barcha ildizlari joylashgan (a,b) oraliqni aniqlaymiz;
2. Tenglamaning bittadan ildizi joylashadigan oraliqlar uzunligi h ni tanlaymiz;
3. Barcha ildizlar joylashgan (a,b) oraliqni uzunligi h bo'lgan (a_k, b_k) oraliqchalarga ajratamiz;
4. Xar bir (a_k, b_k) oraliqchalar chegaralarida tenglamaning chap tomonida turgan $f(x)$ funktsiyaning ishoralarini aniqlaymiz;
5. Chegaralarida $f(x)$ funktsiya o'z ishorasini o'zgartiradigan, ya'ni

$$f(a_k) f(b_k) < 0 \quad (1)$$

shart bajariladigan (a_k, b_k) oraliqchalarni topamiz.

Shartga asosan uzunligi h bo'lgan bu oraliqchalarda tenglamaning bittadan ildizlari joylashgan bo'ladi va shu bilan ildizlarni ajratish bosqichi yakunlanadi.

Endi biror (a_k, b_k) oraliqchada joylashgan ildizni aniqlashtirish bosqichiga o'tamiz.

6. Izlanayotilgan ildizning aniqlik darajasini ifodalovchi $\varepsilon > 0$ sonini tanlaymiz;
7. Ko'rilayotgan (a_k, b_k) oraliqchani $c_k = (a_k + b_k)/2$ o'rta nuqta bilan ikkita (a_k, c_k) va (c_k, b_k) oraliqlarga bo'laklaymiz;
8. Ushbu

$$f(c_k) = f((a_k + b_k)/2) = 0 \quad (2)$$

shart bajarilishini tekshiramiz. Agar bu shart bajarilsa, izlangan ildizning aniq qiymati $x = c_k$ bo'ladi. Bu holda keyingi (a_k, b_k) oraliqchani tekshirishga o'tamiz yoki, barcha oraliqlar ko'rib bo'lingan bo'lsa, hisoblashlarni to'xtatamiz;

9. Agarda (2) shart bajarilmasa, unda (a_k, b_k) oraliqcha uzunligini

$$\varepsilon_k = b_k - a_k$$

formula bilan hisoblaymiz;

10. Agar $\varepsilon_k > \varepsilon$ shart bajarilsa, unda hosil qilingan (a_k, c_k) va (c_k, b_k) oraliqlarning qaysi birida (1) shart o'rinli bo'lsa, usha oraliqni (a_k, b_k) deb belgilaymiz va hisoblashlarni 7-qadamdan takrorlaymiz;
11. Agar $\varepsilon_k > \varepsilon$ shart bajarilmasa, unda talab etilgan aniqlikka erishilgan bo'ladi va ildizning bu aniqlikdagi taqribiy qiymati sifatida c_k o'rta nuqtani olamiz;
12. Hisoblashlarni yakunlayiz.

Endi shu algoritm asosida Paskal algoritmik tilida tuzilgan dasturni keltiramiz.

```
PROGRAM TENGLAMA (INPUT, OUTPUT);
  LABEL 10,20,30,40,50,60;
  CONST M=-100; N=100; H=1;
  VAR
I, J, K, A1, B1 : INTEGER;
  E, AT, BT, C : REAL;
  X: ARRAY [1..3] OF REAL;
  A, B: ARRAY OF INTEGER;
FUNCTION TN(T: REAL): REAL;
  VAR A, B, C, D: INTEGER;
  BEGIN
    READ(A, B, C, D);
    TN :=A*T*T*T +B*SQR(T)+C*T+D;
  END;
  BEGIN
    K:=0; L:=0; A1:=M; B1:=M+H;
  10: IF TN(A1)=0 THEN BEGIN
        L:=L+1; X(L) :=A1; WRITE (X(L)); GO TO 20;END;
    ELSE
        IF TN(A1)*TN(B1)>=0 THEN GO TO 20;
        K:=K+1; A(K) :=A1; B(K) :=B1; WRITE (A(K), B(K));
  20: A1:=A1+H; B1:=B1+H;
        IF B1<=N THEN GO TO 10;
        READ(E); IF K=0 THEN GO TO 60;
        FOR I:=1 TO K DO
          BEGIN
            AT:=A(I); BT:=B(I);
  30: C:=(AT+BT)/2;
            IF TN (C)=0 THEN BEGIN
                  X(I+L) :=C; GO TO 50; END;
            ELSE
                  IF TN(AT)*TN(C)<0 THEN BEGIN
                        B1:=C; GO TO 40; END;
                  ELSE AT:=C;
  40: IF (BT-AT)>E THEN GO TO 30;
                  ELSE X(I+L) :=(AT+BT)/2;
  50: WRITE(AT, BT, X(I+L)); END;
  60: END.
```

IKKINCHI TAJRIBA ISHI

M a v z u: Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni vatarlar usulida taqribiy echish.

Tajriba ishining maksadi: Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni vatarlar usulida taqribiy echish bo'yicha talabalarda malaka hosil qilish.

I. Tajriba ishi mavzusi bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar.

Juda ko'p amaliy masalalarni echish $f(x)=0$ ko'rinishdagi tenglamalarga olib keladi. Bunda $f(x)$ qandaydir funksiya bo'lib, x noma'lum qiymatini topish talab etiladi. Bu funksiya chiziqli yoki kvadratik bo'lganda tenglama ildizlarini aniq topish formulalari mavjud. Ammo chiziqli bo'lmagan $f(x)$ funksiya uchun bu tenglamani umumiy holda aniq echimini topish formulalari mavjud emas. Shu sababli bunday hollarda tenglamani taqribiy echish, ya'ni uning ildizlarining taqribiy qiymatini topish masalasi paydo bo'ladi. Tenglamani taqribiy echish quyidagi ikki boskichdan iborat bo'ladi.

1-bosqich. Tenglamaning faqat bitta ildizi joylashgan oraliqlarni topish. Bu **tenglama ildizlarini ajratish** deb ataladi.

Tenglama ildizlarini ajratish masalasi oldingi tajriba ishida ko'rib chiqilgan edi. Shu sababli bu tajriba ishida tenglama ildizlari ajratilgan va bu ildizlardan bittasi joylashgan biror (a,b) oraliq berilgan deb hisoblaymiz.

2-bosqich. Tenglama ildizlarini berilgan $\varepsilon > 0$ aniqlikda hisoblash. Buning ma'nosi shuki, agar x_0 berilgan $f(x)=0$ tenglamaning aniq ildizi, x_0 esa taqribiy ildizi bo'lsa, unda $|x_0 - x_0| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilishi kerak. Bu **tenglama ildizlarini aniqlashtirish** deb ataladi.

Tenglama ildizlarini aniqlashtirishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan eng soddasi bo'lmish ikkiga bo'laklash usulini oldingi tajriba ishida ko'rib o'tgan edik. Endi sal murakkabroq, ammo anikroq natija beradigan vatarlar usuli bilan tanishamiz. $f(x)=0$ tenglama va biror (a, b) oraliq berilgan bo'lsin. Vatarlar usulida $f(x)$ funksiyaga quyidagi shartlar qo'yiladi:

- 1) $f(x)$ funksiya $f'(x)$ va $f''(x)=(f'(x))'$ hosilalarga ega;
- 2) Berilgan (a, b) oraliqda $f(a)f(b) < 0$ tengsizlik o'rinli;

Berilgan (a, b) oraliqda $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalar ishorasi o'zgarmaydi.

Bu shartlarda berilgan (a, b) oraliqda $f(x)=0$ tenglama bitta ildizga ega va uni vatarlar usulida quyidagicha taqribiy hisoblash mumkin.

Vatarlar usulining 1-qadamida bu oraliqda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lmish AB egri chiziq yoyi AB vatar bilan almashtiriladi. Bu vatar OX koordinata o'qini (a, b) oraliqqa tegishli bo'lgan biror x_1 nuqtada kesib o'tadi. Topilgan x_1 izlanayotilgan x ildiz uchun birinchi yaqinlashish deb olinadi va u bilan berilgan (a,b) oraliq ikkita (a, x_1) va (x_1, b) oraliqlarga ajratiladi. Bu oraliqlarni qaysi birining chegaralarida $f(x)$ funksiyaning ishoralari o'zgaruvchan bo'lsa, shu oraliq koldiriladi va u (a_1, b_1) kabi belgilanadi.

Navbatdagi 2-qadamda qoldirilgan (a_1, b_1) oraliqda $y=f(x)$ funktsiyaning grafigi bo'lmish A_1B_1 egri chiziqli yoyi A_1B_1 vatar bilan almashtiriladi. Bu vatar OX koordinata o'qini (a_1, b_1) oraliqqa tegishli bo'lgan biror x_2 nuqtada kesib o'tadi. Topilgan x_2 izlanayotilgan x ildiz uchun ikkinchi yaqinlashish deb olinadi va u bilan berilgan (a, b) oraliq ikkita (a_1, x_2) va (x_2, b_1) oraliqlarga ajratiladi. Bu oraliqlarni qaysi birining chegaralarida $f(x)$ funktsiyaning ishoralari o'zgaruvchan bo'lsa, shu oraliq qoldiriladi va u (a_2, b_2) kabi belgilanadi. Xuddi shunday tarzda davom ettirilib, birin-ketin $x_3, x_4, \dots, x_n$ nuqtalarni va $(a_3, b_3), (a_4, b_4), \dots, (a_n, b_n)$ oraliqlarni hosil etamiz. Ko'rsatish mumkinki $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ qiymatlari ushbu

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, (x_0 = a),$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, (x_0 = b)$$

rekurrent formulalardan biri bilan ketma-ket hisoblanishi mumkin. Bunda boshlang'ich x_0 nuqta shunday tanlanishi kerakki, unda $f(x_0)f''(x_0) < 0$ shart bajarilishi kerak. Bu holda n tartib raqami oshib borgan sari x_n qiymatlari x ildizning aniq qiymatiga tobora yaqinlashib boradi. Shu sababli x_n qiymatlari x ildizning taqribiy qiymatlari deb olinishi mumkin. Ko'rsatish mumkinki, x_n taqribiy ildizning aniqligi

$$\varepsilon_n = \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

formula orqali baholanishi mumkin. Bu holda x ildizning aniq qiymati $(x_n - \varepsilon_n, x_n + \varepsilon_n)$ oraliqda joylashgan bo'ladi.

II. Tajriba ishining bajarilish namunasi.

Masalaning qo'yilishi: Chiziqli bo'lmagan $x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$ tenglama va uning bir ildizi joylashgan $(1, 2)$ oraliq berilgan. Bu ildizning taqribiy qiymatini vatarlar usulida berilgan $\varepsilon = 0.001$ aniqlikda hisoblang va bu ildizning aniq qiymati joylashgan oraliqni ko'rsating.

Echish: Berilgan tenglama bo'yicha $f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2$ funktsiyaning hosil qilamiz. Boshlang'ich nuqtani tanlash maqsadida $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni topamiz:

$$f'(x) = (x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2)' = 3x^2 - 0.4x - 0.2,$$

$$f''(x) = (3x^2 - 0.4x - 0.2)' = 6x - 0.4$$

Berilgan $(1, 2)$ oraliq chegaralarida

$$f(1)f''(1) = (1^3 - 0.2 \cdot 1^2 - 0.2 \cdot 1 - 1.2)(6 \cdot 1 - 0.4) = -0.6 \cdot 5.6 = -3.36 < 0,$$

$$f(2)f''(2) = (2^3 - 0.2 \cdot 2^2 - 0.2 \cdot 2 - 1.2)(6 \cdot 2 - 0.4) = 5.6 \cdot 12.6 = 70.56 > 0$$

bo'lgani uchun $f(x_0)f''(x_0) < 0$ shart $x_0 = 1$ nuqtada bajarilmokda. Demak, boshlang'ich nuqta sifatida $x_0 = 1$ chegaraviy nuqtani olamiz va $(1, 2)$ oraliqdagi ildizning taqribiy qiymatlarini birin-ketin

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(2) - f(x_n)}(2 - x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, (x_0 = 1)$$

rekurrent formula orqali hisoblab boramiz.

Takribiy x_n ildizning aniqligini topish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$\varepsilon_n = \frac{|f(x_n)|}{m}, \quad m = \min_{a \leq x \leq b} |f'(x)|$$

Bizning holda (1,2) oraliqda $f''(x) > 0$ va shu sababli $f'(x)$ funktsiya o'suvchi bo'ladi. Bu erdan

$$m = \min_{1 \leq x \leq 2} |f'(x)| = \min_{1 \leq x \leq 2} |3x^2 - 0.4x - 0.2| = |f'(1)| = |3 \cdot 1^2 - 0.4 \cdot 1 - 0.2| = 2.4$$

ekanligini va x_n ildizning aniqligi

$$\varepsilon_n = \frac{|f(x_n)|}{m} = \frac{|f(x_n)|}{2.4} = \frac{|x_n^3 - 0.2x_n^2 - 0.2x_n - 1.2|}{2.4}$$

formula bilan baholanishini ko'ramiz. Taqribiy ildizni vatarlar usulida topishda bajariladigan hisoblashlarni quyidagi jadval ko'rinishida ifodalaymiz. Bunda $f(2)=5.6$ bo'lgani uchun taqribiy ildizga har bir qadamda ko'shiladigan tuzatma

$$\Delta_n = \frac{f(x_n)}{f(2) - f(x_n)}(2 - x_n) = \frac{f(x_n)}{5.6 - f(x_n)}(2 - x_n)$$

formula bilan hisoblab boriladi.

Qadam n	x_n taqribiy ildiz	$f(x_n)$	Tuzatma Δ_n	Aniqlik ε_n
0	1	-0.6	-0.0968	0.25
1	1.0968	-0.3405	-0.0518	0.1419
2	1.1486	-0.1782	-0.0263	0.0743
3	1.1749	-0.0892	-0.0129	0.0372
4	1.1878	-0.0439	-0.0063	0.0183
5	1.1941	-0.0214	-0.0031	0.0089
6	1.1972	-0.0102	-0.0014	0.0042
7	1.1986	-0.0051	-0.0007	0.0021
8	1.1993	-0.0025	-0.0004	0.0011
9	1.1997	-0.0011	-0.0002	0.0004

Bunda taqribiy ildizni $\varepsilon=0.001$ aniqlikda topish uchun hisoblashlar 0.0001 aniqlikda olib borildi. Xisoblash jarayonining 9-qadamida taqribiy ildiz xatoligi $\varepsilon_9=0.0004 < 0.001 = \varepsilon$ bo'lgani, ya'ni talab qilingan aniqlikka erishilganligi uchun hisoblashlar to'xtatildi. Demak, berilgan $x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$ tenglamaning (1,2) oraliqdagi ildizining taqribiy qiymati $\varepsilon=0.001$ aniqlikda $x_9=1.1997$ bo'ladi va bu ildizning aniq qiymati

$(x_9 - \varepsilon_9, x_9 + \varepsilon_9) = (1.1997 - 0.0004, 1.1997 + 0.0004) = (1.1993, 1.2001)$ oraliqda yotadi.

III. Tajriba ishini mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Masalaning qo'yilishi: Chiziqli bo'lmagan $f(x)=0$ tenglama va uning bir ildizi joylashgan (a,b) oraliq berilgan. Bu ildizning taqribiy qiymatini vatarlar usulida berilgan $\varepsilon>0$ aniqlikda hisoblang va bu ildizning aniq qiymati joylashgan oraliqni ko'rsating

Izox: 1. $f(x)$ funktsiya va ε qiymati quyidagi jadvaldan talabning variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabning varianti № o'qituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib raqami bilan belgilanadi.

№	$f(x)$	a	b	ε	№	$f(x)$	a	b	E
1	x^3+4x^2+6x-6	0	1	0.005	14	x^3+x-5	1	2	0.001
2	x^3-2x^2+5x-7	1	2	0.009	15	x^3-3x^2+9x-8	1	2	0.007
3	x^3-3x^2+6x+3	-1	0	0.001	16	x^3-2x+5	-3	-2	0.003
4	x^3-x^2+4x-5	1	2	0.002	17	$x^3+3x^2+12x+3$	-1	0	0.005
5	x^3+3x^2+6x-1	0	1	0.006	18	x^3+4x-6	1	2	0.009
6	x^3+x^2+4x-2	0	1	0.007	19	x^3-3x^2+9x+2	-1	0	0.002
7	x^3-2x^2+5x+7	-1	0	0.004	20	x^3-4x+1	-3	-2	0.007
8	x^3-5x^2-3x+5	0	1	0.003	21	x^3-6x-8	2	3	0.006
9	$x^3+3x^2+12x-12$	0	1	0.008	22	x^3+3x^2+6x-2	0	1	0.004
10	x^3-2x^2+3x+2	-1	0	0.005	23	$x^3-12x+6$	3	4	0.001
11	x^3+2x^2+5x-1	0	1	0.001	24	$3x^3-12x^2+5$	3	4	0.005
12	x^3-2x^2+3x+1	-1	0	0.002	25	x^3-3x^2+9x-8	1	2	0.003
13	x^3-x^2+4x+2	-1	0	0.009	26	$2x^3+5x-1$	0	1	0.004

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. $f(x)=0$ tenglamani vatarlar usulida echish uchun $f(x)$ funktsiyaga qanday shartlar qo'yiladi?
2. Vatarlar usulining mohiyati nimadan iborat?
3. Vatarlar usulining afzalligi nimadan iborat?
4. Vatarlar usulida tenglamaning taqribiy ildizlari qanday formula bilan hisoblanadi?
5. Vatarlar usulida boshlang'ich nuqta qanday tanlanadi?
6. Vatarlar usulida taqribiy ildizning xatoligi qanday aniqlanadi?
7. Vatarlar usulida aniq ildiz yotgan oraliq qanday topiladi?

V. Adabiyotlar ruyxati.

1. Soatov Yo.U. Oliy matematika. 2-jild. Toshkent, «O'qituvchi», 1994 y. 15-bob, 2-§, 366-367 betlar.
2. Isroilov M.I. Hisoblash usullari. I qism. Toshkent, «O'zbekiston», 2003 yil. 2- bob, 6-§, 83-85 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajarish algoritmi va dasturi.

Chizikli bo'lmagan $f(x)=0$ tenglama ildizlarini vatarlar usulida talab etilgan $\varepsilon>0$ aniqlikda hisoblash nazariy jixatdan murakkab bo'lmasada, uni amaliy qo'llanilishi katta hajmdagi hisoblashlarni talab etadi. Ammo bu hisoblashlar bir xil ko'rinishda bo'lib, siklik xarakterga ega va shu sababli uni kompyuterda oson amalga oshirish mumkin. Yuqorida ko'rsatilgan nazariy ma'lumotlarga asosan bu jarayonni quyidagi algoritm asosida kompyuterda bajarish mumkin.

1. Tenglamaning chap tomonidagi $f(x)$ funktsiyaning $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarini hisoblaymiz;
2. Izlanayotilgan bitta x ildiz joylashgan (a, b) oraliqni beramiz. Bu oraliqda $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalar o'z ishoralarini o'zgartirmaydi deb hisoblaymiz;
3. Taqribiy ildiz aniqligini ifodalovchi $\varepsilon>0$ sonni beramiz;
4. Boshlang'ich $x_0=a$ yoki $x_0=b$ qiymatni $f(x_0) f''(x_0)<0$ shartni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz;
5. Agar $x_0=a$ bo'lsa izlanayotilgan ildizning taqribiy qiymatini

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0)$$

formula bilan yoki $x_0=b$ bo'lsa

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(b)}(x_0 - a)$$

formula bilan ketma-ket hisoblab boramiz;

6. Ildiz taqribiy qiymatining ε_n xatoligini $\varepsilon_n = \frac{|f(x)|}{M}$

formula bilan baholaymiz. Bu erda M soni

$$M = \begin{cases} |f'(a)|, & f''(\frac{a+b}{2}) > 0; \\ |f'(b)|, & f''(\frac{a+b}{2}) < 0. \end{cases}$$

munosabatdan aniqlanadi.

7. Agar $\varepsilon_n > \varepsilon$ bo'lsa, unda $x_0=x$ deb olamiz va hisoblashlarni 5-qadamdan takrorlaymiz;
 8. Agar $\varepsilon_n > \varepsilon$ shart bajarilmasa, unda izlanayotilgan ildizning berilgan $\varepsilon>0$ aniqlikdagi taqribiy qiymati sifatida topilgan x qiymatini olamiz;
- Ildizning taqribiy x qiymatini, uning xatoligi chegarasini ifodalovchi ε_n sonini va ildizning anik kiymati joylashgan $(x - \varepsilon_n, x + \varepsilon_n)$ oraliq chegaralarini chop etib, hisoblashlarni yaqunlaymiz.

Bu algoritma asosida Paskal tilidagi dasturni keltiramiz.

```
PROGRAM VATAR (INPUT, OUTPUT);
  LABEL 10, 20, 30, 40, 50;
  VAR A1, B1: INTEGER;
      E, X, H, M, EN, AT, BT : REAL;
  FUNCTION W(T: REAL): REAL;
    VAR A, B, C, D: INTEGER;
    BEGIN
      READ(A, B, C, D);
      W := A*T*T*T+B*SQR(T)+C*T+D;
    END;
  FUNCTION W1(T: REAL): REAL;
    VAR A, B, C: INTEGER;
    BEGIN
      READ(A, B, C);
      W 1:= 3*A*SQR(T)+2*B*T+C;
    END;
  FUNCTION W2(T: REAL): REAL;
    VAR A, B: INTEGER;
    BEGIN
      READ(A, B);
      W 2:= 6*A*T+2*B;
    END;
  BEGIN
    READ(A1, B1, E);
    IF W(A1)*W2(A1)<0 THEN
      BEGIN
        X:=A1; K:=1;
10: H:=(B1-X)*W(X)/(W(B1)-W(X)); GO TO 30;
        END;
      ELSE
        X:=B1; K:=0;
20: H:=(X-A1)*W(X)/(W(X)-W(A1));
30: X:=X-H;
        IF W2((A1+B1)/2)>0 THEN
          BEGIN
            M:=W1(A1); GO TO 40;
          END;
        ELSE
          M:=W1(B1);
40: EN:= ABS(W(X))/M;
          IF EN<=E THEN GO TO 50;
```

```
        IF K=1 THEN GO TO 10;  
            GO TO 20;  
50: AT:=X-EN; BT:=X+EN;  
    WRITE (X, EN, AT, BT);  
END.
```

UCHINCHI TAJRIBA ISHI

M a v z u: Matritsalar va ular ustida amallar.

Tajriba ishining maqsadi: Matritsalar ustida amallar bajarish bo'yicha talabalarda malaka hosil qilish.

I. Tajriba ishi mavzusi bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar.

Quyidagi ko'rinishdagi jadvalga $m \times n$ –tartibli **matritsa** deb aytiladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Bunda a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$) ixtiyoriy o'zgarmas sonlar yoki o'zgaruvchilar bo'lib, matritsaning elementlari deb ataladi. Bunda i element joylashgan satrning, j esa ustunning tartib raqamini ifodalaydi. Matritsalar A,B,C ... kabi bosh xarflar bilan belgilanadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -9 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = (0.7 \quad 1 \quad 3.57).$$

Bu erda A,B va C orqali mos ravishda 2×3 , 3×3 va 1×3 tartibli matritsalar belgilangan.

Agar matritsada $m=n$ shart bajarilsa, ya'ni uning satrlari va ustunlari soni teng bo'lsa, u **kvadrat matritsa** deb ataladi. Matritsada $m=1$ yoki $n=1$ bo'lsa, u mos ravishda satr yoki ustun matritsa deyiladi. Masalan, yuqoridagi misolda B-kvadrat, C esa satr matritsadir.

1) Matritsalar ni qo'shish va ayirish.

Bir xil tartibli A va B matritsalar ni yig'indisi yoki ayirmasi deb ularning mos elementlarini qo'shish yoki ayirish orqali hosil qilingan yangi matritsalar ga aytiladi va $A+B$ yoki $A-B$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

Bo'lsa, unda

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

2) Matritsani o'zgaras songa ko'paytirish.

Ixtiyoriy A matritsani k o'zgaras songa ko'paytmasi deb uning barcha elementlarini shu o'zgaras songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan yangi matritsaga aytiladi va u kA kabi belgilanadi.

Ta'rifga ko'ra quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$k \cdot A = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

3) Kvadrat matritsalarini ko'paytirish.

Bir xil tartibli A va B kvadrat matritsalarini o'zaro ko'paytmasi quyidagi formula orqali aniqlanadi va AB kabi belgilanadi:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

4) Matritsani ustun matritsaga ko'paytirish.

Matritsani ustun matritsaga ko'paytmasi quyidagi ustun matritsa singari aniqlanadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + a_{23}b_3 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + a_{33}b_3 \end{pmatrix}$$

Umuman olganda tartiblari mxr va rxn bo'lgan A va B matritsalarini ko'paytirish mumkin. Bunda AB ko'paytma matritsa mxn tartibli bo'ladi. Matritsalarini ko'paytirishda AB=BA tenglik umuman olganda o'rinli bo'lmaydi.

Kvadrat matritsalar uchun ularning **determinanti (aniklovchisi)** tushunchasi kiritiladi. Matritsaning determinanti uning elementlarini ma'lum bir tartibda ko'paytirish va bu ko'paytmalarni qo'shish yoki ayirish natijasida hosil qilingan aniq bir sondan iborat bo'ladi.

5) Ikkinchi tartibli determinant.

Ikkinchi tartibli matritsaning determinanti deb

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Ko'rinishdagi ifodaga aytiladi. Bunda $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ –determinantning elementlari deb aytiladi.

Xar bir ikkinchi tartibli determinantning qiymati quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 = -14, \quad \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 43.$$

6)Uchinchi tartibli determinant.

Uchinchi tartibli matritsaning determinant deb

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ko'rinishdagi ifodaga aytiladi. Bu erda a_{ij} , $i, j=1,2,3$, determinantning elementlari bo'lib, odatda ular o'zgarmas sonlardir.

Xar bir uchinchi tartibli determinantning qiymati quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{23} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33},$$

Bu determinantni ikkinchi tartibli determinantlar yordamida quyidagi formula bilan ham hisoblash mumkin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot (-3) + 3(-2) \cdot 3 - \\ - 3 \cdot 1 \cdot (-3) - (-1)(-2) \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 = -21$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-10) + 8 + 3 \cdot (-3) = -21$$

7) Birlik matritsa ta'rifi.

Agar kvadrat matritsada a_{ij} ko'rinishdagi diagonal elementlar birga teng bo'lib, uning boshqa barcha elementlari nolga teng bo'lsa, bunday matritsa **birlik matritsa** deb aytiladi va E yoki E_n kabi belgilanadi.

Masalan,

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8) Teskari matritsaning ta'rifi va uni topish formulasi.

Agar A va B bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo'lib, ularning ko'paytmasi $AB=E$ (E -birlik matritsa) shartni qanoatlantirsa, A va B o'zaro teskari matritsalar deyiladi. A matritsaga teskari matritsa A^{-1} kabi belgilanadi.

Biror uchinchi tartibli

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

matritsa berilgan bo'lsin va uning aniqllovchisi uchun $\det A \neq 0$ shart bajarilsin. Unda bu matritsaga teskari matritsa mavjud, yagona va quyidagi formula orkali topiladi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{21} & A_{22} & A_{32} \\ A_{31} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Bu erda A_{ij} berilgan A matritsaning yoki $\det A$ determinantning **algebraik to'ldiruvchilari** deyiladi va ular ikkinchi tartibli determinantlar orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & A_{12} &= -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, & A_{13} &= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, & A_{22} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, & A_{32} &= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, & A_{33} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Teskari matritsani to'g'ri topilganligini $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ tenglikni bajarilishi orqali tekshirib ko'rish mumkin.

II. Tajriba ishining bajarilish namunasi.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan A va B kvadrat hamda C ustun matritsalar bo'yicha quyidagi matritsalarini toping:

1. $5 \cdot A$ 2. $2A+4B$ 3. $(A-2B)^2$ 4. $A \cdot B \cdot C$ 5. A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Echish: 1. Matritsani o'zgarmas songa ko'paytirish ta'rifiga asosan

$$5 \cdot A = 5 \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 15 & -10 & -5 \\ -15 & 10 & -15 \end{pmatrix}$$

2. Matritsalarini songa ko'paytirish va ularni o'zaro qo'shish hamda ayirish ta'riflaridan foydalanib, ushbu natijalarni olamiz:

$$\begin{aligned} 2A + 4B &= 2 \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 6 & -4 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 8 & -12 & 12 \\ 16 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -8 \\ 14 & -16 & 10 \\ 10 & 8 & -10 \end{pmatrix}. \\ 2A - 4B &= \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 6 & -4 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & -12 \\ 8 & -12 & 12 \\ 16 & -4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 16 \\ -2 & 8 & -14 \\ -22 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Matritsaning kvadrati $A^2 = A \cdot A$ kabi aniqlanishidan foydalanib, quyidagi natijani olamiz:

$$\begin{aligned} (A - 2B)^2 &= (A - 2B) \cdot (A - 2B) = A^2 - 4A \cdot B + 4B^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 8 & 0 \\ 0 & -10 & 11 \\ 12 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \\
& - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 14 & -17 \\ -5 & 5 & -14 \\ -11 & -9 & 18 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -11 & -3 & 0 \\ 8 & 12 & -18 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & 8 & 0 \\ 0 & -10 & 11 \\ 12 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \\
& + \begin{pmatrix} -4 & -56 & 68 \\ 20 & -20 & 56 \\ 44 & 36 & -72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -44 & -12 & 0 \\ 32 & 48 & -72 \\ 8 & -16 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -65 & -60 & 68 \\ 52 & 18 & -5 \\ 64 & 22 & -103 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Matritsalarini ko'paytirish ta'rifiga asosan

$$\begin{aligned}
A \cdot B \cdot C &= \begin{pmatrix} 1 & - & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 14 & -17 \\ -5 & 5 & -14 \\ -11 & -9 & 18 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -95 \\ -71 \\ 79 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5. Berilgan A matritsaga teskari A^{-1} matritsani

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formula bo'yicha topamiz. Dastlab A matritsaning $\det A$ determinantini uchinchi tartibli determinantni hisoblash formulasidan foydalanib topamiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 12 + 12 - 12 - 36 + 2 = -40.$$

Bu erda $\det A = -40 \neq 0$ bo'lgani uchun A^{-1} teskari matritsa mavjud va uni topish uchun A_{ij} algebraik to'ldiruvchilarni II tartibli determinant formulasi bo'yicha hisoblaymiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 10$$

Demak,

$$A^{-1} = \frac{1}{-40} \begin{pmatrix} 8 & -8 & 8 \\ 12 & 3 & 7 \\ 0 & 10 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{3}{40} & -\frac{7}{40} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Olingan bu natijani tekshiramiz:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{3}{40} & -\frac{7}{40} \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Demak teskari matritsa tugri topilgan.

III. Tajriba ishini mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan A va B kvadrat hamda C ustun matritsalar bo'yicha quyidagi matritsalarini toping:

1. $p \cdot A$
2. $mA \pm nB$
3. $(A + kB)^2$
4. $A \cdot B \cdot C$
5. A^{-1}

Izox: 1. A, B va C matritsalar hamda α , m, n va k sonlarning qiymatlari talabani variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabani varianti № o'qituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib raqami bilan belgilanadi.

Variant №1

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$p=-3, \quad m=4, \quad n=-2, \quad k=-5$$

Variant №2

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$p=5, \quad m=4, \quad n=-1, \quad k=3$$

Variant №3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=-4, \quad m=-2, \quad n=4, \quad k=-2$$

Variant №4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=-8, \quad m=-3, \quad n=2, \quad k=7$$

Variant №5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=6, \quad m=-2, \quad n=4, \quad k=3$$

Variant №6

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=4, \quad m=-5, \quad n=-4, \quad k=2$$

Variant №7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$p=-5, \quad m=7, \quad n=-3, \quad k=-2$

Variant №8

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$p=4, \quad m=-3, \quad n=5, \quad k=5$

Variant №9

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$p=-3, \quad m=5, \quad n=-4, \quad k=7$

Variant №10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$p=-8, \quad m=-2, \quad n=7, \quad k=-3$

Variant №11

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$p=6, \quad m=5, \quad n=2, \quad k=4$

Variant №12

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$p=-6, \quad m=6, \quad n=-3, \quad k=5$

Variant №13

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

p=9, m=-2, n=5, k=-4

Variant №14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

p=-3, m=-4, n=-2, k=-5

Variant №15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

p=-2, m=-3, n=-2, k=-6

Variant №16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

p=4, m=-4, n=3, k=-5

Variant №17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

p=7, m=-5, n=4, k=-3

Variant №18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=-6, \quad m=4, \quad n=-5, \quad k=4$$

Variant №19

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=-2, \quad m=-3, \quad n=5, \quad k=-5$$

Variant №20

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=-8, \quad m=6, \quad n=-3, \quad k=-4$$

Variant №21

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=-3, \quad m=-5, \quad n=9, \quad k=-3$$

Variant №22

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=7, \quad m=-4, \quad n=-2, \quad k=5$$

Variant №23

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$p=6, \quad m=-4, \quad n=-5, \quad k=4$$

Variant №24

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$p=-4, \quad m=6, \quad n=-2, \quad k=-9$

Variant №25

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$p=3, \quad m=4, \quad n=2, \quad k=5$

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Matritsalar qanday turlarga ajratiladi?
4. Matritsalarini songa ko'paytirish amali qanday aniqlanadi?
5. Kachon ikkita matritsani qo'shish va ayirish mumkin?
6. Matritsalarini qo'shish va ayirish amallari qanday aniqlanadi?
7. Qachon ikkita matritsani ko'paytirish mumkin?
8. Ikkita matritsa ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
9. Ikkita matritsa ko'paytmasi o'rin almashtirish qonuniga bo'ysunadimi?
10. Ikkinchi tartibli determinant qanday aniqlanadi va hisoblanadi?
11. Uchinchi tartibli determinant qanday aniqlanadi va hisoblanadi?
12. Birlilik matritsa qanday ko'rinishda bo'ladi?
13. Teskari matritsa qanday ta'riflanadi?
14. Qaysi shartda teskari matritsa mavjud va yagona bo'ladi?
15. Teskari matritsa qanday topiladi?

V. Adabiyotlar ro'yxati.

1. X.S.Madraximov, N.S.Mo'minov, A.G.Ganiev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1988 y.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika». 1-jild, Toshkent, O'qituvchi, 1992 yil. 1-bob, §22-24, 64-72 betlar, §9, 23-30 betlar.
3. D.G. Raximov. «Oliy matematika», 1- kism, Toshkent, 2003 yil. Ibob, §1, 7-14 betlar, §2, 14-21 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajarish algoritmi va dasturi.

Ushbu tajriba ishi topshiriklarini kopyuterda quyidagi algoritm asosida bajarish mumkin.

1. $A_{3 \times 3}$, $B_{3 \times 3}$, $C_{3 \times 1}$ matritsalar elementlarini kiritamiz;
2. Topshirik shartidagi r sonni kiritamiz va $PA=p \cdot A$ matritsa elementlarini hisoblaymiz;
3. Topshirik shartidagi m va n sonlarni kiritib, $D=mA+nB$ matritsa elementlarini hisoblaymiz;
4. Topshirik shartidagi k sonni kiritib, dastlab $N=A+kB$, so'ngra $E=N^2$ matritsa elementlarini hisoblaymiz;
5. Dastlab $N=AB$, so'ngra $ABC=NC$ matritsa elementlarini topamiz;
6. Berilgan A kvadrat matritsaning AD aniqllovchisini III tartibli aniqllovchi formulasiga asosan hisoblaymiz;
7. Agar $AD=0$ bo'lsa A^{-1} teskari matritsa mavjud emasligini xabar qilamiz;
8. Agar $AD=0$ bo'lsa, A matritsaning $DA(i,j)$ algebraik to'ldiruvchilarini II tartibli aniqllovchi formulasiga asosan hisoblaymiz;
9. Teskari matritsa AT elementlarini $AT(i,j)= DA(j,i)/AD$ formula asosida topamiz;
10. Hisoblashlarni yakunlaymiz.

Bu algoritmning Paskal tildagi dasturini keltiramiz.

```
PROGRAM MATRITSA (INPUT, OUTPUT);
  LABEL 10:
    VAR
      P, M, N, K, S, AD : INTEGER;
      A, B, PA, D, N, E, DA, AT: ARRAY [1..3, 1..3] OF INTEGER;
      C, M : ARRAY [1..3] OF INTEGER;
    BEGIN
      FOR I :=1 TO3 DO
        BEGIN
          FOR J :=1 TO3 DO
            READ(A(I,J), B(I,J));
          END;
        END;
      FOR I :=1 TO3 DO READ(C(I));
      READ(P);
      FOR I :=1 TO3 DO
        BEGIN
          FOR J :=1 TO3 DO
```

```

        BEGIN
            PA(I,J):= P*A(I,J); WRITE(PA(I,J));
        END;
    END;
    READ(M, N);
    FOR I :=1 TO3 DO
        BEGIN
            FOR J :=1 TO3 DO
                BEGIN
                    D(I,J):= M*A(I,J)+N*B(I,J); WRITE(D(I,J));
                END;
            END;
        END;
    READ(K);
    FOR I :=1 TO3 DO
        BEGIN
            FOR J :=1 TO3 DO
                BEGIN
                    N(I,J):=A(I,J)+ K*B(I,J);
                END;
            END;
        END;
    FOR I :=1 TO3 DO
        BEGIN
            FOR J :=1 TO3 DO
                BEGIN
                    FOR T:=1 TO 3 DO
                        BEGIN
                            S:=0; E(I,J):=S+N(I,T)*N(T,J); WRITE(E(I,J));
                        END;
                    END;
                END;
            END;
        END;
    FOR I :=1 TO3 DO
        BEGIN
            FOR J :=1 TO3 DO
                BEGIN
                    FOR T:=1 TO 3
                        S:=0; N(I,J):=S+ A(I,T)*B(T,J);
                    END;
                END;
            END;
        END;
    FOR I :=1 TO3 DO
        BEGIN
            FOR J :=1 TO3 DO
                BEGIN

```

```

        S:=0;          M(I):=S+N(I,J)*C(J);
        END;
        WRITE (M(I));
    END;
AD:=A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)+A(1,2)*A(2,3)*A(3,1)+
    A(1,3)*A(2,1)*A(3,2)-A(1,3)*A(2,2)*A(3,1)-
    A(1,2)*A(2,1)*A(3,3) -A(1,1)*A(2,3)*A(3,2);
    IF AD=0 THEN
        BEGIN
    WRITE(‘ ТЕСКАРИ МАТРИЦА МАВЖУД ЭМАС’); GO TO 10;
        END;
    ELSE
    DA(1,1):= A(2,2)*A(3,3)- A(2,3)*A(3,2);
    DA(1,2):= A(2,3)*A(3,1)- A(2,1)*A(3,3);
    DA(1,3):= A(2,1)*A(3,2)- A(2,2)*A(3,1);
    DA(2,1):= A(1,3)*A(3,2)- A(1,2)*A(3,3);
    DA(2,2):= A(1,1)*A(3,3)- A(1,3)*A(3,1);
    DA(2,3):= A(1,2)*A(3,1)- A(1,1)*A(3,2);
    DA(3,1):= A(1,2)*A(2,3)- A(1,3)*A(2,2);
    DA(3,2):= A(1,3)*A(2,1)- A(1,1)*A(2,3);
    DA(3,3):= A(1,1)*A(2,2)- A(1,2)*A(2,1);
        FOR I:=1 TO 3 DO
            BEGIN
                FOR J:=1 TO 3 DO
                    BEGIN
                        AT(I,J):= DA(J,I)/AD; WRITE(AT(I,J));
                    END;
                END;
            END;
10: END.

```

TO'RTINCHI TAJRIBA ISHI.

M a v z u: Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss va Kramer usullarida echish.

Tajriba ishining maqsadi: Talabalarda chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss va Kramer usullari orkali echish malakasini hosil qilish.

I. Tajriba ishi mavzusi bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar.

Uch noma'lumli chizikli tenglamalar sistemasi deb quyidagiga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Bu erda a_{ij} ($i, j=1,2,3$)- berilgan sonlar bo'lib, ular chiziqli tenglamalar sistemasining ***koeffitsientlari***, b_i ($i=1,2,3$) ham ma'lum sonlar bo'lib, sistemaning ***ozod xadlari*** deyiladi. (1) sistemada x_j ($j=1,2,3$) noma'lum sonlar bo'lib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi. (1) sistemada x_j ($j=1,2,3$) noma'lumlar urniga qandaydir aniq α_j ($j=1,2,3$) sonlarni qo'yganda, ya'ni $x_j = \alpha_j$ ($j=1,2,3$) deyilganda, sistemadagi uchala tenglama xam ayniyatga o'tsa, bu α_j ($j=1,2,3$) sonlari sistemaning ***ildizlari*** deb ataladi. Berilgan sistemaning ildizlarini topish jarayoni sistemani ***echish*** deyiladi. (1) sistemani echishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan Gauss va Kramer usullarini ko'rib chiqamiz

Gauss usuli. Gauss usulining asosiy mazmuni shundan iboratki, unda berilgan (1) tenglamalar sistemasi «turtburchakli» shakldan «uchburchakli» shaklga keltiriladi. Bunga quyidagi qadamlarni bajarish natijasida erishiladi:

1. Birinchi tenglamaning barcha hadlari $a_{11} \neq 0$ ra bo'linadi (agarda $a_{11} = 0$ bo'lsa sistema tenglamalari o'rnini almashtirish orqali talab etilgan shartga erishamiz) va

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \alpha_{12} \quad , \quad \frac{a_{13}}{a_{11}} = \alpha_{13} \quad , \quad \frac{b_1}{a_{11}} = \beta_1$$

belgilar kiritilib, quyidagi (2) tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (2)$$

2. (2) sistemadagi birinchi tenglamaning barcha hadlari a_{21} ga ko'paytiriladi va hosil bo'lgan tenglamadan sistemaning ikkinchi tenglamasi ayiriladi va quyidagi belgilar kiritiladi:

$$\alpha_{12} \cdot a_{21} - a_{22} = \alpha_{22} \quad , \quad \alpha_{13} \cdot a_{21} - a_{23} = \alpha_{23} \quad , \quad \beta_1 \cdot a_{21} - b_2 = \beta_2$$

Natijada ushbu (3) tenglamalar sistemasi hosil qilinadi:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (3)$$

Bu sistemaning ikkinchi tenglamasida x_1 noma'lum qatnashmaydi.

3. (3) sistemaning birinchi tenglamasini a_{31} ga ko'paytirib, hosil bo'lgan tenglamadan sistemaning uchinchi tenglamasi ayiriladi va quyidagi belgilar kiritiladi:

$$\alpha_{12} \cdot a_{31} - a_{32} = \alpha_{32}, \quad \alpha_{13} \cdot a_{31} - a_{33} = \alpha_{33}, \quad \beta_1 \cdot a_{31} - b_3 = \beta_3$$

Natijada ushbu (4) tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 = \beta_2 \\ \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases} \quad (4)$$

Bu sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalarida x_1 noma'lum qatnashmaydi.

4. (4) sistemaning ikkinchi tenglamasi α_{22} ga bo'linadi va, quyidagi belgilar kiritilib, (5) tenglamalar sistemasiga o'tiladi:

$$\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{22}} = \bar{\alpha}_{23}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_{22}} = \bar{\beta}_2$$

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1 \\ x_2 + \bar{\alpha}_{23}x_3 = \bar{\beta}_2 \\ \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 = \beta_3 \end{cases} \quad (5)$$

5. (5) sistemaning ikkinchi tenglamasi α_{32} ga ko'paytiriladi, hosil bo'lgan tenglamadan sistemaning uchinchi tenglamasi ayiriladi va quyidagi belgilar kiritilib, ushbu (6) tenglamalar sistemasini hosil qilinadi:

$$\bar{\alpha}_{23} \cdot \alpha_{32} - \alpha_{33} = \bar{\alpha}_{33}, \quad \bar{\beta}_2 \cdot \alpha_{32} - \beta_3 = \bar{\beta}_3$$

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 = \beta_1 \\ x_2 + \bar{\alpha}_{23}x_3 = \bar{\beta}_2 \\ \bar{\alpha}_{33}x_3 = \bar{\beta}_3 \end{cases} \quad (6)$$

6. (6) sistema berilgan (1) sistemaning «uchburchak» shakliga keltirilgan ko'rinishidir. Uning uchinchi tenglamasi x_3 noma'lumga nisbatan oddiy chiziqli tenglama bo'lib, undan x_3 ildizning qiymati topiladi. Aniqlangan x_3 qiymati (6) sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yilib, x_2 noma'lumga nisbatan chiziqli tenglamaga kelinadi. Bu chiziqli tenglamadan sistemaning x_2 ildizi topiladi. Aniqlangan x_3 va x_2 ildizlarning qiymatlari (6) sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yilib, x_1 noma'lumga nisbatan chiziqli tenglama hosil qilinadi va uni echib, sistemaning x_1 ildizi topiladi.

Kramer usuli. Bu usulda berilgan (1) chiziqli tenglamalar sistemasining koeffitsientlari va ozod xadlaridan foydalanib, quyidagi uchinchi tartibli aniqlovchilarni tuzamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Bunda Δ -sistemaning asosiy aniqlovchisi, Δ_1 , Δ_2 va Δ_3 –sistemaning yordamchi aniqlovchilari deb ataladi. Kramer usulida asosiy aniqlovchi $\Delta \neq 0$ deb hisoblanadi. Aks holda Kramer usulidan foydalanib bo'lmaydi. Kiritilgan aniqlovchilar yordamida berilgan (1) chiziqli tenglamalar sistemasining ildizlari **Kramer formulalari** deb ataluvchi quyidagi formulalardan topiladi:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (2)$$

II. Tajriba ishining bajarilish namunasi.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini a) Gauss va b) Kramer usullarida eching:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Echish: a) Bu sistemani Gauss usulida echish uchun dastlab uni «to'rtburchakli» shakldan «uchburchakli» shaklga keltiramiz. Buning uchun dastlab sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalaridan x_1 noma'lumni yo'qotamiz. Bunga erishish uchun sistemaning birinchi tenglamasini 5 ga (2 ga) ko'paytirib, uning ikkinchi (uchinchi) tenglamasidan ayiramiz. Natijada quyidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_2 - 3x_3 = -3 \\ -3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Endi bu sistemaning uchinchi tenglamasidan x_2 noma'lumni yuqotamiz. Buning uchun oxirgi sistemaning ikkinchi tenglamasini (3ga, uchinchi tenglamasini esa (8ga kupaytirib, hosil bo'lgan uchinchi tenglamadan ikkinchi tenglamani ayiramiz. Natijada ushbu «uchburchak» shaklidagi sistemaga kelamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -8x_2 - 3x_3 = -3 \\ -17x_3 = -17 \end{cases}$$

Oxirgi uchburchakli sistemaning uchinchi tenglamasidan x_3 noma'lumni topamiz:

$$-17x_3 = -17 \Rightarrow x_3 = \frac{-17}{-17} = 1.$$

$x_3=1$ natijani uchburchakli sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib, x_2 noma'lumni topamiz:

$$-8x_2 - 3 \cdot 1 = -3 \Rightarrow -8x_2 - 3 = -3 \Rightarrow -8x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Topilgan $x_3=1$ va $x_2=0$ natijalarni uchburchakli sistemaning birinchi tenglamasiga qo'yib, x_1 noma'lum qiymatini topamiz:

$$x_1 + 0 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Demak, Berilgan sistemaning ildizlari $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ bo'ladi. Echim to'g'riligini tekshirish uchun bu ildizlar qiymatini berilgan sistemaga qo'yamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 0 + 1 \equiv 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \equiv -3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \cdot (-1) - 0 + 3 \cdot 1 \equiv 1 \end{cases}$$

Bu erdan kurinadiki $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ bo'lganda berilgan sistemaning uchala tenglamasi ham ayniyat bo'ldi. Demak, sistema to'g'ri echilgan va $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$ berilgan sistema ildizlari bo'ladi.

b) Berilgan sistemani Kramer usulida echish uchun dastlab uning asosiy Δ va yordamchi Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 aniqlovchilarini hisoblaymiz. Asosiy Δ aniqlovchi sistemaning koeffitsientlaridan tuziladi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 6 - 2 - 4 + 9 + 5 = 17.$$

Yordamchi Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 aniqlovchilar asosiy Δ aniqlovchining mos ravishda birinchi, ikkinchi, uchinchi ustunlarini ozod xadlar bilan almashtirishdan hosil qilinadi:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 3 - 2 - 3 = -17,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 2 + 9 - 5 = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 3 + 6 + 3 = 17.$$

Bu aniqlovchilar yordamida berilgan chiziqli tenglamalar sistemasining ildizlarini Kramer formulalari orqali quyidagicha topamiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-17}{17} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{17} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{17}{17} = 1.$$

III. Tajriba ishini mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan uch noma'lumli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasini a) Gauss va b) Kramer usullarida eching.

Izox: 1. Uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi talabning variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabning varianti № o'qituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib raqami bilan belgilanadi.

$$\text{№1.} \begin{cases} x + 3y + z = 6 \\ -3x + 4y + 2z = 4 \\ -4x + 5y + 11z = -1 \end{cases}$$

$$\text{№3.} \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3x + 7y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\text{№5.} \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ 2x + 4y + 8z = 3 \\ -4x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

$$\text{№7.} \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 4 \\ y - z = 5 \\ 4x - 2y + 8z = 3 \end{cases}$$

$$\text{№9.} \begin{cases} 8x + y - 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 3 \\ 4x + 9y - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{№2.} \begin{cases} 4x + 2y + z = -5 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 4x + y + 9z = -1 \end{cases}$$

$$\text{№4.} \begin{cases} 9x + 5y + 7z = -3 \\ 3x - 5y + 2z = 1 \\ 4x + 5y - 7z = 0 \end{cases}$$

$$\text{№6.} \begin{cases} 7x - 5y - 4z = -4 \\ 10x + 3y + 4z = 7 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases}$$

$$\text{№8.} \begin{cases} 5x - 2y + 3z = -2 \\ 4x + 6y + 2z = 1 \\ 9x + 6y - z = -2 \end{cases}$$

$$\text{№10.} \begin{cases} 5x + 2y + z = 1 \\ 3x - 9y - 6z = 7 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\text{№11.} \begin{cases} 2x + y - z = -7 \\ 3x - 8y + 6z = 9 \\ 5x - 3y - 7z = -6 \end{cases}$$

$$\text{№12.} \begin{cases} 9x - 3y + 7z = 7 \\ -8x - 2y + z = 8 \\ x - 9y + 7z = 6 \end{cases}$$

$$\text{№13.} \begin{cases} 8x + 6y - z = -6 \\ 6x + 11y - 2z = 9 \\ 2x - 4y + 8z = -3 \end{cases}$$

$$\text{№14.} \begin{cases} 9x - 6y - 6z = 1 \\ 8x + y + 2z = 1 \\ -x + 3y + 6z = -1 \end{cases}$$

$$\text{№15.} \begin{cases} 7x + 5y + 4z = -5 \\ 3x + 7y + z = 5 \\ 4x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{№16.} \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 5 \\ -2x + 3y + 5z = 8 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{№17.} \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ 4x + 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\text{№18.} \begin{cases} 5x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - 7y + 3z = 3 \\ 6x - 7y + 9z = 2 \end{cases}$$

$$\text{№19.} \begin{cases} 7x + 6y + 6z = -1 \\ 5x + 9y + 5z = 7 \\ 8x + 7y + 8z = -5 \end{cases}$$

$$\text{№20.} \begin{cases} 5x + 3y + 4z = -3 \\ 4x + 4y - z = 3 \\ -4x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$\text{№21.} \begin{cases} x - z = 3 \\ 5x - y + 7z = 9 \\ 4x + 9y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\text{№22.} \begin{cases} 6x + y - z = -2 \\ 5y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\text{№23.} \begin{cases} 5x - y + 2z = 2 \\ 5x + y + 6z = 4 \\ -x + 4y + 9z = 2 \end{cases}$$

$$\text{№24.} \begin{cases} 4x - y + 2z = 1 \\ 2x + 9y + 3z = 5 \\ x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\text{№25.} \begin{cases} 5x - 3y + z = 0 \\ 2x - 4y = -3 \\ -4x + 5y + 11z = -1 \end{cases}$$

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Sistemaning koeffitsientlari va ozod hadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning ildizlari qanday ta'riflanadi?
4. Sistemani echish deyilganda nima tushuniladi?
5. Gauss usulining mohiyati nimadan iborat?
6. «Uchburchakli» sistema qanday hosil qilinadi?
7. Kramer usulidagi asosiy aniqlovchi qanday hosil qilinadi?
8. Kramer usulidagi yordachi aniklovchilar qanday hosil qilinadi?
9. Kramer formulalari qanday ko'rinishda bo'ladi?

V. Adabiyotlar ro'yxati.

1. X.S.Madraximov, N.S.Mo'minov, A.G.Ganiev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1988 y. IV bob, §4, 64-70 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika». 1-jild, Toshkent, O'qituvchi, 1992 y. 1-bob, §20-21, 53-64 betlar.
3. D.G. Raximov. «Oliy matematika», 1- kism, Toshkent, 2003 yil. I bob, §4, 33-44 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajarish algoritmi va dasturi.

Tenglamalar sistemasini echishga doir tajriba ishi topshirigini kompyuterda quyidagi algoritm asosida amalga oshirish mumkin. Bu algoritmda Gauss usulining kompyuter uchun moslashtirilgan ko'rinishidan foydalanamiz.

1. Chiziqli tenglamalar sistemasininig a_{ij} koefitsientlarini $A_{3 \times 3}$ matritsa kabi kiritamiz;
2. Chiziqli tenglamalar sistemasininig b_i koefitsientlarini $B_{3 \times 1}$ ustun matritsa kabi kiritamiz;
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida echishni sistemada x_1 noma'lum oldidagi koefitsient eng katta qiymatga ega bulgan p-tenglamani ($p=1,2,3$) aniklash va I tenglama bilan r-tenglama o'rnini almashtirishdan boshlaymiz;
4. Hosil bo'lgan sistemaning I tenglamasini $-a_{21}/a_{11}$ ($-a_{31}/a_{11}$) songa ko'paytirib, uning II tenglamasiga (III tenglamasiga) hadma-had qo'shamiz;
5. Hosil bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasining II va III tenglamalaridan x_2 noma'lum oldidagi koefitsient eng katta qiymatga ega bo'lgan p-tenglamani ($p=2,3$) aniqlaymiz va II tenglama bilan p-tenglama o'rnini almashtiramiz;
6. Hosil bulgan sistemaning II tenglamasini $-a_{22}/a_{32}$ songa ko'paytirib, uning III tenglamasiga hadma-had qo'shamiz;
7. Hosil bo'lgan sistemaning III tenglamasidan x_3 noma'lum qiymatini topamiz;
8. x_3 noma'lumning topilgan qiymatini oxirgi sistemaning II tenglamasiga qo'yib, undan x_2 noma'lum qiymatini topamiz;
9. x_3 va x_2 noma'lumlarning topilgan qiymatlarini oxirgi sistemaning I tenglamasiga qo'yib, undan x_1 noma'lum qiymatini topamiz. Shu bilan sistemani Gauss usulida echishni yakunlaymiz;
10. Berilgan chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer usulida echish uchun dastlab $A_{3 \times 3}$ matritsaning $\det A = DA$ aniqlovchisini hisoblaymiz;
11. Agar $DA=0$ bo'lsa, sistema yagona echimga ega emasligini aniqlaymiz va hisoblashlarni tugatamiz;
12. Agar $DA \neq 0$ shart bajarilmasa, unda $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$ yordamchi aniqlovchilarni hisoblaymiz;

13. Sistemaning x_1 , x_2 va x_3 noma'lumlarining qiymatlarini

$$x_1 = \frac{D(1)}{DA}, \quad x_2 = \frac{D(2)}{DA}, \quad x_3 = \frac{D(3)}{DA}$$

Kramer formulalaridan topamiz;

14. Hisoblashlarni yakunlaymiz.

Bu algoritmnii kompyuterda Paskal tilida yozilgan ushbu dastur orqali amalga oshiramiz.

```
PROGRAM GAUSS-KRAMER (INPUT, OUTPUT);
  LABEL 10,40, 50;
  VAR  I, J,K, R, DA: INTEGER;
        A, C: ARRAY[1..3, 1..3] OF INTEGER;
        B: ARRAY[1..3] OF INTEGER;
        X, D: ARRAY[1..3] OF REAL;
  BEGIN
    FOR I:=1 TO 3 DO
      BEGIN
        FOR J:=1 TO 3 DO
          BEGIN
            WRITE(A(I,J)); C(I,J):=A(I,J);
            END;
            WRITE(B(I)); X(I):=B(I);
          END;
        FOR I:=1 TO 3 DO
          BEGIN
            K:=I; R:= ABS(C(I,J));
            FOR J:=I+1 TO 3 DO
              BEGIN
                IF ABS(C(J,I))>R THEN K:=J; R:=ABS(C(J,I)); GO TO 10;
                ELSE
                  10: END;
                IF R:=0 THEN
                  WRITE('СИСТЕМА ЯГОНА ЕЧИМГА ЭГА ЭМАС'); GO TO 50;
                ELSE
                  IF K:=I THEN GO TO 40;
                  R=X(K); X(K):=X(J); X(I):=R;
                  FOR J:=1 TO 3 DO
                    BEGIN
                      R:=C(K,J); C(K,J):= C(I,J); C(I,J):=R;
                    END;
                  40: R:=C(I,J); X(I):=X(I)/R;
                  FOR J:=1 TO 3 DO C(I,J):=C(I,J)/R;
                  FOR K:=I+1 TO 3 DO
```

```

        BEGIN
            R:=C(K,I); X(K):=X(K)-R*X(I);
        FOR J:=1 TO 3 DO C(K,J):=C(K,J)-R*C(I,J);
            END;
        END;
    FOR I:=2 DOWNT0 1 DO
        BEGIN
            FOR J:=I+1 TO 3 DO X(I):=X(I)-C(I,J)*X(J);
            END;
        FOR I:=1 TO 3 DO WRITE(X(I));
        DA:=A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)+A(1,2)*A(2,3)*A(3,1)+
            A(1,3)*A(2,1)*A(3,2)-A(1,3)*A(2,2)*A(3,1)-
            A(1,2)*A(2,1)*A(3,3)-A(1,1)*A(2,3)*A(3,2);
            IF DA:=0 THEN
        WRITE ('СИСТЕМА ЯГОНА ЕЧИМГА ЭГА ЭМАС'); GO TO 50;
            ELSE
        D(1):=B(1)*A(2,2)*A(3,3)+B(2)*A(2,3)*A(1,3)+
            A(2,3)*B(3)*A(1,3)-A(1,3)*A(2,2)*B(3)-
            A(1,3)*B(2)*A(2,3) -B(3)*A(2,3)*A(1,2);
        D(2):=A(1,1)*B(2)*A(3,3)+A(2,1)*B(3)*A(1,3)+
            A(2,3)*B(1)*A(3,1)-A(1,3)*B(2)*A(3,1)-
            B(1)*A(2,1)*A(3,1)- A(1,1)*A(2,3)*B(3);
        D(3)=A(1,1)*A(2,2)*B(3)+A(1,2)*B(2)*A(3,1)+
            B(1)*A(2,1)*A(3,2)-B(1)*A(2,2)*A(3,1)-
            A(1,2)*A(2,1)*B(3)- A(1,1)*B(2)*A(3,2);
            FOR I:=1 TO 3 DO
                BEGIN
                    X(I):=X(I)/DA; WRITE (X(I));
                END;
        50: END.

```

BESHINCHI TAJRIBA ISHI.

M a v z u: Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish.

Tajriba ishining maqsadi: Talabalarda chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish malakasini hosil qilish.

I. Tajriba ishi mavzusi bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar.

Uch noma'lumli chizikli tenglamalar sistemasi deb quyidagiga aytiladi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \quad (1)$$

Bu erda a_{ij} ($i, j=1,2,3$)- berilgan sonlar bo'lib, ular chiziqli tenglamalar sistemasining **koeffitsientlari**, b_i ($i=1,2,3$) ham ma'lum sonlar bo'lib, sistemaning **ozod xadlari** deyiladi. (1) sistemada x_j ($j=1,2,3$) noma'lum sonlar bo'lib, ularning qiymatlarini topish talab etiladi. (1) sistemada x_j ($j=1,2,3$) noma'lumlar urniga qandaydir aniq α_j ($j=1,2,3$) sonlarni qo'yganda, ya'ni $x_j = \alpha_j$ ($j=1,2,3$) deyilganda, sistemadagi uchala tenglama xam ayniyatga o'tsa, bu α_j ($j=1,2,3$) sonlari sistemaning **ildizlari** deb ataladi. Berilgan sistemaning ildizlarini topish jarayoni sistemani **echish** deyiladi. (1) sistemani echishning turli usullari mavjud bo'lib, ulardan Gauss va Kramer usullari oldingi tajriba ishida ko'rib o'tilgan edi. Endi (1) chiziqli tenglamalar sistemasini echishning **matritsalar** usuli bilan tanishamiz.

Berilgan (1) chizikli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish uchun ushbu matritsalarini kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Bu matritsalar yordamida berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi

$$A \cdot X = B$$

ko'rinishda yoziladi. Bu matritsaviy tenglamaning ikkala tomonini A matritsaga teskari A^{-1} (uchinchi tajriba ishiga qarang) matritsaga ko'paytirib, tenglamalar sistemasining ildizlaridan iborat X matritsani topamiz:

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B.$$

II. Tajriba ishining bajarilish namunasi.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida eching:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Echish: Berilgan sistema bo'yicha quyidagi matritsalarini kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Bu holda berilgan chiziqli tenglamalar sistemasi $AX=B$ ko'rinishga keladi va uning ildizlaridan iborat X matritsa $X=A^{-1} \cdot B$ formula bilan topiladi. Bu erda A^{-1} yuqoridagi A matritsaga teskari matritsa bo'lib, u

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

formula orqali topiladi. Shu sababli dastlab $\Delta = \det A$ aniqlovchini va A_{ij} algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} &= 5 \cdot 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) - 5 \cdot (-1) \cdot 1 = \\ &= 15 - 6 - 2 - 4 + 9 + 5 = 17, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \end{aligned}$$

Demak,

$$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -1 & 11 & -3 \\ -3 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & -\frac{5}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{11}{17} & -\frac{3}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix}$$

va matritsalarini ko'paytirish ta'rifiga asosan

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{4}{17} & \frac{7}{17} & -\frac{5}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{11}{17} & -\frac{3}{17} \\ -\frac{3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bu erdan berilgan sistemaning echimi $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ va $x_3 = 1$ ekanligini topamiz. Echim tugri topilganligini tekshirish uchun $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ va $x_3 = 1$ natijalarni berilgan sistemaga qo'yamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 0 + 1 \equiv 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \equiv -3. \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \cdot (-1) - 0 + 3 \cdot 1 \equiv 1 \end{cases}$$

Bu erdan ko'rinadiki $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ bo'lganda berilgan sistemaning uchala tenglamasi ham ayniyat bo'ldi. Demak, sistema to'gri echilgan va $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ berilgan sistema ildizlari bo'ladi.

III. Tajriba ishini mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan uch noma'lumli

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida eching.

Izox: 1. Uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi talabning variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabning varianti № o'qituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib raqami bilan belgilanadi.

$$\begin{array}{ll} \text{№1.} \begin{cases} x + 3y + z = 6 \\ -3x + 4y + 2z = 4 \\ -4x + 5y + 11z = -1 \end{cases} & \text{№2.} \begin{cases} 4x + 2y + z = -5 \\ 2x + 3y - z = 5 \\ 4x + y + 9z = -1 \end{cases} \\ \text{№3.} \begin{cases} 3x + 2y - z = 5 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3x + 7y + 3z = 1 \end{cases} & \text{№4.} \begin{cases} 9x + 5y + 7z = -3 \\ 3x - 5y + 2z = 1 \\ 4x + 5y - 7z = 0 \end{cases} \\ \text{№5.} \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ 2x + 4y + 8z = 3 \\ -4x + 2y - z = 5 \end{cases} & \text{№6.} \begin{cases} 7x - 5y - 4z = -4 \\ 10x + 3y + 4z = 7 \\ 2x + 3y - 4z = 6 \end{cases} \end{array}$$

$$\mathcal{N}o7. \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 4 \\ y - z = 5 \\ 4x - 2y + 8z = 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o9. \begin{cases} 8x + y - 4z = 2 \\ 3x - 3y + z = 3 \\ 4x + 9y - z = 4 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o11. \begin{cases} 2x + y - z = -7 \\ 3x - 8y + 6z = 9 \\ 5x - 3y - 7z = -6 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o13. \begin{cases} 8x + 6y - z = -6 \\ 6x + 11y - 2z = 9 \\ 2x - 4y + 8z = -3 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o15. \begin{cases} 7x + 5y + 4z = -5 \\ 3x + 7y + z = 5 \\ 4x + 3y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o17. \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ 4x + 3y - 3z = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o19. \begin{cases} 7x + 6y + 6z = -1 \\ 5x + 9y + 5z = 7 \\ 8x + 7y + 8z = -5 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o21. \begin{cases} x - z = 3 \\ 5x - y + 7z = 9 \\ 4x + 9y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o23. \begin{cases} 5x - y + 2z = 2 \\ 5x + y + 6z = 4 \\ -x + 4y + 9z = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o8. \begin{cases} 5x - 2y + 3z = -2 \\ 4x + 6y + 2z = 1 \\ 9x + 6y - z = -2 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o10. \begin{cases} 5x + 2y + z = 1 \\ 3x - 9y - 6z = 7 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o12. \begin{cases} 9x - 3y + 7z = 7 \\ -8x - 2y + z = 8 \\ x - 9y + 7z = 6 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o14. \begin{cases} 9x - 6y - 6z = 1 \\ 8x + y + 2z = 1 \\ -x + 3y + 6z = -1 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o16. \begin{cases} 3x + 4y - 2z = 5 \\ -2x + 3y + 5z = 8 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o18. \begin{cases} 5x + 3y - 3z = 4 \\ 2x - 7y + 3z = 3 \\ 6x - 7y + 9z = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o20. \begin{cases} 5x + 3y + 4z = -3 \\ 4x + 4y - z = 3 \\ -4x - 2y - 3z = -2 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o22. \begin{cases} 6x + y - z = -2 \\ 5y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o24. \begin{cases} 4x - y + 2z = 1 \\ 2x + 9y + 3z = 5 \\ x - y + 4z = 3 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}o25. \begin{cases} 5x - 3y + z = 0 \\ 2x - 4y = -3 \\ -4x + 5y + 11z = -1 \end{cases}$$

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Sistemaning koeffitsientlari va ozod xadlari deb nimaga aytiladi?
3. Sistemaning ildizlari qanday ta'riflanadi?
4. Sistemani echish deyilganda nima tushuniladi?
- 5 Sistemaning matritsaviy ko'rinishi qanday bo'ladi?
6. Sistema matritsalar usulida qanday echiladi?

V. Adabiyotlar ro'yxati.

1. X.S.Madraximov, N.S.Mo'minov, A.G.Ganiev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1988 y. IV bob, §4, 64-70 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika». 1-jild, Toshkent, O'qituvchi, 1992 y. 1-bob, §20-21, 72-74 betlar.
3. D.G. Raximov. «Oliy matematika», 1- kism, Toshkent, 2003 yil. Ibob, §4, 33-37 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajarish algoritmi va dasturi.

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish algoritmi quyidagicha bo'ladi.
2. Sistemaning a_{ij} koeffitsientlaridan A matritsani hosil qilamiz;
3. Sistemaning b_i ozod xadlaridan B ustun matritsani tuzamiz;
4. A matritsaning $D=\det A$ aniqlovchisini hisoblaymiz;
5. $D=0$ shartni tekshiramiz va u bajarilganda sistema yagona echimga ega emasligini ko'rsatib, hisoblashlarni to'xtatamiz;
6. $D \neq 0$ shart bajarilmasa, unda $S=A^{-1}$ teskari matritsani topishga o'tamiz;
7. A matritsaning A_{ij} algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz;
8. C matritsaning elementlarini $C_{ij}=A_{ji}/D$ formula bo'yicha topamiz;
9. Sistema echimidan iborat X ustun matritsani $X=A^{-1}B=CB$ tenglik bilan aniqlaymiz;
10. Hisoblashlarni yakunlaymiz.

Bu algoritmnini kompyuterda amalga oshirish uchun ushbu Paskal tilidagi dasturdan foydalanamiz.

```

PROGRAM SISTEMA (INPUT, OUTPUT);
  LABEL 10;
  VAR   D: INTEGER;
        A: ARRAY [1..3, 1..3] OF INTEGER;
        C: ARRAY [1..3, 1..3] OF REAL;
        B: ARRAY [1..3] OF INTEGER;
        X: ARRAY[1..3] OF REAL;

BEGIN
  FOR I:=1 TO 3 DO
    BEGIN
      FOR J:=1 TO 3 DO READ(A(I,J));
      READ(B(I));
    END;
    D:=A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)+A(1,2)*A(2,3)*A(3,1)+
    +A(1,3)*A(2,1)*A(3,2)-A(1,3)*A(2,2)*A(3,1)- A(1,2)*A(2,1)*A(3,3)-
    -A(1,1)*A(2,3)*A(3,2);
    IF D=0 THEN
      WRITE ('СИСТЕМА ЯГОНА ЕЧИМГА ЭГА ЭМАС'); GO TO 10;
      C(1,1):= A(2,2)*A(3,3)- A(2,3)*A(3,2);
      C(1,2):= A(2,3)*A(3,1)- A(2,1)*A(3,3);
      C(1,3):= A(2,1)*A(3,2)- A(2,2)*A(3,1);
      C(2,1):= A(1,3)*A(3,2)- A(1,2)*A(3,3);
      C(2,2):= A(1,1)*A(3,3)- A(1,3)*A(3,1);
      C(2,3):= A(1,2)*A(3,1)- A(1,1)*A(3,2);
      C(3,1):= A(1,2)*A(2,3)- A(1,3)*A(2,2);
      C(3,2):= A(1,3)*A(2,1)- A(1,1)*A(2,3);
      C(3,3):= A(1,1)*A(2,2)- A(1,2)*A(2,1);
      FOR I:=1 TO 3 DO
        BEGIN
          FOR J:=1 TO 3 DO
            BEGIN
              C(I,J):= C(J,I)/D;
            END;
          END
        FOR I:=1 TO 3 DO
          BEGIN
            X(I):=0;
            FOR J:=1 TO 3 DO
              BEGIN
                X(I):=X(I)+C(I,J)*B(J); WRITE (X(I));
              END;
            END;
          END;
        10: END.

```

OLTINCHI TAJRIBA ISHI.

M a v z u: Vektorlar ustida amallar va ularning tadbirlari.

Tajriba ishining maqsadi: Vektorlar ustida amallar bajarish va ularni tadbirlashtirish malakasini hosil qilish.

I. Tajriba ishi mavzusi bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar.

Ham sonli kattaligi, ham yo'nalishi bilan aniqlanadigan miqdorlar **vektorlar** deyiladi. Masalan, kuch vektor miqdori bo'ladi. Vektorlar $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ yoki $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ yoki $\vec{AB}$ belgilanadi. Bunda $\vec{AB}$ vektor boshi A, oxiri esa B nuqtada bo'lgan yo'naltirilgan kesma kabi ifodalanadi. Vektorning sonli kattaligi uni ifodalovchi yo'naltirilgan kesma uzunligiga teng bo'ladi va u vektorning moduli yoki uzunligi deb atalib, $|\mathbf{a}|, |\mathbf{b}|, |\mathbf{c}|$ yoki $|\vec{AB}|$ kabi belgilanadi.

Berilgan $\mathbf{a}$ va $\mathbf{b}$ vektorlar joylashgan to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak bu vektorlar orasidagi **burchak** deyiladi. Fazodagi Dekart koordinatalar sistemasining OX, OY va OZ o'qlarida joylashgan, bu o'qlarning musbat yo'nalishida yo'nalgan va modullari (uzunliklari) birga teng bo'lgan $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ va $\mathbf{k}$ vektorlar **ortlar** deb ataladi. Bu ortlar yordamida fazodagi har qanday $\mathbf{a}$ vektorni $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ko'rinishda yozish mumkin. Bunda x, y va z shu $\mathbf{a}$ vektorning **koordinatalari** deyiladi va bu tasdiq $\mathbf{a}(x, y, z)$ kabi yoziladi. Koordinatalari bilan berilgan $\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ va $\mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar ustida amallar quyidagicha kiritiladi:

1. Ikki vektorning **yig'indisi** yoki **ayirmasi** deb, ularning mos koordinatalarini qo'shish yoki ayirishdan hosil qilingan vektorga aytiladi, ya'ni

$$\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1) \pm \mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2) = \mathbf{a}(x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2).$$

2. Vektorni k songa ko'paytmasi deb uning barcha koordinatalarini shu k soniga ko'paytirishdan hosil qilingan vektorga aytiladi, ya'ni

$$k \cdot \mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1) = \mathbf{a}(kx_1, ky_1, kz_1)$$

3. Ikkita $\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ va $\mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning **skalyar ko'paytmasi** deb ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisi kabi aniqlanadigan songa aytiladi va $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2$ yoki $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ kabi belgilanadi. Ta'rifga ko'ra

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1) \cdot \mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Jumladan, skalyar kvadrat $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}(x, y, z) \cdot \mathbf{a}(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ kabi hisoblanadi.

4. Ikkita $\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ va $\mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ vektorlarning **vektorial ko'paytmasi** deb $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ yoki $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ kabi belgilanadigan va

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

kabi aniqlanadigan vektorga aytiladi.

5. Uchta $\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ va $\mathbf{a}_3(x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning **aralash kupaytmasi** deb $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3$ kabi belgilanadigan va

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

Kiritilgan amallarni tatbik etib, quyidagi masalalarni echish mumkin:

1. $\mathbf{a}(x, y, z)$ vektorning moduli (uzunligi) $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ formula bilan

hisoblanadi.

2. Ikkita $\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1)$ va $\mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusi

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

formula bilan aniqlanadi.

3. Uchta $\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ va $\mathbf{a}_3(x_3, y_3, z_3)$ vektorlardan hosil qilingan parallelepiped xajmi

$$V_{n-\text{ped}} = \left| \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 \right| = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

piramida xajmi esa $V_{\text{пир.}} = \left| \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 \right| / 6 = V_{\text{п-пед}} / 6$ formulalar bilan hisoblanadi.

II. Tajriba ishining bajarilish namunasi.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan uchta $\mathbf{a}_1(-2, 4, -1)$, $\mathbf{a}_2(4, -2, 3)$, $\mathbf{a}_3(5, -4, 4)$ vektorlar bo'yicha quyidagilarni bajaring:

1. $\mathbf{b} = 4\mathbf{a}_1 - 6\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$ vektorni toping.
2. $(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2)^2$ skalyar kvadratni hisoblang;
3. $\mathbf{c} = 3\mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_3$ vektor modulini aniqlang;
4. $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ va $\mathbf{d}_2 = 2\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$ vektorlar orasidagi φ burchak kosinusini toping;
5. $\mathbf{d}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2$ va $\mathbf{d}_4 = \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini toping;
6. $\mathbf{d}_5 = \mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2$, $\mathbf{d}_6 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3$, $\mathbf{d}_7 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblang;
7. $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}_1$ va $\mathbf{d}_5$ vektorlardan hosil qilingan parallelepiped va piramida xajmini aniqlang.

Echish: 1) Vektorlar ustida arifmetik amallar ta'riflariga asosan

$$\begin{aligned}\vec{b} &= 4\vec{a}_1 - 6\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 = 4(-2, 4, -1) - 6(4, -2, 3) - 2(5, -4, 4) = \\ &= (-8, 16, -4) - (24, -12, 18) - (10, -8, 8) = \\ &= (-8 - 24 - 10, 16 - (-12) - (-8), -4 - 18 - 8) = (-42, 36, -30).\end{aligned}$$

2) Skalyar ko'paytma ta'rifi va xossalriga asosan

$$\begin{aligned}(\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2)^2 &= \vec{a}_1^2 - 4\vec{a}_1 \vec{a}_2 + 4\vec{a}_2^2 = ((-2)^2 + 4^2 + (-1)^2) - \\ &- 4((-2) \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3) + 4(4^2 + (-2)^2 + 3^2) = \\ &= 21 - 4 \cdot (-19) + 4 \cdot 29 = 21 + 76 + 116 = 213.\end{aligned}$$

3) Oldin $\vec{c} = 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_3$ vektor koordinatalarini aniqlaymiz:

$$\begin{aligned}\vec{c} &= 3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_3 = 3(-2, 4, -1) + 4(5, -4, 4) = (-6, 12, -3) + (20, -16, 16) = \\ &= (-6 + 20, 12 + (-16), -3 + 16) = (14, -4, 13)\end{aligned}$$

Vektor modulini hisoblash formulasiga asosan

$$|3\vec{a}_1 + 4\vec{a}_3| = |\vec{c}| = \sqrt{14^2 + (-4)^2 + 13^2} = \sqrt{196 + 16 + 169} = \sqrt{381}$$

4) Dastlab $\vec{d}_1$ va $\vec{d}_2$ vektorlarning koordinatalarini topamiz:

$$\begin{aligned}\vec{d}_1 &= \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 = (-2, 4, -1) + (4, -2, 3) - (5, -4, 4) = \\ &= (-2 + 4 - 5, 4 - 2 - (-4), -1 + 3 - 4) = (-3, 6, -2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{d}_2 &= 2\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = 2(-2, 4, -1) - 4(4, -2, 3) + 2(5, -4, 4) = \\ &= (-4, 8, -2) - (16, -8, 12) + (10, -8, 8) = \\ &= (-4 - 16 + 10, 8 - (-8) + (-8), -2 - 12 + 8) = (-10, 8, -6)\end{aligned}$$

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusining formulasiga asosan

$$\begin{aligned}\cos \varphi &= \frac{\vec{d}_1 \vec{d}_2}{|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2|} = \frac{(-3) \cdot (-10) + 6 \cdot 8 + (-2) \cdot (-6)}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-2)^2} \sqrt{(-10)^2 + 8^2 + (-6)^2}} = \\ &= \frac{30 + 48 + 12}{\sqrt{9 + 36 + 4} \sqrt{100 + 64 + 36}} = \frac{90}{\sqrt{49} \sqrt{200}} = \frac{9}{7\sqrt{2}}\end{aligned}$$

5) Avvalo $\vec{d}_3$ va $\vec{d}_4$ vektorlarning koordinatalarini topamiz:

$$\begin{aligned}\vec{d}_3 &= 3\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 = 3(-2, 4, -1) - 4(4, -2, 3) = (-6, 12, -3) - (16, -8, 12) = (-22, 20, -15), \\ \vec{d}_4 &= \vec{a}_2 + 2\vec{a}_3 = (4, -2, 3) + 2(5, -4, 4) = (14, -10, 11).\end{aligned}$$

Endi $[\vec{d}_1, \vec{d}_2]$ vektorial ko'paytmani uning ta'rifi va III tartibli aniqlovchilarni hisoblash formulalariga asosan topamiz:

$$\left[\vec{d}_3, \vec{d}_4 \right] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -22 & 20 & -15 \\ 14 & -10 & 11 \end{vmatrix} = 220i + 220k - 210j - 280k - 150i + 242j =$$

$$= 70i + 32j - 60k = (70, 32, -60)$$

6) Dastlab $\vec{d}_5$, $\vec{d}_6$ va $\vec{d}_7$ vektorlarning koordinatalarini topamiz:

$$\vec{d}_5 = \vec{a}_1 + 4\vec{a}_2 = (-2, 4, -1) + 4(4, -2, 3) = (-2 + 16, 4 - 8, -1 + 12) = (14, -4, 11),$$

$$\vec{d}_6 = \vec{a}_1 + \vec{a}_3 = (-2, 4, -1) + (5, -4, 4) = (-2 + 5, 4 - 4, -1 + 4) = (3, 0, 3),$$

$$\vec{d}_7 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (-2, 4, -1) + (4, -2, 3) = (-2 + 4, 4 - 2, -1 + 3) = (2, 2, 2).$$

Aralash ko'paytma va III tartibli aniqlovchini hisoblash formulalariga asosan

$$\vec{d}_5 \vec{d}_6 \vec{d}_7 = \begin{vmatrix} 14 & -4 & 11 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 66 - 24 - 0 - 84 + 24 = -18.$$

7) $\vec{b}$, $\vec{d}_1$ va $\vec{d}_5$ vektorlardan hosil qilingan parallelepiped xajmini ularning aralash ko'paytmasi yordamida topamiz:

$$V_{n-ed} = \left| \vec{b} \vec{d}_1 \vec{d}_5 \right| = \pm \begin{vmatrix} -42 & 36 & -30 \\ -3 & 6 & -2 \\ 14 & -4 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2772 - 360 - 1008 + 2520 + 336 + 1188) = \pm(-96) = 96.$$

Bu vektorlardan tuzilgan piramida xajmini topamiz:

$$V_{nup.} = \left| \vec{b} \vec{d}_1 \vec{d}_5 \right| / 6 = 96 / 6 = 16.$$

III. Tajriba ishini mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan uchta $\vec{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ va $\vec{a}_3(x_3, y_3, z_3)$ vektorlar bo'yicha quyidagilarni bajaring:

1. $\vec{b} = \alpha\vec{a}_1 - 6\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3$ vektorni toping.
2. $(\vec{a}_1 - \beta\vec{a}_2)^2$ skalyar kvadratni hisoblang;
3. $\vec{c} = 3\vec{a}_1 + \gamma\vec{a}_3$ vektor modulini aniqlang;
4. $\vec{d}_1 = \vec{a}_1 + \lambda\vec{a}_2 - \vec{a}_3$ va $\vec{d}_2 = 2\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 + 2\vec{a}_3$ vektorlar orasidagi φ burchak kosinusini toping;
5. $\vec{d}_3 = 3\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2$ va $\vec{d}_4 = \vec{a}_2 + \mu\vec{a}_3$ vektorlarning vektorial ko'paytmasini toping;
6. $\vec{d}_5 = \vec{a}_1 + 4\vec{a}_2$, $\vec{d}_6 = \vec{a}_1 + \rho\vec{a}_3$, $\vec{d}_7 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblang;
7. $\vec{b}$, $\vec{d}_1$ va $\vec{d}_5$ vektorlardan hosil qilingan parallelepiped va piramida xajmini aniqlang.

Izox: 1. $a_1 (x_1, y_1, z_1)$, $a_2 (x_2, y_2, z_2)$ va $a_3 (x_3, y_3, z_3)$ vektorlarning koordinatalari hamda $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \rho$ sonlari quyidagi jadvaldan talabning variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabning varianti № o'qituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib raqami bilan belgilanadi.

№	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	α	β	γ	λ	μ	ρ
1	-2	4	-1	4	-2	3	5	-4	4	-2	3	-1	2	1	-3
2	3	-4	1	-4	2	-3	-5	4	-4	2	-3	1	-2	-1	3
3	-4	2	3	3	-1	2	6	5	5	3	7	-2	6	5	4
4	9	9	8	5	-6	4	8	-7	-8	4	-4	3	7	-5	-4
5	-9	-9	7	-5	6	-4	-7	8	7	5	-5	6	-7	6	8
6	9	7	6	6	7	-6	7	-8	1	-4	3	-1	8	-6	2
7	1	-2	2	8	-2	5	9	6	2	-5	6	-7	9	7	5
8	-1	8	9	-2	-8	7	-9	-6	-2	5	6	7	4	9	7
9	6	6	-6	7	9	5	6	-7	8	9	-7	3	5	7	8
10	1	3	2	2	-4	-3	-3	4	-5	4	-5	6	5	6	-7
11	-2	-4	3	-3	5	4	4	-5	-6	-6	6	-7	-6	-7	8
12	3	5	-4	4	-6	-5	-5	-6	7	6	-7	8	7	8	-9
13	-4	-6	5	-5	7	-6	-6	-7	-8	-7	8	-9	-8	-9	2
14	5	7	6	6	-8	7	-7	8	9	8	-7	4	9	1	-1
15	-6	-8	-7	-7	9	-8	-8	-9	7	-9	1	-1	5	-1	2
16	7	9	8	8	-4	9	-9	3	1	6	-1	2	1	2	-3
17	-8	-4	4	-9	1	-3	5	-1	2	-1	2	-3	-2	-3	4
18	9	1	7	3	1	-1	2	3	2	-3	4	3	4	-5	2
19	-7	-2	-1	3	-4	-2	2	-3	-4	3	4	5	-4	3	6
20	1	-3	2	2	-4	3	-3	4	5	4	-5	-6	5	6	-6
21	-2	-4	-3	3	5	-4	5	6	-5	6	-6	2	3	8	-3
22	3	5	4	4	-6	5	5	6	-7	6	-7	-8	7	8	-8
23	-4	-6	-5	3	7	6	6	-7	-8	7	8	9	-8	-9	9
24	-5	-7	-6	6	-8	7	-7	3	9	8	-9	2	9	3	7
25	-6	-8	-3	6	7	3	8	9	-2	-9	6	1	5	-1	1

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. Vektorlar qanday ta'riflanadi?
2. Vektorlar ustida chiziqli amallar qanday aniqlanadi?
3. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
4. Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
5. Vektorlarning vektorial ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
6. Vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblash formulasini yozing.

V. Adabiyotlar ro'yxati.

1. X.S.Madraximov, N.S.Mo'minov, A.G.Ganiev. «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1988 y. III bob, §1-7, 32-54 betlar.
2. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika». 1-jild, Toshkent, O'qituvchi, 1992 y. 1-bob, §2-12, 8-39 betlar.
3. D.G. Raximov. «Oliy matematika», 1- kism, Toshkent, 2003 yil. Ibob, §5, 47-85 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajarish algoritmi va dasturi.

Bu tajriba ishining topshirigini bajarish algoritmi quyidagicha bo'ladi.

1. Berilgan uchta $\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2(x_2, y_2, z_2)$ va $\mathbf{a}_3(x_3, y_3, z_3)$ vektorlar koordinatalarini $A_{3 \times 3}$ matritsaning a_{ij} satr elementlari kabi qaraymiz;
2. Topshirikdagi α sonini kiritib, $\mathbf{b} = \alpha \mathbf{a}_1 - 6\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_3$ vektorni topamiz;
3. Topshirikdagi β sonini kiritib, dastlab $\mathbf{a}_1 - \beta \mathbf{a}_2$ vektorni topib, so'ngra uning $(\mathbf{a}_1 - \beta \mathbf{a}_2)^2 = (\mathbf{a}_1 - \beta \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{a}_1 - \beta \mathbf{a}_2)$ skalyar kvadratini koordinatalar bo'yicha hisoblaymiz;
4. Topshirikdagi γ sonini kiritib, dastlab $\mathbf{c} = 3\mathbf{a}_1 + \gamma \mathbf{a}_3$ vektorning koordinatalarini, so'ngra esa bu vektorning $|3\mathbf{a}_1 + \gamma \mathbf{a}_3|$ modulini topamiz;
5. Topshirikdagi λ sonini kiritib, $\mathbf{d}_1 = \mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ va $\mathbf{d}_2 = 2\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$ vektorlarni va ularning $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2$ skalyar ko'paytmasini topamiz;
6. $\mathbf{d}_1$ va $\mathbf{d}_2$ vektorlar orasidagi φ burchakni

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2}{|\mathbf{d}_1| |\mathbf{d}_2|}$$

formula yordamida topamiz;

7. Topshirikdagi μ sonini kiritib, $\mathbf{d}_3 = 3\mathbf{a}_1 - 4\mathbf{a}_2$ va $\mathbf{d}_4 = \mathbf{a}_2 + \mu \mathbf{a}_3$ vektorlarning koordinatalarini topamiz;
8. $\mathbf{d}_3$ va $\mathbf{d}_4$ vektorlarning $\mathbf{d}_v = \mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_4$ vektorial ko'paytmasini topamiz;
9. Topshirikdagi ρ sonini kiritib, $\mathbf{d}_5 = \mathbf{a}_1 + 4\mathbf{a}_2$, $\mathbf{d}_6 = \mathbf{a}_1 + \rho \mathbf{a}_3$, $\mathbf{d}_7 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ vektorlarning koordinatalarini topamiz;
10. $\mathbf{d}_5$, $\mathbf{d}_6$ va $\mathbf{d}_7$ vektorlarning $\mathbf{d}_5$, $\mathbf{d}_6$, $\mathbf{d}_7$ aralash ko'paytmasini koordinatalar orqali III tartibli aniqlovchi yordamida hisoblaymiz;
11. $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}_1$ va $\mathbf{d}_5$ vektorlardan hosil qilinadigan parallelepiped va piramida xajmlarini $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_5$ aralash ko'paytma orqali topamiz;
12. Hisoblashlarni tugatamiz.

Vektorlar algebrasiga doir bu tajriba ishini kompyuterda Paskal tilidagi ushbu dastur orkali bajarish mumkin.

```
PROGRAM VEKTOR (INPUT, OUTPUT);
  VAR
ALFA, BETA, GAMMA, LYAMDA, MYU, RO: INTEGER;
  S, S1, S2, DA, WPP : INTEGER;
  FI, WPR : REAL;
  A: ARRAY[1..3, 1..3] OF INTEGER;
  BEGIN
    FOR I:=1 TO 3 DO
      BEGIN
        FOR J:=1 TO 3 DO READ(A(I,J));
        END;
      READ(ALFA);
      FOR I:=1 TO 3 DO
        BEGIN
          B(I):= ALFA*A(1,I)-6*A(2,I) -2*A(3,I); WRITE(B(I));
          END;
        S:=0; READ(BETA);
        FOR I:=1 TO 3 DO
          BEGIN
            C(I):= A(1,I)-BETA*A(2,I); S:=S+C(I)*C(I);
            END;
          WRITE(S); READ(GAMMA); S:=0;
          FOR I:=1 TO 3 DO
            BEGIN
              C(I):=3* A(1,I)+GAMMA*A(3,I); S:=S+C(I)*C(I);
              END;
            WRITE(S); READ(LYAMDA); S:=0; S1:=0; S2:=0;
            FOR I:=1 TO 3 DO
              BEGIN
                D1(I):= A(1,I)+LYAMDA*A(2,I)-A(3,I);
                D2(I):=2* A(1,I)-4*A(2,I)+2*A(3,I);
                S:=S+D1(I)*D2(I); S1:=S1+D1(I)*D1(I); S2:=S2+D2(I)*D2(I);
                END;
            FI:=S/SQRT(S1*S2); WRITE(FI);
            READ(MYU);
            FOR I:=1 TO 3 DO
              BEGIN
                D3(I):= 3*A(1,I)-4*A(2,I);
                D4(I):= A(2,I)+MYU*A(3,I);
                END;
```

```

        DV(1):=D3(2)*D4(3)-D3(3)*D4(2);
        DV(2):=D3(3)*D4(1)-D3(1)*D4(3);
        DV(3):=D3(1)*D4(2)-D3(2)*D4(1);
    FOR I:=1 TO 3 DO WRITE(DV(I));
    READ(RO);
    FOR I:=1 TO 3 DO
        BEGIN
            D5(I):= A(1,I)+4*A(2,I);
            D6(I):= A(1,I)+RO*A(3,I);
            D7(I):= A(1,I)+ A(2,I);
        END;
    DA:=D5(1)*D6(2)*D7(3)+D5(3)*D6(1)*D7(2)+ D5(2)*D6(3)*D7(1)-
    -D5(3)*D6(2)*D7(1)- D5(2)*D6(1)*D7(3)- D5(1)*D6(3)*D7(2);
    WRITE (DA);
    WPP:=B(1)*D1(2)*D5(3)+B(2)*D1(3)*D5(1)+ B(3)*D1(1)*D5(2)-
    -B(3)*D1(2)*D5(1)- B(2)*D1(1)*D5(3)-B(1)*D5(2)*D1(3);
    WPP:=ABS(WPP);
    IF WPP:=0 THEN WRITE('БУ БЕКТОРЛАР КОМПЛАНАР');
    WRITE (WPP); WPR:=WPP/6; WRITE(WPR);
    END.

```

ETTINCHI TAJRIBA ISHI

M a v z u: Tekislikdagi to'gri chiziqning tenglamalari.

Tajriba ishning maksadi: Talabalarda tekislikda to'gri chiziqlarning tenglamalarini topish va ular yordamida masalalarni echib bilish malakasini hosil qilish.

I. Tajriba ishi mavzusi bo'yicha qisqacha nazariy ma'lumotlar.

Tugri chizik geometriyaning boshlangich tushunchalaridan biri bulib, ta'rifsiz kabul etiladi, Analitik geometriya fanida tugri chizik xossalari va unga doir masalalar tugri chizikning tenglamalari orkali urganiladi. Tugri chizik tenglamalari turli kurinishlarda buladi va berilgan masalaning mazmuniga karab ulardan biri kullaniladi.

- 1) Tugri chizikning **burchak koeffitsientli tenglamasi** deb

$$y=kx+b$$

kurinishdagi tenglamaga aytiladi.

Bu tenglamada k tugri chizikning **burchak koeffitsienti** deyiladi va $k=\operatorname{tg} \varphi$ (φ tugri chizik va OX koordinata uki orasidagi burchak), $\pm b$ esa tugri chizikning OY ukidan ajratgan kesmasi uzunligini ifodalaydi.

- 2) Berilgan $M_0(x_0, y_0)$ nuktadan utuvchi barcha tugri chiziklarning tenglamasi $y-y_0=k(x-x_0)$ kurinishda buladi. Bunda k ixtiyoriy sonidir.

- 3) Tugri chizikning **umumiy tenglamasi** deb I tartibli

$$Ax+By+C=0$$

kurinishdagi tenglamaga aytiladi. Bunda A, B bir paytda ikkalasi nolga teng bulmagan va C ixtiyoriy **uzgarmas sonlar** bulib, A va B sonlari koeffitsientlar, C esa **ozod xad** deyiladi. Bu xolda $n(A,B)$ vektor berilgan tugri chizikka perpendikulyar bulib, uning **normal vektori** deyiladi.

- 4) Koordinata boshidan utmaydigan tugri chizikning **kesmalardagi tenglamasi** deb

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

kurinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu erda $\pm a$ va $\pm b$ mos ravishda tugri chizikning OX va OY koordinatalar ukalaridan ajratgan kesmalarining uzunligini ifodalaydi. Agarda tugri chizik umumiy tenglamasi $Ax+By+C=0$ ($C \neq 0$) bilan berilgan bulsa, uning kesmalardagi tenglamasiga utish uchun uni $-C$ soniga bulish kerak. Bu xolda $a = -C/A$ va $b = -C/B$ buladi.

- 5) Tugri chizikning kanonik tenglamasi deb

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}$$

kurinishdagi tenglamaga aytiladi. Unda p va q tugri chizikka parallel bulgan biror **a** vektorning, x_0 va y_0 esa shu tugri chizikda yotgan biror M_0 nuqtaning

koordinatalaridir. Bunda a va M_0 mos ravishda tugri chizikning **yunaldiruvchi vektori** va **boshlangich nuqtasi** deb ataladi.

6) Berilgan $M(x_1, y_1)$ va $N(x_2, y_2)$ nuqtalardan utuvchi tugri chizikning kanonik tenglamasi

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

kurinishda buladi.

7) $y = k_1x + b_1$ va $y = k_2x + b_2$ tenglamali tugri chiziklar orasidagi α burchakni

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

formula orkali topish mumkin. Bu erdan tugri chiziklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari mos ravishda $k_1 = k_2$ va $k_1 \cdot k_2 = -1$ tengliklar bilan berilishini kuramiz.

8) Tugri chizikning **normal tenglamasi** deb

$$x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$$

kurinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu erda p tugri chizikdan koordinatalar boshigacha bulgan masofani, β esa tugri chizikning normal vektori va OX uki orasidagi burchakni ifodalaydi.

Agar tugri chizik $Ax + By + C = 0$ umumiy tenglamasi bilan berilgan bulsa, uni normal kurinishga keltirish uchun ikkala tomonini **normallashtiruvchi kupaytuvchi** deb ataluvchi $M = \pm 1 / \sqrt{A^2 + B^2}$ uzgarmasga kupaytirib chikish kerak. Bunda M ishorasi C ozod xad ishorasiga karama-karshi kilib olinadi. Bu xolda $\cos \beta = MA$, $\sin \beta = MB$, $-p = MC$ buladi.

9) Berilgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan $Ax + By + C = 0$ tugri chizikkacha bulgan d masofani

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

formula orkali xisoblash mumkin.

10) $M(x_1, y_1)$ va $N(x_2, y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa kuyidagi formula orkali xisoblanadi:

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

11) Uchlari $M(x_1, y_1)$ va $N(x_2, y_2)$ nuqtalarda joylashgan MN kesmaning urta $K(x_0, y_0)$ nuqtasining koordinatalarini

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

formula orkali topish mumkin.

II. Tajriba ishining bajarilish namunasi.

Masalaning qo'yilishi: Uchlari $A(5;2)$, $B(3;7)$ va $C(8;8)$ nuqtalarda joylashgan uchburchak buyicha quyidagi topshiriqlarni bajaring:

1. AC tomonning uzunligini toping.
2. B uchidan utkazilgan mediananing barcha kurinishdagi tenglamalarini yozing.
3. A uchidan tushirilgan balandlik uzunligini toping.
4. ABC uchburchak yuzini xisoblang.
5. C burchakning kattaligini toping.

Echish: 1. AC tomonning uzunligini ikki nuqta orasidagi masofani xisoblash formulasidan foydalanib topamiz.

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(8 - 5)^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{205}.$$

2. B uchidan utkazilgan BM medianaga tenglamasini yozamiz. Buning uchun dastlab AC tomon urtasi bulgan $M(x_M, y_M)$ nuqta koordinatalarini topamiz.

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{5 + 8}{2} = \frac{13}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5.$$

Endi $B(3;7)$ va $M\left(\frac{13}{2}; 5\right)$ nuqtalardan utuvchi tugri chizik tenglamasini yozish mumkin:

$$\frac{x - x_B}{x_M - x_B} = \frac{y - y_B}{y_M - y_B} \Rightarrow \frac{x - 3}{\frac{13}{2} - 3} = \frac{y - 7}{5 - 7} \Rightarrow \frac{x - 3}{\frac{7}{2}} = \frac{y - 7}{-2}.$$

Bu BM mediananing kanonik tenglamasidir. Bu tenglamadan y ni topib, mediananing burchak koeffitsientli tenglamasini keltirib chikaramiz:

$$\frac{x - 3}{\frac{7}{2}} = \frac{y - 7}{-2} \Rightarrow 12(x - 3) = -7(y - 7) \Rightarrow 12x - 36 = -7y + 49 \Rightarrow 12x + 7y = 85 \Rightarrow y = -\frac{12}{7}x + \frac{85}{7}.$$

Bu erdan mediananing umumiy tenglamasi $8x + y - 17 = 0$ bulishini kuramiz. Mediananing normal $x \cos \beta + y \sin \beta - p = 0$ tenglamasini topish uchun umumiy tenglamani, ozod xad $C = -17 < 0$ bulgani uchun, $M = 1/\sqrt{8^2 + 1} = 1/\sqrt{65}$ normallashtiruvchi kupaytuvchiga kupaytiramiz:

$$\frac{8x}{\sqrt{8^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{8^2 + 1}} - \frac{17}{\sqrt{8^2 + 1}} = 0 \Rightarrow \frac{8}{\sqrt{65}}x + \frac{1}{\sqrt{65}}y - \frac{17}{\sqrt{65}} = 0.$$

Demak $\cos \beta = 8/\sqrt{65}$, $\sin \beta = 1/\sqrt{65}$ va $p = 17/\sqrt{65}$.

Mediananing kesmalarga nisbatan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

tenglamasini topish uchun umumiy tenglamani $-C = 17$ ga bulamiz:

$$8x + y - 17 = 0 \Rightarrow \frac{8x}{17} + \frac{y}{17} - \frac{17}{17} = 0 \Rightarrow \frac{x}{17/8} + \frac{y}{17} = 1$$

Demak, kesmaldagi tenglamada $a=17/8$, $b=17$ ekan.

3. A uchidan tushirilgan balandlik AN bulsin. Uning uzunligini xisoblash uchun oldin BC tomonning umumiy tenglamasini topamiz:

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B} \Rightarrow \frac{x - 3}{8 - 3} = \frac{y + 7}{8 + 7} \Rightarrow \frac{x - 3}{5} = \frac{y + 7}{15} \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 3x - 16 \Rightarrow 3x - y + 16 = 0$$

Endi AN balandlik uzunligini berilgan $A(-5;2)$ nuktadan $3x - y + 16 = 0$ tugri chizikkacha bulgan masofani xisoblash formulasiga asosan topamiz:

$$|AN| = \left| \frac{Ax_A + By_A + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{3 \cdot (-5) + (-1) \cdot 2 + 16}{-\sqrt{3^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{15 + 2 - 16}{\sqrt{10}} \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

4. ABC uchburchakning S yuzini kuyidagi formula orkali topamiz:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \\ S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 3 + 5 & -7 - 2 \\ 8 + 5 & 8 - 2 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 13 & 6 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} (48 + 117) = \frac{165}{2}$$

Bu erda yuza kattaligi manfiy bulishi mumkin emasligi nazarga olingan.

5. C burchak kattaligini topish uchun AC va BS tomonlar tenglamalaridan foydalanamiz. Yukorida topilgan BS tomonning $y=3x-16$ tenglamasidan uning burchak koefitsienti $k_1=3$ ekanligini kuramiz. AC tomonni burchak koefitsientli tenglamasini chikaramiz:

$$\frac{x - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y - y_A}{y_C - y_A} \Rightarrow \frac{x + 5}{8 + 5} = \frac{y - 2}{8 - 2} \Rightarrow \frac{x + 5}{13} = \frac{y - 2}{6} \Rightarrow y = \frac{6x}{13} + \frac{56}{13}$$

Bu erdan AC tomon burchak koefitsienti $k_2=6/13$ ekanligini kuramiz.

Endi C burchak kattaligini ikki tugri chizik orasidagi burchak formulasi yordamida kuyidagicha topish mumkin:

$$tgC = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{\frac{6}{13} - 3}{1 + \frac{6}{13} \cdot 3} = -\frac{33}{31} \Rightarrow tgC = -\frac{33}{31}, \quad \angle C = \arctg\left(-\frac{33}{31}\right).$$

III. Tajriba ishini mustakil bajarish uchun topshiriklar.

Masalaning qo'yilishi: Uchlari $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ va $C(x_3, y_3)$ nuqtalarda joylashgan uchburchak buyicha kuyidagi topshiriklarni bajarang:

1. AC tomonning uzunligini toping.
2. B uchidan utkazilgan mediananing barcha kurinishdagi tenglamalarini yozing.
3. A uchidan tushirilgan balandlik uzunligini toping.
4. ABC uchburchak yuzini xisoblang.

5. C burchakning kattaligini toping.

Izo: 1. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ va $C(x_3, y_3)$ nuqtalarning koordinatalari quyidagi jadvaldan talabning variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabning varianti № ukituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib rakami bilan belgilanadi.

№	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	№	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	-1	2	4	1	3	5	14	-2	3	1	-2	5	-3
2	-1	4	2	2	-3	4	15	5	-1	2	-3	3	-4
3	-4	3	2	4	-1	5	16	3	-4	-1	2	5	-3
4	-1	3	5	2	-2	4	17	-1	3	2	4	4	3
5	4	-1	-2	1	-3	-4	18	-1	3	4	-2	-3	5
6	2	-1	3	-5	8	-3	19	3	-2	4	-1	2	8
7	1	-3	-1	4	-3	2	20	-4	-2	2	-3	4	3
8	2	-1	4	3	5	-2	21	2	2	-3	4	4	1
9	-3	3	2	5	3	1	22	2	-2	4	6	5	2
10	3	-1	2	4	6	-3	23	-3	2	4	1	3	5
11	5	1	2	4	3	5	24	-4	4	2	1	4	-3
12	-3	1	2	4	3	7	25	1	-3	2	5	8	-6
13	-2	-1	3	-2	1	-5	26	2	-5	1	-3	7	4

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. Tugri chizikning burchak koeffitsientli tenglamasi qanday kurinishda buladi?
2. Tugri chizikning burchak koeffitsientli tenglamasidagi parametrlar qanday ma'noga ega?
3. Ikki tugri chizik orasidagi burchak qanday topiladi?
4. Tugri chiziklarning parallellik va perpendikulyarlik sharti nimadan iborat?
5. Tugri chizikning umumiy tenglamasi qanday kurinishda buladi?
6. Tugri chizikning kesmalardagi tenglamasi qanday kurinishda buladi?
7. Tugri chizikning kesmalardagi tenglamasidagi parametrlar qanday ma'noga ega?
8. Tugri chizikning normal tenglamasi qanday kurinishda buladi?
9. Tugri chizik normal tenglamasidagi parametrlar qanday ma'noga ega?
10. Tugri chizikning umumiy tenglamasidan kesmalardagi va normal tenglamalariga qanday utish mumkin?
11. Ikki nukta orasidagi masofa qanday xisoblanadi?
12. Kesmaning urta nuqtasining koordinatalari qanday topiladi?

V. Adabiyotlar ruyxati.

1. X.S.Madraximov, N.S.Muminov, A.G.Ganiev. «Analitik geometriya va chizikli algebra», Toshkent, Ukituvchi, 1988 y. V bob, §1-6, 83-103 betlar.
2. Yo.U. Soatov.«Oliy matematika». 1-jild,Toshkent, Ukituvchi, 1992 y. 1-bob, §17-119, 47-55 betlar.
3. D.G. Raximov. «Oliy matematika», 1- kism, Toshkent, 2003 y. 2 bob, §1, 85-96 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajarish algoritmi va dasturi.

Tekisikdagi analitik geometriya masalalaridan iborat bu tajriba ishi topshiriklarini kompyuterda kuyidagi algoritm asosida bajarish mumkin.

1. Uchburchakning uchlari bulmish $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ va $C(x_3,y_3)$ nuqtalarni $A_{1 \times 2}$, $B_{1 \times 2}$ va $C_{1 \times 2}$ matritsalar singari olamiz;
2. AC tomon uzunligini ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan topamiz;
3. AC tomonning urta M nuqtasi koordinatalarini topamiz;
4. B uchdan utkazilgan BM mediananing umumiy tenglamasini ikki nuqtadan utuvchi tugri chizik formulasi buyicha topamiz;
5. BM mediananing umumiy tenglamasidan foydalanib, uning burchak koefitsientli tenglamasini aniklaymiz;
6. BM mediananing umumiy tenglamasidan foydalanib, uning kesmalardagi tenglamasini topamiz;
7. BM mediananing umumiy tenglamasidan foydalanib, uning normal tenglamasini aniklaymiz;
8. 4-kadamdagi kabi BC tomonning umumiy tenglamasini topamiz;
9. Uchburchakning A uchidan tushirilgan balandligini bu nuqtadan BC tugri chizikkacha masofa singari topamiz;
- 10.Uchburchak uchlarning koordinatalari orkali III tartibli aniklovchi yordamida uning yuzasini xisoblaymiz;
11. 4-kadamdagi kabi AC tomonning umumiy tenglamasini topamiz;
12. AC va BC tomonlar orasidagi burchakni ikki tugri chizik orasidagi burchak formulasiga asosan topamiz;
13. Xisoblashlarni tugatamiz.

Bu algoritm Paskal tilida kuyidagicha ifodalanadi.

```
PROGRAM CHIZIQ (INPUT, OUTPUT);
  LABEL 10;
  VAR   A, B, C: ARRAY[1..2] OF INTEGER;
        E: ARRAY[1..2] OF REAL;
        A1, B1, C1: INTEGER;
  ALFA, BETA, GAMMA, AB, AC, K, L: REAL;
  A2, B2, C2, H, S, FI: REAL;
  BEGIN
    FOR I:=1 TO 2 DO READ(A(I), B(I), C(I));
  AC:=SQRT(SQR(C(1)-A(1))+ SQR(C(2)-A(2))); WRITE(AC);
  E(1):=(A(1)+C(1))/2; E(2):=(A(2)+C(2))/2;
  A1:= B(2)-E(2); B1:= E(1)-B(1);
  C1:= E(2)*(B(1)-E(1)) - E(1)*(B(2)-E(2)); WRITE(A1, B1, C1);
    IF B1:=0 THEN
      WRITE('BM МЕДИАННИНГ БУРЧАК    КОЭФФИЦИЕНТЛИ
ТЕНГЛАМАСИ МАВЖУД ЭМАС'); GO TO 10;
      K:= -A1/B1;  L:= -C1/B1; WRITE(K, L);
  10:  IF C1:=0 THEN
      WRITE('BM МЕДИАННИНГ КЕСМАЛАРДАГИ
ТЕНГЛАМАСИ МАВЖУД ЭМАС'); GO TO 20;
      ELSE IF A1:=0 THEN B2:= -C1/B1; WRITE(B2); GO TO 20;
      ELSE IF B1:=0 THEN A2:= -C1/A1; WRITE(A2); GO TO 20;
      ELSE B2:= -C1/B1; A2:= -C1/A1; WRITE(A2, B2);
  20: AB:=SQRT(SQR(A1)+SQR(B1));
      IF C1>0 THEN AB:= -AB; GO TO 30;
      ELSE
  30: ALFA:=A1/AB; BETA:=B1/AB; GAMMA:=C1/AB;
      WRITE(ALFA, BETA, GAMMA);
      A1:= A(2)-C(2); B1:= C(1)-A(1);
      C1:= C(2)*(A(1)-C(1)) - C(1)*(A(2)-C(2));
      H:= (A1*B(1)+B1*B(2)+C1)/SQRT(SQR(A1)+SQR(B1));
      H:=ABS(H); WRITE(H);
      S:=A(1)*B(2)+ A(2)*C(1)+ B(1)*C(2)-
      C(2)*B(2)- A(1)*C(2)- A(2)*B(1); S:=ABS(S); WRITE(S);
      A2:= B(2)-C(2); B2:= C(1)-B(1);
      C2:= C(2)*(B(1)-C(1)) - C(1)*(B(2)-C(2));
      FI:=A1*A2+ B1*B2+ C1*C2;
      IF FI:=0 THEN WRITE('ИЗЛАНГАН БУРЧАК 90°');GO TO 40;
      ELSE
      FI:=FI/SQRT((SQR(A1)+ SQR(B1)+ SQR(C1))*
      (SQR(A2)+ SQR(B2)+ SQR(C2))); WRITE(FI);
      END.
```

SAKKIZINCHI TAJRIBA ISHI.

M a v z u: Fazoda tugri chizik va tekislik tenglamalari.

Tajriba ishining maqsadi: Talabalarda tekislik va tugri chizik tenglamalarini yoza olish va ular yordamida masalalar echish malakasini xosil qilish.

I. Tajriba ishi mavzusi buyicha kiskacha nazariy ma'lumotlar.

Tekislik fazodagi eng sodda sirt xisoblanadi va u boshlangich tushuncha sifatida ta'rifsiz kabul etiladi. Analitik geometriyada tekislik va u bilan bogliq masalalar tekislikning turli tenglamalari orkali karaladi.

1) Tekislikning **umumiy tenglamasi** deb

$$Ax+By+Cz+D=0$$

kurinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu erda A, B, C, D sonlar ixtiyoriy uzgarmaslar va A, B, C sonlari bir paytda nolga teng bula olmaydi, ya'ni $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ shart bajarilishi kerak. Bu xolda $\vec{n} = (A, B, C)$ bu tekislikka perpendikulyar vektor bulib, uning **normal vektori** deyiladi.

2) Berilgan $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqtadan utuvchi **tekisliklar dastasi**

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

tenglamaga ega buladi. Bunda A, B, C ($A^2+B^2+C^2 \neq 0$) ixtiyoriy uzgarmas sonlar bulib, ularning anik bir kiymatlarida M_0 nuqtadan utuvchi anik bir tekislik tenglamasiga ega bulamiz.

3) Koordinata boshidan utmaydigan tekislikning **kesmalarga nisbatan tenglamasi** deb

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

kurinishdagi tenglamaga aytiladi. Bunda a, b, c uzgarmaslarning modullari tekislikning mos ravishda OX, OY, OZ uklardan ajratgan kesmalarining uzunliklarini ifodalaydi. Tekislikning $Ax+By+Cz+D=0$ ($C \neq 0$) umumiy tenglamasidan kesmalardagi tenglamasiga utish uchun uni $-C \neq 0$ ozod xadga bulish kerak. Bunda $a = -C/A, b = -C/B, c = -C/D$ buladi.

4) Tekislikning **normal tenglamasi** deb

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

kurinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu erda $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ tekislikning normal vektori yunaltiruvchi kosinuslarini, p esa koordinatalar boshidan tekislikkacha bulgan masofani ifodalaydi.

5) Tekislikning umumiy $Ax+By+Cz+D=0$ tenglamasidan uning normal tenglamasiga utish uchun bu tenglamani ikkala tomonini normallashtiruvchi $M = \pm 1 / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ kupaytuvchiga kupaytiriladi. Bundagi M ishorasi

tenglamadagi D ozod xad ishorasiga karama-karshi kilib olinadi. Bu xolda $\cos\alpha=MA$, $\cos\beta=MB$, $\cos\gamma=MC$, $p=-MD$ buladi.

6) Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikgacha bulgan d masofa kuyidagi formula orkali xisoblanadi:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

7) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bilan berilgan tekisliklar orasidagi φ burchakni topish uchun kuyidagi formuladan foydalanish mumkin:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Bu formuladan ikkita natija kelib chikadi:

a) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bilan berilgan tekisliklar perpendikulyar bulishi uchun

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

shart bajarilishi zarur va etarli.

b) $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bilan berilgan tekisliklar parallel bulishi uchun

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

shart bajarilishi zarur va etarli.

8) Bir tugri chizikda yotmagan uchta $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalardan utuvchi tekislikning tenglamasi III tartibli aniklovchi orkali

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

kurinishda ifodalanadi.

9) Fazodagi $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

formula bilan xisoblanadi.

Fazodagi tugri chizik xam geometriyaning boshlangich tushunchalardan biri bulib, ta'rifsiz kabul etiladi. Fazodagi tugri chizik xossalari va u bilan boglik masalalar analitik geometriyada tugri chizikning turli kurinishdagi tenglamalari orkali urganiladi.

10) Fazodagi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan utuvchi va $a=\{m, n, p\}$ vektorga parallel tugri chizik tenglamasi

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

kurinishda buladi va tugri chizikning **kanonik** tenglamasi deb aytiladi. Bunda M_0 tugri chizikning boshlangich nuqtasi, $\mathbf{a}$ esa yunaltiruvchi vektori deyiladi.

11) Berilgan ikkita $M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan utuvchi tugri chizikning tenglamasi quyidagi kurinishda buladi:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Bu tenglamadagi biror kasrning maxraji nol bulsa, uning surati xam nol deb olinadi va u tegishli koordinata ukiga perpendikulyar bulgan tugri chizikni ifodalaydi.

12) Kanonik tenglamalari

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \quad \text{va} \quad \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

bilan berilgan ikki tugri chizik orasidagi φ burchakning kattaligi

$$\cos \varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}$$

formula orkali topiladi.

13) Umumiy tenglamasi

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

bilan berilgan tekislik va kanonik tenglamasi

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

bilan berilgan tugri chizik orasidagi ϕ burchakning kattaligi

$$\sin \phi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

formula orkali xisoblanadi.

14) Учлари $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarda joylashgan piramidaning xajmi

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

formula yordamida topiladi.

II. Tajriba ishining bajarilish namunasi.

Masalaning qo'yilishi: Piramida uchlari $M_1(8;6;4)$, $M_2(10;5;5)$, $M_3(5;6;8)$ va $M_4(9;10;7)$ nuqtalarda joylashgan.

1. M_1M_2 kirra uzunligini toping.
2. M_1M_2 va M_1M_4 kirralar orasidagi burchakni toping.
3. $M_1M_2M_3$ yoq joylashgan tekislikning barcha tenglamalarini yozing.
4. $M_1M_2M_3$ va $M_1M_2M_4$ yoklar orasidagi burchakni toping.
5. Piramidaning M_4 uchidan tushirilgan balandlik uzunligini aniklang.

6. Piramidaning xajmini xisoblang.

Echish: 1. M_1M_2 kirra uzunligini ikki nuqta orasidagi masofa formulasi yordamida topamiz:

$$\begin{aligned} |M_1M_2| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{(10 - 8)^2 + (5 - 6)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

2. Dastlab M_1M_2 va M_1M_4 kirralarning tenglamasini ikki nuqtadan utuvchi tugri chizik tenglamasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} M_1M_2: \quad \frac{x-8}{10-8} &= \frac{y-6}{5-6} = \frac{z-4}{5-4} \Rightarrow \frac{x-8}{2} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-4}{1}, \\ M_1M_4: \quad \frac{x-8}{9-8} &= \frac{y-6}{10-6} = \frac{z-4}{7-4} \Rightarrow \frac{x-8}{1} = \frac{y-6}{4} = \frac{z-4}{3}. \end{aligned}$$

Endi M_1M_2 va M_1M_4 kirralar orasidagi φ burchakni ikki tugri chizik orasidagi burchak formulasi buyicha topish mumkin:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1} \cdot \sqrt{1 + 4^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{156}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{39}} \Rightarrow \angle \varphi = \arccos \frac{1}{2\sqrt{39}}. \end{aligned}$$

3. Dastlab $M_1M_2M_3$ yoq yotgan tekislikning $Ax+By+Cz+D=0$ umumiy tenglamasini uch nuqtadan utuvchi tekislik tenglamasi kabi topamiz:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x-8 & y-6 & z-4 \\ 10-8 & 5-6 & 5-4 \\ 5-8 & 6-6 & 8-4 \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-8 & y-6 & z-4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ \Rightarrow -4(x-8) - 3(y-6) - 3(z-4) - 8(y-6) &= 0 \Rightarrow \\ -4x + 32 - 3y + 18 - 3z + 12 - 8y + 48 &= 0 \\ -4x - 11y - 3z + 110 &= 0 \Rightarrow 4x + 11y + 3z - 110 = 0 \end{aligned}$$

Endi $M_1M_2M_3$ yoqning kesmalarga nisbatan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

tenglamasini topish uchun uning umumiy tenglamasini $-D=110$ ga bulamiz:

$$\frac{4x}{110} + \frac{11y}{110} + \frac{3z}{110} - \frac{110}{110} = 0 \Rightarrow \frac{x}{5/2} + \frac{y}{10} + \frac{z}{110/3} = 1.$$

Bu erdan $a=5/2$, $b=10$ va $c=110/3$ ekanligini kuramiz.

$M_1M_2M_3$ yoqning normal

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

tenglamasini aniklash uchun normallashtiruvchi M kupaytuvchini topib, $M_1M_2M_3$ yokning umumiy tenglamasining ikkala tomonini M ga kupaytiramiz.

Umumiy tenglamada ozod xad $D=-110 < 0$ bulgani uchun

$$M = \frac{1}{\sqrt{(-4)^2 + (-11)^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{16 + 121 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{146}} \Rightarrow$$

$$\frac{4}{\sqrt{146}}x + \frac{11}{\sqrt{146}}y + \frac{3}{\sqrt{146}}z - \frac{110}{\sqrt{146}} = 0.$$

Demak $\cos\alpha = 4/\sqrt{146}$, $\cos\beta = 11/\sqrt{146}$, $\cos\gamma = 3/\sqrt{146}$ va $p = 110/\sqrt{146}$.

4. Dastlab $M_1M_2M_4$ yoqning tenglamasini uch nuktadan utuvchi tekislik tenglamasi kabi topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-8 & y-6 & z-4 \\ 10-8 & 5-6 & 5-4 \\ 9-8 & 10-6 & 7-4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-8 & y-6 & z-4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3(x-8) + (y-6) + 8(z-4) + (z-4) - 6(y-6) - 4(x-8) = 0$$

$$-3x + 24 + y - 6 + 8z - 32 + z - 4 - 6y + 36 - 4x + 32 = 0 \Rightarrow$$

$$-7x - 5y + 9z + 50 = 0 \Rightarrow 7x + 5y - 9z - 50 = 0$$

Yuqorida $M_1M_2M_3$ yoqning tenglamasi $4x+11y+3z-110=0$ ekanligi topilgan edi. Shuning uchun, $M_1M_2M_3$ va $M_1M_2M_4$ yoqlar orasidagi φ burchakni ikki tekislik orasidagi burchak formulasiga asosan topish mumkin:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{4 \cdot 7 + 11 \cdot 5 + 3 \cdot (-9)}{\sqrt{4^2 + 11^2 + 3^2} \cdot \sqrt{7^2 + 5^2 + 9^2}} =$$

$$= \frac{56}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{155}} = \frac{56}{\sqrt{22630}} \Rightarrow \angle\varphi = \arccos \frac{56}{\sqrt{22630}}.$$

5. Piramidaning $M_4(9;10;7)$ uchidan tushirilgan h balandlikni bu nuktadan umumiy tenglamasi $4x+11y+3z-110=0$ bulgan $M_1M_2M_3$ tekislikkacha bulgan masofa formulasidan foydalanib topamiz:

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|4 \cdot 9 + 11 \cdot 10 + 3 \cdot 7 - 110|}{\sqrt{4^2 + 11^2 + 3^2}} = \frac{|36 + 110 + 21 - 110|}{\sqrt{146}} = \frac{57}{\sqrt{146}}$$

6. Piramidaning V xajmini uning uchlari koordinatalari orkali topamiz:

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 10-8 & 5-6 & 5-4 \\ 5-8 & 6-6 & 8-4 \\ 9-8 & 10-6 & 7-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{6} (-4 - 12 - 9 - 32) = \frac{57}{6} = 9.5.$$

III. Tajriba ishini mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Masalaning qo'yilishi: Piramida uchlari $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarda joylashgan.

1. M_1M_2 kirra uzunligini toping.
2. M_1M_2 va M_1M_4 kirralar orasidagi burchakni toping.
3. $M_1M_2M_3$ yok joylashgan tekislikning barcha tenglamalarini yozing.
4. $M_1M_2M_3$ va $M_1M_2M_4$ yoklar orasidagi burchakni toping.
5. Piramidaning M_4 uchidan tushirilgan balandlik uzunligini aniklang.
6. Piramidaning xajmini xisoblang.

Izox: 1. $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarning koordinatalari kuyidagi jadvaldan talabning variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabning varianti № ukituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib rakami bilan belgilanadi.

№	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
1	2	4	8	-3	5	1	6	-4	3	5	8	-1
2	-1	-3	-7	2	-4	0	-5	3	-2	-4	-7	2
3	3	5	9	0	6	-2	7	1	4	6	9	0
4	0	-2	7	-3	-3	5	-4	4	-1	-3	-6	3
5	-4	6	-3	7	7	-1	8	0	5	7	-3	1
6	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-3	6	-5
7	2	-3	4	-5	6	-7	8	-9	3	-4	7	1
8	3	-4	-5	6	7	-8	9	-3	7	-4	-1	-2
9	4	5	-6	-7	8	-9	3	-5	7	1	2	-3
10	-5	6	7	-8	9	-2	-1	3	-4	-2	3	4
11	-6	7	-8	-9	0	3	2	1	-3	-3	-4	-5
12	7	-8	9	0	-1	2	1	-2	3	4	5	6
13	8	-9	1	-1	2	-3	-4	-5	-6	-7	0	4
14	9	-1	1	-2	1	-2	3	4	5	6	7	8
№	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	x_4	y_4	z_4
15	0	-1	2	1	-2	-3	-4	5	-6	7	-8	-9
16	1	-2	-1	-2	3	4	5	6	7	-5	0	8
17	2	1	2	3	-4	-5	-6	7	8	-9	0	-3
18	-3	4	-5	1	-8	7	-4	-2	1	2	-1	0
19	2	-5	3	-2	7	-8	3	-1	2	-3	1	5
20	-4	3	-5	0	-9	6	5	-3	0	1	-3	2
21	1	-6	2	-3	6	-9	2	0	-3	-4	7	0
22	-5	2	-6	1	-1	5	-6	-4	1	0	4	-4
23	0	-7	1	-6	5	-1	-2	-6	5	3	0	-4
24	-6	1	-7	0	-1	4	7	5	0	-1	5	2
25	-5	0	2	3	-6	1	4	0	-3	7	9	-8

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. Tekislikning umumiy tenglamasi kanday kurinishda buladi?
2. Tekislikning umumiy tenglamasidagi parametrlar kanday shartni kanoatlantirishi kerak?
3. Tekislikning kesmalardagi tenglamasi kanday kurinishda buladi va umumiy tenglamadan unga kanday utiladi?
4. Tekislikning normal tenglamasi kanday kurinishda buladi va umumiy tenglamadan unga kanday utiladi?
5. Ikki tekislik orasidagi burchak kanday topiladi?
6. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik sharti nimadan iborat?
7. Uchta nuqtadan utuvchi tekislik tenglamasi kanday topiladi?
8. Nuqtadan tekislikkacha bulgan masofa kanday formula bilan topiladi?
9. Fazodagi tugri chizikning kanonik tenglamasi kanday kurinishda buladi va undagi parametrlar kanday ma'noga ega?
10. Ikki nuqtadan utuvchi tugri chizik tenglamasi kanday topiladi?
11. Fazodagi ikki tugri chizik orasidagi burchak kaysi formula bilan topiladi?
12. Tekislik va fazodagi tugri chizik orasidagi burchak kaysi formula bilan topiladi?

V. Adabiyotlar ruyxati.

1. X.S.Madraximov, N.S.Mo'minov, A.G.Ganiev. «Analitik geometriya va chizikli algebra», Toshkent, O'qituvchi, 1988 yil. VI bob, §1(5, 105-117 betlar.
2. Yo.U. Soatov.«Oliy matematika». 1-jild,Toshkent, O'qituvchi, 1992 y. 1-bob, §14-19, 42-55 betlar.
3. D.G. Raximov. «Oliy matematika», 1- kism, Toshkent, 2003 y. 3 bob, §1-2, 125-139 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajariish algoritmi va dasturi.

Bu tajriba ishi tekislikdagi analitik geometriyaga doir bulib, uning topshiriqlari kompyuterda kuyidagi algoritm asosida amalga oshirilishi mumkin.

1. Piramida uchlari joylashgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ nuqtalarning koordinatalarini beramiz;
2. M_1M_2 kirra uzunligini fazodagi ikki nuqta orasidagi masofa formulasi buyicha topamiz;
3. M_1M_2 va M_1M_4 kirralar joylashgan tugri chiziklarning yunaltiruvchi vektorlarini topamiz;
4. M_1M_2 va M_1M_4 kirralar orasidagi burchakni fazodagi ikki vektor yoki ikki tugri chizik orasidagi burchak formulasiga asosan topamiz;
5. $M_1M_2M_3$ yoq joylashgan tekislikning umumiy tenglamasini uch nuqtadan utuvchi tekislik tenglamasi formulasidan topamiz;

6. $M_1M_2M_3$ yoqning kesmalardagi tenglamasini umumiy tenglamani $D \neq 0$ ozod hadga bulish orkali topamiz. Agar $D=0$ bulsa kesmalardagi tenglama mavjud emasligini bildiramiz;
7. $M_1M_2M_3$ yoqning normal tenglamasini umumiy tenglamani

$$\mu = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$
 ifodaga bulish orkali topamiz. Uning ishorasi D ozod xad ishorasiga karama-karshi kilib olinadi;
8. 5-boskichdan foydalanib $M_1M_2M_4$ yokning umumiy tenglamasini topamiz;
9. $M_1M_2M_3$ va $M_1M_2M_4$ yoklar orasidagi burchakni ikki tekislik orasidagi burchak formulasiga asosan topamiz;
10. Piramidaning M_4 uchidan tushirilgan balandligining uzunligini nuktadan tekislikkacha bulgan masofani topish formulasidan aniklaymiz;
11. Piramidaning xajmini uning uchlari koordinatalaridan tuzilgan III tartibli aniklovchini xisoblash orkali topamiz;
12. Xisoblashlarni tuxtatamiz.

Bu algoritmning Paskal tilidagi dasturini keltiramiz.

```
PROGRAM TEKISLIK (INPUT, OUTPUT);
  LABEL 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70;
  VAR
    M1, M2, N1, N2, P1, P2: INTEGER;
    A, B, C, D, A2, B2, C2, D2: INTEGER;
    FI, A1, B1, C1, D, Y, W: REAL;
    M1, M2, M3, M4: ARRAY[1..3] OF INTEGER;
  BEGIN
    FOR I:=1 TO 3 DO READ(M1(I));
    FOR I:=1 TO 3 DO READ(M2(I));
    FOR I:=1 TO 3 DO READ(M3(I));
    FOR I:=1 TO 3 DO READ(M4(I));
    D:=SQRT(SQR(M2(1)-M1(1))+ SQR(M2(2)-M1(2))+
      SQR(M2(3)-M1(3))); WRITE(D);
    M1:=M2(1)-M1(1); N1:=M2(2)-M1(2); P1:=M2(3)-M1(3);
    M2:=M4(1)-M1(1); N2:=M4(2)-M1(2); P2:=M4(3)-M1(3);
    FI:=M1*M2+ N1*N2+ P1*P2;
    IF FI:=0 THEN
      WRITE('M1M2 va M1M4 КИРРАЛАР УЗАРО ПЕРПЕНДИКУЛЯР');
      FI:=FI/SQRT((SQR(M1)+ SQR(N1)+ SQR(P1))*
        (SQR(M2)+ SQR(N2)+ SQR(P2))); WRITE(FI);
      A:=M1(2)*M2(3)+ M1(3)*M3(2)+ M2(2)*M3(3)-
        M2(3)*M3(3) - M1(3)*M2(2) - M1(2)*M3(3);
      B:=M3(1)*M2(3)+ M1(1)*M3(3)+ M2(1)*M1(3)-
        M2(3)*M1(1) - M1(3)*M3(1) - M2(1)*M3(3);
      C:=M1(1)*M2(2)+ M1(2)*M3(1)+ M2(1)*M3(2)-
        M2(2)*M3(1)-M1(1)*M3(2)-M1(2)*M2(1);
      D :=M1(3)*M2(2)*M3(1)+ M1(2)*M3(3) *M2(1) +
        M2(1)*M1(3) *M3(3)- M1(1)*M2(2) *M3(3) -
        M1(2)*M2(3) *M3(1) -M1(3)*M3(2) *M2(1);
      IF D=0 THEN
        10: WRITE('КЕСМАЛАРДАГИ ТЕНГЛАМА МАВЖУД ЭМАС');
        GO TO 70;
      ELSE
        IF A:=0 THEN GO TO 20; A1:= -A/D;
        IF B:=0 THEN GO TO 30; B1:= -B/D;
        IF C:=0 THEN GO TO 40; C1:= -C/D;
        WRITE(A1, B1, C1); GO TO 70;
        20: IF B:=0 THEN GO TO 50; B1:= -B/D;
        IF C:=0 THEN GO TO 60; C1:= -C/D;
        WRITE( B1, C1); GO TO 70;
```

```

50:  IF C:=0 THEN GO TO 10;  C1:= -C/D;
      WRITE(C1); GO TO 70;
40:  WRITE(A1, B1); GO TO 70;
30:  IF C:=0 THEN  WRITE(A1); GO TO 70;
      ELSE  C1:= -C/D; WRITE( A1, C1); GO TO 70;
70:  A2:=M1(2)*M2(3)+ M1(3)*M4(2)+ M2(2)*M4(3)-
      M2(3)*M4(3) - M1(3)*M2(2) -M1(2)*M4(3);
      B2:=M4(1)*M2(3)+ M1(1)*M4(3)+ M2(1)*M1(3)-
      M2(3)*M1(1) - M1(3)*M4(1) -M2(1)*M4(3);
      C2:=M1(1)*M2(2)+ M1(2)*M4(1)+ M2(1)*M4(2)-
      M2(2)*M4(1)-M1(1)*M4(2)-M1(2)*M2(1);
      D2 :=M1(3)*M2(2)*M4(1)+ M1(2)*M4(3) *M2(1) +
      M2(1)*M1(3) *M4(3)- M1(1)*M2(2) *M4(3) -
      M1(2)*M2(3) *M4(1) -M1(3)*M4(2) *M2(1);
FI:=A*A2+ B*B2+ C*C2;
      IF FI:=0 THEN
WRITE('M1M2M3 ва M1M2M4 ёклар узаро перпендикуляр');
      FI:=FI/SQRT((SQR(A)+ SQR(B)+ SQR(C))*
      (SQR(A2)+ SQR(B2)+ SQR(C2))); WRITE(FI);
      H:= (A*M4(1)+ B*M4(2)+ C*M4(3)+D);
      H:=H/SQRT(SQR(A)+ SQR(B)+ SQR(C));
      WRITE(H);
W:=(M4(1)-M1(1))*(M4(2)-M2(2))*(M4(3)-M3(3))+
      (M4(2)-M1(2))*(M4(3)-M2(3))*(M4(1)-M3(1))+
      (M4(1)-M2(1))*(M4(2)-M3(2))*(M4(3)-M1(3))-
      (M4(3)-M1(3))*(M4(2)-M2(2))*(M4(1)-M3(1))-
      (M4(1)-M1(2))*(M4(1)-M2(1))*(M4(3)-M3(3))-
      (M4(3)-M2(3))*(M4(2)-M3(2))*(M4(1)-M1(1));
      W:=ABS(W); WRITE(W);
END.

```

TO'QQIZINCHI TAJRIBA ISHI

M a v z u: Bir uzgaruvchili funktsiyani uzluksizlikka tekshirish.

Tajriba ishininng maqsadi: Talabalarda funktsiyani uzluksizlikka tekshirib bilish malakasini xosil qilish.

I. Tajriba ishi mavzusi buyicha kiskacha nazariy ma'lumotlar.

Agar x o'zgaruvchi miqdorning D sohadagi xar bir qiymatiga biror usul yoki qonun bo'yicha y miqdorning biror E sohadagi aniq bir qiymati mos qo'yilsa, y o'zgaruvchi miqdor x o'zgaruvchi miqdorning **funktsiyasi** deyiladi va $y=f(x)$, $y=y(x)$ va hokazo ko'rinishda belgilanadi.

Bunda x **erkli o'zgaruvchi** yoki argument, y qiymatlar qabul etadigan D soha esa funktsiyaning **aniqlanish sohasi** deyiladi. Ikkinchi y o'zgaruvchi **erksiz o'zgaruvchi** yoki **funktsiya**, E esa funktsiyaning **o'zgarish sohasi** deyiladi.

Quyidagi funktsiyalarga asosiy elementar funktsiyalar deyiladi:

- 1) Darajali funktsiya: $y=x^a$ (a -ixtiyoriy haqiqiy son).
- 2) Ko'rsatgichli funktsiya: $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$ bo'lgan haqiqiy son).
- 3) Logarifmik funktsiya: $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$ bo'lgan haqiqiy son).
- 4) Trigonometrik funktsiyalar: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$, $y=\cot x$.
- 5) Teskari trigonometrik funktsiyalar: $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\arctan x$, $y=\operatorname{arccot} x$.

Agar $y=f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

ya'ni funktsiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, $y=f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada **uzluksiz** deb ataladi.

Funktsiyaning chap va o'ng limitlari x_0 nuqtada mavjud va o'zaro teng bo'lsa, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$$

shart bajarilsa, $y=f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Biror (a,b) oraliqning barcha nuqtalarida uzluksiz bo'lgan $y=f(x)$ funktsiya shu oraliqda **uzluksiz** deyiladi. Agarda $y=f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmaning barcha ichki nuqtalarida uzluksiz va uning chegaralarida bir tomonlama uzluksiz bo'lsa, bu funktsiya shu kesmada **uzluksiz** deb ataladi.

Asosiy elementar funktsiyalar o'zlari aniqlangan barcha nuqtalarda uzluksizdir.

Quyidagi hollarda $y=f(x)$ funktsiya x_0 nuqtada **uzlukli** deyiladi:

- 1) Funktsiya x_0 nuqtada aniqlanmagan;
- 2) x_0 nuqtada funktsiyaning bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud emas;
- 3) x_0 nuqtada funktsiyaning bir tomonlama limitlari o'zaro teng emas, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x);$$

4) Funktsiya x_0 nuqtada aniqlangan, bir tomonlama limitlar mavjud va o'zaro teng, lekin ular funktsiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng emas, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$$

Bu hollarda x_0 funktsiyaning **uzilish nuqtasi** deyiladi va quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:

a) Agar x_0 nuqtada funktsiyaning $f(x_0+0)$ va $f(x_0-0)$ bir tomonlama limitlari mavjud, chekli va o'zaro teng, ammo ularning qiymati funktsiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lmasa, unda x_0 funktsiyaning **tuzatib bo'ladigan uzilish nuqtasi** deyiladi.

b) Agar x_0 nuqtada funktsiyaning $f(x_0+0)$ va $f(x_0-0)$ bir tomonlama limitlari mavjud, chekli va o'zaro teng bo'lmasa, unda bu nuqta funktsiyaning **I tur uzilish nuqtasi** deb ataladi va $\Delta f = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ **funktsiyaning sakrash** deyiladi.

c) Agar x_0 nuqtada bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud emas yoki cheksiz bo'lsa, x_0 nuqta **II tur uzilish nuqtasi** deb ataladi.

II. Tajriba ishning bajarilish namunasi.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan $y=f(x)$ funktsiyaning uzluksizlikka tekshiring va grafigini chizing:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \operatorname{tg} x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 2, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Echish: Bu $f(x)$ funktsiya $(-\infty; 0)$ oraliqda $f(x) = -x^2$, $(0, \pi/4)$ oraliqda $f(x) = \operatorname{tg} x$, $(\pi/4, 0)$ oraliqda $f(x) = 2$ bo'lib, asosiy elementar funktsiyalardan iboratdir va shuning uchun $f(x)$ ko'rsatilgan oraliqlarda uzluksiz funktsiya bo'ladi.

Uzluksizlikka tekshirilmagan faqat $x_1=0$ va $x_2=\pi/4$ nuqtalar qoldi. Funktsiyaning $x_1=0$ nuqtada tekshiramiz. Buning uchun bir tomonlama limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = (-0)^2 = 0 = f(0-0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = 0 = f(0+0).$$

Berilgan funktsiya uchun $f(0)=0$, bir tomonlama limitlar o'zaro teng va

$$f(0-0) = f(0+0) = f(0) = 0$$

bo'lgani uchun berilgan funktsiya $x_1=0$ nuqtada uzluksizdir.

Endi funktsiyaning $x_2=\pi/4$ nuqtada uzluksizlikka tekshiramiz:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 = f\left(\frac{\pi}{4} - 0\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 = 2 = f\left(\frac{\pi}{4} + 0\right).$$

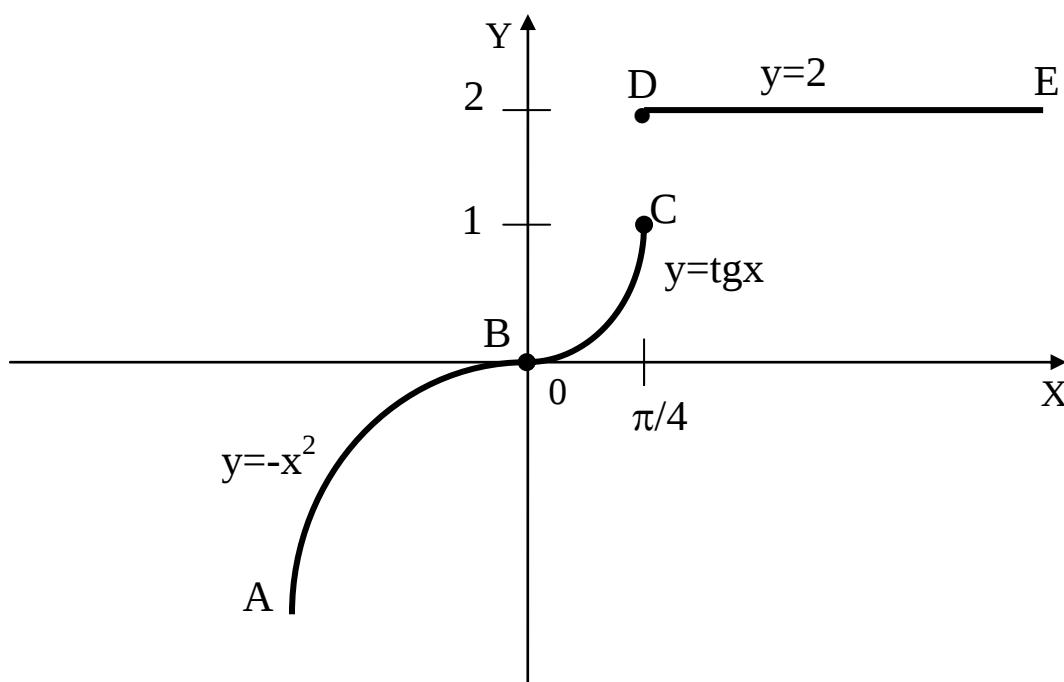
Bu erdan ko'rinadiki, $x_2 = \pi/4$ nuqtada funktsiyaning bir tomonlama limitlari mavjud va chekli sonlardan iborat, ammo ular o'zaro teng emas.

Demak berilgan funktsiya $x_2 = \pi/4$ nuqtada I tur uzilishga ega va unda

$$\Delta f = f\left(\frac{\pi}{4} + 0\right) - f\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 2 - 1 = 1$$

sakrash bilar o'zgaradi.

Endi bu ma'lumotlar asosida shu funktsiyaning sxematik grafigini chizamiz:



Bu grafikning AB yoyi $y = -x^2$ paraboladan, BC yoyi $y = \operatorname{tg} x$ tangensoidadan va DE qismi $y = 2$ gorizantal to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, $x = \pi/4$ nuqtada I tur uzilishga ega.

III. Tajriba ishini mustakil bajarish uchun topshiriklar.

Masalaning qo'yilishi: Berilgan $y = f(x)$ funktsiyaning uzluksizlikka tekshiring va grafigini chizing.

Izox: 1. Topshiriqdagi $f(x)$ funktsiya talabning variantiga asosan tanlab olinadi.

2. Talabning varianti № o'qituvchi tomonidan yoki guruh jurnalidagi tartib raqami bilan belgilanadi.

$$\text{№1. } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \pi \\ x - 2, & x > \pi \end{cases}$$

$$\text{№3. } f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ \operatorname{ctgx}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{4} \\ 2, & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{№5. } f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{№7. } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{№9. } f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -2 \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{№11. } f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -1 \\ x^2 + 1, & -1 \leq x < 0 \\ \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{№13. } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} < x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{№15. } f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\sqrt{2} \\ 1 - x^2, & -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ 1, & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{№17. } f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \leq \pi \\ \sqrt{x - \pi}, & \pi < x \leq 2\pi \\ 2, & x > 2\pi \end{cases}$$

$$\text{№2. } f(x) = \begin{cases} -(x + 1), & x \leq -1 \\ (x + 1)^2, & -1 < x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{№4. } f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ x^2 + 1, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{№6. } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -(x - 1)^2, & 0 < x < 2 \\ x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{№8. } f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{№10. } f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq 1 \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1 \\ -x + 3, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{№12. } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{№14. } f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1 + x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{№16. } f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 1 + x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{№18. } f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{№19. } f(x) = \begin{cases} 2+x, & x < -1 \\ \frac{1}{1+x^2}, & -1 \leq x \leq 1 \\ \cos \frac{\pi}{3}x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{№20. } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 3 \\ -2, & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{№21. } f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{№22. } f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \pi \\ x^2, & x > \pi \end{cases}$$

$$\text{№23. } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x < -1 \\ x^2, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{№24. } f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \\ \ln \frac{2x}{\pi}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{№25. } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -2 \\ (x+2)^2, & -2 < x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

IV. Takrorlash uchun savollar.

1. Funktsiya qanday ta'riflanadi?
2. Funktsiyaning aniqlanish va o'zgarish sohasi deb nimaga aytiladi?
3. Asosiy elementar funktsiyalar qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. Qachon funktsiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
5. Qachon funktsiya oraliqda uzluksiz deyiladi?
6. Qachon funktsiya kesmada uzluksiz deyiladi?
7. Funktsiyaning bir tomonlama limitlari qanday aniqlanadi?
8. Qanday shart bajarilganda funktsiya nuqtada uzluksiz bo'ladi?
9. Asosiy elementar funktsiyalarning uzluksizligi hakida nima deyish mumkin?
10. Qaysi hollarda funktsiya nuqtada uzlukli deyiladi?
11. Funktsiyaning uzilish nuqtalari nechta turga ajratiladi?
12. Funktsiyaning sakrashlari deb nimaga aytiladi?

V. Adabiyotlar ro'yxati.

1. Yo.U. Soatov. «Oliy matematika». 1-jild, Toshkent, O'qituvchi, 1992 y. 2-bob, §13-15, 150-158 betlar.
2. D.G. Raximov. «Oliy matematika», 1- qism, Toshkent, 2003 y. 5 bob, §3, 208-212 betlar.

VI. Tajriba ishini kompyuterda bajarish algoritmi va dasturi.

Tajriba ishi topshiriqlaridagi $f(x)$ funktsiyaning berilgan nuqtalardagi uzluksizligini kompyuterda quyidagi algoritm orqali tekshirish mumkin.

1. Funktsiyaning $x < a$ sohadagi $f_1(x)$ ifodasini aniqlaymiz;
2. Funktsiyaning $a < x < b$ sohadagi $f_2(x)$ ifodasini aniqlaymiz;
3. Funktsiyaning $x > b$ sohadagi $f_3(x)$ ifodasini aniqlaymiz;
4. $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalarning $x=a$ nuqtadagi $f_1(a)$ va $f_2(a)$ qiymatlarini hisoblaymiz;
5. Agar $f_1(a) = f_2(a)$ bo'lsa berilgan $f(x)$ funktsiya $x=a$ nuqtada uzluksizligini aniqlaymiz;
6. Agar $f_1(a) \neq f_2(a)$ shart bajarilmasa, unda $\Delta f = f_2(a) - f_1(a)$ ifoda qiymatini hisoblaymiz;
7. Agar Δf chekli son bo'lsa, unda berilgan $f(x)$ funktsiya $x=a$ nuqtada I tur uzilishga ega bo'lib, Δf sakrash bilan o'z qiymatini o'zgartiradi;
8. Agar Δf cheksiz bo'lsa, unda berilgan $f(x)$ funktsiya $x=a$ nuqtada II tur uzilishga ega bo'ladi;
9. 4-5 qadamlarni $x=b$ nuqtada $f_2(x)$ va $f_3(x)$ funktsiyalar uchun takrorlaymiz;
10. Hisoblashlarni yakunlaymiz.

Bu algoritmnı kompyuterda kuyidagi Paskal tilidagi dastur orqali amalga oshirish mumkin.

```
PROGRAM FUNCTION (INPUT, OUTPUT);
  VAR A, B, DELTA: REAL;
  FUNCTION F1(X: REAL): REAL;
  BEGIN F1:= .....; END;
  FUNCTION F2 (X: REAL);
  BEGIN F2:=.....; END;
  FUNCTION F3(X: REAL): REAL;
  BEGIN F3:=.....; END;
  IF F1(A)=F2(A) THEN
    WRITE('F(X) ФУНКЦИЯ X=',A, 'НУКТАДА УЗЛУКСИЗ');
    GO TO 20;
  ELSE
    DELTA:=F2(A)-F1(A);
    IF ABS(DELTA)<10000000 THEN BEGIN
      WRITE('БЕРИЛГАН F(X) ФУНКЦИЯ X=A НУКТАДА I ТУР
УЗИЛИШГА ЭГА');
      WRITE('X=',A, 'НУКТАДА F(X) ФУНКЦИЯ', DELTA, 'САКРАШ
БИЛАН УЗГАРАДИ'); GO TO 20; END;
    ELSE
      WRITE('БЕРИЛГАН F(X) ФУНКЦИЯ X=',A, 'НУКТАДА II ТУР
УЗИЛИШГА ЭГА');
      20: IF F2(B)=F3(B) THEN BEGIN
        WRITE('F(X) ФУНКЦИЯ X=',B, 'НУКТАДА УЗЛУКСИЗ');
        GO TO 30; END;
      ELSE
        DELTA:=F3(B)-F2(B);
        IF ABS(DELTA)<10000000 THEN BEGIN
          WRITE('БЕРИЛГАН F(X) ФУНКЦИЯ X=',B, 'НУКТАДА I ТУР
УЗИЛИШГА ЭГА');
          WRITE('X=B НУКТАДА F(X) ФУНКЦИЯ', DELTA, 'САКРАШ
БИЛАН УЗГАРАДИ'); GO TO 30; END;
        ELSE
          WRITE('БЕРИЛГАН F(X) ФУНКЦИЯ X=',B, 'НУКТАДА II ТУР
УЗИЛИШГА ЭГА');
          30: END.
```

MUNDARIJ A

1. Kirish	3
2. Birinchi tajriba ishi: Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni ikkiga bo'laklash usulida taqribiy echish.....	4
3. Ikkinchi tajriba ishi: Chiziqli bo'lmagan tenglamalarni vatarlar usulida taqribiy echish.....	11
4. Uchinchi tajriba ishi: Matritsalar va ular ustida amallar.....	18
5. To'rtinchi tajriba ishi: Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss va Kramer usullarida echish.....	33
6. Beshinchi tajriba ishi: Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar usulida echish.....	42
7. Oltinchi tajriba ishi: Vektorlar ustida amallar va ularning tadbiqlari.....	48
8. Ettinchi tajriba ishi: Tekislikdagi to'gri chiziqning tenglamalari	56
9. Sakkizinchi tajriba ishi: Fazoda to'gri chiziq va tekislik tenglamalari.....	63
10. To'qqizinchi tajriba ishi: Bir o'zgaruvchili funktsiyani uzluksizlikka tekshirish.....	73