М. Раисов

Определённые интегралы

Методическое пособие

Самарканд 2009

Министерство высшего и среднего специального образования

Республики Узбекистан

Самаркандский институт экономики и сервиса

М.Раисов

Определенные интегралы

Методическое пособие для студентов, обучающихся по направлениям бакалавриата:

5340700 - «Туризм»
5340100 – «Экономика»
5340600 – «Молия»
581030 – «Сервис»

Самарканд 2009

Раисов М «Определённые интегралы» Учебное пособие. Самарканд. Сам ИСИ 2009.

Рецензенты: Бегматов А. – доктор физмат наук профессор СамДУ.
Тошев Н.Т. - доцент кафедры высшей математики.

Утверждено на заседании кафедры «Высшей математики», протокол № от августа 2009

Рассмотрено на заседании учебно-методического совета института и рекомендовано к печати протокол № от августа 2009.

В работе даны основы математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач.

Цель методическое пособие 1) показать, что понятия определённого, двойного, тройного, криволинейных и поверхностных интегралов строятся по единой схеме; 2) по единой схеме доказать соответствующие свойства этих интегралов.

Всюду предполагается, что **B** – замкнутая ограниченная область, которая может быть:

1) либо спрямляемой линией **L;**
2) либо квадриремой двумерной областью;
3) либо кубируемой трёхмерной областью;

В случаях 2) и 3) предполагается, что граница области представляет непрерывный геометрический образ [2) – непрерывная кривая; 3) – непрерывная поверхность].

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Д и а м е т р о б л а с т и. Число

$$d_{в} = \max_{P,Q \in в} \rho\,[P,Q]$$

где $\rho\,[P,Q]$ – расстояние между точками P и Q, называется д и а м е т р о м области B.

Если хордой области B называть отрезок прямой, соединяющей любые её две точки, то число $d_{в}$ диаметр области B можно рассматривать как длину наибольшей хорды.

X) На лекциях по физике и по некоторым техническим дисциплинам пользуются криволинейными, кратными и поверхностными интегралами раньше, чем предусмотрено изучение этих разделов по календарно-тематическому плану курса высшей математики. По этому эти две лекции должны быть заключительными по теме «Определённые интегралы».

II. С и м в о л m[B]. При построении понятия определенного и кратного интегралов, криволинейного и поверхностного интегралов первого рода символ m[B] означает одно из следующих чисел:

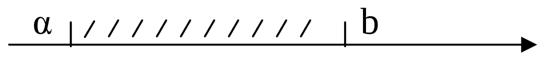
1) b-a, если B = [a,b];
2) длину линии L если B=L {B – множество всех точек линии L;
3) площадь поверхности δ, если B= δ;
4) объём трёхмерной области V если B=V.

Только эти значения символа m[B] рассматриваются в приводимых ниже примерах.

При построении криволинейного и поверхностного интегралов второго рода символу m[B] приписываются другие числа. О значении этого символа в упомянутых случаях будет сказано позже.

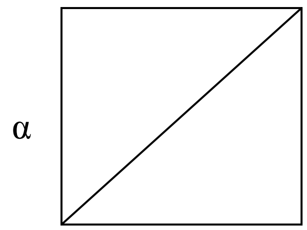
Примеры

1. B = [a,b] – отрезок



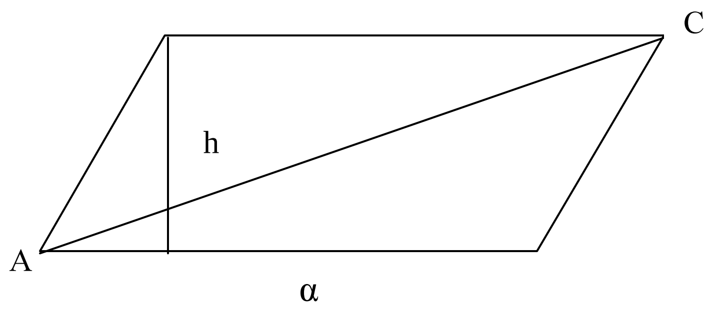
$d_{в}= (b – \alpha)$; m [B]=b- α.

2. B – множество всех точек квадрата со стороной α.

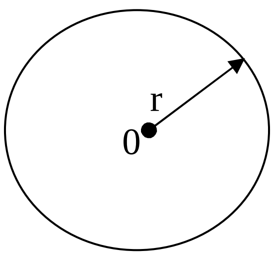


$$d_в = \alpha\sqrt{2}$$
$$m(B) = \alpha^2$$

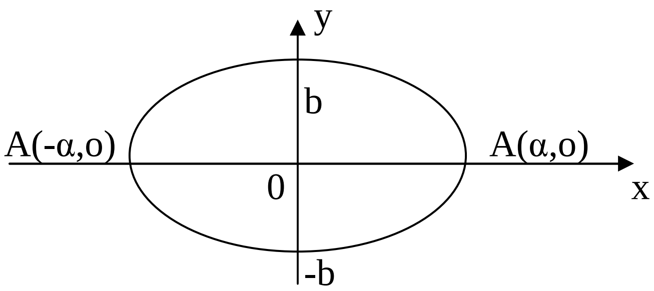
3. B множество всех точек параллелограмма с основанием α и высотой h.



dв=ρ [A,C] – длина наибольшей диагонали m[B]= αh.
4. B – множество всех точек круга радиуса r

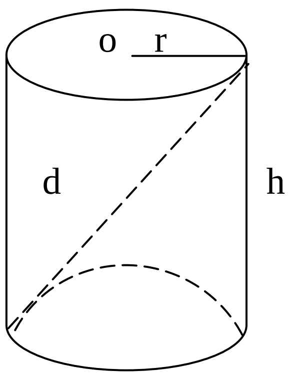


dв=2r; $m[B]=\pi r^2$
5. B – множество всех точек окружности радиуса
dв=2r;   m[B]=2πr
6. B сфера радиуса r
dв=2r; $m[B]=4\pi r^2$
7. B – шар радиуса r.
dв=2r; $m[B]=\frac{4}{3}\pi r^3$
8. B куб с высотой   α.
$d_в= \alpha\sqrt{3}$; $m[B]= \alpha^3$
9. B – множество всех точек, лежащих внутри и на границе эллипса с полуосями α и b (α>b).



$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq$; $d_в=2\alpha$; $m(B)=\pi\alpha b$.

B – прямой круговой цилиндроид с радиусом основания r и высотой h.



$d_в=\sqrt{h^2+4r^2}$;
$m(B)=\pi r^2 h$.

§ 2. δ – РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ

Пуст область B разбита на n подобластей
$B_1, B_2, B_3,\ldots B_n$

1) точками, если B – одномерная область;
2) сеткой линий, если B – двумерная область;
3) сеткой поверхностей, если B – трёхмерная область.

В дальнейшем всюду рассматриваются только такие разбиения, когда любые две подобласти разбиения B_i, B_k $(i\neq k)$ либо не имеют общих точек, либо имеют общими только граничные точки этих подобластей.

Определение. Разбиение области B на подобласти $B_1, B_2, B_3,\ldots B_n$ называется δ – разбиение, если диаметры всех подобластей разбиения не превышает фиксированного числа δ.

Из определения с очевидностью вытекает, что

1) для всякого заданного числа δ существует бесконечное множество δ - разбиений;
2) если $\delta_1<\delta$, то всякое δ_i – разбиение также является δ – разбиений.

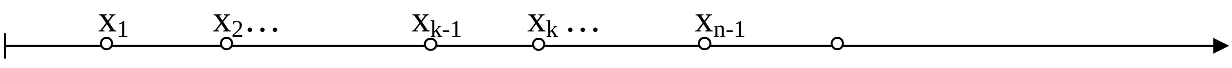
Примеры δ – разбиений области

Фиксируем число δ и разбиваем область B на элементы $B_1, B_2, B_3, \ldots B_n$ по произвольному правилу, лишь бы выполнялись неравенства

$\delta \geq d_{B_k}$ $(k=1,2,3,\ldots n)$

и чтобы любые два элемента Bi и $B_k (i \neq k)$ либо не имели общих точек, либо имели бы общим только граничные точки этих подобластей.

1. $B=[\alpha,b]$ – отрезок.



$\alpha=x_0$ $b=x_k$

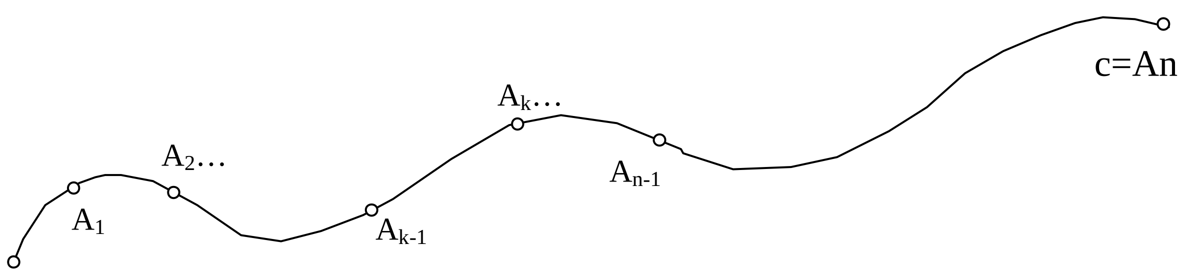
$B_1=[x_0,x_1]$, $B_2=[x_1,x_2], \ldots, B_k=[x_{k-1}, x_k], \ldots, B_n=[x_{n-1}, x_n]$

$m(B_1)=x_1-x_0=\Delta x_1; \ldots;$ $m(B_k)=x_k-x_{k-1}=\Delta x_k; \ldots;$ $m(B_n)=x_n-x_{n-1}=\Delta x_n$

$$\delta \geq [\,\Delta x_k] \ (k=1,2,3,\ldots,n).$$

Следует иметь в виду, что нумерация начинается от точки α.

2. B – множество всех точек линии L (B=L).



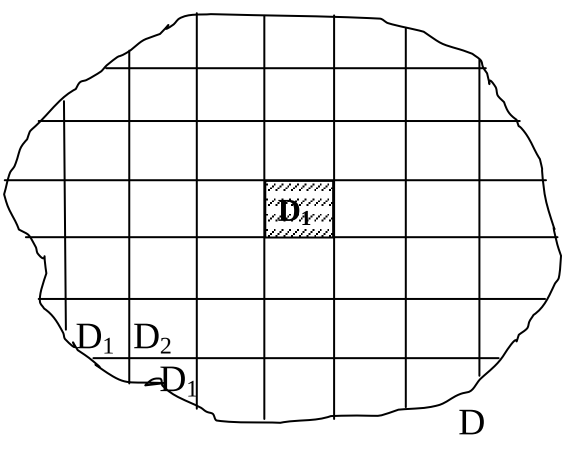
A=Ao

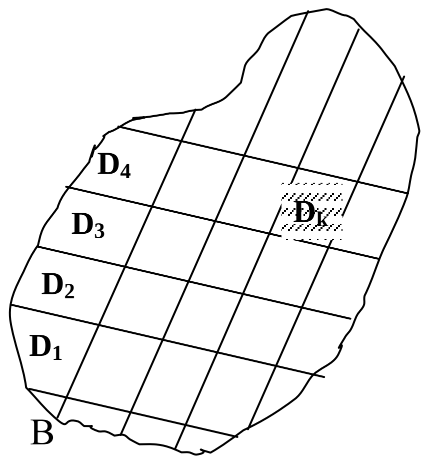
$B_1 = \overset{\frown}{A_0 A_1}$, $B_2 = \overset{\frown}{A_1 A_2}, \ldots,$ $B_к = \overset{\frown}{A_{к-1} A_к}, \ldots,$ $B = \overset{\frown}{A_{n=1} A_n}$

m [B] – длина дуги $\overset{\frown}{A_{к-1} A}$; $\delta \geq \Delta \ell_к (к=1,2,\ldots,n)$.

3. B – множество всех точек плоскости (П), заключённых внутри некоторой замкнутой кривой (плоская область).

Не которой сеткойлиний разбиваем область D на подобласти $D_1, D_2, \ldots, D_n$:

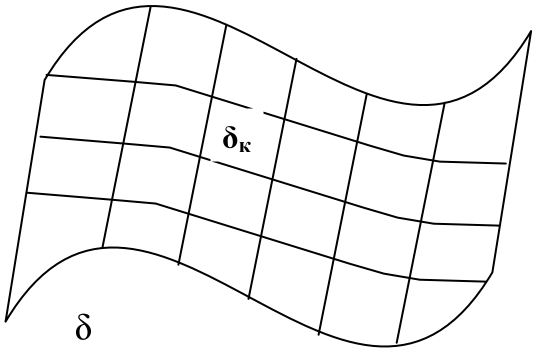




$m(D_k)=\Delta\omega k$ - площадь подобласти D_k.

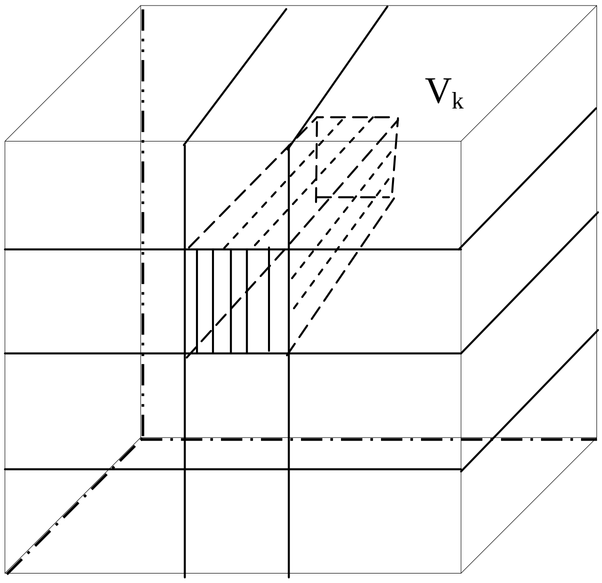
4. B – множество всех точек поверхности δ.

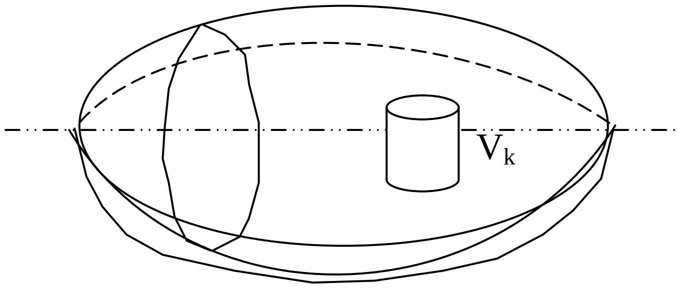
Некоторой сеткой линий разобьем поверхности δ на элементы δ_1, δ_2, …, δ_n:



$m(\delta_k)=\Delta\ \delta k$ - площадь подобласти δ_k.
$\delta \geq d\ \delta_k (k=1,2,\dots, n)$.

5. В - трёхмерная область V.
Некоторой сеткой поверхностей разобьем область V на трёхмерные подобласти V_1, V_2,…, V_n:





$m(V_k)=\Delta V_k$ – объём тела V_k.

$$\delta \geq d_{V_k} \ (K=1,2,3,\dots,n).$$

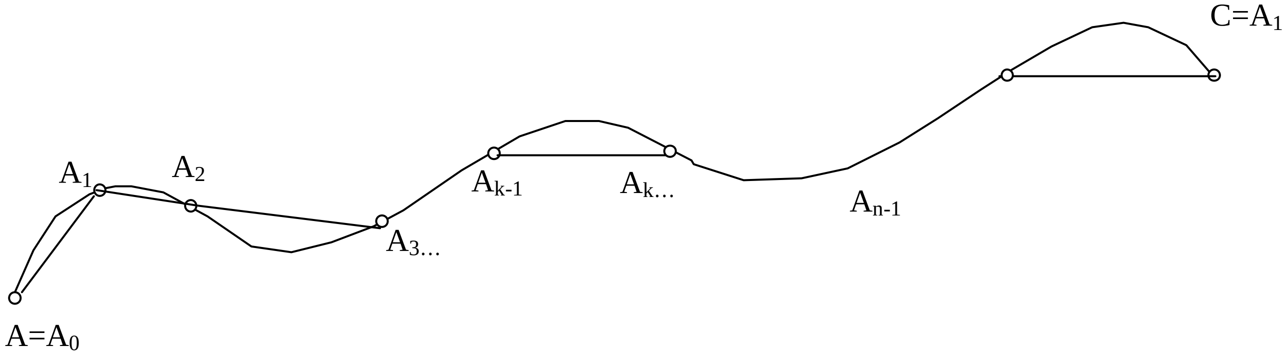
§ 3. СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ 1

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия, ранее встречавшиеся в курсе высшей математики. Напомним определения этих понятий.

1. С п р я м л я е м а я линия, длина линии.

Пусть дана самонепересекающаяся и незамкнутая линия L.

Произвольно фиксируем число δ а затем фиксирует δ – разбиение линии L.



Далее построим вписанную ломанную $A_0\, A_1\, A_2 \dots A_{к-1}\, A_к \dots A_n$.

Длину этой ломаной обозначим через $\ell(L,\delta)$.

Если существует конечный предел ℓ длин ломаных

$$\ell(L,\delta) \text{ при } \delta\to 0$$

$$\ell=\lim_{\delta\to 0} (L,\delta),$$

то линия L называется с п р я м л я е м о й, а число ℓ называется длиной линии L.

Замкнутую линию L называют спрямляемой, если её можно разбить на конечное число спрямляемых дуг рассмотренного выше вида. Аналогично определяется понятие спрямляемости самопересекающейся линии.

Пусть кривая L, не имеющая кратных точек, задана параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t), \\ z=\mu(t) \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq T$$

где функции φ,ψ,μ – непрерывны.

Если функции φ(t), ψ(t), μ(t) на отрезке $[t_0,T]$ имеют непрерывные производные за возможным исключением конечного числа точек разрыза первого рода, то кривая L спрямляема и имеет длину

$$\ell = \int_{t_0}^{T} \sqrt{\varphi^1(t)^2 + \psi^1(t)^2 + \mu^1(t)^2}\ \ \mathrm{dt}.$$

Самым общим является следующее предложение.

Для спрямляемости кривой L необходимо и достаточно, чтобы каждая из функций φ,ψ,μ в промежутке [t_0T] была представимой в виде разности двух непрерывных возрастающих

Фукций.

2. Г л а д к а я кривая – кривая в каждой своей точке имеющая определённую касательную, положение которой непрерывно изменяется вместе с точкой касания.

Кривую, состоящую из конечного числа гладких дуг, называют кусочно-гладкой.

3. К в а д р и р у е м а я о б л а с т ь

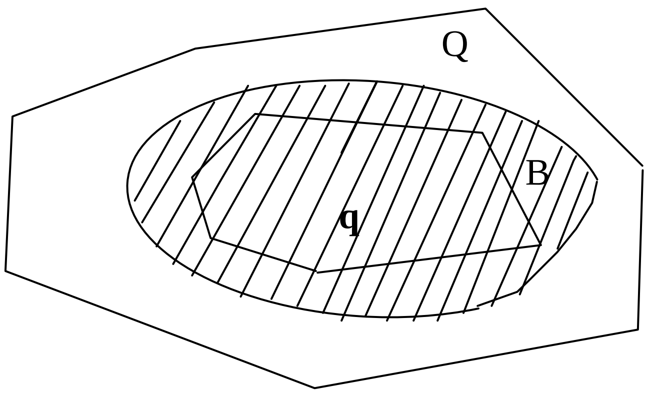
Пусть B – плоская область.

Через Q – обозначим множество площадей многоугольников, содержащих область B, а через q - множество площадей многоугольников. все точки которых принадлежат множеству B.

Если

infQ=sup q=S,

то область B называется квадрируемой, а число S называется площадью области.

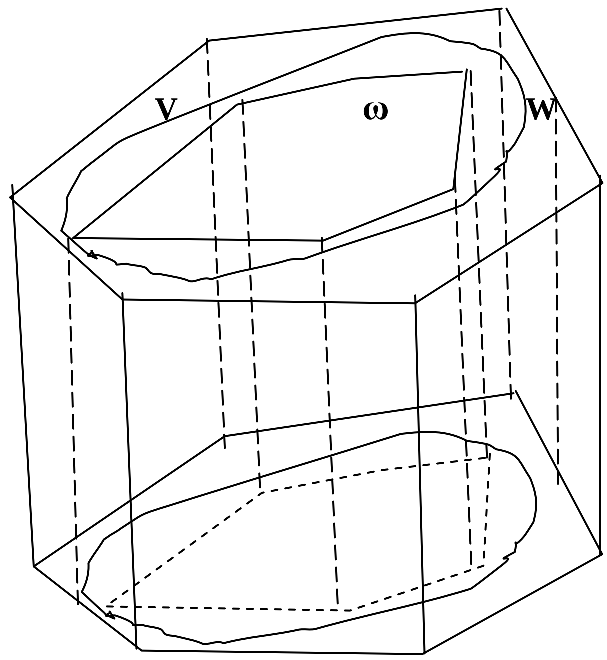


Имеет место следующий весьма интересный факт область ограниченная спрямляемой кривой (или несколькими такими линиями) заведомо к в а д р и р у е м а т е имеет п л о щ а д и

4. К у б и р у е м а я т р е х м е р н а я О б л а с т ь

<u>Через W обозначим</u> множество объемов многогранников, со держащие

область V, через ω – множество объемов многогранников, все точки которых принадлежат множеству V



Если in fW = supω =U,

то трёхмерная область V называется кубируемой, а число υ называется объёмом трёхмерной область W.

5. Г л а д а к а я п о в е р х н о с т ь – поверхность, в каждой точке которой имеется определённая касательная плоскости положение которой непрерывно изменяется вместе с точкой касания.

Поверхность, состоящая из конечного числа гладких поверхностей, называется кусочно – гладкой.

6. П л о щ а д ь к р и в о й п о в е р х н о с т и

Существуют различные определения площади кривой поверхности. Мы ограничимся рассмотрением наиболее простого определения площади гладкой поверхности.

Пусть δ – гладкая поверхность, ограниченная кусочно гладким контуром.

произвольно фиксируем число δ, а затем произвольно фиксируем δ – разбиение поверхности δ на элементы δ_1, δ_2, δ_3,…, δ_n с помощью сетки кусочно-гладких кривых. В каждой части $\delta_к$ произвольно фиксируем по одной точке $M_к$(K=1,2, … n)

Касательную плоскость к поверхности в точке $M_к$ обозначим через $\tau_к$. Ортогонально спроектировав элемент δк на плоскость $\tau_к$, мы получим фигуру Тк с площадью ΔТк.

Если существует конечный предел S суммы площадей плоских фигур Тк при $\delta \to 0$

$$S = \lim_{\partial \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta Tk ,$$

то поверхность δ называется квадрируемой, а число S – площадью этой поверхности.

Если поверхность δ состоит из конечного числа квадрируемых поверхностей, то она квадрируема и её площадь равна сумме площадей составных элементов.

§ 4. ИНТЕГРАЛЬНАЯ δ – СУММА

Для функций одной, двух и трёх независимых переменных f(x), f(x,y), f(x,y,z) будем пользоваться традиционным обозначением f(p).

Пусть f(p)- функция, заданная в замкнутой ограниченной области B где B

1) либо отрезок оси *ox*;
2) либо область D, принадлежащая плоскости *xoy;*
3) либо трёхмерная область V;
4) либо линия L;
5) либо некоторая поверхность **δ.**

Произвольно фиксируем δ – разбиение область B на подобласти B_1, B_2, …, Bn.

В каждом не подобластей разбиения далее произвольно фиксируем по одной точке, обозначим их соответственно через P_1, P_2, …, P_n и образуем сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)m(B_k) \equiv \underset{B}{S}(f,\delta).$$

С п р е д е л е н и е . Число

$$\underset{B}{S}(f,\delta)$$

называется и н т е г р а л ь н о й **δ** – с у м м о й функции f(P) по область B.

Очиведно, что для фиксированных числа **δ,** функции f(P) и области B существует бесконечное множество интегральных **δ** – сумм.

С учётом возможных истолкованой области B ттаким образом получим пок пять различных интегральных **δ** – сумм; а затем ещё две, которые строятся по одной схеме:

1) $\sum_{k=1}^{n} f(\xi)\Delta X_k \equiv \underset{o}{\overset{b}{S}}(f,\delta), \xi_k -$ координата точки $P_к$, $P_к(\xi_к)$

- и н т е г р а л ь н а я
- **δ** – сумма функции f (x) по отрезку [α, b];

2) $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k\eta_k)\Delta\omega_k \equiv \underset{D}{S}(f,\delta),\ \ P_k(\xi_k\eta_k)$

и н т е г р а л ь н а я **δ** – сумма функции f(x,y) по плоской области D;

3) $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k\eta_k\tau_k)\Delta U_k \equiv \underset{V}{S}(f,\delta),\ \ P_k(\xi_k\eta_k\tau_k)$

- и н т е г р а л ь н а я **δ** -= сумма функции f(x,y z) по трёхмерной области V;

$$4)\ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k\eta_k\tau_k)\Delta\ell_k \equiv \underset{L}{S}(f,\delta),\ \ P_k(\xi_k\eta_k\tau_k),$$

- и н т е г р а л ь н а я **δ** – сумма первого рода функции f(x,y z) по линии L;

$$5)\ \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k\eta_k\tau_k)\Delta\delta_k \equiv \underset{\delta}{S}(f,\delta), P_k(\xi_k\eta_k\tau_k),$$

- и н т е г р а л ь н а я **δ** – сумма первого рода функции f(x,y z) по поверхности **δ** .

§ 5. ПОНЯТИЕ ИНТЕГРАЛА

Для определения интеграла предварительно введём понятие придела интегральных **δ** - сумм при **δ** →0.

О п р е д е л е н и е. Число J называется п р и д е л о м интегральных **δ** - сумм $\underset{B}{S}(f,\delta)$ при **δ** →0.

пишут J=$\underset{\delta\to 0}{\ell im}\,\underset{B}{S}(f,\delta)$, если для произвольно фиксированного числа ε>0 существует такое число $\boldsymbol{\delta}_0$, что при **δ** ≤ $\boldsymbol{\delta}_0$ все интегральные **δ** - суммы удовлетворяют неравенству

$$\left|\Im - \underset{B}{S}(f,\delta)\right| \prec \varepsilon.$$

В этом случае говорят, что существует конечный придел интегральных **δ** - сумм при **δ** →0.

В определении понятия придела интегральных **δ** - сумм при **δ** →0 не накладываются ограничения на способы разбиения области B на подобласти и выбора точек в подобластях разбиения. Поэтому само собой подразумевается, что придел J интегральных **δ** -сумм при **δ** →0 но зависит от способов разбиения области B на подобласти $B_к$ и выбора точек $P_к$(K=1,2,…, n) в этих подобластях.

Если при определённых способах разбиения области B на подобласти и выбора точек в этих подобластях интегральные **δ** -сумм при **δ** →0 имеют конечный придел, либо имеют конечный придел, отличный от числа J_1 (такие случаи встречаются), то интегральные -суммы при **δ** →0 не имеют конечного придела в смысле определения, сформулированого выше.

О п р е д е л е н и е и н т е г р а л а . Если существует конечный придел Z интегральных **δ** – сумм при **δ** →0 , то число Z называется и н т е г р а л о м от функции f(p) по области B . При этом говорят, что интеграл от функции f(p) по области B существует или – f(p) интегрируемая по области B.

Интеграл обозначается символом

$$\int_B f(p)\,d\omega\,.$$

С учётом различных реализаций области В таким образом приходим к понятиям определённого, двойного и тройного интегралов, криволинейного и поверхностного интегралов первого рода.

Хотя единый символ

$$\int\limits_B f(p)d\omega$$

и удобен для краткости записи, однако при чтении литературы требует большого напряжения, в особенности мало искушенным в математике, так как постоянно приходится иметь в виду тип интеграла, соответствующего этому символу, реализующему пять различных типов интеграла. Поэтому для обозначения упомянутых выше интегралов применяются специфические символы.

Итак, учитывая различные реализации области В, получим

1) $$\lim_{\delta\to 0} \overset{b}{\underset{\alpha}{S}}(f,\delta) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

- о п р е д е л ё н н ы й и н т е г р а л от функции f (x) в пределах от α до b;

2) $$\lim_{\delta\to 0} \underset{D}{S}(f,\delta) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\omega_k = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} f(x,y)d\omega = \iint\limits_{D} f(p)d\omega$$

- д в о й н о й и н т е г р а л от функции f (x,y) по области D;

3) $$\lim_{\delta\to 0} \underset{V}{S}(f,\delta) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\upsilon_k)\Delta V = \iiint\limits_{V}(x,y,z)dxdy,dz =$$

$$= \iiint\limits_{V} f(p)dV$$

- т р о й н о й и н т е г р а л от функции f (x,y,z) по трёхмерной области V;

4) $$\lim_{\delta\to 0} \underset{L}{S}(f,\delta) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\upsilon_k)\Delta\ell_k = \int\limits_{L} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_{L} f(p)d\ell$$

- к р и в о л и н е й н ы й и н т е г р а л п е р в о г о р о д а от функции f(x,y,z) по кривой L или криволинейный интеграл по дуге;

5)

$$\lim_{\delta\to 0} \underset{\partial}{S}(f,\delta) = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\upsilon_k)\Delta\partial_k = \iint\limits_{L} f(x,y,z)d\partial = \iint\limits_{\partial} f(p)d\partial$$

- поверхностный интеграл первого рода от функции f (x,y,z) по поверхности ∂.

Символом

$$\int\limits_B f(p)d\omega$$

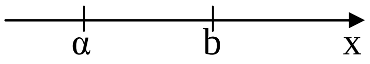
пользуются и тогда, когда интегральные δ – суммы $\underset{B}{S}(f,\delta)$ при $\delta\to 0$ не имеют конечного придела, однако, называя этот символ в этом случае несобственным интегралом.

Для наглядности ещё раз обратимся к схеме построения принятий различных интегралов.

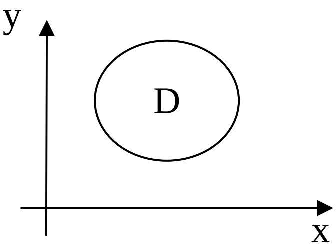
Определённый, двойной и тройной интегралы

№ п/п	Определённый интеграл	Двойной интеграл	Тройной интеграл
		Функция	
1.	f (x)	f(x,y)	f(x,y,z)

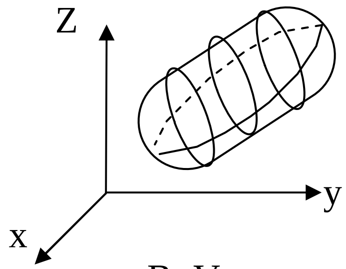
2. **Область интегрирования**



B=[α,b]

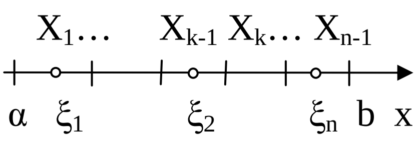


B=D

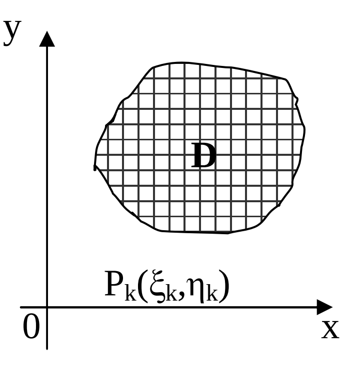


B=V

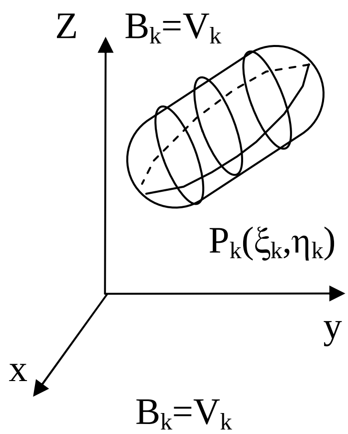
3. Произвольно фиксируем δ – разбиение области B на подобласти $B_1, B_2, \ldots B_n$ и в каждой подобласти фиксируем по одной точке $P_к$(К=1,2,…,n)



$B_k = [X_{k-1}, X_k]$



$B_k=D_k$



$B_k=V_k$

4. Составляем интегральную δ – сумму		
$\underset{\alpha}{\overset{b}{S}}(f,\delta)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta X_k$	$\underset{D}{S}(f,\delta)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\omega_k$	$\underset{V}{S}(f,\delta)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k\tau_k)\Delta\omega_k$

5. Определение интеграла. Если сущестсует конечный предел J интегральных δ – сумм

$\underset{a}{S}(f,\delta)$ при δ→0 $\left[\Im=\lim\limits_{\delta\to 0} S(f,\delta)\right]$

$$\Im_1=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta X_k \qquad \Im_2=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k\eta_k)\Delta V_k$$

$$\Im_3=\lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k\eta_k\tau_k)\Delta U_k$$

то число J называется интегралом от функции f (P) по области

В $\left[\Im=\int\limits_B f(p)d\omega\right]$

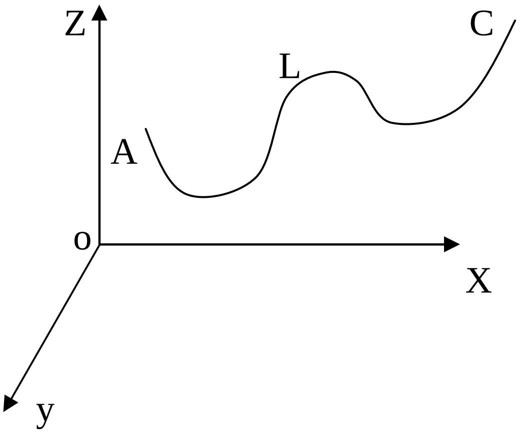
Число $\Im_1$ называется *определённым* интегралом от функции f(x) по отрезку [α,b] и обозначается символом $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$	Число $\Im_2$ называется *двойным* интегралом от функции f(x,y) по области D и обозначается – $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$ $\iint\limits_D f(x,y)d\omega$	Число $\Im_3$ называется *тройным* интегралом от функции f(x,y,z) по области V и обозначается – $\iiint\limits_V f(x,y,z)dv\equiv$ $\equiv\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$

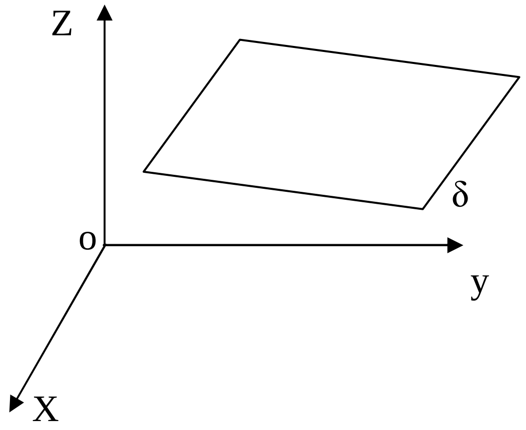
Как сказано выше понятия криволинейных и поверхностных интегралов строятся по той же схеме. Остаётся только заняться повторением, что весьма полезно для длительного запоминания.

Криволинейный и поверхностный интегралы первого рода

№ п/п	Криволинейный интеграл первого рода	Поверхностный интеграл первого рода
1.	Функция	
	f (x,y,z)	f (x,y,z)

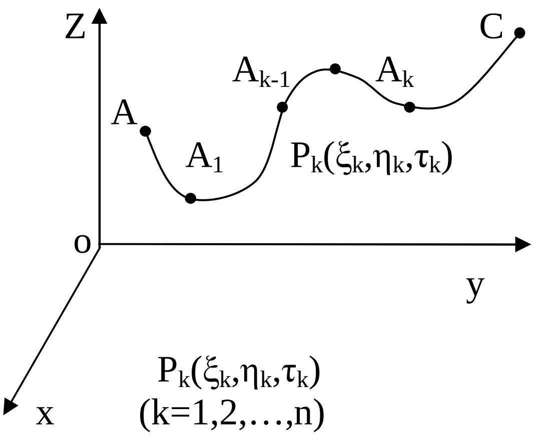
2. О б л а с т ь и н т е г р и р о в а н и я

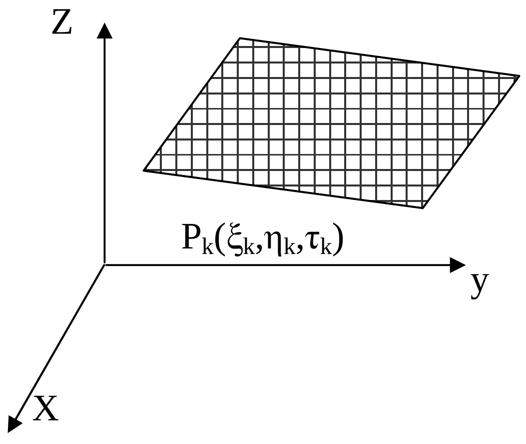




3. Произвольно фиксируем δ- разбиение области B на подобласти $B_1, B_2, \ldots, B_n$ и в каждой подобласти фиксируем по одной точек

4.





4. Составляем интегральную δ – сумму $S_B(f,\delta)$ от функции f (p) по области B

$$\underset{B}{S}(f,\delta)=\sum_{k=1}^{n} f(p_k)m(B_k)$$

$$\underset{B}{S}(f,\delta)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)\Delta\ell k,$$

где $\Delta\ell$к – длина дуги

$\overset{\frown}{A_{к-1}\ A_к}$

$$\underset{B}{S}(f,\delta)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)\Delta\delta k,$$

где $\Delta\delta$к – площадь поверхности δк

5. Определение интеграла. Если существует конечный придел $\Im$ интегральной δ – суммы при δ→0 $\left[\Im = \lim_{\delta\to 0} S(f,\delta)\right]$,

$$\Im_4 = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)\Delta\ell k, \qquad \Im_5 = \lim_{\delta\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\tau_k)\Delta\delta k$$

то число $\Im$ называется интегралом функции f(p) по области B.

Число $\Im_4$ называется криволинейным интегралом первого рода от функции f (x,y,z) по кривой L	Число $\Im_5$ называется поверхностным интегралом первого рода от функции f (x,y,z) по поверхности δ

$$\Im_4 = \int_L f(x,y,z)d\ell \qquad\qquad \Im_5 = \iint_\delta f(x,y,z)d\delta$$

§6. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ОППРЕДЕЛЁННОГО, ДВОЙНОГО И ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛОВ

Определённый	Двойной	Тройной
	интеграл	
$\int_\alpha^b f(x)dx$	$\iint_D f(x,y)d\omega$	$\iiint_V f(x,y,z)dV$
	существует, если функция	
f(x)	f(x,y,z)	f(x,y,z)
	непрерывна в области	
на отрезке [α,b]	D*)	V*)

Легко заметить, что теоремы существования определённого, двойного и тройного интегралов можно сформулировать в виде одного предложения:

Определённый, двойной и тройной интегралы существуют, если подинтегральные функции непрерывны в соответствующих областях интегрирования.

Или в другой форме:

Если функция f(p) непрерывна в области B то

*) ранее сказано, что D и V - замкнутые ограниченные области.

в случаях 1) B=[α,b] 2) B=D 3) B=V интеграл

$$\int_B f(P)d\omega$$

существует.

Напомним, что существование интегральных δ – сумм при δ→0.

Т е о р е м ы с у щ е с т в о в а н и я криволинейного и поверхностного интегралов первого рода.

Интегралы

$$\int_L f(x,y,z)d\ell, \qquad \iint_\delta \Phi(x,y,z)d\delta$$

существуют, если функции f (P) δ и Φ (P) непрерывны соответственно в гладких областях L и δ.

§ 7. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ

Ранее доказывались свойства определённого интеграла *) ;

а) $\int_\alpha^B [C_1 f(x) + C_2\varphi(x)]dx = C_1\int_\alpha^B f(x)dx + C_2\int_\alpha^B \varphi(x)dx$

где C_1 и C_2 – постоянные;

в) $\int_\alpha^B f(x)dx + \int_\alpha^B f(x)dx = \int_\alpha^B f(x)dx;$

с) $\int_\alpha^B f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-\alpha);$ $\qquad \alpha < \xi < b.$

д) $\left|\int_\alpha^B f(x)dx\right| \le \int_\alpha^b |f(x)|dx$ $\qquad (\alpha < b);$

*) Предполагается, что все встречающиеся в данном параграфе интегралы существуют.

е) $f(x) \le \varphi(x) \forall x \in [a,b], mo \int_\alpha^B f(x)dx \le \int_\alpha^B \varphi(x)dx,$

т.с. неравенство можно интегрировать (a<b).

Аналогичные свойства имеют место и для других, упомянутых выше, интегралов. Эти свойства различных интегралов ниже записываются в общей формуле, а под символом.

$$\int_B f(p)d\omega$$

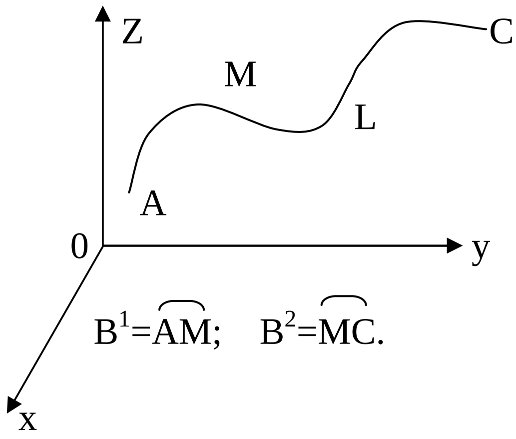
понимается один фиксированный тип интеграла: либо двойной, либо тройной, либо криволинейный, либо поверхностный, либо определённый.

1) Свойство л и н е й н о с т и. Если C_1 и C_2 – постоянные, то

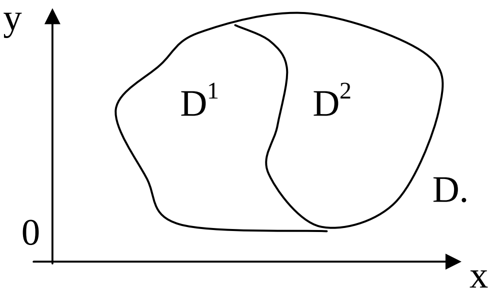
$$\int_B [C_1 f(p) + C_2\varphi(p)]d\omega = C_1\int_B f(p)d\omega + C_2\int_B \varphi(p)d\omega$$

2) Свойство аддитивности. Пусть область B разбита на два элемента B^1, B^2, которые имеют общими только граничные точки $[m(B^1 n B^2)=0]$. Реализациями этого разбиения являются:

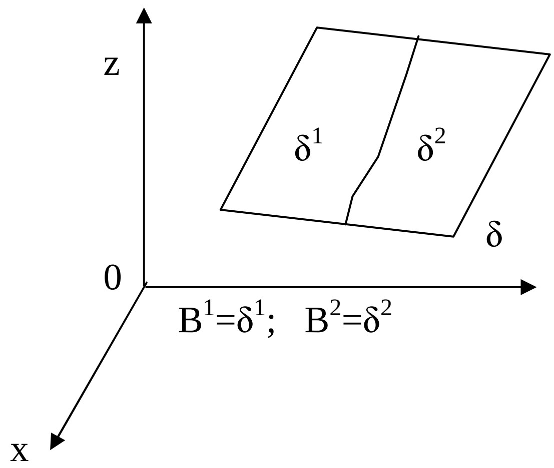
$B^1=[a,c]$, $B^2=[c,b]$.



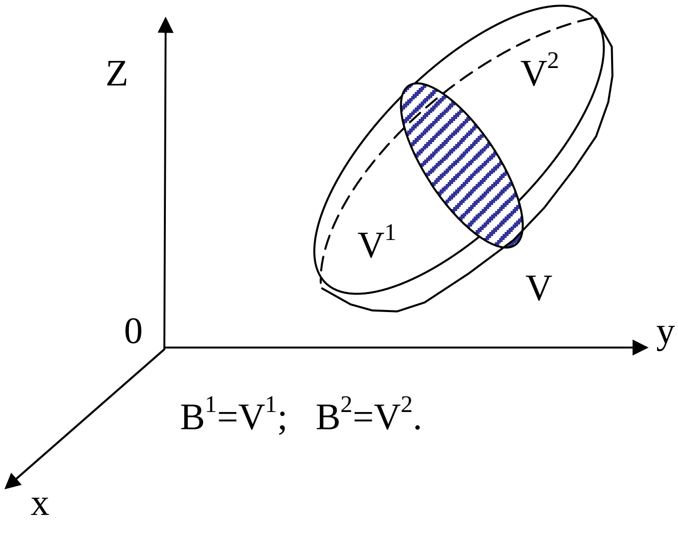
$B^1=\overset{\frown}{AM}$; $B^2=\overset{\frown}{MC}$.



$B^1=D^1$; $B^2=D^2$



$B^1=\delta^1$; $B^2=\delta^2$



$B^1=V^1$; $B^2=V^2$.

Тогда имеет место равенство

$$\int\limits_{B^1} f(p)d\omega + \int\limits_{B^2} f(p)d\omega = \int\limits_{B} f(p)d\omega.$$

3) Теорема о с р е д н е м значении. Если функция непрерывна в области B, то

$$\int\limits_{B} f(p)d\omega = f(Q)\cdot m(B),$$

где Q – некоторая точка области B.

4) $\left|\int\limits_{B} f(p)d\omega\right| \le \int\limits_{B} |f(p)|d\omega.$

5) Если для всех $P\in B$ имеет место неравенство

$$f(p)\le \phi(p), \text{ то } \int f(p)d\omega \le \int \varphi(p)d\omega$$

т.е. неравенство можно интегрировать.

Все эти свойства доказываются также, как и соответствующие свойства определённого интеграла.

Пусть фиксировано δ – разбиение области B на элементы $B_к$(к=1,2,…,n) и в каждом элементе $B_к$ фиксирована точка $P_к$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \left[C_1 f(P_k) + C_2\varphi(P_k)\right]m(B_k) = C_1\sum_{k=1}^{n} f(P_k)m(B_k) + C_2\sum_{k=1}^{n} \varphi(P_k)m(B_k)$$

или

$$\left(C_1 f + C_2\varphi, \delta\right) = C_1 \underset{B}{S}(f,\delta) + C_2 \underset{B}{S}(\varphi,\delta) \tag{1}$$

или

$$\left|\underset{B}{S}(f,\delta)\right| \le \underset{B}{S}(|f|,\delta); \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)m(B_k) \le \sum_{k=1}^{n} \varphi(P_k)m(B_k), \underset{B}{S}(f,\delta) \le \underset{B}{S}(\varphi,\delta) \tag{3}$$

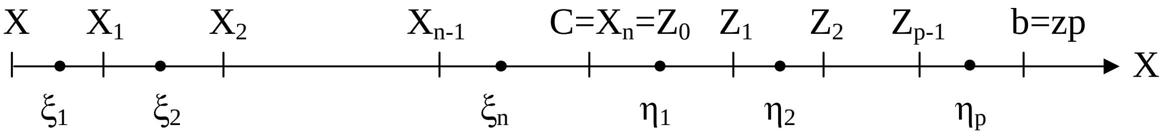
если

$$f(p)\le\varphi(p), P\in B$$

Переходя к пределу при δ→0 в равенстве (1) и в не- равенствах (2) и (3), получим свойства 1), 4), 5).

Доказательство свойства 2). В начале напомним доказательство этого свойства для определённого интеграла.

Рассмотрим только δ – разбиения, для которых точка «С» заведомо является точкой разбиения.



$P_к=\xi_к$ при $к\leq n$; $P_{n+i}=\eta_i$; $m(B_k)=X_k-X_{k-1}$ пр
$m(B_{n+i})=Z_i-Z_{i-1}$

Тогда

$$\sum_{q=1}^{n+p} f(Pq)m(Bq)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta X_k+\sum_{i=1}^{p} f(\eta_i)\Delta Zi$$

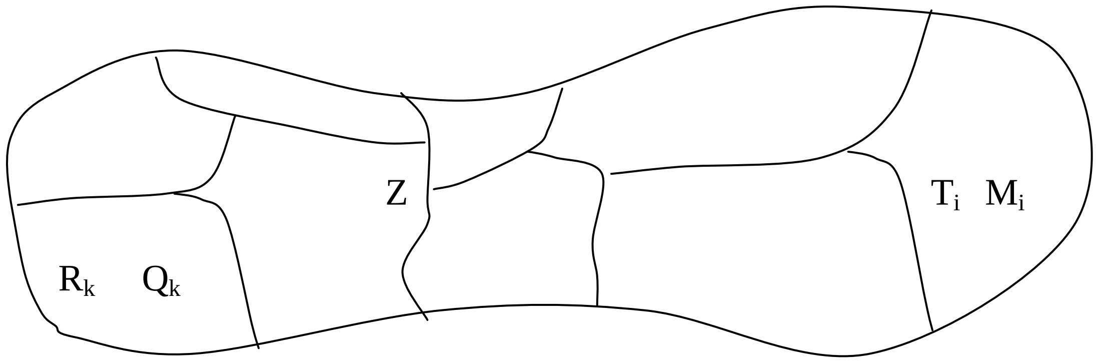
Слева мы имеет интегральную δ – сумму от функции f(x),
а справа сумму интегральных δ - сумм от функции f(x) ссоответственно по отрезкам [a,b] и [c,b]. Переходя к при делу в этом равенстве при $\delta\to 0$, получим

$$\int_{\alpha}^{b} f(x)dx=\int_{\alpha}^{c} f(x)dx=\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Рассмотрим теперь общий случай.
Пусть область В разбита на две подобласти B^1, B^2 некоторым объектом *Z* так, что они имеют общими только граничные точки. Обратите внимание на рисунки. Вы видите, что об Z либо линия, либо точка, либо поверхность.

Далле будем рассматривать только такие δ – разбиения когда сетка разбиения заведомо содержит объект Z.

Для наглядности представим это схематично:



Пусть при этом δ – разбиении область B^1 разбивается на элементы $R_1,R_2,\ldots,R_n$, а B^2 на $T_1, T_2, \ldots, T_n$ фиксируем в R_k и T_i соответственно точки Q_k и M_i

Введём обозначения

$R_k=R_k$, $Q_k=P_k$ (k=1,2,…,n)

$T_i=B_{n+I}$, $M_i=P_{n+i}$ (i=1,2…,p)

Тогда интегральная δ – сумма функции f(p) по области В представится в виде

$$\sum_{k=1}^{n+p} f(P_k)m(B_k)=\sum_{k=1}^{n} f(Q_k)m(R_k)+\sum_{i=1}^{p} f(M_i)m(T_i)$$

$S_B(f,\delta)=S_B{}^1(f,\delta)+S_B{}^2(f,\delta)$.

Переходя в этом равенстве к пределу (при $\delta \to 0$), получил свойство 2).

§ 8.СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Методы вычисления интегралов

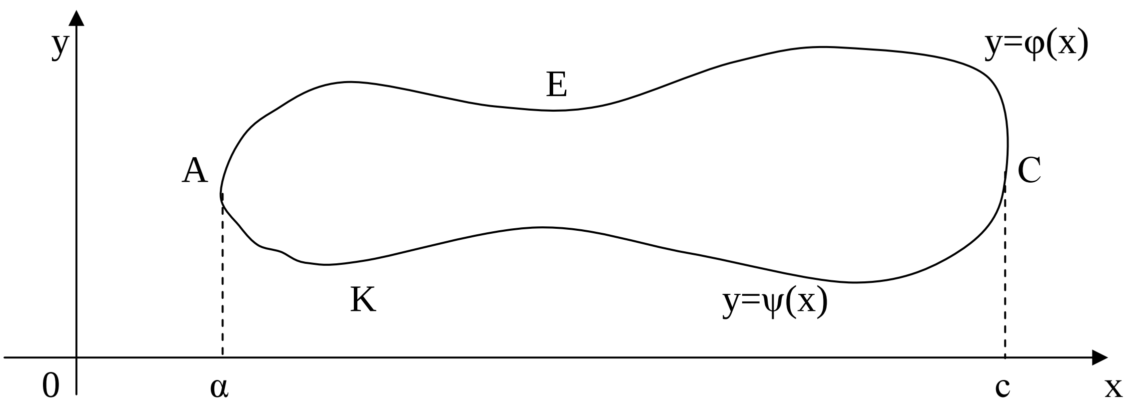
1) Криволинейный интеграл. Пусть линия L задана уравнением в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \mu(t) \end{cases} \quad t_o \le t \le t_1,$$

где φ(t), ψ(t), μ(t)- непрерывно дифференцируемые функции, причём, точка А соответствует значению параметра $t=t_o$, для точки С имеем $t=t_1$. Тогда

$$f(x,y,z)d\ell = \int_{t_o}^{t_1} f[\varphi(t), \psi(t), \mu(t)] \sqrt{\varphi^1(t)^2 + \psi^1(t)^2 + \mu^1(t)^2}\, dt$$

2) Двойной интеграл. Предположим, что любая прямая, параллельная оси ***оу*** пересекает контур области D интегрирования не более, чем в двух точках. Пусть [а,с] проекция области интегрирования на ось ***ох***



Пусть линии $\overset{\frown}{ACE}$ и $\overset{\frown}{AKC}$ имеет соответственно уравнения y=φ(x) и y=ψ(x).

Тогда

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{\alpha}^{b} dx \int_{\psi(k)}^{\varphi(k)} f(x,y)dy$$

Считая x постоянной, находим первообразную F(x,y) для функции f(x,y) $[F^1_y(x,y)=f(x,y)]$.

Тогда

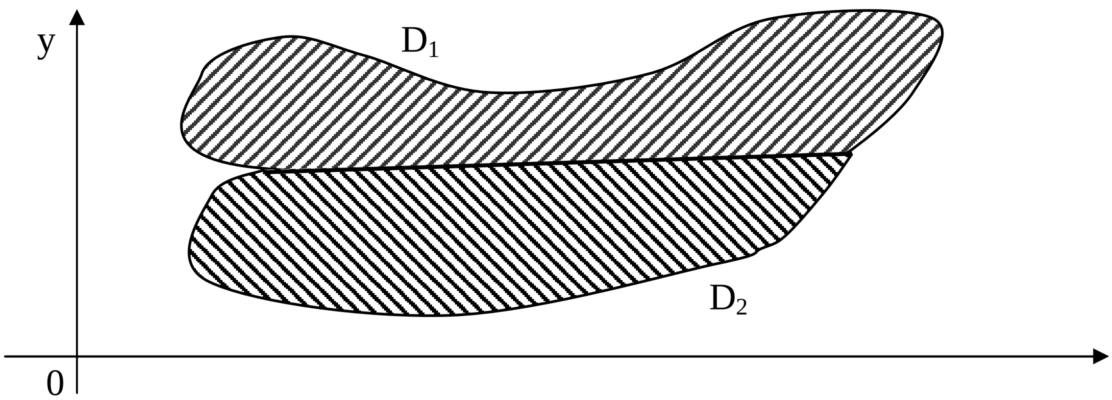
$$\int\limits_{\psi_{(x)}}^{\varphi_{(x)}} f(x,y)dy = F[x,\varphi_{(x)}] - F[x,\psi_{(x)}] \equiv \Phi_{(x)}$$

Затем находим первообразную $\psi_{(x)}$ для функции $\Phi_{(x)}$

Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \psi(b) - \psi(\alpha)$$

Общий случай области интегрирования с помощью разбиения области интегрирования приводится к сумме интегралов рассмотренного выше вида.



П е р е х о д к п о л я р н ы м к о о р д и н а т а м

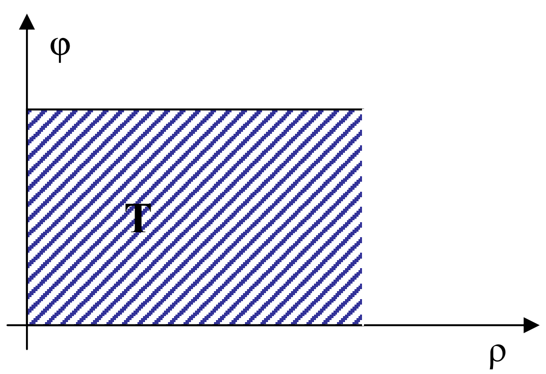
Если функции $\varphi_{(x)}$ и $\psi_{(x)}$ явно не определяются или в случае, когда первообразная для функции f(x,y) не выражается в виде элементарной функции, то следует попробовать использовать этот метод (переход и полярным координатам).

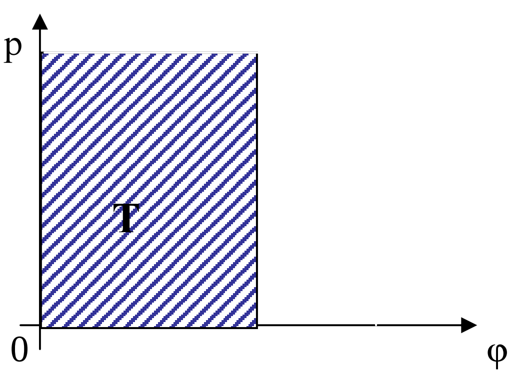
Преобразование

$x=\rho\cos\varphi \quad 0\le\rho<+\infty$

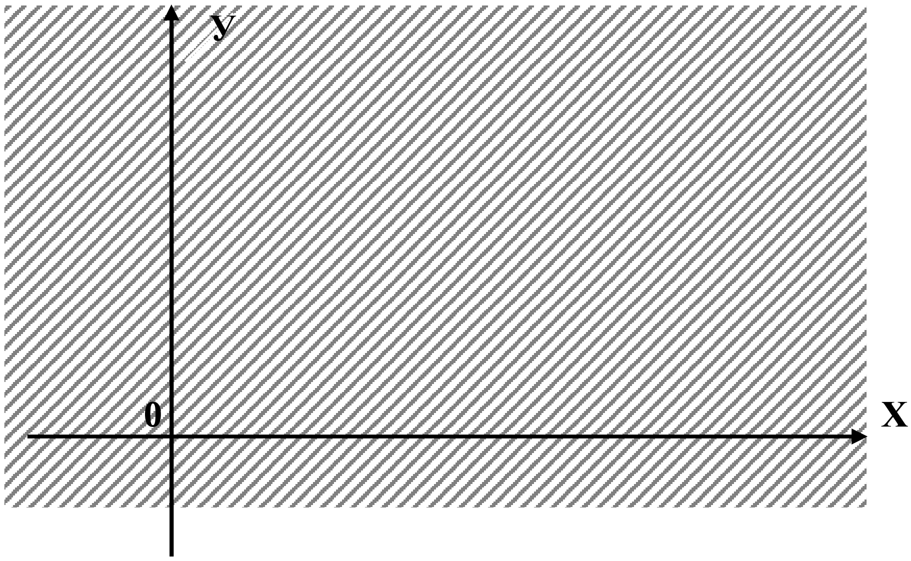
$y=\rho\sin\varphi \quad 0\le\varphi\le2\pi$

отображает полосу T



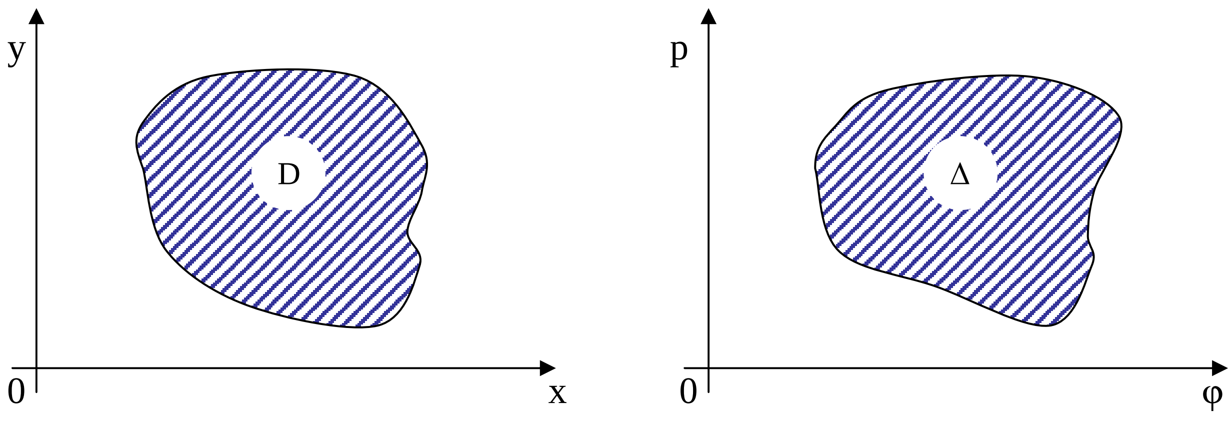


на всю плоскость *XOY*,



Это отображение взаимно однозначно всюду, кроме границы полосы Т и положительной полуоси *OX*.

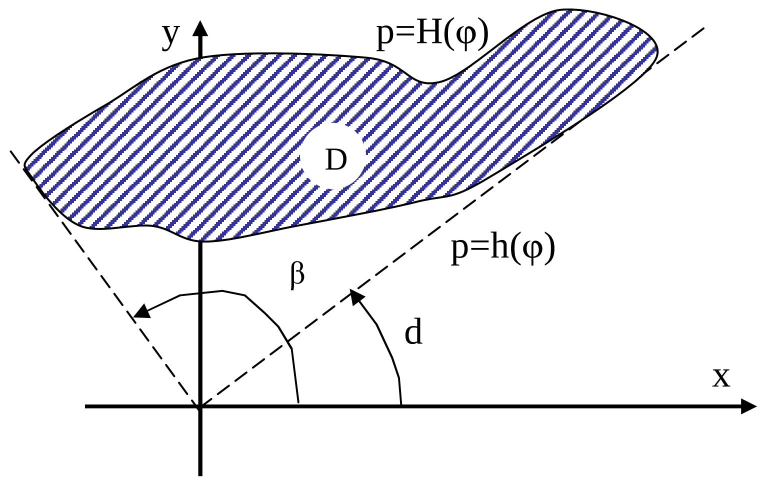
Пусть это преобразование отображает область D плоскость *xoy* в область Δ плоскости rоφ.

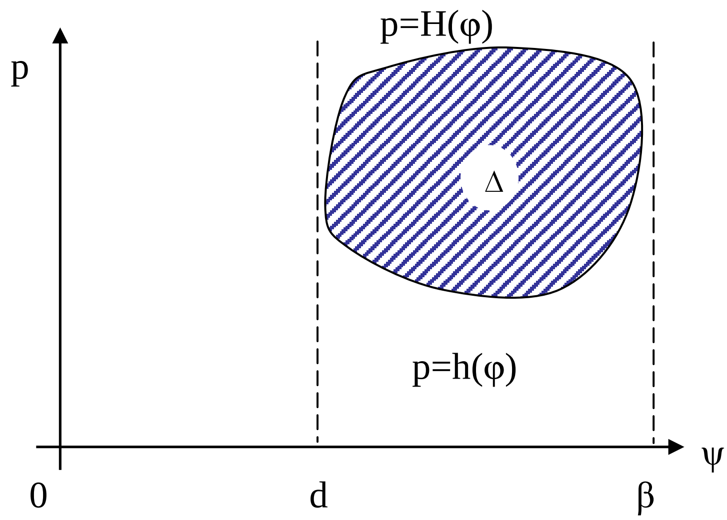


Тогда

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f\left[p\cos\varphi, p\sin\varphi\right]pdpd\varphi$$

Если область интегрирования имеет вид, изображённый ниже,

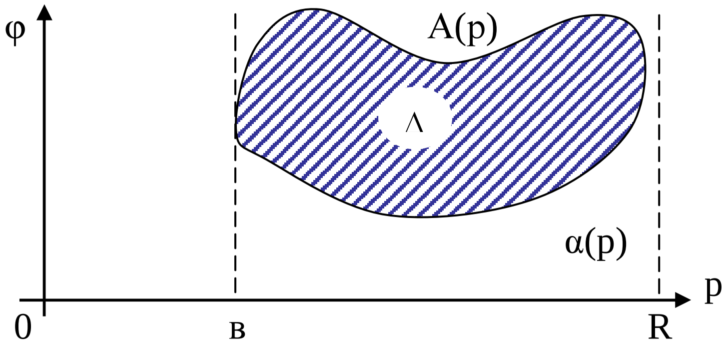




то

$$\iint\limits_D f(x,y)d\omega = \int\limits_d^\beta d\varphi \int\limits_{h(\varphi)}^{H(\varphi)} f\left[p\cos\varphi, p\sin\varphi\right]pdp$$

Если для границы области Δ известны функции A(p), α(p),



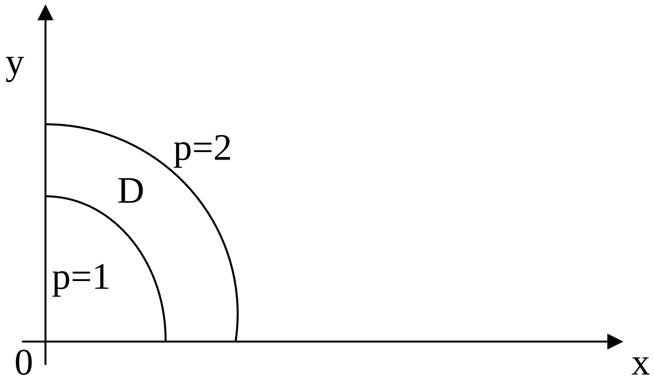
то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_{D} f(x,y)d\omega = \int\limits_{r}^{R} dp \int\limits_{\alpha}^{A} \int\limits_{(p)}^{(p)} f\left[p\cos\varphi, p\sin\varphi\right]pd\varphi$$

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{D} \ell^{X^2+y^2} dxdy$$

по области D.



В данном случае первообразная для подынтегральной функции не выражается в виде элементарной функции (как по переменной x так и по переменной y).

Переходя к полярный координатам, получим

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{o}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{1}^{2} e^{p^2} pdp = \frac{\pi}{4}\left(e^4 - e\right).$$

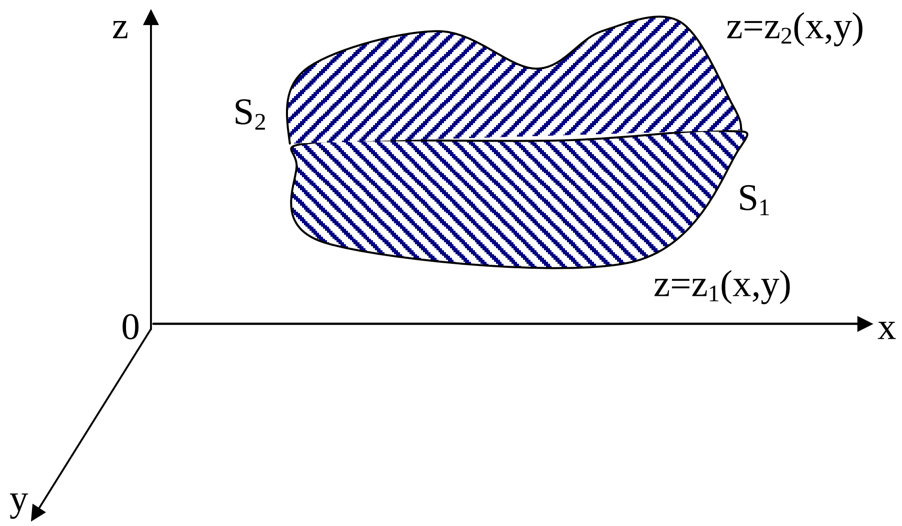
3) Т р о й н о й   и н т е г р а л

Предположим, что всякая прямая, параллельная оси OZ пересекает трёхмерную область V не более, чем в двух точках.

Через D обозначим проекцию области V на плоскость хоу.

Цилиндрическая поверхность, направляющей кривой которой служит граница области D а образующие параллельный оси OZ разбивает границу области V на две части S_1 и S_2

Предположим, что поверхности S_1 и S_2 представляются с ответственно уравнениями $z=z_1(x,y)$,$z=z_2(x,y)$.



Тогда

$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

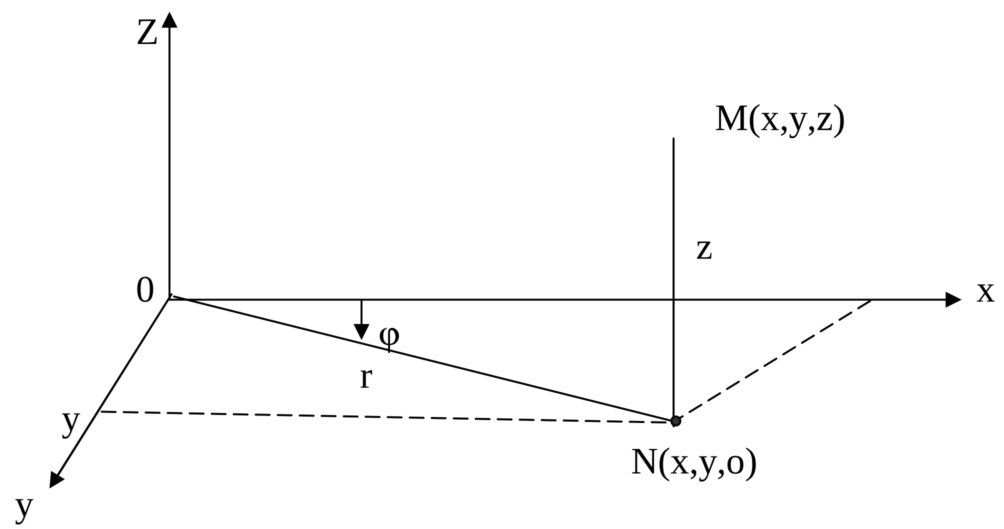
Таким образом, вычисление тройного интеграла приводится к вычислению двойного интеграла.

Переход к цилиндрическим координатам

Положение точки M(x,y,z) а пространстве однозначно определяется заданием трёх чисел M на плоскость xoy,

φ – угол, образованный этим радиусом-вектором с осью OX,

Z – аппликата точки M.

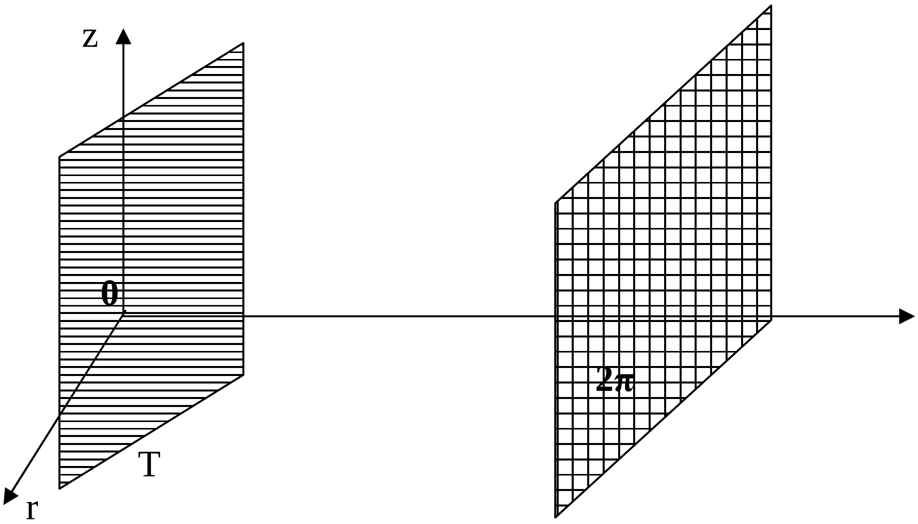


Число r,φ называется цилиндрическим координатоми точки M. Декартовые и цилиндрические координаты точки M связаны следующими соотношениями:

x=rcos φ; y=r sinφ; z=я

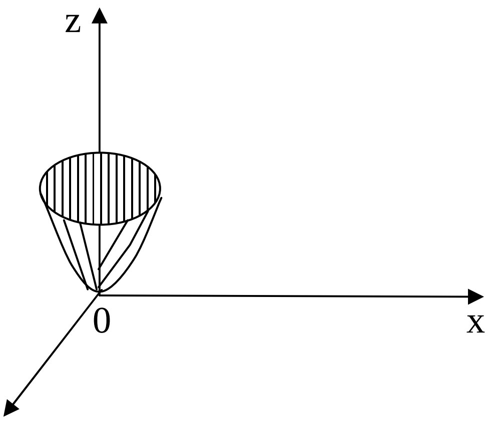
$0<r<+\infty$; $0 \le \varphi \le 2\pi$ $-\infty<r<+\infty$ (F).

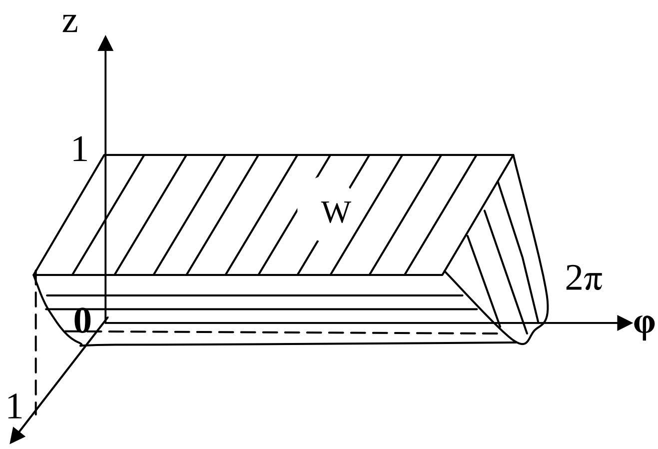
Через T обозначим полосу, заключённую между плоскостями $\varphi=0$; $\varphi=2\pi$ пространства $r\varphi z$.



Преобразование (F) отображает полосу T пространства $r\varphi z$ на все пространство xyz, причём за исключением границы полосы T взаимнооднозначно.

Если это преобразование отображает область V пространства xyz в область W пространства $r\varphi z$, то





f(x,y,z)dxdydz = $\iiint\limits_W f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dz\,d\varphi\,dr$

Пример. Вычислить объём U тела V ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2$; $z=1$.

После перехода к цилиндрическим координатам, получим

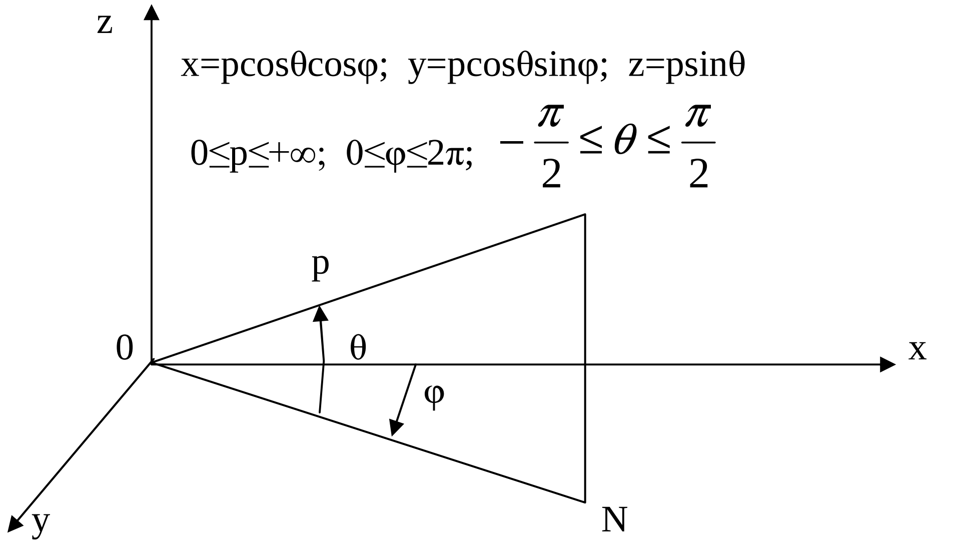
$0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le r \le 1$; $p^2 \le z \le 1$.

$$\upsilon = \iiint\limits_V dxdydz = \iiint\limits_W r\,d\varphi\,dz\,dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_r^1 dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1$$

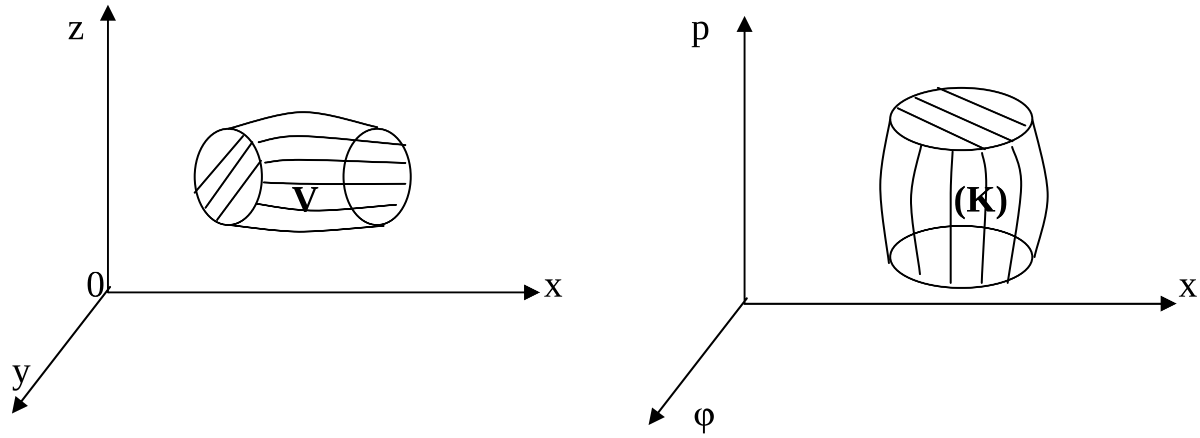
Переход к сферическим координатам

x=pcosθcosφ; y=pcosθsinφ; z=psinθ

$0 \le p \le +\infty$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$



Если преобразование (F) отображает область V пространства xyz в область (K) пространства pφθ, то



$$\iiint\limits_{V} (x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(K)} f(p\cos\theta\cos\varphi, p\cos\theta\sin\varphi, p\sin\varphi)p^2\cos\theta dp d\varphi$$

Поверхностный интеграл первого рода

Предположим, что

1) поверхность δ представляется уравнением z=φ(x,y), где функция φ(x,y) и её частный производный $\varphi^1{}_x(x,y)$, $\varphi^1{}_y(x,y)$ непрерывны в замкнутой ограниченной области D- проекции поверхности δ на плоскость xoy

2) функция F(x,y,z) непрерывна на поверхности δ, Тогда

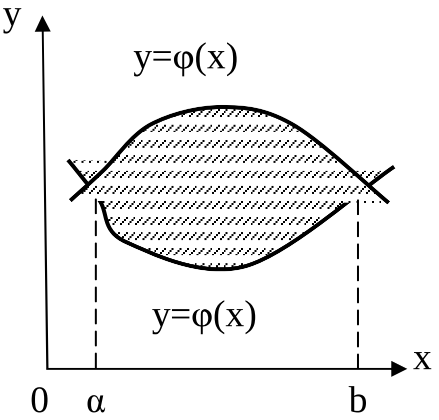
$$\iint\limits_{\delta} F(x,y,z)d\delta = \iint\limits_{D} F[x,y,\varphi(x,y)]\sqrt{1+\varphi_x^1(x,y)^2+\varphi_y^1(x,y)^2}\,dxdy$$

последователъно, вычисление поверхностного интеграла первого рода приводится к вычислению соответствующего двойного интеграла по проекции поверхности δ на плоскости оху

II. Некоторые приложения интегралов

1

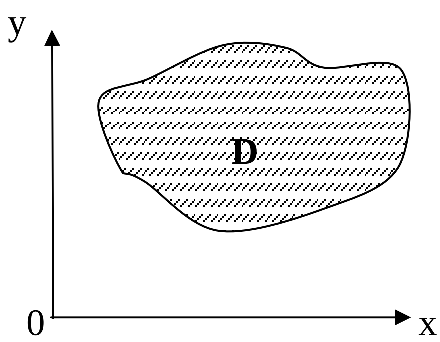
Определённый интеграл



$$S=\int_{\alpha}^{b}\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]dx$$

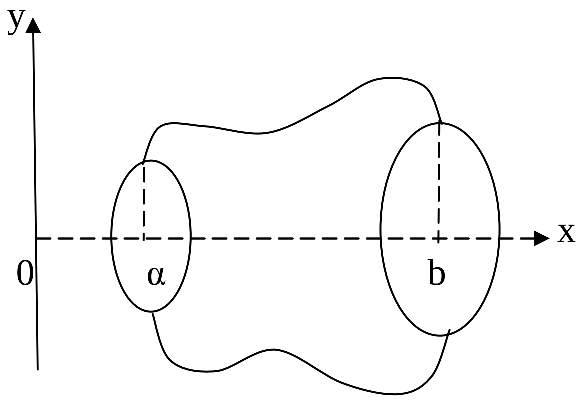
Двойной интеграл

Площадь



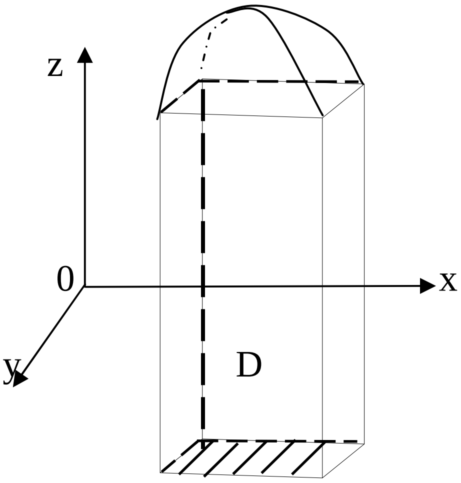
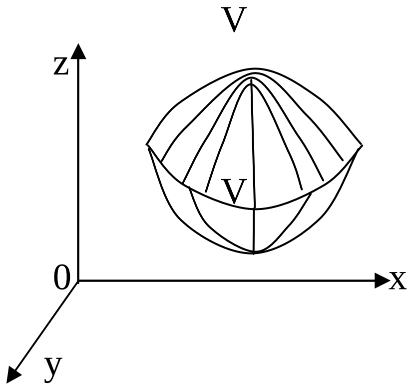
$$S=\iint_{D} dxdy$$

Площадь боковой поверхности тела вращения



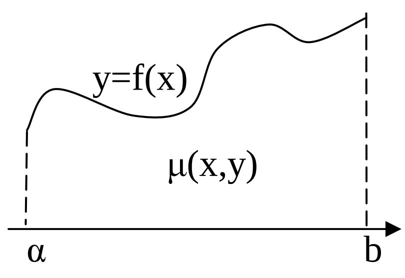
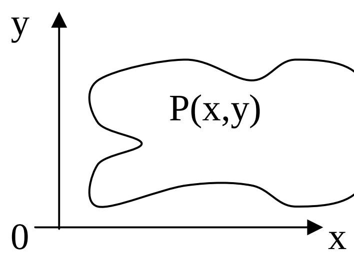
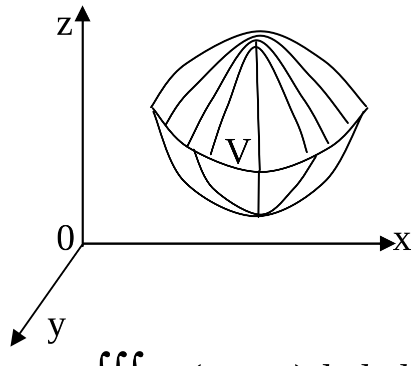
$$S=2\pi\int_{\alpha}^{b} f(x)\sqrt{1+f(x)^2}\,dx$$

О б ъ ё м

тела вращения	цилиндра z=f(x,y)	тела
$$\upsilon=\pi\int_{\alpha}^{b}[f(x)]^2dx$$	 $$\upsilon=\iint_D f(x,y)dxdy$$	 $$\upsilon=\iiint_V dxdydz$$

По заданной И(P) распределения масс в область B определить массу этой области.

Отрезка	Плоская фигура D с плотность μ(x,y) в точке P (x,y)	Тела V с плотность μ(x,y,z) в точке P(x,y,z)
 с плотностью μ(x)		

 кривой с плотностью μ(x,y) в точке P (x,y) $\mu[x,f(x)]\sqrt{1+f^1(x)^2}dx$	 $$m_2=\iint_D \mu(x,y)dxdy$$	 $$m_3=\iiint_V \mu(x,y,z)dxdydz$$

С т а т и ч е с к и е   м о м е н т ы   относительно координатных плоскостей и координаты центра тяжести

отрезка [α,b] оси ох	плоская фигуры D	тела V
$T_{yz}=T_x=\int_a^b x\mu(x)dx$ $x_c=\dfrac{T_x}{m_1}$ кривой y=f(x),z=0 α≤x≤b $T_x=\int_a^b x\mu[x,f(x)]\sqrt{1+f^1(x)^2}\,dx$ $T_{xz}=\int_a^b y\mu\sqrt{1+f^1(x)^2}\,dx$ $x_c=\dfrac{T_x}{m_3}$; $y_c=\dfrac{T_y}{m_4}$	$T_x=\iint_D x\mu(x,y)dxdy$ $T_y=\iint_D y\mu dxdy$ $X_c=\dfrac{T_x}{m_2}$ $y_c=\dfrac{T_y}{m_2}$	$T_x=\iiint_V x\mu(x,y,z)d\upsilon_1$ $T_y=\iiint_V y\mu d\upsilon_2$ $T_z=\iiint_V z\mu d\upsilon_1$ $X_c=\dfrac{T_x}{m_3}$; $y_c=\dfrac{T_y}{m_3}$; $Z_c=\dfrac{T_z}{m_3}$

Моменты инерции относительно координатных осей, плоскостей и начала координат.

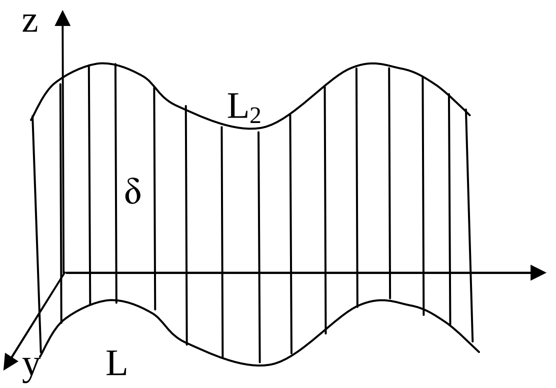
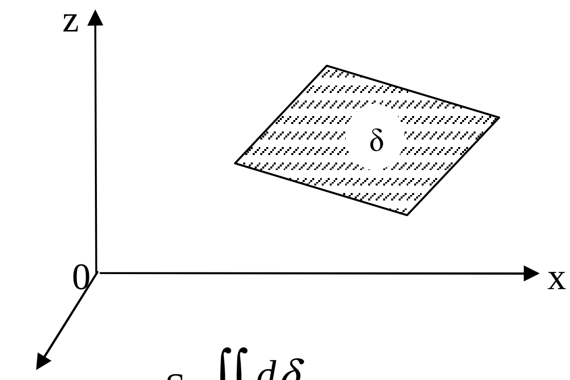
отрезка [α,b] оси	плоская фигуры D	трёхмерной области
$J_x=0$; $J_y=J_z=J_o=$ $=\int_a^b x^2\mu(x)dx$ кривой y=f(x); z=0 α≤x≤b $J_x=\int_a^b y^2\mu\sqrt{1+(y^1)^2}\,dx$ $J_y=\int_a^b x^2\mu\sqrt{1+(y^1)^2}\,dx$ $J_z=0$; $J_{xy}=0$ $J_{xz}=J_x$; $J_{yz}=J_y$, $J_o=J_x+J_y$	$J_x=\iint_D y^2\mu dxdy$ $J_y=\iint_D x^2\mu dxdy$ $J_z=0$; $J_{xy}=0$ $J_{xz}=J_x$; $J_{yz}=J_y$, $J_o=J_x+J_y$	$J_x=\iiint_V (y^2+y^2)\mu d$ $J_y=\iiint_V (x^2+z^2)\mu d$ $J_z=\iiint_V (x^2+z^2)\mu d$ $J_o=\sum^4 (J_x+J_y+J_z)$ $J_{xy}=\iiint_V z^2\mu d\upsilon$ $J_{xz}=\iiint_V y^2\mu d\upsilon$ $J_{yz}=\iiint_V x^2\mu d\upsilon$

Ф и з и ч е с к о е   з н а ч е н и е   м о м е н т а   и н е р ц и и массы, распределённой по объёму или по поверхности, или по дуге.

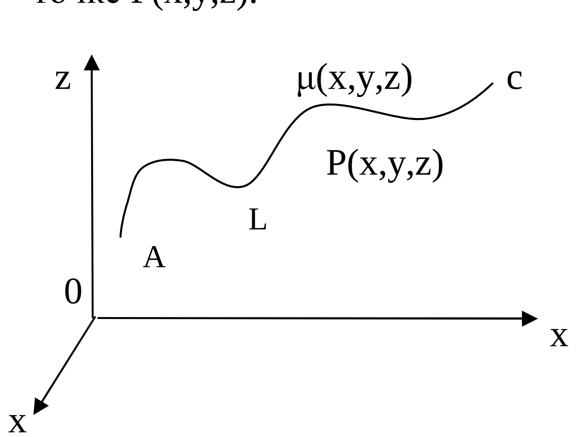
Кинетическая инерция тела, вращающегося равномерно вокруг оси, равно половине промеведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

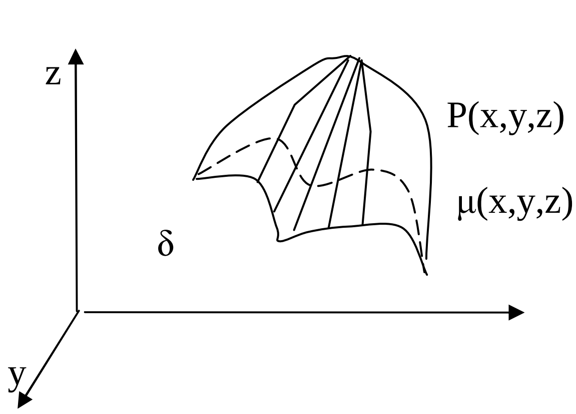
Следовательно, при вращательном движении момент инерции играет такую же роль как масса в поступательном движении.

II

Криволинейный интеграл по дуге	Поверхностный интеграл первого рода
Длина дуги $\ell = \int_L d\ell$	
Площадь	
S цилиндрической поверхности δ с образующим, параллельными оси OZ снизу ограниченной линией L плоскости *xoy* , а сверху – линией L_2 z=f(x,y)≥0, когда точка P(x,y,o) пробегает всю линию L  S=$\int_L f(x,y)\,d\ell$	поверхности δ  S=$\iint_\delta d\delta$ Если поверхность δ представляется уравнением z=f(x,y); P(x,y) Є B то S=$\iint_D \sqrt{1+f_x^{'}(x,y)^2+f_y^{'}(x,y)}d\delta$

Определить массу, если известна плотность μ(x,y,z) распределения массы в точке P(x,y,z).





$$m_4 = \int_L \mu(x,y,z)d\ell \qquad\qquad m_5 = \iint_\delta \mu(x,y,z)d\delta$$

Статические моменты относительно координатных плоскостей и координаты центра тяжести

дуги L с плотностью μ(x,y,z)

$$T_x = \int_L x\mu(x,y,z)d\ell$$

$$T_y = \int_L y\mu(x,y,z)d\ell$$

$$T_z = \int_L z\mu(x,y,z)d\ell$$

$$x_c = \frac{1}{m_4}T_x; \qquad y_c = \frac{1}{m_4}T_y;$$

$$z_c = \frac{1}{m_4}T_z;$$

Первая теорема. Глюьдена: площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг некоторой не пересекающей её оси, равно длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести кривой

$$S_{bp} = \ell \cdot 2\pi r$$

поверхности δ с плотностью μ(x,y,z)

$$T_x = \iint_\delta x\mu(x,y,z)d\delta;$$

$$T_y = \iint_\delta y\mu(x,y,z)d\delta;$$

$$T_z = \iint_\delta z\mu(x,y,z)d\delta;$$

$$x_c = \frac{1}{m_5}T_x; \quad y_c = \frac{1}{m_5}T_y;$$

$$z_c = \frac{1}{m_5}T_z;$$

Пусть δ=D – плоская область.

Вторая теорема Глюьдена: объём тела, образованного вращением плоской фигуры D вокруг некоторой не пересекающей её оси равен площади этой фигуры, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры D

$$V = S \cdot 2\pi r$$

М о м е н т ы   и н е р ц и и

$$J_x = \int_L (y^2+z^2)\mu d\ell \qquad\qquad J_x = \iint_\delta (y^2+z^2)\mu d\delta$$

$$J_y = \int_L (z^2+x^2)\mu d\ell \qquad\qquad J_y = \iint_\delta (z^2+x^2)\mu d\delta$$

$$J_z = \int_L (x^2+y^2)\mu d\ell \qquad\qquad J_z = \iint_\delta (x^2+y^2)\mu d\delta$$

$$J_c = \int_L (x^2+y^2)\mu d\ell \qquad\qquad J_c = \iint_\delta (x^2+y^2+z^2)\mu d\delta$$

$$J_{xy}=\int_L z^2\mu d\ell$$
$$J_{yz}=\int_L x^2\mu d\ell$$
$$J_{zx}=\int_L y^2\mu d\ell$$

$$J_{xy}=\iint_\delta z^2\mu d\delta$$
$$J_{yz}=\iint_\delta x^2\mu d\delta$$
$$J_{zx}=\iint_\delta y^2\mu d\delta$$

Сила $\overrightarrow{F}$ =(F_1,F_2,F_3), с которой материальная фигура притягивает единичную массу, помещённую в точке A(α,b,c)$\notin$ B

B=L	B=δ	B=V
$F_1=\int_L k\mu(x,y,z)\frac{x-\alpha}{r^3}d\ell$	$F_1=\iint_\delta k\mu\frac{x-\alpha}{r^3}d\delta$	$F_1=\iiint_V k\mu\frac{x-\alpha}{r^3}d\upsilon$
$F_2=\int_L k\mu\frac{x-\alpha}{r^3}d\ell$	$F_2=\iint_\delta k\mu\frac{x-b}{r^3}d\delta$	$F_2=\iiint_V k\mu\frac{y-b}{r^3}d\upsilon$
$F_3=\int_L k\mu\frac{z-c}{r^3}d\ell$	$F_3=\iint_\delta k\mu\frac{z-c}{r^3}d\delta$	$F_3=\iiint_V k\mu\frac{z-c}{r^3}d\upsilon$

$$r=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ