

**Министерство Высшего и Среднего  
Специального образования Республики  
Узбекистан**

**Бухарский технологический институт пищевой и  
легкой промышленности**

**Кафедра «Механика»**

**Методическое пособие**

**для выполнения расчетно – графических работ  
по теоретической механике**

**Бухара 2010.**

Составитель: Ахмедбаева Х.С.

Методическое пособие предназначено для выполнения расчетно – графических работ по теоретической механике по разделам «Статика», «Кинематика» и «Динамика» по заданиям С-3, К-3, Д-1 для бакалавров, обучающихся по всем направлениям.

/Бухара, Бухарский технологический институт пищевой и легкой промышленности: составители Ахмедбаева Х.С. ,Бухара,2010, 64с./

Методическое пособие выполнено на кафедре «Механика». Утверждено на заседании кафедры (выписка № -4,06,2010 г.)

Рис.35 Библиогр: 5 назв. Печатается по решению научно-методического совета Бухарского технологического института пищевой и легкой промышленности:

(Выписка № \_\_\_\_\_от\_\_\_\_\_)

## Введение

Теоретическая механика играет существенную роль в подготовке бакалавров любых направлений. На основных законах и принципах теоретической механики базируются многие общинженерные дисциплины, такие как сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин, расчет и конструирование машин и аппаратов пищевых производств. На основе теорем и принципов теоретической механики решаются многие инженерные задачи и проектируются новые машины, конструкции и сооружения. Хорошее усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении задач. По- этому основной целью составления данного методического пособия является приобретение навыков в решении заданий для различных вариантов. В данном методическом пособии приведены решения расчетно – графических работ:

по статике задание С-3 – Определение реакций опор составной конструкции;

по кинематике задание К-3 – Кинематический анализ плоского механизма;

по динамике задание Д-1 – Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки.

Таблица-1

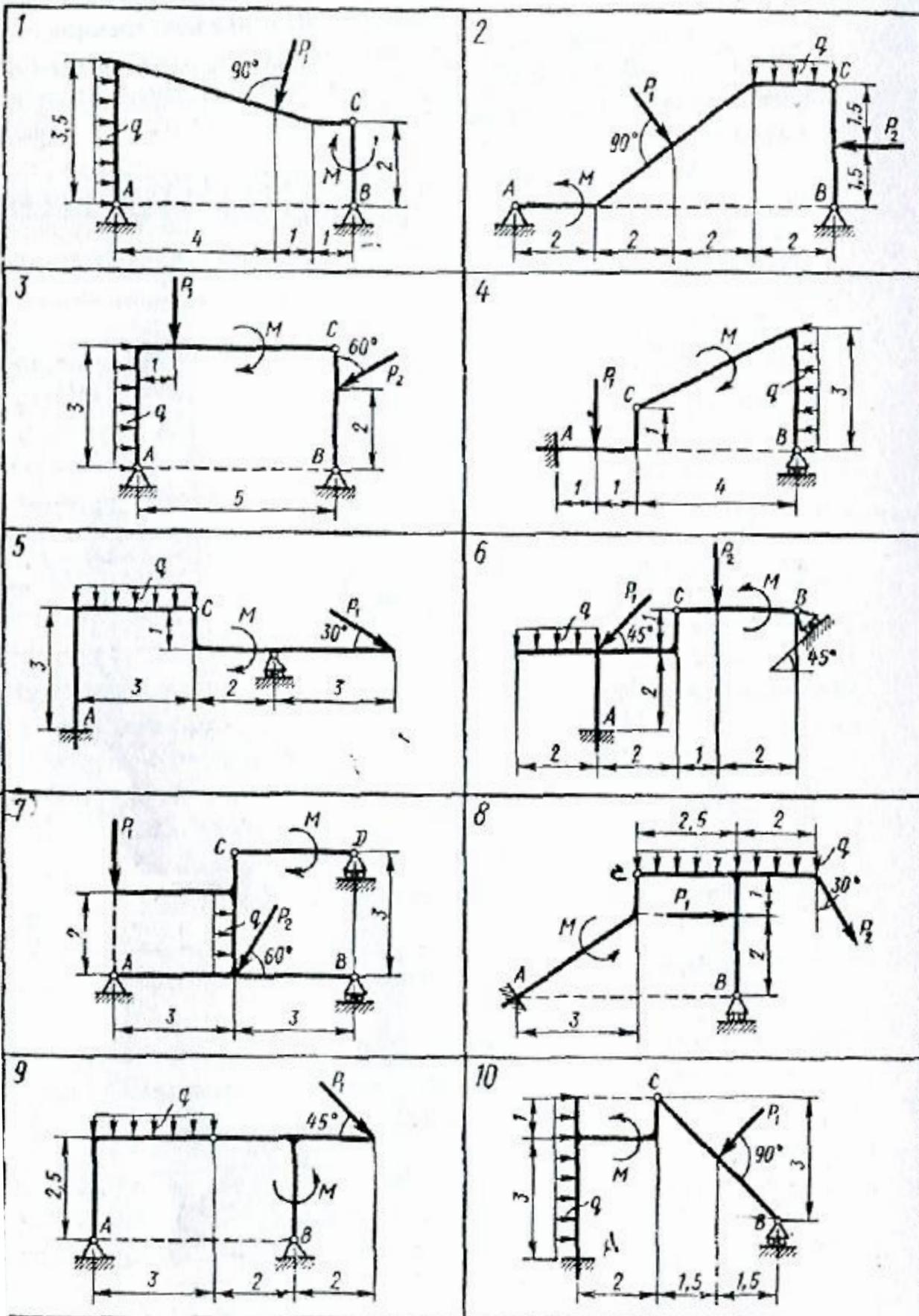
Вариант	Вопросы	Р. Г. Р.
1	5, 15, 11, 20, 25, 40	С-3 К-3 Д-1 Д-10
2	1, 4, 21, 12, 39, 26	С-3 К-3 Д-1 Д-10
3	2, 19, 24, 8, 25, 38	С-3 К-3 Д-1 Д-10
4	3, 13, 19, 7, 37, 26	С-3 К-3 Д-1 Д-10
5	4, 10, 18, 27, 36,30	С-3 К-3 Д-1 Д-10
6	6, 14, 17, 22, 25,38	С-3 К-3 Д-1 Д-10
7	5, 20, 16, 9, 29, 34	С-3 К-3 Д-1 Д-10
8	3, 11, 15, 21, 33,30	С-3 К-3 Д-1 Д-10
9	6, 13, 22, 1, 31,32	С-3 К-3 Д-1 Д-10
10	4, 8, 13, 19, 29,25	С-3 К-3 Д-1 Д-10
11	3, 9, 23, 17, 25,37	С-3 К-3 Д-1 Д-10
12	2, 20, 12, 9, 27,35	С-3 К-3 Д-1 Д-10
13	1, 8, 13, 21, 29,34	С-3 К-3 Д-1 Д-10
14	5, 10, 14, 20, 33,31	С-3 К-3 Д-1 Д-10
15	1, 7, 15, 18, 26,38	С-3 К-3 Д-1 Д-10
16	2, 9, 16, 19, 26,36	С-3 К-3 Д-1 Д-10
17	3, 6, 17, 12, 36, 28	С-3 К-3 Д-1 Д-10
18	4, 7, 18, 11, 33, 34	С-3 К-3 Д-1 Д-10
19	6, 1, 19, 10, 26,38	С-3 К-3 Д-1 Д-10
20	10, 3, 20, 15, 39,37	С-3 К-3 Д-1 Д-10
21	15, 4, 11, 21, 34,30	С-3 К-3 Д-1 Д-10
22	4, 19, 12, 9, 55, 50	С-3 К-3 Д-1 Д-10
23	3, 8, 13, 18, 49,56	С-3 К-3 Д-1 Д-10
24	2, 7, 14, 21, 47, 58	С-3 К-3 Д-1 Д-10
25	1, 6, 15, 20, 59,46	С-3 К-3 Д-1 Д-10
26	5, 9, 16, 24, 45,60	С-3 К-3 Д-1 Д-10
27	10, 3, 17, 14, 61,44	С-3 К-3 Д-1 Д-10
28	5, 13, 18, 22, 43, 62	С-3 К-3 Д-1 Д-10
29	12, 4, 19, 15, 63,42	С-3 К-3 Д-1 Д-10
30	3, 8, 20, 12, 41, 64	С-3 К-3 Д-1 Д-10

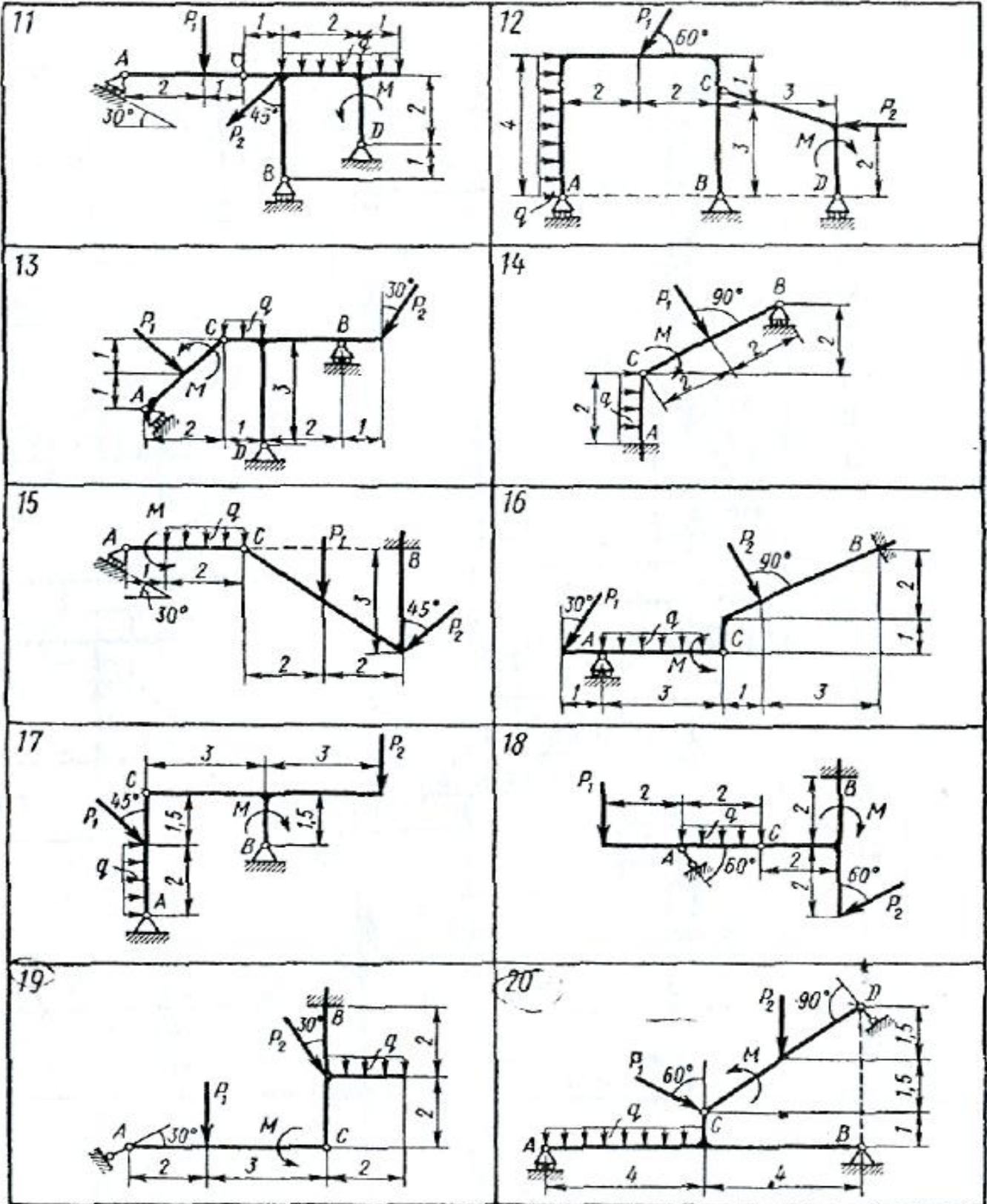
С - Статика

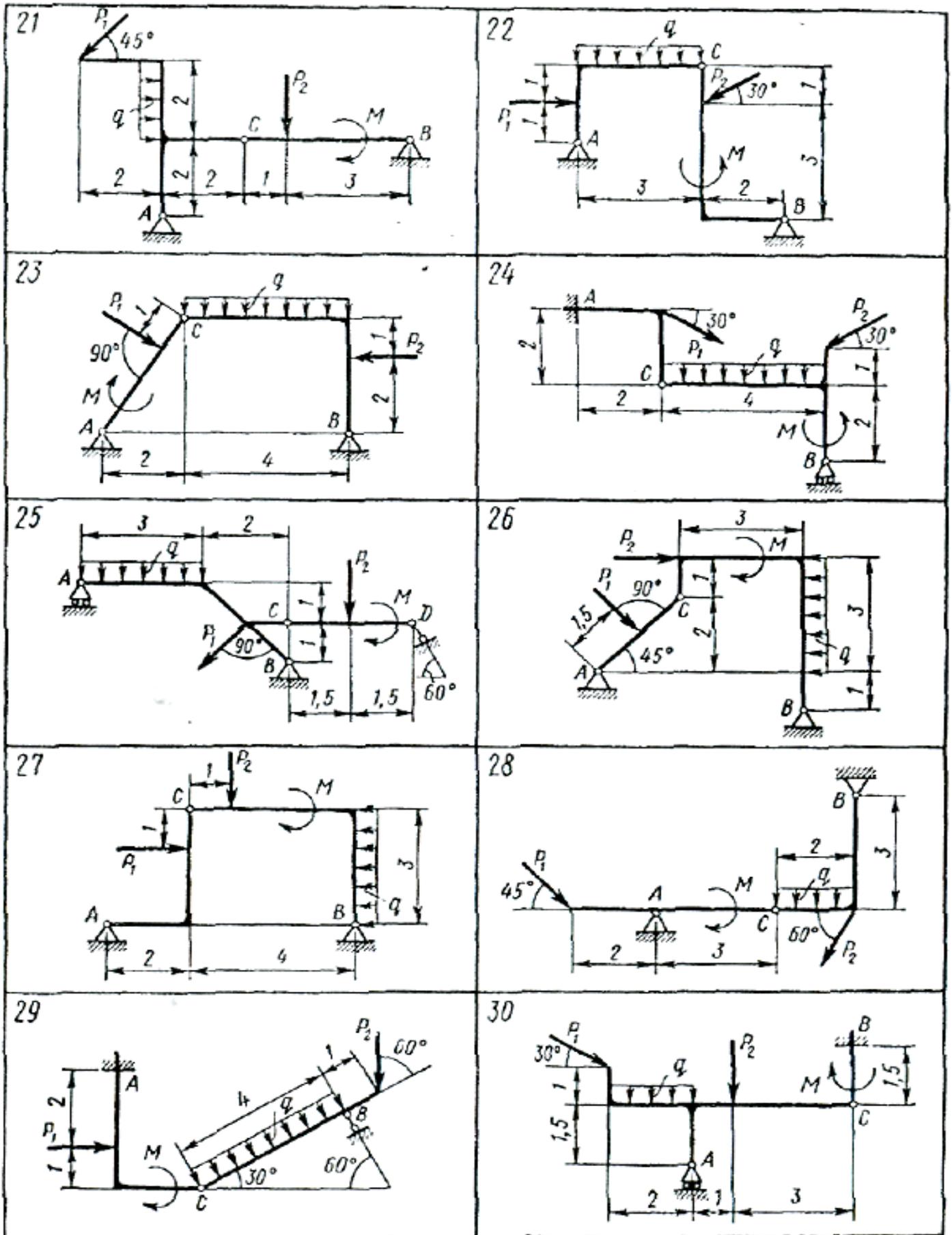
К - Кинематика

Д - Динамика

### ЗАДАНИЯ С3





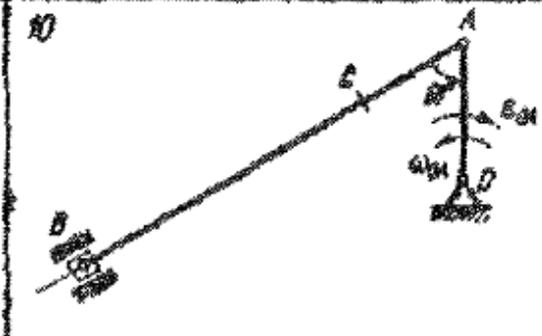
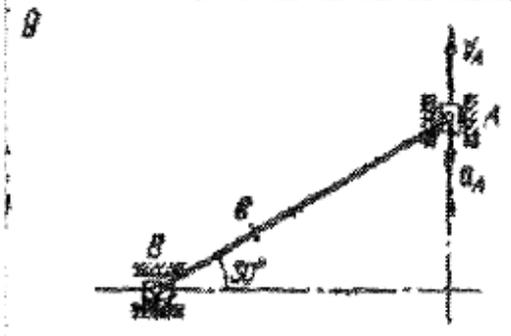
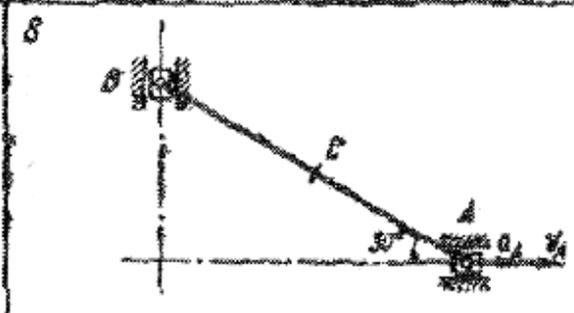
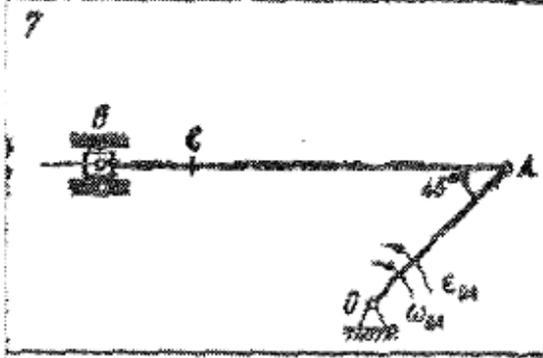
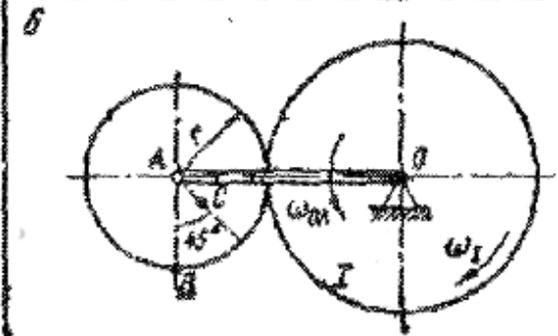
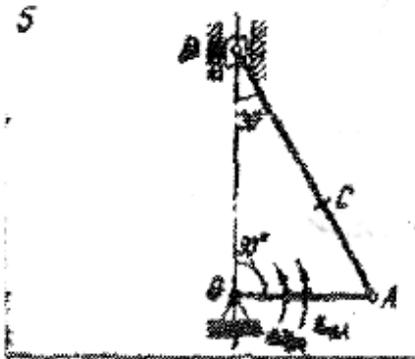
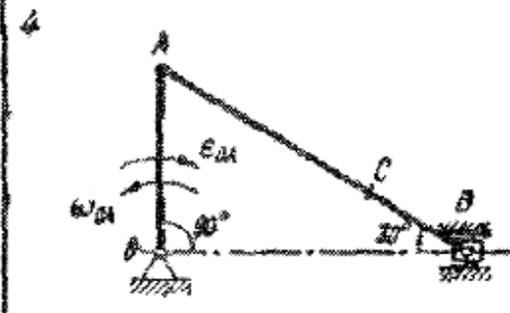
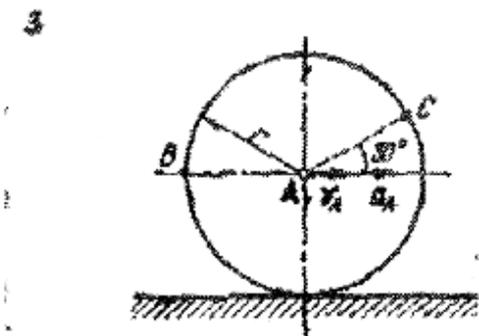
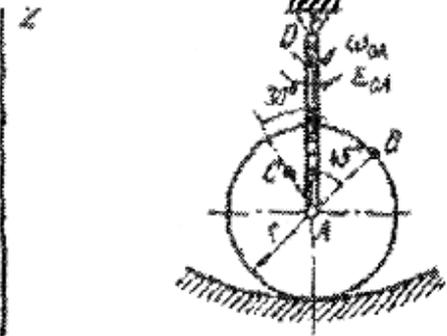
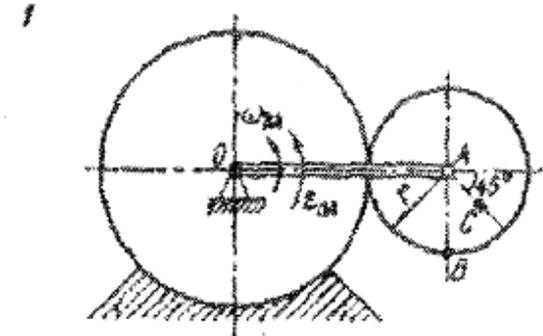


Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки	Номер варианта	Вид скользящей заделки
1, 2, 3		14		23	
4		15		24	
5		16		25	
6, 7, 8		17		26	
9		18		27	
10		19		28	
11		20		29	
12		21		30	
13		22			

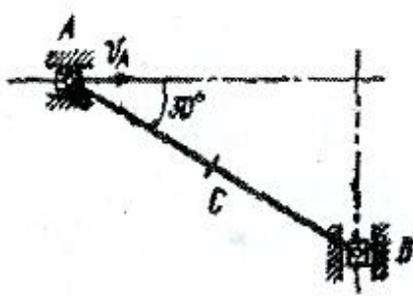
Варианты задания С-3

№Варианта	Сила, приложенная к точке, кН		Крутящий момент, М. кН	Распределенная сила, q. кН/м	Исследуемая реакция
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>			
1.	5.0	-	24	0.8	X <sub>A</sub>
2.	6.0	10	22	1.0	R <sub>A</sub>
3.	7.0	9.0	20	1.2	R <sub>B</sub>
4.	8.0	-	18	1.4	M <sub>A</sub>
5.	9.0	-	16	1.6	R <sub>A</sub>
6.	10	8.0	25	1.8	M <sub>A</sub>
7.	11	7.0	20	2.0	R <sub>B</sub>
8.	12	6.0	15	2.2	M <sub>A</sub>
9.	13	-	10	2.4	X <sub>A</sub>
10.	14	-	12	2.6	R <sub>A</sub>
11.	15	5.0	14	2.8	R <sub>D</sub>
12.	12	4.0	16	3.0	R <sub>B</sub>
13.	9.0	6.0	18	3.2	R <sub>A</sub>
14.	6.0	-	20	3.4	M <sub>A</sub>
15.	5.0	8.0	22	3.6	M <sub>B</sub>
16.	7.0	10	14	3.8	R <sub>B</sub>
17.	9.0	12	26	4.0	R <sub>A</sub>
18.	11	10	18	3.5	M <sub>B</sub>
19.	13	9.0	30	3.0	M <sub>B1</sub>
20.	15	8.0	25	2.5	R <sub>B</sub>
21.	10	7.0	20	2.0	R <sub>A</sub>
22.	5.0	6.0	15	1.5	R <sub>A</sub>
23.	8.0	5.0	10	1.4	R <sub>A</sub>
24.	11	4.0	5.0	1.3	M <sub>A</sub>
25.	14	6.0	7.0	1.2	R <sub>A</sub>
26.	12	8.0	9.0	1.1	R <sub>B</sub>
27.	10	7.0	11	1.0	X <sub>A</sub>
28.	8.0	9.0	13	1.2	R <sub>A</sub>
29.	6.0	10	15	1.4	M <sub>A</sub>
30.	10	12	17	1.6	M <sub>B</sub>

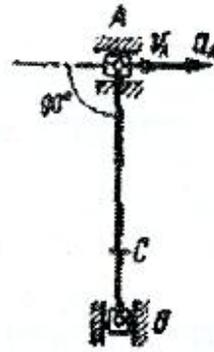
### Задание К3



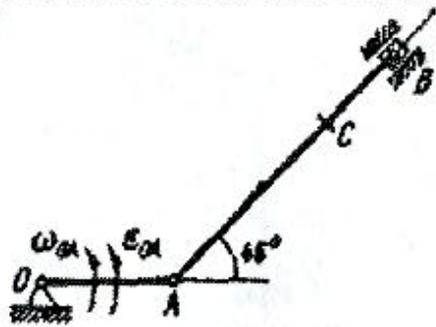
11



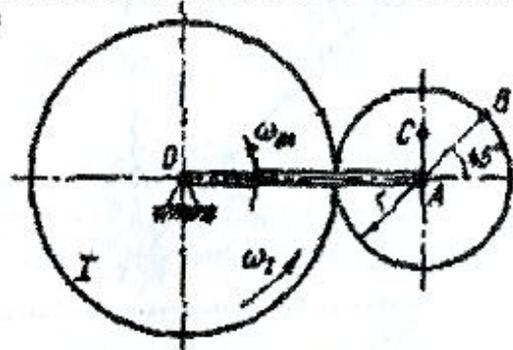
12



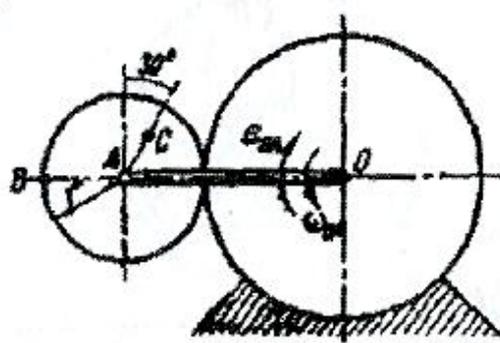
13



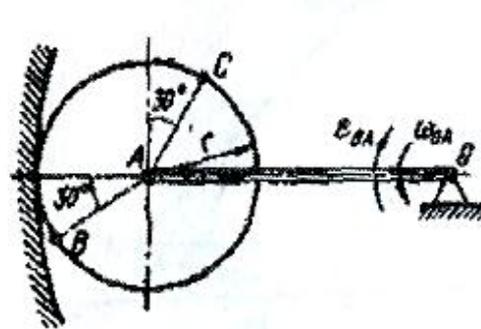
14



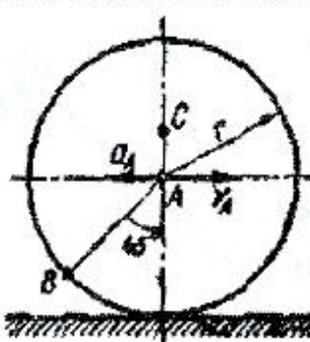
15



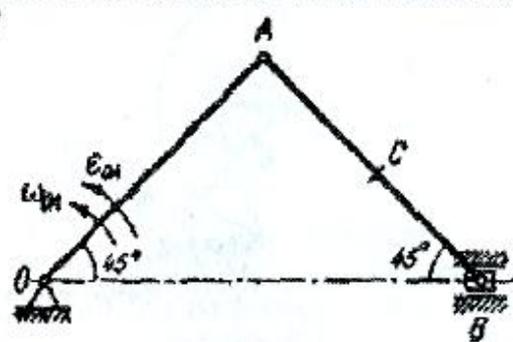
16



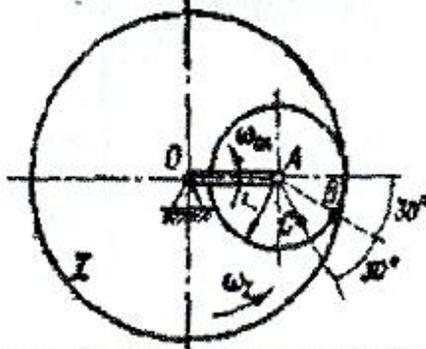
17



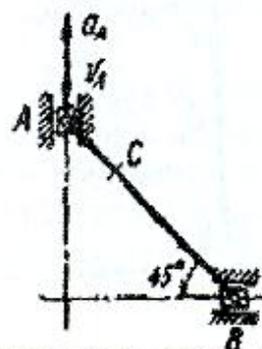
18



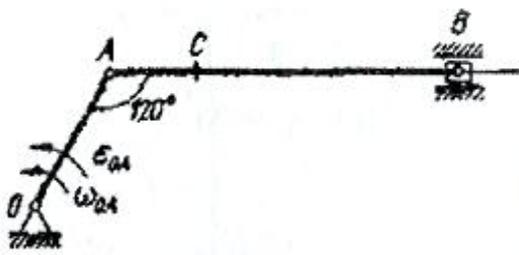
19



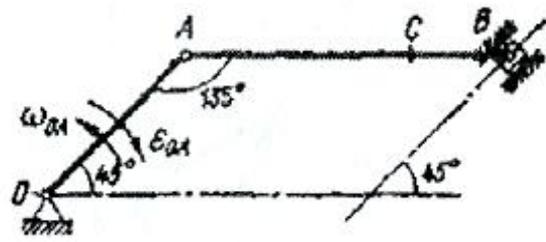
20



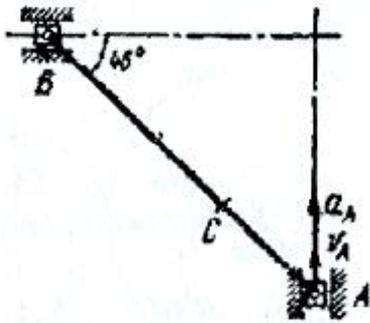
21



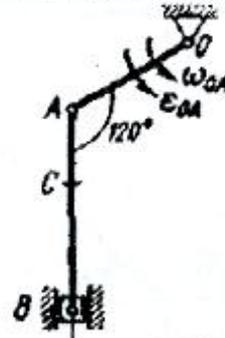
22



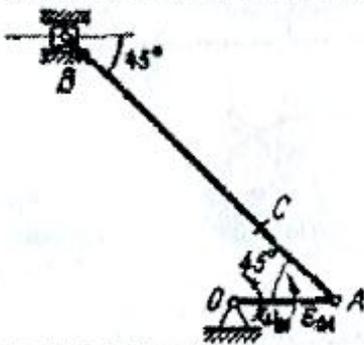
23



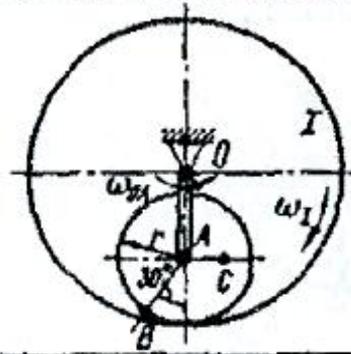
24



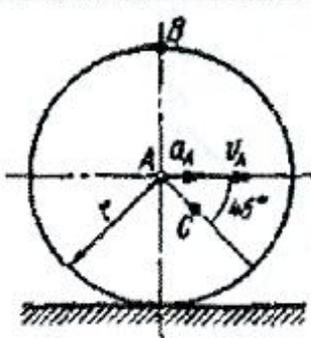
25



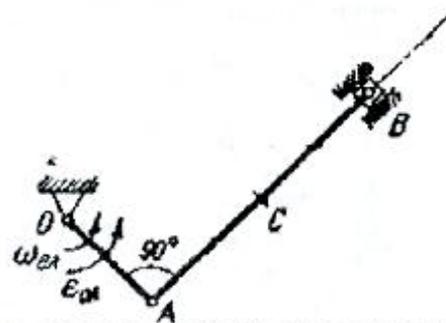
26



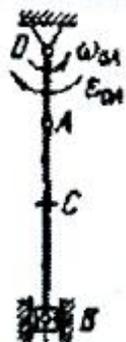
27



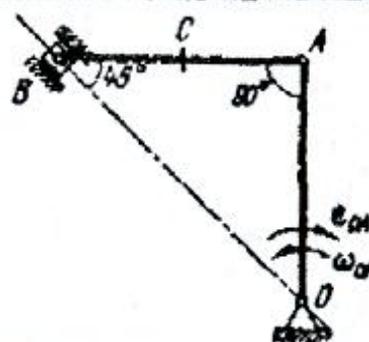
28



29



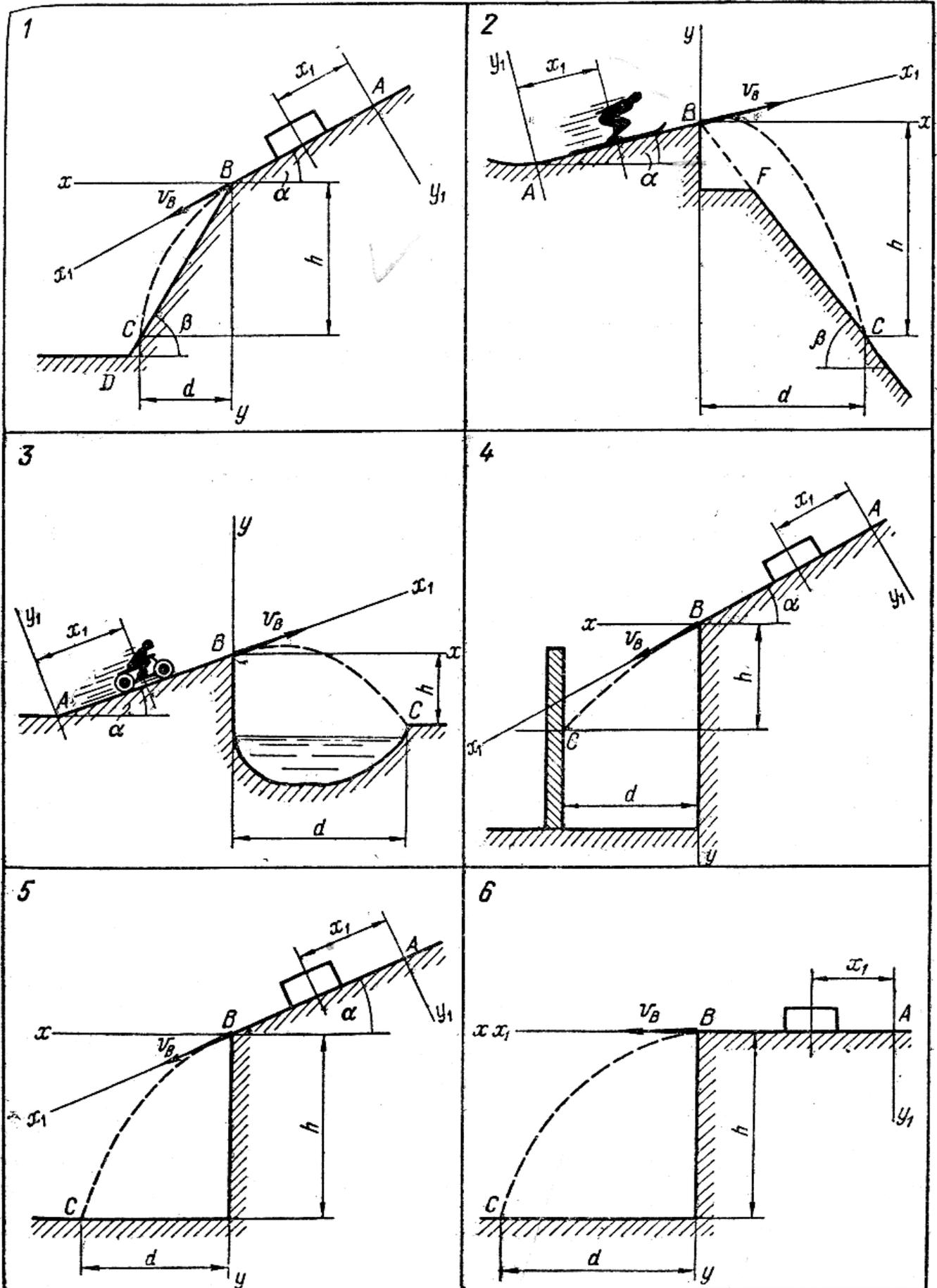
30



Варианты задания К-3

№ варианта	Размеры, см				$\omega_{OA},$ <i>рад/с</i>	$\omega_1,$ <i>рад/с</i>	$\varepsilon_{OA},$ <i>рад/с<sup>2</sup></i>	$\mathcal{G}_A,$ <i>см/с</i>	$a_A$ <i>см/с<sup>2</sup></i>
	OA	R	AB	AC					
1	40	15	-	8	2	-	2	-	-
2	30	15	-	8	3	-	2	-	-
3	-	50	-	-	-	-	-	50	100
4	35	-	-	45	4	-	8	-	-
5	25	-	-	20	1	-	1	-	-
6	40	15	-	6	1	1	0	-	-
7	35	-	75	60	5	-	10	-	-
8	-	-	20	10	-	-	-	40	20
9	-	-	45	30	-	-	-	20	10
10	25	-	80	20	1	-	2	-	-
11	-	-	30	15	-	-	-	10	0
12	-	-	30	20	-	-	-	20	20
13	25	-	55	40	2	-	4	-	-
14	45	15	-	8	3	12	0	-	-
15	40	15	-	8	1	-	1	-	-
16	55	20	-	-	2	-	5	-	-
17	-	30	-	10	-	-	-	80	50
18	10	-	10	5	2	-	6	-	-
19	20	15	-	10	1	2,5	0	-	-
20	-	-	20	6	-	-	-	10	15
21	30	-	60	15	3	-	8	-	-
22	35	-	60	40	4	-	10	-	-
23	-	-	60	20	-	-	-	5	10
24	25	-	35	15	2	-	3	-	-
25	20	-	70	20	1	-	2	-	-
26	20	15	-	10	2	1,2	0	-	-
27	-	15	-	5	-	-	-	60	30
28	20	-	50	25	1	-	1	-	-
29	12	-	35	15	4	-	6	-	-
30	40	-	-	20	5	-	10	-	-

### Задание Д 1



Варианты задания Д-1

1- таблица

варианты	Время t, с	$\alpha$ , угол	$V_A$ скорость м/с	f коэффициент трения скольжения	d, м	$\ell$ , длина м	h, длина м	$\beta$ , угол	Исследуемые параметры
1	-	30	0			10	-	60	$\tau$ и h
2	-	15	2	0.2	-	-	4-	45	Уравнение движения ВС
3	-	30	2,25	0	10	8	-	60	$V_B$ и T
4	2	-	0	0	-	9,8	-	60	$\alpha$ и T
5	3	30	0	-	-	9,8	-	45	f и $v_c$

2- таблица

варианты	Время t, с	$\alpha$ , угол	$V_A$ скорость м/с	f коэффициент трения скольжения	d, м	$\ell$ , длина м	h, длина м	$\beta$ , угол	Исследуемые параметры
6	0.2	20	-	0.1	-	-	40	30	E и $V_C$
7	-	15	16	0.1	-	5	-	45	$V_{A}$ и T
8	0.3	-	21	0	-	-	-	$\vartheta_B = 20m/c$	$\alpha$ и d
9	0.3	15	-	0.1	-	-	$30\sqrt{2}$	45	$V_A$ и $V_B$
10	-	15	12	0	50	-	-	60	траектория В и С

3- таблица

варианты	время	Угол $\alpha$ радиус	$V_A$ ско рость	F коэффи циент трения	D, про- межу ток m	$\ell$ длина, m	H высота, m	$\beta$ угол, радиус	Испедуем ая единица
11	-	30	0	-	3	40	$g_{Be}=4,5$ m/s	$P \neq 0$	$\tau$ и h
12	-	30	-	-	$P=0$	40	1.5	$g_B=4,5m$ /s	$g_A$ и d
13	20	30	0	-	3	-	1.5	$M=400kg$	P и l
14	-	30	0	-	5	40	$P=2,2k$ п	$M=400kg$	$g_b$ и $g_c$
15	-	30	0	-	4	50	2	$P=2kg$	T и m

4- таблица

варианты	время	$\alpha$ угол, радиус	$V_A$ скорос ть м/с	F Коэф фици ент трения	D Проме жуток м	$\ell$ длина м	h высота, м	$\beta$ Угол, радиус	Опреде ляе- мый пара- метр
16	-	30	1	0.2	2.5	3	-	-	h и T
17	1	45	-	-	-6	6			d и f
18	-	30	0	0.1	3	-	2	-	h и $\tau$
19	1.5	15	-	$\neq 0$	2	-	3	-	$g_A$ и h
20	-	45	0	0.3	2	4	-	-	L и $\tau$

5- таблица

варианты	время $\tau$ , с	$\alpha$ угол, радиус	$V_A$ Скорость, м/с	F Коэффициент трения	d м Промежуток	e длина м	h высота, м	$\beta$ Угол, радиус	Определяемый параметр
21	1.5	30	1	0.1	-	-	10	-	L и d
22	2	45	0	-	-	10	-	-	$\vartheta_b$ и T
23	2	-	0	0	-	20	9.81	-	$\alpha$ и T
24	-	30	0	0.2	12	-10	-	-	$\tau$ и h
25	-	30	0	0.2	-	4.5	6	-	$\tau$ и $\vartheta_c$

варианты	$\tau$ , с время	$\alpha$ угол, радиус	$V_A$ Скорость м/с	F Коэффициент трения	d Промежуток	e М длина	h высота, м	$\beta$ Угол, радиус	Определяемый параметр
26	-	-	7	0.2	-	8	20	-	Ди $\vartheta_c$
27	2	-	4	0.1	2	-	-	-	$\vartheta_b$ и h
28	-	-	$\vartheta_B = 3$	0.3	-	3	5	-	$\vartheta_B$ и T
29	-	-	3	$\vartheta_{Bb} = 1$	-	2.5	20	-	f и d
30				0.25	3	4	5	-	$\vartheta_A$ и $\tau$

### Задание С-3

#### Определение реакции опор составной конструкции (система двух тел)

Конструкция состоит из двух частей. Установить при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции наименьший и для этого соединения определить реакции опор, а также соединения С.

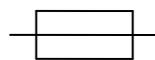
Вариант 1.

Дано:

$$P_1 = 5,0 \text{ кН}$$

$$M = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$q = 0,8 \text{ кН/м}$$



вид скользящей заделки

Найти:

$X_A$  -?

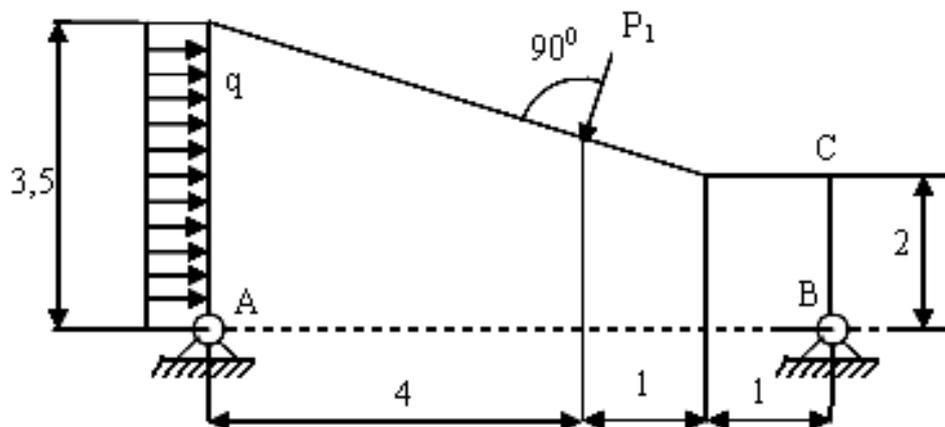


Рис 1

Решение :

1. Определение реакций опоры А при шарнирном соединении в точке С.

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции.

Составим уравнение моментов сил относительно точки В.

$$(1) \sum M (B) = 0$$

$$-Y_A \cdot 6 - Q \cdot 1,75 + P_1 \cdot L_B - M = 0$$

$$-Y_A \cdot 6 = Q \cdot 1,75 - P_1 \cdot L_B + M$$

$$Y_A = P_1 \cdot L_B - Q \cdot 1,75 - M / 6$$

$$L_B = B_K \cdot \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,732 \text{ м}$$

$$Q = q \cdot 1 = 0,8 \cdot 3,5 = 2,8 \text{ кН}$$

$$Y_A = 5 \cdot 1,732 - 2,8 \cdot 1,75 - 24 / 6 = 8,66 - 4,9 - 24 / 6$$

$$Y_A = -3,373 \text{ кН}$$

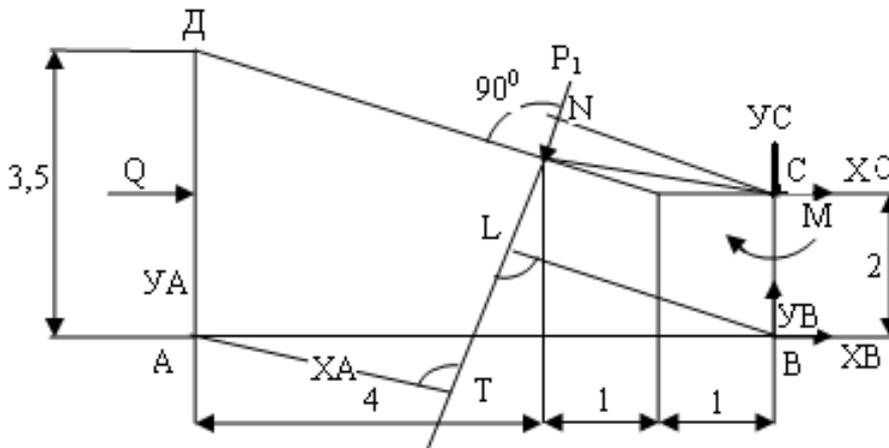


Рис 2

Второе уравнение с неизвестными  $X_A$  и  $Y_A$  получим, рассмотрев систему уравновешивающихся сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира С. (Рис 2)

$$\sum M_C = 0 + P_{1x} \cdot 0,3 + P_{1y} \cdot 2 + Q \cdot 0,25 - Y_A \cdot 6 + X_A \cdot 2 = 0$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 6 + Q \cdot 0,25 - P_1 \cdot C_N = 0 \quad (2)$$

$$C_N = 2 \cdot \cos 30^\circ = 1,732 \text{ м}$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 6 = -Q \cdot 0,25 + P_1 \cdot C_N$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 6 = -2,8 \cdot 0,25 + 5 \cdot 1,732$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 6 = -0,7 + 8,66$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 6 = 7,96$$

$$X_A = 7,96 + Y_A \cdot 6 / 2 = 7,96 + (-3,373) \cdot 6 / 2$$

$$X_A = 7,96 - 2,238 / 2 = -6,139 \text{ кН}$$

Модуль реакции опоры А при шарнирном соединении в точке С равен

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-6,139)^2 + (-3,373)^2} = \sqrt{37,6873 + 11,3771} = \sqrt{49,064}$$

$$R_A = 7 \text{ кН}$$

2. Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке с скользящей заделкой. Системы сил, показанные на рис 1 и 3 ничем друг от друга не отличаются. Поэтому уравнение (1) остается в силе. Для получения второго уравнения рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее скользящей заделки С (рис 4).

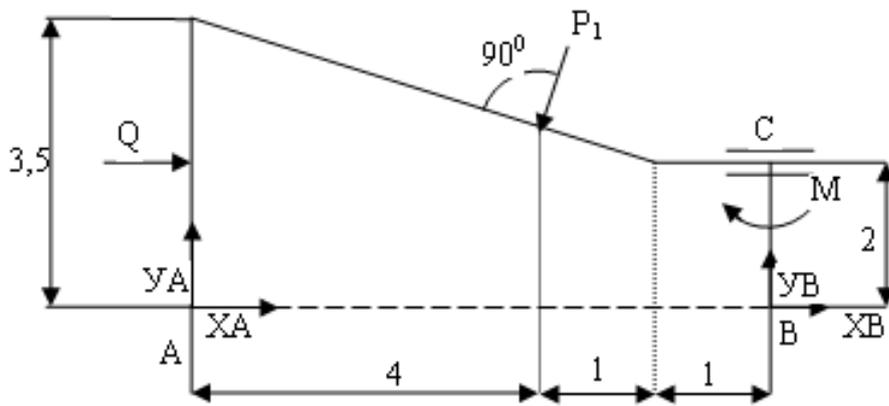


Рис 3

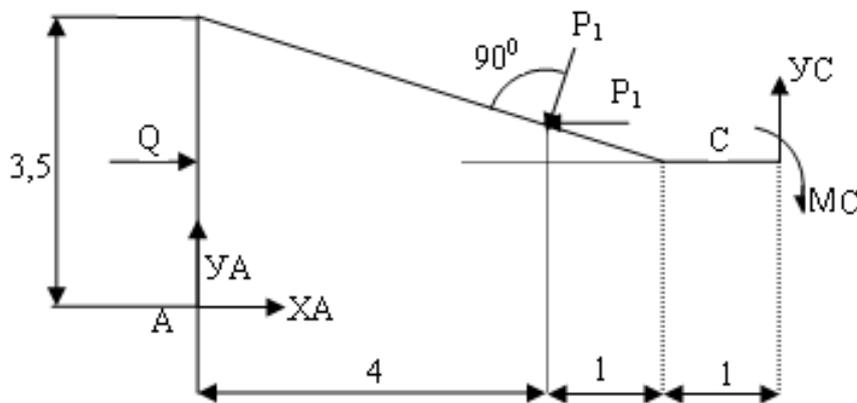


Рис 4

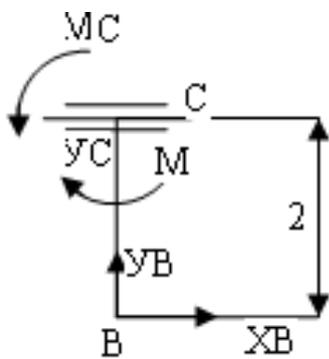


Рис5

Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0$$

$$X_A + Q - P_1 \cdot \cos 73^{\circ} 58' = 0$$

$$X_A = P_1 \cdot \cos 73^{\circ} 58' - Q = 5 \cdot 0,2785 - 2,8 = 1,3925 - 2,8$$

$$X_A = 0,74 \text{ кН} - 1,4075 \text{ кН}$$

Из уравнения (2) находим

$$Y_A = (X_A \cdot 2 + Q \cdot 0,25 + P_1 \cdot C_N) / 6$$

$$Y_A = 0,74 \cdot 2 + 2,8 \cdot 0,25 + 5 \cdot 1,732 / 6$$

$$Y_A = 1,48 + 0,7 - 8,66 / 6 = -6,48 / 6 = -1,08 \text{ кН}$$

$$Y_A = \frac{-1,4075 \cdot 2 + 2,8 \cdot 0,25 + 5 \cdot 2}{6} = \frac{-2,815 + 0,7 + 10}{6} Y_A 1,314$$

Следовательно, модуль реакции опоры А при скользящей заделке в точке С равен

$$R'_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{0,74^2 + (-1,08)^2} = \sqrt{0,5476 + 1,1664} = \sqrt{1,714} = 1,31 \text{ кН}$$

$$R_A = \sqrt{(-1,4075)^2 + 1,314^2} = \sqrt{1,981 + 1,727} = 1,926 \text{ кН}$$

При соединении в точке С скользящей заделкой модуль реакции опоры А меньше чем при шарнирном соединении ( $\approx$  на 81%). Найдем составляющие реакции опоры В в скользящей заделке.

Для левой от С части (рис 4)

$$\sum Y_i = 0$$

$$Y_A - P_1 \cdot \cos 16^\circ 42' + Y_C = 0$$

$$Y_C = P_1 \cdot \cos 16^\circ 42' - Y_A = 5 \cdot 0,9598 + 1,314 \approx 4,799 - 1,314 = 3,485 \text{ кН}$$

Составляющие реакции опоры В и момент в скользящей заделке найдем из уравнений равновесия, составленный для правой от С части конструкции (рис 5)

$$\sum M_B(F) = 0 \quad M_C - M = 0 \quad M_C = M = 24 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\sum X_i = 0 \quad X_B = 0$$

$$\sum Y_i = 0 \quad Y_B - Y_C = 0 \quad Y_B = Y_C = 3,485 \text{ кН}$$

Для проверки правильности определения реакций убедимся, что соблюдается не использованное ранее уравнение равновесия для сил, приложенных для всей конструкции (рис 2).

$$\sum M_A(F) = 0$$

$$- Q \cdot 1,75 - P_1 \cdot AT \cdot M + Y_B \cdot 6 = 0$$

$$- 2,8 \cdot 1,75 - 5 \cdot 3,177 - 24 + 3,485 \cdot 6 = - 4,9 - 15,885 + 20,91 = -20,785 + 20,91$$

$$A_M = 3,31 \quad \frac{AT}{AM} = \cos \alpha; \quad AT = 3,31 \cdot 0,9598 = 3,177 \text{ кН}$$

### Задание К3

#### Кинематический анализ плоского механизма.

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек В и С, также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Дано:

$$O_A = 40 \text{ см}$$

$$r = 15 \text{ см}$$

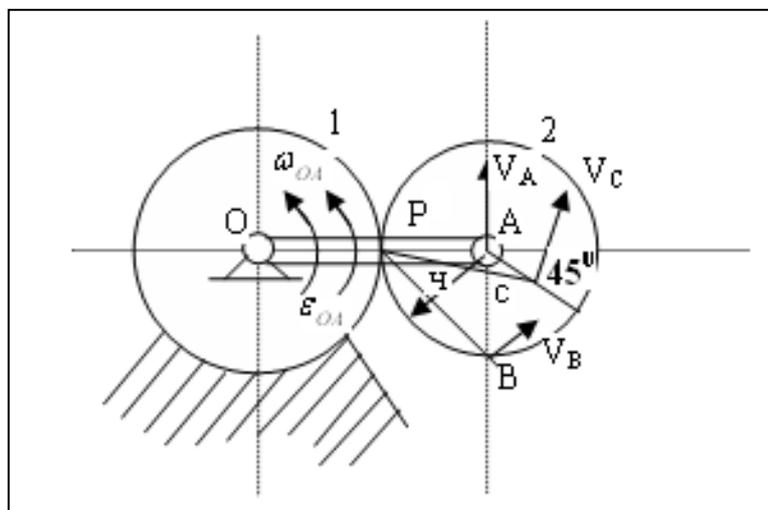
$$A_C = 8 \text{ см}$$

$$\omega_{OA} = 2 \text{ рад/с}$$

$$\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$$

Найти :

$$V_A - ?$$



$$V_B - ?$$

$$V_C - ?$$

$$\omega_2 - ?$$

$$\varepsilon_2 - ?$$

Решение :

Определяем скорости точек и угловую скорость звена.

$$V_A = \omega_{OA} \cdot O_A = 2 \cdot 40 = 80 \text{ см/с}$$

Скорости точек В и С определяем найдя мгновенный центр скоростей.

$$V_A / A_P = V_B / B_P = V_C / C_P = \omega_{AB}$$

$$\text{Здесь } A_P = r = 15 \text{ см}$$

Из треугольника АВР

$$B_P = \sqrt{A_P^2 + A_B^2} = \sqrt{r^2 + r^2} = r \sqrt{2} = 15 \cdot 1,4 = 21 \text{ см}$$

Из треугольника АСР

$$C_P = \sqrt{A_P^2 + A_C^2 + 2A_C \cdot A_P \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{15^2 + 8^2 + 2 \cdot 15 \cdot 8 \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{225 + 64 + 168} = \sqrt{457}$$

$$C_P = 21,38 \text{ см}$$

Определяем угловую скорость

$$\omega_{AB} = V_A / A_P = 80 / 15 = 5,33 \text{ 1/с}$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot B_P = 5,33 \cdot 21 = 111,93 \text{ см/с}$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot C_P = 5,33 \cdot 21,38 = 113,96 \text{ см/с}$$

Определяем ускорения точек и угловое ускорение звена

Ускорение точки А складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_{вА} + \bar{a}_{цА}$$

$$\bar{a}_{вА} = \varepsilon_{OA} \cdot O_A$$

$$\bar{a}_{цА} = \omega_{OA}^2 \cdot O_A$$

$$\bar{a}_{цА} = 2^2 \cdot 40 = 4 \cdot 40 = 160 \text{ см/с}^2$$

$$\bar{a}_{вА} = 2 \cdot 40 = 80 \text{ см/с}^2$$

$$\bar{a}_{вА} = \bar{a}_{\tau А}$$

$$\bar{a}_{цА} = \bar{a}_{n А}$$

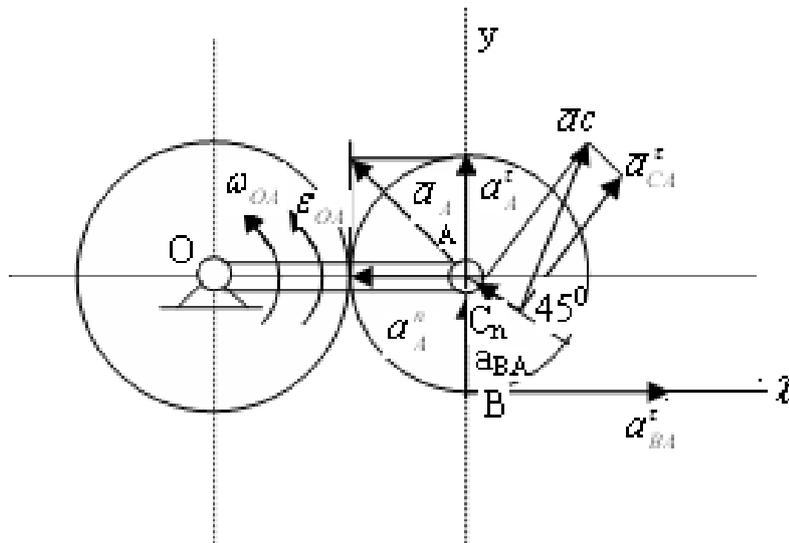
Находим полное ускорение

$$\bar{a}_A = \sqrt{(\bar{a}_{\tau А})^2 + (\bar{a}_{n А})^2} = \sqrt{80^2 + 160^2} = \sqrt{6400 + 25600} = \sqrt{32000} = 178,89 \text{ см/с}^2$$

Определяем ускорение точки В

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{\tau В} + \bar{a}_{n А} + \bar{a}_{\tau ВА} + \bar{a}_{n ВА}$$

$$\bar{a}_{n ВА} = \omega_{AB}^2 \cdot АВ = 5,33^2 \cdot 15 = 426,13 \text{ см/с}^2$$



$$a^{\tau}BA = \mathcal{E}_{AB} \cdot A_B$$

Угловое ускорение =  $a^{\tau}_{BA} / A_B$

Определяем проекции ускорений оси x и y:

$$a_{Bx} = -a^n_A + a^{\tau}BA$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2}$$

$$\begin{aligned} a_B &= \sqrt{(-\bar{a}nA)^2 - 2 \bar{a}nA \cdot a^{\tau}BA + (a^{\tau}BA)^2 + (a^{\tau}A)^2 + 2 a^{\tau}A \cdot \bar{a}nBA + (\bar{a}nBA)^2} = \\ &= \sqrt{(anA)^2 - 2 anA \cdot a^{\tau}BA + (a^{\tau}BA)^2 + (a^{\tau}A)^2 + 2 a^{\tau}A \cdot (\bar{a}nBA)^2} = \\ &= \sqrt{(anA)^2 + (a^{\tau}BA)^2 + (a^{\tau}A)^2 + (\bar{a}nBA)^2} \end{aligned}$$

$$a^{\tau}_{BA} = -a^n_A$$

$$\begin{aligned} a_B &= \sqrt{160^2 + (-160)^2 + 80^2 + 426,13^2} = 25600 + 25600 + 6400 + 181586,77 = \\ &= \sqrt{239186,77} = 489,07 \text{ см/с}^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_{AB} = -160 / 15 = -10,67 \text{ 1/с}^2$$

$$a_{Cx} = a^n_{AC} + a^n_A \cdot \cos 45^\circ - a^{\tau}_A \cdot \cos 90^\circ$$

$$a_{Cy} = a^n_A \cdot \cos 90^\circ + a^{\tau}_A - a^{\tau}_{AC} \cdot \cos 45^\circ$$

$$a^n_{AC} = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 5,33 \cdot 8 = 42,64 \text{ см/с}^2$$

$$a_{Cx} = 42,64 + 160 \cdot \sqrt{2} / 2 = 42,64 + 112 = 154,64 \text{ см/с}^2$$

$$a_{Cy} = 80 + 85,36 \cdot 07 = 80 + 59,752 = 139,752 \text{ см/с}^2$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} = \sqrt{154,64^2 + 139,752^2} = \sqrt{23913,529 + 19530,621} = \sqrt{43444,15}$$

$$a_C = 208,43 \text{ см/с}^2$$

## Д1- Динамика

### Динамика материальной точки

#### Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

#### Интегрирование дифференциальных уравнений движение материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.

Тело движется из точки А по участку АВ (длиной  $l$ ) плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом, в течение  $\tau$ . Его начальная скорость  $V_A$ . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен  $f$ . В точке В тело покидает плоскость со скоростью  $V_B$  и падает со скоростью  $V_C$  с точку С плоскости BD, наклоненной под углом  $\beta$  к горизонту, находясь в воздухе  $T_C$ .

При решении задачи тело принять за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1.

Дано :

$$\alpha = 30^\circ$$

$$V_A = 0$$

$$f = 0.2$$

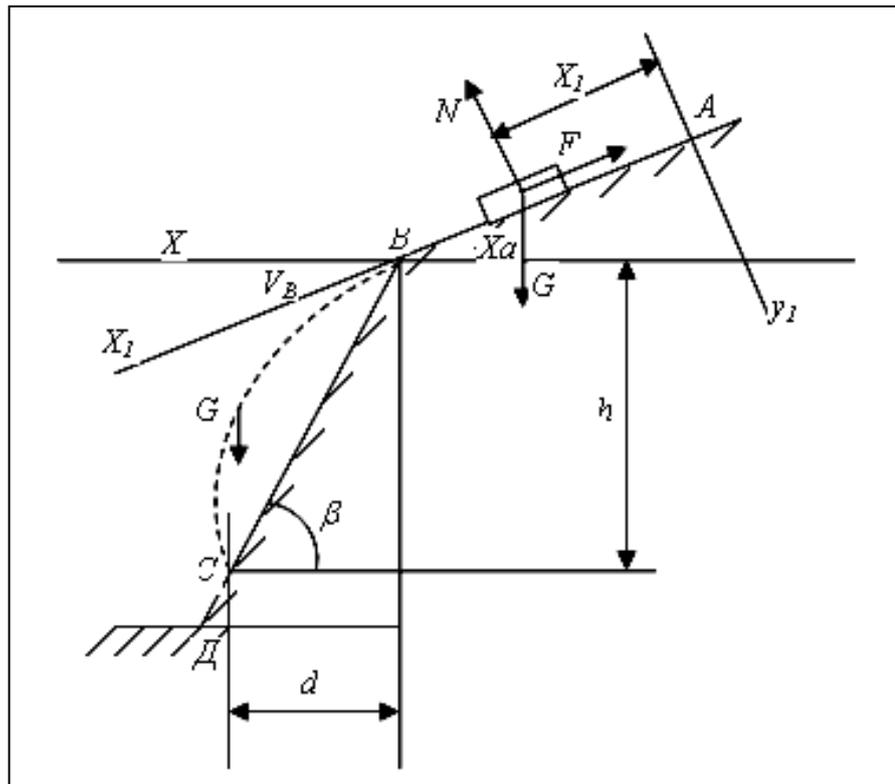
$$l = 10 \text{ м}$$

$$\beta = 60^\circ$$

Найти:

$$\tau = ?$$

$$h = ?$$



Решение:  $X \ X_1 \ D \ C \ A \ X_a \ B \ h \ y_1 \ G \ N \ G \ F \ V_B \ d \ d \ \beta$

$$AB = l$$

Принимая тело за материальную точку, покажем действующие на него силы: вес  $G$ , нормальную реакцию  $N$  и силу трения скольжения  $F$ .

Составим Дифференциальное уравнение движения тела на участке АВ:

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = \sum x_i$$

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = G \cdot \sin \alpha - F$$

Сила трения  $F = f \cdot N$  где  $N = G \cdot \cos \alpha$

Таким образом,

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = G \cdot \sin \alpha - f \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = mg \sin \alpha - f \cdot m \cdot g \cos \alpha$$

$$d^2 x_1 / d t^2 = g \cdot \sin \alpha - f g \cos \alpha$$

$$d^2 x_1 / d t^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Интегрируем дифференциальное уравнение дважды и получаем:

$$\int d^2 x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int d t^2$$

$$V_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$dV_{x_1} / d t = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$\int dV_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int t d t + C_1 \int d t$$

$$x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2 + C_1 t + C_2$$

Определим постоянные интегрирования. Используем следующие начальные условия:

$$t = 0; \quad x_{10} = 0; \quad V_{10} = 0; \quad V_A = V_{10}$$

Составим уравнение при  $t = 0$ :

$$V_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0$$

$$\text{Тогда} \quad V_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t$$

$$X_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2$$

Для момента  $\tau$ , когда тело покидает участок АВ

$$V_{x_1} = V_B; \quad X_1 = l$$

$$V_B = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau$$

$$l = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau^2 / 2$$

$$10 = 9,8 (\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) t^2 / 2$$

$$10 = 9,8 (1/2 - 0,2 \sqrt{3}/2) \tau^2 / 2$$

$$10 = 9,8 (0,5 - 0,35) \tau^2 / 2$$

$$10 = 1,47 \cdot \tau^2 / 2$$

$$10 = 0,735 \tau^2$$

$$\tau = \sqrt{10 / 0,735} = \sqrt{13,6}$$

$$\tau = 3,69 \text{ с}$$

$$V_B = 9,8 (\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) \cdot 3,69 = 9,8 (0,5 - 0,35) \cdot 3,69 = 5,42 \text{ м/с}$$

Рассмотрим движение тела от точки В до точки С. Составим дифференцированное уравнение движения тела при действии на него силы тяжести:

$$m \cdot d^2 x / d t^2 = 0 \quad m \cdot d^2 y / d t^2 = G$$

$$\text{Начальные условия: при } t = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

$$V_{x_0} = V_B \cdot \cos \alpha \quad V_{y_0} = V_B \cdot \sin \alpha$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\int d^2 x = 0 \quad m \cdot d^2 y / d t^2 = mg$$

$$V_x = C_3 \quad \int d^2 y = g \int d t^2$$

$$d V_x / d t = C_3 \quad V_y = g t + C_4$$

$$\int d V_x = C_3 \int d t \quad d V_y / d t = g t + C_4$$

$$x = C_3 t + C_5 \quad \int d V_y = g \int t d t + C_4 \int d t$$

$$y = g t^2 / 2 + C_4 t + C_6$$

Полученные уравнения: при  $t = 0$

$$V_{x_0} = C_3 \quad V_{y_0} = C_4$$

$$X_0 = C_5 \quad y_0 = C_6$$

Отсюда:

$$V_B \cdot \cos \alpha = C_3 \quad V_B \cdot \sin \alpha = C_4$$

$$C_5 = 0 \quad C_6 = 0$$

Проекция скоростей тела представлены следующими уравнениями:

$$V_x = V_B \cos \alpha$$

$$V_y = g t + V_B \cdot \sin \alpha$$

Уравнения движения тела можно представить в следующем виде:

$$x = V_B \cdot \cos \alpha t$$

$$y = g t^2 / 2 + V_B \cdot \sin \alpha \cdot t$$

Уравнение траектории тела на участке В<sub>С</sub> найдем, исключив параметр t из уравнений движения.

$$t = x / V_B \cos \alpha$$

$$y = g x^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

В момент падения  $y = h$ ,  $x = d$

$$h = g d^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot d$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = 1.732$$

$$h / d = \operatorname{tg} \beta$$

$$h = \operatorname{tg} \beta \cdot d = 1.732 d$$

$$1.732 \cdot d = g d^2 / 2 V_B^2 \cdot \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot d$$

$$1.732 \cdot d = 9.8 \cdot d^2 / 2 \cdot 5.42^2 \cdot \cos^2 30^\circ \cdot d$$

$$1.732 \cdot d = 9.8 \cdot d / 2 \cdot 29.3764 \cdot 0.75 + 0.578 \cdot d$$

$$0.222 \cdot d^2 + 0.578 \cdot d - 1.732 \cdot d = 0$$

$$0.222 \cdot d^2 - 1.154 \cdot d = 0$$

$$d (0.222 \cdot d - 1.154) = 0$$

$$d = 0$$

$$0.222 d - 1.154 = 0$$

$$0.222 \cdot d = 1.154$$

$$d = 1.154 / 0.222 = 5.2 \text{ м}$$

$$h = 1.732 \cdot 5.2 = 9.01 \text{ м}$$

Найдем время T движения тела от точки В до точки С по уравнению

$$x = V_B \cdot \cos \alpha t$$

$$T = x / V_B \cdot \cos \alpha = 5.2 / 5.42 \cdot \cos 30^\circ = 5.2 / 5.42 \cdot 0.866$$

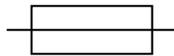
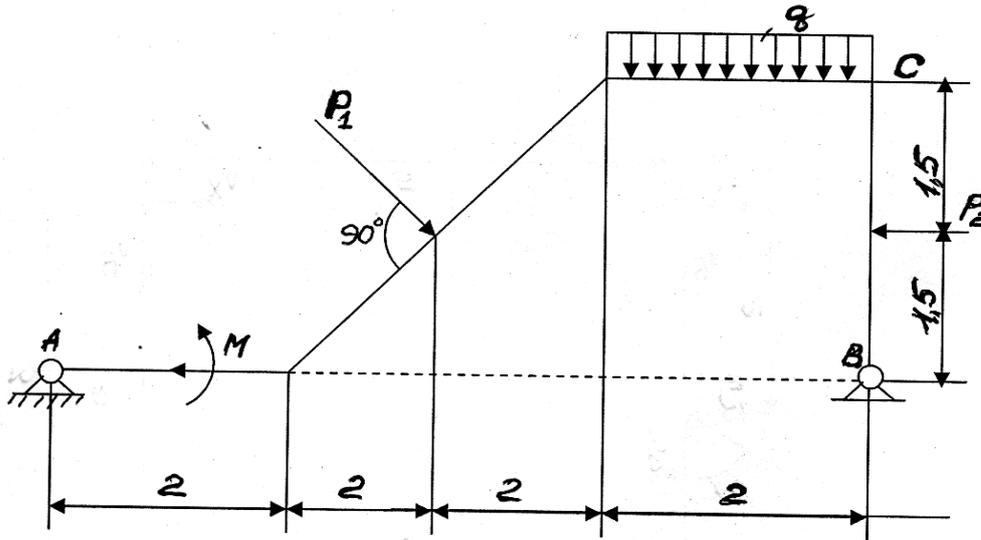
$$T = 1.11 \text{ с}$$

### Задание С3

#### Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Конструкция состоит из 2х частей. Установить при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения С.

Рис 1



Вид скользящей заделки

Дано:

$$P_1 = 6.0 \text{ кН}$$

$$P_2 = 10.0 \text{ кН}$$

$$M = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$q = 1 \text{ кН/м}$$

Найти:

$$R_A - ?$$

Решение:

Определение реакций опоры А при шарнирном соединении в точке С.

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции (рис 2)

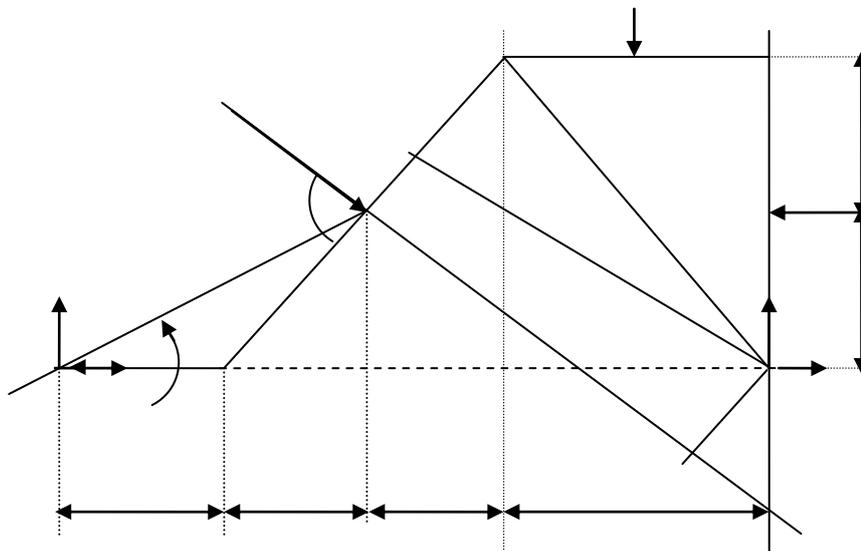


Рис 2

Составим уравнение моментов сил относительно точки В.

$$\sum M(B) = 0$$

$$-Y_A \cdot 8 + P_1 \cdot B_L + Q \cdot 1 + P_2 \cdot 1,5 + M = 0 \quad (1)$$

$$Y_A = P_1 \cdot B_2 + Q \cdot 1 + P_2 \cdot 1,5 + M / 8 \quad (2)$$

$$Q = q \cdot \ell = 1 \cdot 2 = 2 \text{ кН}$$

$$K_D = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ м}$$

$$K_N = \frac{1}{2} K_D = 2,5 \text{ м}$$

$$B_D = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3,61 \text{ м}$$

$$B_L = \frac{1}{2} D_N = \frac{1}{2} \cdot 2,5 = 1,25 \text{ м}$$

$$D_N = K_N$$

$$Y_A = 6 \cdot 1,25 + 2 \cdot 1 + 10 \cdot 1,5 + 22 / 8 = 7,5 + 2 + 15 + 22 / 8 = 46,5 / 8 = 5,8 \text{ м}$$

Рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира С (рис 3)

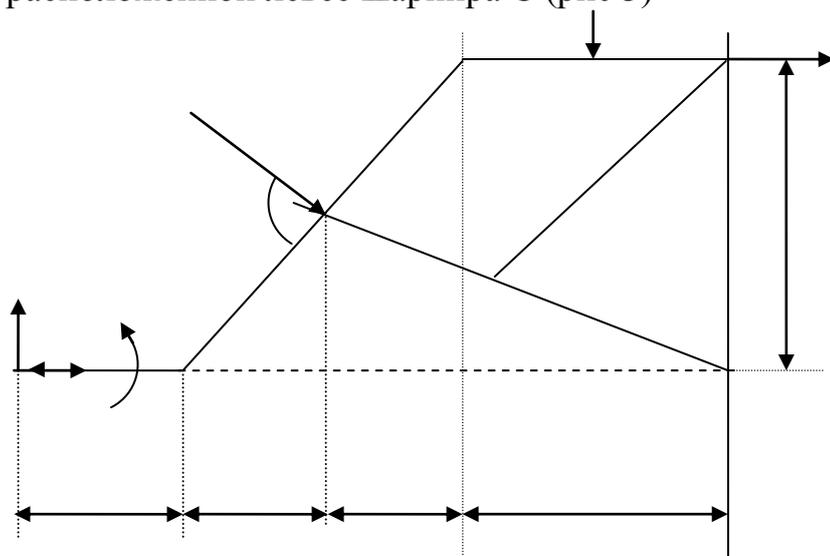


Рис 3

$$\sum M(C) = 0 \quad (3)$$

$$X_A \cdot 3 + Y_A \cdot 8 + P_1 \cdot C_E + Q \cdot 1 + M = 0$$

$$X_A = Y_A \cdot 8 - P_1 \cdot C_E - Q \cdot 1 - M / 3 = 5,8 \cdot 8 - 6 \cdot 2,24 - 2 - M / 3 = 46,4 - 13,44 - 2 - 22 / 3 = 8,96 / 3 = 2,99 \text{ кН}$$

$$N_B = \sqrt{6^2 - 2,5^2} = \sqrt{36 - 6,25} = \sqrt{29,75} = 5,45 \text{ м}$$

$$C_E = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} = 2,22 \text{ м}$$

$$X_A = 46,4 - 13,44 - 2 - 22 / 3 = 2,99 \text{ кН} \quad (4)$$

Модуль реакции опоры А при шарнирном соединении в точке С равен

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{2,99^2 + 5,8^2} = \sqrt{8,94 + 33,64} = \sqrt{42,58} = 6,53 \text{ кН}$$

2. Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке С скользящей заделкой (рис 4). Системы сил, показанные на рис 2 и 4 ничем друг от друга не отличаются. Поэтому уравнение (2) остается в силе. Для получения второго уравнения рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее скользящей заделки С (рис 5).

Рис 4

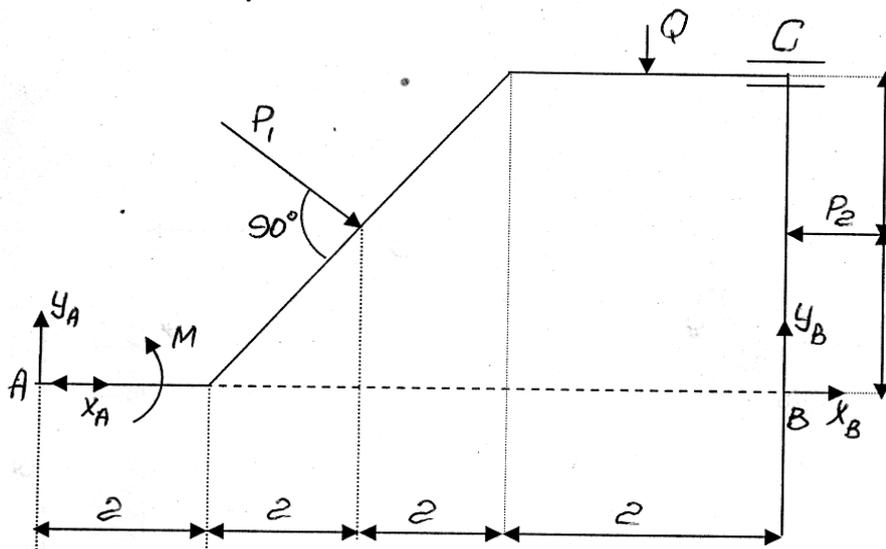
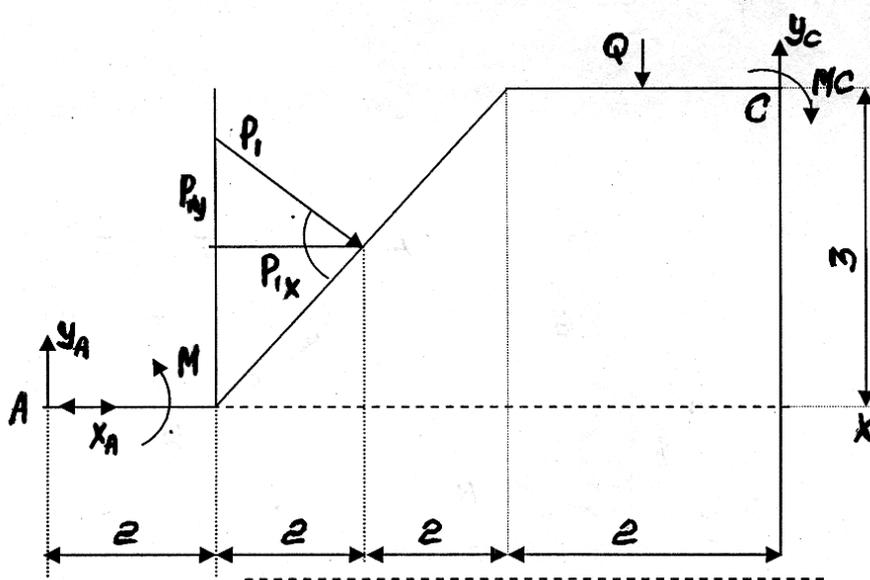


Рис 5



Составим уравнение равновесия:

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + P_{1x} = 0;$$

$$X_A = -P_{1x} = -2 \text{ кН}$$

Из уравнения (3) находим:

$$Y_A = X_A \cdot 3 + P_1 \cdot C_E + Q \cdot 1 + M / 8$$

$$Y_A = -2 \cdot 3 + 6 \cdot 2,24 + 2 + 22 / 8 = -6 + 13,44 + 2 + 2,75 = 3,93 \text{ кН}$$

Модуль реакции опоры А при скользящей заделке в точке С равен

$$R_A' = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(-2)^2 + 3,93^2} = \sqrt{4 + 15,4449} = 4,41 \text{ кН}$$

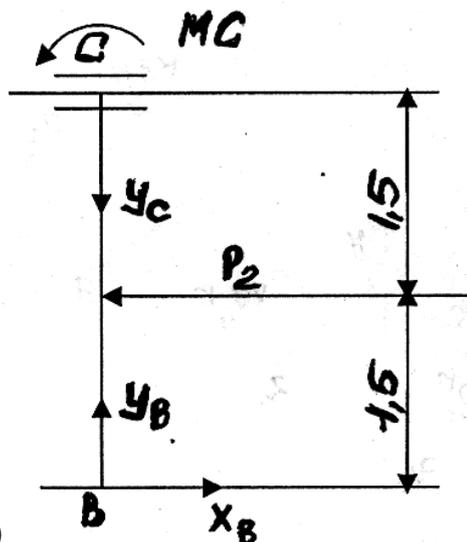
При соединении в точке С с скользящей заделкой модуль реакции опоры А меньше, чем при шарнирном соединении ( $\approx$  на 32%)

Найдем составляющие реакции опоры В и Скользящей заделки. Для левой от С части (рис 5).

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - P_{1y} - Q + Y_C = 0$$

$$Y_C = P_1 y + Q - Y_A = 1 + 2 - 3,93 = 0,93 \text{ кН}$$

Составляющие реакции опоры В в момент скользящей заделки найдем из уравнений равновесия, составленных для правой от С части конструкции (рис 6)  
Рис 6



$$\sum M(B) = 0$$

$$M_C + P_2 \cdot 1,5 = 0$$

$$M_C = -P_2 \cdot 1,5 = -10 \cdot 1,5 = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\sum X_i = 0; \quad X_B - P_2 = 0; \quad X_B = P_2; \quad X_B = 10 \text{ кН}$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -Y_C + Y_B = 0; \quad Y_B = Y_C; \quad Y_B = 0,93 \text{ кН}$$

Для проверки правильности определения реакции убедимся, что соблюдается не использованное ранее уравнение для сил, приложенных ко всей конструкции (рис 2):

$$\sum M(A) = 0$$

$$M - P_1 \cdot A_E - Q \cdot 7 + P_2 \cdot 1,5 + Y_B \cdot 8 = 0$$

$$22 - 6 \cdot 4,2 - 2 \cdot 7 + 10 \cdot 1,5 + 0,93 \cdot 8 = 22 - 25,2 - 14 + 15 + 7,44 = 5,24$$

$$A_E = \sqrt{A_N^2 - E_N^2} = \sqrt{4,272^2 - 1^2} = \sqrt{18,25 - 1} = 4,2 \text{ м}$$

$$N_F = \sqrt{K_N^2 - K_F^2} = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = \sqrt{6,25 - 4} = \sqrt{2,25} = 1,5 \text{ м}$$

$$A_N = \sqrt{A_F^2 + N_F^2} = \sqrt{4^2 + 1,5^2} = \sqrt{16 + 2,25} = \sqrt{18,25} = 4,272 \text{ м}$$

### Задание К3 Кинематический анализ плоского механизма.

Дано:

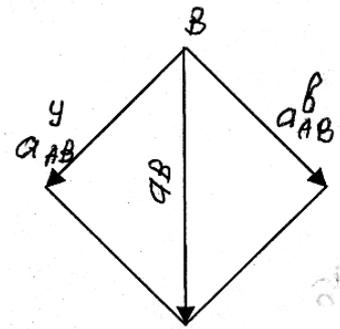
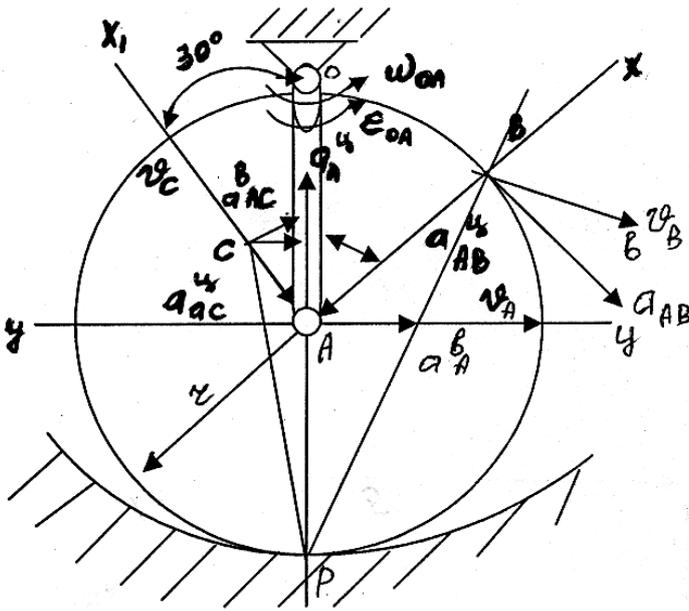
$$O_A = 30 \text{ см}$$

$$r = 15 \text{ см}$$

$$A_C = 8 \text{ см}$$

$$\omega_{OA} = 3 \text{ рад/с}$$

$$\varepsilon_{OA} = 2 \text{ рад/с}^2$$



Решение:

1. Определяем скорости точки и угловую скорость звена

$$V_A = \omega_{OA} \cdot O_A = 3 \cdot 30 = 90 \text{ см/с}$$

$$V_A/P_A = V_B/P_B = V_C/P_C = \omega_{AB}$$

$$V_A/P_A = \omega_{AB}$$

$$90/15 = 6 \text{ п/с}$$

$$\omega_{AB} = 6 \text{ п/с}$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot P_B$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot P_C$$

$$P_B = \sqrt{A_B^2 + A_P^2 + 2 \cdot A_P \cdot A_B \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{r^2 + r^2 + 2 \cdot r^2 \cdot 0,7} =$$

$$= \sqrt{15^2 + 15^2 + 2 \cdot 15^2 \cdot 0,7} = \sqrt{225 + 225 + 315} = \sqrt{765} = 27,66 \text{ см} \approx 28 \text{ см}$$

$$P_C = \sqrt{A_C^2 + A_P^2 + 2 \cdot A_C \cdot A_P \cdot \cos 150^\circ} = \sqrt{8^2 + 15^2 + 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot 0,5} = \sqrt{64 + 25 + 120}$$

$$= \sqrt{409} = 20,2 \text{ мм} \approx 20 \text{ см}$$

$$V_B = 6 \cdot 28 = 168 \text{ см/с}$$

$$V_C = 6 \cdot 20 = 120 \text{ см/с}$$

2. Определяем ускорение точек и угловое ускорение звена.

Ускорение точки А складывается из вращательного и центростремительного ускорений

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^B + \bar{a}_A^u$$

$$\bar{a}_A^B = \varepsilon_{OA} \cdot O_A = 2 \cdot 30 = 60 \text{ см/с}^2$$

$$\bar{a}_A^u = \omega_{OA}^2 \cdot O_A = 3^2 \cdot 30 = 9 \cdot 30 = 270 \text{ см/с}^2$$

Ускорение точки В

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^B + \bar{a}_{BA}^u$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^B + \bar{a}_A^u + \bar{a}_{AB}^B + \bar{a}_{AB}^u$$

$$\bar{a}_{AB}^u = \omega_{AB}^2 \cdot A_B = 6^2 \cdot 15 = 540 \text{ см/с}^2$$

$$a_B \cdot \cos 45^\circ = a_A^B \cdot \cos 45^\circ + a_A^u \cdot \cos 45^\circ + a_{AB}^u$$

$$a_B \cdot \cos 45^\circ = a_A^B \cdot \sin 45^\circ + a_A^u \cdot \cos 45^\circ + a_{AB}^B$$

$$a_B \cdot 0,7 = 60 \cdot 0,7 + 270 \cdot 0,7 + 540$$

$$a_B = 42 + 189 + 540 = 771 \text{ см/с}^2$$

$$771 \cdot 0,7 = 60 \cdot 0,7 + 270 \cdot 0,7 + a_{AB}^B$$

$$539,7 - 42 - 189 = a_{AB}^B$$

$$a_{AB}^B = 308,7 \text{ см/с}^2$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^B + \bar{a}_A^u + \bar{a}_{AC}^B + \bar{a}_{AC}^u$$

$$a_{AC}^B = \varepsilon_{AB} \cdot A_B$$

$$a_{AC}^u = \omega_{AB}^2 \cdot A_C$$

$$\varepsilon_{AB} = a_{AB}^B / A_B = 308,7 / 17 = 20,58 \text{ п/с}^2 \quad \varepsilon_{AB}$$

$$a_{AC}^B = 20,58 \cdot 8 = 164,64 \text{ см/с}^2$$

$$a_{AC}^u = 6^2 \cdot 8 = 36 \cdot 8 = 288 \text{ см/с}^2$$

Ускорение точки С определяем следующим образом:

$$a_{Cx} = a_{AC}^u + a_A^u \cdot \cos 30^\circ - a_A^B \cdot \cos 60^\circ$$

$$a_{Cy} = a_{AC}^B + a_A^u \cdot \sin 30^\circ + a_A^B \cdot \cos 30^\circ$$

$$a_{Cx} = 288 + 270 \cdot \sqrt{3}/2 - 60 \cdot 1/2 = 288 + 234 - 30$$

$$a_{Cx} = 492 \text{ см/с}^2$$

$$a_{Cy} = 164,64 + 270 \cdot 1/2 + 60 \cdot \sqrt{3}/2 = 164,64 + 135 + 51,96 = 351,6$$

$$a_{Cy} = 351,6 \text{ см/с}^2$$

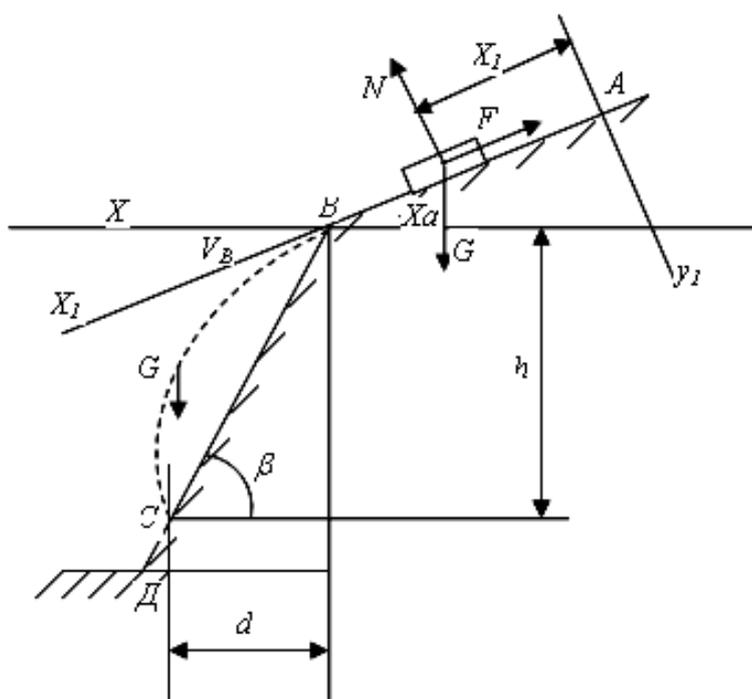
$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} = \sqrt{492^2 + 351,6^2} = \sqrt{242064 + 123622,56} = 604,72 \text{ см/с}^2$$

### Задание Д1

#### Динамика материальной точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Интегрирование дифференциальных уравнений движение материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.



Тело движется из точки А по участку АВ (длиной  $\ell$ ) наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом в течении  $t_c$ . Его начальная скорость  $V_A$ . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен  $f$ . В точке В тело покидает плоскость со скоростью  $V_B$  и падает со скоростью  $V_C$  с точки С плоскости ВД, наклоненной под углом  $\beta$  к горизонту, находясь в воздухе ТС. При решении задачи тело принять за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 2.

Дано :

$$\alpha = 15^\circ$$

$$V_A = 2 \text{ м/с}$$

$$f = 0.2$$

$$h = 4 \text{ м}$$

$$\beta = 45^\circ$$

Определить  $\ell$  и уравнение траектории точки на участке ВС.

Решение:

$$A_B = \ell$$

На тело действуют следующие силы: вес  $G$ , нормальная реакция  $N$ , сила трения скольжения  $F$ .

Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке АВ:

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = \sum x_i$$

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = G \cdot \sin \alpha - F$$

$$\text{Сила трения } F = f \cdot N \quad \text{где } N = G \cdot \cos \alpha$$

Таким образом,

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = G \cdot \sin \alpha - f \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = mg \sin \alpha - f \cdot m \cdot g \cos \alpha$$

$$d^2 x_1 / d t^2 = g (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

$$d^2 x_1 / d t^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) d t^2$$

Интегрируем дифференциальное уравнение дважды и получаем:

$$\int d^2 x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int d t^2$$

$$V_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$dV_{x_1} / d t = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$\int dV_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int t d t + C_1 \int d t$$

$$x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2 + C_1 t + C_2$$

Определим постоянные интегрирования. Используем следующие начальные условия:

$$t = 0; \quad X_{10} = 0; \quad V_{10} = 2;$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 2; \quad C_2 = 0$$

$$\text{Тогда} \quad V_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + 2$$

$$x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2 + 2 t$$

Для момента  $\tau$ , когда тело покидает участок АВ

$$V_{x_1} = V_B; \quad x_1 = \ell$$

$$V_B = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau + 2$$

$$\ell = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau^2 / 2 + 2 \tau$$

$$g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau = V_B - 2$$

$$\ell = (V_B - 2) \cdot \tau / 2$$

$$\ell = V_B \cdot \tau / 2 - \tau + 2 \tau = V_B \cdot \tau / 2 + \tau$$

$$\ell = \tau \cdot (V_B / 2 + 1)$$

Рассмотрим движение точки В до точки С.

Составим дифференциальное уравнение движения тела при действии на него силы тяжести:

$$m \cdot d^2 x / d t^2 = 0 \quad m \cdot d^2 y / d t^2 = G$$

$$\text{Начальные условия: при } t = 0 \quad X_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

$$V_{x_0} = V_B \cdot \cos \alpha \quad V_{y_0} = V_B \cdot \sin \alpha$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\int d^2 x = 0 \quad m \cdot d^2 y / d t^2 = mg$$

$$V_x = C_3 \quad \int d^2 y = g \int d t^2$$

$$dV_x / d t = C_3 \quad V_y = g t + C_4$$

$$\int dV_x = C_3 \int d t \quad dV_y / d t = g t + C_4$$

$$X = C_3 t + C_5 \quad \int dV_y = g \int t d t + C_4 \int d t$$

$$y = g t^2 / 2 + C_4 t + C_6$$

Полученные уравнения: при  $t = 0$

$$V_{x0} = C_3 \quad V_{y0} = C_4$$

$$x_0 = C_5 \quad y_0 = C_6$$

Отсюда:

$$V_B \cdot \cos \alpha = C_3 \quad V_B \cdot \sin \alpha = C_4$$

$$C_5 = 0 \quad C_6 = 0$$

Проекции скоростей тела представлены следующими уравнениями:

$$V_x = V_B \cos \alpha$$

$$V_y = g t + V_B \cdot \sin \alpha$$

Уравнения движения тела можно представить в следующем виде:

$$x = V_B \cdot \cos \alpha t$$

$$y = g t^2 / 2 + V_B \cdot \sin \alpha \cdot t$$

Уравнение траектории тела на участке  $B_C$  найдем, исключив параметр  $t$  из уравнений движения.

$$t = x / V_B \cos \alpha$$

$$y = g x^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

$$\text{В момент падения } y = h, x = d$$

$$h = g d^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot d$$

$$h / d = \operatorname{tg} \beta$$

$$d = h / \operatorname{tg} \beta = 4 / \operatorname{tg} 45^\circ = 4 \text{ м}$$

$$4 = 9.81 \cdot 4^2 / 2 \cdot V_B^2 \cos^2 15^\circ + \operatorname{tg} 15^\circ \cdot 4$$

$$4 = 9.81 \cdot 16 / 2 \cdot V_B^2 \cdot (0.9659)^2 + 0.2679 \cdot 4$$

$$4 = 156.96 / 1.8659 \cdot V_B^2 + 1.0716$$

$$2.9284 = 156.96 / 1.8659 \cdot V_B^2$$

$$1.8659 \cdot V_B^2 = 156.94 / 2.9284$$

$$V_B = \sqrt{53.5924 / 1.8659} = \sqrt{28.722}$$

$$V_B = 5.36 \text{ м/с}$$

$$5.36 = 9.81 (\sin 15^\circ - 0.2 \cdot \cos 15^\circ) \tau + 2$$

$$5.36 = 9.81 (0.2588 - 0.2 \cdot 0.9659) \tau + 2$$

$$5.36 = 0.644 \tau + 2$$

$$5.36 - 2 = 0.644 \tau$$

$$T = 3.36 / 0.644 = 5.22 \text{ с}$$

$$\ell = 5.22 (5.36 / 2 + 1) = 19.21 \text{ м}$$

Найдем время  $T$  движения тела от точки  $B$  до точки  $C$  по уравнению

$$x = V_B \cdot \cos \alpha t$$

$$T = x / V_B \cdot \cos \alpha = 4 / 5.36 \cdot \cos 15^\circ = 4 / 5.36 \cdot 0.9659$$

$$T = 0.773 \text{ с}$$

Скорость тела при падении найдем через проекции скорости на оси координат:

$$V_x = V_B \cdot \cos \alpha$$

$$V_y = g t + V_B \cdot \sin \alpha$$

Для момента падения

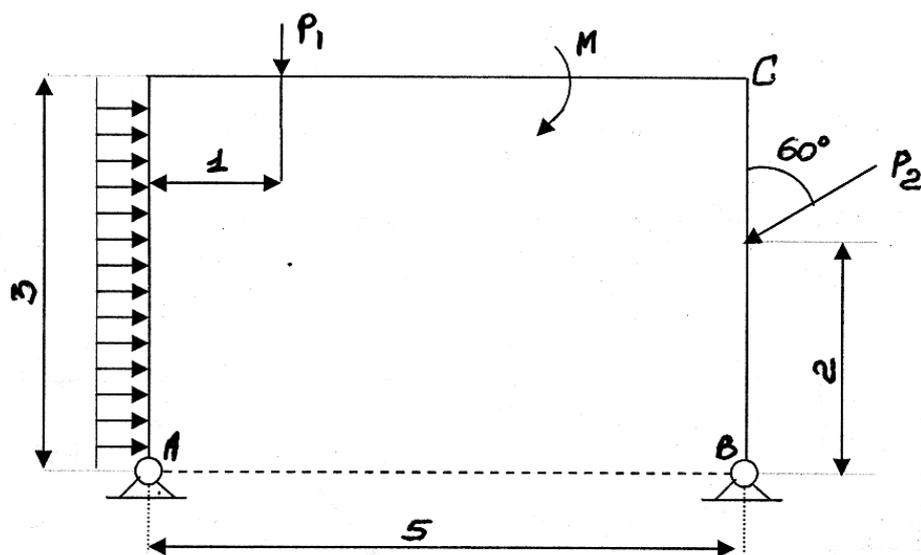
$$t = T = 0.773 \text{ с}$$

$$\begin{aligned} V_C &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_B^2 \cos^2 \alpha + g^2 t^2 + 2 g t V_B \cdot \sin \alpha + V_B^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{V_B^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + g^2 t^2 + 2 g t V_B \cdot \sin \alpha} = \sqrt{V_B^2 + g^2 t^2 + 2 g t V_B \cdot \sin \alpha} = \\ &= \sqrt{5.36^2 + 9.81^2 \cdot 0.773^2 + 2 \cdot 9.81 \cdot 0.773 \cdot 5.36 \cdot \sin 15^\circ} + \sqrt{28.7296 + 57.5039 + \\ &21.038} = \\ &= 10.36 \text{ м/с} \end{aligned}$$

### Задание С3

#### Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Конструкция состоит из 2х частей. Установить при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции наименьший, и для этого варианта соединения определить реакции опор, а также соединения С.



Дано:

$$P_1 = 7,0 \text{ кН}$$

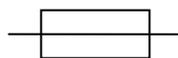
$$P_2 = 9,0 \text{ кН}$$

$$M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$q = 1.2 \text{ кН/м}$$

Найти:

$$R_B - ?$$



вид скользящей заделки

Решение:

1. Определение реакций опоры  $R_B$  при шарнирном соединении.

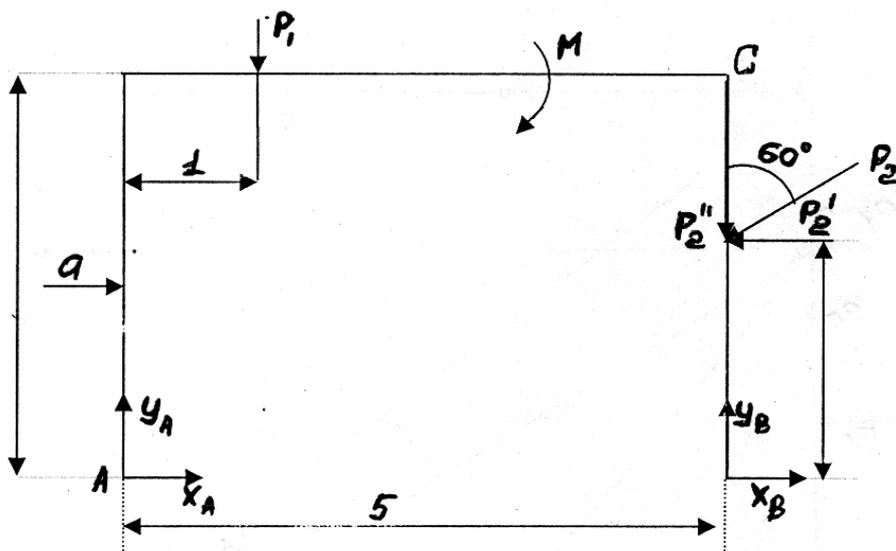
Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции. Составим уравнение моментов сил относительно точки В. Для упрощения вычисления момента силы P<sub>2</sub>.

$$P_2'' = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 9.0 \cdot 1/2 = 4.5 \text{ кН}$$

$$P_2' = P_2 \cdot \sin 60^\circ = 9.0 \cdot 0.866 = 7.8 \text{ кН}$$

$$Q = q \cdot 3 = 1.2 \cdot 3 = 3.6 \text{ кН}$$

$$\sum M (B) = 0$$



$$X_A \cdot 0 - Y_A \cdot 5 - Q \cdot 1.5 + P_1 \cdot 4 - M + P_2' \cdot 2 + P_2'' \cdot 0 = 0$$

$$-5 Y_A = 1.5 \cdot Q - 4 \cdot P_1 + M - 2 \cdot P_2'$$

$$Y_A = 1.5 \cdot Q - 4 \cdot P_1 + M - 2 \cdot P_2' / -5 = 1.5 \cdot 3.6 - 4 \cdot 7.0 + 20.0 - 2 \cdot 7.8 / -5 = 3.64 \text{ кН}$$

Второе уравнение с неизвестными X<sub>A</sub> и Y<sub>A</sub> получим, рассмотрев систему уравновешивающихся сил, приложенных к части конструкции, расположенной левее шарнира С.

$$\sum M (C) = 0$$

$$X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 5 + Q \cdot 1.5 + P_1 \cdot 4 - M = 0$$

$$3X_A = 5 \cdot Y_A - 1.5 \cdot Q - 4 \cdot P_1 + M$$

$$X_A = 5 \cdot Y_A - 1.5 \cdot Q - 4 \cdot P_1 + M / 3 = 5 \cdot 3.64 - 1.5 \cdot 3.6 - 4 \cdot 7 + 20 / 3 =$$

$$= 5 \cdot 3.64 - 1.5 \cdot 3.6 - 4 \cdot 7 + 20 / 3 = 18.2 - 5.4 - 28 + 20 / 3 = 1.53 \text{ кН}$$

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{1.53^2 + 3.64^2} = \sqrt{2.3409 + 13.2496} = \sqrt{15.5905} = 3.95 \text{ кН}$$

Составим уравнение моментов относительно точки А и находим неизвестные реакции X<sub>B</sub> и Y<sub>A</sub>

$$\sum M A = 0$$

$$X_B \cdot 0 + Y_B \cdot 5 + P_2' \cdot 2 - P_2'' \cdot 5 - M - P_1 \cdot 1 - Q \cdot 1.5 = 0$$

$$5 \cdot Y_B = -P_2' \cdot 2 + P_2'' \cdot 5 + M + P_1 \cdot 1 + Q \cdot 1.5$$

$$\begin{aligned}
 Y_B &= -P_2' \cdot 2 + P_2'' \cdot 5 + M + P_1 \cdot 1 + Q \cdot 1.5 / 5 = \\
 &= -7.8 \cdot 2 + 4.5 \cdot 5 + 20 + 7.0 \cdot 1 + 3.6 \cdot 1.5 / 5 = \\
 &= 15.6 + 22.5 + 20 + 7 + 5.4 / 5 = 7.86 \text{ кН}
 \end{aligned}$$

$$X_B \cdot 3 - Y_B \cdot 0 - P_2' \cdot 1 + P_2'' \cdot 0 = 0$$

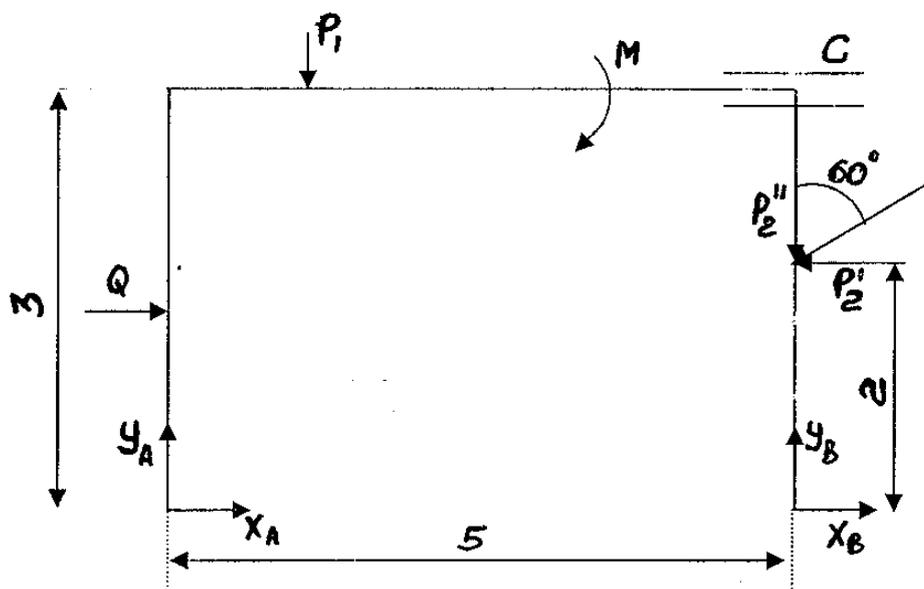
$$3 X_B = P_2'$$

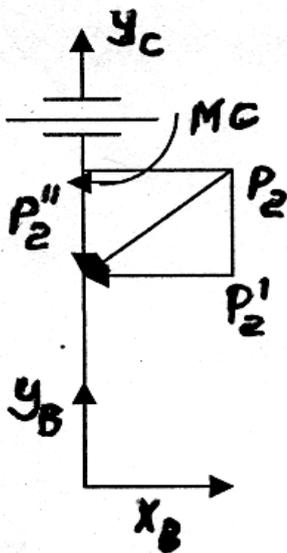
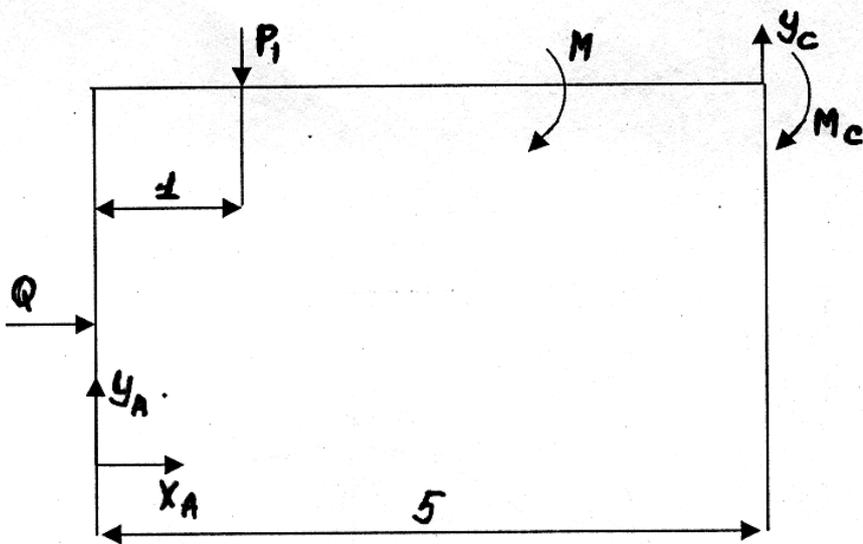
$$X_B = P_2' / 3 = 7.8 / 3 = 2.6 \text{ кН}$$

Определяем модуль реакции опоры при шарнирном соединении:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{2.6^2 + 7.86^2} = \sqrt{6.76 + 61.7796} = \sqrt{68.5396} = 8.28 \text{ кН}$$

2. Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке С скользящей заделкой.





Составим уравнение моментов относительно точки С.

$$\sum M(C) = 0$$

$$X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 5 + Q \cdot 1.5 + P_1 \cdot 4 - M - M_C = 0$$

$$3X_A - 5Y_A + Q \cdot 1.5 + P_1 \cdot 4 - M = M_C$$

$$M_C = 3X_A - 5Y_A + Q \cdot 1.5 + 4P_1 - M = 3 \cdot 1.53 - 5 \cdot 3.64 + 3.6 \cdot 1.5 + 4 \cdot 7 - 20 =$$

$$= 4.59 - 18.2 + 5.4 + 2.8 - 20 = -0.21 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Составим уравнение равновесия

$$\sum X = 0$$

$$X_A + Q = 0$$

$$X_A = -Q = -3.6 \text{ кН}$$

$$Y_A = 3.64 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_A - P_1 + Y_C = 0$$

$$Y_C = P_1 - Y_A = 7.0 - 3.64 = 3.36 \text{ кН}$$

Для правой части составим уравнение моментов относительно точки В.

$$\sum M(B) = 0$$

$$M_C + P_2 \cdot x \cdot 3 = 0$$

$$P_{2x} = P_2' = 7.8 \text{ кН}$$

$$M_C = -3 P_{2x} = -3 \cdot 7.8 = -23.4 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$\sum X = 0$$

$$P_{2x} - X_B = 0$$

$$X_B = P_{2x} = 7.8 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0$$

$\omega_{AB}$

$$Y_C + Y_B - P_2$$

$$Y_B = P_2 - Y_C = 4.5 - 3.36 = 1.14 \text{ кН}$$

Определяем реакцию опоры со скользящей заделкой

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{7.8^2 + 1.14^2} = 7.9 \text{ кН}$$

При шарнирном соединении

$$R_B = 8.28 \text{ кН}$$

При соединении скользящей заделкой

$$R_B = 7.9 \text{ кН}$$

### Задание К3

#### Кинематический анализ плоского механизма

Найти для заданного положения механизма скорости и ускорения точек В и С, а также угловую скорость и угловое ускорение звена, которому эти точки принадлежат.

Дано:

$$r = 50 \text{ см}$$

$$V_A = 50 \text{ см/с}$$

$$a_A = 100 \text{ см/с}^2$$

Найти:

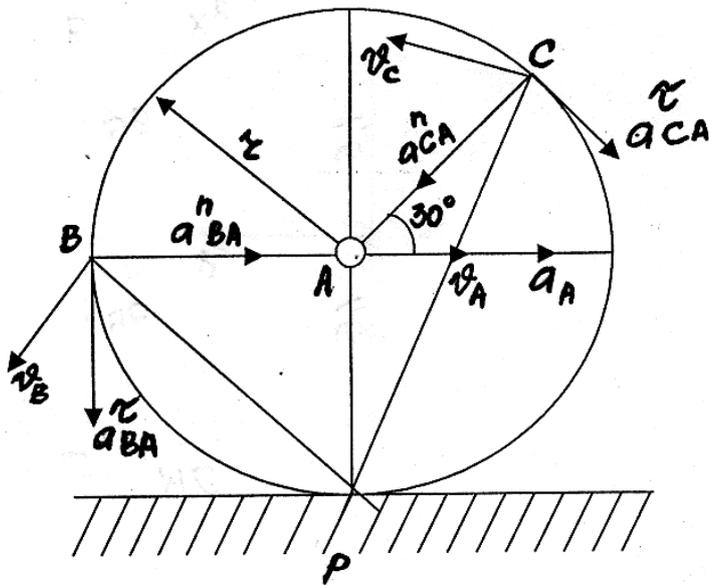
$$V_B - ?$$

$$V_C = ?$$

$$V_{AC} - ?$$

$$V_{AB} - ?$$

$$\omega_{AB} - ?$$



1. Определяем скорости точек и угловую скорость звена

Определяем масштаб чертежа

$$\mu_l = l_r / r = 50 \text{ см} / 50 \text{ мм}$$

$$\mu_l = 1 \text{ см} / \text{мм}$$

$V_A$  перпендикулярно  $A_P$ ,  $V_C$  перпендикулярно  $C_P$ ,  $V_B$  перпендикулярно  $B_P$

$$V_F = W_{AB} \cdot A_P$$

$$V_A / A_P = V_B / B_P = V_C / C_P = W_{AB}$$

$$\omega_{AB} = V_A / A_P = 50 / 50 = 1 \text{ 1/c}$$

$$A_P = r$$

$$C_P = \sqrt{A_P^2 + A_C^2 + 2 A_P \cdot A_C \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{r^2 + r^2 + 2 r^2 \cdot \sin 30^\circ} = \sqrt{2 r^2 (1 + \sin 30^\circ)} = 50 \sqrt{2} \cdot 1.5 = 86.6 \text{ см/с}$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot B_P = 1 \cdot 70 = 70 \text{ см/с}$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot C_P = 1 \cdot 8.8 = 8.8 \text{ см/с}$$

2. Определим ускорение точек и угловое ускорение звена

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^B + \bar{a}_A^u$$

$$a_{BA} = E_{OA} \cdot O_A$$

$$a_A^u = \omega_{OA}^2 W_{OA}^2 \cdot O_A$$

$$a_B = E_{AB} \cdot A_B$$

$$a_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^t + \bar{a}_{BA}^n$$

$$a_{BA}^t = A_B \cdot E = a_A = 100 \text{ см/с}^2$$

$$\mathcal{E} = 100/50 = 2 \text{ 1/c}^2$$

$$a_{BA}^n = A_B \cdot \omega^2 = V_A^2 / r = 50^2 / 50 = 50 \text{ см/с}^2$$

$$a_{Bx} = a_{BA}^n + a_A = 50 + 100 = 150 \text{ см/с}^2$$

$$a_{By} = a_{BA}^t = 100 \text{ см/с}^2$$

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{150^2 + 100^2} = \sqrt{22500 + 10000} = 180.28 \text{ см/с}$$

$$a_P = a_{PA}^n = 50 \text{ см/с}^2$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^t$$

$$a_{Cx} = a_{CA}^n \cdot \cos 30^\circ + a_A = 50 \cdot \sqrt{3}/2 + 100 = 143.3 \text{ см/с}^2$$

$$a_{Cy} = a_{CA}^t / \sin 30^\circ = 100 / 0.5 = 200 \text{ см/с}^2$$

$$a_C = \sqrt{143.3^2 + 200^2} = \sqrt{20534.89 + 40000} = 246 \text{ см/с}$$

### Задание Д1

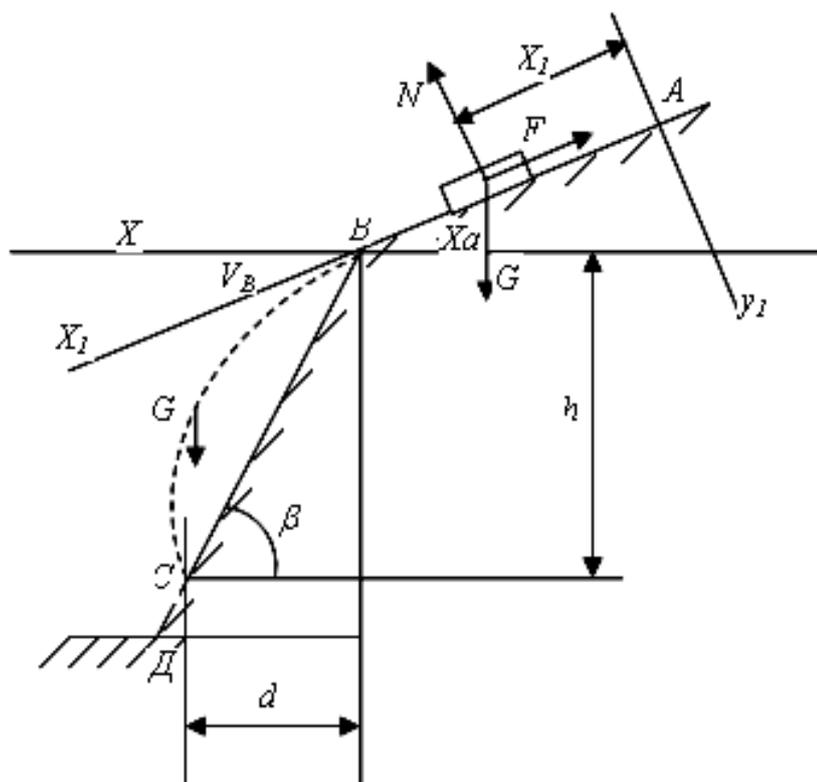
#### Динамика материальной точки

Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Интегрирование дифференциальных уравнений движение материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.

Вариант 3

Дано:  
 $\alpha = 30^\circ$



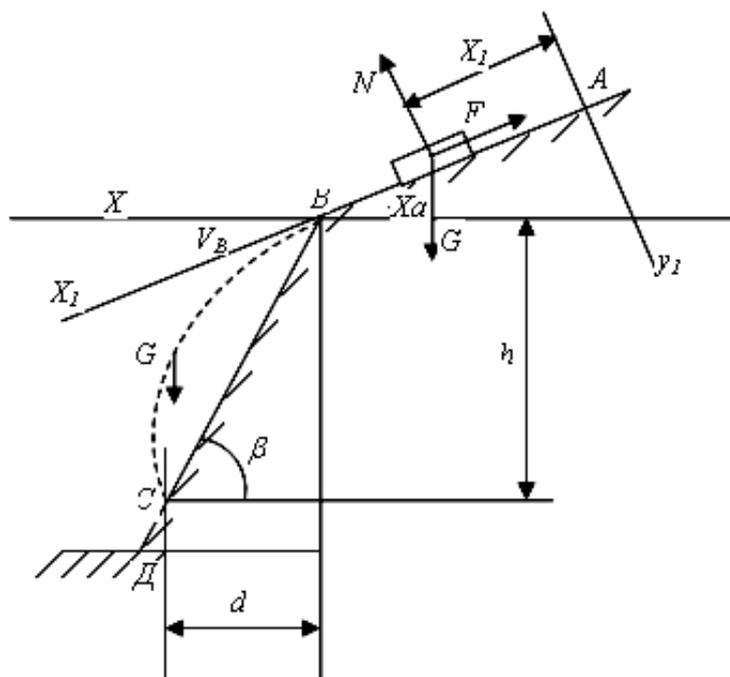
$$V_A = 2.5 \text{ м/с}$$

$f \neq 0$   
 $\ell = 8 \text{ м}$   
 $d = 10 \text{ м}$   
 $\beta = 60^\circ$

Найти:

$V_B - ?$

$\tau - ?$



Решение:

На тело действуют следующие силы: вес  $G$ , нормальная реакция  $N$ , сила трения скольжения  $F$ . Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке  $AB$ :

$$m \cdot d^2 x_1 / dt^2 = \sum X_{i1}$$

$$m \cdot d^2 x_1 / dt^2 = G \cdot \sin \alpha - F$$

Сила трения определяется по следующей формуле:  $F = f \cdot N$  где  $N = G \cdot \cos \alpha$

Таким образом,

$$m \cdot d^2 x_1 / dt^2 = G \cdot \sin \alpha - f \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$m \cdot d^2 x_1 / dt^2 = mg \sin \alpha - f \cdot m \cdot g \cos \alpha$$

$$d^2 x_1 / dt^2 = g (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

$$d^2 x_1 / dt^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) dt^2$$

Интегрируем дифференциальное уравнение дважды и получаем:

$$\int d^2 x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int dt^2$$

$$V_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$dV_{x_1} / dt = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$\int dV_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int t dt + C_1 \int dt$$

$$x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2 + C_1 t + C_2$$

Определим постоянные интегрирования. Используем следующие начальные условия:

$$t = 0; \quad x_{10} = 0; \quad V_{10} = 2.5;$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 2.5 ; \quad C_2 = 0$$

Тогда  $V_{x1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + 2.5$

$$x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2 + 2.5 t$$

Для момента  $\tau$ , когда тело покидает участок  $A_B$

$$V_{x1} = V_B; \quad x_1 = \ell$$

$$V_B = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau + 2.5$$

$$\ell = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau^2 / 2 + 2.5 \tau$$

$$g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau = V_B - 2.5$$

$$\ell = (V_B - 2) \cdot \tau / 2 + 2.5 \tau$$

$$\ell = V_B \cdot \tau / 2 - 1.25 \tau + 2.5 \tau$$

$$\ell = V_B \cdot \tau / 2 - 1.25 \tau$$

$$\ell = \tau \cdot (1/2 V_B + 1.25)$$

$$\tau = \ell / \frac{1}{2} V_B + 1.25 = 8 / \frac{1}{2} V_B + 1.25$$

Рассмотрим движение тела от точки В до точки С. Составим дифференциальное уравнение движения тела при действии на него силы тяжести

$$m \cdot d^2 x / dt^2 = 0 \quad m \cdot d^2 y / dt^2 = G$$

Начальные условия: при  $t = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0$

$$V_{x0} = V_B \cdot \cos \alpha \quad V_{y0} = V_B \cdot \sin \alpha$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\int d^2 x = 0 \quad m \cdot d^2 y / dt^2 = mg$$

$$V_x = C_3 \quad \int d^2 y = g \int dt^2$$

$$dV_x / dt = C_3 \quad V_y = g t + C_4$$

$$\int dV_x = C_3 \int dt \quad dV_y / dt = g t + C_4$$

$$x = C_3 t + C_5 \quad \int dV_y = g \int t dt + C_4 \int dt$$

$$y = g t^2 / 2 + C_4 t + C_6$$

Полученные уравнения: при  $t = 0$

$$V_{x0} = C_3 \quad V_{y0} = C_4$$

$$x_0 = C_5 \quad y_0 = C_6$$

Отсюда:

$$V_B \cdot \cos \alpha = C_3 \quad V_B \cdot \sin \alpha = C_4$$

$$C_5 = 0 \quad C_6 = 0$$

Проекция скоростей тела представлены следующими уравнениями:

$$V_x = V_B \cos \alpha$$

$$V_y = g t + V_B \cdot \sin \alpha$$

Уравнения движения тела можно представить в следующем виде:

$$x = V_B \cdot \cos \alpha \cdot t$$

Уравнение траектории тела на участке ВС найдем, исключив параметр  $t$  из уравнений движения.

$$t = x / V_B \cos \alpha$$

$$y = g x^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

В момент падения  $y = h, x = d$

$$h = g d^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot d$$

$$h / d = \operatorname{tg} \beta$$

$$h / 10 = \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$h = 10 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$h = 17.32 \text{ м}$$

$$17.32 = 9.81 \cdot 10^2 / 2 \cdot V_B^2 \cos^2 30^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot 10$$

$$17.32 = 9.81 / 2 \cdot V_B^2 \cdot 0.866^2 + 0.5774 \cdot 10$$

$$17.32 - 5.774 = 654.04 / V_B^2$$

$$V_B = \sqrt{654.04 / 11.546} = 7.53 \text{ м/с}$$

$$\tau = 8 / \frac{1}{2} \cdot 7.53 + 1.25 = 8 / 5.015 = 1.595 \text{ с}$$

Найдем время  $T$  движение тела от точки  $B$  до точки  $C$  по уравнению

$$X = V_B \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$T = x / V_B \cdot \cos \alpha = 10 / 7.53 \cdot \cos 30^\circ = 10 / 7.53 \cdot 0.866 = 1.534 \text{ с}$$

Скорость тела при падении найдем через проекции скорости на оси координат:

$$V_x = V_B \cos \alpha$$

$$V_y = gt + V_B \cdot \sin \alpha$$

Для момента падения  $t = T = 1.534 \text{ с}$

$$V_C = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_B^2 \cos^2 \alpha + g^2 t^2 + 2g t V_B \cdot \sin \alpha + V_B^2 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \sqrt{V_B^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + g^2 t^2 + 2g t V_B \cdot \sin \alpha} =$$

$$= \sqrt{7.53^2 + 9.81^2 \cdot 1.534^2 + 2 \cdot 9.81 \cdot 7.53 \cdot \sin 30^\circ} = \sqrt{56.7009 + 226.4585 + 113.3155}$$

$$= \sqrt{396.4749} = 19.912 \text{ м/с}$$

### Задание С3

#### Определение реакции опор составной конструкции (система двух тел)

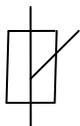
Конструкция состоит из двух частей. Установить при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции наименьший и для этого соединения определить реакции опор, а также соединения  $C$ .

Дано:

$$P_1 = 8,0 \text{ кН}$$

$$M = 18 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$q = 1.4 \text{ кН/м}$$

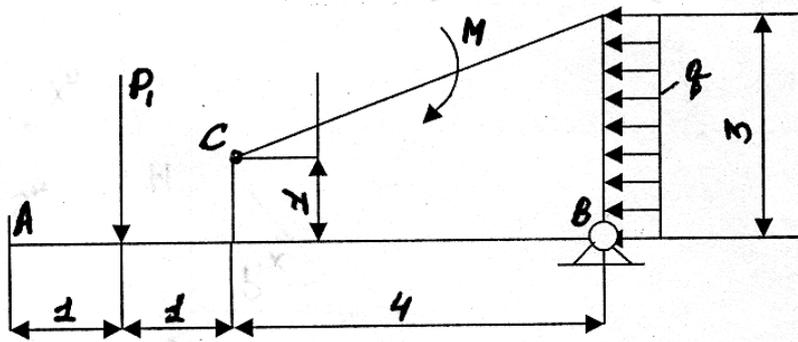


вид скользящей заделки

Найти:

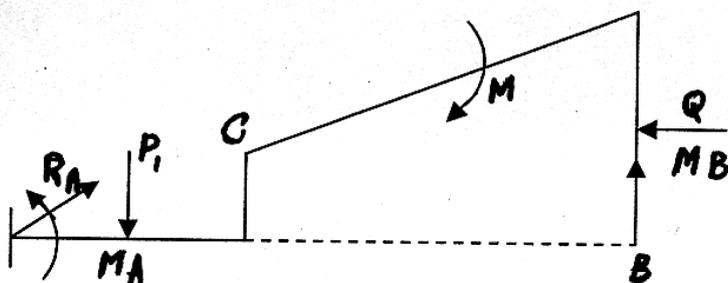
$$M_A - ?$$

Рис 1 .



Решение:

1. Определение реакций опоры А при шарнирном соединении в точке С.  
 Рассмотрим систему уравнивающих сил, приложенных ко всей конструкции. (рис 2) Составим уравнение моментов сил относительно точки В.  
 Рис 2.



$$\sum M(B) = 0$$

$$-R_A \cdot \cos 45^\circ \cdot 6 + P_1 \cdot 5 + M_A - M + Q \cdot 1.5 = 0 \quad (1)$$

$$M_A - R_A \cdot \cos 45^\circ \cdot 6 = M - P_1 \cdot 5 - Q \cdot 1.5$$

$$Q = q \cdot 3 = 1.4 \cdot 3 = 4.2 \text{ кН}$$

$$M_A - R_A \cdot \cos 45^\circ \cdot 6 = 18 - 8 \cdot 5 - 4.2 \cdot 1.5 = -12.6 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$M_A - R_A \cdot 4.2 = -12.6$$

Составим уравнение моментов сил относительно точки С.

$$\sum M(C) = 0$$

$$-R_A \cdot \cos 45^\circ \cdot 2 + M_A + P_1 \cdot 1 = 0$$

$$M_A - R_A \cdot 1.4 = -P_1$$

$$M_A - R_A \cdot 4.2 = -12.6 \quad (2)$$

$$M_A - R_A \cdot 1.4 = -8 \quad (3)$$

$$-R_A \cdot 4.2 + R_A \cdot 1.4 = -12.6 + 8 - 2.8 \cdot R_A = -4.6$$

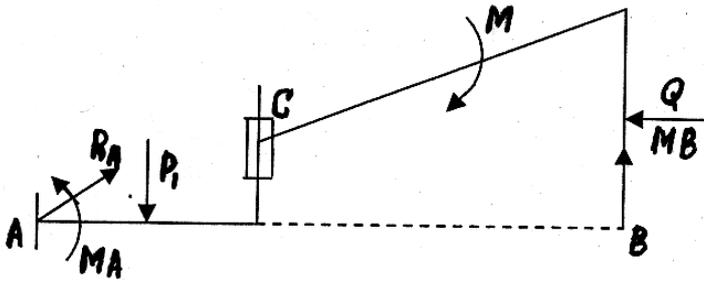
$$R_A = 1.64 \text{ кН}$$

$$M_A = -12.6 + R_A \cdot 4.2 = -12.6 + 1.64 \cdot 4.2 = -12.6 + 6.89 = -5.7 \text{ кН}$$

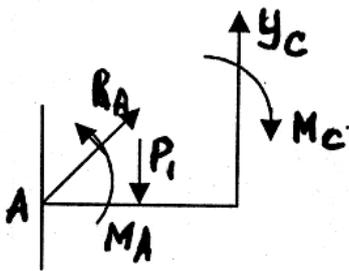
$$M_A = -5.7 \text{ кН}$$

2. Расчетная схема при соединении конструкции в точке со скользящей заделкой.

Рис 3



Системы сил, показанные на рис 2 и 3 ничем друг от друга не отличаются. Поэтому уравнение 2 остается в силе. Для получения второго уравнения, рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к части конструкции расположенной левее скользящей заделки С (рис 4)



Составим уравнение равновесия

$$\sum X = 0$$

$$R_A \cdot \cos 45^\circ = 0$$

$$R_A = 0$$

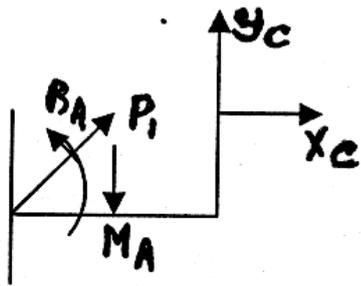
Из второго уравнения

$$M_A = -12.6 \text{ кН}$$

При соединении в точке С скользящей заделкой момент реакции опоры  $M_A$  больше, чем при шарнирном соединении. При шарнирном соединении опоры наименьший ( $\approx$  на 55 %).

Найдем составляющие реакции опоры В при шарнирном соединении.

Для левой от С части:



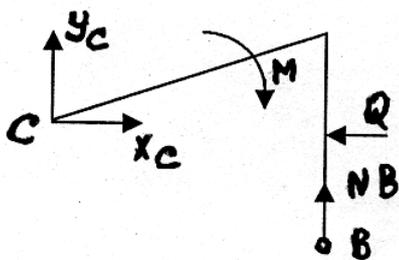
$$\sum Y_i = 0$$

$$R_A \cdot \cos 45^\circ - P_1 = 0$$

$$R_A \cdot \cos 45^\circ = P_1$$

$$R_A = P_1 / 0.7 = 11.43 \text{ кН}$$

Для правой от С части:



$$\sum M(B) = 0$$

$$-X_C \cdot 1 - Y_C \cdot 4 - M + Q \cdot 1.5 = 0$$

$$-X_C - Y_C \cdot 4 - 18 + 4.2 \cdot 1.5 = 0$$

$$-X_C - Y_C \cdot 4 = 11.7$$

$$\sum X = 0$$

$$X_C - Q = 0$$

$$X_C = Q = 4.2 \text{ кН}$$

$$\sum Y = 0$$

$$Y_C + N_B = 0$$

$$-4.2 - Y_C \cdot 4 = 11.7$$

$$-15.9 = Y_C \cdot 4$$

$$Y_C = -3.975 \text{ кН}$$

$$N_B = -Y_C \approx 4 \text{ кН}$$

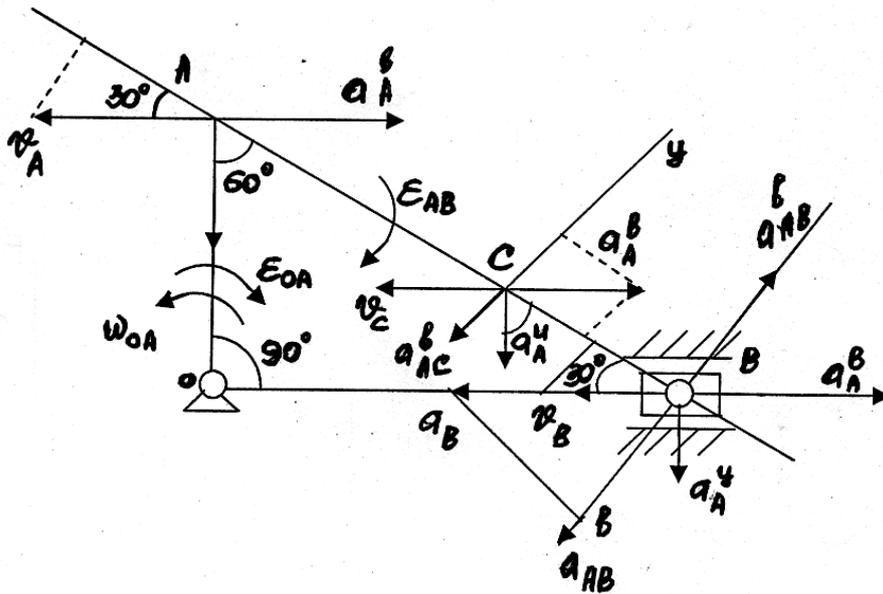
Проверка:

$$\sum M(A) = 0$$

$$M_A - P_1 \cdot 1 - M + Q \cdot 1.5 + N_B \cdot 6 = 0$$

$$-5.7 - 8 - 18 + 4.2 \cdot 1.5 + 4 \cdot 6 = -5.7 - 8 - 18 + 6.3 + 24 = -1.4$$

### Задание К3 Кинематический анализ плоского механизма



Дано:

$$OA = 35 \text{ см}$$

$$AC = 45 \text{ см}$$

$$\omega_{OA} = 4 \text{ P/c}$$

$$\epsilon_{OA} = 8 \text{ P/c}^2$$

Найти:

Для заданного положения механизма скорости и ускорения точек В и С, а также угловую скорость и угловое ускорение звена которому эти точки принадлежат.

Решение:

Определяем скорости точек и угловую скорость звена. Вычисляем модуль скорости пальца А кривошипа ОА при заданном положении механизма

$$V_A = \omega_{OA} \cdot O_A = 4 \cdot 35 = 140 \text{ см/с}$$

Скорость точки А  $V_A$  перпендикулярно ОА. Скорость ползуна В направлена по горизонтали.

$$V_A \cdot \cos \alpha = V_B \cdot \cos \beta$$

$$V_B = V_A \cos \alpha / \cos \beta = V_A \cdot \cos 30^\circ / \cos 30^\circ = V_A$$

$$V_B = 140 \text{ см/с}$$

$$\omega_{AB} = V_B - V_A / A_B = 0 / A_B = 0$$

Так как скорости точек А и В плоской фигуры параллельны друг другу и линия  $A_B$  не перпендикулярна  $V_A$ , то мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности и скорости всех точек параллельны  $V_A$ . Скорости всех точек фигуры в данный момен

времени равны друг другу и по модулю и по направлению, Имеем мгновенное поступательное распределение скоростей

$$V_C = 140 \text{ см/с}$$

2. Определяем ускорения точек и угловое ускорение звена . Ускорение точки А складывается из вращательного и центростремительного ускорений.

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^B + \bar{a}_A^{\text{II}}$$

$$a_{BA} = \varepsilon_{OA} \cdot O_A = 8 \cdot 35 = 280 \text{ см/с}^2$$

$$a_A^{\text{II}} = \omega_{OA}^2 \cdot O_A = 4^2 \cdot 35 = 560 \text{ см/с}^2$$

$$\bar{a}_A^B = \bar{a}_A^{\tau}$$

$$\bar{a}_A^{\text{II}} = \bar{a}_A^{\text{n}}$$

Согласно теореме об ускорениях плоской фигуры

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^B + \bar{a}_{AB}^{\text{II}} \quad (1)$$

$$a_{AB}^{\text{II}} = \omega_{AB}^2 \cdot A_B = 0 \cdot A_B = 0$$

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = -a_A^B \cdot \cos 30^\circ + a_A^{\text{II}} \cdot \cos 60^\circ + a_{AB}^{\text{II}} \quad (2)$$

$$a_B \cdot \cos 60^\circ = -a_A^B \cdot \cos 60^\circ + a_A^{\text{II}} \cdot \cos 30^\circ + a_{AB}^B \quad (3)$$

$$a_B \cdot \sqrt{3}/2 = -280 \cdot \sqrt{3}/2 + 560 \cdot 1/2 + 0$$

$$a_B \cdot 0.866 = -280 \cdot 0.866 + 560 \cdot 0.5$$

$$a_B = -242.48 + 280 / 0.866 = 43.33 \text{ см/с}^2$$

$$a_{AB}^B = a_B \cdot \cos 60^\circ + a_A^B \cdot \cos 60^\circ - a_A^{\text{II}} \cdot \cos 30^\circ$$

$$a_{AB}^B = 43.33 \cdot 1/2 + 280 \cdot 1/2 - 560 \cdot \sqrt{3}/2$$

$$a_{AB}^B = 21.665 + 140 - 484.97 = -323.31 \text{ см/с}^2$$

$$O_A / A_B = \cos 60^\circ$$

$$A_B = O_A / \cos 60^\circ = 35 / 1/2 = 70 \text{ см}$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^B + \bar{a}_A^{\text{II}} + \bar{a}_{AB}^B + \bar{a}_{AB}^{\text{II}}$$

$$a_A^B = 280 \text{ см/с}^2$$

$$a_A^{\text{II}} = 560 \text{ см/с}^2$$

$$a_{AB}^B = -323.31 \text{ см/с}^2$$

$$a_{AB}^{\text{II}} = 0$$

$$\mu = a_A^B / 50 = 280 / 50 = 5.6 \text{ см/с}^2 / \text{мм}$$

$$bc = 560 / 5.6 = 100 \text{ мм}$$

$$cd = a_{AB}^{\text{II}} / 5.6 = 0 / 5.6 = 0$$

## Задание Д1

### Динамика материальной точки

#### Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

#### Интегрирование дифференциальных уравнений движение материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.

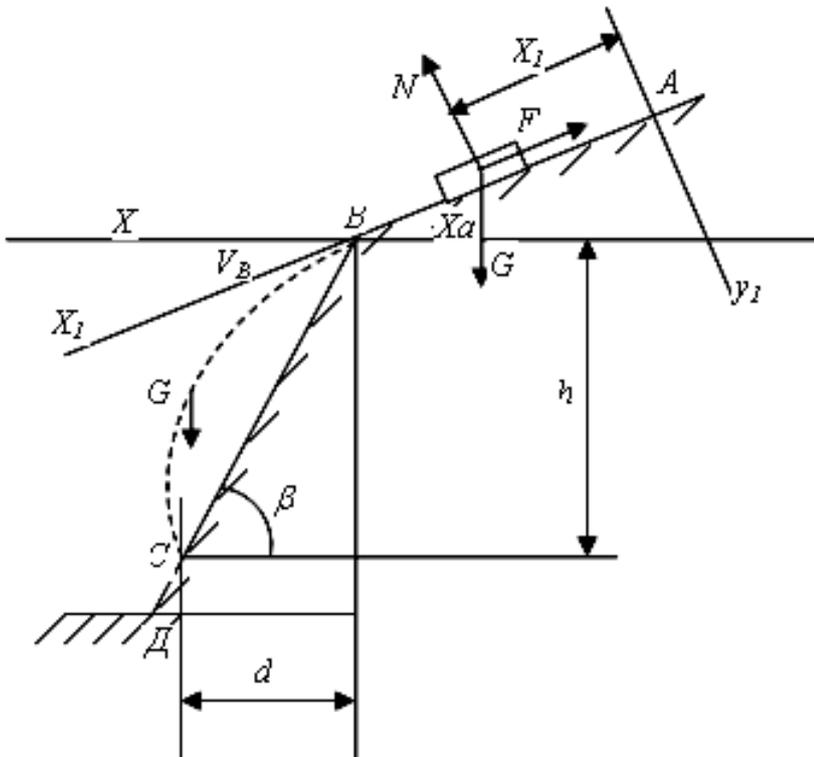
Вариант 4.

Дано :

$$V_A = 0$$

$$\tau = 2 \text{ с}$$

$$l = 9.8 \text{ м}$$



$$\beta = 60^\circ$$

$$f = 0$$

Найти:

$$\alpha = ?$$

$$T = ?$$

Решение:

На тело действуют следующие силы: вес  $G$ , нормальная реакция  $N$ , сила трения скольжения  $F$ . Составим дифференциальное уравнение движение тела на участке  $AB$ :

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = \sum x_{i1}$$

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = G \cdot \sin \alpha - F$$

Сила трения определяется по следующей формуле:  $F = f \cdot N$  где  $N = G \cdot \cos \alpha$

Таким образом,

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = G \cdot \sin \alpha - f \cdot m \cdot g \cos \alpha$$

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = mg \sin \alpha - f \cdot \cos \alpha$$

$$d^2 x_1 / d t^2 = g (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

$$d^2 x_1 / d t^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) d t^2$$

Интегрируем дифференциальное уравнение дважды и получаем:

$$\int d^2 x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int d t^2$$

$$V_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$dV_{x_1} / d t = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$\int dV_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int t d t + C_1 \int d t$$

$$x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2 + C_1 t + C_2$$

Определим постоянные интегрирования. Используем следующие начальные условия:

$$t = 0; \quad x_{10} = 0; \quad V_{10} = 0; \quad V_A = V_{10}$$

$$\text{Составим уравнения, полученные при } t = 0: \quad V_{10} = C_1, \quad x_{10} = C_2$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0$$

$$\text{Тогда} \quad V_{x_1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t$$

$$x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2$$

Для момента  $\tau$ , когда тело покидает участок  $A_B$

$$V_{x_1} = V_B; \quad x_1 = \ell$$

$$V_B = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau$$

$$\ell = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau^2 / 2$$

$$\ell = V_B \cdot \tau / 2$$

$$V_B = 2 \ell / \tau = 2 \cdot 9.8 / 2 = 9.8 \text{ м/с}$$

$$9.8 = 9.8 (\sin \alpha - 0 \cdot \cos \alpha) \cdot \tau^2 / 2$$

$$9.8 = 9.8 \cdot \sin \alpha \cdot \tau^2 / 2$$

$$1 = \sin \alpha \cdot \tau^2 / 2$$

$$1 = \sin \alpha \cdot 2$$

$$\sin \alpha = 0.5$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Рассмотрим движение тела от точки В до точки С. Составим дифференциальное уравнение движения тела при действии на него силы тяжести

$$m \cdot d^2 x / d t^2 = 0 \quad m \cdot d^2 y / d t^2 = G$$

$$\text{Начальные условия: при } t = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

$$V_x 0 = V_B \cdot \cos \alpha \quad V_y 0 = V_B \cdot \sin \alpha$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\int d^2 x = 0 \quad m \cdot d^2 y / d t^2 = mg$$

$$V_x = C_3 \quad \int d^2 y = g \int d t^2$$

$$d V_x / d t = C_3 \quad V_y = g t + C_4$$

$$\int d V_x = C_3 \int d t \quad d V_y / d t = g t + C_4$$

$$x = C_3 t + C_5 \quad \int d V_y = g \int t d t + C_4 \int d t$$

$$y = g t^2 / 2 + C_4 t + C_6$$

Полученные уравнения: при  $t = 0$

$$V_{x_0} = C_3 \quad V_{y_0} = C_4$$

$$x_0 = C_5 \quad y_0 = C_6$$

Отсюда:

$$V_B \cdot \cos \alpha = C_3 \quad V_B \cdot \sin \alpha = C_4$$

$$C_5 = 0 \quad C_6 = 0$$

Проекции скоростей тела представлены следующими уравнениями:

$$V_x = V_B \cdot \cos \alpha$$

$$V_y = g t + V_B \cdot \sin \alpha$$

Уравнения движения тела можно представить в следующем виде:

$$x = V_B \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$y = g t^2 / 2 + V_B \cdot \sin \alpha t$$

Уравнение траектории тела на участке ВС найдем, исключив параметр  $t$  из уравнений движения.

$$t = x / V_B \cos \alpha$$

$$y = g x^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

В момент падения  $y = h$ ,  $x = d$

$$h / d = \operatorname{tg} \beta$$

$$d = h / \operatorname{tg} \beta = h / \operatorname{tg} 60^\circ = h / 1.732$$

$$h = 1.732 d$$

$$h = g d^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha \cdot d$$

$$1.732 d = 9.8^2 d / 2 \cdot 9.8^2 \cdot \cos^2 30^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ \cdot d$$

$$17.32 d = d^2 / 9.8 \cdot 0.75 + 0.5774 \cdot d$$

$$0.136 d^2 - 1.1546 d = 0$$

$$d \cdot (0.136 d - 1.1546) = 0$$

$$d_1 = 0 \quad 0.136 d = 1.1546$$

$$d_2 = 8.5 \text{ м}$$

$$h = 1.732 \cdot 8.5 = 14.722 \text{ м}$$

Найдем время  $T$  движения тела от точки В до точки С по уравнению

$$T = x / V_B \cdot \cos \alpha = 8.5 / 9.8 \cdot \cos 30^\circ$$

$$T = 8.5 / 9.8 \cdot 0.866 = 8.5 / 8.5 = 1 \text{ с}$$

Скорость тела при падении найдем через проекции скорости на оси координат:

$$V_x = V_B \cos \alpha$$

$$V_y = g t + V_B \cdot \sin \alpha$$

Для момента падения  $t = T = 1 \text{ с}$

$$\begin{aligned} V_C &= \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_B^2 \cos^2 \alpha + g^2 t^2 + 2g t V_B \cdot \sin \alpha + V_B^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{9.8^2 \cdot \cos^2 30^\circ + 9.8^2 \cdot 1 + 2 \cdot 9.8 \cdot 1 \cdot 9.8 \cdot \sin 30^\circ + 9.8^2 \cdot \sin^2 30^\circ} = \\ &= \sqrt{96.04 \cdot 0.866^2 + 96.04 + 192.08 \cdot 0.5 + 96.04 \cdot 0.25} = \\ &= \sqrt{72.026 + 96.04 + 96.04 + 24.01} = \sqrt{16.97} \text{ м/с} \end{aligned}$$

### Задание С3

#### Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел).

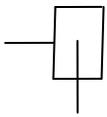
Конструкция состоит из двух частей. Установить при каком способе соединения частей конструкции модуль реакции наименьший и для этого соединения определить реакции опор, а также соединения С.

Дано:

$$P_1 = 9 \text{ кН}$$

$$M = 16 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

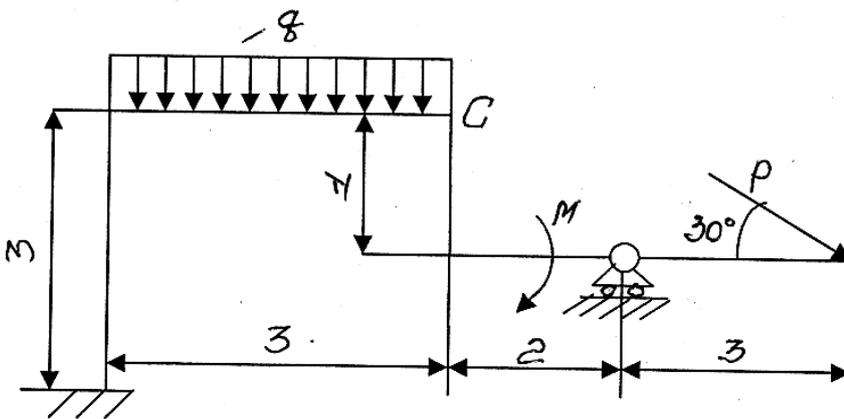
$$q = 1.6 \text{ кН/м}$$



вид скользящей заделки

Найти:

$$R_A - ?$$



Решение:

1) Определение реакции опоры А при шарнирном соединении в точке С.

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции. Составим уравнение моментов сил относительно точки В. Для упрощения вычисления моментов сил  $P_1$  разложим ее на вертикальную и горизонтальную составляющие.

$$P_1' = P_1 \cdot \cos 30^\circ = 9 \cdot \sqrt{3}/2 = 7.79 \text{ кН}$$

$$P_1 = P_1 \cdot \sin 30^\circ = 9 \cdot 1/2 = 4.5 \text{ кН}$$

$$\sum M (B) = 0$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 5 + Q \cdot 3.5 - P_1 \cdot 3 - M = 0$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 5 = -Q \cdot 3.5 + P_1 \cdot 3 +$$

$$Q = q \cdot 3 = 1.6 \cdot 3 = 4.8 \text{ кН}$$

$$X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 5 = 4.8 \cdot 3.5 + 4.5 \cdot 3 + 16 = 46.3 \text{ кН}$$

Составляем уравнение моментов сил относительно точки С

$$\sum M (C) = 0$$

$$X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 3 + Q \cdot 1.5 = 0$$

$$X_A \cdot 3 - Y_A \cdot 3 = -Q \cdot 1.5$$

$$3X_A - 3Y_A = -4.8 \cdot 1.5 = -7.2 \text{ кН}$$

$$2X_A - 5Y_A = 46.3$$

$$3X_A - 3Y_A = -7.2$$

$$X_A = -7.2 + 3Y_A / 3 = -7.2 - 51 / 3 = -58.2 / 3 = -19.4$$

$$2 \cdot (-7.2 + 3Y_A) / 3 - 5Y_A = 46.3$$

$$-14.4 + 6Y_A / 3 - 5Y_A = 46.3$$

$$-14.4 + 6Y_A - 15Y_A = 13.83$$

$$-9Y_A = 28.23$$

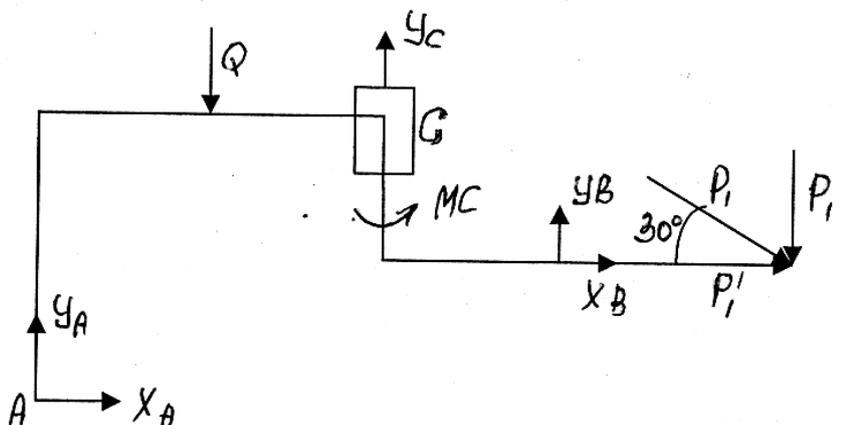
$$Y_A = -3.14 \text{ кН}$$

$$X_A = -7.2 + 3 \cdot (-3.14) / 3 = -7.2 - 9.42 / 3 = -16.62 / 3 = -5.54$$

$$R_A = \sqrt{(-3.14)^2 + (-5.54)^2} = 6.37 \text{ кН}$$

Модуль реакции опоры А при шарнирном соединении в точке С равен  $R_A = 6.37 \text{ кН}$

Расчетная схема при соединении частей конструкции в точке С скользящей заделкой



Составим уравнение равновесия

$$\sum X = 0 \quad X_A = 0$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_A - Q = 0 \quad Y_A = Q$$

Модуль реакции опоры А при скользящей заделке в точке С равен

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{4.8^2} = 4.8 \text{ кН}$$

При скользящей заделке реакция  $R_A$  наименьшая. Составим уравнение моментов относительно точки С

$$\sum M (C) = 0$$

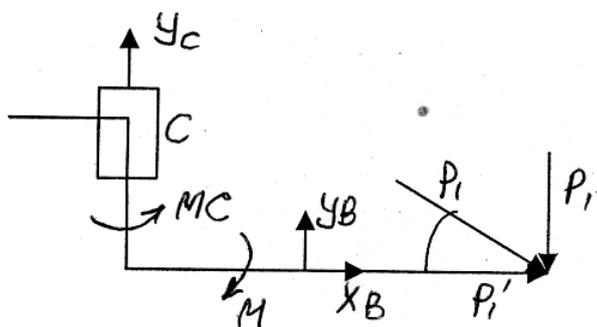
$$-M + Y_B \cdot 2 + X_B \cdot 1 + P_1 \cdot 1 - P_1 \cdot 5 = 0$$

$$2 \cdot Y_B + X_B = M - P_1 + P_1 \cdot 5$$

$$2 \cdot Y_B + X_B = 16 - 7.79 + 4.5 \cdot 5 = 30.71 \text{ кН}$$

$$2 \cdot Y_B + X_B = 30.71 \text{ кН}$$

Составим уравнение равновесия



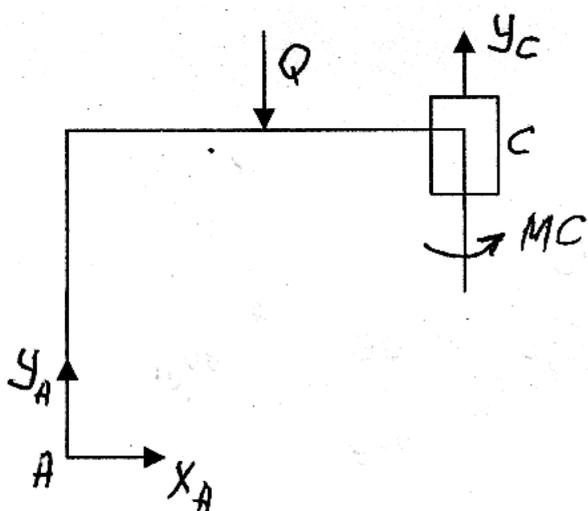
$$\sum Y = 0$$

$$Y_A - Q + Y_C = 0$$

$$Y_C = Q - Y_A = 0$$

$$Y_C = 4.8 - 4.8 = 0$$

Составим уравнение относительно момента точки В



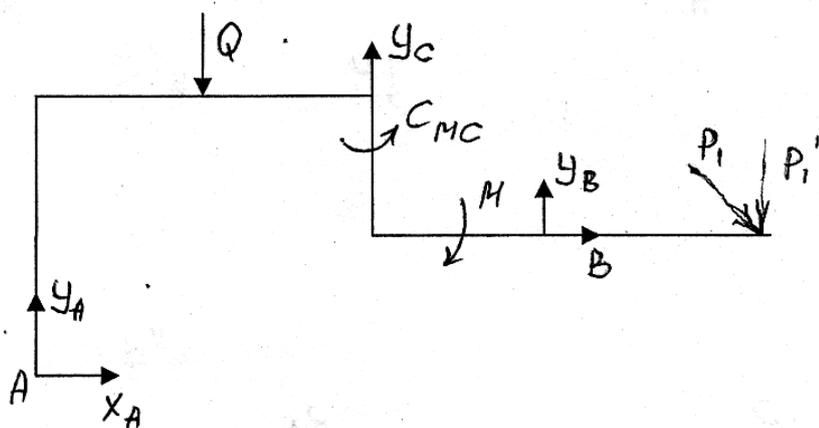
$$\sum M(B) = 0$$

$$M_C = -2X_A + 5Y_A - 3.5Q + 2Y_C + M = 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4.8 - 3.5 \cdot 4.8 + 2 \cdot 0 + 16 = 23.2 \text{ кН}$$

Составим уравнение равновесия

$$\sum X = 0 \quad X_A + X_B - P_1 = 0$$

$$X_B - P_1 - X_A = 7.79 \text{ кН}$$

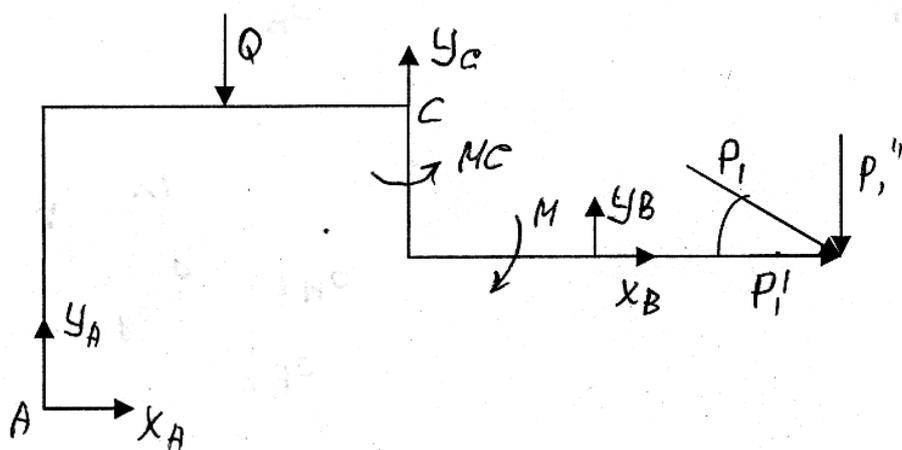


Составим уравнение равновесия

$$\sum Y = 0$$

$$Y_B + Y_A - Q + Y_C + P_1 = 0$$

$$Y_B = -Y_A + Q - Y_C - P_1 = -4.8 + 4.8 - 0 + 4.5 = 4.5 \text{ кН}$$



Проверка

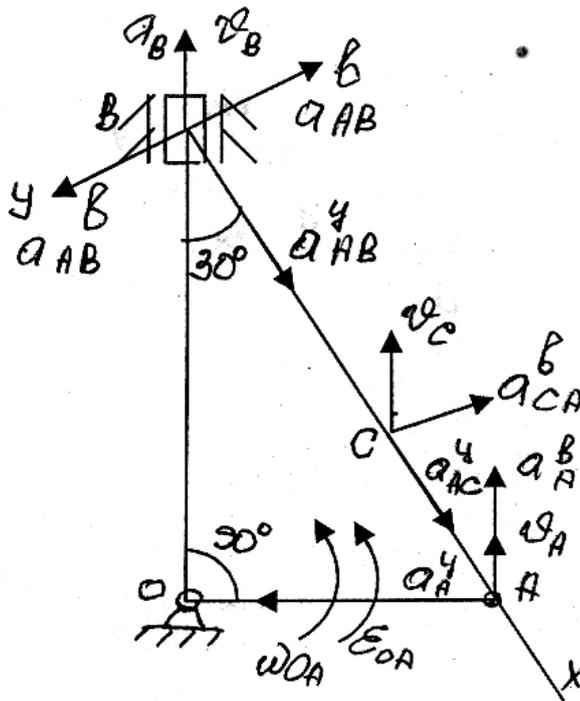
$$\sum M(A) = 0$$

$$-Q \cdot 1.5 - M + Y_B \cdot 5 + X_B \cdot 2 + P_1 \cdot 2 - P_1' \cdot 8 =$$

$$= -4.8 \cdot 1.5 - 16 + 4.5 \cdot 5 + 7.79 \cdot 2 + 7.79 \cdot 2 - 4.5 \cdot 8 = -5.54$$

### Задание К3

#### Кинематический анализ плоского механизма



Дано:

$$O_A = 25 \text{ см}$$

$$A_C = 20 \text{ см}$$

$$\omega_{OA} = 1 \text{ р/с}$$

$$\epsilon_{OA} = 1 \text{ р/с}^2$$

Найти:

Для заданного положения механизма скорости и ускорения точек B и C, а также угловую скорость и угловое ускорение звена которому эти точки принадлежат.

Решение:

Определяем скорости точек и угловую скорость звена

$$V_A = \omega_{OA} \cdot O_A = 1 \cdot 25 = 25 \text{ см/с}$$

$$V_B = V_A = 25 \text{ см/с}$$

$$V_C = V_A = 25 \text{ см/с}$$

$$\omega_{AB} = 0$$

При угле  $\varphi = 90^\circ$  скорости  $V_A, V_B, V_C$  направлены параллельно и перпендикулярно к ним пересекаются в бесконечности.

Мгновенный центр скоростей лежит в бесконечности.

## 2. Определяем ускорения точек и угловое ускорение звена

Ускорение точки А складывается из вращательного и центростремительного ускорений

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^B + \bar{a}_A^Ц$$

$$a_{BA} = \varepsilon_{OA} \cdot O_A = 1 \cdot 25 = 25 \text{ см/с}^2$$

$$a_A^Ц = \omega_{OA}^2 \cdot O_A = 1^2 \cdot 25 = 25 \text{ см/с}^2$$

$$\bar{a}_A^B = \bar{a}_A^\tau$$

$$\bar{a}_A^Ц = \bar{a}_A^n$$

Согласно теореме об ускорениях плоской фигуры

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{AB}^B + \bar{a}_{AB}^Ц \quad (1)$$

$$a_{AB}^Ц = \omega_{AB}^2 \cdot A_B = 0 \cdot A_B = 0$$

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = -a_A^B \cdot \cos 30^\circ + a_A^Ц \cdot \cos 60^\circ + a_{AB}^Ц \quad (2)$$

$$a_B \cdot \cos 60^\circ = -a_A^B \cdot \cos 60^\circ + a_A^Ц \cdot \cos 30^\circ + a_{AB}^B \quad (3)$$

$$a_B \cdot \sqrt{3}/2 = -25 \cdot \sqrt{3}/2 + 25 \cdot 1/2 + 0$$

$$a_B \cdot 0.866 = -21.65 + 12.5$$

$$a_B = -10.57 \text{ см/с}^2$$

$$a_B \cdot 1/2 = -25 \cdot 1/2 + 25 \cdot \sqrt{3}/2 + a_{AB}^B$$

$$-10.57 \cdot 1/2 + 12.5 - 21.65 = a_{AB}^B$$

$$-5.285 + 12.5 - 21.65 = a_{AB}^B$$

$$a_{AB}^B = -14.435 \text{ см/с}^2$$

Направление  $a_{AB}^B$  противоположно показанному

$$\varepsilon_{AB} = |a_{AB}^B| / A_B = |-14.435| / 50 = 0.29 \text{ р/с}^2$$

$$O_A/O_B = \text{tg } 30^\circ$$

$$O_B = O_A / \text{tg } 30^\circ = 25 / 0.5774 = 43.29 \text{ см}$$

$$A_B = \sqrt{O_A^2 + O_B^2} = \sqrt{25^2 + 43.29^2} = \sqrt{625 + 1874} = 49.99 \sim 50 \text{ см}$$

Определяем ускорение точки С

$$\bar{a}_C = \bar{a}_{BA} + \bar{a}_{CA} + \bar{a}_{BAC} + \bar{a}_{CAC}$$

$$a_{BAC} = \varepsilon_{AB} \cdot AC$$

$$a_{CAC} = \omega_{AB}^2 \cdot AC$$

$$a_{BAC} = 0,29 \cdot 20 = 5,8 \text{ см/с}^2$$

$$a_{CAC} = 0 \cdot 20 = 0$$

$a_{BAC}$  перпендикулярно  $a_{CAC}$

Ускорение точки C находим способом проекций

$$a_{Cx} = a_{CAC} + a_{CA} \cdot \cos 60^\circ - a_{BA} \cdot \cos 30^\circ$$

$$a_{Cy} = a_{BAC} + a_{CA} \cdot \sin 30^\circ + a_{BA} \cdot \cos 60^\circ - a_{BAC}$$

$$a_C = \sqrt{(a_{Cx})^2 + (a_{Cy})^2} = \sqrt{20534,89 + 40000} = 246 \text{ см/с}$$

$$a_{Cx} = 0 + 25 \cdot 1/2 - 25 \cdot \sqrt{3}/2 = 12,5 - 21,65 = -9,15 \text{ см/с}^2$$

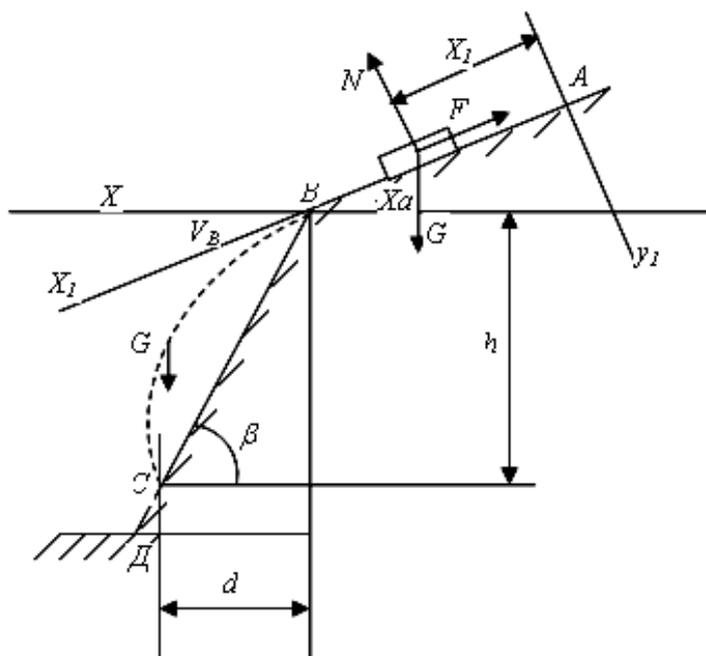
$$a_{Cy} = 25 \cdot \sqrt{3}/2 + 25 \cdot 1/2 - 5,8 = 21,65 + 12,5 - 5,8 = 28,35 \text{ см/с}^2$$

### Задание Д1

#### Динамика материальной точки

**Дифференциальные уравнения движения материальной точки.**

**Интегрирование дифференциальных уравнений движение материальной точки, находящейся под действием постоянных сил.**



Тело движется из точки А по участку АВ (длиной  $\ell$ ) наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом в течении  $\tau$ . Его начальная скорость  $V_A$ . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен  $f$ . В точке В тело покидает плоскость со скоростью  $V_B$  и падает со скоростью  $V_C$  с точку С плоскости ВD, наклоненной под углом  $\beta$  к горизонту, находясь в воздухе  $T_C$ . При решении задачи тело принять за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 5.

Дано :

$$\alpha = 30^\circ$$

$$V_A = 0$$

$$\ell = 9.8 \text{ м}$$

$$\tau = 3 \text{ с}$$

$$\beta = 45^\circ$$

Определить  $f$  и  $V_C$

Решение:

На тело действуют следующие силы: вес  $G$ , нормальная реакция  $N$ , сила трения скольжения  $F$ .

Составим дифференциальное уравнение движения тела на участке АВ:

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = \sum x_{i1}$$

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = G \cdot \sin \alpha - F$$

$$\text{Сила трения } F = f \cdot N \quad \text{где } N = G \cdot \cos \alpha$$

Таким образом,

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = G \cdot \sin \alpha - f \cdot G \cdot \cos \alpha$$

$$m \cdot d^2 x_1 / d t^2 = mg \sin \alpha - f \cdot m \cdot g \cos \alpha$$

$$d^2 x_1 / d t^2 = g (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)$$

$$d^2 x_1 / d t^2 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) d t^2$$

Интегрируем дифференциальное уравнение дважды и получаем:

$$\int d^2 x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int d t^2$$

$$V_{x1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$dV_{x1} / d t = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1$$

$$\int dV_{x1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \int t d t + C_1 \int d t$$

$$x_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2 + C_1 t + C_2$$

Определим постоянные интегрирования. Используем следующие начальные условия:

$$t = 0; \quad x_{10} = 0; \quad V_{10} = 0; \quad V_A = V_{10}$$

Составим уравнение при  $t = 0$ :

$$V_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2$$

Найдем постоянные:

$$C_1 = 0; \quad C_2 = 0$$

$$\text{Тогда} \quad V_{x1} = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t$$

$$X_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 / 2$$

Для момента  $\tau$ , когда тело покидает участок АВ

$$V_{x1} = V_B; \quad x_1 = l$$

$$V_B = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau$$

$$l = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau^2 / 2$$

$$l = V_B \cdot \tau / 2$$

$$V_B = 2 l / \tau = 2 \cdot 9.8 / 3 = 6.53 \text{ м/с}$$

$$9.8 = 9.8 (\sin 30^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) \cdot 4.5$$

$$\sin 30^\circ - f \cdot \cos 30^\circ = 0.2222$$

$$0.5 - f \cdot 0.866 = 0.2222$$

$$f \cdot 0.866 = 0.5 - 0.2222$$

$$f = 0.2778 / 0.866 = 0.32$$

Рассмотрим движение точки В до точки С.

Составим дифференциальное уравнение движения тела при действии на него силы тяжести:

$$m \cdot d^2 x / dt^2 = 0 \quad m \cdot d^2 y / dt^2 = G$$

$$\text{Начальные условия: при } t = 0 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

$$V_{x0} = V_B \cdot \cos \alpha \quad V_{y0} = V_B \cdot \sin \alpha$$

Интегрируем дифференциальные уравнения дважды:

$$\int d^2 x = 0 \quad m \cdot d^2 y / dt^2 = mg$$

$$V_x = C_3 \quad \int d^2 y = g \int dt^2$$

$$dV_x / dt = C_3 \quad V_y = g t + C_4$$

$$\int dV_x = C_3 \int dt \quad dV_y / dt = g t + C_4$$

$$x = C_3 t + C_5 \quad \int dV_y = g \int t dt + C_4 \int dt$$

$$y = g t^2 / 2 + C_4 t + C_6$$

Полученные уравнения: при  $t = 0$

$$V_{x0} = C_3 \quad V_{y0} = C_4$$

$$x_0 = C_5 \quad y_0 = C_6$$

Отсюда:

$$V_B \cdot \cos \alpha = C_3 \quad V_B \cdot \sin \alpha = C_4$$

$$C_5 = 0 \quad C_6 = 0$$

Проекции скоростей тела представлены следующими уравнениями:

$$V_x = V_B \cos \alpha$$

$$V_y = g t + V_B \cdot \sin \alpha$$

Уравнения движения тела можно представить в следующем виде:

$$x = V_B \cdot \cos \alpha t$$

$$y = g t^2 / 2 + V_B \cdot \sin \alpha \cdot t$$

Уравнение траектории тела на участке ВС найдем, исключив параметр  $t$  из уравнений движения.

$$t = x / V_B \cos \alpha$$

$$y = g x^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha + tg \alpha \cdot x$$

$$\text{В момент падения } y = h, \quad x = d$$

$$h / d = tg \beta$$

$$h = tg \beta \cdot d = tg 45^\circ \cdot d = d$$

$$d = g d^2 / 2 V_B^2 \cos^2 \alpha = tg \alpha \cdot d$$

$$d = 9.8 \cdot d^2 / 2 \cdot 6.53^2 \cos^2 30^\circ = tg 30^\circ \cdot d$$

$$d = 9.8 d^2 / 85.2818 \cdot 0.75 + 0.5774 \cdot d$$

$$d = 0.153d^2 + 0.5774d$$

$$0.153d^2 + 0.5774d - d = 0$$

$$0.153d^2 - 0.4226d = 0$$

$$d(0.153d - 0.4226) = 0$$

$$d_1 = 0$$

$$0.153d - 0.4226 = 0$$

$$0.153d = 0.4226$$

$$d = 2.762 \text{ м}$$

Найдем время  $T$  движения тела от точки В до точки С по уравнению

$$T = x / V_B \cdot \cos \alpha = 2.762 / 6.53 \cdot \cos 30^\circ = 2.762 / 6.53 \cdot 0.866 = 0.4886 \sim 0.5 \text{ с}$$

Скорость тела при падении найдем через проекции скорости на оси координат:

$$V_x = V_B \cos \alpha$$

$$V_y = gt + V_B \cdot \sin \alpha$$

Для момента падения  $t = T = 0.5 \text{ с}$

$$V_C = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_B^2 \cos^2 \alpha + g^2 t^2 + 2gt V_B \cdot \sin \alpha + V_B^2 \sin^2 \alpha} =$$

$$= \sqrt{6.53^2 \cdot \cos^2 30^\circ + 9.8^2 \cdot 0.5^2 + 2 \cdot 9.8 \cdot 0.5 \cdot 6.53 \cdot \sin 30^\circ + 6.53^2 \cdot \sin^2 30^\circ} =$$

$$= \sqrt{42.6409 \cdot 0.75 + 96.04 + 0.25 \cdot 31.997 + 10.66} =$$

$$= \sqrt{31.98 + 24.01 + 31.997 + 10.66} = \sqrt{98.647} = 9.93 \text{ м/с}$$

#### Список использованной литературы

1. А.А Яблоиский, В. М Никифорова Курс теоретической механики I часть М; Высшая школа, 1984.
2. А.А. Яблоиский Курс теоретической механики часть II Динамика М. Высшая школа, 1984
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике Под общей редакцией профессора. А.А. Яблонского М. Высшая школа 1985.
4. С.М.Тарг Краткий курс теоретической механики Москва «Высшая школа» 1986.
5. Н.Н.Никитин Курс теоретической механики М; Высшая школа 1990.