АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 519.6

АЛЛАМУРАТОВ ШАРАПАТДИН ЗИУАТДИНОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАССОПЕРЕНОСА, В СЛОИСТЫХ СИСТЕМАХ ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

05.13.18 - Теоретические основы математического моделирования

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ташкент - 2011

Работа выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор **Музафаров Хафиз Азизович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Халмухамедов Олимжон Рахимович**
	кандидат физико-математических наук, доцент **Хайдаров Абдугаппар Ташпулатович**
Ведущая организация	Ташкентский университет информационных технологий

Защита состоится «_____» ________________ 2012 г. в «_____» часов на заседании специализированного совета Д 015.17.02 при Институте математики и информационных технологий АН РУз по адресу: 100125, г.Ташкент, ул. Дурмон йули, 29.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий АН РУз.

Автореферат разослан «_____» ______________ 2012 г.

Учёный секретарь
специализированного совета Исмаилов М.А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность работы. В наше время современную науку невозможно представить без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного обьекта его “образом”- математической моделью и в дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью даёт возможность безболезненно, относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях.

С этой целью была использована математическая модель массопереноса в многослойной среде. Предложенная математическая модель наиболее полно описывает физический процесс и она реализована аналитическими и численными методами, когда система уравнении, в частности, описывала массоперенос в слоистых средах. При аналитическом приближенно-аналитическом (численном) решении был использован учет нестационарного режима исследуемого процесса.

Реализация таких моделей аналитическими методами даже для частных случаев имеет большое значение при определении физических параметров входящих в неё путем сопоставления этих решений с данными экспериментальных исследований, а так же при оценке устойчивости и сходимости, когда такие модели реализуются численными методами. Нужно отметить, что при исследовании пространственных задач (плановых моделей) в многослойных системах имеется небольшое число решений краевых задач описываемых уравнениями в частных производных параболического типа.

Степень изученности проблем. Использование аналитических и численных методов решений анологичных моделей для нестационарных процессов в ряде случаев были произведены А.А.Самарским, Н.Н.Веригиным, П.Я.Полубариновой-Кочиной, М.С.Хантушем, А.Н.Тихоновым, Г.И.Марчуком, В.М.Шестаковым, Л.М.Рексом, Л.И.Седовым, Ф.Б.Абуталиевым, У.У.Умаровым, И.И.Измайловым, Н.Мухитдиновым, М.А.Гусейнзаде, С.И.Ляшко, А.В.Лыковым, С.В. Нерпиным, А.Бегматовым, М.Б.Баклушиным, Р.Н.Усмановым и другими учеными приминительно к задачам массопереноса жидкости и солей в слоистых пористых средах.

Здесь при получении аналитических, приближенно-аналитических (численных) решений в отличие от многих других исследователей были использованы совместно теории дифференциальных уравнений в частных производных, функции комплексного переменного и метода конечных элементов. Ранее метод конечных элементов применялся без привлечения различного рода интегральных преобразований при отсутствии первой производной по пространственной координате .

С этой целью была использована математическая модель массопереноса в многослойной пористой среде

$$\begin{cases} \varepsilon[\eta(x-x_1)-\eta(x-x_0)][\eta(y-y_1)-\eta(y-y_0)][\eta(t-t_1)-\eta(t-t_0)]-\mu\dfrac{\partial\tilde{z}}{\partial t}=k\dfrac{\tilde{z}-h}{\langle z\rangle}, \\ \dfrac{1}{a_1}\dfrac{\partial h}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\dfrac{k}{T}\dfrac{\tilde{z}-h}{\langle z\rangle}+\dfrac{k_n\gamma_1}{m_nT}(H_0-h)-\dfrac{k_n\gamma_2}{T}\dfrac{\partial H}{\partial z}\bigg|_{z=-m}, \\ \dfrac{1}{a_2}\dfrac{\partial H}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \\ D\dfrac{\partial^2 c}{\partial z^2}-\upsilon(x,y,t)\dfrac{\partial c}{\partial z}=m_э\dfrac{\partial c}{\partial t}, \end{cases}$$

при определенных начальных и граничных условиях.

Эта система является гибридной, описывающая движение жидкости, перемещение раствора солей, изменение температурного режима с учетом сжимаемости скелета среды и содержащейся в ней массы вещества.

В данной постановке, в отличие от других исследователей, было произведено обобщение постоянного значения ε-на функциональную зависимость её от координат и времени в виде $\varepsilon[\eta(x-x_1)-\eta(x-x_0)][\eta(y-y_1)-\eta(y-y_0)][\eta(t-t_1)-\eta(t-t_0)]$, что приближает к описанию реального физического процесса.

С учётом деформируемости среды, которая учитывается коэффициентом a_2, получено аналитическое решение при определенных начальных и граничных условиях.

Получено аналитическое решение двумерной задачи массопереноса методом расщепления.

Для некоторых частных случаев массопереноса в слоистых средах получены приближенно-аналитические решения с применением метода конечных элементов с использованием функции форм второго порядка. В данной диссертации указан метод выбора промежуточной точки элемента, когда на определенной момент времени приближенное решение будет совпадать с точным.

Связь диссертационной работы с тематическими планами НИР. Тема диссертационной работы утверждена на Ученом Совете Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (протокол №2 от 28 сентября 2010г.) и выполнена в соответствие с плановой темой кафедры «Вычислительных технологий и математического моделирования» НУУз.

Цель исследования. Основной целью настоящей диссертации является получение эффективных аналитических, приближенно-аналитических решений для количественного и качественного анализа при оценке массопереноса в многослойных системах.

Задачи исследования. Основные задачи, решаемые в данной диссертации, следующие:

- получение решение краевой задачи массопереноса состоящей из уравнений в частных производных параболического типа подчиненной определенным начальным и граничным условиям первого и второго родов с учетом и без учета сжимаемости среды в слабопроницаемой прослойке;

- для задачи массопереноса методом конечных элементов найти приближенно-аналитическое решение, когда уравнение содержит первую производную по пространственной переменной;
- для двумерной задачи массопереноса найти аналитическое решение методом расщепления;
- указать способ выбора средней точки конечного элемента, когда для фиксированного момента времени приближенные решения будут совпадать с аналитическим решением с точностью достаточной для практического использования.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования являются многослойные пористые среды, в которых происходит массоперенос различного характера, а предмет исследования система уравнений параболического типа, описывающих процессы массопереноса в многослойных средах.

Методы исследования. Применяются широко используемые методы математической физики, теории функции комплексного переменного, асимптотические методы, где применяется специальные функции, интегральное преобразования Лапласа, синус и косинус преобразования Фурье, метод расщепления, а так же метод конечных элементов.

Гипотеза исследования. Согласно гипотезе Мятиева-Гиринского массоперенос в трудно проводящих средах происходит преимущественно по вертикали, а в хорошо проводящих средах, при наличии бокового оттока массы, в горизонтальных направлениях. Поэтому в данной диссертации трехмерная математическая модель заменена на ряд одномерных и двумерных задач.

Основные положения, выносимые на защиту. Основными результатами диссертационной работы являются следующие:

- Получено решение краевой задачи массопереноса состоящей из уравнений в частных производных параболического типа подчиненной определенным начальным и граничным условиям первого и второго родов с учетом и без учета сжимаемости среды в слабопроницаемой прослойке.
- Для задачи массопереноса методом конечных элементов найдено приближенно-аналитическое решение, когда уравнение содержало первую производную по пространственной переменной.
- Получено аналитическое решение двумерной задачи массопереноса методом расщепления.
- Указан способ выбора средней точки конечного элемента, когда для фиксированного момента времени приближенное решения будет совпадать с аналитическим решением с точностью достаточной для практического использования.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они состоят в следующем:

1. Получено решение краевой задачи массопереноса состоящей из

уравнений в частных производных параболического типа подчиненной определенным начальным и граничным условиям первого и второго родов с учетом и без учета сжимаемости среды в слабопроницаемой прослойке.
2. Получено решение задачи массопереноса методом конечных элементов, когда уравнение содержало первую производную по пространственной переменной.
3. Получено аналитическое решение двумерной задачи массопереноса методом расщепления.
4. Указан способ выбора средней точки конечного элемента, когда для фиксированного момента времени приближенное решения будет совпадать с аналитическим решением с точностью достаточной для практического использования.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Полученные результаты могут быть использованы в задачах математической физики, приводящие к уравнением в частных производных параболического типа (тепловые, диффузионные, нефте и газодобыче и т.п.)

Реализация результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть использованы при чтении специальных курсов для магистрантов и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации систематически докладывались на семинаре кафедры «Вычислительных технологий и математического моделирования», механико-математического факультета НУУз; на международной научной конференции "Инфокоммуникационные и вычислительные технологии в науке, технике и образовании" (Ташкент, 28-30 сентября,2004 г.); на международной научно-практической конференции "ИННОВАЦИЯ-2004" (Ташкент 2004 г.); на республиканской научной конференции посвященной 85-летию государственного научно-исследовательского института почвоведения и агрохимии (Ташкент, 9-10 сентября, 2005 г.); на международной научно-практической конференции "ИННОВАЦИЯ-2006" (Ташкент, 10-12 ноября, 2006 г.); на международной научно-практической конференции "ИННОВАЦИЯ-2007" (Ташкент, 25-26 октября, 2007 г.); на международной научно-практической конференции "ИННОВАЦИЯ-2009" (Ташкент, 22-24 октября, 2009 г.).

Опубликованность результатов: результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[14], список которых приведён в конце автореферата. Среди них имеются совместные работы с Ф.Б.Абуталиевым, М.Б.Баклушиным, Х.А.Музафаровым.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы, 2-х приложений. Общий объем диссертации составляет 126 страниц, в том числе 110 страниц основного текста, 5 страниц списка литературы, 11 страниц приложения, 10 таблиц, 11 рисунков, 72 наименования литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Кратко даны сведения об основном содержании диссертации.

В первой главе работы получено решение краевой задачи массопереноса состоящей из уравнений в частных производных параболического типа, подчиненных определенным начальным и граничным условиям первого и второго родов.

В п.1.1 с учетом сжимаемости среды поток извне учтён при нестационарном режиме из прямоугольной области. В этом случае краевая задача записывалась в более обобщенном виде

$$\begin{cases} \varepsilon[\eta(\xi-\xi_1)-\eta(\xi-\xi_0)][\eta(\nu-\nu_1)-\eta(\nu-\nu_0)][\eta(\tau-\tau_1)-\eta(\tau-\tau_0)]+\dfrac{a\mu H_0}{L^2}\dfrac{\partial s_1}{\partial\tau}=\dfrac{kH_0}{\langle z\rangle}(s_2-s_1), \\ \dfrac{\partial s_2}{\partial\tau}=\dfrac{\partial^2 s_2}{\partial\xi^2}+\dfrac{\partial^2 s_2}{\partial\nu^2}+\dfrac{kL^2}{\langle z\rangle T}(s_2-s_1)-\dfrac{k_n\gamma_1 L^2}{m_n T}s_2-\dfrac{k_n\gamma_2 L^2}{m_n T}\left.\dfrac{\partial s_3}{\partial\theta}\right|_{\theta=-\frac{m}{m_n}}, \\ \dfrac{\partial s_3}{\partial\tau}=\dfrac{a_2L^2}{a_1m_n^2}\cdot\dfrac{\partial^2 s_3}{\partial\theta^2}, \end{cases} \tag{1}$$

$$s_1(\xi,\nu,0)=s_2(\xi,\nu,0)=s_3(\xi,\nu,\theta,0)=0, \tag{2}$$

$$s_2(0,\nu,\tau)=\varphi_1(\tau),\quad \left.\frac{\partial s_2}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=-\frac{L}{H_0\lambda}\varphi_2(\tau), \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial s_2}{\partial\nu}\right)_{\nu=0}=\left(\frac{\partial s_2}{\partial\nu}\right)_{\nu=\frac{\sigma}{L}}=0,\ s_3\left(\xi,\nu,-\frac{m}{m_n},\tau\right)=s_2(\xi,\nu,\tau),$$

$$(4)\ s_3\left(\xi,\nu,-\frac{m+m_n}{m_n},\tau\right)=0. \tag{5}$$

Обозначения в безразмерных переменных здесь следующие:

$$\xi=\frac{x}{L},\ \nu=\frac{y}{L},\ \theta=\frac{z}{m_n},\ \tau=\frac{a_1t}{L^2},\quad s_1(x,y,t)=\frac{s_1^*}{H_0},\ s_2(x,y,t)=\frac{s_2^*}{H_0},\ s_3(x,y,z,t)=\frac{s_3^*}{H_0}.$$

Здесь ε-задана в прямоугольной области $\xi_0\le\xi\le\xi_1$, $\nu_0\le\nu\le\nu_1$;

μ, a, к, T, $к_n$, m_n, <z> -некоторые положительные константы, η-единичная функция Хевисайда. При $\gamma_1=0$, $\gamma_2=1$ учитывается сжимаемость среды, а когда $\gamma_1=1$, $\gamma_2=0$ –среда несжимаема.

Задача решена с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени и преобразования Фурье по пространственным переменным. Решения относительно искомых функции получены в виде быстро сходящихся рядов в виде

$$s_1(\xi,\nu,\tau)=\frac{A_2}{A_1}\int_0^{\tau} e^{-\frac{A_2}{A_1}t} s_2[\xi,\nu,(\tau-t)]dt-\frac{\varepsilon}{A_2}[\eta(\xi-\xi_1)-\eta(\xi-\xi_0)]\times$$
$$\times[\eta(\nu-\nu_1)-\eta(\nu-\nu_0)]\cdot\left[(1-e^{-\frac{A_2}{A_1}(\tau-\tau_1)})\eta(\tau-\tau_1)-(1-e^{-\frac{A_2}{A_1}(\tau-\tau_2)})\eta(\tau-\tau_2)\right];$$
$$s_2(\xi,\nu,\tau)=\frac{2L}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{s}_2(n,0,\tau)\cos\frac{\pi n\sigma}{L}\xi-\frac{4L}{\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\bar{s}}_2(n,m,\tau)\cos\pi n\xi\cdot\sin\frac{(2n-1)L}{2\sigma}\nu;$$
$$s_3(\xi,\nu,\tau)=\sum_{r=1}^{\infty}(-1)^r r\sin r(\theta+A_8)\bar{s}_2(\xi,\nu,-\pi^2r^2A_5)e^{-\pi^2r^2A_5\tau}+$$
$$+\frac{2L}{\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{s}_2(n,0,r)\cos\frac{\pi n\sigma}{L}\xi\cdot\frac{\sin\varsigma_{0,n}(\theta+A_8)}{\sin\varsigma_{0,n}}+$$
$$+\frac{4L}{\sigma}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}s_2(n,m,\tau)\cos\pi n\xi\sin\frac{(2n-1)L}{2\sigma}\cdot\frac{\sin\varsigma_{m,n}(\theta+A_8)}{\sin\varsigma_{m,n}}+ \qquad (6)$$
$$+\frac{4L}{\sigma}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^r r\sin r(\theta+A_8)s_2\left(\xi,\nu,-\pi^2r^2A_5\right)e^{-\pi^2r^2A_5\tau}.$$

В результате была сформулирована следующая

Теорема 1. Если задача (1) задано при определенных начальных и граничных условиях в виде (2), (3), (4), (5), то имеет место аналитические решения в виде (6) и притом они единственны [Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными].

В п.1.2 определены искомые функции в случае, когда поток извне выражен через пространственные переменные и времени.

В этом случае использована система дифференциальных уравнений в частных производных, приведенная в п.1.1, но подчиненная граничным условиям более общего вида:

$$s_1(\xi,\nu,0)=s_2(\xi,\nu,0)=s_3(\xi,\nu,\theta,0)=0,$$
$$\left.\frac{\partial s_2}{\partial\xi}\right|_{\xi=0}=h_1[s_2(0,\nu,\tau)-\varphi_1(\tau)],\ \left.\frac{\partial s_2}{\partial\xi}\right|_{\xi=1}=-h_2[s_2(1,\nu,\tau)-\varphi_2(\tau)],$$
$$\left(\frac{\partial s_2}{\partial\nu}\right)_{\nu=0}=\left(\frac{\partial s_2}{\partial\nu}\right)_{\nu=\frac{\sigma}{L}}=0,\ s_3\left(\xi,\nu,-\frac{m}{m_n},\tau\right)=s_2(\xi,\nu,\tau),\ s_3\left(\xi,\nu,-\frac{m+m_n}{m_n},\tau\right)=0.$$

Данная краевая задача решена аналитическими методами.

В п. 1.3 произведено математическое моделирование двумерной задачи массопереноса в плане в трехслойном пласте с учетом сжимаемости среды в слабопроницаемой прослойке.

Здесь использована система дифференциальных уравнений в частных производных, приведенная в п.1.1, но подчиненная условиям:

$$s_1(\xi,\nu,0)=s_2(\xi,\nu,0)=s_3(\xi,\nu,\theta,0)=0, \qquad s_2(0,\nu,\tau)=\Phi_1(\tau),$$

$$\left.\frac{\partial s_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = -\frac{L}{\lambda H_0}\varphi_2(\tau) = \Phi_2(\tau), \qquad \left.\frac{\partial s_2}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \left.\frac{\partial s_2}{\partial \nu}\right|_{\nu=\frac{\sigma}{L}} = 0,$$

$$s_3(\xi,\nu,0,\tau) = s_2(\xi,\nu,\tau); \;\; s_3(\xi,\nu,-1,\tau) = 0,$$

После применения прямых и обратных преобразований Лапласа, Фурье получено аналитическое решение в виде быстро сходящихся рядов.

Во второй главе решены задачи массообмена в слоистой среде, когда упругими свойствами её не учитывались, но краевая задача в плане являлась нестационарной и двумерной. В этой главе получены аналитические решения искомых функции зависящих от координат и времени.

В п. 2.1, с учетом гипотезы Мятиева-Гиринского для определения искомых функции *$s_1(x,y,t)$* и *$s_2(x,y,t)$* в безразмерных переменных решается следующая краевая задача:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon[\eta(\xi-\xi_1)-(\xi-\xi_0)][\eta(\nu-\nu_1)-\eta(\nu-\nu_0)] + B_1\frac{\partial s_1}{\partial \tau} = B_2(s_2-s_1) \\ &\frac{\partial s_2}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 s_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 s_2}{\partial \nu^2} + A_1(s_1-s_2) - A_2 s_2 \end{aligned}\right\}$$

$$s_1(\xi,\nu,0) = s_2(\xi,\nu,0) = 0,$$

$$s_2(0,\nu,\tau) = \varphi(\nu,\tau) = (H-A)\cdot(1-e^{-\alpha\tau}),$$

$$\left.\frac{\partial s_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = \left.\frac{\partial s_2}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \left.\frac{\partial s_2}{\partial \nu}\right|_{\nu=\frac{\sigma}{L}} = 0, \; (\alpha = \alpha_1 t_*)$$

где введены безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad \nu = \frac{y}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_*} \quad (x = \xi L, \quad y = \nu L, \quad t = \tau t^*) \quad ,$$

и $\alpha, A, A_1, A_2, B_1, B_2, H$ – некоторые положительные константы.

После применения к краевой задаче интегрального преобразования Лапласа по временной переменной, косинус и синус - преобразованиям Фурье по пространственным переменным и обратных переходов в область оригинала получены аналитические решения.

В п.2.2 определены функции массопереноса в трехслойной ограниченной среде. Здесь, исходим из следующей краевой задачи, состаящей из системы уравнений п.2.1 при следующих начальных и граничных условиях:

$$s_1(\xi,\nu,0) = s_2(\xi,\nu,0) = 0, \; s_2(0,\nu,\tau) = \frac{\varphi_1(\tau)}{H}, \quad \left.\frac{\partial s_2}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = \frac{L}{\lambda H}\varphi_2(\tau), \quad \left.\frac{\partial s_2}{\partial \nu}\right|_{\nu=0} = \left.\frac{\partial s_2}{\partial \nu}\right|_{\nu=\frac{\sigma}{L}} = 0,$$

где *$\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$*– заданные дифференцируемые функции. После применения интегрального преобразования Лапласа по переменной τ и преобразования Фурье

$$\overline{\overline{s}}_2(n,\nu,p) = \int_0^1 \overline{s}(\xi,\nu,p)\sin\frac{(2n-1)\pi\xi}{2}d\xi; \qquad \overline{\overline{\psi}}_*(n,l,p) = \int_0^{\frac{\sigma}{L}} \overline{\overline{\psi}}(n,\nu,p)\cos\frac{\pi l\nu L}{\sigma}d\nu,$$

и последовательных обратных преобразований получены аналитические решения.

В п.2.3 решена задача по определению функции массопереноса в трехслойной ограниченной среде, когда искомая функция подчинена граничным условиям первого и второго родов. Здесь рассматривается краевая задача, состоящая из системы уравнений п.2.1 при следующих условиях:

$$s_1(\xi,\nu,0)=s_2(\xi,\nu,0)=0;\quad s_2(0,\nu,\tau)=\varphi_1(\nu,\tau);\ s_2(1,\nu,\tau)=\varphi_2(\nu,\tau);$$

$$\left(\frac{\partial s_2}{\partial \nu}\right)_{\nu=0}=\left(\frac{\partial s_2}{\partial \nu}\right)_{\nu=\frac{\sigma}{L}}=0.\quad (\alpha=\alpha_1 t_*)$$

После применения интегрального преобразование Лапласа по переменной τ, синус и косинус- преобразований Фурье по пространственным переменным и обратным переходам были получены аналитические решения.

В третьей главе решена задача по нахождению искомой функции, когда дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа содержало первую производную от функции по пространственной переменной.

Ранние метод конечных элементов применялся, например, только для уравнений, не содержащих первую производную по пространственной переменной. Данная задача решена для граничных условиях первого и второго родов. В этой же главе получены приближенные решения с учетом оценок, произведенных Хантушем М.С., для больших значениях времени. Получено аналитическое решение двумерной задачи массопереноса методом расщепления. В этой же главе используется приближенно-аналитическое решение с применением метода конечных элементов (МКЭ) с использованием функций форм второго порядка. Здесь, в отличие от других авторов, (МКЭ) использовался в области изображения после применения интегрального преобразования Лапласа.

В п.3.1 получено приближенно-аналитическое решение двумерной задачи массопереноса в многослойной среде. В данном параграфе рассматривается краевая задача описываемая следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных, когда учтена сжимаемость среды

$$\begin{cases} \varepsilon[\eta(x-x_1)-\eta(x-x_0)][\eta(y-y_1)-\eta(y-y_0)][\eta(t-t_1)-\eta(t-t_0)]-\mu\dfrac{\partial\tilde{z}}{\partial t}=k\dfrac{\tilde{z}-h}{\langle z\rangle}, \\ \dfrac{1}{a_1}\dfrac{\partial h}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\dfrac{k}{T}\dfrac{\tilde{z}-h}{\langle z\rangle}+\dfrac{k_n\gamma_1}{m_n T}(H_0-h)-\dfrac{k_n\gamma_2}{T}\left.\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|_{z=-m}, \\ \dfrac{1}{a_2}\dfrac{\partial H}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 H}{\partial z^2}, \\ D\dfrac{\partial^2 c}{\partial z^2}-\upsilon(x,y,t)\dfrac{\partial c}{\partial z}=m_э\dfrac{\partial c}{\partial t}, \end{cases} \qquad (7)$$

$\tilde{z}(x,y,0)=h(x,y,0)=H(x,y,z,0)=H_0=const,$

$$h(0,y,t)=\varphi_1^*(t),\qquad \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x=L}=\frac{1}{\lambda}\varphi_2(t),\qquad \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{y=0}=\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{y=\sigma}=0,$$

H(x,y,-m,t)=h(x,y,t),
$H(x,y,-m-m_n,t)=H_0$=const.

Для определения функции c(x,y,z,t) как функции координаты z, параметров x,y и времени t в системе (7) использованы условия.

$$c(x,y,z,0)=c_0=const, \tag{8}$$

$$c(x,y,0,t)=s_0=const, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial c}{\partial z}\right|_{z=l}=0, \tag{10}$$

где скорость находится из задач приведенных в первой и второй главах по формуле $\upsilon(x,y,t)=k\frac{s_2-s_1}{\langle z\rangle}$; $D(\upsilon)=\lambda_*\,|\,\upsilon(x,y,t)\,|$; (λ_* −положительная константа)

При определении концентрации солей за исследуемый момент времени t_* из последнего уравнения системы (7) с учетом (8)-(10) в области $x_0\le x\le x_1,\ y_0\le y\le y_1,\ 0\le z\le l$

произведено осреднение скорости по формуле

$$\upsilon_{cp}(x,y)=\frac{k}{\langle z\rangle t_*}\int_0^t(s_2-s_1)dt.$$

В этом случае уравнение конвективной диффузии запишется в виде

$$D(\upsilon_{cp})\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}-\upsilon_{cp}(x,y)\frac{\partial c}{\partial z}=m_э\frac{\partial c}{\partial t}.$$

Здесь в виду сложности аналитического решения указывается метод получения приближенно-аналитических решений с использованием интегрального преобразования Лапласа и метода конечных элементов (МКЭ).

При решении задач, где используются МКЭ, в уравнении не должна присутствовать первая производная по координате, поэтому переходим к новой функции

$$c(x,y,z,t)=w(x,y,z,t)e^{\alpha(x,y)t+\beta(x,y)z}. \tag{11}$$

После приравнивания нулю коэффициентов при производной $\frac{\partial w}{\partial z}$ и функции w, перейдем к каноническому уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{D(\upsilon_{cp})}{m_э}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}, \tag{12}$$

подчиненному условиям

$$w(x,y,z,0)=c_0e^{-\beta(x,y)z}\ ;w(x,y,0,t)=s_0e^{-\alpha(x,y)t}\ ;\left.\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\beta w\right)\right|_{z=l}=0, \tag{13}$$

где

$$\alpha(x,y)=-\frac{\upsilon_{cp}^2}{4D(\upsilon_{cp})m_э};\quad \beta(x,y)=\frac{\upsilon_{cp}}{2D(\upsilon_{cp})}.$$

В (12)-(13) переходим к безразмерной пространственной координате $\xi = \frac{z}{l}$, тогда краевая задача принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{D(\upsilon_{cp})}{m_Э l^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \tag{14}$$

$$w(x,y,\xi,0) = c_0 e^{-\beta(x,y)\xi l}, \tag{15}$$

$$w(x,y,0,t) = s_0 e^{-\alpha(x,y)t}, \tag{16}$$

$$\left.\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \beta(x,y)w\right)\right|_{\xi=l} = 0. \tag{17}$$

Далее к краевой задаче (14)-(17) применён МКЭ с использованием функции форм первого порядка. Тогда для одного элемента функция w с учетом (16) примет вид

$$w(x,y,\xi,t) = (1-\xi)s_0 e^{-\alpha t} + \xi w_2.$$

Для нахождения w_2 функционал при соблюдении граничных условии записывается следующим образом

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{\frac{D(\upsilon_{cp})}{m_Э l^2}\left[w_2 - s_0 e^{-\alpha t}\right]^2 + 2w\frac{\partial w}{\partial t}\right\}d\xi + \beta l w_2^2.$$

Этот функционал относительно значения w_2 должен принимать минимальное значение, а именно должно выполняться соотношение

$$\frac{dJ}{dw_2} = 0.$$

После взятия интеграла получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции w_2.

$$\frac{dw_2}{dt} + R_1 w_2 = R_2 e^{-\alpha t},$$

где

$$R_1 = 3\left(\frac{D(\upsilon_{cp})}{m_Э l^2} + \beta l\right); \qquad R_2 = s_0\left(0{,}5\alpha + \frac{3D(\upsilon_{cp})}{m_Э l^2}\right).$$

Тогда с учетом начальных и граничных условии, найдем

$$w_2(x,y,1,t) = \left(c_0 e^{-\beta l} - \frac{R_2}{R_1-\alpha}\right)e^{-R_1 t} + \frac{R_2 e^{-\alpha t}}{R_1-\alpha},$$

а сама функция w внутри данного элемента будет находиться в размерных координатах из соотношения

$$w(x,y,z,t) = \left(1-\frac{z}{l}\right)s_0 e^{-\alpha t} + \frac{z}{l}\left[\left(c_0 e^{-\beta l} - \frac{R_2}{R_1-\alpha}\right)e^{-R_1 t} + \frac{R_2 e^{-\alpha t}}{R_1-\alpha}\right].$$

Функция *c(x,y,z,t)* внутри выделенного элемента будет определяться формулой

$$c(x,y,z,t) = \left\{\left(1-\frac{z}{l}\right)s_0 + \frac{z}{l}\left[\left(c_0 e^{-\beta l} - \frac{R_2}{R_1-\alpha}\right)e^{(\alpha-R_1)t} + \frac{R_2}{R_1-\alpha}\right]\right\}e^{\beta z}. \tag{18}$$

Приближенно-аналитическое решение задачи относительно функции *w(x,y,ξ,t)* находится с использованием интегрального преобразования Лапласа

В результате этого преобразования уравнение (14) с учетом (15) запишется в виде

$$\frac{d^2\overline{w}}{d\xi^2}-\frac{pm_Э l^2}{D(\upsilon_{cp})}\overline{w}=-\frac{c_0 m_Э l^2}{D(\upsilon_{cp})}e^{-\beta\xi l}. \qquad (19)$$

Общее решение уравнения (19) записывается в виде

$$\overline{w}=N_1 shl\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}\xi+N_2 chl\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}\xi+\frac{c_0 e^{-\beta\xi l}}{p-\dfrac{\beta^2 D(\upsilon_{cp})}{m_Э}}$$

где произвольные постоянные N_1 и N_2 определяются из следующих условий, при $\xi=0$, $\overline{w}=\frac{s_0}{p+\alpha}$ и при $\xi=1$, $\left(\frac{d\overline{w}}{d\xi}+\beta l\overline{w}\right)=0.$

В результате получим следующее соотношение

$$\overline{w}=-\frac{(c_0-s_0)}{(p+\alpha)}\frac{\beta shl\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}(1-\xi)+\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}chl\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}(1-\xi)}{\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}chl\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}+\beta shl\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}}+\frac{c_0 e^{-\beta l\xi}}{p+\alpha}. \qquad (20)$$

При $\xi=1$ получено приближенное решение для больших значений времени, при котором может проявиться максимальная погрешность относительно точного решения. В этом случае гиперболический котангенс (малые значения *p*) посредством связи $xcthx\approx 1+\frac{x^2}{3}$ *при* $x^2<0{,}2$ может быть заменен на $\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}cthl\sqrt{\frac{pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}}\approx\frac{1}{l}\left(1+\frac{pm_Э l^2}{3D(\upsilon_{cp})}\right)$ [Хантуш М.С]. Так для $\frac{l^2 pm_Э}{D(\upsilon_{cp})}<0{,}2$ (порядка $\frac{l^2 m_э}{D(\upsilon_{cp})}<0{,}2t$), гиперболический синус может быть заменен своим аргументом. В результате для больших значений времени *t* с такой оценкой получим из формулы (20) соотношение

$$\overline{w}=\frac{c_0 e^{-\beta l}}{p+\alpha}-\frac{(c_0-s_0)}{(p+\alpha)}\frac{3D(\upsilon_{cp})}{m_Э l^2\left(p+\frac{1+\beta l}{m_Э l^2}\cdot 3D(\upsilon_{cp})\right)}.$$

В этом выражении переходим к оригиналу, используя обратное преобразование Лапласа. Учитывая что при *ξ=1*, $c(x,y,1,t)$ будет определяться формулой.

$$c(x,y,1,t)=we^{\alpha t+\beta l}.$$

В результате будем иметь

$$c(x,y,1,t) = c_0 + \frac{(c_0 - s_0)3D(\upsilon_{cp})e^{-\frac{1+\beta l}{m_Э l^2}3D(\upsilon_{cp})t+\alpha t+\beta l}}{(1+\beta l)3D(\upsilon_{cp}) - \alpha m_Э l^2} - \frac{(c_0 - s_0)3D(\upsilon_{cp})e^{\beta l}}{(1+\beta l)3D(\upsilon_{cp}) - \alpha m_Э l^2}. \qquad (21)$$

В приложении приводится расчет данной функции по формуле (21) и по формуле (18), полученной по МКЭ которая при ξ=1 принимает вид

$$c(x,y,1,t) = \left\{ \left(c_0 e^{-\beta l} - \frac{R_2}{R_1 - \alpha} \right) e^{(\alpha - R_1)t} + \frac{R_2}{R_1 - \alpha} \right\} e^{\beta l}. \qquad (22)$$

Наряду с аналитическим решением краевой задачи (14)-(17) она решается численно методом конечных разностей и решение $c(x,y,\xi,t)$ при каждых фиксированных параметров x и y будет определяться формулой.

$$c(x,y,\xi,t) = w(x,y,\xi,t) \cdot e^{\alpha t + \beta \xi l}\ . \qquad (23)$$

Для частного случая, относительно функции c(x,y,ξ,t) произведены сравнения формул (21), (22) и методом конечных разностей и результаты сравнения сведены в таблицы в приложении 1, из которых видно, что для больших значений времени достаточно для практического использования выбрать один элемент с функциями форм первого порядка.

В п.3.2 применен метод расщепления для двумерной задачи массопереноса записанной в виде

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial \eta^2} + \widetilde{\beta}\varepsilon(\tau), \qquad (0 < \xi < 1, \quad 0 < \eta < \frac{\sigma}{L});$$

$$s(\xi,\eta,0) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial s}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = -q_1(\tau); \qquad \left.\frac{\partial s}{\partial \xi}\right|_{\xi=1} = -q_2(\tau); \qquad \tau > 0.$$

$$\left.\frac{\partial s}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = -q_3(\tau); \qquad \left.\frac{\partial s}{\partial \eta}\right|_{\eta=\frac{\sigma}{L}} = -q_4(\tau); \qquad \tau > 0.$$

где безразмерные переменные

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{y}{L},$$

$\varepsilon(\tau),\ q_j(\tau) \quad (j = \overline{1,4})$ -заданные функции; s(ξ,η,τ)-искомая функция, $\widetilde{\beta} = const$.

Исходное уравнение после расщепления записывалось в виде системы одномерных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 s_1}{\partial \xi^2} + \widetilde{\beta}\dfrac{\varepsilon(\tau)}{2}, \\ \dfrac{\partial s_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial^2 s_2}{\partial \eta^2} + \widetilde{\beta}\dfrac{\varepsilon(\tau)}{2}. \end{cases}$$

В которой s(ξ,η,τ)=s_1(ξ,τ)+s_2(η,τ).

Для данной системы получено аналитическое решение, содержащее функциональные ряды, сходимость которых удовлетворяет теореме 2.
Теорема 2. Если группа членов знакопеременного ряда

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}c_m(x)$$

монотонно убывают по абсолютной величине

$$c_{m+1}(x)<c_m(x), \qquad (m=1,2,3\ldots)$$

и стремятся к нулю:

$$\lim_{m\to\infty} c_m(x)=0,$$

то ряд сходится. В этом случае для каждого фиксированного $x\in[0,L]$ все выводы относительно числовых рядов лейбницкого типа сохраняются.
Замечание 1. При решении нестационарных задач массопереноса в слоистых средах, описываемых уравнениями в частных производных параболического типа после применения интегрального преобразования Лапласа и обратного перехода к оригиналу члены ряда будут содержать экспоненты типа
$\exp(-\xi_n\tau)$, где ξ_n положительные корни, являющиеся полюсами определённых уравнений. Причем корни ξ_n возрастают при увеличении n, что способствует быстроте сходимости полученных функциональных рядов.
Замечание 2. Теорема 2 остается в силе, если функциональные ряды содержат тригонометрические функции зависящие от индексов суммирования и с их ростом группы членов изменяют знак, т.е. для рядов типа

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_{i,j}(x,y,\xi_{i,j}\tau),$$

где x,y некоторые фиксированные точки пространства определяемые интервалами $a<x<b$, $c<y<d$.

В п.3.3 решена одномерная задача массопереноса в двухслойной среде относительно искомой функции $s(\xi,\tau)$ в безразмерных координатах, которая сводятся к следующей краевой задаче

$$\frac{\partial s}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2}-\frac{k_n L^2}{m_n T}s, \tag{24}$$

$$s(\xi,0)=0;\ s(0,\tau)=\varphi_1(\tau);\ s(1,t)=\varphi_2(\tau).$$

Решение уравнение (18) с приведенными условиями получено для оценки метода конечных элементов. Для определенности функции $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ были заданы в виде

$$\varphi_1(\tau)=\widetilde{B}_1(1-e^{-\alpha_1\tau}),\ \varphi_2(\tau)=\widetilde{B}_2(1-e^{-\alpha_2\tau}),$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\widetilde{B}_1,\widetilde{B}_2$ – некоторые положительные константы. В результате после некоторых преобразований было получено

$$s(\xi,\tau)=\frac{2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ne^{-(\pi^2n^2+\widetilde{A})\tau}}{n^2+\dfrac{\widetilde{A}}{\pi^2}}\left(\frac{(-1)^{n+1}\widetilde{B}_2\alpha_2}{n^2+\dfrac{\widetilde{A}-\alpha_2}{\pi^2}}+\frac{\widetilde{B}_1\alpha_1}{n^2+\dfrac{\widetilde{A}-\alpha_1}{\pi^2}}\right)\times\sin(\pi n\xi)+\frac{\widetilde{B}_2 sh\sqrt{\widetilde{A}}\xi}{sh\sqrt{\widetilde{A}}}-$$
$$-\frac{\widetilde{B}_2e^{-\alpha_2\tau}sh\sqrt{\widetilde{A}-\alpha_2}\,\xi}{sh\sqrt{\widetilde{A}-\alpha_2}}+\frac{\widetilde{B}_1 sh\sqrt{\widetilde{A}}(1-\xi)}{sh\sqrt{\widetilde{A}}}-\frac{\widetilde{B}_1e^{-\alpha_1\tau}sh\sqrt{\widetilde{A}-\alpha_1}(1-\xi)}{sh\sqrt{\widetilde{A}-\alpha_1}}. \qquad (25)$$

Здесь $\widetilde{A}=\dfrac{k_nL^2}{m_nT}$. Затем к уравнению (24) применён метод конечных элементов с использованием функций форм второго порядка. Для одного элемента имеем

$$s(\xi,\tau)=N_i s(0,\tau)+N_j s_j(\tau)+N_k s(1,\tau), \qquad (26)$$

где

$$N_i(\xi)=\frac{(\xi_i-\xi)(1-\xi)}{\xi_j};\quad N_j(\xi)=\frac{\xi(1-\xi)}{\xi_j(1-\xi_j)};\quad N_k(\xi)=\frac{\xi(\xi-\xi_j)}{1-\xi_j}.$$

Функционал для уравнения (24) имеет следующее значение

$$\chi=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{ds}{d\xi}\right)^2+2s\frac{\partial s}{\partial\tau}+\widetilde{A}s^2\right]d\xi=\frac{1}{2}\int_0^1\left\{\left[s(0,\tau)\frac{dN_i}{d\xi}+s_j(\tau)\frac{dN_j}{d\xi}+s(1,\tau)\frac{dN_k}{d\xi}\right]^2+\right.$$
$$+2\left[N_i s(0,\tau)+N_j s_j(\tau)+N_k s(1,\tau)\right]\cdot\left[N_i\frac{ds(0,\tau)}{d\tau}+N_j\frac{ds_j(\tau)}{d\tau}+N_k\frac{ds(1,\tau)}{d\tau}\right]+$$
$$\left.+\widetilde{A}\left[N_i s(0,\tau)+N_j s_j(\tau)+N_k s(1,\tau)\right]^2\right\}d\xi.$$

После минимизации функционала относительно $s_j(\tau)$ на основании $\dfrac{\partial\chi}{\partial s_j}=0,$ получено соотношение

$$s(0,\tau)\int_0^1\frac{dN_i}{d\xi}\cdot\frac{dN_j}{d\xi}d\xi+s_j(\tau)\int_0^1\left(\frac{dN_j}{d\xi}\right)^2d\xi+s(1,\tau)\int_0^1\frac{dN_j}{d\xi}\cdot\frac{dN_k}{d\xi}+$$
$$+\frac{ds(0,\tau)}{d\tau}\int_0^1 N_iN_jd\xi+\frac{ds_j(\tau)}{d\tau}\int_0^1\left(N_j\right)^2d\xi+\frac{ds(1,\tau)}{d\tau}\int_0^1 N_jN_kd\xi+ \qquad (27)$$
$$+\widetilde{A}s(0,\tau)\int_0^1 N_iN_jd\xi+\widetilde{A}s_j(\tau)\int_0^1\left(N_j\right)^2d\xi+\widetilde{A}s(1,\tau)\int_0^1 N_jN_kd\xi=0.$$

В результате из (27) относительно $s_j(\tau)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{ds_j}{d\tau}+(\widetilde{A}+10)s_j=-\frac{(5\xi_j-2)(1-\xi_j)}{2}\cdot\frac{d\varphi_1(\tau\cdot t_*)}{d\tau}+\xi_j\frac{d\varphi_2(\tau\cdot t_*)}{d\tau}-$$
$$-\frac{\left[\widetilde{A}(5\xi_j-2)-20\right](1-\xi_j)}{2}\varphi_1(\tau\cdot t_*)+(\widetilde{A}+10)\xi_j\varphi_2(\tau\cdot t_*). \qquad (28)$$

После применения к уравнению (28) прямого и обратного интегрального преобразования Лапласа по временной переменной τ в области оригинала найдено

$$s_j(\tau)=\frac{(5\xi_j-2)(1-\xi_j)\alpha_1\widetilde{B}_1}{2\left(\alpha_1-\widetilde{A}-10\right)}\left(e^{-\alpha_1\tau}-e^{-(\widetilde{A}+10)\tau}\right)-\frac{\xi_j\alpha_2\widetilde{B}_2}{\alpha_2-\widetilde{A}-10}\left(e^{-\alpha_2\tau}-e^{-(\widetilde{A}+10)\tau}\right)-$$

$$-\frac{\widetilde{B}_1(\widetilde{A}(5\xi_j-2)-20)(1-\xi_j)}{2(\widetilde{A}+10)(\alpha_1-\widetilde{A}-10)}\cdot\left[(\alpha_1-\widetilde{A}-10)+(\widetilde{A}+10)e^{-\alpha_1\tau}-\alpha_1e^{-(\widetilde{A}+10)\tau}\right]+$$

$$+\frac{\xi_j\widetilde{B}_2}{(\alpha_2-\widetilde{A}-10)}\left[(\alpha_2-\widetilde{A}-10)+(\widetilde{A}+10)e^{-\alpha_2\tau}-\alpha_2e^{-(\widetilde{A}+10)\tau}\right].$$

На основании формулы (26), получено

$$s(\xi,\tau)=\frac{(\xi_j-\xi)(1-\xi)}{\xi_j}\widetilde{B}_1\left(1-e^{-\alpha_1\tau}\right)+\frac{\xi(1-\xi)}{\xi_j(1-\xi_j)}\cdot\left\{\frac{(5\xi_j-2)(1-\xi_j)\alpha_1\widetilde{B}_1}{2\left(\alpha_1-A-10\right)}\left(e^{-\alpha_1\tau}-e^{-(\widetilde{A}+10)\tau}\right)-\right.$$

$$-\frac{\xi_j\alpha_2\widetilde{B}_2}{\alpha_2-\widetilde{A}-10}\left(e^{-\alpha_2\tau}-e^{-(\widetilde{A}+10)\tau}\right)-$$

$$-\frac{\widetilde{B}_1(\widetilde{A}(5\xi_j-2)-20)(1-\xi_j)}{2(\widetilde{A}+10)(\alpha_1-\widetilde{A}-10)}\cdot\left[(\alpha_1-\widetilde{A}-10)+(\widetilde{A}+10)e^{-\alpha_1\tau}-\alpha_1e^{-(\widetilde{A}+10)\tau}\right]+$$

$$\left.+\frac{\xi_j\widetilde{B}_2}{(\alpha_2-\widetilde{A}-10)}\left[(\alpha_2-\widetilde{A}-10)+(\widetilde{A}+10)e^{-\alpha_2\tau}-\alpha_2e^{-(\widetilde{A}+10)\tau}\right]\right\}+\frac{\xi(\xi-\xi_j)}{1-\xi_j}\widetilde{B}_2(1-e^{-\alpha_2\tau}).$$

Для некоторого фиксированного значение τ можно подобрать такое значение ξ_j, чтобы функция s_j (τ) совпала с аналитическим решением $s(\xi_j,\tau)$, определяемым по формуле (25) с достаточной точностью.

Для того чтобы, оценить решение данной задачи произведён численный эксперимент при сравнении различных приближённо-аналитических решениях и приведен в приложении 2.

с

Рис 1. Изменение концентрации солей при c_0=6 г/л для $x\in[x_0,x_1]$, $y\in[y_0,y_1]$

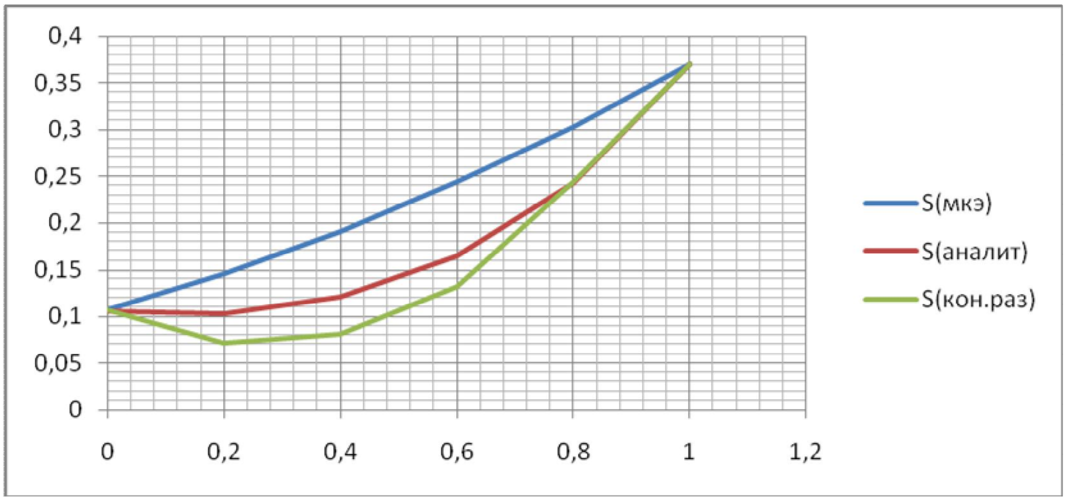

Рис 2. Сравнение решений на определённой момент времени при выборе одной точки (τ=0,8 и $0 \le \xi \le 1$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты и выводы диссертационной работы сводятся к следующим положениям:

- Получено решение краевой задачи массопереноса состоящей из уравнений в частных производных параболического типа подчиненной определенным начальным и граничным условиям первого и второго родов с учетом и без учета сжимаемости среды в слабопроницаемой прослойке.
- Решена задача массопереноса методом конечных элементов когда уравнение содержало первую производную по пространственной переменной.
- Получено аналитическое решение двумерной задачи массопереноса методом расщепления.
- Указан способ выбора средней точки конечного элемента, когда для фиксированного момента времени приближенные решения будут совпадать с аналитическим решением с точностью достаточной для практического использования.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Абуталиев Ф.Б., Алламуратов.Ш.З., Баклушин М.Б. Определение положения уровня грунтовых вод в трехслойной ограниченной среде// "Инфокоммуникационные и вычислительные технологии в науке, технике и образовании".Тез.докл. международ. конф. Ташкент, 2004.-С.150-154.
2. Алламуратов.Ш.З., Баклушин М.Б Об одной задачи площадного питания подземных вод в слоистых средах//“ИННОВАЦИЯ-2004”–Международ. науч.-практ. конф.:Сб.науч.ст.-Ташкент, 2004-С.248.
3. Баклушин М.Б.,Алламуратов.Ш.З. Определение положения уровня грунтовых вод при наличии площадного питания в многослойных средах// Материалы IV съезда почвоведов и агрохимиков Узбекистана.Ташкент. 9-10 сентябрь 2005.-С.153-154.
4. Алламуратов Ш.З. Определение функций понижений напоров в трехслойной ограниченной среде//Узб.журн."Проблемы информатики и энергетики".-Ташкент, 2005.-№4-5.-С.85-89.
5. Алламуратов Ш.З. Определение функций понижений напора при площадном питании в слоистой пористой среде//ДАН РУз. 2006.-№2.-С.40-44.
6. Алламуратов.Ш.З.,Баклушин М.Б. Математическое моделирование по определению функций понижения напоров в трехслойной пористой среде //“ИННОВАЦИЯ-2006”.Международ.науч.-практ. конф.:Сб. науч.ст.-Ташкент, 2006-С.286.
7. Алламуратов Ш.З., Баклушин М.Б. Моделирование двумерного потока в плане в трёхслойном пласте при упругом режиме фильтрации в слабопроницаемой прослойке//Узб.журн."Проблемы информатики и энергетики".-Ташкент, 2006.-№5.-С.82-86.
8. Баклушин М.Б.,Алламуратов Ш.З. Определение уровня грунтовых вод и напоров в трехслойной ограниченной среде//Узб.журн."Проблемы информатики и энергетики".-Ташкент, 2007.-№2.-С.76-81.
9. Алламуратов.Ш.З.,Баклушин М.Б. Исследование задачи нестационарной напорной фильтрации в слоистой пористой среде методом конечных элементов//“ИННОВАЦИЯ-2007”.Международ.науч.-практ. конф.: Сб. науч.ст. – Ташкент, 2007-С.321.
10. Алламуратов Ш.З.,Баклушин М.Б.Определение положения уровня грунтовых вод и напоров в трехслойной пористой среде с учётом инфильтрации при площадном питании как функции времени //ДАН РУз. 2008.-№4.-С. 57-61.
11. Баклушин М.Б.,Алламуратов.Ш.З. Приближенно-аналитическое решение одномерной нестационарной задачи водосолевого режима// Журн. “Вестник”. ККО АН РУз. 2008.-№4.–С.6-9.
12. Алламуратов Ш.З., Баклушин М.Б. Использование метода конечных элементов в задаче нестационарной напорной фильтрации в слоистой пористой среде //Узб.журн."Проблемы информатики и энергетики".-Ташкент, 2008.-№4.-С.93-98.

13. Баклушин М.Б., Музафаров Х.А., Алламуратов.Ш.З. Применение метода конечных элементов в задачах теории перетекания// ИННОВАЦИЯ-2009:Материалы межд.науч.-прак. конф. – Ташкент, 2009.-С.251-253.
14. Алламуратов.Ш.З. Об одном способе расщепления некоторых задач, описываемых уравнением в частных производных параболического типа // “Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов”.- Россия г.Курск, 2010.- №5 С. 94-95.

Физика-математика фанлари номзоди илмий даражасига талабгор Алламуратов Шарапатдин Зиуатдиновичнинг 05.13.18 –Математик моделлаштиришнинг назарий асослари ихтисослиги буйича “Параболик турдаги тенгламалар билан ифодаланувчи қатламли системаларда икки ўлчовли массакўчиши масаласини математик моделлаштириш” мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Таянч сўзлар: массакўчиш, катламли системалар, қаттиқ ва майишқоқ қатламлар, чекли элементлар усули, тенгламани ажратиш усули, аналитик ва тақрибий аналитик ечимлар.

Тадқикот объектлари: кўп қатламли муҳитларда массакўчиши жараёнини ифодаловчи параболик типдаги тенгламалар системаси.

Ишнинг мақсади: самарали аналитик ва тақрибий-аналитик ечимларни олиш ва уни кўп қатламли системаларда массакўчиши масаласига сифат ва муқдорли таҳлил қилиш.

Тадқикот методлари: кенг қўлланиладиган математик физика методлари, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, асимптотик методлар, чегаравий масалаларни ечишда Лапласнинг интеграл алмаштириши, Фурьенинг синус ва косинус алмаштиришлари, тенгламани ажратиш усули, чекли элементлар усули

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: диссертациядаги барча асосий натижалар янги бўлиб, улар қуйидагилардан иборат:

-ҳусусий ҳосилали параболик типдаги тенгламалар билан берилган массакўчиши масаласи учун, биринчи ва иккинчи тур чегаравий шартларда ва бошланғич шартларда кучсиз ўтқазувчан юпқа қатламда муҳитнинг сиқилувчанлигини ҳисобга олган ва олмаган ҳоллар учун ечим олинди;

-тенгламада фазовий ўзгарувчи бўйича биринчи тартибли ҳосила қатнашганда массакўчиши масаласи учун чекли элементлар усули билан ечим олинди;

-ажратиш усули билан икки ўлчовли массакўчиши масаласининг аналитик ечими олинди;

-фиксирланган вақт моментида амалиётга қўллаш учун тақрибий ечим аналитик ечим билан етарлича аниқлик билан мос келганда чекли элементнинг ички нуқтасини танлаш усули кўрсатилди.

Амалий аҳамияти: диссертация назарий характерга эга.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: олинган натижалар асосида табиий йуналиш факультетлари магистрант ва аспирантларга махсус курслар ўқитишда қўлланилиши мумкин.

Қўлланиш соҳаси: хусусий ҳосилали параболик типдаги тенгламаларга келтириладиган математик физика масалаларида қўлланилиши мумкин (иссиқлик ўтказувчанлик, диффузия, нефть ва газ қазиб олиш ва ҳ.к).

РЕЗЮМЕ

диссертации Алламуратова Шарапатдина Зиуатдиновича на тему: “Математическое моделирование двумерных задач массопереноса в слоистых системах описываемых уравнениями параболического типа” на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 05.13.18–Теоретические основы математического моделирования

Ключевые слова: массоперенос, многослойная система, сжимаемая и несжимаемая среда, метод конечных элементов, метод расщепления, аналитические и приближенно-аналитические методы.

Объекты исследования: система уравнений параболического типа, описывающих процессы массопереноса в многослойных системах.

Цель работы: получение эффективных приближенно-аналитических решений для количественного и качественного анализа при оценке массопереноса в многослойных системах.

Методы исследования: применяются широко используемые методы математической физики, теории функции комплексного переменного, асимптотические методы, интегральное преобразования Лапласа, синус и косинус- преобразования Фурье, метод расщепления, а так же метод конечных элементов.

Полученные результаты и их новизна: все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

-получено решение краевой задачи массопереноса состоящей из уравнений в частных производных параболического типа подчиненной определенным начальным и граничным условиям первого и второго родов с учетом и без учета сжимаемости среды в слабопроницаемой прослойке;

-получено решение задачи массопереноса методом конечных элементов, когда уравнение содержало первую производную по пространственной переменной;

-получено аналитическое решение двумерной задачи массопереноса методом расщепления;

-указан способ выбора средней точки конечного элемента, когда для фиксированного момента времени приближенное решения будет совпадать с аналитическим решением с точностью достаточной для практического использования.

Практическая значимость: работа носит теоретический характер.

Степень внедрения и экономическая эффективность: полученные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов для магистрантов и аспирантов факультетов естественного профиля.

Область применения: полученные результаты могут быть использованы в задачах математической физики, приводящие к уравнением в частных производных параболического типа (тепловые, диффузионные, нефте и газодобыче и т.п.)

RESUME

Thesis of Allamuratov Sharapatdin Ziyatdinovich on the scientific degree competition of the doctor of philosophy in physics and mathematics on specialty 05.13.18 – Theoretical bases of mathematical modeling, subject: “Mathematical modelling of two-dimensional problems mass-transfer in layered systems described by the equations of parabolic type”

Key words: mass-transfer, the multilayered system compressed and the incompressible environment, a method of final elements, method fission, analytical and approximately-analytical methods.

Subjects of research: homogeneous and multilayered systems

Purpose of work: reception of effective approximately-analytical decisions for the quantitative and qualitative analysis at an estimation mass-transfer in multilayered systems.

Methods of research: widely used methods of mathematical physics, the theory of function complex variable, asymptotic methods are applied, integrated transformations Laplace, a sine and cosine transformations Fourier, method of fission and as a method of final elements.

The results obtained and their novelty: all of the main results of this work are new and consist of the following:

-in the work the problem decision of a mass-transfer consisting of the equations in private derivatives of parabolic type of subordinates to certain initial and boundary conditions is received. The stream was from the outside carried out at a non-stationary mode from rectangular area with the account and without compressibility of environment in the bottom layers;

-it is received problem decisions mass-transfer by a method of final elements when the equation contained the first derivative on a spatial variable;

-is received analytical decisions of a two-dimensional problem mass-transfer with method of the fission;

-at use of method of final elements, the way of definition of an internal point for an element containing functions of forms of the second order at which for the fixed moment of time the approached decision has coincided with the exact is specified.

Practical value: the work has theoretical character.

Degree of embed and economic effectivity: the received results can be used at reading of special courses for post-graduate students of faculties of a natural profile.

Field of application: it is considered in all problems of the mathematical physics, leading by the equation in private derivatives of parabolic type (thermal, gas diffusion, oil and gas extraction, and so forth).