

**АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ имени В.И.РОМАНОВСКОГО**

на правах рукописи

УДК 517.927.2

**МУМИНОВ ГУЛАМЖОН
МАДАМИНОВИЧ**

**НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
НЕОСЦИЛЛЯЦИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

01.01.02 - Дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук**

Ташкент 2005

Работа выполнена на кафедре оптимального управления факультета компьютерных технологий Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Научный консультант:

доктор физико-математических наук, академик

Н.Ю.Сатимов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, академик АН Грузии

И.Т.Кигурадзе

доктор физико-математических наук, профессор

А.А.Азамов

доктор физико-математических наук

А.С.Бердишев

Ведущая организация -

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Защита диссертации состоится «14» сентября 2005г.

В 14⁰⁰ часов на заседании специализированного совета D.015.17.01 при институте математики им. В.И.Романовского АН РУз, по адресу: 700143, г.Ташкент - 143, Академгородок, ул.Ф.Ходжаева 29, Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат разослан «11» июля 2005г.

Ученый секретарь

специализированного совета,
кандидат физико-математических наук

Б.А.Омиров.

Допущено к защите
26.08.05
Солтмуш Тилоб

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Неосцилляция дифференциальных уравнений в действительной области тесно связана со многими задачами теории дифференциальных уравнений и математического анализа: с однозначной разрешимостью многоточечных краевых задач Валле-Пуссена; с наименьшими собственными значениями задачи Штурма-Лиувилля; с теоремой сравнения дифференциальных операторов типа Чаплыгина; с факторизацией дифференциальных операторов в разложении Пойа - Маммана или Крейна-Мильмана; с сохранением знака функции Грина многоточечной краевой задачи; с обобщенной теоремой Ролля и т.д.

Благодаря связи аналитических функций с производной Шварца, неосцилляция дифференциальных уравнений второго порядка в комплексной области гарантирует однолиственность аналитических функций в рассматриваемой области.

В теории оптимального управления и дифференциальных игр неосцилляция дифференциальных уравнений нашла новые применения при вычислении количества точек переключения оптимального управления и количества маневров обхода в дифференциальных играх уклонения.

Напомним некоторые понятия и определения¹.

Промежуток $[a, b)$ называется промежутком неосцилляции уравнения

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0, \quad (1)$$

если каждое нетривиальное решение уравнения (1) имеет не более $n-1$ нулей на $[a, b)$. При этом нули решения считаются с их кратностью.

Уравнение (1) называется $(k, n-k)$ - неосцилляционным на промежутке $[a, b)$, если оно не имеет нетривиального решения с двумя нулями, имеющего кратность k в точке t_1 и кратностью $n-k$ в точке t_2 для произвольных точек $t_1, t_2 \in [a, b)$, $t_1 \neq t_2$.

Пусть теперь коэффициенты уравнения (1) выбираются из некоторого функционального класса.

Промежуток $^2 [a, a+T)$ называется максимальным промежутком неосцилляции для класса уравнений (1), если он является промежутком неосцилляции для каждого уравнения из этого класса, а с другой стороны,

¹ Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // Успехи матем. наук. 1969, Т.24, Вып. 2(146). №3. С. 43-96.

² Меленцова Ю.А., Мильштейн Г.Н. К оптимальной оценке промежутка неосцилляции для линейных дифференциальных уравнений с ограниченными коэффициентами. // Дифференц. уравнения, 1981, том 17. №12. С. 2160-2175.

существует уравнение из этого класса, имеющее нетривиальное решение с n нулями на отрезке $[a, a+T]$. При этом T называется длиной максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (1).

Вопросы неосцилляции дифференциальных уравнений впервые рассмотрены в работах Валле–Пуссена в 30 годах 20–столетия. Улучшению результатов Валле–Пуссена и смежным вопросам неосцилляции дифференциальных уравнений посвящены работы Ф.Хартмана, Н.В.Азбелева, В.А.Кондратьева, Ю.В.Комленко, И.Т.Кигурадзе, А.Ю.Левина, Г.С. Зайцевой и др.

В работах В.Е.Миракова, Г.Н.Мильштейна, Е.И.Тонкова, В.Г. Болтянского, Л.Джексона и др. принцип максимума Л.С.Понтрягина использован для получения неулучшаемых результатов в теории неосцилляции дифференциальных уравнений. Изучение достаточных условий однолиственности аналитических функций привело к рассмотрению вопросов неосцилляции в комплексных областях, начиная с работ В.В.Покорного, З.Нехари, Б.Шварца, М.Лавье, У.Ю.Кима и др.

Следует отметить, что в действительной области во всех перечисленных работах коэффициенты исследуемого уравнения принимают значения из некоторого заданного прямоугольника (параллелепипеда), случай же произвольного выпуклого множества не рассматривался. Для комплексных областей некоторые полученные результаты относятся лишь к уравнениям низшего (второго или третьего) порядка. Случай произвольных четного или нечетного порядков вовсе не изучался.

Цель исследования. В диссертации рассматриваются следующие основные задачи.

1. Изучение методами выпуклого анализа и теории оптимального управления условия разрешимости двухточечных краевых задач типа Штурма–Лиувилля, когда коэффициенты уравнения принимают значения из заданного выпуклого компактного множества.

2. Изучение вопросов неосцилляции самосопряженных дифференциальных уравнений посредством первого наименьшего собственного значения задачи типа Штурма–Лиувилля.

3. Изучение вопросов неосцилляции и асимптотического поведения решений линейной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

4. Исследование вопросов неосцилляции дифференциальных уравнений в комплексной области.

5. Применение полученных результатов к вопросам разрешимости двухточечных краевых задач для нелинейного уравнения.

6. Применение полученных результатов к исследованию задачи уклонения в дифференциальных играх в комплексной области.

Новизна работы. Все основные результаты диссертации являются новыми. Они состоят в следующем:

1. Получена точная формула для вычисления длины максимального промежутка однозначной разрешимости двухточечных краевых задач для однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка.

2. Получена точная формула для вычисления длины максимального промежутка неосцилляции для систем двух дифференциальных уравнений первого порядка.

3. Разработаны новые критерии для (n, n) – неосцилляции самосопряженного дифференциального уравнения $2n$ – го порядка.

4. Получено новое доказательство теоремы Грунскогго, которое применено к вопросам неосцилляции комплексных дифференциальных уравнений второго порядка.

5. Получено обобщение достаточных признаков неосцилляции З.Нехари и В.В.Покорного для комплексных дифференциальных уравнений.

6. Приведены новые условия разрешимости двухточечных краевых задач для нелинейного уравнения второго порядка.

7. Предложены достаточные условия для возможности уклонения от встречи в дифференциальных играх в комплексной плоскости.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы в различных разделах теории дифференциальных уравнений и математического анализа, а также в теории оптимального управления и дифференциальных игр.

Реализация результатов. Полученные результаты использовано при чтении специальных курсов и проведении специальных семинаров.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались: на семинарах при кафедре оптимального управления НУУз под руководством академика Н.Ю.Сатимова (1998–2003); на семинаре «Современные проблемы вычислительной математики и математической физики» под руководством академика Ш.А.Алимова (2002, 2003); на общегородском семинаре Института Математики АН РУз «Современные проблемы теории уравнений в частных производных» под руководством академиков Т.Д.Джураева и М.С.Салахитдинова (2002, 2003); на 3–Понтрягинских чтениях (Кемерово, 1990); на 5–Понтрягинских чтениях (Воронеж, 1994); на Всеукраинской конференции «Дифференциально –

функциональные уравнения и их приложения» (Черновцы, 1996); на «International Conference Dedicated to the 90th Anniversary of L.S. Pontryagin» (Москва, 1998); на международной конференции «1200 лет со дня рождения Ахмада ибн Мухаммад ал-Фергани» (Фергана, 1998); на «1st Turkish world mathematics symposium» (Турция, Елазиг, 1999), на международной научной конференции «Современные проблемы математической физики и информационной технологии» (Тошкент, 2003)

Опубликованность результатов. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [37]. В работе [23] постановка задачи и пример 1 и 2, а в работе [27] идея доказательства теоремы 3 принадлежат академику Н.Ю. Сатимову. В работах [34], [35] постановка задачи принадлежит автору.

Структура и объем диссертации. Работа изложена на 226 страницах, состоит из введения, четырех глав, разбитых на 16 параграфов, и списка литературы, содержащего 102 наименований.

Содержание работы

Во введение приведены некоторые исторические сведения, показана актуальность темы и дано краткое изложение диссертации.

В главах 1, 2 и 4 используются понятия и свойства опорных функций. Напомним¹, что значение опорной функции выпуклого компактного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ в $\psi \in \mathbb{R}^n$ определяется соотношением

$$c(F, \psi) = \max_{f \in F} \langle f, \psi \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение.

Первая глава диссертации посвящена вопросам однозначной разрешимости двухточечных краевых задач в действительной области.

В §1.1 с помощью выпуклого анализа определена длина T_0 максимального промежутка неосцилляции для класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' + u_1(t)y' + u_2(t)y = 0 \quad (2)$$

с измеримыми ограниченными коэффициентами $u_1(t), u_2(t)$ при $t \in \mathbb{R}^1$

Пусть U – множество всех измеримых вектор-функций $u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot))$, удовлетворяющих при каждом $t \in \mathbb{R}^1$ ограничению $u(t) \in P$, где P – некоторое заданное выпуклое компактное множество из $\mathbb{R}^2$, $0 \in \text{int} P$.

Основным результатом параграфа 1.1 является.

Теорема 1.1 Длина T_0 максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (2) при $u(\cdot) \in U$ определяется по формуле

$$T_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + c(P, \psi(s))} \quad (3)$$

где $c(P, \psi(s))$ – опорная функция множества P в направлении вектора $\psi(s) = (s, 1)$.

В случае, когда $P = \{(u_1, u_2) : |u_1| \leq M, |u_2| \leq N\}$ – прямоугольник, из формулы (3) следует результат Валле-Пуссена¹:

$$T_0 = 2 \int_0^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + Ms + N}$$

В §2.1 рассмотрена задача определения длины T максимального промежутка однозначной разрешимости двухточечных краевых задач вида

$$y'' + u_1(t)y' + u_2(t)y = f(t), \quad (4)$$

$$\begin{cases} y(a) \sin \alpha - y'(a) \cos \alpha = A, \\ y(b) \sin \beta - y'(b) \cos \beta = B. \end{cases} \quad (5)$$

где $f(t), u_1(t), u_2(t)$ – измеримые функции, а A, B, α и β – заданные числа, причем $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \beta < \frac{\pi}{2}, \beta < \alpha$.

С помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина² доказана следующая

Теорема 2.3 Для того, чтобы отрезок $[a, b]$ был промежутком однозначной разрешимости краевой задачи (4), (5) при $u(\cdot) \in U$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$b - a < T = \int_{\text{tg} \beta}^{\text{tg} \alpha} \frac{ds}{s^2 + c(P, \psi(s))},$$

где $c(P, \psi(s))$ – опорная функция множества P в направлении вектора $\psi(s) = (s, 1)$.

В §3.1 рассмотрена задача об (n, n) – неосцилляции самосопряженных дифференциальных уравнений $2n$ – го порядка

$$(r(t)y^{(n)})^{(n)} - (-1)^n p(t)y = 0, \quad (6)$$

где $r(t) \in C^n[a, b], p(t) \in C[a, b]$ – положительные функции.

¹ De La Valle Poussin Ch. Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. // J. Math. pures et appl. 8(1929), No.2, p.125-144.

² Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, Наука, 1969, 392 с.

¹ Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление. // Труды МИ АН СССР, 1985, т.169, с.194-252.

Согласно¹, вопрос об (n,n) – неосцилляции уравнения (6) на отрезке $[a,b]$ тесно связан с первым положительным собственным значением задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} (r(t)y^{(n)}(t))' - (-1)^n p(t)y &= 0, \\ y^{(i)}(a) &= 0, y^{(i)}(b) = 0, i=0,1,2,\dots,m-1, \end{aligned}$$

а именно, имеет место следующее утверждение: для того, чтобы отрезок $[a,b]$ был промежутком (n,n) – неосцилляции уравнения (6) необходимо и достаточно выполнение неравенства $\lambda > 1$.

Это утверждение позволяет получить как необходимое условие неосцилляции, ряд новых интегральных неравенств типа Харди с Чебышевским весом². Приведем примеры.

Теорема 3.2 Для того, чтобы уравнение (6) было (n,n) – неосцилляционным на отрезке $[a,b]$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\int_a^b r(t)y^{(n)}(t)^2 dt > \int_a^b p(t)y^2(t) dt.$$

При $n=2$ справедливо следующее утверждение об интегральном неравенстве: если $y(t) \in C^2[-1,1]$ и $y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0$, то при $m \leq 0$ и

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^m y''^2(t) dt < \infty$$

имеют место неравенства

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^m y''^2(t) dt > \lambda_0 \int_{-1}^1 \frac{y^2(t) dt}{(1-t^2)^{4-m}}$$

и

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^m y''^2(t) dt > \lambda_1 \int_{-1}^1 \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2-m}} dt,$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{8m^2 - 20m + 9 + (9-4m)\sqrt{4m^2 - 8m + 1}}{2}, \\ \lambda_1 &= 24(2-m)(3-m)(5-2m). \end{aligned}$$

Отметим, что при $m=0$ из этих неравенств вытекают неравенства Биссак¹, которые часто используются в теории неосцилляции дифференциальных уравнений четвертого порядка $\omega^{(IV)} + p(z)\omega = 0$.

Как ещё одно следствие теоремы 3.1, отметим, что из неё следуют интегральные неравенства У.Ю.Кима:²

Если $y \in C^n[-1,1]$ и $y^{(i)}(\pm 1) = 0$, $i=0,1,2,\dots,n-1$, то имеют место неравенства

$$\int_{-1}^1 [y^{(n)}(t)]^2 dt > (2n)! \int_{-1}^1 \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^n} dt,$$

$$\int_{-1}^1 [y^{(n)}(t)]^2 dt > \prod_{k=1}^n (2k-1)^2 \int_{-1}^1 \frac{y^2(t)}{(1-t^2)^{2n}} dt.$$

В §4.1, используя принцип максимума Л.С.Понтрягина³, получена формула для вычисления длины максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений

$$y'' + p(t)y = 0, \quad (7)$$

с коэффициентом, удовлетворяющим интегральному ограничению вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t)^\alpha dt \leq 1, \quad \alpha > 1. \quad (8)$$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 4.2. Длина T_0 максимального промежутка неосцилляции для класса уравнений (7), (8) вычисляется по формуле

$$T_0 = \left[\frac{(\alpha-1)^{\alpha+1}}{\alpha^\alpha (2\alpha-1)} B^{2\alpha} \left(\frac{\alpha-1}{2\alpha}, \frac{1}{2} \right) \right]^{\frac{1}{(2\alpha-1)}}, \quad \alpha > 0,$$

где $B(a,b)$ – бета функция Эйлера.

В §5.1 изучено асимптотическое поведение решений линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = p_1(t)x + q_1(t)y, \\ \dot{y} = p_2(t)x + q_2(t)y, \end{cases} \quad (9)$$

где коэффициенты $p_i(t)$, $q_i(t)$, $i=1,2$ предполагаются непрерывными функциями на интервале $[0,\infty)$. Установлена справедливость следующих результатов.

¹ Beesack P.R. Integral inequalities of the Wirtinger type. //Duke Math. J. 25(1958), p. 477-498.

² Kim W.J. On the zeros of solutions of $y^{(n)} + py = 0$. //J.Math.Anal. and Appl. 25(1969), No.1, p. 189-208.

³ Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, Наука, 1969, 392 с.

¹ Simons W. Some disconjugacy Criteria for Self-Adjoint Linear Differential Equations. //J.Math.Anal. and Appl. 34(1971), p. 445-463.

² Florkievich B. Wojtechek K. On some further Wirtinger-Beesack integral inequalities. //Demonstratio Math. 32(1999), No.3 p. 495-502.

Теорема 5.1. Предположим, что существуют постоянные $p_i, q_i, i=1,2$ удовлетворяющие условию "эллиптичности"

$$2p_1q_1 = p_1^2 + 4p_2q_1 + q_2^2 + c^2, c > 0, \quad (10)$$

и такие, что при $t \rightarrow +\infty$

$$\int_a^t |p_i(t) - p_i| dt = o(t), \quad \int_a^t |q_i(t) - q_i| dt = o(t), i=1,2.$$

Тогда для числа нулей компоненты $x(t)$ любого решения системы уравнений (9) имеет место представление

$$N_\alpha(t) \sim \frac{c}{2\pi} t = \frac{\sqrt{2p_1q_2 - 4p_2q_1 - p_1^2 - q_1^2}}{2\pi} t.$$

Теорема 5.2. Если функции $p_i(t), q_i(t), i=1,2$, имеют ограниченные вариации на $[0, \infty)$, а пределы их $p_i, q_i, i=1,2$, удовлетворяют условию "эллиптичности" (10), то для любого решения $\{x(t), y(t)\}$ системы (18) имеют место следующие равенства

$$\begin{aligned} x(t) &= O\left(\exp \frac{1}{2} \int_a^t [p_i(s) + q_i(s)] ds\right), \\ y(t) &= O\left(\exp \frac{1}{2} \int_a^t [p_i(s) + q_i(s)] ds\right), \quad i=1,2. \end{aligned}$$

Вторая глава посвящена вычислению расстояния между соседними нулями компонент $x(t)$ и $y(t)$ решения $\{x(t), y(t)\}$ системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = u_{11}(t)x + u_{12}(t)y, \\ \dot{y} = u_{21}(t)x + u_{22}(t)y, \end{cases} \quad (11)$$

Сначала в §6.2 элементарным способом определено искомое расстояние $d(x, y)$ для системы (11) при ограничениях $u_{11}(t) = u_{22}(t) = 0$,

$$\frac{u_{12}^2(t)}{a^2} + \frac{u_{21}^2(t)}{b^2} \leq 1.$$

В §7.2 рассматриваемая задача сведена к оптимизационной задаче и с помощью принципа максимума Л.С.Понтрягина¹ получен следующий результат:

Теорема 7.3. Длина $T (=d(x, y))$ максимального промежутка неосцилляции для класса систем уравнений (11) при

$u(t) = (u_{11}(t), u_{12}(t), u_{21}(t), u_{22}(t)) \in P, \quad t \in R_1, P \subset R^4, \quad 0 \in \text{int} P$ вычисляется по формуле

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{c(P, \psi(s))}, \quad (12)$$

где $c(P, \psi(s))$ – опорная функция множества $P \subset R^4$ в направлении вектора $\psi(s) = (s, s^2, -1, -s)$.

Если выберем множество P в виде

$$P = \{u \in R^4 : A_1 \leq u_{11} \leq A_2, 0 < B_1 \leq u_{12} \leq B_2, C_1 \leq u_{21} \leq C_2, D_1 \leq u_{22} \leq D_2\},$$

то из формулы (12) получится результат Г.Н.Мильштейна:¹ Для того, чтобы существовала функция, переводящая при помощи управления (11) точку (0,1) на ось $x=0$ за наименьшее положительное время, необходимо и достаточно, чтобы каждый интеграл из суммы интегралов

$$J = \int_{-\infty}^0 \frac{dz}{B_2 z^2 + (A_1 - D_2)z - C_1} + \int_0^{+\infty} \frac{dz}{B_2 z^2 + (A_2 - D_1)z - C_1}$$

сходилась. В случае сходимости обоих интегралов время оптимального перехода T совпадает со значениям суммы этих интегралов.

Глава III посвящена вопросу неосцилляции комплексных дифференциальных уравнений.

В §8.3 получено новое доказательство теоремы Грунского²:

Теорема 8.1. Пусть D – выпуклая область, не содержащая бесконечной точки, и $\omega(z)$ – регулярная функция, удовлетворяющая условиям

$$\omega(z_1) = \omega(z_2) = 0, \quad z_1, z_2 \in D, \quad z_1 \neq z_2.$$

Тогда для любой точки $z' \in D$ имеет место равенство

$$\omega(z') = \frac{(z' - z_1)(z' - z_2)}{2S_\Delta} \iint_{\Delta} \omega''(z) dx dy, \quad (13)$$

где S_Δ – площадь ориентированного треугольника Δ с вершинами в точках z_1, z_2 и z' .

Используя формулу Грунского (13), нами получено несколько достаточных условий неосцилляции уравнения

$$\omega'' + p(z)\omega = 0. \quad (14)$$

¹ Мильштейн Г.Н. О красной задаче для системы двух дифференциальных уравнений. // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1. №12. С. 1623-1639.

² Grunsky H. Eine funktionen theoretische Integral-formel. // Math/Zeitschr. 63(1955) p. 320-323.

¹ Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. Москва, Наука, 1969, 392 с.

Приведем два из них.

Теорема 8.5. Пусть D – выпуклое множества с диаметром d и площадью S . Если $p(z)$ – регулярная функция в области D и

$$\iint_D |p(z)| dx dy \leq \frac{8\pi S}{d^2 \sqrt{27}},$$

то уравнение (14) неосциллиционно в области D .

Теорема 8.7. Пусть $p(z)$ – регулярная функция в выпуклой области D с шириной ω и диаметром d . Если выполнено неравенство

$$\iint_D |p(z)| dx dy \leq 2 \arcsin \frac{2\omega d}{\omega^2 + 2d^2},$$

то уравнение (14) неосциллиционно в области D .

В §9.3, используя результаты §4.1, приведено несколько достаточных условий неосцилляции дифференциальных уравнений (14) Приведем одно из них.

Теорема 9.1. Если $p(z)$ – регулярная функция в круге $|z| \leq 1$ и

$$\int_0^{2\pi} |p(e^{i\theta})|^\alpha d\theta \leq 2^{2(1-\alpha)} K^\alpha(\alpha), \quad \alpha > 1,$$

то уравнение (14) неосциллиционно в единичном круге $|z| < 1$, где

$$K(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{2\alpha-1} \right)^{\frac{1}{\alpha}} B^2 \left(\frac{\alpha-1}{2\alpha}, \frac{1}{2} \right), \text{ а } B(a,b) \text{ – бета функция Эйлера.}$$

§10 главы III посвящено обобщению теоремы З.Нехари¹ и В.В.Покорного².

Теорема 10. Если $p(z)$ – регулярная функция в единичном круге $|z| < 1$, и выполнены неравенства

$$|p(z)| \leq \frac{2/(\alpha+1)}{(1-|z|^2)^{\frac{\alpha+3}{2}}}, \quad |z| < 1,$$

$$|p(z)| \leq \frac{4/(\alpha+1)}{(1-|z|^2)^\alpha}, \quad |z| < 1,$$

то уравнение

$$\omega'' + p(z)\omega^\alpha = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

неосциллиционно в круге $|z| < 1$.

При $\alpha=1$ из этой теоремы вытекают результаты З.Нехари и В.В.Покорного соответственно.

В §11 и §12 главы III изучена неосцилляция комплексных дифференциальных уравнений высокого порядка. В §11 приведена теорема об (m,m) – неосцилляции дифференциального уравнения $2m$ – го порядка $(m \geq 1)$:

$$y^{(2m)} + (p_1(z)y^{(m-1)})^{(m-1)} + \dots + (p_{m-1}(z)y')' + p_m(z)y = 0 \quad (15)$$

с регулярными коэффициентами $p_i(z)$, $i=1,2,\dots,m$ в некоторой односвязной выпуклой области D комплексной плоскости. Доказана следующая.

Теорема 11.1. Если $p_1(z), p_2(z), \dots, p_m(z)$ – регулярные функции в выпуклой области D с диаметром d , и

$$\sum_{k=1}^m \max_{z \in \bar{D}} \{p_k(z)\} : z \in \bar{D} \leq 1, \quad (\pi/d)^{2k}$$

то уравнение (15) (m,m) – неосциллиционно в области D .

Из этой теоремы вытекает один из результатов¹ а именно: если $p(z)$ – регулярная функция в круге $|z| < 1$ и $|p(z)| \leq \pi^2/4$, то уравнения (14) неосциллиционно в круге $|z| < 1$.

Далее, используя известные интегральные неравенства, получена теорема, напоминающая теорему М.Лавье²:

Теорема 11.2. Если $p(z)$ – регулярная функция в круге $|z| < 1$ и выполнено неравенство

$$|p(z)| \leq \frac{\Gamma(m)}{(1-|z|^2)^m}, \quad |z| < 1,$$

то уравнение

$$\omega^{(2m)} + p(z)\omega = 0$$

(m,m) – неосциллиционно в круге $|z| < 1$, где

$$\Gamma(m) = \begin{cases} 2^n \prod_{k=1}^n (4k-1)(4k), & \text{если } m = 2n, \\ 2^{n+1} (2n+1) \prod_{k=1}^n (4k-1)(4k), & \text{если } m = 2n+1. \end{cases}$$

В §12 главы III изучается неосцилляция уравнений нечетного порядка

¹ Nehari Z. The Schwarzian derivative and schicht functions. //Bull.Amer.Math.Soc. 55(1949). No.6. p.545-551.

² Покорный В.В. О некоторых достаточных условиях однолиственности.// Докл. АН СССР. 1951. Т.79. №5. С. 743-746.

¹ Nehari Z. The Schwarzian derivative and schicht functions. //Bull.Amer.Math.Soc. 55(1949). No.6. p.545-551.

² Lavie M. The Schwarzian derivative and disconjugacy of n -th order linear differential equations.//Canad. J.Math. 21(1969). No.1 p. 235-249.

то в игре

$$\dot{w} = -u + v, \quad w = w(z), \quad w(z_0) = w_0 (\neq 0), \\ |u(z)| \leq \rho, \quad |v(z)| \leq \sigma,$$

возможно отклонения от точки 0 из начального положения (z_0, w_0) в круге $|z - z_0| < 1$.

В §16 главы IV посвящены задачам о встрече комплексных точек. Пусть управляемые точки w_1 и w_2 комплексной плоскости движутся в соответствии с уравнениями

$$w_1^{(p)} + \sum_{k=1}^p a_k w_1^{(p-k)} = u_1, \quad w_1(z_0) = w_{10}, \\ w_2^{(q)} + \sum_{j=1}^q b_j w_2^{(q-j)} = u_2, \quad w_2(z_0) = w_{20}, \quad (19)$$

где p, q -натуральные числа, a_k ($k=1, 2, \dots, p$), b_j ($j=1, 2, \dots, q$) – комплексные числа, а управляющие параметры u_1, u_2 принимают свои значения из некоторых подмножеств P_1 и P_2 комплексной плоскости. Задача о встрече точек w_1 и w_2 состоит в том, чтобы путем выбора аналитических функций $u_m = u_m(z)$, $u_m(z) \in P_m$, $m=1, 2$ добиться выполнения равенства $w_1(z) = w_2(z)$ при некотором $z = z_1$.

Согласно теореме Пикара, мероморфная функция, отличная от постоянной, принимает значение из комплексной плоскости, за возможным исключением двух значений. Поэтому предполагается выполнение условия трёхточечности: одно из множеств P_1 или P_2 содержит три точки. При выполнении условия трёхточечности области управления доказана следующая

Теорема 16.2. Если выполнено условие трёхточечности, то задача о встрече (19) разрешима для произвольных комплексных точек w_{10} и w_{20} .

Приведены примеры, когда условие трёхточечности не выполнено и задача о встрече комплексных точек не разрешима.

Заключение

Сформулируем основные результаты диссертации.

1. Используя аппарат выпуклого анализа и оптимального управления, получена формула для вычисления длины максимального промежутка неосцилляции в классе уравнений второго порядка и системы двух дифференциальных уравнений первого порядка с коэффициентами, принимающими значение из заданного выпуклого компактного множества. Указан максимальный промежуток однозначной разрешимости задачи Штурма-Лиувилля для класса уравнений второго порядка.

2. Приведены новые достаточные условия неосцилляции и формула для вычисления длины максимального промежутка неосцилляции в классе уравнений второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими интегральному ограничению.

3. Изучены вопросы (n, n) неосцилляции самосопряженных дифференциальных уравнений $2n$ -го порядка и приведены новые интегральные неравенства типа Виртингера-Биссака с чебышевским весом в случае $n=2$ и $n=3$.

4. Изучены асимптотическое поведение решений и нули решений системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

5. Приведено новое доказательство теореме Грунского и на основе этой теореме указано несколько новых видов достаточных условий неосцилляции комплексных дифференциальных уравнений второго порядка в заданной области. Обобщены классические теоремы З.Нехари и В.В.Покорного для уравнений второго порядка, а также приведены достаточные условия неосцилляции для уравнений высших порядков в данном множестве.

6. Приведено в новой форме необходимое и достаточное условие разрешимости двухточечных краевых задач для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в терминах опорной функции, а также указаны применения неосцилляции при доказательстве единственности решения краевой задачи для уравнений в частных производных.

7. Получены условия, гарантирующие решение задачи отклонения от встречи в единичном круге, а также задачи о встрече комплексной точки с терминальным множеством, когда поведение объектов в дифференциальных играх описывается комплексными дифференциальными уравнениями.

Во время выполнения диссертационной работы я пользовался советами и критическими замечаниями академика Н.Ю.Сатимова. Считаю своим долгом выразить глубокую признательность Нугману Юнусовичу Сатимову за постоянное внимание к моей работе.

Работы автора по теме диссертации

Статьи опубликованных в научных журналах

1. Муминов Г.М. Неулучшаемая оценка длины интервала неосцилляции для одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Вест. МГУ, сер.15 ВМиК 1986. №1. С.73-75.
2. Муминов Г.М. Оптимальная оценка длины интервала неосцилляции для линейной системы двух дифференциальных уравнений. // Докл. АН РУз. 1996. №7. С.12-14.
3. Муминов Г.М. О нулях решений дифференциального уравнения второго порядка в комплексной плоскости // Узбек. матем. журнал, 1998. №6. С.49-55.
4. Муминов Г.М. Одна экстремальная задача из теории неосцилляции. // Докл. АН РУз. 1999. №11. С.13-15.
5. Муминов Г.М. Неосцилляция комплексных дифференциальных уравнений второго порядка с коэффициентами удовлетворяющими интегральному ограничению. // Узбек. матем. журнал. 1999. №3. С.65-72.
6. Муминов Г.М. Неосцилляция дифференциальных уравнений второго порядка с коэффициентами удовлетворяющим интегральному ограничению. // Вестник НУУз, 1999, №3, С.22-27.
7. Сатимов Н.Ю., Муминов Г.М. Задача о встрече управляемых комплексных точек. // Узбек. матем. журнал 1999. №5. С.65-70.
8. Муминов Г.М. Об одной краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. // Изв. вузов, Математика. 2001. №6. С.44-49.
9. Муминов Г.М. Об одном обобщении теории З.Нехари и В.В.Покорного. // Узбек. матем. журнал. 2001. №2. С.55-60.
10. Муминов Г.М. О нулях решений уравнения $y^{(2k+1)} + p(z)y = 0$. // Дифференц. уравнения. 2001. Т.37, №9. С.1285-1288.
11. Сатимов Н.Ю., Муминов Г.М. Задача об уклонении в единичном круге. // Проблемы управления и информатики. 2001. №3, С.70-75.
12. Муминов Г.М. О поведении решений системы двух линейных уравнений первого порядка. // Олий ўқув юртлари ахбороти. Физика-математика фанлари. 2001. №1-2. С.22-25.

13. Муминов Г.М. Критерий неосцилляции для самосопряженного линейного дифференциального уравнения второго порядка. // Олий ўқув юртлари ахбороти. Физика-математика фанлари. 2001. №1-2. С.73-75.
14. Муминов Г.М. О (m, m) – неосцилляции самосопряженных дифференциальных уравнений в комплексной области. // Дифференц. уравнения 2002. Т.38. №3. С.420-422.
15. Muminov G.M. On the zeros of solutions of the differential equation $\omega^{(2m)} + p(z)\omega = 0$. // Demonstratio mathematica 35(2002), No.1, p.41-48.
16. Муминов Г.М. О нулях решений дифференциального уравнения четвертого порядка в комплексной плоскости. // Узбек. матем. журнал. 2002. №3-4. С.58-63.
17. Муминов Г.М. Об одном аналоге теорем З.Нехари и В.В.Покорного. // Узбек. матем. журнал. 2003. №1. С.54-58.
18. Муминов Г.М., Мамадалиев Н. Об (m, m) -неосцилляции линейных дифференциальных уравнений // Олий ўқув юртлари ахбороти. Физика-математика фанлари. 2003. №1-2. С.33-41.
19. Муминов Г.М., Абдувохидов М. О некоторых критериях колеблемости разностных уравнений Эмдена-Фаулера. // Олий ўқув юртлари ахбороти. Физика-математика фанлари. 2003. №1-2. С.79-88.

Статьи опубликованных в сборниках

1. Муминов Г.М. Об одной задаче теории неосцилляции. // Сб. Некоторые вопросы вычислительной математики, математической физики и программного обеспечения ЭВМ: Изд.-во МГУ. -Москва 1987. С.28-29.
2. Муминов Г.М. Об одной задаче теории неосцилляции. // Сб. Некоторые вопросы вычислительной математики, математической физики и программного обеспечения ЭВМ: Изд.-во МГУ. -Москва 1988. С.66-68.
3. Муминов Г.М. Двухточечные краевые задачи // Краевые задачи. - Пермь, 1989. С.37-40.
4. Муминов Г.М. Оценка снизу первого собственного значения задачи Штурма-Лиувилля. // Сб. Актуальные вопросы теории оптимального управления и дифференциальных игр. -Тошкент 1996. С.60-65.
5. Муминов Г.М. Оптималлаштиришнинг бир масаласида оптимал бошқариш функциялари тўпламини махсус силликланда оптимал

- вақт асимптотикаси. //Фан ва таълим (илмий мақолалар тўплами) - Тошкент 1998. 24-30 б.
6. Муминов Г.М. Об одной теореме З.Нехари. //Вопросы вычислительной и прикладной математики. Тр. ИКсВЦ АН РУз.-Ташкент. 1998. № 105. С.66-71.
 7. Муминов Г.М. О m - m неосцилляции самосопряженных дифференциальных уравнений в комплексной области. // Ахмад ибн Мухаммад ал Фарғонийга бағишланган анжуман материаллари. 28-30 сентябр 1998.- Тошкент, 102-107 б.
 8. Муминов Г.М. Об одной красвой задаче для уравнения в частных производных. //Сб. Актуальные вопросы теории оптимального управления и математического моделирования.-Тошкент, 1999. С.30-35.
 9. Муминов Г.М. Об оценке расстояния между нулями линейных дифференциальных уравнений.//Труды международной научной конференции «Современный проблемы математический физики и информационной технологии» II том-Тошкент 2003. С. 221-225.
 10. Муминов Г.М. О нулях решений уравнения $w^{(IV)}+p(z)w=0$. //Труды международной научной конференции «Современный проблемы математический физики и информационной технологии» II том-Тошкент 2003. С.226-229.

Тезисы выступлений и депонированные работы

1. Муминов Г.М. Оптимальная оценка длины интервала неосцилляции для линейного дифференциального уравнения второго порядка, 12С.- Деп. в. ВИНТИ АН СССР, рег. 25.04.86 №4171-86.
2. Муминов Г.М. «К неравенству Ляпунова», В кн.: Тезисы докл. 3-и Понtryгинское чтение, Кемерово, 1990, С.182.
3. Муминов Г.М. «Об одной вариационной задаче», Республика ёш математикларининг теоремалари -9.- Наманган. 1994, С.53
4. Муминов Г.М. «О длины интервала неосцилляции линейного системы», В кн.: Тезисы докл. V Понtryгинское чтение.- Воронеж, 1994.
5. Муминов Г.М. О нулях решений уравнения $\omega^{(2m)}+p(z)\omega=0$. Всеукраинская конф". Дифференциальные-функциональные уравнения и их приложения". - Черновцы. 1996. С.214.
6. Муминов Г.М. Об одной теореме Z.Nehari. "International Conference Dedicated to the 90-th Anniversary of L.S. Pontryagin" Optimal control and Appendices. - Moscow. 1998, p.320-321.

7. Муминов Г.М. Асимптотика времени быстрогодействия в одной задаче оптимальной быстрогодействия.// В книге тезисы докладов международной научной конференции посвященной 1200 летия Ахмад ал-Фергани.-Фергана, 1998, стр.154-156.
8. Muminov G.M. Disconjugate of the complex differential equations on the second order with integral restriction on the coefficient. 1-st Turkish world mathematics symposium. - Turkey, Elajig. 1999. p.84-85.

Соискатель

Муминов

РЕЗЮМЕ

диссертации Муминова Гуламжана Мадаминовича на тему:
“Некоторые экстремальные задачи теории неосцилляции
дифференциальных уравнений” на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.02 — дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: промежуток неосцилляции, опорная функция, принцип максимума Понтрягина в теории оптимального управления, асимптотика решений и нулей, неравенство типа Виртингера-Биссака с чебышевским весом, дифференциальные игры преследования и убегания.

Объекты исследования: расположение нулей решений дифференциальных уравнений в действительной и комплексной областях в зависимости от коэффициентов уравнения, разрешимость двухточечных краевых задач и дифференциальные игры.

Цель работы: нахождение формулы для вычисления расстояния между соседними нулями решений дифференциальных уравнений второго порядка с коэффициентами, принимающими значения из заданного множества. Получение достаточных условий неосцилляции дифференциальных уравнений в действительных и комплексных областях, их применение к вопросам разрешимости краевых задач и дифференциальных игр.

Методы исследования: выпуклый анализ, принцип максимума Понтрягина в теории оптимального управления и методы конформных отображений комплексного анализа.

Полученные результаты и их новизна: Получена формула для вычисления длины максимального промежутка неосцилляции для класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Приведено новое доказательство теоремы Грунского. Указаны новые достаточные условия неосцилляции дифференциальных уравнений действительных и комплексных областях. Изучены вопросы (n, n) неосцилляции самосопряженных дифференциальных уравнений $2n$ -го порядка и приведены новые интегральные неравенства типа Виртингера-Биссака с

чебышевским весом в случае $n=2$ и $n=3$. Получены достаточные условия, гарантирующие решение задачи уклонения от встречи комплексной точки с терминальным множеством, когда поведение объектов описывается комплексными дифференциальными уравнениями.

Практическая значимость: результаты, полученные в диссертации, можно применять при моделировании и решении ряда задач экономики, медицины, биологии и других отраслей.

Степень внедрения и экономическая эффективность: результаты, полученные в диссертации, имеют теоретический характер, их можно использовать при чтении специальных курсов и проведении специальных семинаров, а также при обучении магистров и аспирантов.

Область применения: результаты исследований, изложенные в диссертации можно использовать в теории дифференциальных уравнений, в математическом анализе, в теории оптимального управления и дифференциальных игр.

Физика-математика фанлари доктори илмий даражасига талабгор Мўминов Фуломжон Мадаминовичнинг
01.01.02 – дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича
“Дифференциал тенгламалар ечимлари тебранмаслиги назариясининг баъзи экстремал масалалари” мавзусидаги диссертациясининг

ҚИСҚАЧА МАЗМУНИ

Калитли сўзлар: тебранмаслик оралиқлари, таянч функция, оптимал бошқариш назариясининг Понтрягин максимум принципи, ечимлар ва ечим нолларининг асимптотикаси, Чебишев юкли Виртингер – Бейсик кўринишдаги тенгсизликлар, қувувчи ва қочувчи объектларга оид дифференциал ўйинлар.

Тадқиқот объектлари: ҳақиқий ва комплекс соҳада дифференциал тенгламалар ечимлари нолларининг тенглама коэффициентларига боғлиқ жойлашиши, чегаравий масалаларнинг ечилиш шартлари ва дифференциал ўйинлар.

Ишнинг мақсади: коэффициентлари берилган тўпладан қийматлар қабул қилувчи иккинчи тартибли дифференциал тенглама ечимларининг қўшни ноллари орасидаги масофани ҳисоблаш учун формула топиш; ҳақиқий ва комплекс соҳада дифференциал тенгламалар ечимлари тебранмаслигининг етарли шартларини ҳосил қилиш ҳамда бу шартларни чегаравий масалалар ечилишига ва дифференциал ўйинларга тадбиқ этиш.

Тадқиқот методи: қабарик анализ, оптимал бошқариш назариясининг Понтрягин максимум принципи ва комплекс анализнинг конформ акслантиришлар усули.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: иккинчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ечимлари учун максимал тебранмаслик оралиғи узунлигининг ҳисоблаш формуласи топилган. Грунский теоремасининг янги исботи келтирилган. Ҳақиқий ва комплекс соҳаларда дифференциал тенгламалар ечимлари тебранмаслигининг янги етарли шартлари кўрсатилган. $(2n)$ – тартибли чизиқли қўшма дифференциал

тенгламалар ечимларининг (n,n) тебранмаслик шартлари ўрганилган ҳамда $n=2$ ва $n=3$ бўлган ҳолларда Чебишев юкли Виртингер – Бейсик типдаги янги интеграл тенгсизликлар олинган. Ҳолатлари комплекс дифференциал тенгламалар билан ёзилган объектлар учун комплекс нуқтанинг терминал тўплам билан учрашиш масаласи ҳамда бирлик доирада қаралаётган дифференциал ўйинларда учрашишдан четланиш масалалари учун етарли шартлар келтирилган.

Амалий аҳамияти: Диссертацияда олинган натижалар иқтисодиёт, тиббиёт, биология ва бошқа кўплаб соҳалардаги турли масалаларни моделлаштириш ва ечишда қўлланилиши мумкин.

Тадбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: Диссертацияда олинган натижалар назарий аҳамиятга эга бўлиб, улардан махсус курслар ва махсус семинарлар ўтишда, магистрлар ва аспирантларга таълим бериш жараёнида фойдаланиш мумкин.

Қўлланиш соҳаси: Диссертацияда баён этилган тадқиқот натижалари дифференциал тенгламалар назариясида, математик анализда, оптимал бошқариш назарияси ва дифференциал ўйинларда қўлланилиши мумкин.

RESUME

Thesis of Muminov Gulamjon Madaminovich on the academic degree competition of the doctor of physical and mathematical sciences, speciality 01.01.02 – differential equations. "Some extremal problems of the disconjugate's theory of differential equations."

Key words: disconjugate's interval, support function, Pontryagin's maximal principle on the optimal control theory, asymptotics of solutions and their zeros of the differential equations, Wirtinger-Beesack integral inequalities with Chebishev's weight function, differential game of pursuit and evasion problems.

Subjects of the inquiry: the distribution of zeros a nontrivial solutions of differential equation on the real and complex fields by depending from the coefficients of the differetial equations, the solvability two-points's boundary-value problems.

Aim of the inquiry: To find the computer's formular for the distance between zeros of nontrivial solutions of differential equations second order with coefficients lying in a given compact convex set. To have sufficient conditions of disconjugate of differential equations on real and complex fields and apply the theory to problems' solvability boundary value problems and to differential games.

Method of inquiry: convex analyses, Pontryagin's maximal principle on the optimal control theory and the conform's mapping on the complex analyses.

The results achieved and their novelty: having got the computer's formular for the distance between zeros of any nontrivial solutions of differential equations second order, with coefficients which are lying in compact convex set. A new proof of Grunsky theorem is presented. It is pointed the new sufficient condition of disconjugate for differential equations real and complex fields. Sufficient conditions of (n,n) disconjugates are established for the differential equation of $(2n)$ order and obtained new integral inequalities Wirtinger-Beesak's type with Chebishev's weight function for $n=2$ and $n=3$. Sufficient

conditions which guaranteed for contact a complex point with the terminal set and a sufficient conditions for avoiding contact in unit disk differential games, when an object's motion is described by the complex differential equations are presented.

Practical value: the results of dissertation maybe used in modelling and solving many problems of economics, medical science, biology and many other fields.

Degree of embed and economical efectivity: the results of dissertation have a ttieoretical character so they may be used in teaching special courses and holding special trainings, besides in teachin masters and post-graduate researchers.

Sphere of usage: Inquiry results of dissertation may be used in differential equations theory, in the mathematical analyses, in optimal control theory and in differential games

Подписано в печать 1.07.2005.
Объем 1,75. Формат 60x90/16.
Тираж 100 Заказ № 120. Отпечатано способом ротопринта на Андижанской
Государственный университета им.М.З.Бабура. г.Андижан.
ул. Университетская, 129.