"ФДУ Нусха кўпайтириш бўлими"
12. 2010 йил. Бую. № 259. адади 100.

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
O'LIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI

BAKIROV T.

Juft ketma-ketliklar yordamida geometrik kattaliklarni o'lchash

(o'quv-metodik ko'rsatma)

Farg'ona-2010

Ushbu metodik qo'llanma universitet talabalari, akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o'qituvchilari uchun yozilgan bo'lib, bunda kattaliklar, juft ketma-ketliklar, ular yordamida haqiqiy sonlarni aniqlash, geometrik kattaliklarni o'lchash haqidagi nazariy ma'lumotlar, mustaqil yechish uchun masala va mashqlar berilgan. Qo'llanmadan to'garak va tanlov fanlarini tashkil etishda, mustaqil malaka oshirish maqsadida foydalanishi mumkin.

Taqrizchilar

O'.Toshmetov	Niz'omiy n'omidagi TDPU Matematik analiz kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari nomzodi.
X.Maxmudov	FarDU Umumiy matematika kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

Farg'ona davlat universiteti ilmiy kengashining 2010 yil 30 apreldagi 9-sonli yig'ilish qaroriga binoan nashrga tavsiya etilgan.

Mundarija

O'lchov muammosining mohiyati

Geometrik kattaliklarni o'lchash ham nazariy, ham metodik jihatdan murakkab (qiyin) masalalardan biri hisoblanadi. Bu qiyinchilik o'quv qo'llanmalarda va darsliklarda o'lchashning asosiy ob'yektlari-uzunlik, yuza, hajm aniq ta'riflanmaydi. Shuningdek umumiy tushuncha bo'lmish kattalik ham ta'riflanmaydi. Masalan, mavjud o'quv adabiyotlarida kesmaning uzunligi tushunchasi aniq ta'riflanmagan, yuz tushunchasi aksiomatik kiritiladi. Ammo aksiomalar tizimida to'g'ri burchakli uchburchakni yuzini qanday hisoblash (aniqlash) mumkinligi haqida so'z yuritilmaydi. Shuningdek egri chiziqli trapetsiya yuzi ham aniq kiritilmagan.

Umumiy o'rta ta'lim matematikasidagi o'lchovlarni (kesma uzunligi, figura yuzi, jism hajmi) kiritishning asosiy ikki usuli mavjud. Ulardan biri kattalik tushunchasi bilan, ikkinchisi esa, to'plam o'lchovi tushunchasi bilan bog'liq. Ushbu o'quv-uslubiy ko'rsatmada geometrik kattaliklarni o'lchashni kattalik tushunchasiga bog'lab o'rganamiz.

1-§. Skalyar kattaliklar

1.1. Skalyar kattalikning xarakteristikasi

1. Agar biror a, b, c, ob'yektlar to'plami berilgan bo'lsa, u holda bu to'plamdan olingan ixtiyoriy ikkitasi uchun bir-birini inkor qiluvchi quyidagi uchta holdan faqat biri o'rinli bo'ladi:
yoki $a=b$ «a va b teng» - tenglik munosabati;
yoki $a>b$ «a katta b» - tengsizlik munosabati;
yoki $a<b$ «a kichik b» - tengsizlik munosabati.

2. Tenglik munosabati quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:
agar $a=b$ bo'lsa, $b=a$ -(simmetriklik);
$a=a$ – refeksivlik;
$a=b$, $b=c$ bo'lsa, $a=c$ bo'ladi (tranzitivlik).

3. Tengsizlik munosabati quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:
agar $a>b$ bo'lsa, $b<a$ bo'ladi;
agar $a>b$, $b>c$ bo'lsa, u holda $a>c$ bo'ladi (tranzitivlik).

Skalyar kattaliklarga uzunlik, yuz va hajmdan boshqa harorat, jismning og'irligi, zichligi va boshqalar misol bo'la oladi.

1.2. Additiv kattaliklarning xarakteristikasi

Bunday kattaliklar to'plamida qo'shish amali aniqlangan bo'ladi. Bu amal ikkita a va b elementga ularning yig'indisi deb ataluvchi shu to'plamning uchinchi c elementini bir qiymatli mos qo'yadi va simvolik ravishda $a+b=c$ kabi belgilanadi. Qo'shish quyidagi qonunlarga bo'ysunishi zarur:

1. $a+b=b+a$ (o'rin almashtirish);
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (guruhlash);
3. agar $a+b=c$ bo'lsa, u holda $c>a$ va $c>b$ (monotonlik).

Additiv kattalikka kesmaning uzunligi misol bo'ladi.

Additiv bo'lmagan kattaliklarga jismning zichligi, temperaturasi misol bo'ladi.

Masalan bir idishdagi suvning temperaturasi 30°, ikkinchisidagi suvning temperaturasi 60° bo'lsa, u holda birinchi idishdagi suvning ikkinchi idishga quyish natijasida suvning temperaturasi 90° teng bo'lmasligi ravshan.

1.3. Skalyar additiv uzluksiz kattalikning xarakteristikasi

Skalyar additiv kattalik uzluksiz bo'lishi uchun quyidagi shartlarning bajarilishi zarur va yetarli:

1. Arximed aksiomasi: Agar $a>b$ bo'lsa, u holda shunday n natural sonni topish mumkinki, buning uchun $nb>a$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu erda

$$nb=\underbrace{b+b+\cdots+b}_{n\ \text{марта}}.$$

2. Berilgan to'plamdan olingan a element va n natural son uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi yagona b element mavjud:

$$b = \frac{a}{n}$$

Yuqoridagi shartlar elementning istalgancha kichik bo'laklarga cheksiz bo'lishi imkoniyatini ta'minlaydi.

3. Kantorning umumlashgan aksiomasi:

Agar berilgan to'plamning quyidagi shartlarini qanoatlantiruvchi ikkita $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ va $a_1', a_2', \ldots, a_n', \ldots$ ketma-ketligi berilgan bo'lsa:

1. $a_r < a_q'$ (istalgan r va q uchun)

2. $a_{n+1} > a_n$ va $a_{n+1}' < a_n'$ (istalgan n uchun)

3. Berilgan to'plamning istalgan k elementi uchun $a_n' - a_n < k$ shartni qanoatlantiruvchi n mavjud bo'lsa, u holda shunday yagona a element mavjud bo'lib, u birinchi ketma-ketlikning barcha hadlaridan katta, ikkinchi ketma-ketlikning har bir hadidan kichik bo'ladi.

Uzluksiz kattalikka misol sifatida kesmaning uzunligini qarash mumkin. Shuni tahkidlab o'tish kerakki, uzluksiz to'plamlarga diskret to'plamlar qarama-qarshi qo'yiladi. Diskret to'plamlarga shahardagi uylar to'plami, universitetlar to'plami misol bo'lib, ular skalyar additiv to'plam bo'ladi.

Geometriyada faqat uzluksiz skalyar additiv kattaliklar o'rganilganligi uchun quyidagi «kattalik» atamasini ishlatganda aynan uzluksiz skalyar additiv kattalikni tushunamiz.

Kattaliklarni o'lchash jarayoni quyidagidan iborat: Avvalambor kattaliklar to'plamidan aniq bitta element tanlab olinadi va u o'lchov birligi deb qabul qilinadi. Keyin esa, o'lchash amalini bajaramiz, bunda berilgan to'plamning har bir elementiga haqiqiy son - shu kattalikning o'lchovi - mos qo'yiladi.

O'lchov natijasida topilgan o'lchov ikkita:

birinchidan, to'plamning teng elementlariga (teng kattaliklarga) teng o'lchovlar va ikkinchidan, ikkita element yig'indisiga ular o'lchovlarining yig'indisi mos kelishi shartlarini qanoatlantirishi zarur.

Q'quv adabiyotlarida «kattalik» va uning «o'lchovi» biri ikkinchisi bilan almashtirib ham ishlatiladi. Mantiqiy nuqtai nazardan «kattalik» va uning «o'lchovi» (shu kattalikni ifodalovchi son) mutlaqo boshqa tushuncha. Masalan, «uzunlik» (yoki «ikki nuqta orasidagi masofa») tushunchasi inson kesma uzunligini o'lchashni o'rganganidan ancha avval payco bo'lgan. Sanash va o'lchash bilan tanish bo'lmagan bog'cha yoshidagi bolalar «katta», «kichik», «teng» tushunchalarini etarlicha yaxshi farqlaydi.

Shuni ham ta'kidlaymizki, «berilgan kesmaning uzunligi» o'zgarmas kattalik bo'lib, uning o'lchovi («uzunligini ifodalovchi son») birinchi kesmani tanlashga bog'liq holda, turli son qiymatlar qabul qilishi mumkin.

Shu sababli «Uchburchakning yuzi asosi bilan balandligi ko'paytmasini yarimiga teng» degan ifodani quyidagicha aytish kerak edi: «Uchburchak yuzining o'lchovi uning asosi o'lchovining balandligi o'lchovining ko'paytmasining yarmiga teng».

Ammo o'qitishda bunday ta'riflashlardan foydalanish maqsadga mos kelmaydi.

Q'lchash g'oyasini to'g'ri o'zlashtirish uchun va «kattalikning o'lchovi» «kattalik» tushunchasining mohiyatini anglab olish va o'lchash qoidalarini ta'riflashlarda uning nimani anglatilishini bilish yetarli.

§2. Haqiqiy sonlar

2.1. Juft ketma-ketlik. Yaqinlashish shartlari

Son haqida boshlang'ich tushuncha predmetlarini sanash natijasida hosil bo'ladi. Shu tarzda natural sonlar to'plami 1, 2, 3, ... hosil bo'ladi. Natural sonlarga qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish amallarini tatbiq qilish (nolga bo'lish mumkin emas) natijasida barcha ratsional sonlar hosil bo'ladi. Har bir ratsional sonni chekli yoki cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishda ifodalash mumkin.

Ratsional sonlar to'plami maydon tashkil etadi. Bu degani ikki ratsional sonlar ustida bajarilgan har bir arifmetik amal, qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish natijasida yana ratsional son hosil bo'lishini ko'rsatadi.

Cheksiz o'nli kasrlar cheksiz sonli ketma-ketlikka misol manbasi bo'lib xizmat qiladi. Masalan, $\frac{1}{3}$ ni cheksiz o'nli kasrga aylantirib 0, 333...... cheksiz kasrga ega bo'lamiz. 0,3, 0,33, 0,333, ... sonlar esa $\frac{1}{3}$ ning kami bilan yaqinlashishini beradi.

Bu sonlar so'ngi o'nlik belgisini bir birlikka orttirsak $\frac{1}{3}$ ning ortig'i bilan yaqinlashishini hosil qilamiz: 0,4; 0,34; 0,334, ... Bundan quyidagi tengsizliklarga ega bo'lamiz: $0{,}3<0{,}33<0{,}333<\ldots<0{,}334<0{,}34<0{,}4$. Bunday ketma-ketliklar juftini umumiy simvol bilan $\{a_n; a_n'\}$, (bu yerda $n=1, 2, 3, \ldots$) belgilaymiz va *juft ketma-ketlik* deb ataymiz.

Berilgan ratsional sonning mumkin bo'lgan barcha kami bilan va ortig'i bilan yaqinlashishlarini beruvchi ketma-ketliklarini tahlil qilib, bunday ketma-ketliklarning quyidagi xossalarini ko'rish mumkin:

1. Birinchi ketma-ketlikni har bir hadi ikkinchi ketma-ketlikning istalgan hadidan katta emas;

2. Birinchi ketma-ketlikning hadlari kamaymaydi, ikkinchi ketma-ketlikning hadlari o'smaydi; $a_{r+n} \geq a_r$; $a_{r+n}' \leq a'$

3. Istalgan ε musbat son uchun $a_n' - a_n < \varepsilon$ bo'lgan n sonni ko'rsatish mumkin.

Yuqoridagi uchta shart juft ketma-ketlikning *yaqinlashish shartlari* deyiladi, shu uchta shartni qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar *yaqinlashuvchi ketma-ketliklar* deyiladi.

Yaqinlashuvchi juft ketma-ketliklar muhim xossaga ega:

1-teorema: Agar birinchi ketma-ketlikning istalgan hadidan kichik bo'lmagan va ikkinchi ketma-ketlikning istalgan hadidan katta bo'lmagan ratsional son mavjud bo'lsa, u holda bunday ratsional son yagona bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik $\{a_n; a_n'\}$ ketma-ketlik yuqoridagi uchta shartni qanoatlantirsin va ixtiyoriy n uchun

$$a_n \le \alpha \le a_n' \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin.

Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi va α ga teng bo'lmagan yana bitta β son mavjud bo'lsin, aniqlik uchun $\beta > \alpha$ deb olaylik. Demak, istalgan n uchun

$$a_n \le \beta \le a_n' \qquad (2)$$

tengsizlik o'rinli.

Yuqoridagi tengsizliklardan $a_n' \ge \beta$, $a_n \le \alpha$ tengsizliklarga egamiz. Birinchi tengsizlikdan ikkinchi tengsizlikni ayirib $a_n' - a_n \ge \beta - \alpha$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa yaqinlashishning uchinchi shartiga zid: $a_n' - a_n$ ayirma n etarlicha katta bo'lganda istalgan musbat sondan kichik bo'lishi lozim, biz bu ayirmaning $\beta - \alpha$ dan kichik bo'la olmasligini ko'rsatdik. Demak, α yagona ekan.

Isbotlangan teoremaga asosan, yaqinlashuvchi ketma-ketliklar jufti yagona ratsional sonni aniqlaydi deb aytish mumkin. Lekin shu yaqinlashuvchi ketma-ketliklar juftini ratsional son deb atash tabiiydir. Masalan, 0,(3) davriy kasrdan hosil bo'lgan 0,3; 0,33; 0,333; ... va 0,4; 0,34; 0,334;... ketma-ketliklar $\frac{1}{3}$ sonini aniqlaydi.

2-teorema. Har qanday davriy cheksiz kasr ratsional son bo'ladi.

Isboti. Aytaylik $0,(a_1a_2...a_n)$ davriy kasr berilgan bo'lsin, bu yerda $(a_1a_2...a_n)$ bilan n ta raqamdan iborat davr belgilangan. Endi masalani quyidagicha qo'yamiz: shunday ratsional sonni topish kerakki, uni o'nli kasrga aylantirganda berilgan o'nli kasr hosil bo'lsin.

n ta raqamli sonni $(a_1a_2...a_n)$ bilan belgilaymiz, q orqali n ta to'qqizdan iborat soni belgilaymiz. Ya'ni $p = a_1a_2...a_n$, $q = 10^n - 1$.

sonida birinchi raqamni oxirgi o'ringa ko'chirib $p_1 = a_2a_3...a_na_1 = 10(a_1a_2...a_{n-1}a_n) - 10^n a_1 + a_1 = 10p - (10^n - 1)a_1 = 10p - qa_1$

Demak, $10p = qa_1 + p_1$.

p_1 son bilan ham xuddi shunday amal bajaramiz, ya'ni a_2 ni so'ngi o'ringa olib kelamiz va yuqoridagi kabi $10p_1 = qa_2 + p_2$, bu erda $p_2 = a_3a_4...a_{n-1}a_na_1a_2$, tenglikka ega bo'lamiz.

Shu amalni n marta bajarib quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$10p = qa_1 + p_1,$$
$$10p_1 = qa_2 + p_2,$$
$$10p_2 = qa_3 + p_3,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$10p_{n-1} = qa_n + p_n$$

Bu yerda $p_n = a_1a_2...a_n = p$, ya'ni avval berilgan songa teng.

Agar biz $\frac{p}{q}$ ratsional sonni o'nli kasrga aylantirsak, aynan yuqoridagi kabi amallarni bajargan bo'lar edik. Haqiqatdan ham, bunda biz p ni 10 ga ko'paytirib, 10p ni q ga bo'lish amalini bajarar edik, bunda bo'linma a_1 ga qoldiq p_1 ga teng bo'ladi. Qoldiqni yana 10 ga ko'paytirib q ga bo'lamiz, bo'linmada a_2 ni qoldiqda p_2 ni hosil qilamiz va hakazo. n-chi bo'lishdan so'ng qoldiqda $p_n = p$ ni, ya'ni dastlabki sonni hosil qilamiz va butun jarayon cheksiz takrorlanadi.

Shunday qilib, $0,(a_1a_2...a_n)$ davriy kasr $\frac{a_1a_2...a_n}{10^n - 1}$ kasrni o'nli kasrga aylantirish natijasida hosil bo'ladi.

Shu davriy kasrda verguldan so'ng k ta raqamni olib, topilgan sonning $\frac{1}{10^k}$ aniqlikdagi kami bilan taqribiy qiymatini hosil qilamiz. Shu yaqinlashishning so'ngi raqamiga birni qo'shib, berilgan sonning $\frac{1}{10^k}$ aniqlikda ortig'i bilan yaqinlashishini hosil qilamiz. Natijada $\frac{a_1a_2...a_n}{10^n - 1}$ sonni ifodalaydigan $\{b_k, b_k'\}$ juft ketma-ketlikning b_k, b_k' hadlarini hosil qilamiz.

Shunday usul bilan har qanday aralash davriy kasr ratsional son ekanligini isbotlash mumkin. Buni mustaqil bajarishni taklif qilamiz.

Shuni ta'kidlashimiz kerakki, aynan bitta son cheksiz takrorlanuvchi ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xususiy holi bo'ladi. Masalan

1, 9	2	5	5
1, 99	2	5	5
1, 999	2	5	5
......		yoki	

Ravshanki, birinchi juftlik 2 ni, ikkinchi juftlik 5 ni aniqlaydi.

2.2. Irratsional son tushunchasi

Hech qanday ratsional sonni aniqlamaydigan yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ham mavjud.

Masalan, 5 dan kvadrat ildizni hisoblaganda hosil bo'ladigan taqribiy qiymatlar ketma-ketligini qarash mumkin. Bu holda quyidagi ketma-ketlik hosil bo'ladi:

2	3
2,2	2,3
2,23	2,24
2,236	2,237
2,2360	2,2361
2,23606	2,23607

Birinchi ketma-ketlik hadlarini kvadratga oshirsak 5 dan kichik sonlar, ikkinchi ketma-ketlik hadlarini kvadratga oshirsak 5 dan katta sonlar hosil bo'ladi.

Birinchi ketma-ketliklar hadlaridan katta, ikkinchi ketma-ketlik hadlaridan kichik ratsional son mavjud emasligini isbotlaymiz.

Teskaridan faraz qilamiz, shunday son mavjud bo'lsin. Bu son 2 va 3 orasida bo'lganligi sababli u butun son bo'lmaydi. Shu sababli bu son kasr son va qisqarmaydigan $\frac{p}{q}$ kasrga teng deb qaraymiz.

Quyidagi tengsizlik o'rinli:

$a_n < \frac{p}{q} < a_n'$, bu sonlarning kvadratlari uchun ham o'xshash tengsizlik o'rinli:

$$a_n^2 < \frac{p^2}{q^2} < a_n'^2.$$

$\{a_n^2; a_n'^2\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi, chunki

1) $a_n^2 < a_n'^2$;

2) $a_{n+1} > a_n$, bundan $a_{n+1}^2 > a_n^2$; shunga o'xshash $a_{n+1}' < a_n'$ bundan $a_{n+1}'^2 < a_n'^2$.

3) $a_n'^2 - a_n^2 = (a_n' - a_n)(a_n' + a_n)$. Ammo istalgan n uchun $a_n < 3$, $a_n' < 3$ tengsizliklar o'rinli, demak $a_n' + a_n < 6$ bo'ladi.

Shu sababli istalgan ε musbat son uchun n ni shunday tanlash mumkinki, $a_n' - a_n < \varepsilon/6$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan $a_n'^2 - a_n^2 < 6(a_n' - a_n) < 6 \cdot \varepsilon/6 = \varepsilon$, ya'ni $a_n'^2 - a_n^2 < \varepsilon$.

Shunday qilib, $\{a_n^2; a_n'^2\}$ juft ketma-ketlik yagona p^2/q^2 sonni aniqlaydi. Shuning bilan birga $a_n^2 < 5 < a_n'^2$, ya'ni shu ketma-ketlik bilan 5 soni aniqlanadi. 1-teoremaga ko'ra $p^2/q^2 = 5$. Ammo p/q qisqarmaydigan, demak, p^2/q^2 kasr ham qisqarmaydigan kasr bo'ladi. Biz $p^2/q^2 = 5$ noto'g'ri tenglikka ega bo'ldik. Hosil bo'lgan ziddiyat berilgan juft ketma-ketlik bilan aniqlanadigan ratsional sonning mavjud emasligini isbotlaydi.

Bunday holda, ya'ni yaqinlashuvchi juft ketma-ketlik ratsional sonni aniqlamagan holda, bu ketma-ketliklar *irratsional sonni aniqlaydi* deb aytiladi.

Shuni tahkidlash kerakki, sonning irratsionalligi maxsus isbotlanishi lozim (masalan, yuqoridagi misol kabi).

π sonini aniqlaydigan ketma-ketlik deb quyidagini qarash mumkin:

	3	4
	3.1	3.2
	3.14	3.15
	3.141	3.142
aniq	3.1415	3.1416
	3.14159	3.14160
	3.141592	3.141593

Har qanday ratsional sonni chekli yoki cheksiz davriy kasr ko'rinishda yozish mumkin, aksincha har qanday cheksiz o'nli davriy kasr bitta ratsional sonni aniqlaydi. Shuning uchun cheksiz nodavriy o'nli kasr irratsional sondan iborat deb tahkidlash mumkin.

Ratsional va irratsional sonlar birgalikda *haqiqiy son* deb nomlanadi.

2.3. Haqiqiy sonlarni solishtirish

Yaqinlashuvchi juft ketma-ketlik bilan berilgan ikkita haqiqiy sonni solishtirish uchun quyidagi qoidalardan foydalaniladi:

1. $\{a_n; a_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlangan α son va $\{b_n; b_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlangan β son berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy va q natural sonlar uchun $a' < b_q$ tengsizlik o'rinli bo'laversa, u holda α soni β sonidan kichik deyiladi.

2. Agar α<β va α>β tengsizliklar o'rinli bo'lmasa, u holda bundan α=β ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta'riflardan quyidagi asosiy teorema kelib chiqadi:

3-teorema. Agar $\{a_n; a_n'\}$ va $\{b_n; b_n'\}$ juft ketma-ketliklar bilan aniqlangan α va β sonlar uchun ixtiyoriy va q natural sonlarda $a_r < b_q'$ va $a_r' < b_q$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda $\alpha = \beta$ bo'ladi.

Isboti. α>β bo'lsin. U holda $a_r > b_q'$. Bu esa teoremaning birinchi shartiga zid. Shunga o'xshash, agar α<β bo'lsa, u holda $a_r' > b_q$ bo'lib, teoremaning 2-shartiga zid. Demak, $\alpha = \beta$ bo'ladi.

Haqiqiy sonlarni solishtirish (tenglik va tengsizliklar) ta'riflardan quyidagilar kelib chiqadi:

1. Tenglik munosabati quyidagi qonunlarga bo'ysinadi:

Simmetriklik: agar α= β bo'lsa, u holda β=α.

Refleksiflik: α=α.

Tranzitivlik: agar α= β, β=γ bo'lsa, u holda α=γ.

1. Tengsizlik munosabati quyidagi qonunlarni qanoatlantiradi:

agar α< β bo'lsa, u holda β>α bo'ladi.

Tranzitivlik: agar α< β, β<γ bo'lsa, u holda α<γ.

2.4. Haqiqiy sonlar ustida amallar

4-teorema. Agar α haqiqiy son $\{a_n, a_n'\}$, β-haqiqiy son $\{b_n, b_n'\}$ juft ketma-ketliklar bilan aniqlansa, u holda $\{a_n + b_n, a_n' + b_n'\}$ juft ketma-ketlik ham yaqinlashadi.

Isboti. Haqiqatan ham

1) $a_n \le a_n'$, $b_n \le b_n'$ dan $a_n + b_n \le a_n' + b_n'$,

2) agar $a_{n+1} \ge a_n$, $b_{n+1} \ge b_n$ bo'lsa, $a_{n+1} + b_{n+1} \ge a_n + b_n$ va $a_{n+1}' + b_{n+1}' \le a_n' + b_n'$;

3) agar ε ixtiyoriy musbat bo'lsa, u holda etarlicha katta n larda $a_n' - a_n < \frac{\varepsilon}{2}$ va $b_n' - b_n < \frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi va bundan $(a_n' + b_n') - (a_n + b_n) < \varepsilon$ kelib chiqadi.

$\{a_n + b_n, a_n' + b_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlanadigan son α va β sonlarning yig'indisi deyiladi va $\alpha + \beta$ kabi belgilanadi. Boshqacha aytganda, yig'indining kami bilan aniqlangan taqribiy qiymatini olish uchun berilgan sonlarning kami bilan aniqlangan taqribiy qiymatlarini qo'shish kerak, ortig'i bilan taqribiy qiymatini olish uchun berilgan sonlarning ortig'i bilan taqribiy qiymatlarini qo'shish kerak.

Yig'indilarning ta'rifidan qo'shish amalining xossalarini oson isbotlash mumkin. Bu xossalar quyidagilardan iborat.

$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (qo'shishning kommutativligi);

$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (qo'shishning assotsiativligi);

$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$ (nolning mavjudligi).

Manfiy sonni aniqlash uchun quyidacha ish tutamiz: Aytaylik α son $\{a_n, a'_n\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlansin. Barcha sonlarni qarama-qarshisi bilan va ketma-ketliklarni o'rinlarini almashtiramiz. Natijada $\{-a'_n, -a_n\}$ ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Bu ketma-ketlik yaqinlashish shartlarini qanoatlantiradi. Bu juft ketma-ketlik bilan aniqlangan soni α ga qarama-qarshi ishorali son deb aytamiz va $-\alpha$ kabi belgilaymiz.

5-teorema. O'zaro qarama-qarshi sonlar yig'indisi 0 ga teng.

Isboti. Haqiqitan ham o'zaro qarama-qarshi sonlarning yig'indisi $\{a_n - a'_n, a'_n - a_n\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlanadi. Birinchi ketma-ketlik manfiy sonlardan, ikkinchisi musbat sonlardan tashkil topadi. Bunday ketma-ketlik bilan faqat 0 aniqlanishi mumkin. Shu sababli $\alpha + (-\alpha) = 0$.

α va β haqiqiy sonlarning ayirmasi quyidagicha aniqlanadi: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$. Bundan ayirish amalini asosiy formulasini haqiqiy sonlar uchun ham o'rinli ekanligi kelib chiqadi: $\alpha - \beta + \beta = \alpha$; chunki $\alpha - \beta + \beta = \alpha + (-\beta) + \beta = \alpha + 0 = \alpha$.

Shunday qilib, 1-darajali amallarning barcha qonunlari haqiqiy sonlar uchun ham saqlanadi.

Haqiqiy sonlar ustida 2-darajali amallar ham yuqoridagi kabi aniqlanadi. Dastlab musbat hadli juft ketma-ketliklarni qaraymiz. Aytaylik α soni $\{a_n, a'_n\}$, β soni $\{\beta_n, \beta'_n\}$ juft ketma-ketliklar, bilan aniqlansin. Ushbu $\{a_n \cdot b_n; a'_n \cdot b'_n\}$ ketma-ketlikni qaraymiz. Bu ketma-ketlik yaqinlashish shartini qanoatlantiradi:

1) $a_n \le a'_n$, $b_n \le b'_n$ shu sababli $a_n \cdot b_n \le a'_n \cdot b'_n$;

2) $a_{n+1} \ge a_n$, $b_{n+1} \ge b_n$, demak $a_{n+1}b_{n+1} \ge a_n \cdot b_n$ va $a'_{n+1}b'_{n+1} \le a'_n \cdot b'_n$;

3) $a'_n b'_n - a_n \cdot b_n = a'_n b'_n - a'_n \cdot b_n + a_n \cdot b'_n - a_n \cdot b_n = a'_n(b'_n - b_n) + b_n(a'_n - a_n)$

Ushbu $N > a'_n$, $N > b_n$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi N soni har doim mavjud. Agar ε ixtiyoriy musbat son bo'lsa, u holda yetarlicha katta n larda quyidagilarni hosil qilishimiz mumkin:

$$a'_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2N};\ b'_n - b_n < \frac{\varepsilon}{2N}$$

U holda $a'_n \cdot b'_n - a_n \cdot b_n < \frac{\varepsilon}{2N} \cdot N + \frac{\varepsilon}{2N} \cdot N = \varepsilon$ yoki $a'_n \cdot b'_n - a_n \cdot b_n < \varepsilon$

Musbat va manfiy haqiqiy sonlarni ko'paytirishda ratsional sonlarni ko'paytirishdagi kabi ishoralar qoidasi saqlanadi.

Aytaylik α musbat hadli $\{a_n, a'_n\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlangan bo'lsin. Bu juft ketma-ketlikning har bir hadini teskarisiga, va ketma-ketliklar o'rnini

almashtiramiz. Natijada $\left\{\frac{1}{a'_n}, \frac{1}{a_n}\right\}$ ketma-ketlikni hosil qilamiz. Bu ketma-ketlik yaqinlashish shartlarini qanoatlantiradi:

1) $a'_n \ge a_n$, shu sababli $\frac{1}{a'_n} \le \frac{1}{a_n}$

2) $a_{n+1} \ge a_n$; $\frac{1}{a_{n+1}} \le \frac{1}{a_n}$, hamda $\frac{1}{a'_{n+1}} \le \frac{1}{a'_n}$.

3) $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n} = \frac{a'_n - a_n}{a_n \cdot a'_n}$.

Ushbu $N > \frac{1}{a_n \cdot a'_n}$ shartni qanoatlantiruvchi N sonini olamiz va ε - ixtiyoriy musbat son bo'lsin. Yetarlicha katta n larda $a'_n - a_n < \frac{\varepsilon}{N}$; u holda $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n} < N \cdot \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$, ya'ni $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a'_n} < \varepsilon$.

$\left\{\frac{1}{a'_n}, \frac{1}{a_n}\right\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlanadigan son α songa teskari son deyiladi va $\frac{1}{\alpha}$ bilan belgilanadi.

6-teorema. O'zaro teskari sonlarning ko'paytmasi birga teng.

Isboti. $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}$ ko'paytmani aniqlaydigan juft ketma-ketlikni qaraymiz: $\left\{\frac{a_n}{a'_n}, \frac{a'_n}{a_n}\right\}$.

Birinchi ketma-ketlik hadlari birdan katta emas, ikkinchi ketma-ketlik hadlari birdan kichik emas. Shu sababli ketma-ketlik 1 ni aniqlaydi: $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$.

Haqiqiy sonlarni bo'lish amalini quyidagicha aniqlaymiz: $\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$.

Bundan bo'lishning asosiy formulasining o'rinli ekanligi kelib chiqadi: $\alpha : \beta \cdot \beta = \alpha$, chunki $\alpha : \beta \cdot \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \beta = \alpha \cdot 1 = \alpha$. Shunday qilib, 2-daraja amallari xossalari haqiqiy sonlar uchun ham saqlanadi.

2.5. Haqiqiy sonlarning juft ketma-ketligi. Asosiy teorema.

Quyidagi yaqinlashish shartlarini qanoatlantiruvchi $\{\alpha_n, \alpha'_n\}$ haqiqiy sonlardan tashkil topgan juft ketma-ketlikni qaraymiz:

1) $\alpha_n \le \alpha'_n$

2) $\alpha_{n+1} \ge \alpha_n$; $\alpha'_{n+1} \le \alpha'_n$.

3) ixtiyoriy ε musbat son uchun shunday n topilib $\alpha'_n - \alpha_n < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

7-teorema. Ushbu $\alpha_n \le \alpha \le \alpha'_n$ $(\forall n)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi yagona α haqiqiy son mavjud.

Isboti. Haqiqiy sonlar tengsizligi ta'rifiga ko'ra har xil haqiqiy sonlar orasida ratsional son mavjud. a_k orqali $\alpha_k \le a_k \le \alpha_{k+1}$ shartni qanoatlantiruvchi, a'_k bilan $\alpha'_k \le a'_k \le \alpha'_{k+1}$ shartni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarni belgilaymiz. Natijada $\{a_n, a'_n\}$ ratsional sonlardan tashkil topgan juft ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Bu juft ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi. Haqiqatan ham $\{\alpha_n, \alpha'_n\}$ ketma-ketlik xossalaridan

1) $\alpha_p \le \alpha'_q$ $\forall$ va q uchun.

2) $\alpha_{n+1} \ge \alpha_n$, $\alpha'_{n+1} \le \alpha'_n$.

3) Berilgan ε musbat son uchun shunday n topilib, $\alpha'_n - \alpha_n < \varepsilon$ bo'lsin. U holda $a'_n < \alpha'_n$ va $a_n \ge \alpha_n$ tengsizliklardan $a'_n - a_n \le \alpha'_n - \alpha_n < \varepsilon$ tengsizlik hosil bo'ladi. Shunday qilib, $\{a_n, a'_n\}$ yaqinlashuvchi ekan. Bu juft ketma-ketlik bilan aniqlanadigan α son $\forall n$ da $a_n \le \alpha \le a'_n$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Ammo $a_n \ge \alpha_n$, $a'_n \le \alpha'_n$ bo'lganligi sababli, α son $\forall n$ da $\alpha_n \le \alpha \le \alpha'_n$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

Endi α sonning yagonaligini isbotlaymiz. Teskaridan faraz qilamiz. Aytaylik β son ham ($\beta > \alpha$ bo'lsin) yuqoridagi tengsizlikni qanoatlantirsin: $\alpha_n \le \beta \le \alpha'_n$ $\alpha'_n \ge \beta$ va $\alpha_n \le \alpha$ tengsizliklardan $\alpha'_n - \alpha_n \ge \beta - \alpha$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Ammo bu $\alpha'_n - \alpha_n$ ayirma avvaldan berilgan ixtiyoriy musbat sondan kichik bo'ladigan n ni topish mumkin ekanligiga olib keladi. Ziddiyat α ning yagona ekanligini isbotlaydi.

Shunday qilib, yaqinlashish shartini qanoatlantiruvchi haqiqiy sonlarning juft ketma-ketligi yagona haqiqiy sonni aniqlaydi.

Isbotlangan teorema geometrik kattaliklarni o'lchashda katta ahamiyatga ega. Chunki bu kattaliklarning o'lchovini aniqlaydigan juft ketma-ketlik hadlari ixtiyoriy haqiqiy son bo'lishi mumkin (ratsional son bo'lishi shart emas). Masalan, aylana uzunligini topish masalasida aylanaga ichki va tashqi chizilgan muntazam ko'p burchaklar perimetrlari aylana radiusi qismlari orqali ifodalanadi.

Savollar va mashqlar

1. Ikkita irratsional sonning yig'indisi ratsional son bo'ladimi?
2. Ikkita irratsional sonning ko'paytmasi ratsional son bo'ladimi?
3. Ratsional va irratsional son yig'indisi qanday son bo'ladi?
4. Ratsional va irratsional son ko'paytmasi qanday son bo'ladi?

5. $\{a_n; a_n'\}$ ketma-ketlik α sonni aniqlaydi. Bu ketma-ketlikning juft o'rinda turgan hadlarini chiqarib tashlaymiz. Hosil bo'lgan yangi juft ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'ladimi? Bu juft ketma-ketlik qanday sonni aniqlaydi?
6. $\{a_n; a_n'\}$ juft ketma-ketlik α soni aniqlaydi. $\{ka_n; ka_n'\}$, bu erda k ratsional son, qanday sonni aniqlaydi ?
7. $a_n^2 < 5$ va $a_n'^2 > 5$ shartlarni qanoatlantiruvchi $\{a_n; a_n'\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik kvadrati 5 ga teng bo'lgan irratsional sonni aniqlashini isbotlang.
8. Verguldan davrigacha m-ta raqam, davrida n ta raqam bo'lgan aralash o'nlik kasrni oddiy kasrga aylantirish qoidasini keltirib chiqaring, asoslang.
9. Agar a butun son boshqa butun sonning n- darajasi bo'lmasa, u holda $\sqrt[n]{a}$ irratsional son ekanligini isbotlang.
10. $\log_3 10$ irratsional son ekanligini isbotlang.

§3. Uzunlikni o'lchash

3.1. Kesmalar uzluksiz skalyar kattalikning barcha shartlarini qanoatlantiradi. Kesmalarni solishtirish, qo'shish, ayirish, butun songa ko'paytirish, teng bo'laklarga bo'lish mumkin. So'ngi ikki amal kesmani ixtiyoriy m/n ratsianal songa ko'paytirish mumkinligini bildiradi.

Bu amalni bajarish uchun kesmaning n ta teng bo'lakka bo'lib, m tasini olamiz. Kesmani ratsional songa ko'paytirish, guruhlash va taqsimot qonunlariga buysinishini ko'rsatish qiyin emas:

$$r(q\overline{a}) = (q)\,\overline{a}$$

$$(r+q)\,\overline{a} = r\overline{a} + q\overline{a}$$

$$r(\overline{a}+\overline{b}) = r\overline{a} + r\overline{b}$$

Bu formulalarda r va q ratsional sonlar, $\overline{a}$ va $\overline{b}$ simvollar bilan kesmalar belgilangan. Bu formulalar avval butun sonlar, keyin ratsional sonlar uchun isbotlanadi.

So'ngra kesmalar uchun Arximedning uzluksizlik va kesmalar uchun Kantor aksiomalarini keltirish lozim. Bu aksiomalarni ko'rgazmali sodda misollar bilan tushuntirish mumkin.

3.2. Kesmaning o'lchovi

Kesmalarning uzunligi o'lchovini aniqlash uchun avval o'zgarmas kesmani tanlaymiz, uning uzunligi 1 ga teng deb qabul qilamiz.

MN kesmani uzunligi o'lchovini topish uchun unga masshtab chizg'ichni qo'yamiz, hamda kesmaga tegishli bo'lgan birlik bo'linmalar sonini (a_0) aniqlaymiz. Bu son uzunlik o'lchovi qiymatini kami bilan yaqinlashishini beradi. Shu bilan bir vaqtda kamida bitta nuqtasi bilan kesmaga tegishli bo'lgan birlik bo'linmalar sonini (a_0') aniqlaymiz. Bu son kesma o'lchovi qiymatining ortig'i bilan yaqinlashishini beradi.

1-rasm

Shundan keyin birlik bo'linmalarini teng 10 bo'lakka bo'lib chiqamiz va yuqoridagi kabi hisoblash olib boramiz. Natijada uzunlik o'lchovining kami va ortig'i bilan olingan qiymatlarni topamiz. So'ngra yana shu jarayonni davom ettiramiz: har bir bo'lakchani teng 10 bo'lakka bo'lamiz va yuqoridagi kabi hisoblashlar bajaramiz. Natijada $\{a_n; a_n'\}$ juft ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Bu ketma-ketlik yaqinlashish shartlarini bajaradi. Haqiqatdan ham:

1) a_n soni a_n' sonidan katta emas, chunki ta'rifga ko'ra a_n MN kesmaning ichida, a_n' esa MN kesma tashqarisida bo'ladi;

2) Birlik kesmalarni maydalash natijasida a_n kattalashishi, a_n' kichiklashadi;

3) $a_0' - a_0 < 2$; $a_1' - a_1 < 0{,}2$; $a_2' - a_2 < 0{,}02$, ... ekanligi ravshan.

$\{a_n; a_n'\}$ ketma-ketlik aniqlaydigan α haqiqiy son MN kesma uzunligining o'lchovi deyiladi.

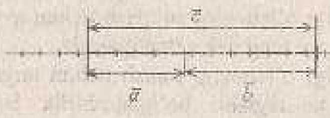
Ushbu son masshtabli chizg'ichni kesmaga quyish usuliga bog'liq bo'lmaydi.

Haqiqatdan ham, boshqa bir qo'yish usulida β sonini aniqlaydigan $\{b_n; b_n'\}$ juft ketma-ketlik hosil bo'lsin. a_n soni MN kesmaning ichida to'liq joylashgan kesmachalar sonini, b_n' esa MN kesmani o'z ichida saqlaydigan kesmachalar sonini bildiradi, shu sababli $a_n < b_n'$ xuddi shunga o'xshash $b_n < a_n'$ ekanligi kelib chiqadi. U holda asosiy teoremaga ko'ra β=α bo'ladi.

3.3. Kesma o'lchovining additivligi

Endi kesmalar yig'indisining uzunligining o'lchovi kesmalar uzunliklari o'lchovining yig'indisiga teng degan tasdiqni isbotlaymiz.

Aytaylik $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$ (2-rasm) va ularning mos uzunliklari O'lchovi a, b, c ga teng bo'lsin. Ularga masshtabli chizg'ichni qo'yamiz va bo'linmalar sonini hisoblaymiz. Natijada a, b va b sonlarni aniqlaydigan $\{a_n; a_n'\}$, $\{b_n; b_n'\}$ va $\{s_n; s_n'\}$ juft ketma-ketliklarga ega bo'lamiz.



2-rasm

Ushbu ketma-ketlik hadlari uchun $a_n + b_n < s_n < a_n' + b_n'$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Chunki $\bar{a}$ va $\bar{b}$ kesmalar umumiy uchi yotgan bo'lak $a_n + b_n$ yig'indida hisobga olinmaydi, $a_n' + b_n'$ yig'indida esa ikki marta hisoblanadi. s_n va s_n' sonlarda bu bo'lak bir martadan hisoblanadi. Bu tengsizliklarni hisobga olib $\{s_n; s_n'\}$ va $\{a_n + b_n; a_n' + b_n'\}$ juft ketma-ketliklarga asosiy teoremani tatbiq qilamiz va natijada $a+b=c$ tenglikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, kesma uzunligining o'lchovi kattalik o'lchovi qanoatlantirishi lozim bo'lgan barcha shartlarni qanoatlantiradi.

3.4. To'g'ri chiziq va haqiqiy sonlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish

Endi agar biror haqiqiy a son va $\bar{I}$ uzunlik birligi berilgan bo'lsa, u holda har doim uzunlik o'lchovi a teng bo'lgan $\bar{a}$ kesmaning mavjudligini isbotlaymiz.

Agar a ratsional son, ya'ni $a=m/n$, bu erda m, n natural sonlar, bo'lsa, u holda $\bar{I}$ kesmani teng n ta teng bo'lakka bo'lish va bir bo'lagini m marta o'lchab qo'yish etarli.

Aytaylik a irratsional son bo'lib, u $\{a_n; a_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlansin. Biror to'g'ri chiziqning berilgan O nuqtasidan bir xil yo'nalishda uzunliklari $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ va $a_0', a_1', a_2', ..., a_n', ...$ bo'lgan kesmalarni o'lchab qo'yamiz. Natijada A_0A_0', A_1A_1', A_2A_2', ..., A_nA_n', ... kesmalar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu ichma-ich joylashgan kesmalar sistemasi Kantor aksiomasiga ko'ra yagona A nuqtani aniqlaydi va bu nuqta uzunligi a ga teng OA kesmaning uchidan iborat bo'ladi.

Haqiqatdan ham, agar OA kesma uzunligini masshtabli chizg'ichning nolinchi nuqtasini O nuqtaga qo'yib o'lchashlar bajarsak, a sonini aniqlaydigan $\{a_n; a_n'\}$ juft ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Avval shu sonni masshtabli chizg'ichni ixtiyoriy usulda qo'yib o'lchaganimizda ham aynan shu sonni hosil qilinishi ta'kidlangan edi.

Shuning bilan to'g'ri chiziq nuqtalari va haqiqiy sonlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinligi isbotlandi.

3.5. Kesmani haqiqiy songa ko'paytirish

$\bar{I}$ birlik kesmadan uzunligi a haqiqiy songa teng bo'lgan $\bar{a}$ kesmani hosil qilish amali $\bar{I}$ *kesmani a haqiqiy songa ko'paytirish amali* deyiladi. Birlik kesma sifatida istalgan kesmani olish mumkin edi. Demak yuqoridagi amal istalgan kesmani haqiqiy songa ko'paytirishni aniqlaydi.

Endi quyidagi teoremani isbotlaymiz:

1-teorema. Agar uzunligi a ga teng bo'lgan $\bar{a}$ kesmani k haqiqiy songa ko'paytirsak, u holda uzunligi ka ga teng bo'lgan yangi $k\bar{a}$ kesmaga ega bo'lamiz.

Boshqacha aytganda kesmani haqiqiy songa ko'paytirsak, uning uzunligi ham shu songa ko'paytiriladi.

Isbot. Teoremaning isboti kesmalar yig'indisiga ular o'lchovlarining yig'indisi mos kelishiga asoslangan. Shu sababli $\bar{a}$ kesmani m natural songa ko'paytirsak

$m\bar{a} = \underbrace{\bar{a} + \bar{a} + \dots + \bar{a}}_{m \text{ marta}}$ hosil bo'ladi. Bu holda uzunlik o'lchovi uchun

$a+a+\dots+a=ma$ hosil bo'ladi.

Agar $\bar{a}$ kesmaning teng n bo'lakka bo'lsak, u holda

$\underbrace{\frac{\overline{a}}{n}+\frac{\overline{a}}{n}+\dots+\frac{\overline{a}}{n}}_{n\ marta}=\overline{a}$ o'rinli bo'ladi.

Demak $\frac{\overline{a}}{n}$ bo'lakning uzunligi shunday songa tengki uni n marta qo'shilganda a ga teng bo'ladi. Shunday qilib, $\frac{\overline{a}}{n}$ bo'lak uzunligi a/n ga teng bo'ladi.

Bunday $\overline{a}$ kesmani $\frac{m}{n}$ ratsional songa ko'paytirsak, uzunligi $\frac{m}{n}a$ ga teng bo'lgan $\frac{m}{n}\overline{a}$ kesma hosil bo'lishi bevosita kelib chiqadi.

Faraz qilaylik k irratsional son $\{k_i, k_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlangan bo'lsin. To'g'ri chiziqdagi o'zgarmas (qo'zg'almas) O nuqtadan bir yo'nalishda uzunliklari $k_0 a$ va $k_0' a$ bo'lgan OA_0 va OA_0' kesmalarni qo'yamiz, keyin esa uzunliklari $k_1 a$ va $k_1' a$ bo'lgan OA_1 va OA_1' kesmalarni qo'yamiz va bu jarayonni davom ettirish natijasida ichma-ich joylashgan A_0A_0', A_1A_1', . . . , A_nA_n', . . . kesmalar ketma-ketligini hosil qilamiz. Bu ketma-ketliklar sistemasi Kantor aksiomasi shartlarini qanoatlantiradi va yagona A nuqtani aniqlaydi. AO kesma $\overline{a}$ kesmani k songa ko'paytirish natijasida hosil bo'ladi va uning uzunligi $\{k_n a, k_n' a\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlanadi. Demak, OA kesma uzunligi ka ga teng bo'ladi.

2-teorema. Agar uzunlik birligi $\overline{l}$ ni yangi $k\overline{l}$ birlik bilan almashtirsak, u holda barcha kesma uzunliklari o'lchovi $\frac{1}{k}$ ga ko'payadi.

Sodda hollar uchun bu teorema o'z-o'zidan ravshan. Masalan ikki nuqta orasidagi masofa santimetrlarda 995 bo'lsa, metrda 9, 95 m bo'ladi.

3.6. Uzluksiz skalyar additiv kattaliklarning nisbati

Ta'rif. Uzluksiz skalyar additiv kattaliklarning nisbati deb bu kattalik o'lchovlarining nisbatiga aytiladi.

Bu ta'rifdan kesma uzunligining o'lchovi shu kesmaning birlik kesmaga nisbatiga tengligi kelib chiqadi. Yuqoridagi 1-va 2- teoremalardan ikkita kesmaning nisbati uzunlik birligini tanlashga bog'liq emasligi kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham, $\overline{l}$ birlikda $\overline{a}$ va $\overline{b}$ kesmalar o'lchovi a va b sonlarga teng bo'lsin. U holda ularning nisbati $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}=\frac{a}{b}$ formula bilan ifodalanadi.

Yangi $k\overline{l}$ uzunlik birligida $\overline{a}$ va $\overline{b}$ kesmalarning uzunligi a/k va b/k bo'ladi, kesmalar nisbati esa, $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}=\frac{a}{k}:\frac{b}{k}=\frac{a}{b}$ formula bilan ifodalanadi. Ko'rinib turibdiki nisbatlarning son qiymati o'zgarmadi.

Shunga e'tibor berish kerakki 1-va 2- teoremalar nafaqat kesmalar uchun, balki istalgan uzluksiz skalyar additiv kattaliklar uchun ham o'rinli bo'ladi. Bu teoremalarning isbotida, biz faqat quyidagi tasdiqlardan foydalandik:

1) tanlangan o'lchov birligida berilgan to'plamning har bir elementiga aniq bitta haqiqiy son – shu element o'lchovi mos keladi;

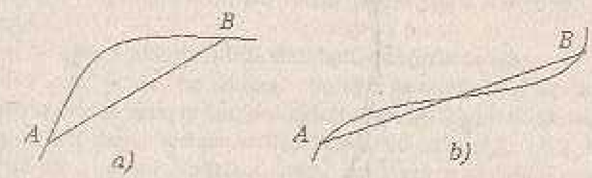
2) ikki element yig'indisiga ular o'lchovlarining yig'indisi mos keladi.

Shu sababli yuz va hajmlarni o'lchash nazariyasi bayonida yuqoridagi barcha mulohazalarni takrorlamaymiz, ularni isbotlangan deb qaraymiz.

3.7. Qavariq silliq chiziq uzunligini topish masaslasi

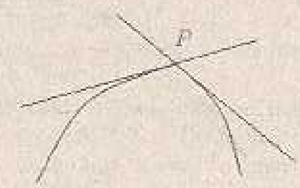
Agar egri chiziqning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma shu chiziq bilan boshqa umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, bu chiziq *qavariq* deyiladi.

Masalan, 3-a rasmda qavariq, 3-b rasmda qavariq bo'lmagan chiziqlar keltirilgan.



3-rasm

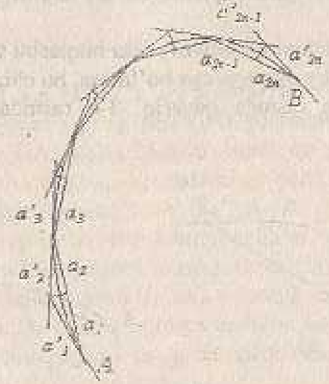
Agar chiziqning har bir nuqtasidan yagona urinma o'tkazish mumkin bo'lsa, bu chiziq silliq chiziq deyiladi. 4-rasmda silliq bo'lmagan chiziq keltirilgan. Bu chiziqning P nuqtasidan ikkita bir tomonli urinmalar o'tkazish mumkin. Bizga ma'lum bo'lgan aylana, parabola, giperbola qavariq va silliq chiziq bo'ladi. Shu sababli quyida egri chiziq uzunligi haqida bayon etiladigan barcha xulosalar bu chiziqlar uchun ham o'rinli bo'ladi.



4-rasm

Qavariq silliq chiziq AB yoyining (5-rasm) uzunligini topamiz. Yoyni n ta bo'lakka bo'lamiz va bo'lish nuqtalarini ketma-ket tutashtirib siniq chiziq hosil qilamiz (AB yoyga ichki tizilgan). Agar bo'lish nuqtalaridan yoyga urinmalar o'tkazsak, u holda AB yoyga tashqi chizilgan siniq chiziq hosil bo'ladi. a_1', a_2', ...

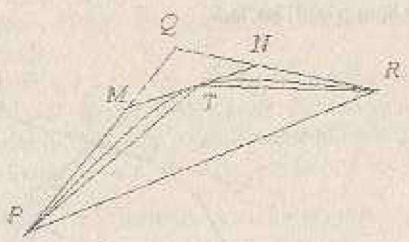
a_{2n}' bilan urinmalarning tashqi chizilgan siniq chiziq uchlaridan o'rinish nuqtalarigacha bo'lgan kesmalarning uzunliklarini, $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ bilan yuqoridagi kesmalarning ichki chizilgan siniq chiziq bo'laklaridagi proektsiyalari uzunliklarini belgilaymiz. U holda tashqi chizilgan siniq chiziq perimetri $R_n' = a_1' + a_2' + \ldots + a_{2n}'$ formula bilan, ichki tizilgan siniq chiziq perimetri $R_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}$ formula bilan ifodalaniladi. Agar n sonini cheksiz kattalashtirsak (yangi bo'lish nuqtalarini shunday kiritamizki, ikkala siniq chiziq bo'laklari uzunliklari avvaldan berilgan kesma uzunligidan kichik bo'ladi) $\{R_n;\ R_n'\}$ juft ketma-ketlik yaqinlashish shartlarini qanoatlantiradi.



5-rasm

Haqiqatdan ham:

1) $P_n < P_n'$ sababi $a_k' + a_{k+1}' > a_k + a_{k+1}$ (uchburchak ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta (6-rasm))



6-rasm

2) n kattalashganda P_n perimetr kattalashadi. (PR kesma o'rniga PTR siniq chiziq olinadi). P_n' esa kamayadi (MQN siniq chiziq MN kesma bilan almashtiriladi).

1. N cheksiz ortganda R_n'-R_n ayirmani baholash uchun a_k- $a_k'\cos\alpha_k$ bu yerda α_k $(k=1, 2, \ldots, 2n)$ urinma va vatar orasidagi burchak ekanligidan foydalanamiz.

Shu sababli $R_n = a_1'\cos\alpha_1 + a_2'\cos\alpha_2 + \ldots + a_{2n}'\cos\alpha_{2n}$ bo'ladi. Bu tenglikda barcha α larni ularning eng kattasi α bilan almashtirib (tenglikning o'ng tomoni kichiklashadi) quyidagiga ega bo'lamiz:

$P_n > (a_1' + a_2' + \ldots + a_{2n}')\cos\alpha$, yoki $P_n < R_n'\cos\alpha$, bundan $R_n' - R_n < R_n' - R_n'\cos\alpha = P_n'(1-\cos\alpha) = 2P_n'\sin^2\frac{\alpha}{2}$, shunday qilib $R_n' - R_n < 2P_n'\sin^2\frac{\alpha}{2}$ tengsizlik o'rinli.

n kattalashganda R_n' perimetr kichiklashadi, urinma va vatar orasidagi burchak nolga intiladi, shu sababli berilgan musbat ε soni uchun n ni shunday katta qilib tanlash mumkinki, bir vaqtda $2R_n' < N$, $\sin^2\frac{\alpha}{2} < \varepsilon/N$ tengsizliklar bajariladi. U holda $R_n' - R_n < N \cdot \varepsilon/N$, yoki $R_n' - R_n < \varepsilon$ tengsizlikka erishamiz.

Shunday qilib yaqinlashish shartlari bajarildi. Demak $\{R_n';\ R_n\}$ juft ketma-ketlik s haqiqiy sonni aniqlaydi. Bu son ta'rif bo'yicha AB yoyning uzunligi deb qabul qilinadi.

Hosil bo'lgan s soni quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) Bu son yoyni bo'laklarga bo'lish usuliga bog'liq emas, bunda n kattalashganda ikkala siniq chiziq bo'laklari uzunligi 0 ga intilishi etarli.

Haqiqatdan ham, boshqa usulda bo'lganimizda $\{Q_n;\ Q_n'\}$ ketma – ketlik hosil bo'lsin va s' sonni aniqlasin. Ichki chizilgan siniq chiziq perimetri tashqi chizilgan siniq chiziq perimetridan katta emas. $Q_n < R_n'$ va $Q_n' > R_n$. Asosiy teoremaga ko'ra $s = s'$ ekanligi kelib chiqadi.

2) Teng yoylar teng uzunlik o'lchoviga ega. Bu tasdiq teng yoylarga teng siniq chiziqlar ichki (tashqi) chizilishi mumkinligidan kelib chiqadi.

3) Agar egri chiziq bir nechta qavariq, silliq bo'laklardan tashkil topgan bo'lsa, u holda uning uzunligi uni tashkil etuvchi bo'laklar yig'indisiga teng.

4) Agar ikki egri chiziq o'xshash bo'lsa, u holda ular uzinliklarining nisbati o'xshashlik koeffitsentiga teng bo'ladi.

Haqiqatdan ham, agar birinchi egri chiziq uzunligi s bo'lib, $\{R_n;\ R_n'\}$ ketma-ketlik bilan aniqlansa, u holda ikkinchi egri chiziqqa o'xshash siniq chiziqlarni chizib, bu chiziqning uzunligi $\{kR_n;\ k\ R_n'\}$ ketma-ketlik bilan aniqlanishini ko'ramiz, bu erda k o'xshashlik koeffitsenti, demak ikkinchi chiziqning uzunligi ks ga teng bo'ladi.

Bundan, xususan, ikkita aylana uzunliklari nisbati ularning diametrlari nisbatiga teng ekanligi kelib chiqadi: S/S'= D/D', bundan C/D= C'/D', ya'ni aylana uzunligining diametr uzunligiga nisbati o'zgarmas son ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib π soning ta'rifi va ma'lum bo'lgan S=πD, S=2πR formulalar hosil bo'ldi.

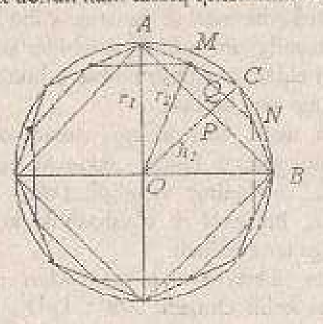
3.8. π soni

Egri chiziq uzunligini o'lchash nazariyasining tatbiqi sifatida aylana uzunligining diametriga nisbatini hisoblash masalasini qarash mumkin.

Odatda bunda Arximed perimetrlari metodi deb nom olgan metoddan foydalaniladi. Ushbu metodning mohiyati quyidagidan iborat. Aylana diametri birlik sifatida karaladi. Aylanaga ichki va tashqi bir nomli muntazam ko'pburchaklar chiziladi. Bu ko'pburchaklar perimetri hisoblanadi. Shunday qilib π sonining kami va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlari hosil bo'ladi. So'ngra ikkilantirish formulasini tatbiq etib aylanaga tashqi va ichki chizilgan tomonlari soni oldingi ko'pburchak tomonlari sonidan ikki marta ko'p bo'lgan muntazam ko'pburchak perimetrlari hisoblanadi va yana π sonining kami va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlari hosil bo'ladi. Bu qiymatlar oldingi qiymatlarga nisbatan aniqroq bo'ladi. Shu jarayonni davom ettirib π sonini o'nlik raqamlari etarlicha ko'p bo'lgan qiymatini olishimiz mumkin.

Ikkinchi metod izoperimetrlar metodi deb nomlanadi. Uning mohiyati quyidagidan iborat. Aylanaga muntazam n-burchakni ichki chizamiz. Har bir yoyni teng ikkiga bo'lish yordamida $2n$-burchak tomonlari o'rtalarini tutashtirib, yangi $2n$-burchak hosil qilamiz. Bu ko'pburchakning perimetri avvalgi n-burchakning perimetriga teng bo'ladi.

Masalan, 7-rasmda aylanaga kvadrat ichki chizilgan. Uning tomoni AB ga teng. Shu kvadart tomonlarini ikkilantirish yordamida tomoni AS ga teng bo'lgan sakkizburchak hosil qilamiz. Hosil bo'lgan sakkizburchakning tomonlari o'rtalarini tutashtirib tomoni MN ga teng bo'lgan yangi sakkizburchak hosil qilamiz. MN kesma ABC uchburchakning o'rta chizig'i, shu sababli MN=AB/2 ga teng. Demak sakkizburchak tomoni kvadrat tomonini yarmiga teng. Shu sababli kvadrat perimetri sakkizburchak perimetriga teng bo'ladi. Ravshanki, bu mulohazani istalgan muntazam n-burchak uchun ham tatbiq qilishimiz mumkin.



7-rasm

Endi yangi $2n$ burchakka tashqi aylana chizamiz va uning yoylarini teng ikkiga bo'lish yordamida ichki chizilgan $4n$-burchak hosil qilamiz. Uning tomonlari o'rtalarini tutashtirib perimetri $2n$ burchak, demak n-burchak perimetriga teng bo'lgan $4n$-burchak hosil qilamiz.

Ushbu jarayonni cheksiz davom ettirib, tomonlari soni avvaldan berilgan sondan katta, lekin perimetri n burchak perimetriga teng bo'lgan muntazam

ko'pburchak hosil qilish mumkin. Perimetrlari teng bo'lgan ko'pburchaklar uchun radiuslar va apofemalarini hisoblash formulalarini topamiz.

h_1 va r_1 orqali birinchi ko'pburchak apofemasi va radiusi uzunliklari o'lchovini, h_2 va r_2 orqali ikkinchi ko'pburchak apofemasi va radiusi uzunliklari o'lchovini belgilaymiz, ..., k_m va r_m orqali m-chi ko'pburchak apofemasi va radiusi uzunliklari o'lchovlarini belgilaymiz. 7-rasmda h_1=OP, r_1=OC, h_2=OQ, r_2=OM.

MN - ABC uchburchakning o'rta chizig'i bo'lganligidan Q nuqta RS kesmaning o'rtasi, demak OQ = (OP+OC)/2, ya'ni $h_2=(h_1+r_1)/2$ bo'ladi.

To'g'ri burchakni OMS uchburchakdan OM katet OS gipotenuza va o'z proektsiyasi OQ ning o'rta proportsionali ekanligi, ya'ni $OM=\sqrt{OC\cdot OQ}$, bundan $r_2=\sqrt{r_1\cdot h_2}$ hosil bo'ladi.

Ravshanki, shunday munosabatlar m-1 va m-ko'pburchaklar radiuslari va apofemalari uchun ham o'rinlidir:

$$h_m=\frac{h_{m-1}+r_{m-1}}{2}\ ;\ r_m=\sqrt{r_{m-1}\cdot h_m}$$

h_m va r_m sonlar $\{h_m;\ r_m\}$ ketma-ketlikni aniqlaydi. Bu ketma-ketlik yaqinlashish shartlarini qanoatlantiradi:

1) $h_m<r_m$, chunki muntazam ko'pburchak apofemasi uning radiusidan kichik;

2) $h_m>k_{m-1}$, chunki h_m soni k_{m-1} va undan katta bo'lgan r_{m-1} sonlarning o'rta arifmetigiga teng;

3) $r_m-h_m<a_m/2$ (bu erda a_m muntazam ko'pburchak tomonining uzunligi), chunki uchburchak ikki tomonining ayirmasi uchinchi tomonidan kichik (7-rasmda 'M-'Q<MQ). Ammo ko'pburchak perimetri doimiy va uning tomonlari soni cheksiz kattalashganligi uchun $a_m/2$ soni istalgan musbat sondan kichik qilib olish mumkin. Shunday qilib $\{h_m;\ r_m\}$ juft ketma-ketlik biror haqiqiy sonni aniqlaydi. Bu son uzunligi perimetrga teng bo'lgan aylananing radiusiga teng bo'ladi.

Dastlabki ko'pburchakning perimetrini ixtiyoriy tanlashga xaqlimiz, shu sababli uni biror butun songa teng deb olish mumkin. Bu metod bilan π ni emas, balki $1/\pi$ ni topish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Dastlabki ko'pburchak sifatida perimetri 2 ga teng kvadratni olishimiz mumkin. U holda $1/\pi$ yarim perimetrning yarim diametrga nisbatiga teng bo'ladi, ya'ni $\{h_m;\ r_m\}$ da hisoblangan r_m ga teng.

Hisoblash tartibini quyidagicha bajarishni taklif qilish mumkin:

1) n-burchak perimetrining $2n$ burchak perimetriga tengligini mustaqil isbotlang;

2) $h_2=(h_1+r_1)/2$ formulani keltirib chiqaring;

3) $r_2=\sqrt{r_1\cdot h_2}$ formulani keltirib chiqaring.

Shuni aytib o'tish kerakki $\{h_m;\ r_m\}$ juft ketma-ketlikni olish jarayoni K.F.Gauss tomonidan kashf etilgan "arifmetik-geometrik o'rtani" hisoblash jarayonining xususiy holidir.

4-§. Yuzalarni o'lchash

4.1. Dastlabki ma'lumotlar

Yuzalarni o'lchash nazariyasida quyidagilarni asoslashimiz lozim:

1) O'lchovini topmoqchi bo'layotgan figuraga tegishli va tegishli bo'lmagan nuqtalarni ajratish usuli – figuraning chegarasiga tegishli nuqtaning atrofida figuraga tegishli (ichki) va tegishli bo'lmagan (tashqi) nuqtalar mavjud. Elementar geometriya kursida yuzni o'lchash zarur bo'lgan figuralar, ya'ni ko'pburchaklar (yopiq siniq chiziq bilan chegaralangan), doira, o'z-o'zini kesmaydigan egri chiziqlar bilan chegaralangan figuralar uchun ichki nuqtalarni tashqi nuqtalardan ajratishning sodda kriteriysi mavjud. U quyidagi qoida bilan ifodalanadi:

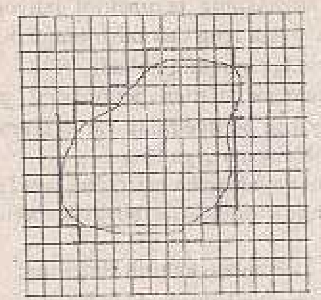
agar berilgan nuqtadan chiquvchi istalgan nur figura konturini toq son marta kesib o'tsa, u holda u ichki nuqta, agarda kesishish nuqtalari soni juft bo'lsa, u holda tashqi nuqta bo'ladi.

2) O'lchov birligini tayinlash lozim. O'lchov birligi sifatida tomonlari birga teng bo'lgan kvadrat yuzi qabul qilinadi.

Agar birlik kvadratning har bir tomonini teng 10 bo'lakka bo'lib, bo'lish nuqtalaridan tomonlariga parallel chiziqlar o'tkazsak, kvadrat 100 ta teng kvadratga ajraladi va har bir kvadratning yuzasi 1/100 kvadrat birlikka teng bo'ladi. Hosil bo'lgan kvadratlarning har birini yana teng 100 kvadratga bo'lamiz va yuzasa 0,0001 kv.birl. teng bo'lgan kvadratga ega bo'lamiz va hokazo.

Endi tekislikda orasidagi masofa 1 birlikka teng bo'lgan parallel to'g'ri chiziqlar chizilgan bo'lsin deb tasavvur qilaylik. Shu to'g'ri chiziqlarga perpendikulyar bo'lgan yuqoridagi kabi to'g'ri chiziqlar sistemasini chizib biz tekislikni kvadratlarga ajratamiz va birlik kvadrat masshtabli to'rga ega bo'lamiz. Agar to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani 0,1 uzunlik birligini olsak zichroq to'r hosil bo'ladi.

Masshtabli to'r misoli sifatida oddiy katak daftar varog'i yoki millimetrli qog'oz misol bo'la oladi.



8-rasm

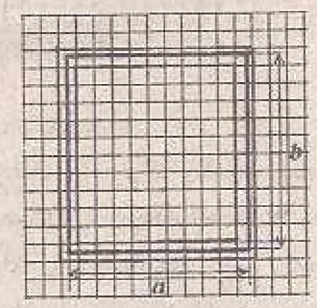
Agar kvadrat shaklidagi masshtabli to'rni biror shaffof (oyna, tsellofan, kalka) materialga chizilsa, u holda paletka deb nomlanuvchi va masshtabli chizg'ichning tekislikdagi analogi bo'lgan asbob hosil bo'ladi.

Biror figuraning yuzini topish uchun uning ustiga kvadrat masshtabli to'rni qo'yamiz va barcha nuqtalari figuraga tegishli bo'lgan kvadratlar sonini hisoblaymiz. Bu son figura yuzi o'lchovining kami bilan taqribiy qiymatini S_0 ni beradi. Kamida bitta nuqtasi figuraga tegishli bo'lgan kvadratlar sonini hisoblab, figura yuzi o'lchovining ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatini S_0' ni hosil qilamiz.

Shundan so'ng, to'rni o'nli bo'laklaymiz. Yuqoridagi kabi hisoblashlarni bajaramiz. Natijada yangi taqribiy S_1 va S_1' qiymatlarni hosil qilamiz. Ushbu jarayonni davom ettirish natijasida $\{S_n, S_n'\}$ juft ketma-ketlikga ega bo'lamiz. Agar bu ketma-ketlikning yaqinlashish shartlarini qanoatlantirishini ko'rsata olsak, u holda bu ketma-ketlik aniqlagan son berilgan figura yuz o'lchovi bo'ladi.

4.2. Ko'pburchakning yuzi

Tomonlari a va b bo'lgan to'g'ri burchakli to'rtburchakni karaylik. Unga masshtabli to'rni shunday qo'yamizki natijada to'r chiziqlari to'rtburchak tomonlariga parallel bo'lsin (9-rasm). U holda ichki kvadratlar soni $a_0 \cdot b_0$ ga, bu erda a_0 va b_0 mos ravishda a va b sonlarning kami bilan olingan taqribiy qiymatlari, teng bo'ladi. To'g'ri to'rtburchakni qoplovchi kvadratlar soni $a_0' \cdot b_0'$ ga teng bo'ladi, bu erda a_0' va b_0' a va b sonlarning ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlari.

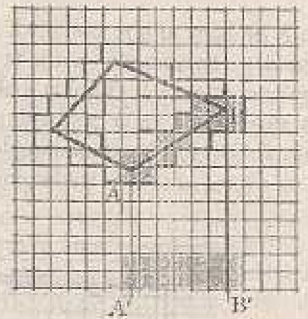


9-rasm

To'rni o'nli bo'laklashlar yordamida n-chi yaqinlashishda yuz o'lchovining kami bilan $S_n = a_n \cdot b_n$, va ortig'i bilan $S_n' = a_n' \cdot b_n'$ qiymatlarini olamiz. Haqiqiy sonlarni ko'paytirishning ta'rifiga ko'ra $\{a_n \cdot b_n, a_n' \cdot b_n'\}$ juft ketma-ketlik $a \cdot b$ ni aniqlaydi. Shu sababli to'g'ri to'rtburchak yuzi $a \cdot b$ ga teng bo'ladi: $S = a \cdot b$.

To'g'ri to'rtburchakni parallel ko'chirish natijasida bu son o'zgarmaydi, chunki a va b uzunlik o'lchovlari masshtab chizg'ichni quyish usuliga bog'liq emas.

Endi ixtiyoriy ko'pburchak yuzini qaraylik. Ko'pburchakka masshtab to'rini qo'yamiz (10-rasm) va ma'lum usulda ichki S_n va tashqi S_n' kvadratlar sonini hisoblaymiz. $\{S_n; S_n'\}$ ketma-ketliklarning yaqinlashish shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz. Birinchi ikkita shart 1) $S_n \le S_n'$ va 2) $S_{n+1} \ge S_n$, $S_{n+1}' \le S_n'$ istalgan figurada oson tekshiriladi. Endi S_n'-S_n ayirma n o'sganda etarlicha kichik bo'lishini ko'rsatamiz. Ammo bu ayirma ko'pburchak konturi o'tadigan kvadratlardan tashkil topgan yo'lakning yuzasidan iborat. Konturning alohida olingan bir kesmasi uchun isbotlaymiz. To'rning gorizontal chiziqlari bilan 45^0 dan kichik burchak tashkil etadigan kesmani olamiz, masalan 10-rasmda AB kesma. Uni gorizontal chiziqlarning biriga proektsiyalaymiz, uni A'V' bilan belgilaymiz. A'B' kesmaga AB kesma kesib o'tadigan barcha kvadratlarni ko'chiramiz. Bu kvadratlar yuzlarining yig'indisi asosi A'V' kesma uzunligining ortig'i bilan olingan qiymati, balandligi ikki birlikka teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzidan katta bo'la olmasligini ko'rishimiz mumkin. Chunki AB kesma vertikal yo'nalishda ikkitadan ortiq kvadratni kesib o'tmaydi.



10-rasm

n-chi bo'laklashda bunday to'g'ri to'rtburchak yuzi $a_n' \cdot \dfrac{2}{10^n}$ ga teng bo'ladi, bu erda a_n' –A'B' kesmaning ortig'i bilan olingan uzunligi. n ortishi bilan a_n' o'zgarmaydi, $\dfrac{2}{10^n}$ esa istalgancha kichik bo'ladi, demak to'g'ri to'rtburchak yuzi, bundan esa AB kesma kesib o'tadigan kvadratlar yuzlarining yig'indisi istalgan musbat sondan kichik bo'ladi. Usbu tasdiq gorizontal chiziq bilan 45^0 dan katta bo'lmagan burchak tashkil etuvchi barcha ko'pburchak tomonlari uchun o'rinlidir. Ko'pburchak boshqa tomonlari to'rning vertikal chiziqlari bilan 45^0 dan katta bo'lmagan burchak tashkil qiladi. Shu sababli yuqoridagi kabi mulohaza yuritish mumkin.

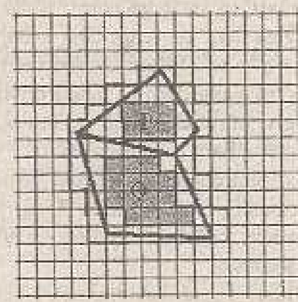
Faraz qilaylik ko'pburchakning k ta tomoni bo'lsin. n ni shunday tanlaymizki, har bir tomon kesib o'tuvchi yo'lakning yuzi ε/k dan kichik bo'lsin, bu yerda ε - ixtiyoriy musbat son. U holda chegaraviy yo'lakning yuzi ε dan kichik bo'ladi. Bu esa $\{S_n; S_n'\}$ juft ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini

isbotlaydi. Demak bu ketma-ketlik bilan aniqlanadigan S son mavjud va uni ko'pburchakning yuzi deb olamiz. Bu son ko'pburchakni to'r bo'ylab parallel ko'chirishda o'zgarmaydi. Chunki bu sonlar to'g'ri burchakli sohalar yordamida (kvadratlardan tashkil topgan) aniqlanadi, to'g'ri to'rtburchaklarning yuzasi parallel ko'chirishda o'zgarmaydi.

4.3. Yuzaning additivligi

Agar ko'pburchak ikkita ko'pburchakdan tashkil topgan bo'lsa, u holda uning yuzi uni tashkil etuvchi ko'pburchak yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Ikkita ko'pburchakdan tashkil topgan ko'pburchakni olamiz va unga masshtabli to'rni qo'yamiz (11-rasm). Tashkil etuvchi ko'pburchak yuzlari P va Q $\{P_n; P_n'\}$ va $\{Q_n; Q_n'\}$ juft ketma-ketliklar bilan, ko'pburchakning yuzi S $\{S_n; S_n'\}$ ketma-ketlik bilan aniqlansin.



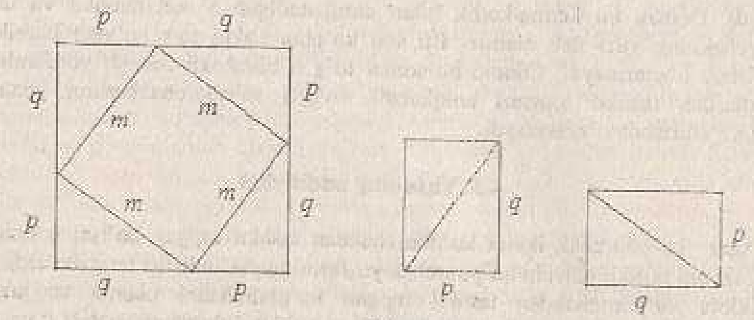
11-rasm

Ko'pburchaklar chegarasidagi kvadratlarni e'tiborga olsak,

$$P_n + Q_n \le S_n \le S_n' \le P_n' + Q_n'$$ tengsizlik hosil bo'ladi.

Demak, asosiy teoremaga ko'ra $R + Q = S$ bo'ladi.

Endi ko'pburchakning yuzasi to'rni biror burchakka burish natijasida o'zgarmasligini ko'rsatishimiz lozim. Buning uchun sohaga tegishli har bir kvadratni burish natijasida uning yuzi boshqa to'r bilan o'lchanganda o'zgarilmasligini ko'rsatish yetarli. Aytaylik, eski to'rning m tomonli kvadrati (12-rasm) biror burchakka burilsin. Bunda biz bu kvadratni tomoni p+q ga teng bo'lgan yangi kvadrat ichiga joylagan bo'lamiz. Uning yuzi $(p+q)^2$ ga teng. Tomoni m ga teng kvadrat yuzini topish uchun yuqoridagi sondan katetlari va q bo'lgan to'rtta to'g'ri burchakli uchburchak yuzi o'lchovini ayirib tashlash kerak.



12-rasm

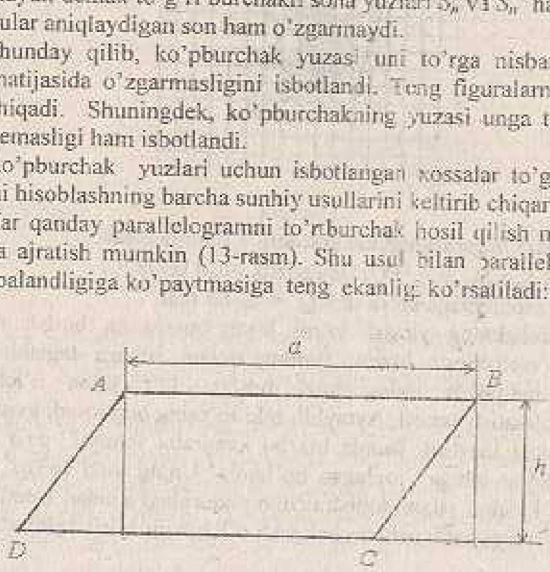
Parallel ko'chirishda yuz o'zgarmaydi to'g'ri burchakli uchburchakni parallel ko'chirib tomonlari p va q ga teng ikkita to'g'ri burchakli uchburchak hosil qilamiz. Ular yuzasi $2pq$ ga teng. Shu sababli tomoni m ga teng kvadrat yuzasi $(p+q)^2-2pq=p^2+q^2=m^2$ (Pifagor teoremasi) teng bo'ladi.

Shunday qilib, to'rni yangidan ko'yganimizda eski to'r kvadratlari yuzlari o'zgarmaydi, demak to'g'ri burchakli soha yuzlari S_n va S_n' ham o'zgarmaydi. Shu sababli ular aniqlaydigan son ham o'zgarmaydi.

Shunday qilib, ko'pburchak yuzasi uni to'rga nisbatan biror burchakka burish natijasida o'zgarmasligini isbotlandi. Teng figuralarni yuzi teng ekanligi kesib chiqadi. Shuningdek, ko'pburchakning yuzasi unga to'rni quyish usuliga bog'liq emasligi ham isbotlandi.

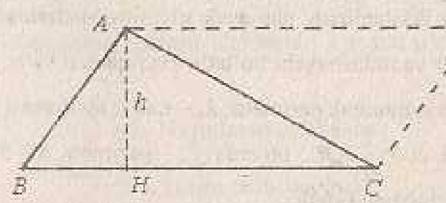
Ko'pburchak yuzlari uchun isbotlangan xossalar to'g'ri chiziqli figuralar yuzlarini hisoblashning barcha sunhiy usullarini keltirib chiqarishga imkon beradi.

Har qanday parallelogramni to'rtburchak hosil qilish mumkin bo'lgan ikki bo'lakka ajratish mumkin (13-rasm). Shu usul bilan parallelogramm yuzi uning asosini balandligiga ko'paytmasiga teng ekanligi ko'rsatiladi: $S = ah$.



13-rasm

Istalgan uchburchakni parallelogramga qadar to'ldirish natijasida uchburchak yuzasi uchun $S = ah/2$ formula hosil bo'ladi.



14-rasm

Istalgan ko'pburchakni uchburchaklarga ajratish yordamida uning yuzini hisoblash mumkin. Xususan, aynan shunday usul bilan trapetsiyaning, aylanaga tashqi chizilgan ko'pburchak yuzlari hisoblanadi.

4.4. Ixtiyoriy kontur bilan chegaralangan figura yuzasi

Ixtiyoriy kontur bilan chegaralangan figura yuzini aniqlash uchun quyidagi metoddan foydalanish mumkin.

Yuzalari S_1, S_2, ..., S_n, ... va barcha nuqtalari figuraga tegishli bo'lgan ko'pburchaklar sistemasini qaraymiz. Bir vaqtda yuzlari S_1', S_2', ..., S_n', ... va berilgan figurani o'z ichida saqlaydigan ko'pburchaklar sistemasini qaraymiz. Agar $\{S_n;S_n'\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik aniqlaydigan S soni figuraning yuziga teng bo'ladi.

Berilgan figuraga masshtabli to'rni qo'yamiz va yuzasi S_n ga teng bo'lgan ko'pburchak ichidagi kvadratlar sonini Z_m bilan belgilaymiz Z_m' bilan shu bo'linishdagi S_n yuzali ko'pburchakni qoplovchi kvadratlar sonini belgilaymiz. m va n lar bir vaqtda kattalashganda $\{Z_m;Z_m'\}$ juft ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlaymiz.

1) Ravshanki, $Z_m < Z_m'$;

2) n va m kattalashganda Z_m ham kattalashadi, Z_m' kichiklashadi, chunki S_n' kichiklashadi.

3) n ni shunday tanlaymizki $S_n' - S_n < \varepsilon/3$ bo'lsin, bu erda ε istalgan musbat son. Bir vaqtda m ni shunday tanlash mumkinki $S_n - Z_m < \varepsilon/3$ va $Z_m' - S_n' < \varepsilon/3$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi, chunki Z_m (Z_m'), S_n (S_n') ko'pburchakning taqribiy qiymati.

Bu uchta tengsizlikni qo'shib $Z_m' - Z_m < \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $\{Z_m;Z_m'\}$ yaqinlashuvchi va Z sonni aniqlaydi. Shuningdek $Z_m < S_n < S_n' < Z_m'$ tengsizliklardan $Z_m < S_n'$ va $S_n < Z_m'$ ekanligi, asosiy teoremaga ko'ra $Z = S$ ekanligi kelib chiqadi.

Asosiy teoremadan foydalanib, berilgan figura yuzasini ifodalovchi S sonli figuraga ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar sistemasiga bog'liq emasligini, faqat ular yuzlari o'lchovlaridan iborat ketma-ketligining yaqinlashuvchi bo'lishi lozimligini isbotlash mumkin.

Olingan xulosalarni doira yuzini aniqlash masalasiga tatbiq qilish mumkin.

Agar doiraga ichki va tashqi muntazam n-burchaklar chizsak, ular tomonlarini cheksiz ikkilantirish natijasida ularning yuzlaridan tashkil topgan $\{S_n; S_n'\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'ladi. Haqiqatdan ham, $S_n=\frac{1}{2}P_nk_n$, bu erda P_n – ichki chizilgan n-burchak perimetri, k_n – uning apofemasi. Tashqi chizilgan n-burchakning yuzasi $S_n'=\frac{1}{2}P_nR$, bu erda P_n – perimetr, R – doira radiusi. Ketma-ketlik quyidagi ko'rinishga keladi:

$\{\frac{1}{2}P_nk_n; \frac{1}{2}P_nR\}$.

$\{P_n; P_n'\}$ ketma-ketlik aylana uzunligini, ya'ni $2\pi R$ ni aniqlaydi. $\{k_n; R\}$ radius uzunligini, ya'ni R ni aniqlaydi. Shu sababli haqiqiy sonlarni ko'paytirish qoidasiga ko'ra $\{S_n; S_n'\}$ ketma-ketlik $S=\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot R==\pi R^2$, ya'ni $S=\pi R^2$ sonni aniqlaydi.

Ko'p hollarda isbotlanganga o'xshash, teng figuralarning yuzalari teng, agar figura bir nechta figuralardan tashkil topsa, uning yuzi yuzalari yig'indisiga teng ekanligini isbotlash mumkin.

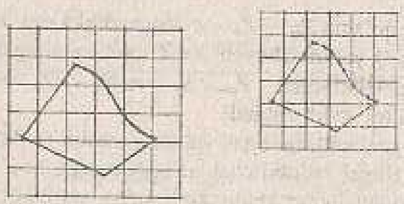
Shunga asosan burchak radiusi o'lchovi α ga teng bo'lgan sektorning yuzi $S=\frac{1}{2}R^2\alpha$ ekanligini keltirib chiqarish mumkin.

Segmentning yuzi sektor yuzidan ikkita radius va vatardan tashkil topgan uchburchak yuzasini ayirib tashlash orqali topish mumkin:

$S=\frac{1}{2}R^2(\alpha-\sin\alpha)$.

Shuni ta'kidlash kerakki, agar figura S ga teng bo'lsa, u holda unga o'xshash figura k^2S yuzaga teng bo'ladi.

Bu tasdiqni isbotlash uchun berilgan figuraga masshtabli to'rni qo'yamiz, va bu figurani unga qo'yilgan to'r bilan bir vaqtda o'xshashlik koeffitsenti k ga teng o'xshash almashtirish bajaramiz (15-rasm). U holda yangi figuraga har bir tomoni k ga teng bo'lgan masshtabli to'r bilan qoplanadi. Bu to'r kvadratining yuzi k^2 ga teng.



15-rasm

Shu sababli agar avvalgi figuraning yuzi $\{S_n, S_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlansa, yangi figura yuzi $\{k^2S_n, k^2S_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlanadi, demak uning yuzi k^2S ga teng bo'ladi.

Shunday qilib, figuraning chiziqli ulchamlari k marta o'zgarsa, uning yuzi k^2 ga o'zgaradi.

5-§. Hajmlarni o'lchash

5.1. Hajm tushunchasi

Hajmlarni o'lchash yuzalarni o'lchash nazariyasiga o'xshash bayon qilinadi. Ko'pgina tasdiqlar (masalan, ko'pyoqning hajmi, ko'pyoqlar birlashmasining hajmi haqidagi teoremalar)ni o'quvchilar mustaqil isbot qilishi mumkin, bunda avval yuzalar uchun bajarilgan isbotlardan foydalaniladi.

Shuning uchun bir qator bu o'xshashliklardan extiyotkorlik bilan foydalanish lozim.

Jism hajmining o'lchovi deb shu jismga mos quyilgan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi xaqiqiy songa aytiladi.

1) Hajmi birga teng jism mavjud;

2) Teng jismlar teng hajmga ega;

3) Agar jism bir necha bo'lakdan tashkil topgan bo'lsa, u holda jismning hajmi uni tashkil etuvchi bo'laklar hajmlarining yig'indisiga teng.

Hajmlarni o'lchash birligi sifatida qirrasi 1 ga teng kub qabul qilingan. Agar birlik kub qirrasini teng 10 bo'lakka bo'lib, bo'linish nuqtalaridan yoqlariga parallel tekisliklar o'tkazilsa, birlik kub 1000 ta teng kubga ajraladi va har bir kubning hajmi 1/1000 ga teng bo'ladi.

Hosil bo'lgan yangi kublarning har birini yana 1000 ta teng kublarga ajratish mumkin va hakozo. Tekislikda kvadrat masshtabli to'r qurganimiz kabi fazoda kub masshtabli to'r quramiz. Buning uchun orasidagi masofa birga teng bo'lgan parallel tekisliklar o'tkazamiz. Ushbu tekisliklarga perpendikulyar va orasidagi masofa birga teng bo'lgan tekisliklar o'tkazamiz. Keyin esa yuqoridagi tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan va orasidagi masofa 1 ga teng bo'lgan parallel tekisliklar o'tkazamiz.

Biror jismning hajmini aniqlash uchun bu jismni kub to'r ichiga joylashtiramiz. Shu jismning ichida to'liq joylashgan kublarni sanab chiqamiz, ichki kublar sonini V_0 bilan belgilaymiz.

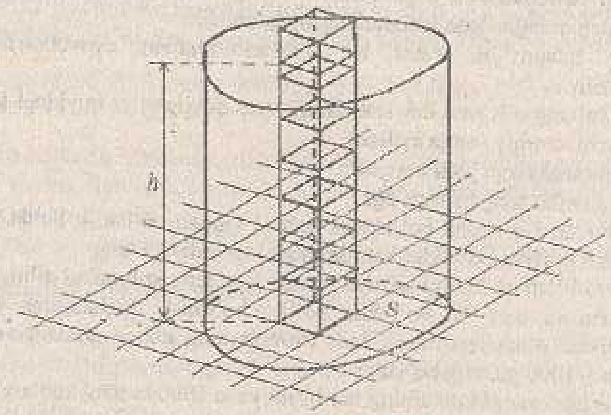
So'ngra jismga kamida bitta nuqtasi tegishli bo'lgan kublarni sanab chiqamiz. Ravshanki, hosil bo'lgan son ichki kublar soni va jismning sirtini kesib o'tuvchi kublar soni yig'indisiga teng bo'ladi, bu sonni V_0' bilan belgilaymiz.

Jismning sirti kesib o'tadigan har bir kubni teng 1000 kubga ajratamiz va ichki kublar va jism sirti orasida to'liq joylashgan kublarni sanab chiqamiz va uning mingdan birini V_0 ga qo'shamiz uni V_1 bilan belgilaymiz. Jism sirti kesib o'tadigan kublar sonining mingdan birini V_0' ga qo'shamiz va V_1' bilan belgilaymiz. Jism sirti kesib o'tadigan kublarni yana teng 1000 bo'lakka ajratamiz va yuqoridagi jarayonni davom ettiramiz. Natijada, $\{V_n; V_n'\}$ ketma-ketlikka ega bo'lamiz. Agar bu ketma ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda ular aniqlaydigan V soni jism hajmining o'lchovi bo'ladi.

5.2. Asosiy jismlarning hajmlari uchun formulalar

Jism hajmining bevosita aniqlash amaliyotda juda murakkabdir, shu sababli hajmni o'lchashning sunhiy (bilvosita) usullarini qo'llash muhim hisoblanadi.

Avvalom bor asosi S ga balandligi h bo'lgan to'g'ri silindrni qaraymiz. Ushbu silindrni to'rga shunday joylashtiramizki, silindr asosi to'r tekisliklarining biriga paralel bo'lsin (16-rasm).



16-rasm

U holda ichki sohada joylashgan kublar sonini sanab chiqish uchun asosiga barcha nuqtalari bilan tegishli bo'lgan kvadratlar sonini sanaymiz. Bu son S_0 ga, asosining taqribiy yuzasiga teng. Har bir kvadrat ustiga silindrlar ustinini chizamiz, uning ichidagi kublar soni h_0 ga teng, bu erda h_0-balandlik uzunligining kami bilan olingan taqribiy qiymati.

Shunday qilib, ichki kublar soni $V_0 = S_0 h_0$ formula bilan aniqlanadi. Xuddi shunga o'xshash qoplovchi kublar soni uchun $V_0' = S_0' h_0'$ formulani hosil qilamiz, bu erda S_0' asosining ortig'i bilan olingan taqribiy qiymati, h_0 balandlikning ortig'i bilan olingan qiymati. Chegaraviy kublarni mayda kublarga ajratamiz va yuqoridagi kabi ish tutib quyidagi ketma-ketlikka ega bo'lamiz:

$\{S_n h_n;\ S_n' h_n'\}$; $\{S_n;\ S_n'\}$ juft ketma-ketlik S sonini, $\{h_n;\ h_n'\}$ juft ketma-ketlik h sonini aniqlashi ma'lum, shu sababli $\{S_n h_n; S_n' h_n'\}$ juft ketma-ketlik Sh sonini aniqlaydi. Shu son bilan to'g'ri silindr hajmi hisoblanadi. Shunday qilib to'g'ri silindr hajmining o'lchovi asosi yuzasining o'lchovini balandligi uzunligi o'lchovi ko'paytmasiga teng.

Bundan bir nechta natijalar hosil qilamiz:

1) To'g'ri prizmaning hajmi asosi bilan balandligining ko'paytmasiga teng.

2) To'g'ri burchakli parallelopiped hajmi uning uch o'lchovining ko'paytmasiga teng: $V=abc$.

3) Aylanma silindr hajmi $V=\pi R^2 h$ formula bilan hisoblanadi, bu yerda R asosning radiusi, h balandlik uzunligi.

Shuni tahkidlash lozimki to'g'ri silindr hajmi uni to'r bo'ylab parallel ko'chirish, yoki silindrning yasovchisi atrofida burish natijasida o'zgarmaydi. CHunki $V=Sh$ formula silindrning to'r bo'ylab ixtiyoriy ko'chishida saqlanadi, bunda yasovchilar to'r chiziqlariga parallel bo'lsa etarli.

5.3. Ko'pyoqning hajmi

Endi ixtiyoriy ko'pyoqning hajmi mavjudgini va uning asosiy xossalarini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik kub masshtabli to'r ichiga joylashtirilgan va to'r chiziqlar ko'pyoqga singib ketgan bo'lsin. Ichki va qoplovchi kublarni sanash usulidan foydalanib $\{V_n;\ V_n'\}$ juft ketma-ketliklarni topamiz va bu ketma -ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini isbotlaymiz.

Ichki va qoplovchi kublarni hosil qilish jarayonining o'zidan

1) $V_n < V_n'$;

2) $V_{n+1} > V_n$, $V_{n+1}' < V_n'$ ekanligi kelib chiqadi.

3) $V_n' - V_n$ ayirmani baholash uchun ko'pyoqning har bir yog'ini shu yoq bilan ikki yoqli burchagi 45° dan kichik bo'lgan to'r tekisligiga proektsiyalaymiz. Shunday yoqlardan birini olamiz va aniqlik uchun u to'rni gorizontal tekisligiga proektsiyalansin. Shu tekislikka berilgan yoq bilan kesishuvchi barcha kublarni vertikal holatda (yo'nalishda) ko'chiramiz (bunday hol tekislik uchun bajarilgan edi, 10-rasm). Natijada hajmi asosining yuzi yoq proektsiyasi yuzining ortig'i bilan olingan qiymatidan, balandligi ikki kub balandligidan katta bo'lmagan prizma hajmidan kichik bo'lgan jism hosil qilamiz. Shunday qilib, bunday prizmaning hajmi $S_n' \cdot \frac{2}{10^n}$ bu yerda S_n' - yoq proektsiyasining taqribiy yuzi, n ni cheksiz kattalashtirish evaziga bu hajm istalgan ε sonidan kichik bo'ladi. Haqiqatan ham, S_n' o'smaydi, shu sababli u biror musbat N sonidan kichik bo'ladi. $\frac{2}{10^n}$ sonini n ni cheksiz kattalashtirish evaziga ε/N dan kichik qilib olish mumkin. Shu sababli $S_n' \cdot \frac{2}{10^n} < N \cdot \varepsilon/N = \varepsilon$. Shunday qilib, yoq kesib o'tadigan kublar bilan aniqlanadigan hajm etarlicha kichik bo'ladi. Agar ko'pyoqning yoqlari soni k bo'lsa, u holda n ni shunday katta qilib olish mumkinki, har bir yoq kesib o'tadigan kublar hajmi ε/k dan kichik bo'ladi.

Bu holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$V_n' - V_n < k \cdot \varepsilon/k = \varepsilon$

Shunday qilib yaqinlashishning barcha shartlari bajariladi, demak $\{V_n; V_n'\}$ juft ketma-ketlik V sonini aniqlaydi, bu son ko'pyoqning hajmiga teng.

5.4. Hajmning additivligi

Faraz qilaylik, ko'pyoq ikkita ko'pyoqdan tashkil topgan bo'lsin va uning hajmi W $\{W_m;\ W_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlansin. Uni tashkil etuvchi ko'pyoqlarning hajmlari $\{V_m; V_n'\}$ va $\{v_m; v_n'\}$ juft ketma-ketliklar bilan aniqlanib, hajmlar mos ravishda V va v ga teng bo'lsin. Yuqoridagi sonlar quyidagi tengsizliklar bilan bog'langan

$V_n + v_n < W_n < W_n' < V_n' + v_n'$.

Birinchi tengsizlikning o'rinli ekanligi quyidagi mulohazalardan kelib chiqadi: $V_n + v_n$ ga tashkil etuvchi ko'pyoqlarning umumiy yoqlari kesib o'tadigan kublar kirmaydi, W_n ga esa kiradi. So'nggi tengsizlik o'rinli ekanligi W_n' da yuqoridagi chegaraviy kublar bir marta, $V_n' + v_n'$ da esa ikki marta hisobga olinishidan kelib chiqadi. Shunday qilib asosiy teoremadan $V + v = W$ ekanligi kelib chiqadi.

Bunda agar ko'pyoq bir necha ko'pyoqlardan tashkil topgan bo'lsa, u holda uning hajmi tashkil etuvchi ko'pyoqlar hajmlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Endi ko'pyoqni fazoda ixtiyoriy ko'chirish natijasida uning hajmi o'zgarmasligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham, avval biz silindr hajmi (demak prizmaning hajmi ham) parallel ko'chirishda ham yasovchiga parallel bo'lgan o'q atrofida burish natijasida ham o'zgarmasligini isbotlagan edik. Shu natijani birlik kub uchun ham aytishimiz mumkin. Ammo biz fazodagi har qanday harakat burish va parallel ko'chirish kompozitsiyasidan iborat ekanligini bilamiz.

Demak har qanday harakatda kubning hajmi o'zgarmaydi. Shu sababli ko'pyoqni kub to'rga joylashtirib $\{V_m; V_n'\}$ juft ketma-ketlik yordamida V hajmni topsak, shu ko'pyoqni to'r bilan birgalikda boshqa holatda karaganimizda ham V_n va V_n' sonlarini hosil qilamiz, V esa o'zgarmaydi.

Ushbu xulosa hajmni aniqlash mumkin bo'lgan barcha jismlar uchun o'rinlidir. Shunday qilib, barcha hollarda teng jismlar teng hajmga ega yoki jismning hajmi masshtabli to'rni qanday qo'yishimizga bog'liq emas degan xulosaga kelamiz.

5.5. **1-teorema.** Berilgan jismning ichida joylashgan va hajmlari $V_1, V_2, \ldots, V_m, \ldots$ bo'lgan jismlar sistemasi, shuningdek berilgan jismni o'z ichida saqlaydigan va hajmlari $V_1', V_2', \ldots, V_n', \ldots$ bo'lgan jismlar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar $\{V_m; V'_n\}$ juft ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik bilan aniqlanadigan V son berilgan jismning hajmiga teng bo'ladi.

Isboti. Berilgan jismni masshtabli to'r ichiga joylashtiramiz va W_m bilan va V_n hajmdagi m-bo'laklashdagi kublar sonini belgilaymiz, W_m' bilan esa m-bo'laklashda V_n' hajmni qoplovchi kublar sonini belgilaymiz.

Aytaylik ε berilgan musbat son bo'lsin, n ni shunday tanlaymizki $V_n' - V_n < \varepsilon/3$ bo'lsin.

Endi m ni shunday tanlaymizki $V_n - W_m < \varepsilon/3$ bo'lsin. Bunday tanlashimiz mumkin, chunki W_m V_n ko'pyoqning kami bilan olingan taqribiy qiymati, W_m' esa

V_n' ko'pyoqning ortig'i bilan olingan hajmining taqribiy qiymati. Hosil bo'lgan tengsizliklarni qo'shib $W_m' - W_m < \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz, bu degani $\{W_m; W_m'\}$ juft ketma ketliklar m va n ni cheksiz kattalashganda yaqinlashuvchi ekanligini anglatadi.

Haqiqatdan ham 1) $W_m < W_m'$, chunki W_n hajm W_m' hajmning qismini tashkil etadi.

2) m va n o'sganda W_m, kattalashadi, chunki V_n kattalashadi. Shu sababli shartlarda W_m kamayadi, chunki V_n' kamayadi.

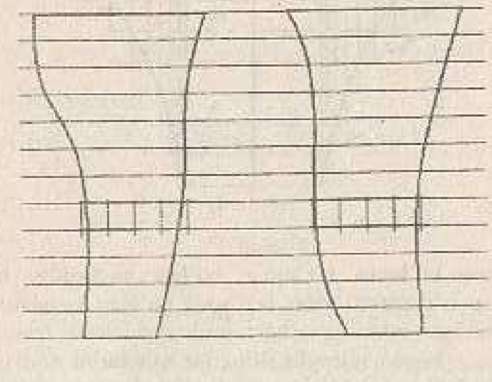
3) $W_m' - W_m < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli (yuqorida isbotladik).

Faraz qilaylik, $\{W_m; W_m'\}$ juft ketma-ketlik W sonini aniqlasin. Quyidagi tengsizliklar o'rinli: $W_m < V_n'$ va $W_m' > V_n$. Demak asosiy teorema ga ko'ra $W = V$ bo'ladi.

5.6. B.Kaval'eri printsipi

2-teorema Agar ikki jismni aynan bir tekislikka parallel bo'lgan tekisliklar bilan kesganimizda kesimda tengdosh figuralar hosil bo'lsa, u holda bu jismlarning hajmlari teng bo'ladi.

Isboti. Kesimlar gorizontal tekislikka parallel bo'lsin (17- rasm) Ikki jismga ham kubik masshtabli to'rni qo'yamiz, bunda to'rni bir tekisligi gorizontal bo'lsin. Faraz qilaylik birinchi jismning hajmi V ga teng va $\{V_m; V_n'\}$ ketma-ketlik bilan aniqlansin, ikkinchi jismning hajmi W va $\{W_m; W_n'\}$ ketma-ketlik bilan aniqlansin. Orasidagi masofa birga teng bo'lgan gorizontal tekisliklar bilan aniqlanadigan ikki jismni karaymiz. Birinchi jismning dastlabki kesimi yuzasidagi ichki birlik kvadratlar soni S_m, shu yuzani qoplovchi birlik kvadratlar soni S_m' ga teng bo'lsin. Z_m va Z_m' bilan ikkinchi jismning shunday yuzadagi ichki va qoplovchi birlik kvadratlar sonini belgilaymiz. Bu ikki kesim yuzalari teng bo'lganligi sababli $S_m < Z_m'$, $S_m' > Z_m$ tengsizliklar o'rinli.



17-rasm

Bundan birinchi jismda berilgan yuzada joylashuvchi ichki kublar soni ikkinchi jismda shunday yuzada joylashgan qoplovchi kublar sonidan kichik ekanligi kelib chiqadi. Birinchi jismning shu kesimdagi qoplovchi kublar soni ikkinchi kesimning shu kesimdagi ichki kublar sonidan katta. Yuqoridagi mulohazalarni istalgan kesim uchun aytishimiz mumkin.

Shu sabali umuman $V_1<W_1'$; $V_1'>W_1$, $V_2<W_2'$; $V_2'>W_2$, . . . , $V_n<W_n'$; $V_n'>W_m$ . . . hosil bo'ladi. Bundan asosiy teoremaga ko'ra $V=W$, ya'ni jismlar hajmlari teng ekanligi kelib chiqadi.

3-teorema (Simpson).

Agar jismni uning balandligiga perpendikulyar tekislik bilan kesgandagi kesimi yuzasi balandlikning tayinlangan nuqtasidan kesimgacha bo'lgan masofaning ko'pi bilan ikkinchi tartibli funktsiyasi bo'lsa, u holda jismning hajmi $V=\frac{H}{6}(S_0+4S_m+S_n)$ formula bilan hisoblanadi, bu erda H - jism balandligi, S_0- quyi asosining yuzasi, S_m - o'rta kesim yuzasi, S_n-yuqori asos yuzasi.

Isboti. Boshlang'ich nuqtadan x masofadagi kesimning yuzasi

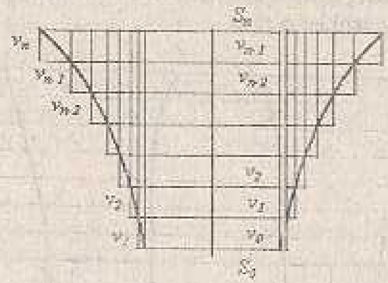
$S(x)=ax^2+bx+c$

formula bilan ifodalansin.

Biz funktsiya o'suvchi deb faraz qilamiz. Simpson formulasini keltirib chiqarish uchun o'qga perpendikulyar kesim yuzasi ax^2+bx+c bo'lgan aylanma jismni karaymiz. Ravshanki kesimda radiusi $\pi r^2=ax^2+bx+c$ tenglamadan topiladigan doira hosil bo'ladi. Bundan $r=\sqrt{\frac{ax^2+bx+c}{\pi}}$.

Kaval'eri printsipiga ko'ra aylanma jism hajmi ko'ndalang kesim yuzi $S=ax^2+bx+c$ formula bilan ifodalanuvchi ixtiyoriy jismning hajmiga teng bo'ladi.

Shunday qilib, balandligi H ga teng bo'lgan aylanma jismni qarash yetarli (18-rasm).



18-rasm

Balandlikni n teng bo'lakka bo'lamiz, bo'lish nuqtasidan balandlikka perpendikulyar tekisliklar o'tkazamiz. Har bir hosil bo'lgan yuzalarda umumiy balandligi H/n ga teng bo'lgan ichki va tashqi silindrlar quramiz. Ichki silindralar hajmlarini v_0, v_1, . . . , v_{n-1} bilan qoplovchi silindrlar hajmlarini v_1', v_2', . . . , v_n' bilan belgilaymiz. Ichki silindrlar hajmlar yig'indisi V_n, qoplovchi silindrlar hajmlarini V_n' bilan belgilaymiz. n cheksiz kattalashganda $\{V_n, V_n'\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham, V_n va V_n' sonlarini aniqlashimizga ko'ra,

1) $V_n \leq V_n'$

2) $V_{n-1} \geq V_n$; $V_{n+1}' \leq V_n'$,

3) $V_n' - V_n$ ayirmani baholash uchun

$V_n= v_0+v_1+. . . +v_{n-1}$ va $V_n'= v_1'+v_2'+ . . . +v_n'$ ekanligini e'tiborga olamiz.

Ammo $v_1=v_1'$, $v_2=v_2'$, ... , $v_{n-1}=v_{n-1}'$, chunki har bir silindrlar jufti umumiy asosga va bir xil balandlikka ega. Shuning uchun $V_n'-V_n = v_n- v_0$ va v_n-v_0 , chunki $S(x)$ ni o'suvchi deb hisoblaymiz. Ammo $v_0=S_0\cdot\frac{H}{n}$; $v_n=S_n\cdot\frac{H}{n}$, bu yerda S_0 - boshlang'ich, S_n so'nngi kesimlarning yuzalari.

Shunday qilib $V_n'-V_n = (S_n-S_0)\cdot\frac{H}{n}$.

H, S_n, S_0 - o'zgarmas sonlar bo'lganligi sababli n kattalashishi evaziga ayirma avvaldan berilgan musbat sondan kichik bo'laveradi.

Demak (V_n; V_n') ketma-ketlik yaqinlashuvchi va V sonini aniqlaydi. Bu son aylanma jismning hajmiga teng. Shu sonni topamiz. Buning uchun V_n' sonlari uchun umumiy formula keltirib chiqaramiz. Teorema shartiga ko'ra

$$v_1=\frac{H}{n}S_1=\frac{H}{n}(a\frac{H^2}{n^2}+b\frac{H}{n}+c),$$

$$v_2=\frac{H}{n}S_2=\frac{H}{n}(a\cdot 2^2\frac{H^2}{n^2}+b\cdot 2\frac{H}{n}+c),$$

. . . .

$$v_n=\frac{H}{n}S_1=\frac{H}{n}(a n^2\cdot\frac{H^2}{n^2}+b\cdot n\cdot\frac{H}{n}+c),$$

$$V_n'=\frac{H}{n}(a\cdot\frac{H^2}{n^2}(1^2+2^2+3^2+. . .+n^2)+b\frac{H}{n}(1+2++3+. . .+n)+nc)$$

$$1^2+2^2+3^2+. . .+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad va \quad 1+2++3+. . .+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

formulalardan foydalansak,

$$V_n'=\frac{aH^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{bH^2}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+cH$$

$$V_n'=\frac{aH^3}{n^3}\cdot(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})+\frac{bH^2}{2}\cdot(1+\frac{1}{n})+cH$$

va natijada

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n'=\frac{aH^3}{3}+\frac{bH^2}{2}+cH.$$

Bu formulani keltirib chiqarishda $S(x)$ funktsiya o'suvchi deb faraz qilindi. Agar oraliqda $S(x)$ kamayuvchi bo'lganda yuqori asos deb quyi asosni, quyi deb yuqori asosni olib yuqoridagi mulohazalarni takrorlash ctarli. Agar $S(x)$ funktsiya 0 dan H_1, gacha o'suvchi (kamayuvchi), H_1 dan H gacha kamayuvchi (o'suvchi) bo'lsa, u holda avval 0 dan H_1 gacha hajmini, keyin H_1 dan H gacha hajmini hisoblab, olingan natijalarni qo'shib

$$V=\frac{aH^3}{3}+\frac{bH^2}{2}+cH$$

formulani hosil qilamiz, agar $S(x)=ax^2+bx+c$ formulada $x=0$, $x=H/2$, $x=H$ qiymatlarni kuysak $S_0=c$, $S_m=aH^2/4+bH/2+c$, $S_n=aH^2+bH+c$ formulalarni hosil qilamiz.

Bu tengliklardan birinchisini $\frac{H}{6}$ ga, ikkinchisini $4\cdot\frac{H}{6}$, uchinchisini $\frac{H}{6}$ ko'paytiramiz va natijalarni qo'shamiz:

$$\frac{H}{6}S_0=\frac{cH}{6}$$

$$4\cdot\frac{H}{6}S_m=\frac{aH^3}{6}+\frac{2bH^2}{6}+\frac{4cH}{6}$$

$$\frac{H}{6}S_n=\frac{aH^3}{6}+\frac{bH^2}{6}+\frac{cH}{6}$$

$$\frac{H}{6}(S_0+4S_m+S_n)=\frac{aH^3}{3}+\frac{bH^2}{2}+cH=V$$

va natijada $V=\frac{H}{6}(S_0+4S_m+S_n)$ isbotlash kerak bo'lgan tenglik kelib chiqadi.

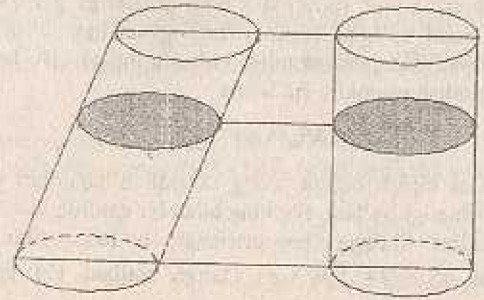
5.7. Kaval'eri va Simpson teoremalarining tatbiqlari

Yuqorida isbotlangan teoremalarni turli jismlarning hajmlarini hisoblash uchun foydalanamiz.

I. Har qanday silindr va har qanday prizmaning hajmi asosi yuzini balandligiga ko'paytmasiga teng.

Kaval'eri printsipiga ko'ra agar og'ma silindr va to'g'ri silindrning asoslarining yuzlari va balandliklari teng bo'lsa, u holda ularning hajmlari teng bo'ladi.

Haqiqatan ham bu ikki jismni gorizontal tekislikka qo'yamiz (19-rasm) va gorizontal tekislikka parallel tekislik bilan kesganimizda kesimda teng yuzali figura hosil bo'ladi. Bu ikki jism Kavelg'eri printsip shartlarini qanoatlantiradi, demak ularning hajmlari teng. To'g'ri silindr va to'g'ri prizma uchun $V=Sh$ formula avval keltirib chiqarilgan edi.



19-rasm

II. Har qanday piramida va har qanday konusning hajmi asosi yuzasining balandligiga ko'paytmasining uchdan biriga teng.

Agar konus yoki piramidaning asosiga parallel bo'lgan tekislik bilan kessak, kesimda asosiga gomotetik bo'lgan figura hosil bo'ladi. Bu gomotetiyaning markazi konus yoki piramidaning uchi, koeffitsenti esa bu figuralarning uchigacha bo'lgan masofalar nisbatiga teng. O'xshash figuralar yuzalarining nisbati o'xshashlik koeffitsenti kvadratiga tengligidan quyidagi formulani hosil qilamiz:

$$\frac{S}{Q}=\frac{x^2}{h^2} \quad \text{yoki} \quad S=\frac{Qx^2}{h^2} \qquad (1)$$

Bu yerda Q asosining yuzi, S-kesim yuzi, h- balandligi, x-kesimdan uchgacha bo'lgan masofa. (1) formuladan kesimning yuzasi x masofaning kvadratining kvadrat funktsiyasi ekanligi ko'rinib turibdi. Shu sababli hajmni aniqlash uchun Simpson formulasidan $V=\frac{h}{6}(S_0+4S_m+S_n)$ foydalanishimiz mumkin. Bunda $S_0=0$, $S_m=Q/4$, $S_n=Q$. Shu sabali $V=\frac{h}{6}(0+Q+Q)=\frac{Qh}{3}$.

Shunday qilib $V=\frac{Qh}{3}$.

Aylanma konus uchun (balandligi h, asosining radiusi R bo'lgan) $V=\frac{\pi R^2 h}{3}$ formula hosil bo'ladi.

III. Kesik konus va kesik piramidaning hajmi $V=\frac{h}{3}(Q+\sqrt{Qq}+q)$ formula bilan hisoblanadi. Bu yerda h – jism balandligi, Q – quyi asos yuzasi, q-yuqori asos yuzasi.

(1) formulada x jism uchidan kesimgacha masofani ifodalar edi. Agar masofani jism uchidan emas, balki asosdan hisoblasak kesim yuzasi quyidagi formula bilan ifodalanar edi.

$$S=\frac{Q(h-x)^2}{h^2} \quad (2)$$

Ushbu formuladan kesik konus (piramida) ning asoslariga perpendikulyar tekisliklar bilan kesganda hosil bo'lgan kesim yuzasi uchun ham o'rinli bo'lib, kesim yuzasi x ning kvadrati funktsiyasi ekanligi ko'rinib turibdi. Bu holda ham Simpson formulasini tatbiq qilish mumkin. Bu holda

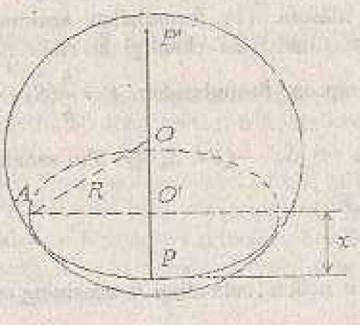
$$V=\frac{h}{6}(Q+4S_m+q) \quad (3)$$

S_m -o'rta kesimning yuzasini topish uchun uning chiziqli o'lchamlari quyi va yuqori asoslarning o'rta arifmetigi bo'ladi. Shuning bilan bir qatorda bu o'lchamlar yuzalardan olingan kvadrat ildizga proportsional bo'ladi. Shu sababli $2\sqrt{S_m}=\sqrt{Q}+\sqrt{q}$, bundan $4S_m=Q+\sqrt{Qq}+q$. Oxirgi natijani (3) ga qo'yib $V=\frac{h}{3}(Q+\sqrt{Qq}+q)$ ni hosil qilamiz. Balandligi h, asosining radiuslari r va R, bo'lgan aylanma kesik konusning hajmi uchun ushbu formula o'rinli:

$$V=\frac{\pi h}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

IV. Radiusi R ga teng bo'lgan sharning hajmi $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ formula bilan ifodalanadi.

Diametrning R uchidan x masofada joylashgan kesimning radiusini r bilan belgilaymiz (20-rasm). U holda $OO'A$ to'g'ri burchakli uchburchakda $OA=R$, $OO'=R-x$, $O'A=r$ va $r^2=R^2-(R-x)^2=2Rx-x^2$.



20-rasm

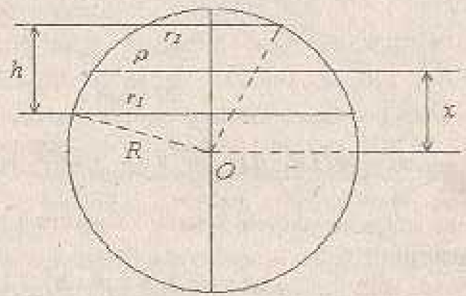
Bu kesimning yuzi $\pi r^2=2\pi Rx-\pi x^2$ bo'lib x masofaga nisbatan kvadrat funktsiya. Shu sababli sharning xajmini Simpson formulasi yordamida hisoblash mumkin. Bu holda $S_n=0$, $S_m=\pi R^2$, $S_q=0$ va Simpson formulasiga ko'ra

$$V=\frac{2R}{6}(0+4\pi R^2+0)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

5.8. Shar qatlamining hajmini hisoblaymiz.

Aytaylik r_1 yuqori kesimning radiusi, r_2 quyi kesimning radiusi, ρ-o'rta kesimning radiusi, h-qatlamning balandligi bo'lsin. Sharga Simpson formulasini tatbiq qilish mumkinligi isbotlangan. Shuning uchun $V=\frac{h}{6}(\pi r_1^2+4\pi\rho^2+r_2^2)$ formula o'rinli.

Jism radiuslari orasidagi bog'lanishlarni topish uchun sfera markazidan o'rta kesimgacha bo'lgan masofani x bilan belgilaymiz (21-rasm).



21-rasm

U holda $r_1^2=R^2-(x-h/2)^2$ $\quad r_2^2=R^2-(x+h/2)^2$ bo'ladi.

Bu ikki tenglamani qo'shib $r_1^2+r_2^2=2(R^2-x^2)-h^2/2$ ni hosil qilamiz. Ikkinchi tomondan $\rho^2=R^2-x^2$, shu sababli $r_1^2+r_2^2=2\rho^2-h^2/2$ yoki $4\rho^2=2r_1^2+2r_2^2+h^2$. Olingan natijalar hajm formulasiga quyib quyidagi formulani hosil qilamiz

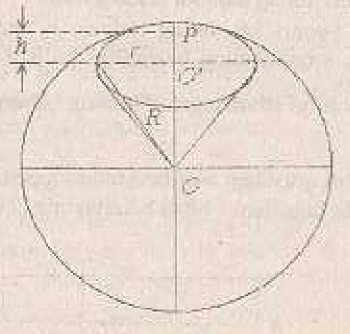
$$V=\frac{\pi h}{6}(3r_1^2+3r_2^2+h^2)=\frac{\pi r_1^2 h}{2}+\frac{\pi r_2^2 h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}.$$

Shunday qilib, quyidagi tasdiq isbotlandi: Shar qatlamining hajmi ikkita aylanma silindr (asoslari radiusi qatlamlar asoslari radiusiga, balandliklari qatlam balandligining yarmiga teng) hajmi va bitta shar (diametri qatlam balandligiga teng) hajmi yig'indisiga teng.

Xususan shar qatlamining aniqlaydigan kesuvchi tekisliklarning biri sharga urinsa, u holda shar segmenti hosil bo'ladi. Uning hajmini hisoblash uchun yuqoridagi formulada radiuslari biri o'rniga nol qo'yish yetarli. Natijada $V=\frac{\pi r^2 h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}$ formula hosil bo'ladi. Shar sektorini doiraviy sektorni uni kesib o'tmaydigan diametr atrofida aylantirish natijasida hosil qilish mumkin.

Agar ushbu diametr sektorning bir tomoni bilan ustma-ust tushsa, u holda sektor 1 - turdagi, agar ustma-ust tushmasa 2 - turdagi sektor deyiladi.

1- turdagi sektorning hajmi shar segmentining hajmi va asosi segment asosiga teng uchi sfera markazida bo'lgan konus hajmi yig'indisiga teng (22-rasm):



22-rasm

$$V=\frac{\pi r^2 h}{2}+\frac{\pi h^3}{6}+\frac{\pi r^2(R-h)}{3}=\pi\frac{3r^2h+h^3+2r^2R-2r^2h}{6}=\pi\frac{r^2(h+2R)+h^3}{6}$$

Aylanma ichida kesishuvchi vatarlar ko'paytmasi haqidagi teoremaga ko'ra $r^2=(R-h)h$, bundan

$$V=\pi\frac{(2R-h)(2r+h)h+h^3}{6}=\frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Bu formuladan 1-turdagi sektorning hajmi shar radiusi va segment balandligi orqali ifodalanadi. 2-turdagi sektor hajmining ikkita 1-turdagi sektorlar hajmlarning ayirmasi sifatida ifodalash mumkin:

$$V=V_2-V_1=\frac{2}{3}\pi R^2 h_2-\frac{2}{3}\pi R^2 h_1=\frac{2}{3}\pi R^2(h_2-h_1),$$

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 h$$

4-teorema. O'xshash jismlar hajmlarining nisbati o'xshashlik koeffitsentining kubiga teng.

Isboti. Berilgan jismning V hajmi $\{V_n;V_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlansin. Bu jismni unga qoplangan masshtabli to'r bilan birgalikda k koeffitsentli o'xshash almashtirish bajaramiz. U holda masshtab to'rsidagi har bir birlik kubning hajmi k^3 ga teng bo'ladi. Shu sababli hosil bo'lgan jismning hajmi $\{k^3V_n, k^3V_n'\}$ juft ketma-ketlik bilan aniqlanadi va shu sababli k^3V ga teng bo'ladi.

Shuni tahkidlab o'tamizki, Kaval'eri printsipi va Simpson formulalari turli jismlarning (prizmatoid, ellipsoid, parabaloid, giperboloid va boshqa) hajmlarini hisoblashga imkon beradi.

Simpson formulasida ixtiyoriy jismning hajmini taqribiy hisoblashda ham foydalanish mumkin. Buning uchun jismni teng masofalarda parallel kesimlar bilan bir nechta segmentlarga ajratiladi va har bir segmentga Simpson formulasi tatbiq etiladi. Ma'lumki bu usulda Simpson formulasi aniq integralni hisoblashda ishlatiladi

6-§. Sirtlarni hisoblash

Dastlab aylanma silindrni qaraymiz. Uning balandligi h va radiusi R bo'lsin. Shu silindrga n- burchakli prizmani shunday ichki chizamizki, uning asosi silindr asosiga chizilgan n- burchak, yon qirralari silindr yasovchisiga teng bo'lsin. Bir vaqtda shu silindrga tashqi n-burchakli prizma chizamiz, bunda prizmaning asosi aylanaga tashqi chizilgan n-burchak, yon yoqlari silindrga urinadi. n ni cheksiz kattalashtiramiz, bunda asos aylanasining yoyi nolga intilishini talab qilamiz. Natijada silindrga ichki va tashqi chizilgan prizma yon sirtlari yaqinlashish shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, $S_n=P_n\cdot h$ va $S_n'=P_n'\cdot h$, bu yerda P_n va P_n' ichki va tashqi chizilgan n- burchak perimetrlari. $\{P_n,P_n'\}$ juft ketma –ketlik $2\pi R$ sonni aniqlashi ma'lum. U holda $\{S_n,S_n'\}$ juft ketma-ketlik $2\pi RH$ ni aniqlaydi. Bu son aylanma silindr yon yoqi yuzini aniqlaydi.

Olingan natija boshlang'ich prizmalarni tanlashga bog'liq emas, chunki aylana uzunligi boshlang'ich ko'pburchaklarni tanlashga bog'liq emas.

Asosining radiusi R, yasovchisi l bo'lgan aylanma konus yon sirti uchun formula keltirib chiqaramiz.

Asosiga ixtiyoriy n- burchakni ichki chizamiz, uning uchlarini konus uchlari bilan birlashtirib n- burchakli piramida hosil qilamiz. Agar asosini bo'linish nuqtalaridan aylanaga urinma o'tkazsak, aylanaga tashqi n- burchak chizamiz. Uning uchlarini konus uchlari bilan birlashtirib, tashqi chizilgan n- burchakli prizma hosil qilamiz, uning yon yoqlari konusga urinadi. Asosidagi aylana yoylari yetarlicha kichik bo'ladigan qilib, n ni cheksiz kattalashtiramiz.

U holda ichki va tashqi chizilgan piramidalarning yon sirtlari S_n va S_n' lar yaqinlashish shartlarini qanoatlantiruvchi juft ketma- ketlik hosil qiladi. Xaqiqatan ham,

$S_n=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}a_k l_k$, bu yerda a_k- n- burchakning k- chi tomoni uzunligi, l_k- uning uchigacha bo'lgan masofasi. $S_n'=\frac{1}{2}P_n' l$, bu yerda P_n' tashqi chizilgan n- burchak perimetri, l konus yasovchisi (tashqi chizilgan piramida har bir yoqining balandligi bo'lib xizmat qiladi). Agar l_k larni ularning eng kichigi l_n bilan almashtirsak, u xolda $S_n\geq\frac{1}{2}P_n\cdot l_n$ bo'ladi, bu yerda P_n ichki chizilgan n- burchak perimetri.

$\{P_n,P_n'\}$ juft ketma-ketlik $2\pi R$ sonni, $\{l_n,l\}$ juft ketma-ketlik l ni aniqlaydi, chunki $l-l_n<\varepsilon$, bu yerda ε l_n uchidan (vatar nuqtasi) l uchigacha (urinma nuqtasi) bo'lgan masofa bo'lib, n ni kattalashtirish jarayonida istalgancha kichik qilib olish mumkin. Shunday qilib, $S_n<\frac{1}{2}\cdot 2\pi R\cdot l<S_n'$, ya'ni $\{S_n,S_n'\}$ juft ketma-ketlik πRl sonni- aylanma konus yon sirtini aniqlaydi: $S=\pi Rl$. Agar yasovchi asos

tekisligiga α burchak bilan og'ishgan bo'lsa, u holda $\frac{R}{l}=\cos\alpha$ yoki $l=\frac{R}{\cos\alpha}$

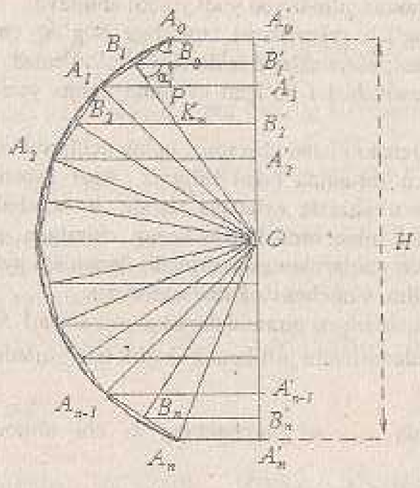
bo'ladi. Shu sababli $S=\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}$ bo'ladi

Misol. Kesik konus yon sirti uchun formula keltirib chiqaring.

Sfera sirtini va uning kesimlari yuzlarini hisoblashda yuqoridagi usullardan foydalanamiz.

Ta'rif. Sferik poyas (kamar) deb sferaning ikkita parallel tekisliklar orasidagi qismiga aytiladi. Bu tekisliklar sferani kesib o'tishi yoki urinishi mumkin. Bu tekisliklar orasidagi masofa poyas balandligi deyiladi.

Teorema. Sferik poyas yuzi katta doira aylanasi uzunligini poyas balandligiga ko'paytmasiga teng.



23-rasm

Isboti. Sferani yarim aylanani (markazi O nuqtada bo'lgan) diametr d orqali o'tadigan to'g'ri chiziq atrofida aylantirishdan xosil bo'lgan sirt deb qaraymiz. U holda sferik poyasni A_0A_n (23-rasm) yoy bilan hosil bo'lgan aylanma sirt deb qarash mumkin. Bu yoyni n ta teng bo'lakka $A_1A_1 ... A_{n-1}A_n$ siniq chiziqni hosil qilamiz. Siniq chiziqning barcha tashkil etuvchilari o'zaro teng va l uzunlikka ega. Siniq chiziqning har bir qismidan markazgacha bo'lgan masofani k_n bilan belgilaymiz. Har bir qism o'rtasini $B_1B_2 ... B_n$ bilan belgilaymiz. $A_0, A_1, ..., A_{n-1}', A_n$, $B_1', B_2', ..., B_{n-1}', B_n'$ bilan mos nuqtalarning d o'qdagi proektsiyalarini belgilaymiz. $A_0A_1...A_{n-1}A_n$ siniq chiziqni d o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirt $A_0A_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ kesmalar qanchalik kichik bo'lsa, shuncha sfera sirtiga yaqin bo'ladi. Shu sababli sferik poyasning

yuzi deb, n cheksiz kattalashganda hosil bo'lgan aylanma sirt yuzining limitini qabul qilamiz.

Aylanma sirt yuzini S_n bilan belgilaymiz, u siniq chiziqning har bir bo'lagini aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtlar yuzlari yig'indisiga teng:

$$S_n=S_1+S_2+...+S_{n-1}+S_n$$

Siniq chiziqning birinchi kesmasi yordamida hosil bo'lgan sirt yuzi kesik konus yon sirti formulasiga ko'ra $S_1=\pi l(A_0A_0'+A_1A_1')$ ga teng. Trapetsiya o'rta chizig'i xossasiga ko'ra $\frac{A_0A_0'+A_1A_1'}{2}=B_1B_1'=r_1$ yoki $A_0A_0'+A_1A_1'=2r_1$. OB_1B_1' to'g'ri burchakli uchburchakdan $r_1=k_n\cdot\cos\alpha$, bu yerda α orqali OB_1B_1' burchak belgilangan. Shunday qilib, $S_1=2\pi k_n l_1\cos\alpha$.

Ammo $\angle CB_1B_1'=\angle A_1A_0P=\alpha$. Shu sababli $l_1\cos\alpha=h_1$, bu yerda h_1 birinchi kesmaning aylanish o'qidagi proektsiyasi uzunligi. Demak, $S_1=2\pi k_n h_1$.

Shunga o'xshash, siniq chiziqning boshqa qismlari uchun ham formulalar hosil qilamiz:

$$S_2=2\pi k_n h_2,...,S_{n-1}=2\pi k_n h_{n-1}, S_n=2\pi k_n h_n.$$

Bu tengliklarni qo'shib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$S_n=2\pi k_n(h_1+h_2+...+h_{n-1}+h_n)=2\pi k_n H,$$

bu erda H-poyasning balandligi.

Limitga o'tib, sferik poyas yuzini topamiz:

$$S_{s.n}=\lim_{n\to\infty}2\pi k_n H=2\pi RH,\ \text{chunki}\ \lim_{n\to\infty}k_n=R.$$

1-natija. Sfera to'la sirtining yuzi katta doirasi yuzining to'rtlanganligiga teng: $S=4\pi R^2$.

Isbotlash uchun ikkita parallel tekisliklar sferaga urinadigan holni qarash yetarli. U holda $S_{s.n}=2\pi RH$ formulada $H=2R$ ni qo'yamiz, natijada

$$S=2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2$$

hosil bo'ladi.

2-natija. Ikkita sfera sirtlari yuzlarining nisbati ular radiuslari o'lchovlari kvadratlari nisbatiga teng.

Isboti. Aytaylik sferalarning radiuslari R_1 va R_2 bo'lsin. U holda $S_1=4\pi R_1^2$, $S_2=4\pi R_2^2$ bo'ladi va

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2}=\frac{R_1^2}{R_2^2}$$

XULOSA

Quyidagilarni bilishi shart:

1) Skalyar additiv uzluksiz kattalik tushunchasi ta'rifini;
2) Uzluksizlik aksiomalarini;
3) Haqiqiy sonni yaqinlashuvchi juft ketma-ketlik orqali ta'riflashni, yaqinlashish shartlarini;
4) Haqiqiy sonlarni taqqoslashni va asosiy teoremani;
5) Kesma uznunligini o'lchashni, uzunlik o'lchovining invariantligi va additivligi;
6) Yuz o'lchovining umumiy ta'rifini, to'g'ri to'rtburchak va ko'pburchak yuzlari o'lchovining mavjudligini;
7) Hajm o'lchovining umumiy ta'rifini. To'g'ri silindr hajmi o'lchovining mavjudligini. Olingan formula natijalarini.
8) Kaval'eri pritsipi va Simpson formulasi keltirib chiqarishni. Bu formulalarning tatbiqlarini.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Фетисов А.И. Измерение геометрических величин// в книге Методика преподавания геометрии, под ред. А.И.Фетисова. М.: Tросвещение 1967. стр.200-268.
2. Гусев В.А., Иванов А.И., Шебалин О.Д. Изучение величин на уроках математики и физики в школе. М.: Просвещение. 1981.-79с.
3. Колмогоров А.Н. Величина//Математическая энциклопедия. Том 1. М.: 1977. стр.651.
4. Turgunbayev R.M. Allambergenov I.X Ketma-ketliklar. TDPU 2010.
5. Азларов.Т. Мансуров.Х Математик анализ.Тошкент.1994. 20-109 бетлар.