Ўзбекистон республикаси қишлоқ ва сув хўжалиги вазирлиги
Тошкент ирригация ва мелиорация институти

Олий математика кафедраси

Олий математика фанидан
“Операцион ҳисоб тадбиқи”
бўйича
Услубий қўлланма

Тошкент-2006 йил.

Ушбу услубий қўлланма Институт илмий-услубий кенгашининг 29 март 2006 йилда бўлиб ўтган 6-сонли мажлисида кўриб чиқилди ва чоп этишга рухсат берилди.

Услубий қўлланмада Операцион ҳисоб курсининг асосий формулалари (оригиналдан тасвирга ва тасвирдан оригиналга ўтиш), чизиқли дифференциал тенгламаларни операцион ҳисоб усуллари билан ечиш масалалари, мустакил ишлаш учун мисол ва масалалар вариантлари (жавоблари билан) ёритилган бўлиб, бакалавр йўналишда таълим олаётган талабаларга мўлжалланган.

Тузувчи: Т. Қодирбеков, доц.

Тақризчилар: М.Хушвақтов,
Тошкент Давлат Педагогика Университети,
“Математик анализ” кафедра мудири, доц.
А. Сайфутдинов, доц.

Тошкент ирригация ва мелиорация институти.
2006 йил.

Кириш

Бу услубий қўлланма ТИМИ талабалари учун ёзилган бўлиб, у икки қисмдан иборат.

Биринчи қисмда: операцион ҳисоб таърифи, оригиналнинг биргиналиги теоремаси, тасвир чизиқлиги ҳоссаси, силжиш ва кечикиш теоремалари, тасвирни дифференциаллаш, боғланиш теоремаси каби асосий теоремалар ва тушунчалар мисоллар ёрдамида ёритилган.

Иккинчи қисмда: оригинал бўйича тасвирни ва тасвир бўйича оригинални топишга доир мисоллар; операцион ҳисобнинг механика, физика, электротехника, техника масалаларини ечишишга тадбиқи кўрилган.

Операцион ҳисобнинг чизиқли тенгламалар системасини ечишга доир назарий маълумотлар алоҳида кўрилиб, электротехника масалалари билан таминланган.

Барча мисол ва масалалар жавоблар билан таъминланган бўлиб, унинг баъзиларига кўрсатмалар берилган.

Операцион ҳисоб ва унинг баъзи бир тадбиқлари

Математик анализнинг энг муҳим соҳаларидан бири операцион ҳисоб бўлади. Операцион ҳисоб физика, механика, электротехника, автоматика, телемеханика соҳаларида кенг фойдаланилади.

§1. Бошланғич функция ва унинг тасвири

Бизга $t \geq 0$ (ёки $-\infty < t < \infty$, лекин $f(t)=0$, $t<0$ да) бўлганда аниқланган бўлакли узлуксиз $f(t)$ функция берилган бўлиб, $0 \leq t < \infty$ да M ва s_0 - ўзгармаслар мавжудки:

$$|f(t)|<Me^{s_0 t}, \qquad (1)$$

ҳар қанлдай t да ўринли бўлади.

Бундай $f(t)$ функцияни e^{-pt} ҳақиқий ўзгарувчи t нинг комплекс функциясига (P=a+bi, a>0, $i=\sqrt{-1}$)
кўпайтмаси

$$f(t)e^{-pt} \qquad (2)$$

ни олиб, уни $0 \leq t < \infty$ да итеграллаймиз, яъни

$$\int_{-}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt = \int_{-}^{\infty} e^{at} f(t)(\cos bt - i\sin bt)dt$$

ни қараймиз. Бу ҳосмас интеграл, f(t) функция юқоридаги шартни қаноатлантирганда ва $a > s_0$ бўлса, мавжуд ва абсолют яқинлашувчи бўлади. Бу хосмас интеграл p нинг функцияси бўлади ва уни F(p) билан белгилаймиз.

$$F(p) = \int_{-}^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \qquad (3)$$

Бундай F(p) функцияга, f(t) функциянинг тасвири; f(t) функцияга бошланғич ёки оригинал дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t)$$

ёки

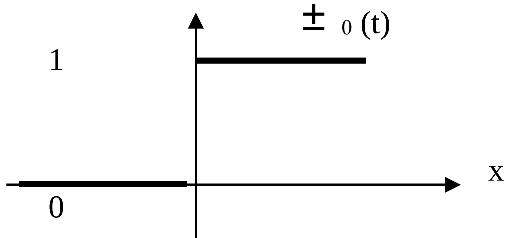
$$f(t) \xleftarrow{\bullet} F(p)$$

Оригинал биргиналиги теоремаси. Агарда φ(t), ψ(t) узлуксиз функциялар биргина F(p) тасвирга эга бўлса, бу функциялар ўзаро тенг бўлади.

§2 $\pm_0$ (t), sint, cost функцияларнинг тасвирлари

1. $\pm_0(t) = \begin{cases} 1, \text{агарда } t \geq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, \text{агарда } t<0 \text{ бўлса,} \end{cases}$

функцияга Хевисайданинг бирлик функцияси дейилади. Бу функция графиги қуйидагича:



бўлади.(3) формулага асосан бу функция тасвири га тенг.

$$\pm_0(t) \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p}$$

$$\sin t \xrightarrow{\bullet} \frac{1}{p^2+1}; \cos t \xrightarrow{\bullet} \frac{p}{p^2+1}$$

2. Шунингдек:
бўлади.

Изоҳ. Агарда $F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t)$ бўлса, $\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \xrightarrow{\bullet} f(at)$ бўлади. Бу формулага кўра:

$$\frac{a}{p^2+a^2} \xrightarrow{\bullet} \sin at, \quad \frac{p}{p^2+a^2} \xrightarrow{\bullet} \cos at$$

бўлади.

§3. Тасвир чизиқлиги ҳоссаси

Теорема. Агарда $f(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$ (c_i-ўзгармаслар, i=1,2,…,n) ва

$$F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t), \quad F_i(p) \xrightarrow{\bullet} f_i(t)$$

бўлса,

$$F(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p), \qquad (4)$$

бўлади.

1-Мисол. f(t)=3sin4t-2cos5t функция тасвири топилсин.

Ечиш. Юқоридаги изоҳ ва (4) формулаларга асосан:

$$3\frac{4}{p^2+16}-2\frac{p}{p^2+25}\xrightarrow{\bullet}3\sin 4t-2\cos 5t$$

2-Мисол. Тасвири $F(p)=\frac{5}{p^2+4}+20\frac{p}{p^2+9}$ бўлган оригинални топинг.

Ечиш. $F(p)=\frac{5}{p^2+4}+20\frac{p}{p^2+9}=\frac{5}{2}\frac{2}{p^2+(2)^2}+20\frac{p}{p^2+3^2}$ этиб ёзиб, юқоридаги изоҳ ва (4) формулалардан фойдаланиб.

$$F(p)=\frac{5}{p^2+4}+20\frac{p}{p^2+9}\xrightarrow{\bullet}\frac{5}{2}\sin 2t+20\cos 3t$$ ни хосил қиламиз.

§4. Силжиш теоремаси. Баъзи функциялар тасвирлари

Теорема. Агарда F(p) тасвир, f(t)функция тасвири бўлса, f(p+α) функция $e^{-\alpha t}$ f(t) нинг тасвири бўлади.

Бу ерда $Re(p+\alpha)>s_0$ деб қаралади.

$$\left.\begin{aligned}&\text{Агарда } F(p)\xrightarrow{\bullet} f(t) \text{ бўлса,}\\ &F(p+\alpha)\xrightarrow{\bullet} e^{-\alpha t}f(t)\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

бўлади.

1. $f(t)=e^{-\alpha t}$ бўлса, (3) ва силжиш теоремасига кўра:

$$e^{-\alpha t}\xleftarrow{\bullet}\frac{1}{p+\alpha},\quad(6)$$

бўлади. Шуниндек $f(t)=e^{\alpha t}$ бўлса,

$$e^{\alpha t}\xleftarrow{\bullet}\frac{1}{p-\alpha},\quad(7)$$

бўлади.

2. f(t)= shαt бўлса, (3) ва силжиш теоремасига асосан:

$$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\alpha}-\frac{1}{p+\alpha}\right)\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}\right)=sh\,\alpha t$$

ни хосил қиламиз. Шунингдек f(t)=chαt бўлса,

$$\frac{p}{p^2-\alpha^2}\xrightarrow{\bullet}ch\,\alpha t$$

бўлади.

3. $f(t)=e^{-\alpha t}\sin bt$, $f(t)=e^{-\alpha t}\cos bt$ бўлса, (3) ва (5) формулаларга кўра:

$$\left.\begin{array}{l} e^{-\sim t}\sin bt \xleftarrow{\bullet} \dfrac{b}{(p+\sim)^2+b^2} \\[2em] e^{-\sim t}\cos bt \xleftarrow{\bullet} \dfrac{p+\sim}{(p+\sim)^2+b^2} \end{array}\right\} \quad (8)$$

бўлади.

1-Мисол. Тасвири $F(p)=\dfrac{7}{p^2+10p+41}$ бўлган оригиналнi топинг.

Ечиш. $F(p)=\dfrac{7}{p^2+10p+41}=\dfrac{7}{4}\dfrac{4}{(p+5)^2+4^2}$ деб олиб, (8) формулага асосан:

$$F(p)\xrightarrow{\bullet}\frac{7}{4}e^{-5t}\sin 4t$$

ни ҳосил қиламиз.

2-Мисол. Тасвири $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2+2p+10}$ бўлган оригинал функцияни топинг.

Ечиш. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^2+2p+10}=\dfrac{p+1+2}{(p+1)^2+3^2}=\dfrac{p+1}{(p+1)^2+3^2}+\dfrac{2}{3}\dfrac{3}{(p+1)^2+3^2}$

деб олиб, (8) формулага асосан:

$F(p)\xrightarrow{\bullet}e^{-t}\cos 3t+\dfrac{2}{3}e^{-t}\sin 3t$ ни топамиз.

§5. Тасвирни дифференциаллаш

Теорема. Агарда $F(p)\xrightarrow{\bullet}f(t)$ бўлса,

$$(-1)^n\frac{d^nF(p)}{dp^n}\xrightarrow{\bullet}t^nf(t), \quad (9)$$

бўлади.

Изоҳ. Маълумки,

$$\frac{1}{p}\xrightarrow{\bullet}1$$

Юқоридаги (9) формулага асосан, бу оҳирги формуладан:

$$(-1)\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p^2}\xrightarrow{\bullet}t$$

ни ҳосил қиламиз.

Шунингдек,

$$\frac{2}{p^3}\xrightarrow{\bullet}t^2,$$

$$\frac{3!}{p^4} \xrightarrow{\bullet} t^3 ,$$

………..

$$\frac{n!}{p^{n+1}} \xrightarrow{\bullet} t^n$$, бўлади.

1-Мисол. $F(p) = \dfrac{a}{p^2 + a^2} \xrightarrow{\bullet} \sin at$ бўлса, (9) формулага кўра:

$$(-1)\frac{-2pa}{(p^2 + a^2)^2} \xrightarrow{\bullet} t \sin at$$

ёки

$$\frac{2pa}{(p^2 + a^2)^2} \xrightarrow{\bullet} t \sin at$$

бўлади.

2-Мисол. $F(p) = \dfrac{p}{p^2 + a^2} \xrightarrow{\bullet} \cos at$ бўлса, (9) формулага асосан:

$$(-1)\frac{p^2 + a^2 - 2p^2}{(p^2 + a^2)^2} = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2} \xrightarrow{\bullet} t \cos at$$

ёки

$$-\frac{a^2 - p^2}{(p^2 + a^2)^2} \xrightarrow{\bullet} t \cos at$$

хосил қилинади.

3-Мисол. $F(p) = \dfrac{1}{p + \sim} \xrightarrow{\bullet} e^{-\sim t}$ бўлса, (9) формулага кўра:

$$\frac{1}{(p + \sim)^2} \xrightarrow{\bullet} te^{-\sim t}$$

бўлади.

§6. Ҳосилалар тасвирлари.

Теорема. Агарда $F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t)$ бўлса,

$$pF(p) - f(0) \xrightarrow{\bullet} f'(t), \quad (10)$$

бўлади.

(10)- чи формулада F(p) нинг ўрнига pF(p)-f(0)ни f(t) нинг ўрнига $f'(t)$ ни қўйиб , $f''(t)$ нинг тасвирини топамиз, яъни

$$p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \xrightarrow{\bullet} f''(t)$$

ни аниқлаймиз. n-чи тартибли хосила тасвири қуйидагига кўра топилади.

$$p^nF(p)-\left[p^{n-1}f(0)+p^{n-2}f'(0)+...+pf^{(n-2)}(0)+f^{(n-1)}(0)\right]\xrightarrow{\bullet} f^{(n)}(t) \quad (11)$$

Изоҳ. Юқоридаги ҳосилалар тасвирлари учун ҳосил қилинган формулалар содда холга келади, агар $f(0)=f'(0)=...=f^{(n-1)}(0)=0$ бўлса, яъни

$$F(p)\xrightarrow{\bullet} f(t)$$
$$pF(p)\xrightarrow{\bullet} f'(t)$$
$$.........\,.........\,.......$$
$$p^nF(p)\to f^{(n)}(t)$$

Мисол. $F(p)=\dfrac{a}{p^2+a^2}\xrightarrow{\bullet}\sin at=f(t)$ бўлса, $\cos at$ функция тасвири топилсин.

Ечиш.(10) формулага кўра:

$$p\frac{a}{p^2+a^2}-\sin 0\xrightarrow{\bullet}(\sin at)'=a\cos at$$

ёки

$$\frac{p}{p^2+a^2}\xrightarrow{\bullet}\cos at$$

бўлади.

§7. Боғланиш (свертивания) теоремаси.

Теорема. Агарда $F_1(p)\xrightarrow{\bullet} f_1(t)$ ва $F_2(p)\xrightarrow{\bullet} f_2(t)$ бўлса,

$$F_1(p)F_2(p)\xrightarrow{\bullet}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \quad , (12)$$

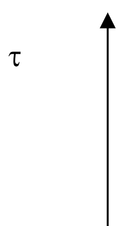
бўлади.

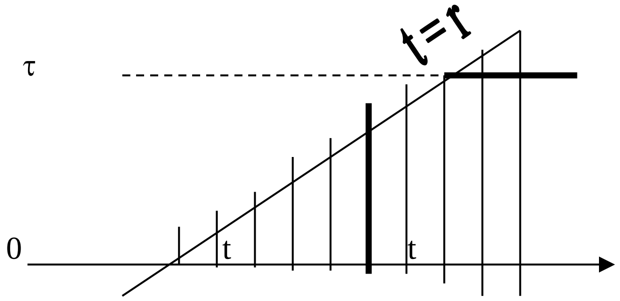
Исботи. $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ функция тасвирини топамиз.

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \xleftarrow{\bullet} \int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_o^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]$$

Оҳирги интеграл икки каррали интеграл бўлиб, τ=0, τ=t соҳа бўйича олинади (шаклига қаранг). Бу интегралда интеграллаш тартибини ўзгартириб, топамиз

$$\int_-^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]dt=\int_-^\infty f_1(\tau)\left[\int_\tau^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)\right]d\tau$$





Ички интегралда t-τ=z алмаштириш ўтказиб, топамиз

$$\int_0^\infty e^{-pt}\left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]dt=\int_0^\infty f_1(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-p(z+\tau)}f_2(z)dz\right]d\tau=$$

$$=\int_0^\infty e^{-p\tau}f_1(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-pz}f_2(z)dz=F_1(p)F_2(p)$$

Шундай қилиб,

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau \xleftarrow{\bullet} F_1(p)F_2(p)$$

1-Изоҳ. $\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ ифодага $f_1(t)$ ва $f_2(t)$ функциялар боғланиши (сверткаси) дейилади. Бунда

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

тенглик ўринли бўлади.

2-Изоҳ. Агарда $F(p)\xrightarrow{\bullet}f(t)$ бўлса,

$$\frac{1}{p}F(p)\xrightarrow{\bullet}\int_0^t f(\tau)d\tau \quad \text{бўлади.}$$

Мисол. $\frac{d^2x}{dt^2}+x=f(t)$ тенгламанинг $t=0$ да $x_0=x_0'=0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. $\bar{x}(p)\xrightarrow{\bullet}x(t)$, $F(p)\xrightarrow{\bullet}f(t)$ бўлса, берилган тенгламадан тасвирий тенгламага ўтиб, топамиз

$$\bar{x}(p)(p^2+1)=F(p)$$

Бундан

$$\bar{x}(p)=\frac{F(p)}{p^2+1}=F(p)\frac{1}{p^2+1} \quad (*)$$

Маълумки,

$$\frac{1}{p^2+1}\xrightarrow{\bullet}\sin t$$

Бу холда (*) да боғланиш теоремасига кўра, $F_1(p) = F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t)$, $F_2(p) = \frac{1}{p^2+1} \xrightarrow{\bullet} \sin t$ эканлигини этиборга олиб, топамиз

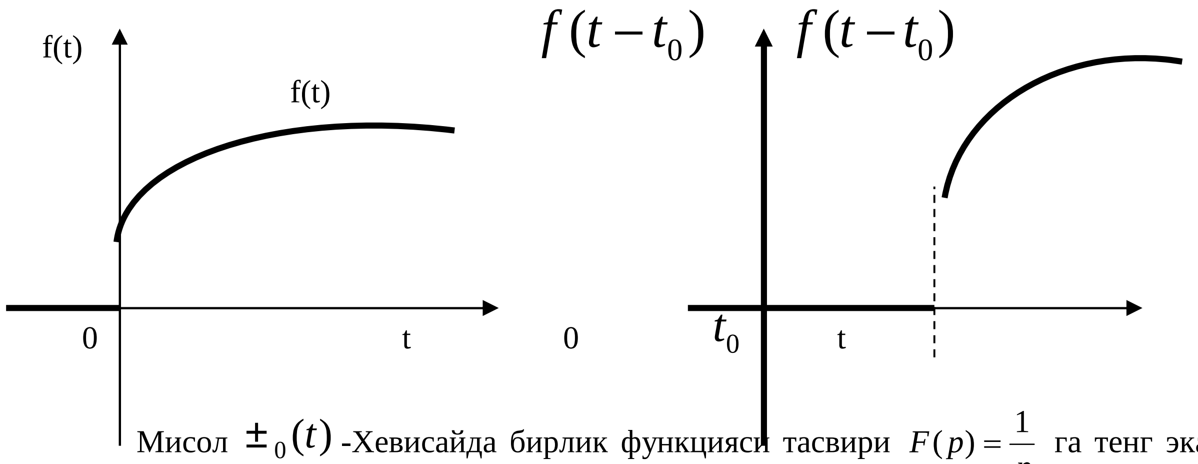
$$x(t) = \int_0^t f(²)\sin(t-²)d²$$

юқоридаги бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ҳусусий ечим бўлади.

§8. Кечикиш (запаздивания) теоремаси.

Теорема. Агарда $\overline{x}(p) \xrightarrow{\bullet} x(t),$ бўлса, $e^{-pt_0}F(p) \xrightarrow{\bullet} f(t-t_0)$ бўлади.

Изоҳ. Агар f(t) = 0, t<0 бўлса, $f(t-t_0) = 0,$ $t < t_0$ да бўлади.
(шаклига қаранг)

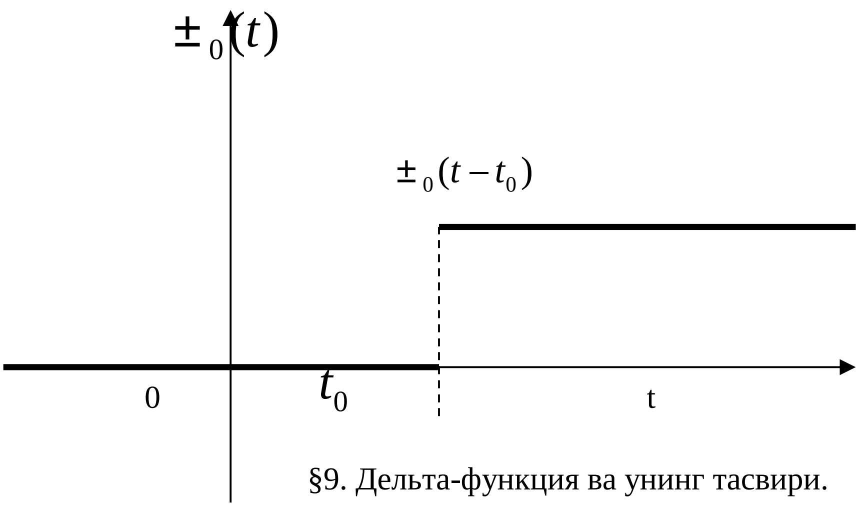


Мисол $\pm_0(t)$ -Хевисайда бирлик функцияси тасвири $F(p) = \frac{1}{p}$ га тенг эканлиги маълум, яъни $\frac{1}{p} \xrightarrow{\bullet} \pm_0(t)$.

Кечикиш теоремасига кўра:

$$\frac{1}{p}e^{-pto} \xrightarrow{\bullet} \pm_o(t-t_0), \qquad (13)$$

бўлади (шаклига қаранг).

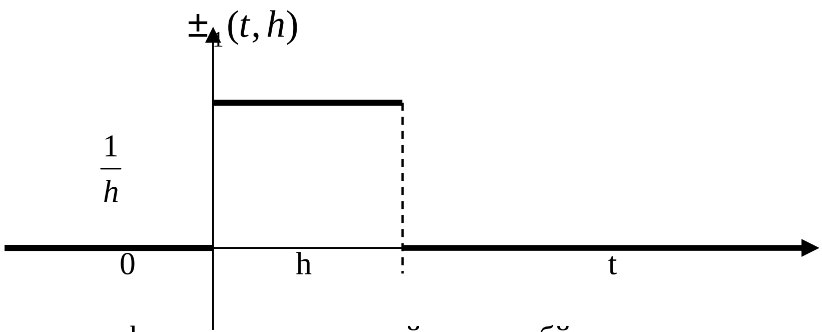


§9. Дельта-функция ва унинг тасвири.

$$\pm_1(t,h)=\frac{1}{h}\left[\pm_0(t)-\pm_0(t-h)\right]=$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{агарда } t<0 \text{ бўлса,}\\ \dfrac{1}{h}, & \text{агарда } 0\le t<h \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агарда } h\le t \text{ бўлса,}\end{cases}$$

функцияни қараймиз (шаклига қаранг).



Бу дельта функция тасвири қуйидагича бўлади

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{p}-e^{-ph}\frac{1}{p}\right)\xrightarrow{\bullet}\pm_1(t,h).$$

Шундай қилиб,

$$\pm_1(t,h)\xleftarrow{\bullet}\frac{1}{p}\frac{1-e^{-ph}}{h}, \quad (14)$$

бўлади.

Механикада оний моментда таъсир қилиб, чекли импульсга эга бўлган куч қаралади. Шу сабабли бундай куч сифатида $\pm_1(t,h)$ функциянинг $h\to 0$ га лимити олинади, яъни

$$\lim_{h\to 0}\pm_1(t,h)=¢(t)$$

Бу $¢(t)$ функцияга дельта функция ёки Дирак функцияси дейилади.

Кўрсатиш мумкинки:

$$\int_{-\infty}^{\infty}¢(t)dt=1, \quad \int_{0}^{0}¢(t)dt=1, \quad (15)$$

$$\lim_{h\to 0}\pm_1(t,h)=\lim_{h\to -}\frac{1}{p}\frac{1-e^{-ph}}{h}=\frac{1}{p}p=1.$$

Демак,

$$1\xrightarrow{\bullet}¢(t).$$

$¢(t-t_0)$ функция- бирлик массага эга бўлган жисмга оний $t=t_0$ моментда тезлиги бирга тенг бўлган импульс берувчи куч деб қаралади.

Кечикиш теоремасига кўра:

$$e^{-pt_0} \xrightarrow{\bullet} ¢\,(t-t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t_0} ¢\,(t-t_0)dt = 1$$

Бўлади.

Юқоридаги (15) формуладан бевосита қуйидагини ҳосил қиламиз

$$±_0(t) = \int_{-\infty}^{t} ¢\,(²)d² = \begin{cases} 0, агарда -\infty < t < 0 \\ 1, агарда 0 \le t < \infty \end{cases}$$

§10. Баъзибир тасвирларнинг жадвали

Т/№	$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$	$f(t)$
1	$1/p$	1
2	$a/(p^2+a^2)$	$\sin a\,t$
3	$p/(p^2+a^2)$	$\cos a\,t$
4	$1/(p+\sim)$	$e^{-\sim t}$
5	$\sim/(p^2-\sim^2)$	$sh\sim t$
6	$p/(p^2-\sim^2)$	$ch\sim t$
7	$a/[(p+\sim)^2+a^2]$	$e^{-\sim t}\sin at$
8	$(p+\sim)/[(p+\sim)^2+a^2]$	$e^{-\sim t}\cos at$
9	$n!/p^{n+1}$	t^n
10	$2pa/(p^2+a^2)^2$	$t\sin a\,t$
11	$(p^2-a^2)/(p^2+a^2)^2$	$t\cos a\,t$
12	$1/(p+\sim)^2$	$te^{-\sim t}$
13	$1/(p^2+a^2)^2$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$(-1)^n d^n F(p)/dp^n$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)F_2(p)$	$\int_0^t f_1(²)\,f_2(t-²)d²$

16	$\frac{®}{2} - arctg\,\frac{p}{a}$	sinat/t
17	$n!/(p-\sim)^{n+1}$	$t^n e^{\sim t}$

§11.Оригинал бўйича тасвирни ва тасвир бўйича оригинални топиш.

1 $f(t) = 3^t$ функция тасвирини топинг.

Ечиш. Берилган функцияни $f(t) = 3^t = e^{t\ln 3}$ кўринишда ёзамиз ва жадвалдаги 4 пунктдан фойдаланиб $(-\sim = \ln 3)$.

$$f(t) = 3^t \overset{\bullet}{\longleftarrow} \frac{1}{p - \ln 3}$$

ни ҳосил қиламиз.

2 $f(t) = e^t \sin^2 t$ функция тасвирни аниқланг.

Ечиш. $f(t) = e^t \sin^2 t = \frac{1}{2} e^t (1 - \cos 2t)$ бўлгани учун, жадвалдаги пункт 4 ва 8 га кўра:

$$f(t) = e^t \sin^2 t \overset{\bullet}{\longleftarrow} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{p-1}{(p-1)^2 + 4}\right)$$

ни топамиз.

3 $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ функция тасвирини топинг.

Ечиш $\sin t \overset{\bullet}{\longleftarrow} \frac{1}{p^2+1}$ бўлгани учун, жадвалдаги 2 пунктга кўра:

$$\frac{\sin t}{t} \overset{\bullet}{\longleftarrow} \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = arctgp \Big|_p^\infty = \frac{®}{2} - arctgp$$

4 а) f(t)=sinαt·chβt, б) φ(t)=cosαt·shβt функциялар тасвирини топинг.
Ечиш. Маълумки, жадвалдаги 2 пунктга кўра:

$$\sin(\sim + i\ )t = \frac{\sim + i}{p^2 + (\sim + i\ )^2} = \frac{\sim + i}{p^2 + \sim^2 - \ ^2 + i2\sim} = \frac{(\sim + i\ )(p^2 + \sim^2 - \ ^2 - i2\sim\ )}{(p^2 + \sim^2 - \ ^2)^2 + 4\sim^2\ ^2}$$

ёки

$$\sin\ \sim t \cos\ i\ \ t + \cos\ \sim t \sin\ i\ \ t = \sin\ \sim tch\ \ t + i \cos\ \sim tsh\ \ t \longleftarrow\!\!\!\bullet\!\!\!\longrightarrow$$

$$\longleftarrow\!\!\!\bullet\!\!\!\longrightarrow \frac{\sim\left(p^2 + \sim^2 + \ ^2\right) + i\ \ \left(p^2 - \sim^2 - \ ^2\right)}{\left(p^2 + \sim^2 - \ ^2\right)^2 + 4\sim^2\ ^2}$$

Бундан чизиқлилик хоссасига кўра :

$$\sin \sim t \cdot ch\ \ t = \frac{\sim\left(p^2 + \sim^2 + \ ^2\right)}{\left(p^2 + \sim^2 - \ ^2\right)^2 + 4\sim^2\ ^2},$$

$$\cos \sim tsh\ \ t = \frac{\left(p^2 - \sim^2 - \ ^2\right)}{\left(p^2 + \sim^2 - \ ^2\right)^2 + 4\sim^2\ ^2}$$

5. $f(t) = \dfrac{\sin t}{|\sin t|}$ функциянинг тасвирини топинг.

Ечиш. Бу функция 2π даврили функция, шу сабабли

$$\frac{\sin t}{|\sin t|} \longleftarrow\!\!\!\bullet\ F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt = \int_0^{2®} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt + \int_{2®}^{\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt =$$

$$= \int_0^{2®} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt + e^{-2p®} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt = \int_0^{2®} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt + e^{-2p®} F(p)$$

Бундан

$$\frac{\sin t}{|\sin t|} \longleftarrow\!\!\!\bullet\ \frac{1}{1 - e^{-2p®}} \int_0^{2®} e^{-pt} \frac{\sin t}{|\sin t|} dt = \frac{1}{1 - e^{-2p®}} \left[\int_0^{®} e^{-pt} dt - \int_{®}^{2®} e^{-pt} dt\right] =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-2p®}} \left[\frac{1}{p}\left(1 - e^{-p®}\right) - \frac{e^{-p®}}{p}\left(1 - e^{-p®}\right)\right] = \frac{1}{1 - e^{-2p®}}\ \ \frac{1}{p} \cdot \left(1 - 2e^{-p®} + e^{-2p®}\right) =$$

$$\frac{\left(1 - e^{-p®}\right)^2}{p\left(1 - e^{-2p®}\right)} = \frac{\left(1 - e^{-p®}\right)^2}{p\left(1 - e^{-p®}\right)\left(1 + e^{-p®}\right)} = \frac{1}{p} \frac{1 - e^{-p®}}{1 + e^{-p®}}$$

Шундай қилиб, 2π даврили $f(t) = \dfrac{\sin t}{|\sin t|}$ функция тасвири:

$$\frac{\sin t}{|\sin t|} \longleftarrow\!\!\!\bullet\ \frac{1}{p}\ \ \frac{1 - e^{-p®}}{1 + e^{-p®}}$$

бўлади.

6.

$$f(t)\begin{cases} t, & 0 \le t \le a \text{ бўлса,} \\ 2a-t, & a< t < 2a \text{ бўлса,} \\ 0, & t < 0 \text{ ва } t \le 2a \text{ бўлса} \end{cases}$$

Функциянинг тасвирини топинг.

Ечиш: Берилган функцияни $\sigma_0(t)$ Хевисайда функцияси ёрдамида қуйидагича ёзамиз:

$$f(t) = t\pm_0(t) - 2(t-a)\pm_0(t-a) + (t-2a)\pm_0(t-2a)$$

Бундан тасвирга ўтсак:

$$f(t) \overset{\bullet}{\longleftarrow} \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2}e^{-ap} + \frac{1}{p^2}e^{-2ap} = \frac{1}{p^2}\left(1-e^{-ap}\right)^2$$

бўлади.

Энди тасвирдан оргиналга ўтишга доир мисоллар кўрайлик.

7. $F(p) = \dfrac{p+2}{p^2+2p+10}$ функция оргиналини топинг.

Ечиш.

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+10} = \frac{p+2}{p^2+2p+1+9} = \frac{p+2}{(p+1)^2+3^2} =$$

$$\frac{p+1+1}{(p+1)^2+3^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2+3^2} + \frac{1}{(p+1)^2+3^2} \overset{\bullet}{\longrightarrow} e^{-t}\cos 3t + \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t.$$

Шундай қилиб, $F(p) = \dfrac{p+2}{p^2+2p+10} \overset{\bullet}{\longrightarrow} f(t) = e^{-t}\left(\cos 3t + \dfrac{1}{3}\sin 3t\right)$

8. $F(p) = \dfrac{(p-1)(p^2+1)+p}{(p^2-1)(p^2-2p+2)}$ функция оргиналини аниқланг.

Ечиш: $F(p) = \dfrac{(p-1)(p^2+1)+p}{(p^2-1)(p^2-2p+2)}$ рационал каср функция махражи иккита ҳақиқий ва иккита комплекс илдизларга эга бўлгани учун уни:

$$F(p) = \frac{(p-1)(p^2+1)+p}{(p^2-1)(p^2-2p+2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2-2p+2}$$

кўринишда ёзиб,

$$p^3 - p^2 + 2p - 1 = (A+B+C)p^3 + (-A-3B+D)p^2 +$$
$$+(4B+C)p + 2A - 2B - D$$

тенгликни хосил қиламиз. Бундан:

$$\left.\begin{aligned} p^3&:\ 1=A+B+C,\\ p^2&:\ -1=-A-3B+D,\\ p^1&:\ 2=4B+C,\\ p^0&\ \ -1=2A-2B-D \end{aligned}\right\}$$

системани ҳосил қиламиз. Системани ечиб, $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{2}$, C=0, D=1 ларни топамиз.

Демак,

$$F(p) = \frac{(p-1)(p^2+1)+p}{(p^2-1)(p^2-2p+2)} = \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{p^2-2p+2} =$$
$$= \frac{p}{p^2-1} + \frac{1}{p^2-2p+2} = \frac{p}{p^2-1} + \frac{1}{(p-1)^2+1}$$

Оргиналга ўтсак:

$$f(t) = cht + e^t \sin t.$$

9. $F(p) = \dfrac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)}$ функция оргинали топилсин.

Ечиш: F(p) функцияни оддий рационал касрлар йиғиндиси кўринишда ёзиб оламиз (Махраж h=0, p=1, p=2, p=3 хақиқий илдизларга эга).

$$F(p) = \frac{p+1}{p(p-1)(p-2)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{p-2} + \frac{D}{p-3}$$

Бундан юқаридаги каби номаълум коэффициентларини аниқласак:

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = 1, \quad C = -\frac{3}{2}, \quad D = \frac{2}{3}.$$

Демак,

$$F(p) = -\frac{1}{6p} + \frac{1}{p-1} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{p-3}$$

бўлади. Бундан оргинални аниқлаймиз.

$$f(t) = -\frac{1}{6} + e^t - \frac{3}{2}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{3t}$$

10. $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)^4}$ функция оригиналини топинг.

Ечиш. Жадвалдаги 17 пунктга асосан:

$$F(p)=\frac{1}{(p+1)^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{(p+1)^4}=\frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{(p+1)^{3+1}}$$

Бундан

$$F(p)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3!}{(p+1)^4}\xrightarrow{\bullet}\frac{1}{6}t^3e^{-t}$$

§12. Операцион ҳисобнинг техника масалаларига тадбиқи.

1. $f'''(t)-2f''(t)+3f'(t)-f(t)$ ифоданинг $f(0)=f'(0)=0,\quad f''(0)=1$ шартларни қаноатлантирувчи тасвирини топинг.

Ечиш. Маълумки: $f(t)\xleftarrow{\bullet}F(p)$, $\quad f'(t)\xleftarrow{\bullet}pF(p)-f(0)$,

$$f''(t)\xleftarrow{\bullet}p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

$$f'''(t)\xleftarrow{\bullet}p^3F(p)-f(0)p^2-f'(0)p-f''(0).$$

Шу сабабли берилган ифоданинг тасвири:

$$f'''(t)-2f''(t)+3f'(t)-f(t)\xleftarrow{\bullet}p^3F(p)-1-2p^2F(p)+$$

$$+3pF(p)-F(p)=(p^3-2p^2+3p-1)F(p)-1$$

бўлади.

2. $f'(t)+2f(t)-\int_0^t f(t-{}^2)\sin{}^2d{}^2$

ифоданинг тасвирини топинг, агарда $f(0)=1$ бўлса.

Ечиш. Ҳосила тасвири ва жадвалдаги 15 пунктга асосан:

$$f'(t)\xleftarrow{\bullet}pF(p)-1,$$

$$\int_0^t f(t-{}^2)\sin{}^2d{}^2\leftarrow F(p)\frac{1}{p^2+1}$$

бўлгани учун

$$f'(t)+2f(t)-\int_0^t f(t-{}^2)\sin{}^2d{}^2\xleftarrow{\bullet}pF(p)-1+2F(p)-\frac{1}{p^2+1}F(p)=$$

$$=\left(p+2-\frac{1}{p^2+1}\right)F(p)-1$$

бўлади.

3. $y'' + y' - 2y = e^{-x}$ тенгламанинг $y(0) = 0,$ $y'(0) = 1$ шартларни қаноатлантирувчи ечими (хусусий) топилсин.

Ечиш. $y(x) \xleftarrow{\bullet} F(p)$ бўлсин. Бу ҳолда берилган тенгламада тасвирга ўтсак:

$$y''(t) \xleftarrow{\bullet} p^2F(p) - py(o) - y'(o) = p^2F(p) - 1;$$

$$y'(t) \xleftarrow{\bullet} pF(p) - y(o) = pF(p);$$

$e^{-x} \xleftarrow{\bullet} \dfrac{1}{p+1}$ бўлиб, тасвири тенглама

$$p^2F(p) - 1 + pF(p) - 2F(p) = \frac{1}{p+1}$$

кўринишни олади.Бундан:

$$F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p^2 + p - 2)} = \frac{p+2}{(p+1)(p-1)(p+2)} = \frac{1}{p^2 - 1}$$

ни топамиз. Бундан оргиналга ўтиб, бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим (жадвалдаги 5-чи пунктга қаранг):

$$y(x) = shx = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$$

топилади.

4. $y'' + y = x\cos 2x$

дифференцал тенгламанинг $y(o) = y'(o) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. $y(x) \xleftarrow{\bullet} F(p)$ деб олиб, берилган тенгламада тасвирга ўтамиз.

$$p^2F(p) + F(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2}$$ (11-жадвалга қаранг)

ёки

$$(p^2 + 1)F(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2} = \frac{A}{(p^2 + 4)^2} + \frac{B}{p^2 + 4}$$

Бундан:

$P^2 - 4 = A + B(p^2 + 4),$ B=1; A=-8.

Демак,

$$(p^2 + 1)F(p) = \frac{1}{p^2 + 4} - \frac{8}{(p^2 + 4)^2}$$

Бу охиргисидан топамиз:

$$F(p) = -\frac{5}{9} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{p^2 + 4} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{(p^2 + 4)^2}$$

Оргиналга ўтиб, жадвалдаги 2, 13 пунктларга асосан ечимини топамиз.

$$y(x) = -\frac{5}{9}\sin x + \frac{5}{18}\sin 2x + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2x - x\cos 2x\right)$$

5. $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$ дифференциал тенгламанинг $x = 0$ да $y(o) = y_o$, $y'(o) = y'_o$ бошланғич шартларни каноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. $y(x) \overset{\bullet}{\longleftarrow} \bar{y}(p)$ $f(x) \overset{\bullet}{\longleftarrow} F(p)$ деб қараб, берилган тенглама учун тасвири тенгламани тузамиз

$$\bar{y}(p)\left(p^2 + a_1 p + a_2\right) = y_o p + y'_o + a_1 y_0 + F(p)$$

Бундан:

$$\bar{y}(p) = \frac{y_o p + y'_o + a_1 y_o}{p^2 + a_1 p + a_2} + \frac{F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} =$$

$$= \frac{(p + a_1)y_0 + y'_0}{\left(p + \frac{a_1}{2}\right)^2 + a_2 - \frac{a_1^2}{4}} + \frac{F(p)}{\left(p + \frac{a_1}{2}\right)^2 + a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$$

Охирги тенгликда, жадвалдаги 8 ва 15 пунктларга асосан оргиналга ўтсак:

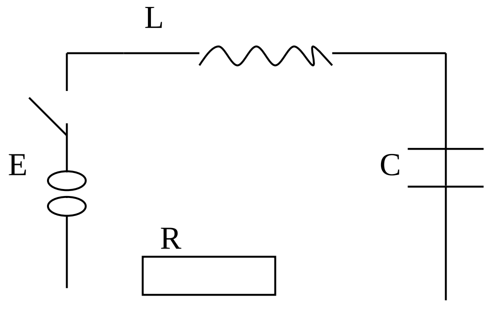
$$y(x) = e^{-\frac{a_1}{2}t}\left[y_0 \cos\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}x + \frac{y'_0 + \frac{y_0 a_1}{2}}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}}\sin\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}x\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}}\int_0^x f(t)e^{-\frac{a_1}{2}(x-t)}\sin\sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}(x-t)dt$$

хусуси ечим хосил бўлади.

Изоҳ. Бу мисолдаги тенглама механик ёки занжирдаги электрик тебранма ҳаракатни ифода этиб, $f(x) = 0$ бўлса, эркин тебранма ҳаракат хосил бўлади ва ечим охирги ифода ўнг томонидаги биринчи кўшилувчи орқали, $y_0 = y'_0 = 0$ бўлса, иккинчи кўшилувчи билан ёзилади.

6.Индуктивлиги L, сигими C ва қаршилиги R бўлиб, кетма–кет ўланган занжирга э.ю.к. E ўланади (шаклига каранг.



Занжирдаги ток в кондесатордаги заряд q_0 нолга тенг . Занжирдаги токнинг вақтга боглиқлигини топинг.

Ечиш. $i = i(t)$, занжирдаги э.ю.к. қўшилгандан кейинги ток бўлсин. Бу холда катушка қисқичидаги кучланиш- $L\frac{di}{dt}$, кондесатордаги кучланиш- $\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$ ва қаршиликдаги кучланиш- iR булиб, Кирхгоф қонунига асосан занжирдаги токнинг ҳаракат тенгламаси

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E$$

бўлади. i(t) тасвири I(p) бўлсин, яъни

$$i(t) \overset{\bullet}{\longleftarrow} I(p)$$

Бу холда тасвири тенглама қуйдаги кўринишни олади

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right)I(p) = \frac{E}{p}$$

бундан:

$$I(p) = \frac{E}{L\left(p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}\right)}$$

Агарда $p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0$ тенглама ечиб, илдизларни топсак:

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

бўлиб,

$$I(p) = \frac{E}{L}\frac{1}{(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{E}{2L(p_1-p_2)}\left(\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2}\right) =$$

$$= \frac{E}{2L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}}\left(\frac{1}{p-p_1} - \frac{1}{p-p_2}\right)$$

Бундан оргиналга ўтиб,

$$i(t) = \frac{E}{2L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\left(e^{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t} - e^{-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t}\right) =$$

$$= \frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}}e^{-\frac{R}{2L}t}sh\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}t \qquad (16)$$

Агарда $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ бўлса, охирги ифодадан i(t) ни ҳисобласа бўлади;агарда $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ булса,

$sh\left(i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t\right) = \sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t$ булиб,

$$i(t) = \frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t$$

кўринишга келади. Бу холда, охирги ифодадан кўринадики, занжирда сунувчи тебранма ҳаракат $\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ частота билан вужудга келади.

Критик холда, яъни $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ бўлганда $i(t)$ ни (16) да $\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \to 0$ ёки $R \to 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ га лимитни ҳисоблаб (Лопитал қоидасига асосан) топамиз.

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}$$

7. Индуктивлиги L, қаршилиги R, сигими C бўлиб, кетма –кетуланган занжирга э.ю.к. E_1, 0< t ≤ T; E_2, T< t ўланган. Бошланғичток ва заряд нолга тенг деб қаралади. Хар қандай t да занжирдаги ток аниқлансин.

Ечиш. $i(t)$-занжирдаги ток,

$$\pm(t) = \begin{cases} \pm_0(t), & 0 < t \le T \\ \pm_o(t - T), & T < t \end{cases}$$

Хевисайда бирлик функцияси бўлсин. Бу холда (мисол 6 га қаранг) занжирдаги токнинг харакат тенгламаси

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_o^t i(^2)d^2 = E_1\pm_0(t) + (E_2 - E_{1)})\pm_0(t - T)$$

бўлади.

$i(t) \leftarrow\!\!\bullet\!\!- I(p)$ деб қараб, тасвирий тенгламага ўтсак:

$$\left(Lp + R + \frac{1}{Cp}\right)I(p) = \frac{E_1}{p} + \frac{E_2 - E_1}{p}e^{-pT}$$

ни хосил қиламиз. Бундан:

$$I(p)=\frac{E_1}{L\left(p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{CL}\right)}+\frac{(E_2-E_1)e^{-pT}}{L\left(p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{CL}\right)}=$$

$$=\frac{E_1}{L\left[\left(p^2+\frac{R}{L}p+\frac{R^2}{4L^2}\right)+\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}\right]}+\frac{\left(E_2-E_1\right)e^{-pT}}{L\left[\left(p^2+\frac{R}{L}p+\frac{R^2}{4L^2}\right)+\frac{1}{CL}-\frac{R^2}{4L^2}\right]}=$$

$$=\frac{E_1 n}{nL\left[\left(p+«\right)^2+n^2\right]}+\frac{\left(E_2-E_1\right)e^{-pT}\cdot n}{nL\left[\left(p+«\right)^2+n^2\right]}$$

Бу ерда $« =\frac{R}{2L},\ \ n^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\left(n\ \ >0\right)$

Юқоридаги жадвалга кўра, бу охирги тенгламада оргиналга ўтсак:

$$i(t)=\frac{E_1}{nL}e^{-«t}\sin nt-\frac{E_1-E_2}{nh}e^{-«(t-T)}\sin n\left(t-T\right)$$

занжирдаги ток t га боғлик этиб топилди.

§13.Ореарацион ҳисобнинг чизиқли тенгламалар системасини ечишга тадбиқи.

Операцион ҳисоб бўйича чизиқли, ўзгармас коэффицентли тенгламалар системасини ечиш схемаси оддий дифференциал тенгламани ечиш каби бажарилади. Агарда иккинчи тартибли дифференцал тенгламалар системаси берилган бўлиб,

$$\sum_{k=i}^{n}\left(a_{ik}\frac{d^2x_k}{dt^2}+b_{ik}\frac{dx_k}{dt}+c_{ik}x_k\right)=f_i\left(t\right), \quad (1)$$

бу ерда a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} –ўзгармаслар, бу системани

$$x_k\left(0\right)=\sim_k, \quad x'_k\left(0\right)=\ \ _k, \qquad (2)$$

бошланғич шартларга кўра ечиш талаб этилса, $X_k\left(p\right), Fi(p)$ лар билан мос равишда $x_k\left(t\right)$ ва $f_i(t)$ функцияларнинг тасвирларини белгилаб, (1) системадан (2) шартларга кўра тасвирий системага ўтамиз

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}p^2+b_{ik}p+c_{ik}\right)X_k(p)=F_i(p)+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(a_{ik}p+b_{ik}\right)\sim_k+a_{ik}\ \ _k\right], \quad (3)$$

(i=1, 2, 3,…,n)

(3) –алгебраик тенгламалар системасини $X_k(p)$ ларга нисбатан ечиб, хосил бўлган тенгламалардан $x_k(t)(k=1,2,3,...,n)$ оргиналларга ўтамиз. Бу хосил бўлган функциялар (1) системанинг (2) шартларни қаноатлантирувчи ечим бўлади.

1. $$\begin{cases} x'' + 3x - 3y = 3z, \\ y'' + y = x \\ z'' = -z \end{cases}$$

тенгламалар системасининг

$$x(0) = x'(0) = 0,$$
$$y(0) = 0, y'(0) = -1,$$
$$z(0) = 1, z'(0) = 0$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

Ечиш. Берилган системада тасвирий кўринишга ўтсак:

$$p^2 X = 3(Y - X + Z),$$
$$p^2 Y = X - Y - 1,$$
$$p^2 Z = -Z + p,$$

бу ерда $X \xrightarrow{\bullet} x(t), Y \xrightarrow{\bullet} y(t), Z \xrightarrow{\bullet} z(t),$ бўлади.

Охирги тасвирий системани X, Y, Z ларга нисбатан ечиб, топамиз:

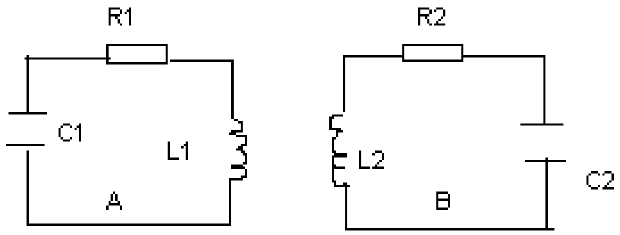
$$X(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)},$$
$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1},$$
$$Z(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Бундан оригиналга ўтиб ечим хосил қилинади.

$$x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t,$$
$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t,$$
$$z(t) = \cos t /$$

2 Иккита А ва В занжирлар ўзаро индукция коэффиценти m бўлган магнитли алоҳида. А занжирнинг ўзи индукцияланиши коэффиценти, қаршилиги ва сиғими мос равишда L_1,R_1 ва C_1 га тенг бўлиб, В занжир учун бўлар мос равишда L_2R_2 ва C_2 бўлсин. Агарда занжирларнинг қаршиликлари R_1 ва R_2 лар жуда кичик , индукция ва сиғимлари орасида C_1 R_1=C_2L_2 тенглик ўринли бўлса (бу тенглик ўринли бўлганда, А ва В занжирлар «унисон» холатга келтирилган дейилади), А занжирдаги ток кучини вақт функцияси этиб топинг. А занжирдаги ток кучи бошланғич моментда нолга тенг.

Ечиш. $i_1(t)-A$ занжирдаги ток миқдори $i_2(t)-B$ занжирдаги ток миқдорининг t-вақтдаги қиймати бўлсин (шаклига қаранг.)



А Занжирда қиймати $m\frac{di_2}{dt}$ бўлган э.ю.к., ўзи индукцияланиш э.ю.к. миқдори $L_1\frac{di_1}{dt}$ ва кондесатордаги кучланиш миқдори $\frac{Q}{C_1}=\frac{1}{C_1}\int i_1(t)dt$ лар пайдо бўлади. Ҳаракат тенгламасини А занжири учун тузсак:

$$m\frac{di_2}{dt}+L_1\frac{di_1}{dt}+\frac{1}{C_1}\int i_1(t)dt+R_1i_1=0$$

бўлади.

Худди шунгдек, В занжирдаги токнинг ҳаракат тенгламаси:

$$m\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}+\frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt+R_2i_2=0$$

Шундай қилиб, тенгламалар системаси

$$\begin{cases} m\frac{di_2}{dt}+L_1\frac{di_1}{dt}+R_1i_1+\frac{1}{C_1}\int i_1(t)dt=0, \\ m\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}+R_2i_2+\frac{1}{C_2}\int i_2(t)dt=0 \end{cases}$$

Бу системада $i_1(t)\overset{\bullet}{\longleftarrow}I_1(p), i_2(t)\overset{\bullet}{\longleftarrow}I_2(p)$ деб олиб, тасвирий системани аниқлаймиз:

$$\begin{cases} m\left(pI_2(p)-i_2^0\right)+L_1pI_1(p)+R_1I_1(p)+\frac{1}{C_1p}I_1(p)=0, \\ mI_1(p)+L_2(pI_2(p)-i_2^0)+R_2I_2(p)+\frac{1}{C_2p}I_2(p)=0. \end{cases}$$

Бундан $I_2(p)$ ни чиқариб ташлаб, топамиз:

$$m\left(p\frac{L_2 i_2^0 - mpI_1(p)}{L_2 p + R_2 + \frac{1}{C_2 p}} - i_2^0\right) + L_1 pI_1(p) + R_1 I_1(p) + \frac{1}{C_1 p} I_1(p) = 0$$

ёки

$$\frac{\left(L_1 C_1 p^2 + R_1 C_1 p + 1\right)\left(L_2 C_2 p^2 + R_2 C_2 p + 1\right) - mC_1 C_2 p^4}{C_1 p\left(L_2 C_2 p^2 + R_2 C_2 p + 1\right)} I(p)$$

$$\frac{C_2 R_2 i_2^0 p + i_2^0}{L_2 C_2 p^2 + R_2 C_2 + 1}$$

Масала шартига кура $R_{1,} R_2$ лар жуда кичик, уларни этиборга олмаймиз ва $C_1 L_1 = C_2 L_2$ бўлгани учун , охирги тенгликдан мураккаб бўлмаган алмаштиришлар ўтказиб,

$$I_1(p) = \frac{C_1 p i_2^0}{L_1^2 C_1^2 p^4 + 2L_1 C_1 p^2 + 1 - m^2 C_1 C_2 p^4} =$$

$$= \frac{\frac{C_1 i_2^0}{L_1^2 C_1^2} p}{\left(p^2 + \frac{1}{L_1 C_1}\right)^2 - \frac{m^2 C_1 C_2}{L_1 C_1} p^4}$$

ни топамиз. Бунда $a^2 = \frac{m^2}{L_1 L_2}, b^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ деб белгилаб,

$$I_1(p) = \frac{C_1 i_2^0}{b^2} \cdot \frac{p}{\left(1 - a^2\right)p^4 + 2b^2 p^2 + b^4}$$

ни хосил қиламиз. Индукция коэффиценти *m*, ўз индукцияланиш коэффицентлари L_1 ва L_2 лардан кичик бўлгани учун $o < a^2 < 1$ ва охирги тенгликни

$$I_1(p) = \frac{C_1 i_2^0}{b^2(1 - a^2)} \frac{p}{\left(p^2 + \frac{b^2}{1 + a}\right)\left(p^2 + \frac{b^2}{1 - a}\right)}$$

этиб ёзамиз. Оргиналга ўтсак:

$$i_1(t) = \frac{2aC_1 i_2^0}{\left(1 - a^2\right)^2}\left(\cos\frac{bt}{\sqrt{1 - a}} - \cos\frac{bt}{\sqrt{1 + a}}\right)$$

бўлади.

§14. Мустақил ишлаш учун мисол ва масалалар.

I Қуйидаги функцияларнинг тасвирлари топилсин:

1) $t^n e^{a t}$ ж. $\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$

2) $\int_0^t \sin t dt$ ж. $\frac{1}{(p^2+1)p}$

3) $\int_0^t \cos \mu t$ ж. $\frac{1}{p^2+\mu^2}$

4) $(t-1)^2 e^{t-1}$ ж. $\frac{2}{(p-1)^3} e^{-p}$

5) $\cos^3 t$ ж. $\frac{3p}{4(p^2+1)} + \frac{p}{4(p^2+9)}$

6) $\int_0^t \frac{\sin t}{t} dt$ ж. $\frac{1}{p} arctgp$

7) $\int_0^t \cos^2 \mu t dt$ ж. $\frac{p^2+2\mu^2}{(p^2+4\mu^2)p^2}$

8)t sint ж. $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$

9) tcost ж. $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$

10) $\sin^2 t$ ж. $\frac{2}{p(p^2+4)}$

11) $\frac{e^t-1}{t}$ ж. $\ln \frac{p}{p-1}$

12) $\sin 3(t-2)$ ж. $e^{-2p} \frac{3}{p\ \ +9}$

13) $\cos mt \cos nt$ ж. $\frac{(p^2+m^2+n^2)p}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n}$

14) $\int shtdt$ ж. $\frac{1}{\left(p^2-1\right)p}$

15) $sh(t-\sim)$ ж. $e^{-\sim p} \Big/ p^2-1$

II Қуйдаги тасвирий функцияларнинг оригиналлари топилсин.

1) $F(p)=\frac{1}{p^2+4p+5}$ ж. $e^{-2t}\sin t$

2) $F(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}$ ж. $\frac{1}{2}\left(\sin t-t\cos t\right)$

3) $F(p)=\frac{p}{\left(p^2+1\right)^2}$ ж. $\frac{1}{2}t\sin t$

4) $F(p)=\frac{1}{p\left(1+2p+p^2\right)}$ ж. $1-e^{-t}-te^{-t}$

5) $F(p)=\frac{1}{7-p+p^2}$ ж. $\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{\frac{t}{2}}\sin\frac{3\sqrt{3}}{2}7$

6) $F(p)=\frac{2p^3+p^2+2p+2}{p^3\left(p^2+2p+2\right)}$ ж. $\frac{t^2}{2}+2e^{-t}\sin t$

7) $F(p)=\frac{1}{p^2\left(p^2+1\right)}$ ж. $t-\sin t$

8) $F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p-2)\left(p^2+4\right)}$ ж. $\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{-t}+\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t$

9) $F(p)=\frac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}$ ж. $\frac{3}{2}e^{-\frac{t}{2}}\left(\sin t-t\cos t\right)$

10) $F(p)=\frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$ ж. $e^{-t}(1-t^2)$

11) $F(p)=\frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}$ ж. $(t-3)e^{-(t-3)}\pm_0(t-3)$

12) $F(p)=\frac{e^{-p}}{p(p-1)}$ ж. $e^{t-1}¢_0(t-1)-\pm_0(t-1)$

13) $F(p)=\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$ ж. $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{t^k}{p!}$

14) $F(p)=\dfrac{2p+3}{p\left(p^2+4p+5\right)}$ ж. $\dfrac{3}{5}+\dfrac{e^{-2t}}{5}\left(4\sin t-3\cos t\right)$

15) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$

ж. $\dfrac{1}{2}e^{t-1}\sin 2(t-1)\pm_0(t-1)+\cos 3(t-2)\pm_0(t-2)$

III Диференцал тенгламаларни ечинг:

1) $x'''+x'=1$, $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ ж. $x(t)=t-\sin t$

2) $x''+2x'+x=\sin t;$ $x(0)=0, x'(0)=-1$ ж. $x(t)=\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-te^{-t}-\cos t\right)$

3) $x'''+x'=t;$ $x(0)=x''(0)=0, x'(0)=-1$ ж. $x(t)=\dfrac{1}{2}t^2-1+\cos t-\sin t$

4) $x''+x'=\cos t;$ $x(0)=0, x'(0)=0$ ж. $x(t)=2+\dfrac{1}{2}\left(e^{-t}-\cos t+\sin t\right)$

5) $x''-x'=te^t;$ $x(0)=x'(0)=0.$ ж $x(t)=e^t\left(1-t+\dfrac{1}{2}t^2\right)-1$

6) $x''+x=te^t+4\sin t;$ $x(0)=x'(0)=0$ ж. $x(t)=e^t(t-1)+(1-2t)\cos t+2\sin t$

7) $x''-3x'+2x=e^t;$ $x(0)=x'(0)=0.$ ж. $x(t)=e^{2t}-(1+t)e^t$

8) $x'''+x=\dfrac{1}{2}t^2e^t;$ $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ ж. $x(t)=\dfrac{1}{4}e^t\left(t^2-3t+\dfrac{3}{2}\right)$

9) $x''+x=t\cos 2t;$ $x(0)=x'(0)=0$ ж. $x(t)=\dfrac{4}{9}\sin 2t-\dfrac{5}{9}\sin t-\dfrac{1}{3}t\cos 2t$

10) $x'' - 4x = \sin\frac{3}{2}t\sin\frac{1}{2}t;$ $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$ ж. $x(t) = \frac{83}{80}ch2t - \frac{1}{10}\cos t + \frac{1}{16\cos 2t.}$

11) Массаси m=2 бўлган моддий нуқта туғри чизиқли тебранма ҳаракат қилади. Ҳаракат ох ўқи бўйлаб, координата бошидан нуқтагача бўлган масофага пропорционал тикловчи (восстанавливать) куч (пропорционаллик коэффиценти 8 га тенг) ва кўзғатувчи (возмущать) куч $F = 4\cos t$ таъсирида бўлади. Нуқтанинг харакат қонуни топилсин, агарда t=0 да x=0 ва v=0 бўлса.

Кўрсатма: харакат тенгламаси Даламбер принципига кўра $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 2\cos t$ бўлади.

ж. $x(t) = \frac{2}{3}(\cos t - \cos 2t)$

12) Қайиқга v_0=6м/сек тезлик берилди. Ҳаракат бошлангандан 69 сек ўтгач бу тезлик икки марта камайди. Қайиқнинг ҳаракат қонуни топилсин, агарда сувнинг қаршилик кучи қайиқнинг тезлигига тўғри пропорционал бўлса (пропорционаллик коэффиценти k га тенг).

Кўрсатма. Ҳаракат тенгламаси Даламбер принципига кўра:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}$$

$$x(0)=0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 6$$

ж. $x(t) = 600\left(1 - e^{-0,01t}\right)$

13) Сиғими C ва ўзиндукцияланиши L бўлиб, кетма-кет уланган занжирга t=0 моментда E $\cos(µt + ~)$ э.ю.к. қўшилди. Бошланғич ток ва заряд нолга тенг . Занжирдаги токнинг ҳаракат тенгламасини t момент учун ёзиб, токнинг

$$E[µ\sin(tµ + ~) - n\cos ~ \sin nt - µ\sin ~ \cos nt]\frac{1}{L(µ^2 - n^2)},$$

бу ерда $n^2 = \frac{1}{LC};\quad n^2 \neq µ^2,$ га тенг эканлигини кўрсатинг.

Кўрсатма. Ҳаракат тенгламаси:

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(²)d² = E\cos(µt + ~),$$

$$i(0) = 0$$

бўлади.

14) Қаршилиги R, ўзиндукцияланиш L занжирга $E\sin(µt + ~)$ э.ю.к. қўшилди. Бошланғич ток нолга тенг. Занжирдаги токнинг t вақтдаги қиймати.

$$E\left[\sin(¥ - ~)e^{-\frac{Rt}{L}} + \sin(µt + ~ + ¥)\right](R^2 + L^2µ^2)^{-\frac{1}{2}},$$

бу ерда $tg¥ = \frac{\mu L}{R}$, га тенг эканлиги кўрсатилсин.

Кўрсатма. Токнинг ҳаракат тенгламаси:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\sin(\mu t + \sim),$$

$$i(0) = 0$$

бўлади.

15) Координата бошидан v_0 бошланғич тезлик билан ох ўқи йўналишида электрон отилиб чиқади. Агарда магнит майдонининг кучланиши Н- ўзгармас ва оху текислигига перпендикуляр йўналишда бўлса, электроннинг ҳаракат қонуни топилсин.

Кўрсатма. Электрон харакат тенгламаси:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{eH}{c}\frac{dy}{dt,} \qquad x(0) = 0, \frac{dx(0)}{dt} = v_0;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{eH}{c}\frac{dx}{dt}, \qquad y(0) = \frac{dy(0)}{dt} = 0$$

$$x(t) = \frac{v_0 mc}{eH}\sin\frac{eH}{mc}t, \quad y(t) = \frac{mcv_0}{eH}\left(1 - \cos\frac{eH}{mc}t\right),$$

бу ерда е, с электрон массаси ва унинг магнит майдонидаги тезлигига боғлиқ бўлган ўзгармаслар.

Электрон траекторияси тенгламаси:

$$x^2 + y^2 - \frac{2mcv_0}{eH}y = 0$$

бўлади.

Фойдаланилган адабиётлар руйхати:

1. Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике, ИЛ, 1948.
2. М.Л. Краснов и Г.И. Макаренко, Операционное исчисление. Устойчивость движения, Москва, Наука, 1956.
3. Ян Микусинский, Операторное исчисление, ИЛ, 1956
4. П.Е. Данко и др, Высшая математика в упражнениях и задачах, Москва, Высшая школа, 1980.

Мундарижа:

Қодирбеков Туропбой.

Олий математика фанидан «Операцион ҳисоб тадбики»
бўйича (Услубий қўлланма)

Муҳаррир: М.Нуртоева

Босишга рухсат этилди__________
Қоғоз ўлчами 60 х84 1/16
Ҳажми 2,5 б.т 50 нусҳа буюртма

ТИМИ босмахонасида чоп этилди.

Тошкент 700000. Қори Ниёзий кўчаси 39 уй.