

O`zbekiston Respublikasi oliy va o`rta maxsus  
ta`lim vazirligi

Buxoro Oziq-ovqat va yengil sanoat  
texnologiyasi instituti

*“Mexanika” kafedrasi*

“Nazariy mexanika”  
fanidan

“NUQTANING HARAKAT QONUNLARINI BERILISH TURLARI, DEKART KOORDINATA  
O`QLARIDAN TABIIY O`QLARGA O`TISH VA NUQTANING TABIIY O`QLARDAGI HARAKATIDA  
UNING TEZLIGI VA TEZLANISHINI ANIQLASH” mavzusida

# REFERAT

Bajardi:

18-08 – EE guruh  
talabasi Ro`ziyev M.

Qabul qildi:

ass. Bo`ronov S

## Nuqtaning harakat qonunlarini berilish turlari.

Nuqtaning harakatini o'rganishni uch xil usulda olib boriladi: tabiiy o'qlar orqali, koordinata o'qlari va vektor usulida.

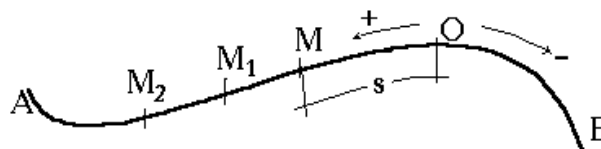
### a) Nuqta harakati qonunini tabiiy o'qlarda berilishi.

Faraz qilaylik birorta nuqta fazoda ixtiyoriy egri yoki to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilayotgan bo'lsin. Shu harakatning izini kinematikada traektoriya deb ataladi. Agar traektoriya to'g'ri chiziqdan iborat bo'lsa to'g'ri chiziqli harakat deyiladi, egri chiziqdan iborat bo'lsa egri chiziqli harakat deyiladi.

Masalan, soydagi suvda birorta to'p oqib ketayotgan bo'lsa, shu soyning egriligi to'pning traektoriyasi hisoblanadi. Endi shu soyning bo'yida birorta daraxtni yoki boshqa qo'zg'almas bo'lgan jismni tanlab olaylik, va shu to'pning harakatini ana shu nuqtadan boshlab o'lchab borsak, malum vaqt ichida qancha yo'l bosib o'tganligini aniqlaymiz, u orqali uning tezligini aniqlanadi, agar oqish tezligi go' tez, go'i sekin bo'lsa, yani tezligi o'zgaruvchan bo'lsa uning tezlanishini ham aniqlaymiz.

O'sha tanlab olingan qo'zg'almas nuqta, tabiiy o'qning boshi hisoblanadi va u nuqtani O harfi bilan belgilanadi. Shu nuqtadan boshlab, o'qning musbat yoki manfiy taraflarini o'zimiz belgilab olamiz. O'qning boshidan birorta tomonga qilingan harakatni musbat deb tanlasak, unga teskari tomonga qilingan harakat manfiy harakat deb belgilanadi, va shunga qarab tegishli ishoralar bilan belgilanadi. (10.1 shakl)

Shu to'pni o'rniga motorli qayiqni olaylik, uning traektoriyasi ham shu soyning o'zani bo'ylab yo'nalgandir, yoki tramvay vagonini olsak, u faqat shu temir yo'l usti bo'ylab harakat qilaoladi xolos, yani ularning traektoriyalari oldindan malum bo'ladi.



10.1 shakl.

Mexanika fanida to'p, qayiq, tramvay kabi so'zlarni faqat masalalar echayotganimizda aytiladi xolos, harakatning nazariyasini o'rganishda ularning hammasini bir so'z bilan yani nuqta, yoki qattiq jism deb ataladi. Uning malum t - vaqt o'tgandagi o'rnini belgilovchi funksiya, shu nuqtaning harakat qonuni deyiladi, va quyidagicha yoziladi,

$$s=f(t) \quad (10.1)$$

masalan  $s=3t^2-5t+2$  m. ko'rinishda bo'lsa, t - vaqtni o'rniga istalgan sekundni qo'ysak shu vaqtda nuqta tabiiy o'qning qaysi joyida ekanligini aniqlashimiz mumkin.

Masalan t=0 sekundda nuqtaning tabiiy o'qdagi koordinatasi  $s=3 \cdot 0^2-5 \cdot 0+2=2$  metr ekan, t=1 sekundda  $s=3 \cdot 1^2-5 \cdot 1+2=0$  metr, yani koordinata boshiga kelar ekan, demak harakat boshlanganda nuqta o'qning boshlanish joyidan 2 metr musbat tomonda joylashgan ekan, mexanika tilida nuqtaning boshlang'ich holati deyiladi va lotincha  $S_0=2$  deb yoziladi.

Bundan ko'rinib turibdiki, yuqoridagi qonuniyat bosib o'tilgan masofani emas, balki nuqta qaysi vaqtda tabiiy o'qning qaysi joyida ekanligini aniqlab beradi xolos. Agar nuqta har doim o'qning bir tomoniga qarab harakatlansa, u holda (10.1) formula orqali bosib o'tilgan yo'lni hisoblab chiqarsa bo'laveradi.

Agar nuqta orqaga va oldiga qaytma harakat qilganda (10.1) tenglama orqali o'tilgan yo'lni hisoblab bo'lmaydi. Buning uchun (10.1) tenglamadan vaqt bo'yicha hosila olinadi, agar funksiyaning ekstremal qiymatlari bo'lsa, shu qiymatlar oralig'idagi vaqtlar uchun alo'ida alo'ida yo'lni aniqlab, ularni algebraik qo'shiladi.

Masalan, yuqoridagi  $s = 3t^2 - 5t + 2$  funksiya dan vaqt bo'yicha bir marta hosila olaylik  $\dot{s} = 6t - 5$ , ushbu tenglamani nolga tenglab, vaqtga nisbatan echib ekstremal nuqtaga kelguncha o'tilgan vaqtni topamiz, yani  $t = 5/6$  c. Demak nuqta 5/6 sekund vaqt o'tganda o'zining harakat yo'nalishini o'zgartirar ekan, yani tezligi nolga teng bo'lar ekan.

Shu sababli 0 dan to 5/6 sekund vaqt o'tguncha bosib o'tilgan masofani aniqlaylik, buning uchun nuqtaning  $t = 5/6$  sekunddagi koordinatasini aniqlaylik  $s = 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{6} + 2 = -\frac{1}{12}$  metr. Endi bosib o'tilgan yo'l  $\sigma = |s - s_0| = \left| -\frac{1}{12} - 2 \right| = 2\frac{1}{12}$  metr manfiy tomonga yurilgan ekan, o'tilgan yo'l manfiy bo'lmasligi sababli, biz uni absolyut qiymatini olamiz.

So'ngra shu  $t = 5/6$  vaqtda u to'xtab, musbat tomonga qarab harakat qiladi, va o'zining boshlang'ich holatiga qaytguncha  $4\frac{1}{6}$  metr yo'lni bosib o'tar ekan.

Bularga asoslanib yo'lni aniqlash uchun quyidagi tenglamani yozamiz,

$$\begin{cases} \sigma = |3t^2 - 5t| & 0 \leq t \leq \frac{5}{6} \\ \sigma = 3t^2 - 5t + 4\frac{1}{6} & \frac{5}{6} < t \leq \infty. \end{cases} \quad (10.2)$$

Ushbu tenglamalar sistemasidan ko'rinib turibdiki, yo'lni aniqlash vaqtga bog'liq ravishda ikki xil tenglama bilan hisoblanar ekan. Agar (10.1) funksiya yuqori tartibli bo'lsa, uning ekstremal nuqtalari ham ko'p bo'ladi, shunga ko'ra har bir masala uchun tegishli qonuniyat chiqarish mumkin.

harakat qonunini nolga tenglab, qaysi vaqtlarda nuqta koordinata boshida bo'lishligini aniqlash mumkin, yani  $s = 3t^2 - 5t + 2 = 0$ . Bu kvadrat tenglamalarni echib ikkita ildizni aniqlaymiz, yani  $t_1 = 2/3$  c,  $t_2 = 1$  c. Biz yuqorida aniqladikki nuqta  $t = 5/6$  c. vaqt o'tguncha o'qning manfiy tomoniga qarab harakatlanib o'qning  $s = -1/12$  m. koordinatasida to'xtab so'ngra orqaga yani musbat tomonga qarab harakatni davom etar ekan.

Koordinata boshidan ikki marta o'tar ekan, birinchi marta  $t_1 = 2/3$  c. vaqt o'tganda, ikkinchi marta  $t_2 = 1$  c. Nuqta koordinata boshiga ikkinchi marta kelguncha jami bo'lib  $\sigma = 13/6$  metr yo'l bosib o'tar ekan. harakat boshlanishida, yani  $t = 0$  c. sekundda, nuqta o'qning  $s_0 = 2$  m, koordinatasida ekanligini aniqladik. Endi shu koordinataga nuqta necha sekunddan keyin yana qaytib kelishini aniqlash uchun, harakat qonunini 2 -ga tenglab, uning ildizlarini aniqlaylik,

$$3t^2 - 5t + 2 = 0, \quad \text{bundan} \quad 3t^2 - 5t = 0, \quad t(3t - 5) = 0, \quad \text{bundan} \quad t_1 = 0 \text{ c.}, \quad t_2 = 5/3 \text{ c.}$$

Demak  $t_2=5/3$  c vaqt o'tgandan keyin nuqta o'zining birinchi holatiga yana qaytib kelishida bosib o'tgan yo'lni (10.2) formula orqali aniqlaymiz,

$$\sigma = 3 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{3} + 4 \cdot \frac{1}{6} = 4 \frac{1}{6} \text{ metr.}$$

b) Nuqta harakatini koordinata o'qlari usulida berilishi. Ko'p xollarda nuqtaning traektoriyasi oldindan malum bo'lmaydi, faqat har bir koordinata o'qlari bo'ylab uning harakat qonuni berilgan bo'ladi. Agar nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlansa bitta koordinata o'q, tekislikda harakatlansa koordinata o'qlari ikkita bo'ladi, fazoda harakatlansa koordinata o'qlari uchta bo'ladi, va har bir o'qlar bo'yicha harakat qonunlari berilgan bo'ladi.

Masalan harakat qonunlari,

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=f(t) \quad (10.3)$$

$$\text{yoki} \quad x=3t^2-5t+2, \quad y=2\sin\pi t, \quad z=6t+5 \quad (10.4)$$

ko'rinishda berilgan bo'lsa, ular orqali nuqtaning malum  $t$  - vaqtdagi  $x, y, z$  Dekart koordinata o'qlaridagi tegishli holatini aniqlash mumkin xolos. Agarda bosib o'tilgan yo'lni aniqlash zarur bo'lsa, har bir koordinata o'qi bo'yicha yuqoridagi kabi tegishli tenglamalar sistemasini yozib chiqiladi, ularni amaliy darslarda ko'rib o'tiladi.

Agar nuqta faqat bitta tekislikda harakatlansa, uning harakat qonuni ikkita o'qlar orqali yoziladi, masalan

$$x=f_1(t), \quad y=f_2(t), \quad z=0 \quad (10.5)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar nuqta faqat to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlansa, uning harakat qonuni bitta o'q orqali yoziladi, masalan

$$x=f_1(t), \quad y=z=0 \quad (10.6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Yuqoridagi (10.1), (10.4), (10.5), (10.6) tenglamalarning o'ng tomonidagi ifodalar vaqtga bog'liq ravishda o'zgaruvchan bo'lganligi uchun, bunday tenglamalarni parametrik tenglamalar deyiladi.

Agarda shu nuqtaning harakatini traektoriyasini aniqlash zarur bo'lsa, u holda (10.3) tenglamalardan vaqt  $t$ -ni yo'qotilib, ularning o'rniga ikkita funksiya olinadi, yani  $y=f(x)$  va  $z=f(x)$  lar hosil qilinadi, va ularni nuqta traektoriyasining tenglamalari deyiladi.

Tekislikda harakatlansa uning traektoriyasini aniqlash uchun (10.4) tenglamalardan vaqt  $t$ -ni yo'qotilib, ularning o'rniga bitta funksiya olinadi, yani traektoriya tenglamasi bitta  $y=f(x)$  funksiyadan iborat bo'ladi.

Traektoriya bo'ylab harakat qonunini aniqlash uchun, koordinata o'qlaridan tabiiy o'qlarga o'tish zarur bo'ladi.

### **3. Dekart koordinata o'qlaridan tabiiy o'qlarga o'tish.**

Faraz qilaylik, biror nuqtaning harakati koordinata usulida berilgan bo'lib, tabiiy o'qlarga o'tkazish zarur bo'lsin.

U holda  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$  bo'lganligidan  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  ni aniqlaymiz. Demak yo'lni aniqlash uchun harakat qonunining differensialini aniqlash zarur ekan, so'ngra shu differensiallarni ildiz ostidagi funksiyaga qo'ysak,

$$ds = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt, \quad (10.6)$$

kelib chiqadi, bu erda  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ , (10.6) formulani integrallab, nuqtaning tabiiy o'qlardagi harakat qonunini aniqlaymiz.

So'ngra shu aniqlangan harakat qonuni orqali yuqoridagi kabi tegishli yo'llar bilan, bosib o'tilgan yo'lning parametrik tenglamasini tuzishimiz mumkin.

Masala. Nuqta harakatining qonuni quyidagi tenglamalar orqali ifodalangan bo'lib,

$$x = 2 \cdot a \cdot \cos^2 \frac{kt}{2}, \quad y = a \sin kt \quad (10.a)$$

shu nuqtaning traektoriyasini va shu traektoriya bo'ylab harakat qonuni aniqlansin. Bu erda  $a$ - va  $k$ -lar o'zgarmas qiymatlar.

Echish: Masalani echishni nuqtaning traektoriyasini aniqlashdan boshlaymiz, buning uchun quyidagi trigonometrik o'zgartirishlar kiritamiz,

$$\sin kt = 2 \sin \frac{kt}{2} \cdot \cos \frac{kt}{2} \quad \text{ёки} \quad y = a \sin kt = 2a \sin \frac{kt}{2} \cdot \cos \frac{kt}{2}$$

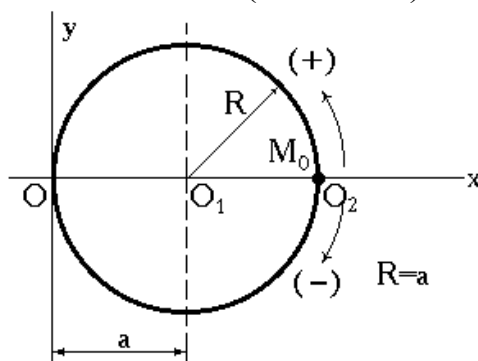
bunga asosan (10.a) tenglamani quyidagicha yozib olamiz,

$$x = 2 \cdot a \cdot \cos^2 \frac{kt}{2}, \quad y^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{kt}{2} \cdot \cos^2 \frac{kt}{2}, \quad \text{ёки} \quad y^2 = 2 \cdot a \cdot x \cdot \sin^2 \frac{kt}{2} \quad (10.b)$$

(10.b) tenglamalarning birinchisi va oxirgisi orqali,

$$x + \frac{y^2}{x} = 2 \cdot a \quad \text{бундан} \quad x^2 + y^2 = 2ax, \quad \text{ёки} \quad (x - a)^2 + y^2 = a^2 \quad (10.s)$$

demak nuqtaning traektoriyasi, markazi  $Ox$  o'qining  $a$  - nuqtasida joylashgan radiusi  $a$  - ga teng bo'lgan aylanadan iborat ekan (10.2 shakl).



10.2 shakl.

Shaklda  $O$  nuqta Dekart koordinatalarning boshi,  $O_1$  - nuqta traektoriyaning markazi,  $O_2$  - nuqta tabiiy o'qlarning boshi qilib belgilangan.

Endi shu traektoriya bo'ylab harakat qonunini aniqlaymiz, buning uchun (10.a) tenglamalarni differensiallaymiz,

$$\begin{aligned} dx &= -2a \cos \frac{kt}{2} \sin \frac{kt}{2} = -ak \sin kt \cdot dt, \\ dy &= ak \cos kt \cdot dt \\ ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(-ak \sin kt)^2 + (ak \cos kt)^2} = akdt \end{aligned} \quad (10.d)$$

Oxirgi tenglamani integrallab, nuqtaning shu aylana shaklidagi traektoriya bo'ylab harakat qonunini aniqlaymiz,

$$\int ds = ak \int dt \Rightarrow s = akt + C_1 \quad (10.e)$$

Endi harakat boshlanganda nuqta traektoriyaning qayerida joylashganligini aniqlash uchun, (10.a) tenglamalardagi  $t$  - vaqtga nol qiymat berib,  $x_0$  va  $u_0$  - larni aniqlaymiz,

$$x_0 = 2 \cdot a \cdot \cos^2 \frac{k \cdot 0}{2} = 2a, \quad y_0 = a \sin k \cdot 0 = 0 \quad (10.f)$$

Demak harakat boshlanganda nuqta traektoriyaning, Ox o'qida yotgan  $x_0=2a$ , yani  $O_2$  nuqtada joylashgan ekan.

Endi tabiiy o'qlarning boshlang'ich nuqtasini, qayerda tanlab olishimizga bog'liq ravishda harakat qonunidagi integral doimiysi  $S_1$  - ni aniqlaymiz. Agar tabiiy o'qlarning koordinata boshi deb,  $x_0=2a$  va  $u_0=0$  nuqtani tanlab olsak,  $t=0$  c. da  $s=0$  m. bo'ladi, bularni (10.e) formulaga qo'ysak  $S_1=0$  ga teng bo'ladi,  $s_0=ak \cdot 0 + C_1=0 \Rightarrow C_1=0$  demak nuqtaning harakat qonuni,

$$s = akt \quad (10.e)$$

tenglama orqali ifodalanar ekan.

Tabiiy o'qning koordinata boshi sifatida Dekart o'qlarining boshini tanlab olsak, u holda  $t=0$  c. da  $s_0=\pi \cdot R = \pi \cdot a$  - ga teng bo'ladi, va harakat qonuni,  $s_0=ak \cdot 0 + C_1 = \pi \cdot R \Rightarrow C_1 = \pi \cdot R = \pi \cdot a$  bo'ladi, demak nuqtaning harakat qonuni  $s = akt + \pi \cdot a$  ga teng bo'ladi, yoki,

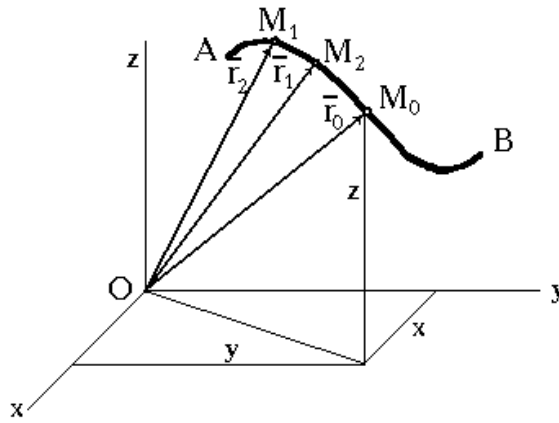
$$s = a(kt + \pi) \quad (10.f)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Nuqtaning traektoriya bo'ylab to'liq bir marta aylanib chiqishi uchun ketgan vaqtni aniqlash uchun, yani nuqtani  $\varphi=2\pi$  radianga burilishi uchun ketgan vaqt  $T$  - ni aniqlaymiz,

$$\varphi = kT = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{k} \quad (10.g)$$

v) Nuqtaning harakat qonunini vektor usulida berilishi. Aksariyat hollarda harakat qonuni *vektor usulida* beriladi. U qanday usul degan savolga quyidagicha javob berish mumkin. Faraz qilaylik biror nuqta ixtiyoriy egri chiziqli traektoriya bo'ylab fazoda harakat qilayotgan bo'lsin. Biz birorta  $O$  nuqtani koordinata boshi deb tanlab olaylik va shu nuqtadan boshlab harakatlanayotgan nuqttagacha strelka chiziq o'tkazaylik, shu chiziq nuqtaning radius vektori deyiladi.



10.3 shakl.

U holda  $t=0$  vaqtdagi strelkaning o'rnini  $r_0$  deb belgilasak,  $t=1$  sekund vaqtdagi o'rnini  $r_1$ ,  $t=2$  sekund vaqtdagi o'rnini  $r_2$  va hokazo (10.3 shakl), tartibda belgilab chiqsak, so'ngra shu strelkalarining (radius vektorlarning) oxirgi uchlarini tutashtiruvchi egri chiziq AV - godograf deyiladi, va nuqtaning traektoriyasini belgilaydi. Ummumiy holda quyidagi vektor tenglama orqali ifodalanadi,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \text{yoki} \quad \vec{r} = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k} \quad (10.7)$$

ko'rinishda yoziladi.

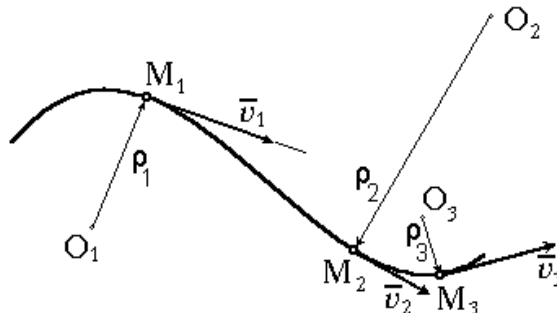
Bu erdagi  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  - lar Ox, Oy va Oz o'qlarning yo'naltiruvchi koordinata ortlari deyiladi, ularning son qiymatlari (modullari)  $i=j=k=1$ -ga teng bo'lib, o'z oldilaridagi funksiyaning moduliga hech qanday tasir ko'rsatmagan holda, ularni malum o'q bo'ylab yo'naltiruvchi vektor koeffitsientdan iborat.

### **1. Nuqtaning tabiiy o'qlardagi harakatida uning tezligi va tezlanishini aniqlash**

Tabiiy o'qlarda nuqtaning tezligini aniqlash uchun uning harakat qonunidan vaqt bo'yicha bir marta hosila olinadi, yani

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (11.1)$$

ga teng bo'ladi. Nuqtaning tezligi vektor qiymat bo'lib, uning yo'nalishi doimo harakat tomonga yo'nalgan bo'lib, traektoriyaga urinma holda bo'ladi (11.1 shakl). Nuqta egri chiziqli harakat qilganda uning oniy egrilik radiuslari -  $\rho$ , turlicha bo'lib  $O_1, O_2, O_3$  nuqtalarda tegishlicha  $-\rho_1, -\rho_2, -\rho_3$  larga teng bo'ladi.

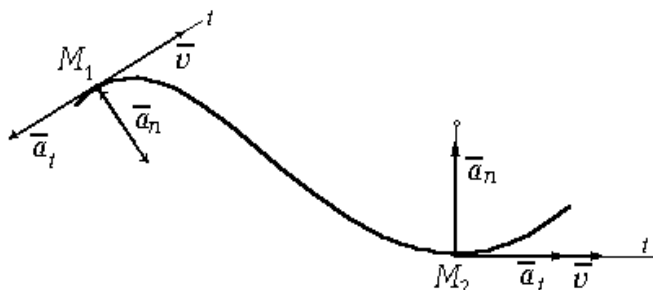


11.1 shakl.

Tabiiy o'qlarda nuqtaning to'liq tezlanishi, ikkita vektor tashkil etuvchilardan iborat bo'ladi. Bittasi urinma tezlanish vektori bo'lsa, ikkinchisi normal tezlanish vektori deyiladi. Urinma tezlanish vektori quyidagicha aniqlanadi, uning moduli

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad (11.2)$$

ga teng bo'lib, yo'nalishi nuqtaning traektoriyasiga urinma holda bo'ladi.



11.2 shakl.

Agar nuqta tezlanuvchan harakat qilayotgan bo'lsa, (11.2 shakl)  $M_2$  holat sodir bo'lib, urinma tezlanishning moduli musbat ishorali bo'ladi va tezlik vektori bilan ustma ust yotadi. Agar sekinlanuvchan harakat qilayotgan bo'lsa,  $M_1$  holat sodir bo'lib, urinma tezlanishning moduli manfiy ishorali bo'lib, tezlik vektoriga qarama qarshi tomonga yo'naladi.

Normal tezlanish vektorining moduli quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad (11.3)$$

va u har doim nuqta traektoriyasining botiq tomoniga qarab yo'naladi, va nuqtaning tezlik vektoriga nisbatan perpendikulyar ravishda yo'nalgan bo'ladi (11.2 shakl).

Nuqtaning to'liq tezlanishining moduli Pifagor teoremasi orqali aniqlanadi,

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} \quad (11.4)$$

Agar nuqta to'g'ri chiziqli traektoriya bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsa, normal tezlanish nolga teng bo'ladi, chunki to'g'ri chiziqlarning radiusi cheksizlikka teng bo'lib,  $\rho = \infty$  (11.3) formulaning chap tarafi  $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{\infty} = 0$  nolga teng bo'ladi.

Ko'p masalalarda traektoriyaning malum nuqtadagi egrilik radiusini aniqlash zarur bo'ladi, u holda normal tezlanishni aniqlangandan keyin,

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} \quad (11.5)$$

formula orqali hisoblanadi.

Agar nuqta o'zgarmas tezlik bilan egri chiziqli traektoriya bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsa urinma tezlanish nolga teng bo'ladi, chunki bu holda  $v = \text{const}$  bo'ladi, shu sababli undan vaqt bo'yicha olingan hosila nolga teng bo'ladi.

Agar nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab  $\rho = \infty$ , o'zgarmas tezlik  $v = \text{const}$  bilan harakatlanayotgan bo'lsa, uning ham normal, ham urinma tezlanishlari nolga teng bo'ladi, chunki

$v = \text{const}$  ва  $\rho = \infty$  бщганлиги сабабли  $a_\tau = 0$  ва  $a_n = 0$  бщди.

MASALA: Gorizontal yo'nalishdagi  $v_0$  - boshlang'ich tezlik bilan otib yuborilgan nuqta,

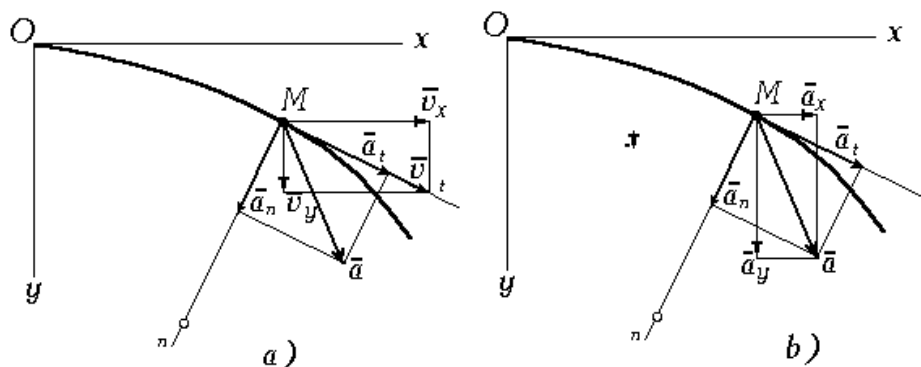
$$x = v_0 \cdot t, \quad y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (11.a)$$

qonuniyat bilan harakat qilmoqda,  $v_0$  va  $g$  - o'zgarmas qiymatlar. Shu nuqta harakatining traektoriyasi, tezligi, urinma va normal tezlanishlari aniqlansin. hamda nuqtaning ixtiyoriy holatidagi oniy egrilik radiusini aniqlash formulasi keltirib chiqarilsin.

Echish: (11.a) tenglamaning birinchisidan vaqt  $t$ -ni,  $x$  orqali ifodalaymiz, so'ngra uni ikkinchisiga qo'yib, nuqtaning traektoriya tenglamasini topamiz,

$$t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 \quad (11.b)$$

Demak nuqtaning traektoriyasi, koordinata boshidan boshlangan paraboladan iborat ekan (11.3a shakl).



11.3 shakl.

11.3a shaklda tezlik vektorining ikki xil ko'rinishi, keltirilgan, tabiiy o'qlarda u faqat urinma o'q bo'ylab yo'naladi, Dekart o'qlarida esa Ox va Oy o'qlaridagi proeksiyalari mavjud bo'lib shaklda ular tasvirlangan.

(11.a) tenglamalardan vaqt bo'yicha bir marta hosila olib, nuqtaning tezligini aniqlaymiz,

$$v_x = \dot{x} = v_0, \quad v_y = \dot{y} = g \cdot t \Rightarrow v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \quad (11.c)$$

(11.c) formuladan ( $t=0$  c.) da nuqtaning tezligi  $v_0$  - ga teng bo'lgan ekan, so'ngra uning moduli muntazam ravishda ortib borar ekan.

(11.a) tenglamalardan vaqt bo'yicha ikki marta hosila olib, nuqtaning tezlanishini aniqlaymiz,

$$a_x = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \ddot{y} = g \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g \quad (11.d)$$

11.3a shaklda to'liq tezlanish vektorining ikki xil ifodasi tasvirlangan bo'lib, tabiiy o'qlarda urinma va normal o'qlar bo'ylab yo'naladi, Dekart o'qlarida esa Ox va Oy o'qlaridagi proeksiyalari mavjud bo'lib shaklda ifodalangan.

Nuqtaning urinma tezlanishiini topamiz, buning uchun (11.s) formuladagi tezlikning funksiyasidan vaqt bo'yicha hosila olamiz,

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 \cdot t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 \cdot t}{v} \quad (11.e)$$

Normal tezlanishni aniqlash uchun, quyidagi vektor tenglamaga murojaat qilamiz,

$$a^2 = a_{\tau}^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n^2 = a^2 - a_{\tau}^2$$

(11.d) va (11.e) tenglamalardan tezlanishlarning qiymatlarini yuqoridagi tenglikka qo'ysak, normal tezlanishning modulini aniqlaymiz,

$$a_n^2 = a^2 - a_{\tau}^2 \Rightarrow a_n^2 = g^2 - \frac{g^4 t^2}{v} \Rightarrow a_n = g \sqrt{1 - \frac{g^2 t^2}{v^2}} = g \sqrt{1 - \frac{g^2 t^2}{v_0^2 + g^2 t^2}}$$

yoki

$$a_n = \frac{g \cdot v_0}{v} \quad (11.g)$$

Nuqtaning oniy egrilik radiusini (11.5) formuladan aniqlaymiz,

$$\rho = \frac{a_n}{v^2} \Rightarrow \rho = \frac{g \cdot v_0^2}{v^3} = \frac{g \cdot v_0^2}{(v_0^2 + g^2 t^2) \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} \quad (11.f)$$

Yuqoridagilardan ko'rinib turibdiki, agarda harakat qonuni berilgan bo'lsa uning traektoriyasini, tezligini, tezlanishini va istalgan vaqtdagi oniy egrilik radiusini aniqlashimiz mumkin ekan

## K-1 topshiriq.

**Berilgan harakat tenglamasi yordamida nuqtaning tezlik va tezlanishini aniqlash.**

M nuqtaning berilgan harakat tenglamasida uning traektoriya kurinishi uratilishi kerak va  $t=t_1$  sekund moment vaqt ichida traektoriyadagi nuqtaning xolati, uning tezligi. urinma va normal hamda to'la tezlanishlari shuningdek traektoriyaning egrilik radiusi aniqlansin.

Masalani yechish uchun berilganlar 2-jadvaldan olinadi.

### 1-masala

Harakat tenglamalari  $x=2t$  (m):  $y= t^2$  (m). bo'lgan moddiy nuqtaning  $t=2$  sekundagi tezlik va tezlanishlari qiymati topilsin va shaklda ko'rsatilsin.

Yyechish. Bu masala quyidagi tartibda echiladi.

1. Traektoriya tenglamasi topiladi va bu tenglama bilan ifodalanuvchi shakl chiziladi.
2. Tezlik vektori va uning berilgan vaqtdagi qiymati topiladi hamda shaklda

### ko'rsatiladi

3 Nuqtaning urinma, normal va tula tezlanishlari, ularning berilgan vaqtdagi qiymati topiladi va shaklda ko'rsatiladi.

Traektoriya egrilik radiusi topiladi. Nuqtaning berilgan harakat tenglamalariga kura traektoriya tenglamasini topish uchun harakat tenglamalaridagi O'zgaruvchi  $t$  ni xar xil matematik amallarni bajarish yuli bilan yukotish kerak. Berilgan tenglamalarning birinchisidan  $t$  ni topib,  $t = x/2$  ni ikkinchisiga kuyamiz:

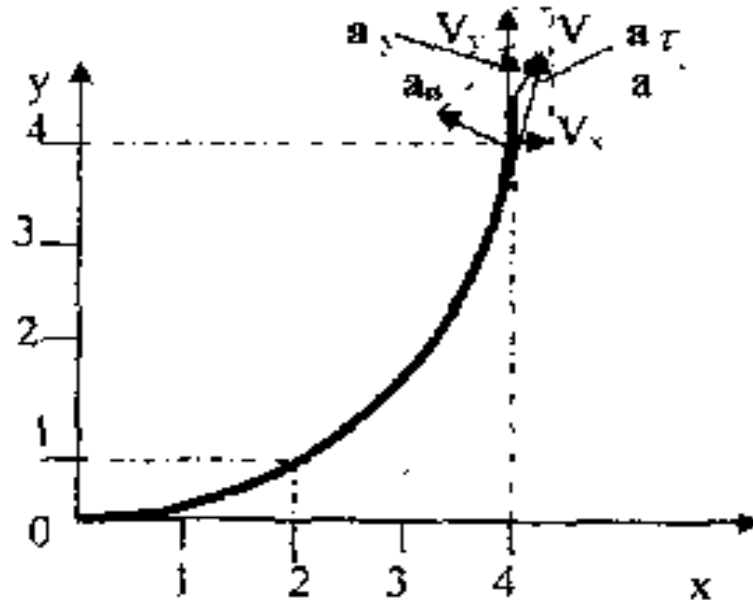
$$y = x^2/2 \quad (2.1)$$

Bu tenglama parabolaning teiglamasi bo'lgani uchun nuqtaning traektoriyasi paraboladan iborat ekan. degan xulosaga kelamiz va

(2.1) tenglamaning grafigini chizish uchun  $x$  ga qiymatlar berib, unga mos  $y$  ning qiymatlarini topamiz (1-shakl).

$t=0$  bo'lganda  $X_0=0$   $Y_0=0$   $M_0(X_0, Y_0) = M_0(0, 0)$

Sungra bu egri chizikda  $t=2$  sekunddagi nuqtaning urnini topamnz, buning uchun berilgan harakat tenglamalaridagi  $t$  ning berilgan kiymagnni kuyib, nuqtaning koordinatalarni topamiz,  $x=2t=2 \times 2=4$ .  $y=t^2=2^2=4$ . Demak.  $t = 2$  sekunda  $M$  nuqtaning koordinatalari  $(4:4)$  buladi.



Rasm-2.6

2) Nuqtaning tezlik vektori  $Y = \sqrt{Y_x^2 + Y_y^2}$  formula yordamida topiladi,  $Y_x$  va  $Y_y$  larni topish uchun, nuqtaning harakat tenglamalaridan vaqt bo'yicha birinchi tartibli xosila olamiz

$$V_x = \frac{dx}{dt} = x' = (2t)' = 2;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = y' = (t^2)' = 2t$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{2^2 + (2t)^2} = \sqrt{4 + 4t^2}$$

$t=2$  секундда  $V_x = 2$  м/с,  $V_y = 2t = 2 \times 2 = 4$  м/с.

$$V = \sqrt{4 + 4 \times 2^2} = 4.5 \text{ м/с.}$$

3) Nuqtaning tezlanishlarini topish.

a) Nuqtaning urinma tezlanishini topish uchun uning tezlik vektoridan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz.

$$a_r = \frac{dv}{dt} = v' = \left[ \sqrt{4 + 4t^2} \right]' = \frac{8t}{2\sqrt{4 + 4t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

$t=2$  секундда

$$a_r = \frac{dv}{dt} = \frac{2 \times 2}{\sqrt{1 + 2^2}} = \frac{4}{2.25} = 1.77 \text{ м/с}^2$$

b) Tula tezlanish esa quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{ёки} \quad a = \sqrt{a^2 + a^2}$$

$a_x$   $a_y$ - tezlanishlarni topish uchun tezliklardan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosila olamiz.  $v_x, v_y$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dx} = (v_x)' = (2)' = 0$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dy} = (v_y)' = (2t)' = 2 \quad \text{м/с}^2$$

$$a = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2; \quad \text{м/с}^2$$

$t=2$  sekunda  $a_x=0$ ;  $a_y=2 \text{ м/с}^2$ ;  $a=2 \text{ м/с}^2$ .

v) Nuqtaning normal tezlanishi esa. uning tula tezlanishi kvadratidan urinma tezlanish kvadrati ayirmasidan chikarilgan kvadrat ildiz tarkasida topiladi.

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_r^2} = \sqrt{2^2 - 1.77^2 / (1 + 2^2)}$$

$t=2$  секундда

$$a_n = \sqrt{4 - 4 \times 2^2 / (1 + 2^2)} = \sqrt{4 - 16/5} = 0.9 \text{ м/с}^2.$$

Nuqtaning tula tezlanishi  $a_\tau, a_n, a_x$  larga kurilgan parallelogramning diagonalini buylab yunaladi va  $a_v$  nolga teng bo'lgani uchun bu diagonaldan iborat buladi.

4) Nuqta traektoriyasining egrilik radiusi quyidagi formuladan hisoblanadi:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(4.5)^2}{0.9} = \frac{20}{0.9} \approx 22.2 \text{ м.}$$

**2-masala.** Harakat tenglamalari  $x=2\sin\frac{\pi}{4}t$  (м);  $y=3-2\cos\frac{\pi}{4}t$  (м) bo'lgan moddiy nuqtaning  $t=2$  sekunddagi **tezlik** va tezlanishlari qiymati topilsin va shaklda ko'rsatilsin.

**yechish.** I) Traektoriya tenglamasini topish. Harakat tenglamadan

$$\frac{x}{2} = \sin\frac{\pi}{4}t;$$

$$\frac{y-3}{2} = -\cos\frac{\pi}{4}t$$

Bu tenglamalarni har ikki tomonini kvadratga kutarib kushsak, ularning tomonlarini yigindisi 1 ga teng,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

yoki

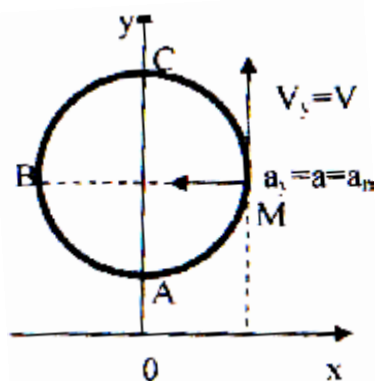
Bu

$$x^2 + (y-3)^2 = 2^2.$$

tenglama

markazi (0;3)

radiusi 2 ga va nuqtada yotgan aylana tenglamasidir. (2-shakl)



Demak material nuqtaning xarakatlanishi natijasida chizgan chiziq (traektoriyasi) aylanadan iborat ekan. xarakat tenglamalaridan foydalanib nuqtani  $T=2$  sekunddagi koordinatalarini topamiz va shaklda kursatamiz.»

$$x = 2\sin\frac{\pi}{4}2 = 2 \times 1 = 2;$$

$$y = 3 - 2\cos\frac{\pi}{4}2 = 3 - 2 \times 0 = 3$$

Demak,  $g=2$  sekunda M nuqtaning koordinatalari (2; 3) buladi.

2) Nuqta tezligini  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  formuladan topamiz.

$v_x, v_y$  larni topish uchun, nuqtaning xarakat tenglamalaridan vaqt bo'yicha birinchi tartibli xosila olamiz:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = x' = (2 \sin \frac{\pi}{4} t)' = 2 \cos \frac{\pi}{4} t \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} t;$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = y' = (3 - 2 \cos \frac{\pi}{4} t)' = 2 \sin \frac{\pi}{4} t \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} t;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4} t + \frac{\pi^2}{4} \sin^2 \frac{\pi}{4} t} =$$

3) Nuqtaning tezlanishlarini topamiz.

a) Urinma tezlanishini topish uchun tezlikdan vaqt bo'yicha birinchi tartibli xosila olamiz:

$$a_r = \frac{dv}{dt} = v' = \left( \frac{\pi}{2} \right)' = 0.$$

b) Tula tezlanishni  $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$  formuladan topamiz,  $a_x, a_y$  larni topish uchun  $v_x, v_y$  lardan vaqt bo'yicha birinchi tartibli xosila olamiz

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = (v_x)' = \left( -\frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{9} t \right)' = -\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{9} t \cdot \frac{\pi}{9} = -\frac{\pi^2}{27} \cos \frac{\pi}{9} t;$$

$$a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = (v_y)' = \left( -\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{9} t \right)' = \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{9} t \cdot \frac{\pi}{9} = \frac{\pi^2}{27} \sin \frac{\pi}{9} t;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\frac{\pi^4}{729} \cos^2 \frac{\pi}{9} t + \frac{\pi^4}{729} \sin^2 \frac{\pi}{9} t} = \frac{\pi^2}{27}$$

V) Normal tezlanish quyidagicha topiladi:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{\left( \frac{\pi^2}{27} \right)^2 - 0^2} = \frac{\pi^2}{27}$$

Nuqta tezlanishlarning  $t=3$  sekund bo'lgandagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$a_x = -\frac{\pi^2}{27} \cos \frac{\pi}{9} = -\frac{\pi^2}{27} \cos \frac{\pi}{3} = -\frac{9.8}{27} \cdot \frac{1}{2} = -0.18 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = \frac{\pi^2}{27} \sin \frac{\pi}{9} = \frac{\pi^2}{27} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{9.8}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.31 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r = 0, \quad a = \frac{\pi^2}{27} = \frac{9.8}{27} = 0.36 \text{ м/с}^2, \quad a_n = \frac{\pi^2}{27} = 0.36 \text{ м/с}^2.$$

4) Траектория эгрилик радиусини топамиз:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\pi^2/9}{\pi^2/27} = 3 \text{ м.}$$

### Adabiyotlar:

#### Asosiy:

1. P.Shohaydarova, Sh.Shoziyotov, Sh.Zoirov «Nazariy mexanika» darslik. Toshkent, 1991 yil.
2. T.R.Rashidov, Sh.Shoziyotov, K.B.Mo'minov «Nazariy mexanika asoslari» darslik. Toshkent, 1990 y.
3. S.M.Targ «Kratkiy kurs teoreticheskoy mexaniki» «Visshaya shkola» 2002 g.
4. I.V.Meshcherskiy. Nazariy mexanikadan masalalar to'plami. O'quv qo'llanmasi Toshkent. 1989 y.

#### Qo'shimcha:

1. Murodov M.M., Usnatdinov K.U., Inoyatova X. "Nazariy mexanika"
2. Murodov M.M., Gaybullaev Z.X.. "Nazariy mexanika" fanidan ma'ruzalar matni 1999 y.
3. S.K.Azizqoriev, Yangurazov Sh. Nazariy mexanikadan masalalar yechish o'quv qo'llanmasi. Toshkent, 1980 y.
4. Murodov M.M., Usnatdinov K.U. "Nazariy mexanikadan nazorat savollari" 2001y.