

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI**

**«Matematik analiz va algebra» kafedrası katta o'qituvchisi
R.Abdirahmonova va M.Jo'rayevaning «METRIK FAZO»
mavzusida yozgan**

Referat

Qarshi-2012

REJA:

1. Kirish.
2. Metrik fazo tushunchasi.
3. Ochiq va yopiq to`plamlar.
4. Chegaralangan to`plam.
5. To`plam yopilmasi.
6. Metrik fazoda yaqinlashish.
7. Metrik fazoda uzluksiz akslantirish.
8. Xulosa.

.

Kirish.

Funksional analiz dastlab XVIII asrga keiiib shakllana boshladi. Bu sohada matematiklar Volterra, Puankare, Gilbertlarning hissasi katta bo`ldi. Elementlari orasida masofa o`rnatilgan to'plamlarni o`rganish funksional analizning dastlabki bosqichlaridan biridir. Bu tushunchani fransuz matematigi Freshe XX asrning dastlabki yillarida kiritdi va uni mukammallashtirdi.

To'plamlar haqida umumiy tasavvur hosil qilingach metrik fazolarni va ularni uzluksiz akslantirishlarni o`rganish mumkin. Bunda asosiy e'tibor o'lchovning umumiy nazariyasiga qaratiladi. So'nggi paytlarda Daniyel sxemasiga asoslangan integrallash nazariyasi keng qo'llanilmoqda. Bunda o'lchov nazariyasidan foydalanilmaydi. Lekin o'lchovlar nazariyasi yetarlicha muhim ahamiyatga ega. Bu integral tushunchasiga kiritilishidan qat'iy nazar u funksional analizda o'z o'rniga ega.

Metrik fazo tushunchasi kiritilgach, metrik fazoda yaqinlashish, uzluksiz akslantirishlarni qaraymiz.

Shuningdek, to'la metrik fazolarni ham o`rganamiz.

Метрик фазо.

1-таъриф. Агар бирор X тўпламнинг ўзини ўзига тўғри (Декарт) кўпайтмаси $X \times X$ ни $R_+ = [0; +\infty)$ га акс эттирувчи $\rho(x, y)$ функция берилган бўлиб, у қуйидаги шартларни (метрика аксиомаларини)

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$; $\rho(x, y) = 0$ муносабат фақат $x = y$ бўлганда бажарилади;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметриклик аксиомаси);
- 3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (учбурчак аксиомаси)

қаноатлантирса, у ҳолда X тўплам *метрик фазо* дейилади.

Кирилган $\rho(x, y)$ функция *метрика*, юқоридаги шартлар эса *метрика аксиомалари* дейилади.

Одатда метрик фазо (X, ρ) кўринишда белгиланади.

Мисоллар. 1) Ҳақиқий сонлар тўғри чизиқи: $X = R$. Бу тўпламда x ва y сонлар орасидаги масофа $\rho(x, y) = |y - x|$ бўйича ҳисобланади.

2) n -ўлчамли Евклид фазоси: $X = R^n$, ва $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ нуқталар орасидаги масофа $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2}$ формула ёрдамида ҳисобланади.

Хусусан $n=2$ бўлганда бу метрик фазо Евклид текислиги дейилади.

3) n -ўлчамли фазонинг $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ нуқталари орасидаги масофа $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^n |y_k - x_k|$ деб аниқланса, у метрик фазо бўлади (исботланг) ва R_1^n орқали белгиланади.

4) n -ўлчамли фазонинг $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ва $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ нуқталари орасидаги масофа $\rho(x, y) = \max_{1 \leq k \leq n} |y_k - x_k|$ деб аниқланса, у метрик фазо бўлади (исботланг) ва R_∞^n орқали белгиланади.

5) $X = l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_i \in R \text{ ва } \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty\}$, $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (y_i - x_i)^2}$;

6) $X = C[a; b]$ - $[a; b]$ -кесмада аниқланган узлуксиз функциялар тўпламида метрикани қуйидагича киритамиз: $\rho(x, y) = \max_{t \in [a; b]} |y(t) - x(t)|$. Бу функциянинг метрика бўлишлигини текшириш қийин эмас.

Метрика аксиомаларидан биринчи ва иккинчисининг ўринлилиги равшан. Учбурчак аксиомасини текшираемиз. Ихтиёрий $t \in [a; b]$ нуқта ва $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функциялар учун ушбу муносабат бажарилади:

$$|x(t)-y(t)| = |(x(t)-z(t)) + (z(t)-y(t))| \leq |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)|.$$

Бу тенгсизликдан

$$\max_{a \leq t \leq b} |x(t)-y(t)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t)-z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t)-y(t)| \text{ бўлиши келиб чиқади. Охирги}$$

тенгсизлик

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$$

эканлигини билдиради.

7) $[a;b]$ -кесмада узлуксиз функциялар тўпламида метрикани қуйидагича ҳам киритиш мумкин: $\rho(x,y) = \int_a^b |y - x| dt$. Бу метрик фазо $C_1[a;b]$ орқали белгиланади.

8) $[a;b]$ -кесмадада квадрати билан интегралланувчи функциялар тўпламида $\rho(x,y) = \left(\int_a^b (y - x)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ функция метрика аксиомаларини қаноатлантиради. [2] Бу метрик фазо $C_2[a;b]$ орқали белгиланади.

Бўш бўлмаган ихтиёрий тўпланда метрика киритиш мумкинми деган саволга қуйидаги мисол ижобий жавоб беради.

9) X - бўш бўлмаган ихтиёрий тўплам бўлсин. $x, y \in X$ учун

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ agar } x \neq y \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x = y \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

шарт билан функция аниқлаймиз. Бу функция метрика аксиомаларини қаноатлантиради.

Бундай аниқланган метрик фазо *тривиал метрик фазо*, метрика эса, *тривиал метрика* дейилади.

Метрик фазода баъзи бир геометрик тушунчалар

Айтайлик (X, ρ) метрик фазо бўлсин. Келгусида метрик фазо элементи ёки метрик фазо нуқтаси бир хил маънода ишлатилади.

1-таъриф. Бирор $x_0 \in X$ нуқта ва $r > 0$ сон учун ушбу

$$S(x_0, r) = \{ x \in X: \rho(x, x_0) < r \}$$
 тўплам X фазода *очик шар*;

$$\bar{S}(x_0, r) = \{ x \in X: \rho(x, x_0) \leq r \}$$
 тўплам *ёпиқ шар* дейилади.

x_0 нуқта шарнинг *маркази*; r сон шарнинг *радиуси* дейилади.

Зарурият туқилганда $\{x \in X: \rho(x, x_0) = r\}$ тўпламни ҳам ишлатамиз, у x_0 марказли, r радиусли сфера дейилади.

2-таъриф. $S(x_0, \varepsilon)$ очик шар x_0 нуқтанинг ε -*атрофи* дейилади ва $O_\varepsilon(x_0)$ каби белгиланади.

Нукта атрофининг баъзи хоссаларини ўрганамиз.

1⁰. Ҳар бир нукта ўзининг ихтиёрий атрофига тегишлидир.

Ҳақиқатан, агар $\varepsilon > 0$ бўлса, у ҳолда $\rho(a,a)=0 < \varepsilon$, шунинг учун $a \in O_\varepsilon(a)$.

2⁰. Нуктанинг ихтиёрий икки атрофи кесишмаси ҳам атроф бўлади.

Ҳақиқатан, агар $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ бўлса, у ҳолда $O_{\varepsilon_1}(a) \cap O_{\varepsilon_2}(a) = O_{\varepsilon_1}(a)$ бўлади.

3⁰. Агар $x \in O_\delta(a)$ бўлса, у ҳолда x нуктанинг $O_\delta(a)$ да ётувчи атрофи мавжуд.

Ҳақиқатан, айтайлик $\rho(a,x)=d$ бўлсин. $x \in O_\delta(a)$ бўлганлигидан $\delta = \varepsilon - d > 0$ бўлади.

Энди, $y \in O_\delta(x)$ оламиз. Метриканинг учбурчак аксиомасига кўра $\rho(a,y) \leq \rho(a,x) + \rho(x,y) < d + \delta = d + (\varepsilon - d) = \varepsilon$ бўлади. Демак, $y \in O_\varepsilon(a)$. Бундан $O_\delta(x) \subset O_\varepsilon(a)$ келиб чиқади.

4⁰. Бир-биридан фарқли икки нуктанинг кесишмайдиган атрофлари мавжуд.

Ҳақиқатан айтайлик, $a, b \in X$, $a \neq b$ ва $\rho(a,b)=r$ бўлсин. $\varepsilon=r/3$ бўлганда $O_\varepsilon(a)$ ва $O_\varepsilon(b)$ атрофларнинг кесишмаслигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, бу атрофлар умумий x нуктага эга бўлсин. У ҳолда $\rho(a,x) < \varepsilon$, $\rho(b,x) < \varepsilon$ ва $\rho(a,b) \leq \rho(a,x) + \rho(b,x) < 2\varepsilon = 2r/3 < r$. Бу эса шартга зид.

Чегараланган тўплам.

3-таъриф. (X, ρ) метрик фазодаги M тўплам (хусусан, X фазо) бирор шар ичида жойлашган бўлса, бу тўплам чегараланган дейилади.

Бу таърифнинг қуйидаги таърифга эквивалент эканлигини текшириш мураккаб эмас:

Агар (X, ρ) метрик фазодаги M тўпламга тегишли барча x ва y нукталар учун, $\rho(x,y) < K$ тенгсизликни қаноатлантирувчи K мусбат сон мавжуд бўлса, у ҳолда M тўплам чегараланган дейилади.

Агар бир тўпламда икки хил метрика берилган бўлса, у ҳолда қаралаётган M тўплам бир метрикага нисбатан чегараланган, иккинчи бир метрикага нисбатан чегараланмаган бўлиши мумкин.

Масалан, натурал сонлар тўплами $\rho(n,m)=|n-m|$ метрикага нисбатан чегараланмаган, лекин

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 0, & \text{агар } m = n, \\ 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{агар } m \neq n \end{cases}$$

метрикага нисбатан чегаралангандир. Чунки, 1

дан фарқли барча n ларда $\rho(1,n) < 2$ бўлади, яъни бу метрикага нисбатан барча натурал сонлар тўплами, маркази 1 нуктада радиуси 2 га тенг очик шарга тегишли бўлади.

Тўпламнинг ўриниш, лимит нукталари.

4-таъриф. Агар $x_0 \in X$ нуқтанинг ихтиёрий атрофида M тўпламнинг x_0 дан фарқли элементлари мавжуд бўлса, у ҳолда x_0 нуқта M нинг *лимит нуқтаси* дейилади.

Мисоллар. 1) (R^n, ρ) метрик фазодаги $S(x_0, r)$ очик шарнинг лимит нуқталари тўплами $\bar{S}(x_0, r)$ ёпиқ шардан иборат бўлади.

2) Қуйида (R, ρ) метрик фазодаги, яъни сонлар ўқидаги баъзи тўпламларни қараймиз:

а) $E_1 = N$ натурал сонлар тўплами бўлсин. Бу тўпламнинг бирорта ҳам лимит нуқтаси мавжуд эмас.

б) $E_2 = \{1/n : n=1, 2, \dots\}$ бўлсин. Бу тўпламнинг биргина лимит нуқтаси 0 бор ва $0 \notin E_2$.

в) $E_3 = (0; 1)$. Бу тўпламнинг лимит нуқталари $[0; 1]$ кесманинг барча нуқталаридан иборат.

г) $E_4 = (0; 1) \cap Q$ бўлсин. Бу тўпламнинг лимит нуқталари ҳам $[0; 1]$ кесманинг барча нуқталаридан иборат.

5-таъриф. Агар $x_0 \in X$ нуқтанинг ихтиёрий атрофида M тўпламнинг камида битта элемент мавжуд бўлса, x_0 нуқта M нинг *ўриниш нуқтаси* дейилади.

Лимит нуқта ўриниш нуқтаси бўлади, лекин аксинчаси ҳар доим ҳам ўринли эмас. Масалан, чекли тўпламнинг ҳар бир нуқтаси ўриниш нуқтаси бўлади, аммо у лимит нуқта бўла олмайди. Юқоридаги E_1 ва E_2 тўпламларнинг ҳам барча нуқталари ўриниш нуқталаридир.

Тўпламнинг ёпилмаси.

6-таъриф. M тўпламнинг ўриниш нуқталари тўплами $\bar{M}$ билан белгиланиб, M нинг ёпилмаси дейилади.

Мисол. (R^2, ρ) метрик фазода $S(x_0, r)$ очик шарга тегишли рационал координатали нуқталар тўпламининг ёпилмаси $\bar{S}(x_0, r)$ ёпиқ шардан иборат бўлади.

Теорема. Ихтиёрий M , M_1 ва M_2 тўпламлар учун қуйидаги муносабатлар ўринлидир:

1) $M \subset \bar{M}$;

2) $\overline{\bar{M}} = \bar{M}$;

3) Агар $M_1 \subset M_2$ бўлса, у ҳолда $\bar{M}_1 \subset \bar{M}_2$ бўлади;

4) $\overline{M_1 \cup M_2} = \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2$.

Исботи. Биринчи хосса тўпламнинг ўриниш нуқтаси таърифидан келиб чиқади.

Иккинчи хоссани исботлаймиз. Биринчи хоссага асосан $\overline{M} \subset \overline{\overline{M}}$. Шунинг учун $\overline{\overline{M}} \subset \overline{M}$ муносабатни исботлаш етарли. $x \in \overline{\overline{M}}$ бўлсин. У ҳолда бу нуқтанинг ихтиёрий ε атрофида $\overline{M}$ га тегишли x_1 нуқта топилади; сўнг x_1 нуқтанинг радиуси $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1) > 0$ бўлган атрофини оламиз. Агар $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ бўлса, у ҳолда

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, x_1) + \rho(x_1, x) < \varepsilon,$$

яъни $z \in O_\varepsilon(x)$ бўлади. Шундай қилиб, $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Аммо $x_1 \in \overline{M}$, демак, x_1 нинг ε_1 -атрофида M га тегишли x_2 нуқта мавжуд. Шунинг учун $x_2 \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Лекин $O_\varepsilon(x)$ шар x нуқтанинг ихтиёрий атрофи бўлгани учун $x \in \overline{M}$.

Учинчи хосса ўз-ўзидан равшан.

Тўртинчи хоссани исботлаймиз. Айтайлик $x \in \overline{M_1 \cup M_2}$ бўлсин, у ҳолда x нуқтанинг ихтиёрий $O_\varepsilon(x)$ атрофида $M_1 \cup M_2$ га тегишли x_1 элемент мавжуд. Агар $x \notin \overline{M_1}$ ва $x \notin \overline{M_2}$ бўлса, у ҳолда x нинг шундай $O_{\varepsilon_1}(x)$ ва $O_{\varepsilon_2}(x)$ атрофлари мавжудки, бу атрофлар мос равишда M_1 ва M_2 тўпламлар билан кесишмайди. Энди $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ деб олсак, у ҳолда x нуқтанинг $O_\varepsilon(x)$ атрофи $M_1 \cup M_2$ тўплаг билан кесишмайди. Бу эса x нинг танланишига зид. Демак, x нуқта $\overline{M_1}$ ёки $\overline{M_2}$ тўпламлардан камида биттасига тегишли, яъни

$$\overline{M_1 \cup M_2} \subset \overline{M_1} \cup \overline{M_2}.$$

Тескари муносабатнинг ўринлиги $M_1 \subset M_1 \cup M_2$ ва $M_2 \subset M_1 \cup M_2$ муносабатлардан ҳамда учинчи хоссадан келиб чиқади.

Метрик фазодаги очик ва ёпиқ тўпламлар

(X, ρ) метрик фазо бўлсин. Бунда $M \subset X$ тўплаг оламиз.

1-таъриф. Агар $M = \overline{M}$ бўлса, у ҳолда M ёпиқ тўплаг дейилади.

Ихтиёрий (X, ρ) метрик фазода $\bar{S}(x_0, r)$ ёпиқ шар, X нинг ўзи, бўш тўплаг ва ҳар бир чекли тўплаг ёпиқ тўпламларга мисол бўлади.

Шунингдек (R, ρ) , $\rho(a, b) = |b - a|$ тўғри чизиқда ихтиёрий $[c, d]$ кесма ёпиқ тўплагдир.

1-теорема. а) Чекли сондаги ёпиқ тўпламларнинг бирлашмаси яна ёпиқ тўплаг бўлади;

б) Ихтиёрий сондаги ёпиқ тўпламларнинг кесишмаси ёпиқ тўплаг бўлади.

Исботи. а) бу хоссани икки тўплам учун исботлаш етарли. Айтайлик F_1, F_2 ёпиқ тўпламлар бўлсин, яъни $\bar{F}_1 = F_1$ ва $\bar{F}_2 = F_2$ ўринли. У ҳолда 2-§ даги теореманинг 4) хоссага кўра $\overline{F_1 \cup F_2} = \bar{F}_1 \cup \bar{F}_2 = F_1 \cup F_2$. Демак, таърифга кўра $F_1 \cup F_2$ ёпиқ тўплам.

б) Айтайлик ихтиёрий сондаги $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ёпиқ тўпламлар системаси берилган ва x уларнинг кесишмаси $F = \bigcap_{\alpha} F_\alpha$ тўпламнинг ўриниш нуқтаси бўлсин. У ҳолда x нинг ихтиёрий атрофида F нинг камида битта, масалан, x_1 элементи мавжуд ва кесишманинг хоссасига кўра α нинг барча қийматлари учун $x_1 \in F_\alpha$ бўлади. Демак, ихтиёрий α учун $x \in \bar{F}_\alpha = F_\alpha$, яъни $x \in \bigcap_{\alpha} F_\alpha = F$ бўлади. Демак, F ёпиқ тўплам. Теорема исбот бўлди.

Очиқ тўплам.

(X, ρ) метрик фазо, $M \subset X$ бирор тўплам бўлсин.

2-таъриф. Агар x нуқтанинг M тўпламда бутунлай жойлашган бирор атрофи мавжуд бўлса, у ҳолда x нуқта M тўпламнинг *ички нуқтаси* дейилади.

Агар M тўпламнинг ҳамма нуқталари ички бўлса, у *очиқ тўплам* дейилади.

Ихтиёрий (X, ρ) метрик фазода $S(x_0, r)$ очиқ шар, R да $(a; b)$ интервал очиқ тўпламга мисол бўлади.

R да Q рационал сонлар тўплами очиқ тўплам эмас, чунки рационал сон ички нуқта бўла олмайди, яъни, ихтиёрий рационал соннинг ҳар бир атрофи фақат рационал сонлардан иборат эмас.

Шу каби иррационал сонлар тўплами ҳам очиқ тўплам эмас.

Бу тўпламларнинг R да ёпиқ тўплам эмаслигини ҳам кўриш қийин эмас.

2-теорема. Бирор $G \subset X$ тўпламнинг *очиқ бўлиши* учун *унинг тўлдирувчиси*, $F = X \setminus G = CG$ ёпиқ бўлиши зарур ва етарли.

Исботи. *Зарурийлиги.* Айтайлик G очиқ тўплам бўлсин. У ҳолда ҳар бир $x \in G$ нуқта бутунлай G да жойлашган атрофга эга. Демак, бу атроф F билан кесишмайди. Бундан кўринадики, F нинг бирорта ҳам ўриниш нуқтаси G га кирмайди. Демак F ёпиқ тўплам.

Етарлилиги. Айтайлик $F = X \setminus G$ ёпиқ тўплам бўлсин. У ҳолда G дан олинган ихтиёрий нуқта F билан кесишмайдиган, демак G да бутунлай жойлашган атрофга эга, яъни G очиқ тўплам.

Натижа. Бўш тўплам $\emptyset$ ва X фазонинг ўзи ҳам очиқ, ҳам ёпиқ тўпламлардир.

3-теорема. Ихтиёрий сондаги очиқ тўпламларнинг бирлашмаси ва сони чекли бўлган очиқ тўпламларнинг кесишмаси очиқ тўплам бўлади.

Исботи. Ушбу $\bigcap_{\alpha} (X \setminus G_{\alpha}) = X \setminus (\bigcup_{\alpha} G_{\alpha})$ ва $\bigcup_{i=1}^n (X \setminus G_i) = X \setminus (\bigcap_{i=1}^n G_i)$ тенгликлардан ва

юқорида исботланган теоремалардан келиб чиқади.

1-Таъриф. (X, ρ) метрик фазода бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $n_0(\varepsilon)$ номер топилиб, барча $n > n_0(\varepsilon)$ лар учун $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилаверса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик X фазонинг x элементига яқинлашади дейилади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ёки $x_n \rightarrow x$ орқали белгиланади.

Бу x нукта $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимита* дейилади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик X фазонинг ҳеч бир нуктасига яқинлашмаса, у *узоқлашувчи* кетма-кетлик дейилади.

Равшанки, ихтиёрий метрик фазодаги кетма-кетлик лимити таърифини сонли кетма-кетлик лимити таърифига келтириш мумкин:

Агар $n \rightarrow \infty$ да $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$ бўлса, у ҳолда бу кетма-кетлик X фазонинг x элементига яқинлашади дейилади.

Метрик фазонинг элементлари сонлардан, сонли кортежлардан, геометрик фазо нукталаридан, чизиқлардан, функциялардан, умуман исталган табиатли бўлиши мумкин. Шу сабабли кетма-кетлик лимитининг юқорида келтирилган таърифи кенг татбиққа эга.

Мисол. $x_n(t) = t^n$ функциялар кетма-кетлиги $C_1[0;1]$ фазода $\theta(t) \equiv 0$ функцияга яқинлашади.

Ҳақиқатдан ҳам, бу фазода $\rho(x_n, \theta) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, демак $n \rightarrow \infty$ да $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ бўлиши

равшан.

Функцияларнинг ушбу кетма-кетлиги $C[0;1]$ фазода $\theta(t) \equiv 0$ функцияга яқинлашмайди, чунки бу ҳолда $\rho(x_n, \theta) = \max_{1 \leq t \leq 1} t^n = 1$ бўлади, яъни $\rho(x_n, x) \not\rightarrow 0$.

Яқинлашувчи кетма-кетлик хоссалари.

1-теорема. Яқинлашувчи кетма-кетлик фақат битта лимитга эга.

Исботи. Фараз қилайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити иккита, яъни $x_n \rightarrow x$ ва $x_n \rightarrow y$, $x \neq y$ бўлсин. У ҳолда метриканинг учбурчак аксиомасига кўра,

$$0 \leq \rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y)$$

бўлади.

Аммо, бу тенгсизликнинг ўнг томони $n \rightarrow \infty$ да 0 га интилади, демак, $\rho(x, y) = 0$, бундан $x = y$ келиб чиқади.

2-теорема. $\rho(x,y)$ метрика x ва y элементларнинг узлуксиз функцияси, яъни $x_n \rightarrow x$ ва $y_n \rightarrow y$ бўлса, $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$ бўлади.

Исботи. Аввал ихтиёрий тўртта $x, y, z, u \in X$ элементлар учун

$$|\rho(x,y) - \rho(z,u)| \leq \rho(x,z) + \rho(y,u) \quad (1)$$

тенгсизликнинг ўринли эканлигини исботлаймиз.

Учбурчак аксиомасидан фойдаланиб,

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,u) + \rho(u,y) \quad (2)$$

тенгсизликларни ёзиш мумкин. Бундан

$$\rho(x,y) - \rho(z,u) \leq \rho(x,z) + \rho(u,y)$$

Бу тенгсизликда x, y ларни мос равишда z, u лар билан алмаштириб,

$$\rho(z,u) - \rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(u,y) \quad (3)$$

тенгсизликка эга бўламиз. (2) ва (3)дан (1) келиб чиқади.

(1) тенгсизликда z ва u ни мос равишда x_n ва y_n билан алмаштирилса,

$$|\rho(x,y) - \rho(x_n, y_n)| \leq \rho(x, x_n) + \rho(y, y_n)$$

тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу тенгсизликнинг ўнг томони, теорема шартига кўра нолга интилади, бундан эса $\rho(x_n, y_n) \rightarrow \rho(x, y)$ келиб чиқади.

Қуйидаги теорема равшан.

3-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик x га яқинлашса, y ҳолда бу кетма-кетликнинг ихтиёрий $\{x_{n_k}\}$ қисм кетма-кетлиги ҳам шу x га яқинлашади.

4-теорема. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик x га яқинлашса ва $x_0 \in X$ тайин бир элемент бўлса, y ҳолда $\{\rho(x_n, x_0)\}$ сонлар тўплами чегараланган бўлади.

Исботи. $\{\rho(x_n, x_0)\}$ сонли кетма-кетлик яқинлашувчи бўлганлиги сабабли, y чегараланган бўлади. Унинг юқори чегарасини K билан белгилаймиз. Метриканинг учбурчак аксиомасига кўра

$$\rho(x_n, x_0) \leq \rho(x_n, x) + \rho(x, x_0) \leq K + \rho(x, x_0) = K_1.$$

Теорема исбот бўлди.

Баъзи метрик фазоларда яқинлашиш тушунчасининг маънолари.

1) Тривиал метрик фазода кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиши учун бу кетма-кетликнинг ҳамма элементлари бирор ҳадидан бошлаб бир-бирига тенг бўлиши зарур ва етарли.

2) n -ўлчамли Евклид фазосида $\{x_k\}$ кетма-кетликнинг x элементга яқинлашиши учун, x_k вектор координаталари, мос равишда x вектор координаталарига яқинлашиши зарур ва етарли.

Ҳақиқатан ҳам, агар R_2^n да $\rho(x_k, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i)^2} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) бўлса, у ҳолда $x_i^{(k)} \rightarrow x_i, i=1, 2, \dots, n$ ($k \rightarrow \infty$) бўлади.

3) $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $C[a; b]$ фазонинг элементлари ва $x_n(t) \rightarrow x(t) \in C[a; b]$, яъни

$$\rho(x_n, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

бўлсин. Бундан, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сони учун шундай $n_0 = n_0(\varepsilon)$ натурал сон топиладики, $t \in [a; b]$ бўлганда

$$\max_{a \leq t \leq b} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $t \in [a; b]$ нинг барча қийматлари учун $n > n_0$ бўлганда

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлиكنинг $x(t)$ функцияга текис яқинлашишини билдиради. Ва аксинча, $\{x_n(t)\}$ кетма-кетлик $[a; b]$ кесмада $x(t)$ га текис яқинлашса, у ҳолда $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ бўлади. Демак, $C[a; b]$ фазода метрика маъносида яқинлашиш математик анализдан маълум бўлган текис яқинлашиш тушунчаси билан устма-уст тушар экан.

Метрик фазоларда узлуксиз акслантиришлар

(X, ρ_X) ва (Y, ρ_Y) метрик фазолар бўлиб, $T: X \rightarrow Y$ акслантириш берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар M тўпламдаги x_0 нуктага X да яқинлашувчи бўлган ихтиёрий $\{x_n\} \subset M$ кетма-кетлик учун ушбу $Tx_n \rightarrow Tx_0$ муносабат Y да бажарилса, у ҳолда T акслантириш x_0 нуктада *узлуксиз* дейилади.

2-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сони учун шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $\rho_X(x_0, x) < \delta$ шартни қаноатлантирувчи барча $x \in X$ лар учун $\rho_Y(T(x_0), T(x)) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда T акслантириш x_0 нуктада *узлуксиз* дейилади.

3-таъриф. Агар $b = T(x_0)$ нуктанинг ихтиёрий V атрофи учун X фазода x_0 нуктанинг $T(U) \subset V$ шартни қаноатлантирувчи U атрофи мавжуд бўлаверса, T акслантириш x_0 нуктада *узлуксиз* дейилади.

Бу учала таърифнинг тенг кучлилиги, ёки бошқача айтганда эквивалентлиги математик анализ курсидаги функция узлуксизлиги каби исботланади.

Мисол. $C[0; 1]$ фазони R га акслантирувчи $T: x \rightarrow x(1)$ акслантириш ихтиёрий a «нукта»да узлуксиз бўлади, бу ерда x ва a «нукталар» $[0; 1]$ кесмада узлуксиз функциялар.

Ҳақиқатан, $\varepsilon > 0$ сон берилган бўлсин. U ҳолда $\delta = \varepsilon$ деб оламиз. Энди $\rho_C(a, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - a(t)|$, $\rho_R(Ta, Tx) = |x(1) - a(1)| \leq \rho_C(a, x)$ бўлганлиги сабабли, $\rho_C(a, x) < \delta$ шартдан $\rho_R(Ta, Tx) < \varepsilon$ тенгсизликнинг келиб чиқиши равшан.

$C_1[0; 1]$ фазони R га акслантирувчи $T: x \rightarrow x(1)$ акслантириш $\theta(t) \equiv 0$ нуқтада узлуксиз эмас.

Ҳақиқатан, $x_n(t) = t^n$ кетма-кетлик $C_1[0; 1]$ фазода $\theta(t) \equiv 0$ функцияга яқинлашади, лекин $Tx_n = x_n(1) = 1$, $T\theta = 0$, демак (Tx_n) кетма-кетлик $T\theta$ га яқинлашмайди.

4-таъриф. Агар T ўзининг аниқланиш соҳасининг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда T узлуксиз акслантириш дейилади.

Хусусан $Y = R$ бўлган ҳолда, узлуксиз акслантириш узлуксиз *функционал* дейилади.

$C[0; 1]$ фазони R га акслантирувчи $T(x) = x(1)$ акслантириш узлуксиз функционалга мисол бўлади.

(X, ρ_X) ва (Y, ρ_Y) метрик фазолар ва $T: X \rightarrow Y$ акслантириш берилган бўлсин.

5-таъриф. Агар X фазодан олинган ихтиёрий a ва b нуқталар учун $\rho_X(a, b) = \rho_Y(T(a), T(b))$ тенглик бажарилса, у ҳолда T *изометрик акслантириш* ёки *изометрия* дейилади.

Равшанки, ҳар қандай изометрия узлуксиз акслантириш бўлади.

Текисликдаги ҳар қандай ҳаракат изометрияга мисол бўлади.

Узлуксиз акслантиришнинг хоссалари.

1-теорема. Айтайлик $T: X \rightarrow Y$ акслантириш X фазонинг a нуқтасида, $f: Y \rightarrow Z$ акслантириш Y фазонинг $b = T(a)$ нуқтасида узлуксиз бўлсин. U ҳолда X ни Z га акслантирувчи $x \rightarrow F(T(x))$ мураккаб акслантириш a нуқтада узлуксиз бўлади.

Исботи. Z фазо $c = F(T(a))$ нуқтасининг ихтиёрий W атрофини оламиз. F акслантириш $b = T(a)$ нуқтада узлуксиз ва $c = F(b)$ бўлганлиги сабабли, b нуқтанинг $F(V) \subset W$ шартни қаноатлантирувчи V атрофи мавжуд. Шунга ўхшаш, T акслантириш a нуқтада узлуксиз бўлганлиги сабабли, бу нуқтанинг $T(U) \subset V$ шартни қаноатлантирувчи U атрофи мавжуд. U ҳолда $F(T(U)) \subset T(V) \subset W$ га эга бўламиз. Бу эса $x \rightarrow F(T(x))$ акслантиришнинг a нуқтада узлуксиз эканлигини исботлайди.

2-теорема. Агар T акслантириш X метрик фазони Y метрик фазога акс эттирувчи узлуксиз акслантириш бўлса, у ҳолда Y фазодан олинган ихтиёрий очик тўпламнинг X фазодаги прообразини очик, ёпиқ тўпламники эса ёпиқ бўлади.

Исботи. Айтайлик G тўплам Y да очик бўлсин. X фазодаги $D = T^{-1}(G)$ тўпламнинг барча нуқталари ички нуқта эканлигини исботлаймиз.

Фараз қилайлик $a \in D$ ва $T(a)=b$ бўлсин. У ҳолда $b \in G$ ва G очик бўлганлигидан b нукта G тўпламнинг ички нуктаси бўлади. Шунинг учун бу нуктанинг G га тўлалигича тегишли бўлган V атрофи мавжуд. T акслантиришнинг a нуктада узлуксизлигидан a нуктанинг шундай U атрофи мавжуд бўлиб, $T(U) \subset V$ бўлади. У ҳолда $T(U) \subset G$, бундан эса $U \subset D = T^{-1}(G)$ келиб чиқади. Бу эса ихтиёрий $a \in D$ нуктанинг D га тегишли атрофи мавжудлиги, яъни a ички нукта эканлигини исботлайди. Шунинг учун D очик тўплам.

Ёпиқ тўпламнинг тўлдирувчиси очик эканлигидан, Y фазода бири иккинчисига тўлдирувчи тўпламларнинг прообразлари, X фазода ҳам бири иккинчисига тўлдирувчи бўлишидан ва теореманинг исбот қилинган қисмидан иккинчи қисмнинг исботи келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Узлуксиз акслантиришда, очик тўпламнинг образи ҳар доим ҳам очик булавермайди. Масалан, $x \rightarrow \sin x$ узлуксиз акслантиришда $(-\pi; \pi)$ интервалнинг образи $[-1; 1]$ кесмадан иборат.

Xulosa

Biz funksional analizning muhim qismi o'lchovlarning umumiy nazariyasi haqida tasavvur hosil qildik. Metrik fazolarga ta'rif berdik, ularga misollar qaradik. Metrik fazolardagi bazi bir geometrik tushunchalarni, ochiq va yopiq sharlar, nuqtaning ε atrofini o'rgandik, to'plamning chegaralanganlik shartini, to'plamning urinish, limit nuqtalarini tekshirdik. To'plam yopilmasiga ko'ra, og'hiq va yopiq to'plamlarni qaradik.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarni o'rganib, metrik fazoda yaqinlashish tushunchasini kiritdik. Metrik fazolarda yaqinlashish tushunchalarining ma'nolariga ham e'tibor berdik. Trivial metrik fazolarda ketma-ketlik yaqinlashuchi bo'lishi uchun bu ketma-ketlikning hamma elementlari biror hadidan boshlab bir-biriga teng bo'lishi zarur va etarlidir.

n - o'lchamli Evklid fazoda $\{x_k\}$ ketma-ketlikning x elementga yaqinlashishi uchun x_k vector koordinatalari mos ravishda x vektor koordinatalariga yaqinlashishi zarur va yetarlidir.

Shuningdek, metrik fazolarda uzluksiz akslantirish va uning xulosalarini ham o'rgandik.