

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIK ANALIZ VA ALGEBRA KAFEDRASI

Norova Dilnoza Xolto’rayevnaning

“5460100 – Matematika” ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha

bakalavr darajasini olish uchun

**Yuqori darajali tenglamalar sistemasini yechishda ikki
o‘zgaruvchili simmetrik ko‘phadlardan foydalanish**

mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

f-m. f.n. S. Botirov

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fizika –matematika fakulteti

dekani:_____ prof. B.Xayriddinov

“ _____ ” 2011 yil

Qarshi -2011

Mundarija

Kirish.....	3
-------------	---

I BOB Ko'phadlar

1-§. Bir noma'lumli ko'phadlar	5
--------------------------------------	---

2-§. Ko'p noma'lumli ko'phadlar	14
---------------------------------------	----

II-BOB Simmetrik ko'phadlar

1-§. Simmetrik ko'phadlar va ularning simmetrik funksiyalari.....	19
--	----

2-§. Ikki o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlar va ularning elementar algebraga tadbigi.....	24
--	----

Xulosa	43
--------------	----

Foydalanilgan adabiyotlar	44
---------------------------------	----

Kirish

Bizga ma'lumki ko'phadlar nazariyasi algebra va sonlar nazariyasi fanining muhim rivojlanayotgan tarmoqlaridan biri bo'lib hisoblanadi. Ayniqsa ko'phadlar nazariyasining simmetrik ko'phadlar bo'limi salohiyati va amaliy qo'llana bilishi jihatidan muhim kasb egallaydi. Bu bitiruv malakaviy ishda asosan ko'phadlar va uning tarkibiy qismi bo'lgan simmetrik ko'phadlar va simmetrik ko'phadlarning amaliy ahamiyati haqida fikr yuritilad.

Mavzuning dolzarbligi: Malumki, biz elementar matematika kursida va algebra va sonlar nazariyasi fanini o'rganganda chiziqli algebraik tenglamadan to'rtinchi darajali algebraik tenglama va tenglamalar sistemasini yechishni qarab chiqqan edik. Ammo yuqori darajali tenglamalar yoki tenglamalar sistemasini yechish esa ancha qiyinchiliklar tug'dirishini ham bilamiz. Bu haqda hatto buyuk Norvegiyalik matematik Nils Abels o'zining quyidagi qimmatli fikrini bayon qilgan edi, ya'ni " beshinchi va undan yuqori darajali tenglamalarni cheksiz sondagi amallar : qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish va ildizdan chiqarish yordamida yechish formulasi mavjud emas ". Bu bitiruv malakaviy ishda asosan yuqori darajali tenglamalar sistemasini yechishda tenglamalar darajalarini simmetrik ko'phadlar, simmetrik funksiyalar yordamida pasaytirib yechish ishning asosiy dolzarb vazifasi qilib belgilangan.

Mavzuning maqsadi va vazifalari: Yozilgan bu bitiruv malakaviy ishning asosiy maqsadi bir noma'lumli va ko'p noma'lumli ko'phadlarni har tomonlama chuqurroq o'rganish, hamda ko'p noma'lumli ko'phadlarning bir turi bo'lgan simmetrik ko'phadlar va ularning simmetrik funksiyalari yordamida asosan yuqori darajali tenglamalar sistemasini yechishda qo'llash, ya'ni sistemadagi tenglamalar darajalarini pasaytirish asosida sistemani yechishni o'z oldiga maqsad qilib qo'ygan. Umuman olganda simmetrik ko'phadlarning elementar matematikadagi tadbiqlarini o'rganishni o'z oldiga vazifa va maqsad qilib qo'ygan.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiyligi va amaliy ahamiyati :

Ushbu bitiruv malakaviy ishning mavzusiga oid barcha adabiyotlarni to'plash va shu vaqtgacha to'plangan bilimlar asosida ko'phadlar nazariyasi, ayniqsa simmetrik ko'phadlar hamda ularning elementar matematikadagi tadbiqlarini yanada mukammalroq o'rganish katta ahamiyatga ega bo'lib, bu esa kelajakda ko'phadlar va ularning

tadbiqlarini ilmiy nuqtai nazardan yanada atroflicha o'rganishda va tasavvur hosil qilishda katta ahamiyatga ega bo'ladi deb o'ylayman.

I - BOB

1-§ . Bir noma'lumli ko'phadlar

Biz bu bobda algebra fani uchun muhim ahamiyatga ega bo'lgan ko'phadlar tushunchasi bilan shug'ullanamiz. Faraz qilaylik, bizga birlik elementga ega bo'lgan biror R butunlik sohasi berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1.1. $\forall a_i \in R (i=1, S)$ bo'lganda

$$a_1 x^{k_1} + a_2 x^{k_2} + \dots + a_s x^{k_s} \quad (1.1)$$

Ifoda R butunlik sohasi ustida berilgan ko'phad deyiladi. bu yerda k_i manfiy emas butun sonlar bo'lib $x^0=1$ va $x^k = x^k$ deb olinadi (1) ifodada uchraydigan x^i , $a_i x^{k_i}$ ($i=1, \dots, S$) simvollar deb qaraladi. x simvol odatda noma'lum ifoda deb yuritiladi. (1.1) ifodadagi a_i

lar (1.1) ko'phadning koeffitsiyentlari, $a_i X^{k_i}$ ($i=1,2,..S$) lar esa ko'phadning hadlari deyiladi.

Agar $a_s \neq 0$ bo'lsa, a_s bosh koeffitsiyent, $a_s X^{k_s}$ esa bosh had deyiladi.

Bir noma'lumli ko'phadlar odatda $f(x)$, $\varphi(x)$, $q(x)$... orqali belgilanadi. Ko'phadlarning o'zaro tengligi ular ustida bajariladigan amallarni qarashdan oldin quyidagilarni ta'kitlab o'tamiz.

1. Agar $a_1 = a_2 = \dots = a_{s-1} = 0$ bo'lib $a_s \neq 0$ bo'lsa, (1.1) ifodadan $a_s X^{k_s}$ Ifoda,
2. $a_1 = a_2 = \dots = a_{s-1} = 0$, $a_s = 1$ va $k_s = 1$ bo'lsa, (1.1) dan x ifoda;
3. $\forall k_i = 0$ va $a_1 = a_2 = \dots = a_{s-1} = 0$ da (1.1) dan $a_s = a = \text{const}$ hosil bo'lgani tufayli $a_s X^{k_s}$, x va istalgan o'zgarmas sonlar ham ko'phadlar deb qaraladi.

Faraz qilaaylik, $f(x)$ va $\varphi(x)$ lar R butunlik sohasi ustida berilgan ko'phadlar bo'lsin.

Ta'rif 1.2. Noma'lumning bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlari teng bo'lgan ko'phadlar o'zaro teng ko'phadlar deyiladi.

Masalan,

$$f(x) = x + x^2 + x^5 \text{ va } \varphi(x) = 0 + x + 0 \cdot x^2 + x^3 + 0 \cdot x^4 + x^5$$

ko'phadlar o'zaro teng

$$h(x) = x + x^2 + 3x^4 + x^5$$

va $q(x) = x + x^2 + 3x^4$ ko'phadlar o'zaro teng emas.

Bu ta'rifdan foydalanib biz har qanday $f(x)$ ko'phadni doimo quyidagicha yozish mumkinligiga ishonch hosil qilamiz.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad (1.2)$$

Darajaning ta'rifiga asosan agar $a_n \neq 0$ bo'lsa $f(x)$ ko'phad n - darajali deb yuritiladi a_0 esa ozod had deyiladi.

Ta'rif 1.3. Barcha koeffitsiyentlari nolga teng bo'lgan ko'phad nol ko'phad deyiladi.

Mazkur ta'rifga asosan kamida bitta koeffitsiyenti noldan farqli ko'phad nolmas ko'phad deb ataladi.

Faraz qilaylik n -darajali $f(x)$ ko'phad bilan birgalikda

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_sx^s \quad (1.3)$$

ko'phad ham berilgan bo'lsin, bunday holda ikkita $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadning yig'indisi deb ,

$$f(x) + \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\ell} C_{\nu} x^{\nu}$$

ko'phadni tushinamiz . bu yerda $t = \max(n, s)$, $C_{\nu} = a_{\nu} + b_{\nu}$ bo'lib $t > s$ bo'lganda

$$b_{s+1} = \dots = b_t = 0$$

deb, $t > n$ da esa $a_{n+1} = \dots = a_t = 0$ deb olinadi. Yana shuni

ta'kidlaymizki $a_0, b_{\nu} \in R \Rightarrow a_{\nu} + b_{\nu} \in R$ va yig'indi ko'phadning darajasi qo'shiluvchi ko'phadlar darajasidan katta emas, haqiqatdan agar $a_n = -b_n$ bo'lsa, yig'ndining darajasi qo'shiluvchi ko'phadlar darajasidan hatto kichik ham bo'lishi mumkin.

Ko'phadlar to'plamida ayirish amali o'rinli. Bu to'plamda nol element sifatida nol ko'phad qaraladi.

$f(x)$ ko'phad uchun qarama-qarshi element

$$-f(x) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n \quad \text{dan iborat.}$$

Endi $xa = ax$ tenglik bajariladi deb qarab ikkita $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phadning ko'paytmasi tushunchasini kiritamiz. Ikkita $f(x)$ va $\varphi(x)$ ko'phad ko'paytmasi deganda koeffitsiyentlari

$$d_{\nu} = \sum_{k+i=\nu}^{n+s} a_k b_i$$

Tenglik bilan aniqlanuvchi ko'phadni tushunamiz. Bu yerda

$$d_0 = a_0 b_0, \quad d_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$$

$$d_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0,$$

ko'phadlarning koeffitsiyentlari R butunlik sohasiga tegishli bo'lgani uchun

$a_n \neq 0$ va $b_s \neq 0$ bo'lganda $a_n b_s = d_{n+s} \neq 0$

bo'lib, $n(a_n \neq 0)$ va $s(b_s \neq 0)$ darajali ko'phadlar ko'paytmasining darajasi shu ko'phadlar darajalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Biz bundan buyon n darajali bir noma'lumli ko'phadlar to'plamini $R[x]$ deb belgilaymiz.

Teorema 1.1 Bir noma'lumli ko'phadlar to'plami $R[x]$ butunlik sohasini tashkil etadi

Isbot: Ikkita ko'phad yig'indisi va ko'paytmasi yana ko'phaddan iborat ekanligini biz yuqorida ko'rib o'tdik.

Endi ko'phadlar to'plami uchun halqaning boshqa shartlari bajarilishini ko'rsatamiz, chunki butunlik sohasini qism halqadan iboratligi bizga ma'lum.

1. haqiqatdan, agar a_ν va b_ν larni yuqoridagicha aniqlasak, quyidagilar bajariladi.

$$\forall a_\nu, b_\nu \in R \quad (a_\nu + b_\nu = b_\nu + a_\nu)$$

bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} f(x) + \varphi(x) &= \sum_{\gamma=0}^t (a_\gamma + b_\gamma) x^\gamma = \sum_{\gamma=0}^t (b_\gamma + a_\gamma) x^\gamma = \\ &= \sum_{\gamma=0}^t b_\gamma x^\gamma + \sum_{\gamma=0}^t a_\gamma x^\gamma = \varphi(x) + f(x) \end{aligned}$$

Yani ko'phadlarni qo'shish kommutativdir.

2. $f(x) \varphi(x) = \varphi(x) f(x)$ (ko'paytirish amali kommutativ) ko'phadlarning koeffitsiyentlari R butunlik sohasiga tegishli bo'lganiga ko'ra

$$\sum_{k+l=0}^{n+s} a_k b_l = \sum_{l+k=0}^{n+s} b_l a_k$$

bo'lgani tufayli $f(x) \varphi(x) = \varphi(x) f(x)$ bajariladi.

Yuqorida ko'rib o'tganimizdek $a_n \neq 0$ va $b_s \neq 0$ bo'lganda

$$d_{n+s} = a_n b_s \neq 0$$

Demak

$$F(x) = f(x) \varphi(x) = \sum_{k+l=0}^{n+s} a_k b_l x^{l+k} = \sum_{l+k=0}^{n+s} d_\gamma x^\gamma$$

Ko'phad ham nolga teng emas. Demak $R[x]$ to'plam nolning bo'luvchilariga ega emas.

3. ko'phadlar ko'paytmasi assoseativdir, ya'ni

$$f(x) \cdot (\varphi(x) \cdot q(x)) = (f(x) \cdot \varphi(x)) \cdot q(x) \quad (1.4)$$

$$4. \quad f(x) (\varphi(x) + q(x)) = f(x) \varphi(x) + f(x)q(x) \quad (1.5)$$

Ko'phadlarni ko'paytirish qo'shish amaliga nisbatan distributivdir.

Ta'rif 1.4 Agar ko'phadlarning koeffitsiyentlari biror P maydonga tegishli bo'lsa, $P[x]$ ga P maydon ustida qurilgan ko'phadlar halqasi deyiladi.

Ta'rif 1.5 $f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n \in R$ ifoda

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in R[x]$ ko'phadning $x=\alpha$ dagi qiymati

deyiladi. Agar $f(x) = \varphi(x)$ bo'lsa, ko'phadlarni algebraik ma'nodagi tengligi ta'rifiga binoan $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ kelib chiqadi. Lekin

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha)$$

Tasdiqdan $f(x) = \varphi(x)$ tenglik har doim ham kelib chiqavermaydi.

Ko'phadlarning qoldiqli bo'linishi.

Faraz qilaylik $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$ ko'phad berilgan bo'lsin. Darajasi n ga teng va bosh koeffitsiyenti $b_n \neq 0$ bo'lgan har qanday $\varphi(x)$ ko'phadning bosh koeffitsiyentini doimo 1 ga keltirib olish mumkin. Buning uchun $\frac{\varphi(x)}{b_n} = g(x)$

Ko'phadni qarash kifoya $g(x)$ ko'phaddan tashqari bosh koeffitsiyenti ixtiyoriy bo'lgan

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$$

$m \geq n$ darajali ko'phad berilgan bo'lsin.

Teorema 1.2. Har qanday $f(x)$ va $g(x)$ ko'phadlar uchun shunday $h(x)$ va $r(x)$ ko'phadlar mavjudki ular uchun

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) + r(x) \quad (1.6)$$

tenglik bajariladi va bu tenglikni qanoatlantiruvchi $h(x)$ va $r(x)$ lar yagona.

Isbot. Agar $f(x)$ ko'phaddan $a_mx^{m-n}g(x)$ ko'phadni ayirsak

$$f(x) - a_mx^{m-n}g(x) = r_1(x)$$

Ko'phadda a_mx^{m-n} had bo'lmaydi. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin. $r_1(x)$ ning darajasi

- a) $g(x)$ ning darajasidann kichik,
 - b) $g(x)$ ning darajasidan kichik emas,
- agar

a) hol yuz bersa, $h_\gamma = a_m x^{m-n}$;

$r(x)$ bo'lib, teorema isbotlangan bo'ladi. biz b) hol ustida to'xtab o'tamiz. Faraz qilaylik

$$r_1(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_k x^k$$

ko'rinishda bo'lsin.

Endi $g(x)$ ko'phadni $c_k x^{n-k}$ ga ko'paytirib natijani $r_1(x)$ dan ayiramiz

$$r_1(x) - C_k^{k-n} g(x) = r_2(x)$$

ko'phadda $c_k x^k$ had bo'lmaydi,

Chunki u ixchamlanib ketadi.

$$r_2(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_l x^l$$

bo'lsin.

Bu yerda yana yuqoridagi ikki holdan biri yuz berishi mumkin. Agar $l \geq n$ bo'lsa, quyidagi ayirmani tuzamiz.

$$r_2(x) - d_l x^{l-n} g(x) = r_3(x)$$

Bu protsesni davom ettirib biror ν qadamdan keyin

$$r_{\nu-1}(x) - t_\mu x^{\mu-n} g(x) = r_\nu(x)$$

Tenglikka erishamiz. Endi

$$f(x) - a_m x^{m-n} g(x) = r_1(x) ;$$

$$r_1(x) - C_k^{k-n} g(x) = r_2(x) ,$$

$$r_2(x) - d_l x^{l-n} g(x) = r_3(x) ,$$

.....

$$r_{\nu-1}(x) - t_\mu x^{\mu-n} g(x) = r_\nu(x)$$

tengliklarni hadlab qo'shamiz.

$$\text{Unda} \quad f(x) - (a_m x^{m-n} + C_k^{k-n} + d_l x^{l-n} + \dots + t_\mu x^{\mu-n}) g(x) = r_\nu(x)$$

hosil bo'ladi. Bu yerda

$$a_m x^{m-n} + C_k^{k-n} + \dots + t_\mu x^{\mu-n} = h(x)$$

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x)$$

hosil bo'ladi. $f(x) = g(x)h(x) + r(x)$ tenglikda $f(x)$ bo'linuvchi, $g(x)$ bo'livchi $h(x)$ chala bo'linma, $r(x)$ esa qoldiq ko'phadlr deyiladi. Bu teoremani ba'zan $f(x)$ ko'phadni $g(x)$ ko'phadga bo'lish algoritmi deb ham ataladi.

Ko'phad ildizlari va ko'phadni ikkihadga bo'lish.

R birlik elementga ega bo'lgan butunlik sohasi bo'lsin.

Ta'rif 1.6. Agar R butunlik sohasining biror a elementi uchun $f(a)=0$ tenglik chin bo'lsa, a element $f(x)$ ko'phadning ildizi deyiladi.

Baz'zan nol ko'phad cheksiz ko'p ildizlarga ega deb ham yuritiladi.

Teorema 1.3 (Bezu teoremasi). $f(x)$ ko'phadni $x-\alpha$ ga bo'lishdan chiqqan qoldiq $f(\alpha)$ ga teng bo'lib, bu yerda

$$f(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n$$

ifodani bildiradi.

Isbot. Bo'luvchi $x-\alpha$ ning darajasi 1 ga teng bo'lgani uchun $r(x)$ qoldiq yo nolinchi darajali ko'phad, yoki nol bo'lishi kerak.

$$f(x) = (x-\alpha)h(x) + r, \quad (1.7)$$

Bu tenglikda $x=\alpha$ desak $f(\alpha)=r$ ni hosil qilamiz.

Teorema 1.4 Agar $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ lar $f(x)$ ko'phadning har xil ildizlari bo'lsa, $f(x)$ ko'phad $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_k)$ ko'paytmaga bo'linadi.

Isbot. teorema isbotini matematik induksiya yordamida olib boramiz. $k=1$ da teoremaning chinligini biz yuqorida ko'rib o'tdik. Faraz qilaylik, teorema $n=k-1$ hol uchun chin bo'lsin, yani

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{k-1})g(x) \quad (1.8)$$

Bu tenglikga $x=\alpha_k$ ni qo'yamiz. U holda α_k ildiz bo'lgani tufayli $f(\alpha_k)=0$, demak $x=\alpha_k$ da

$$0 = (\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\dots(\alpha_k - \alpha_{k-1})g(\alpha_k) \quad (1.9)$$

hosil bo'ladi. R butunlik sohasi nolning bo'luvchilariga ega bo'lmaganligidan va $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \dots \neq \alpha_n$ shartga asosan $g(\alpha_k)=0$, ya'ni α_k son $g(x)$ ko'phadni ildizi ekan. Unda 1-teoremaga asosan

$$g(x) = (x-\alpha_k)h(x) \quad (1.10)$$

Endi (1.10) ni (1.8) ga qo'yamiz.

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{k-1})(x-\alpha_k)h(x).$$

teorema isbotlandi.

Natija. Noldan farqli $n \geq 1$ darajali ko'phad R butunlik sohasida n ta dan ortiq ildizga ega emas. Har qanday $n \geq 2$ darajali ko'phad kompleks sonlar maydonida doimo ildizga ega.

Ko'phadlarning bo'linishi.

Faraz qilaylik, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ko'phadning koeffitsiyentlari biror P sonlar maydoniga tegishli bo'lsin. Bunday holda $f(x)$ ko'phadni p sonlar maydoni ustida berilgan ko'phad deyilishi bizga ma'lum. Masalan.

$$f(x) = 3x^2 - 7x^2 - \sqrt{5}x - 3, \quad g(x) = ix^7 - 3x^2 + ix - 7$$

ko'phadlar mos ravishda haqiqiy va kompleks sonlar maydonlari ustida berilgan ko'phadlardir. $f(x)$ va $g(x)$ ko'phad uchun

$$f(x)=g(x)\varphi(x)+r(x) \quad (1.11)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi bir juft $g(x)$ va $r(x)$ ko'phadlar topilishi mumkin. (1.11)

tenglik ba'zan qoldikli bo'lish teoremasi ham deyiladi. Hususiy holda $r(x)=0$ bo'lsa, (1)

dan $f(x)=\varphi(x)\cdot g(x)$ tenglik hosil bo'ladi. Ko'phadlarning bo'linishi quyidagi hossalarga ega:

1. $f(x)/\varphi(x)\wedge\varphi(x)/\varphi(x)\Rightarrow f(x)/\varphi(x)$
2. $f_i(x)/\varphi(x)\Rightarrow(f_1(x)\pm f_2(x)\pm...\pm f_m(x))/\varphi(x), \quad (i=1,m)$
3. $(f_1(x)/\varphi(x)\vee f_2(x)/\varphi(x)\vee...\vee f_m(x)/\varphi(x))\Rightarrow f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot...\cdot f_m(x)/\varphi(x).$
4. $f_i(x) \quad (i=1,m)$ ko'phadlarning har biri $\varphi(x)$ ga bo'linib $g_i(x)$ lar ixtiyoriy ko'phadlar bo'lsa,

$$(f_1(x)g_1(x)\pm f_2(x)g_2(x)\pm...\pm f_m(x)g_m(x))/\varphi(x)$$

5. Istalgan $f(x)$ ko'phad har qanday nolinchi darajali ko'phadga bo'linadi.
6. $f(x)/\varphi(x)\Rightarrow f(x)/a\varphi(x), \quad (a\neq 0\in P)$
7. $f(x)\neq 0, \varphi(x)\neq 0$ ko'phadlar bir- biriga bo'linsa ular bir-biridan o'zgarmas $a\neq 0$ ko'paytuvchi bilangina farq qiladi.

2-§ . Ko'p noma'lumli ko'phadlar.

Ta'rif 2.1 Kamida ikkita o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan ko'phad ko'p noma'lumli ko'phad deyiladi. Ko'p noma'lumli ko'phadlar $2, 3, 4, \dots, n$ nomalumli bo'lishi mumkin. n noma'lumli ko'phad odatda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ orqali belgilanadi. n nomalumli ko'phad

$x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} \dots x_n^{k_n}$ ko'rinishdagi chekli sondagi hadlarning algebraik yig'indisidan iborat bo'lib, bu yerda $k_i \geq 0$ ($i=1, n$) lar P sonlar maydoniga tegishli bo'lgan butun sonlardir. Umuman olganda n noma'lumli ko'phadning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi.

$$A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} + A_2 x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} + A_k x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \dots x_n^{\omega_n} \quad (2.1)$$

$A_i \in P$ lar (2.1) ko'phad hadlarining koeffitsiyentlari deyiladi . Har bir

$A_i x_1^{\varphi_1} x_2^{\varphi_2} \dots x_n^{\varphi_n}$ qo'shiluvchi ko'phadning hadi , $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_n$

yig'indi esa bu hadning darajasi deb ataladi . Hamma

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

$$\beta_1 + \dots + \beta_n$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\omega_1 + \dots + \omega_n$$

yig'indilar orasida eng kattasi (2.1) ko'phadning darajasi deyiladi. Masalan ratsional sonlar maydoni ustidagi

$$x_1^2 x_2 x_3^3 + 7x_2^4 x_4 + 5x_3^2 x_4^3 - x_1$$

ko'phadda birinchi

$$x_1^2 x_2 x_3^3 = x_1^2 x_2 x_3^3 x_4$$

hadning darajasi $2+1+3+0=6$ ga, ikkinchi

$$7x_2^4x_4 = 7x_1^0x_2^4x_3^0x_4$$

ko'phadning darajasi $4+1=5$ ga, uchinchi

$$5x_3^2x_4^3 = 5x_1^0x_2^0x_3^2x_4^3$$

hadning darajasi ham $2+3=5$ ga va nihoyat, to'rtinchi $x_1 = x_1x_2^0x_3^0x_4^0$ hadning darajasi 1 ga, ko'phadning darajasi esa 6 ga teng, (2.1) ko'phadning ba'zi yoki hamma koeffitsiyentlari shuningdek ba'zi yoki hamma $\alpha_i, \beta_i, \dots, \omega_i$ daraja ko'rsatkichlari nolga teng bo'lishi mumkin. Masalan, $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$, $A_2=A_3=\dots=A_k=0$ bo'lib A_1 koeffitsiyent P maydonning istalgan elementini bildirsa, (2.1) ko'phad $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=A_1$ ko'rinishni oladi. Demak P maydonning hamma elementlari ham n o'zgaruvchili ko'phadlar deb hisoblanadi. Xususiyl holda $A_2=A_3=\dots=A_k=0$ qiymatlar uchun nol ko'phad xosil bo'ladi biz uni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$

Ko'rnishda belgilaymiz. $A_1 \neq 0$ holda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)=A_1$ ni nolinch darajali ko'phad deymiz. (2.1) ko'phaddagi $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar bir-biriga bog'liq emas, ularning har qaysisi mustaqil ravishda istalgan son qiymatni qabul qila oladi deb hisoblaymiz. Boshqacha aytganda har bir x_i o'zgaruvchining qiymatlari qolgan o'zgaruvchilarning qiymatlari bilan aniqlanmaydi, ya'ni x_i o'zgaruvchi qolgan o'zgaruvchilarning funksiyasi emas. Bunday o'zgaruvchilar odatda erkli o'zgaruvchilar deyiladi. Aytilganlardan quyidagi natija chiqadi. Hamma $A_1, \dots, A_k$ koeffitsiyentlardan aqalli bittasi nolga teng bo'lmasa (2.1) ko'phad ham nolga teng bo'la olmaydi. Haqiqatan,

$$A_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n} + A_2x_1^{\beta_1}x_2^{\beta_2}\dots x_n^{\beta_n} + \dots + A_kx_1^{\omega_1}\dots x_n^{\omega_n} = 0$$

tenglikdan har bir x_i ($i=1, n$) qolgan o'zgaruvchilarning oshkormas funksiyasi ekanini ko'ramiz. Demak $A_2 = A_3 = \dots = A_k$ shartdagina (2.1) ko'phad aynan nolga teng.

Ta'rif 2.2 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'phadlardan har birining istalgan

$A_1x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ hadi uchun ikkinchisining ham xuddi shunday hadi mavjud bo'lsagina bu ikki ko'phad bir-biriga teng deyiladi.

Ta'rif 2.3 (2.1) Ko'phadning hamma hadlari bir xil m-darajali bo'lsa, ko'phad m-darajali bir jinsli ko'phad yoki m-darajali forma deyiladi.

Masalan.

$$2x_1 x_2^3 x_3^2 - x_1^2 x_3^4 + 7x_2 x_3^5 - 4x_1^3 x_2^2 x_3$$

ko'phad 6-darajali formadir. Birinchi darajali forma chiziqli forma, ikkinchi darajali forma kvadratik forma, uchinchi darajali forma esa kubik forma deyiladi.

Endi P sonlar maydoni ustida berilgan ikkita n no'malumli ko'phad uchun qo'shish va ko'paytirish amallarini kiritamiz.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ va } \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ko'phadlarni qo'shish deb, ulardagi mos hadlarning koeffitsiyentlarini qo'shishni tushunamiz.

$$k_i = \beta_i \quad (i = 1, n) \text{ bo'lganda}$$

$$A_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n} \quad (2.2)$$

va

$$B x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} \quad (2.3)$$

hadlar mos yoki o'xshash hadlar deyiladi. Agar biror had f va φ ko'phadlarning faqatgina bittasida uchrasa ikkinchi ko'phaddagi maskur hadning koeffitsiyenti nol deb olinadi.

Ikkita (2.2) va (2.3) kabi hadlarning ko'paytmasi deb

$$A B x_1^{k_1+\beta_1} \cdot x_2^{k_2+\beta_2} \cdot \dots \cdot x_n^{k_n+\beta_n} \quad (2.4)$$

Ifodani tushunamiz. Masalan kompleks sonlar maydoni ustida

$f(x_1, x_2, x_3) = (1+i) x_1 x_2 - i x_2 x_3^2 + x_2$ va $\varphi(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 x_2 + i x_3$ ko'phadlarning yig'indisi, ayirmasi va ko'paytmasi quyidagilarga teng.

$$f(x_1, x_2, x_3) + \varphi(x_1, x_2, x_3) = (4+i) x_1 x_2 - i x_2 x_3^2 + x_2 + i x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3) = (-2+i) x_1 x_2 - i x_2 x_3^2 + x_2 - i x_3$$

$$f(x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3) = (3+3i) x_1^2 x_2^2 + (i-1) x_1 x_2 x_3 - 3i x_1 x_2^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2 + 3x_1 x_2^2$$

Teorema 2.1 n - noma'lumli ko'phadlar to'plami halqa tashkil qiladi.

Isboti. Teorema isbotini noma'lumlar soniga nisbatan induksiya metodi asosida olib boramiz. $n=1$ da biz bir noma'lumli ko'phadlar to'plamiga ega bo'lamiz. Ma'lumki bu ko'phadlar to'plami halqa tashkil etar edi va bu halqa

nolning bo'luvchilariga ega emas.

Faraz qilaylik teorema $k=n-1$ hol uchun to'g'ri bo'lsin. Boshqacha aytganda barcha $n-1$ noma'lumli ko'phadlar to'plami nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan halqa bo'lsin.

Teoremani $k=n$ hol uchun to'g'riligini ko'rsatamiz. P sonlar maydoni ustida berilgan n noma'lumli ko'phadni 1 ta x_n noma'lumli ko'phad deb qarab, bu ko'phad koeffitsientlarining har biri $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ noma'lumli ko'phadlar bo'ladi.

Koeffitsiyentlar to'plamini $R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ desak farazimizga asosan

$R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan halqalardir.

Ikkinchi tomondan bitta x_n noma'lumli ko'phadlar to'plami

$R[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ ustida halqa tashkil etadi. Bu halqa biz izlagan n noma'lumli ko'phadlar halqasidan iborat bo'lib, u odatda $P[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n]$ orqali begilanadi. $P[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan kommutativ halqa bo'lganligidan $P[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}]$ ham P sonlar maydoni ustida qurilgan, nolning bo'luvchilariga ega bo'lmagan kommutativ halqadir. Ma'lumki bunday halqalar odatda birlik elementga ega bo'lgan butunlik sohasini tashkil qilar edi. Demak n noma'lumli ko'phadlar to'plami ham birlik elementga ega bo'lgan butunlik sohasidan iborat ekan.

II - BOB

Simmetrik ko'phadlar

1-§. Simmetrik ko'phadlar va ularning simmetrik funksiyalari . **Tarif 1.1** $x_1, x_2, \dots, x_n$ larni bir biri bilan har qanday almashtirilganda ham o'zgarmaydigan $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'phad shu o'zgaruvchilarning simmetrik ko'phadi yoki simmetrik funksiyasi deyiladi.

n o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlarning algebraik yig'indisi va ko'paytmasi yana n o'zgaruvchili simmetrik funksiyalarni ifodalaydi.

Haqiqatdan o'zgaruvchilarning istalgan o'rin almashtirishida har qanday simmetrik funksiya o'zgarmasa ravshanki ularning algebraik yig'indisi va ko'paytmasi ham ozgarmaydi.

Ta'rif 1.2 $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilardan tuzilgan

$$g_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$g_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$$

$$g_3 = x_1x_2x_1 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$$

.....

$$g_n = x_1x_2x_3 \dots x_n \quad (1.1)$$

simmetrik funksiyalar oddiy simmetrik funksiyalar deyiladi.

Teorema 3.1 P maydon ustidagi $g_1, g_2, \dots, g_n$ asosiy simmetrik funksiyalarning $A_1 g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} + A_2 g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n} + A_k g_1^{\omega_1} g_2^{\omega_2} \dots g_n^{\omega_n}$ (1.2)

ko'phadi faqat $A_1 = A_2 = \dots = A_k = 0$

shartdagina nolga teng bo'la oladi.

Isboti : (1.2) ko'phadning har bir

$A_i g_1^{\gamma_1} \dots g_n^{\gamma_n}$ (1.3) hadi ma'lumki $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning biror ko'phadidan iborat chunki (3.3) ga

$$g_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$g_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n$$

$$g_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n$$

$$g_n = x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

qiymatlarni quyib, ko'rsatilgan amallarni bajarsak, xuddi aytilgan ko'phad kelib chiqadi . Bu (1.3) ko'phadning eng yuqori hadini topamiz.

$g_1, g_2, \dots, g_n$ ning eng yuqori hadlari mos ravishda

$$x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, \dots, x_1 x_2 x_3 \dots x_n$$

bo'lgani uchun teorema asosan (3.3) ko'paytmasining eng yuqori hadi

$$A_i x_1^{\gamma_1} (x_1 x_2)^{\gamma_2} (x_1 x_2 x_3)^{\gamma_3} \dots (x_1 x_2 \dots x_n)^{\gamma_n} = A_1 x_1^{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n} \cdot x_2^{\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_n} \cdot \dots \cdot x_n^{\gamma_n} \quad (1.4)$$

bo'ladi. Xuddi shu yo'l bilan (1.3) yig'indidagi har bir qo'shiluvchining eng yuqori hadini aniqlab chiqamiz. Bu yuqori hadlar orasida bir biriga o'xshash hadlar yo'q. Haqiqatdan agar (1.4) va biror boshqa yuqori hadni bir biriga o'xshash desak ,

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$$

$$\gamma_2 + \gamma_3 + \dots + \gamma_n = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n$$

$$\gamma_n = \delta_n,$$

tengliklardan $\gamma_1 = \delta_1, \gamma_2 = \delta_2, \dots, \gamma_n = \delta_n$, ni topamiz. Bu esa (1.3) ko'phadning

$A_i g_1^{\gamma_1} g_2^{\gamma_2} \dots g_n^{\gamma_n}$ va $A_j g_1^{\delta_1} g_2^{\delta_2} \dots g_n^{\delta_n}$ hadlari o'xshash ekanini ko'rsatadi.

Ammo bizga ma'lumki o'xshash hadlari yo'q deb faraz qila olamiz. Endi aytilgan yuqori hadlar orasida eng yuqorisi, masalan

$$A_1 x_1^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} x_n^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.5)$$

bo'lsin. Bu vaqtda ravshanki (3.2) ni $x_1, x_2, \dots, x_n$ ning ko'phadi deb qarasak (1.5) had eng yuqori hadi bo'ladi. Shu sababli (1.2) ni

$$A_1 x_1^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} x_n^{\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n} \dots x_n^{\alpha_n} + Q \quad (1.6)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bunda Q qolgan hadlarning yig'indisi $A_1 \neq 0$ holda (1.6) yig'indi va (2) ham nolga teng bo'la olmaydi. $A_1 = 0$ holda ko'phad

$$A_2 g_1^{\beta_1} \dots g_n^{\beta_n} + A_k g_1^{\omega_1} \dots g_n^{\omega_n}$$

ko'rinishni oladi. Yuqoridagi mulohazani takrorlab $A_1 \neq 0$ holda bu ko'phadning nolga teng emasligi isbotlaymiz. Bu teoremaga asosan ikki $f(g_1, g_2, \dots, g_n)$ va $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_n)$ ko'phaddan har birining hadlari ikkinchisining hadlariga aynan teng bo'lgan holdagina mazkur ko'phadlar bir-biriga teng degan natijaga kelamiz.

Haqiqatan bir ko'phaddan $A_1 g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}$ had mavjud bo'lib ikkinchisida bo'lmasa ikkinchi ko'phadga

$$O g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n}$$

Hadni qo'shish mumkinligini nazarda tutib, ikkala ko'phadni

$$f(g_1, g_2, \dots, g_n) = A_1 g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \dots g_n^{\alpha_n} + A_2 g_1^{\beta_1} g_2^{\beta_2} \dots g_n^{\beta_n} + \dots + A_k g_1^{\gamma_1} g_2^{\gamma_2} \dots g_n^{\gamma_n}$$

ko'rinishda yoza olamiz.

1.2-Teorema. (Simetrik ko'plar nazariyasining asosiy teoremasi) $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning P maydon ustidagi har bir $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik ko'phadini $g_1, g_2, \dots, g_n$ asosiy simmetrik funksiyalarning shu P maydon ustidagi ko'phadi shaklida birdan - bir usul bilan tasvirlash mumkin.

Isboti. Faraz qilaylik $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik ko'phad va

$$A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.7)$$

Uning eng yuqori hadi bo'lsin. (1.7) haddagi noma'lumlarni daraja ko'rsatkichlari $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_n$, tengsizliklarni qanoatlantiradi. Haqiqatan simmetrik funksiyada x_1 va x_2 ni bir - biri bilan almashtirsak, ma'lumki funksiya uzgarmaydi. Bu almashtirish natijasida (1.7) had shu simmetrik funksiyaning $A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ hadiga o'tadi. Ammo (1.7) eng yuqori had bo'lgani uchun $\alpha_1 \geq \alpha_2$

Shuningdek simmetrik funksiyada x_2 va x_3 o'zaro (1.7) had berilgan ko'phadning $A_1 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ hadiga o'tadi va bundan $\alpha_2 \geq \alpha_3$ hosil bo'ladi. $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning $g_1, g_2, \dots, g_n$ asosiy simmetrik funksiyalarini olib, shu o'zgaruvchilarning simmetrik funksiyasi bo'lgan ushbu

$$(1.8)$$

Ko'paytmasini tuzamiz $Ag_1^{\alpha_1 - \alpha_2} g_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots g_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} g_n^{\alpha_n}$ ning eng yuqori hadlari mos ravishda $x_1, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3, \dots, x_1 x_2 x_3 \dots x_n$ bo'lganligi sababli ko'paytmaning eng yuqori hadi $Ax_1^{\alpha_1 - \alpha_2} (x_1 x_2)^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\alpha_n} = Ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$

bo'ladi. Bunda huddi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyaning eng yuqori hadi kelib chiqqanini ko'ramiz. Shu sababli ikki simmetrik funksiyaning ayirmasi bo'lgan $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) - Ag_1^{\alpha_1 - \alpha_2} g_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots g_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} g_n^{\alpha_n}$

simmetrik funksiyada (1.7) had yo'q hamda $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ funksiyadagi hamma hadlar (1.7) haddan pastdir. Xddi shu mulohazani $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ga nisbatan takrorlab

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) - Bg_1^{\beta_1 - \beta_2} g_2^{\beta_2 - \beta_3} \dots g_{n-1}^{\beta_{n-1} - \beta_n} g_n^{\beta_n}$$

simmetrik funksiyani tuzamiz. Uning hadlari $F_1, (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ning eng yuqori hadidan pastdir va hokazo. Bu protsess cheksiz emas. Haqiqatan $F_1, F_2, \dots, F_n$ simmetrik funksiyalardan istalganini eng yuqori hadini $MX_1^{\lambda_1} X_2^{\lambda_2} \dots X_n^{\lambda_n}$ (1.9) bilan belgilasak

$$\alpha_1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n,$$

tenglikga ega bo'lamiz.

Ammo bu tengsizlikni faqat chekli sondagi

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$, ko'rsatkichlar qanoatlantirishi mumkin. Demak (1.9) ko'rinishdagi eng yuqori hadlarining shuningdek

$F_1, F_2, F_3, \dots, F_n \dots$ funksiyalarning soni faqat chekli bo'la oladi. Shunday qilib chekli sondagi qadamdan keyin $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik funksiya $g_1, g_2, \dots, g_n$ ning o'sha P maydon ustidagi ko'phadi sifatida tasvirlanadi.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(g_1, g_2, \dots, g_n) \quad (1.10)$$

Endi (1.10) tasvirlashning yagona ekanligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ simmetrik funksiya (1.10) dan boshqa yana $g_1, g_2, \dots, g_n$ ning ikkinchi ko'phadi bilan tasvirlansin.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi(g_1, g_2, \dots, g_n) \quad (3.11)$$

(3.10) va (3.11) dan $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_n) = \gamma(g_1, g_2, \dots, g_n)$ tenglikga kelamiz. Bu tenglik esa $\varphi(g_1, g_2, \dots, g_n)$ va $\gamma(g_1, g_2, \dots, g_n)$ ko'phadlardan har birining hadlari aynan teng ya'ni bu ko'phadlar aslida bitta ko'phad ekanini ko'rsatadi.

2-§. Ikki o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlar va ularning elementar algebra masalalariga tadbiri.

Biz yuqorida n o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlar bilan tanishdik, endi bundan buyon ikki o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan simmetrik ko'phadlar bilan shug'ulanamiz.

$x+y$ va xy ko'phadlar eng sodda simmetrik ko'phadlar hisoblanadi, bularni elementar simmetrik ko'phadlar deb ataymiz, bular uchun maxsus belgilashlardan foydalanamiz.

$$\sigma_1 = x_1 + y, \quad \sigma_2 = xy$$

σ_1 va σ_2 dan tashqari bizga darajali yig'indilar deb ataluvchi yani

$x^2 + y^2, x^3 + y^3, \dots, x^n + y^n$ ko'rinishdagi ko'phadlar ham uchrab turadi. $x^n + y^n$ ko'phadni S_n orqali belgilash qabul qilingan. Xuddi shuningdek

$$S_1 = x + y$$

$$S_2 = x^2 + y^2$$

$$S_3 = x^3 + y^3$$

.....

$$S_n = x^n + y^n$$

Endi ikki o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlar haqidagi asosiy teoremaga to'xtalib o'tamiz.

Simmetrik ko'phad hosil qilish uchun eng sodda yo'l bor. σ_1 va σ_2
lardan tuzilgan ixtiyoriy simmetrik bo'lmagan ko'phad olaylik va σ_1 va σ_2 larning o'rniga ularni "x" va "y" orqali ifodalovchi qiymatlarini qo'yamiz. Bundan ko'rinadiki,

bu bilan biz “x” va “y” lardan tuzilgan simmetrik ko’phadni hosil qilgan bo’lamiz. (chunki $\sigma_1 = x+y$ va $\sigma_2 = xy$ larning qiymati “x” va “y” larning o’rinlarini almashtirgan bilan o’zgarmaydi).

Masalan. $\sigma_1^3 - \sigma_1\sigma_2$ ko’phaddan quyidagi simmetrik ko’phadni hosil qilamiz:

$$(x+y)^3 - (x+y)xy = x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3$$

Demak σ_1 va σ_2 lardan tuzilgan ixtiyoriy ko’phad olsak va σ_1 va σ_2 larning o’rniga ularning $\sigma = x+y$ va $\sigma_2 = xy$ qiymatlarini qo’ysak, u holda “x” va “y” orqali ifodalanuvchi simmetrik ko’phadga ega bo’lamiz.

Shunday savol tug’iladi. Simmetrik ko’phadlarni tuzishda shu usul umumiy bo’la oladimi, ya’ni shu usul orqali istalgan simmetrik ko’phadni hosil qilish mumkinmi? Biz bir necha misollarni qarab chiqamiz. Bu esa bizga yuqoridagi taxminni oydinlashtiradi.

Masalan $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ darajali yig’indilar σ_1 va σ_2 orqali osongina ifodalanadi.

$$S_1 = x+y = \sigma_1 ;$$

$$S_2 = x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 ;$$

$$S_3 = x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2) = (x+y) [(x+y)^2 - 3xy] = \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) ;$$

$$S_4 = x^4+y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2^2$$

Misol sifatida quyidagi simmetrik ko’phadni olamiz :

$$x^3y + xy^3 \text{ bundan biz } x^3y + xy^3 = xy(x^2 + y^2) = \sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)$$

ga egamiz.

Keyingi misollarning tahlili ham shunday natijani beradi: Biz qanday simmetrik ko’phad olmaylik, ko’pmi yoki ozmi murakkab hisoblashlardan so’ng uni elementar simmetrik ko’phad σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalashga muyassar bo’lamiz. Shunday qilib yuqoridagi misollar bizni quyidagi teorema to’g’ri degan farazga olib keladi.

Teorema 2.1 “x” va “y” lardan tuzilgan ixtiyoriy simmetrik ko’phadni $\sigma = x+y$ va $\sigma_2 = xy$ lardan tuzilgan ko’phad ko’rinishda ifodalanish mumkin.

Ma'lumki olingan mingta misol ham teorema isbotini o'rnini bosa olmaydi, chunki har doim ham ming birinchi misol σ_1 va σ_2 orqali ifodalanmaydigan bo'lib chiqib qolishi mumkin degan haf turadi. Yuqorida keltirilgan teorema isbot qilishga o'tamiz va uni ikki usul bilan amalga oshiramiz.

Darajali yig'indilarni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalash teoremani avval biz simmetrik ko'phad uchun emas faqatgina darajali yig'indilar uchun isbot qilamiz. Boshqacha qilib aytganda biz har bir darajali yig'indi $S_n = x^n + y^n$ ni σ_1 va σ_2 lardan tuzilgan ko'phad ko'rinishda tasvirlash mumkinligi ko'rsatamiz. Shu maqsadda

$S_{k-1} = x^{k-1} + y^{k-1}$ tenglikni har ikkala tomonini $\sigma_1 = x+y$ ga ko'paytiramiz va quyidagini hosil qilamiz.

$$\sigma_1 S_{k-1} = (x^{k-1} + y^{k-1})(x+y) = x^k + xy^{k-1} + x^{k-1}y + y^k = x^k + y^k + xy(x^{k-2} + y^{k-2}) = S_k + \sigma_2 S_{k-1}$$

xuddi shu yo'l bilan

$$S_k = \sigma_1 S_{k-1} - \sigma_2 S_{k-2} \quad (2.1)$$

ga ega bo'lamiz. Bu formuladan bizning tasdiqimizning to'g'riligi kelib chiqadi. Biz sal ilgariroq darajali yig'indi S_1 va S_2 lar σ_1 va σ_2 lardan tuzilgan ko'phad ko'rinishda tasvirlashni tekshirgan edik. Bizga darajali yig'indi $S_1, S_2, \dots, S_{k-2}, S_{k-1}$ larni σ_1 va σ_2 lardan tuzilgan ko'phad ko'rinishda ifodalash ma'lum bo'lsa, u holda bu ifodalarni (2.1) formulaga qo'yib darajali yig'indi S_k ni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodasini hosil qilamiz.

Biz darajali yig'indilar S_1 va S_2 ni bilib (2.1) formula orqali S_3 , keyin S_4 , S_5 va hokazolarning σ_1 va σ_2 orqali ifodalanishini ketma-ket topishimiz mumkin.

Ravshanki, ertami kechmi ixtiyoriy darajali yig'indi S_n larni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalay olamiz.

Shu bilan bizning tasdiqimiz isbot qilindi.

Ko'rilgan isbotning asosini tashkil qiluvchi (2.1) formula S_n ni qandaydir σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalanishini tasdiqlabgina qolmay balki σ_1 va σ_2 orqali ifodalangan S_n darajali yig'indilarni ketma-ket hisoblashda ham yordam beradi. Shunday qilib bir formula yordamida biz ketma-ket quyidagilarni topamiz.

$$S_3 = \sigma_1 S_2 - \sigma_2 S_1 = \sigma_1 (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 ;$$

$$S_4 = \sigma_1 S_3 - \sigma_2 S_2 = \sigma_1 (\sigma_1^3 - 3\sigma_2 \sigma_1) - \sigma_2 (\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_2^2;$$

$$S_5 = \sigma_1 S_4 - \sigma_2 S_3 = \sigma_1 (\sigma_1^4 - 4\sigma_2 \sigma_1^2 + 2\sigma_2^2) - \sigma_2 (\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2) = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3 \sigma_2 + 5\sigma_1 \sigma_2^2;$$

Quyidagi jadvalda yig'indi $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ larni σ_1 va σ_2 orqali ifodalanishi keltirilgan. Bu keltirilgan ifodalar bizga misollar yechguncha kerak bo'ladi.

$$S_1 = \sigma_1$$

$$S_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2;$$

$$S_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2;$$

$$S_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_2 \sigma_1^2 + 2\sigma_2^2;$$

$$S_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3 \sigma_2 + 5\sigma_1 \sigma_2^2;$$

$$S_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4 \sigma_2 + 9\sigma_1^2 \sigma_2^2 - 2\sigma_2^3;$$

$$S_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5 \sigma_2 + 14\sigma_1^3 \sigma_2^2 - 7\sigma_1 \sigma_2^3;$$

$$S_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6 \sigma_2 + 20\sigma_1^4 \sigma_2^2 - 16\sigma_1^2 \sigma_2^3 + 2\sigma_2^4;$$

$$S_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7 \sigma_2 + 27\sigma_1^5 \sigma_2^2 - 30\sigma_1^3 \sigma_2^3 + 9\sigma_1 \sigma_2^4;$$

$$S_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8 \sigma_2 + 35\sigma_1^6 \sigma_2^2 - 50\sigma_1^4 \sigma_2^3 + 25\sigma_1^2 \sigma_2^4 - 2\sigma_2^5;$$

Endi yuqoridagi keltirilgan teoremani isbotini yakunlash qiyin emas “x” va “y” lardan tuzilgan simmetrik ko'phad ikki ko'rinishdagi qo'shiluvchilarni o'z ichiga oladi. Birinchidan “x” va “y” ning darajalari bir xil bo'lgan birhadlar uchrashi mumkin, ya'ni $ax^k y^k$ ko'rinishdagi birhadlar. Ma'lumki bunday birhadlar

$$ax^k y^k = a(xy)^k = a\sigma_2^k$$

korinishdagi bevosita σ_2 orqali ifodalanadi. Ikkinchidan “x” va “y” ga nisbatan turli darajalarda bo'lgan birhadlar uchrashi mumkin ya'ni $bx^k y^l$ birhad, bu yerda $k \neq l$ ko'rinishdagi birhadlar. Ma'lumki simmetrik ko'phad $bx^k y^l$ birhad bilan bir qatorda $bx^l y^k$ birhadni ham o'z ichiga oladi. $Bx^l y^k$ birhadni $bx^k y^l$ birhaddagi “x” va “y” larning o'rinlarini almashtirishdan hosil qilinadi. Boshqacha qilib aytganda simmetrik ko'phadga

$$b(x^k y^l + x^l y^k)$$

ko'rinishdagi ikkihad kiradi. Aniqlik uchun $k < l$ deb faraz qilib bu ko'phadni quyidagicha yozish mumkin.

$$b(x^k y^l + x^l y^k) = b x^k y^k (y^{l-k} + x^{l-k}) = b \sigma_2^k S_{l-k}$$

bu isbotga ko'ra darajali yig'indi S_{l-k} , σ_1 va σ_2 dan iborat ko'phad ko'rinishda tasvirlanadi, u holda qaralayotgan ikki had σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalanadi. Demak, har bir simmetrik ko'phad har biri σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalanuvchi $ax^k y^k$ ko'rinishdagi birhad va $b(x^k y^l + x^l y^k)$ ko'rinishdagi ikkihadlar yig'indisi sifatida tasvirlanadi. Bundan kelib chiqadiki: istalgan birhadni σ_1 va σ_2 lardan iborat ko'phad ko'rinishda ifodalanar ekan.

Demak teorema to'liqligicha isbot qilindi.

Misol.

$$f(xy) = x^5 - 3x^3 y^2 - x^3 y^3 + 2xy^4 - 7x^2 y^2 + y^5 + 3x^2 y^3 - 5xy^3 - 5x^3 y + 2x^4 y.$$

Hosil bo'lgan bu ifodani isbotda ko'rsatilgandek birhad va ko'phadlarni ajratib,

$$f(x,y) = -x^3 y^3 - 7x^2 y^2 + (x^5 + y^5) + 3(x^3 y^2 + x^2 y^3) + 2(xy^4 + x^4 y) - 5(x^3 y + xy^3).$$

ga ega bo'lamiz yoki boshqacha qilib

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -(xy)^3 - 7(xy)^2 + (x^5 + y^5) + 3(xy)^2(x+y) + 2xy(x^3 + y^3) - 5xy(x^2 + y^2) = \\ &= -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + S_5 + 3\sigma_2^2 \sigma_1 + 2\sigma_2 S_3 - 5\sigma_2 S_2 \end{aligned}$$

Darajali yig'indi S_2 , S_3 va S_5 larni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalab natijada quyidagiga ega bo'lamiz.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + 5(\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3 \sigma_2 + 5\sigma_1 \sigma_2^2) + 2\sigma_2(\sigma_1^2 - 3\sigma_1 \sigma_2) - 5\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) = \\ &= -\sigma_2^3 - 7\sigma_2^2 + \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3 \sigma_2 + 5\sigma_1 \sigma_2^2 + 3\sigma_2^2 \sigma_1 + 2\sigma_2 \sigma_1^3 - 6\sigma_1 \sigma_2^2 - 5\sigma_1^2 \sigma_2 + 10\sigma_2^2 = \\ &= \sigma_1^5 - 3\sigma_1^3 \sigma_2 - 5\sigma_1^2 \sigma_2 + 2\sigma_1 \sigma_2^2 - \sigma_2^3 + 3\sigma_2^2 \end{aligned}$$

(qiymatlar jadvalidan olinadi)

Endi teoremaning yaqinligini qarab chiqamiz.

Biz ko'rdikki agar "x" va "y" lardan tuzilgan simmetrik ko'phad berilgan bo'lsa, uni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalash qiyin emas. Yuqorida keltirilgan asosiy teoremaning isboti, ixtiyoriy $f(x,y)$ simmetrik ko'phadni σ_1 va σ_2 elementar simmetrik ko'phadlar orqali ifodalash mumkinligini o'z ichiga oladi. $f(x,y)$ ko'phadni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodasini topishning

boshqacha yo'li yoqmikan degan savol tug'iladi. Yuqoridagilardan ko'rinadiki bu mumkin emas ekan. $f(x,y)$ simmetrik ko'phadni σ_1 va σ_2 lar orqali ifodalash uchun qanday yo'l topmaylik, biz har doim bir xil natijaga erishamiz. Demak quyidagi teorema o'rinli:

Teorema 2.2 (Yagonalik haqida).

$\varphi(\sigma_1 \sigma_2)$ va $\Psi(\sigma_1 \sigma_2)$ ko'phadlar $\sigma_1 = x+y$ $\sigma_2 = xy$ larni o'rniga qo'yish bilan ular bir xil $f(x,y)$ simmetrik ko'phadga aylansa, u holda ular teng bo'ladi, ya'ni $\varphi(\sigma_1 \sigma_2) = \Psi(\sigma_1 \sigma_2)$

Bu teoremani $f(x,y)=0$ bo'lgan hol uchun isbot qilish yetarlidir, boshqacha qilib aytganda quyidagi mulohazani isbot qilish kifoyadir.

(A) Agar $\Phi(\sigma_1 \sigma_2)$ ko'phad $\sigma = x+y$ va $\sigma_2 = x y$ larni qo'shish bilan nolga aylansa u holda u aynan nolga teng bo'ladi.

Yagonalik teoremasini (A) tasdiqdan kelib chiqishini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ va $\psi(\sigma_1, \sigma_2)$ ko'phadlar

$\sigma_1 = x+y$ va $\sigma_2 = x y$ larni qo'yganda bir xil natija bersin, ya'ni

$$\varphi(x+y, xy) = \psi(x+y, xy)$$

bo'lsa, u holda $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ ko'phad

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = \varphi(\sigma_1 \sigma_2) - \psi(\sigma_1, \sigma_2)$$

o'sha o'ringa qo'yishda nolga aylanadi.

$$\Phi(x+y, xy) = \varphi(x+y, xy) - \psi(x+y, xy) = 0$$

Shuning uchun agar (A) mulohaza to'g'ri bo'lsa, u holda

$$\Phi(\sigma_1 \sigma_2) = 0 \text{ va } \varphi(\sigma_1 \sigma_2) = \psi(\sigma_1 \sigma_2)$$

bo'ladi. (A) mulohazani isbotlash uchun bizga ikki o'zgaruvchili ko'phadni yuqori hadi haqidagi tushuncha kerak bo'ladi.

$Ax^k y^l$ va $Bx^m y^n$ lar "x" va "y" lardan tuzilgan ikkita birhadlar bo'lsin. Ularning kattaligini "x" ning darajalarini taqqoslash bilan aniqlanadi. Agar ular teng bo'lsa "y" ning darajalari bo'yicha topiladi. Boshqacha qilib aytganda $Ax^k y^l$ birhad $Bx^m y^n$ dan katta bo'ladi, agar

$k > m$ bo'lsa, yoki $k = m$ va $l > n$ bo'ladi. Masalan x^4y^2 birhad x^2y^7 birhaddan katta x^4y^6 birhad esa x^4y^5 dan katta.

Ravshanki, agar Ax^ky^l katta Bx^my^n va Bx^my^n katta Cx^py^q bo'lsa, u holda Ax^ky^l ham Cx^py^q dan katta bo'ladi.

Endi quyidagi lemmani isbot qilamiz.

Lemma : $(x+y)^k(xy)^l$ ifodadagi qavslarni ochgandan keyin hosil bo'ladigan ko'phadning eng katta hadi $x^{k+l}y^l$ ga teng bo'ladi.

$(x+y)^k(xy)^l$ ifodani quyidagicha yozish mumkin.

$$\underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)x^ly^l}_{k\text{-marta}}$$

Ravshanki, har bir qavsdagi qo'shiluvchi „x” larni olsak, „x”ning yuqori darajasini hosil qilamiz. Qavslar soni k ga teng bo'lgani uchun bu had $x^{k+l}y^l$ ko'rinishni oladi, qolgan barcha hadlarda „x” darajalari „ $k+1$ ”dan kichik. Shunday ekan $x^{l+k}y^l$ yuqori

haddir. Lemma isbotlandi.

Aytaylik $(x+y)^k(xy)^l$ ifoda $\sigma_1 = x+y$ va $\sigma_2 = x y$ almashtirish natijasida $\sigma_1^k \sigma_2^l$ birhad hosil bo'lsin. Isbotlangan lemmaga ko'ra

$\sigma_1^k \sigma_2^l$ birhad yordamida birgina tegishli yuqori hadni yozish mumkin, teskarisi ham o'rinli ya'ni berilgan yuqori had bo'yicha $\sigma_1^k \sigma_2^l$ birhadni topish mumkin.

Masalan. $\sigma_1^6 \sigma_2^4$ birhadda $\sigma_1 = x+y$ va $\sigma_2 = x y$ almashtirishni bajarib qavslarni ochgandan keyin yuqori hadi $x^{10}y^4$ bo'lgan ko'phad hosil bo'ladi. Agar yuqori hadi x^7y^9 berilgan bo'lsa, u holda. $\sigma_1^4 \sigma_2^3$ birhadni hosil qilamiz.

Endi (A) mulohazani isbotlashga o'tamiz. Agar $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ ko'phad noldan farqli bo'lsa, $\sigma_1 = x+y$ va $\sigma_2 = x y$ almashtirishdan keyin ham uning nolga aylanmasligiga ishonch hosil qilishimiz kerak. Aytaylik $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ ko'phad

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{k,l} A_{kl} \sigma_1^k \sigma_2^l$$

ko'inishda berilgan bo'lsin. $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ dan $k+1$ eng katta qiymatlarini oladigan hadlarni olamiz. Olingan qo'shiluvchilardan „l” ning eng katta qiymatiga ega bo'lgan hadlarni tanlaymiz.

Masalan, agar

$$\Phi(\sigma_1, \sigma_2) = 3\sigma_1^4\sigma_2 - 4\sigma_1^2\sigma_2^3 + \sigma_1\sigma_2^4 - 6\sigma_1\sigma_2^2 + 11\sigma_2^3 - 7\sigma_1 + 5\sigma_2 + 8$$

berilgan bo'lsa avval quyidagi hadlarni tanlaymiz.

$$3\sigma_1^4\sigma_2, -4\sigma_1^2\sigma_2^3, \sigma_1\sigma_2^4,$$

keyin bularning orasidagi $\sigma_1\sigma_2^4$ ni olamiz. Shunday qilib biz

$A\sigma_1^m\sigma_2^n$ birhadni tanladik,

Unga $Ax^{m+n}y^n$

yuqori had mos keladi. Uning $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ ko'phadda $\sigma = x+y$ va $\sigma_2 = xy$ almashtirishni bajarib va qavslarni ochish natijasida hosil bo'lgan hadlardan kattasi ekanligini ko'rsatamiz.

Ma'lumki $A\sigma_1^m\sigma_2^n$ qo'shiluvchilardan tashkil topgan hadlar ichida $Ax^{m+n}y^n$ yuqori haddir.

Masalan $B\sigma_1^k\sigma_2^l$ qo'shiluvchini olaylik, bu qo'shiluvchiga

$$Bx^{k+1}y^l$$

yuqori had mos keladi. Shuning uchun $A\sigma_1^m\sigma_2^n$ birhadni tanlashda yoki $m+n > k+l$ yoki $m+n = k+l$ ikkala holda ham

$$Ax^{m+n}y^n > Bx^{k+1}y^l \quad A\sigma_1^m\sigma_2^n$$

qolgan $B\sigma_1^k\sigma_2^l$ qo'shiluvchilardan tashkil topgan hadlardan esa butunlay katta.

Biz $\Phi(\sigma_1, \sigma_2)$ ko'phadda $\sigma = x+y$ va $\sigma_2 = xy$ almashtirishni bajarish va qavslarni ochish natijasida hosil bo'lgan hadlardan eng kattasi $Ax^{m+n}y^n$ ekanligini ko'rsatdik. Shunday qilib unga o'xshash hadlar yo'q. O'xshash hadlarni ixchamlash natijasida yo'qolmaydi, u holda bunday qarama-qarshilik (A) mulohazani to'g'riligini isbotlaydi. Shu bilan yagonalik haqidagi teorema isbotlandi.

Endi biz quyida ikki o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlarning elementar algebra masalalariga tadbqiqini qaraymiz.

Tenglamalar sistemasini yechish.

Bundan oldimgi paragrafda natijalari har hil algebrak tenglamalar sistemalarini osongina yechishga imkon yaratadi. Biz ilgari aytib o'tganimizdek chap qismi noma'lum x, y ga simmetrik bog'liq bo'lgan tenglamalar tez- tez uchrab turadi. Bunday hollarda nomalum $\sigma_1 = x+y$ va $\sigma_2 = xy$ ga o'tish biz uchun qulaydir. Bu teoremlar (x va y dan tuzilgan ixtiyoriy simmetrik ko'phadni $\sigma_1 = x+y$ $\sigma_2 = xy$ lardan tuzilgan ko'phad ko'rinishda tasvirlash mumkin) ga asosan doim mumkin. Bunday noma'lumlarni almashtirishdan foyda shuki bunday almashtirish natijasida tenglamalarning darajalari pasayadi. Boshqacha qilib aytganda, yangi noma'lumlar σ_1 va σ_2 ga bog'liq bo'lgan sistemaning yechilishi dastlabki sistemaning yechilishidan oson.

σ_1 va σ_2 kattaliklarning qiymatlari topilgandan keyin dastlabki noma'lum x, y larning qiymatlarini topish kerak.

Buni biz maktab algebra kursidan ma'lum bo'lgan quyidagi teorema yordami bilan amalga oshirishimiz mumkin. Biz uni aniqroq formada eslab o'tamiz.

Teorema 2.3 Agar σ_1 va σ_2 lar ikkita ixtiyoriy sonlar bo'lsa u holda kvadrat tenglama

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = 0 \quad (2.1)$$

va tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} x + y = \sigma_1 \\ xy = \sigma_2 \end{cases} \quad (2.2)$$

lar bir- biriga o'zaro quyidagi ko'rinishda bog'liq: agar z_1 va z_2 lar kvadrat tenglama (2.1) ning ildizlari bo'lsa, u holda (2.2) sistema ikkita yechimga ega

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ y_1 = z_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = z_2 \\ y_2 = z_1 \end{cases}$$

va boshqa yechimga ega emas. Teskarisi ham o'rinli, ya'ni agar $x=a$, $y=b$ lar (2.2) sistemaning yechimi bo'lsa, u holda a va b sonlari (2.1) kvadrat tenglamani ildizlari bo'lsa, u holda Viyet formulasiga asosan

$$z_1 + z_2 = \sigma_1$$

$$z_1 z_2 = \sigma_2$$

ya'ni

$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = z_2 \\ x_2 = z_1 \end{cases}$$

Sonlari (2.2) sistemaning yechimi hisoblanadi. (2.2) sistemaning boshqa yechimi yo'qligi biz hozir isbot qiladigan teoremaning oxirgi tasdig'dan kelib chiqadi. Shunday qilib $x=a$, $y=b$ sistemaning yechimi bo'lsin, ya'ni

$$a+b=\sigma_1,$$

$$ab=\sigma_2$$

bunda biz

$$z^2 - \sigma_1 z + \sigma_2 = z^2 - (a+b)z + ab = (z-a)(z-b)$$

ga ega bo'lamiz. Bu esa (4.1)kvadrat tenglamaning ildizlari ekanligini bildiradi. Teorema isbotlandi.

Endi misollar keltiramiz.

1.Tenglamalar sistemasini yechining.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Yangi noma'lumlar kiritamiz.

$$\sigma = x+y ; \sigma_2 = xy$$

Keltirilgan jadval yordamida quyidagilarni tuzamiz.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 \\ x + y = \sigma_1 \end{cases}$$

va yangi noma'lumlar uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 = 35 \\ \sigma_1 = 5 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, $\sigma_2=6$ ni topib olamiz. Shunday qilib $\sigma_1=5$, $\sigma_2=6$, ya'ni boshlang'ich noma'lum x y lar uchun quyidagi tenglamalar sistemasini keltirib chiqaramiz.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasini juda oson yechiladi va biz dastlabki sistemaning quyidagi yechimlarini olamiz.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases} .$$

2. Tenglamalar sistemasini yechining.

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = 33 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Bu tenglamani ham 1-misolga o'xshash yechamiz. $\sigma_1 = x+y$,

$\sigma_2 = xy$ deb olingan holda ko'rsatilgan sistemasini quyidagi ko'rinishdagi sistemaga keltiramiz.

$$\begin{cases} \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 = 33 \\ \sigma_1 = 3 \end{cases}$$

Bu yerdan σ_2 uchun kvadrat tenglama hosil qilamiz.

$$15\sigma_2^2 - 135\sigma_2 + 210 = 0$$

yoki

$$\sigma_2^2 - 9\sigma_2 + 14 = 0$$

Bu tenglamadan σ_2 uchun ikkita qiymat topamiz. $\sigma_2=2$ va $\sigma_2=7$. Xuddi shunday ikkita tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 7 \end{cases}$$

Bu sistemalarni yechgan holda, dastlabki sistemaning 4ta yechimini topamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i, \\ y_3 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases} \quad \begin{cases} y_4 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i \\ x_4 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i \end{cases},$$

Ko'rsatilgan yo'l bilan tenglamalar sistemasini yechishda ko'pincha Bezu teoremasini ishlatish foyda beradi. Bezu teoremasi quyidagichadir.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ko'phadni $x-\alpha$ ga bo'lganda qoladigan qoldiq shu ko'phadning $x=\alpha$ dagi qiymatiga teng, ya'ni $f(\alpha) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n$ soniga teng. Bezu teoremasi yordamida quyidagi sistemani yechamiz.

3. Tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 8 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Xuddi oldingi misollardagidek, yangi nomalumlarni kiritamiz. $\sigma_1 = x+y$ va $\sigma_2 = xy$. Shunda bizning sistemamiz quyidagi ko'rinishdagi sistemaga keladi.

$$\begin{cases} \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = 8 \\ \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4 \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan σ_2 ni qiymatini topgan holda va uni birinchi tenglamaga qo'yib, biz noma'lum σ_1 ga nisbatan quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$-\frac{1}{2}\sigma_1^3 + 6\sigma_1 - 8 = 0$$

yoki tenglamani -2 soniga ko'paytirsak u holda

$$\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = 0$$

ni hosil qilamiz. σ_1 ni qiymatini topish uchun esa biz 3-darajali tenglamalarni yechish formulasini ishlatishimiz mumkin edi. Ammo hozirgi holat uchun Bezu teoremasini qo'llanishi biz uchun oson va qulaydir.

Atayin ko'rib chiqadigan kubik tenglamaga σ_1 uchun butun qiymatlar berib chiqqan holda, ($\sigma_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$)

biz tez orada shunga ega bo'lamizki $\sigma_1 = 2$ qiymat uning ildizi ekanligini ko'ramiz.

Bezu teoremasiga asosan tenglamaning chap qismi $\sigma_1 - 2$ ga bo'linadi, ya'ni

$$\begin{array}{r}
 \frac{\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16}{\sigma_1^3 - 2\sigma_1^2} \quad \Bigg| \frac{\sigma_1 - 2}{\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8} \\
 \hline
 2\sigma_1^2 - 12\sigma_1 \\
 - 2\sigma_1^2 - 4\sigma_1 \\
 \hline
 -8\sigma_1 + 16 \\
 -8\sigma_1 + 16 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Bezu teoremasida tasdiqlanganidek bo'linish qoldiqsiz bo'linadi va quyidagini

$$\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = (\sigma_1 - 2)(\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8) \text{ hosil qildik.}$$

Natijada kubik tenglama ikkita tenglamaga ajraladi: chiziqli $\sigma_1 - 2 = 0$ tenglamaga, bu esa bizga ilgari ma'lum bo'lgan $\sigma_1 = 2$ ildizini beradi va yana ikkita ildiz beradigan kvadrat tenglamaga

$$\sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8 = 0$$

Bu kvadrat tenglamaning yechimlari $\sigma_1 = -1 \pm 3$ ya'ni $\sigma_1 = 2$ va $\sigma_1 = -4$

$\sigma_1^2 - 2\sigma_1 = 4$ tenglamadan σ_2 uchun mos keladigan qiymatlarni topamiz.

$$\sigma_2 = 0 \text{ yoki } \sigma_2 = 6$$

shunday qilib boshlang'ich noma'lum x, y lar uchun ikkita tenglamalar sistemasini hosil qildik.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} x + y = -4 \\ xy = 6 \end{cases}$$

Bularni yechib boshlang'ich sistemaning to'rtta yechimini keltirib chiqaramiz.

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2 + i\sqrt{2} \\ y_3 = -2 - i\sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -2 - i\sqrt{2} \\ y_4 = -2 + i\sqrt{2} \end{cases}$$

3. Yordamchi noma'lumlar kiritish.

Ayrim paytlarda shunday bo'ladiki simmetrik bo'lmagan tenglamalardan tashkil topgan ikki noma'lumli ikki tenglamalar sistemasini, yangi noma'lumlarni kiritish bilan simmetrik tenglamaga aylantiriladi.

Masalan agar

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 5 \\ xy^2 - x^2y = 1 \end{cases}$$

sistemada noma'lum "y" ni yangi noma'lum $z = -y$ bilan almashtirilsa biz quyidagi

$$\begin{cases} x^3 + z^3 = 5 \\ xz^2 + x^2z = 1 \end{cases}$$

chap qismi x, z ga simmetrik bog'liq bo'lgan sistemaga kelamiz. Ayrim paytlarda bunday almashtirish murakkab ko'rinishda bo'ladi. Masalan

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 81x^4 + 16y^4 = 68 \end{cases}$$

sistemada $3x = u, -2y = v$ almashtirish bajarilgandan so'ng, biz simmetrik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 68 \end{cases}$$

Shunday qilib, shunday hollar ham bo'lib turadiki yordamchi noma'lumlarni kiritilishi bilan bir noma'lumli tenglamadan, ikki noma'lumli simmetrik tenglamalar sistemasiga kelish mumkin. Bunga misol keltiramiz.

Irratsional tenglamani yeching.

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5 \quad \sqrt[4]{x} = y, \quad \sqrt[4]{97-x} = z \quad \text{deb olaylik.}$$

Bunda ko'rib chiqiladigan tenglamamiz $y+z=5$ ko'rinishni oladi, undan tashqari

$y^4 + z^4 = x + (97-x) = 97$ tenglamaga ega bo'lamiz. Shunday qilib, biz quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y^4 + z^4 = 97 \end{cases}$$

Bunda $\sigma_1 = y + z$, $\sigma_2 = yz$ noma'lumlarni kiritish quyidagi sistemaga olib keladi:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 5, \\ \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 = 97 \end{cases}$$

Bu sistemadan esa σ_2 uchun quyidagi, kvadrat tenglamaga kelimiz:

$$\sigma_2^2 - 50\sigma_2 + 264 = 0,$$

bu kvadrat tenglamani yechgan holda $\sigma_2 = 6$ yoki $\sigma_2 = 44$ ga ega bo'lamiz, shunday qilib bu masala ikkita tenglamalar sistemasini yechishga olib keladi:

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 6 \end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases} y + z = 5 \\ yz = 44 \end{cases}$$

Birinchi sistemadan esa

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ z_1 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2 = 3 \\ z_2 = 2 \end{cases}$$

yechimlarga ega bo'lamiz. $y = \sqrt[4]{x}$ bo'lgani uchun, boshlang'ich noma'lum "x" uchun ikkita yechimga ega bo'lamiz $x_1 = 16$ va $x_2 = 81$. Ikkinchi sistemadan esa "y" va "z" uchun yechim hosil qilamiz. Bu esa o'z navbatida "x" uchun ham ikkita yechim beradi. (bu yechimlar kompleks sonlardir, irratsional tenglamalar uchun esa noma'lumlarning haqiqiy qiymatlari olinadi).

XULOSA.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi algebra va sonlar nazariyasi fanining hozirgi vaqtda rivojlanayotgan tarmoqlaridan biri bo'lgan ko'pharlar, ayniqsa simmetrik ko'phadlar va ularning tadbiqlari haqida yozilgan bo'lib ishda asosan quyidagi natijalarga erishilgan:

- 1) Bir noma'lumli ko'phadlar ustida amallar, ko'phadlarning funksional ma'noga tengligi, ko'phadlarning qoldikli bo'linishi ko'phad ildizlari va ko'phadni ikkihadga bo'lish, ko'phadlarning bo'linishlari tahlil qilingan;
- 2) Ko'p noma'lumli ko'phadlar, ko'p noma'lumli ko'phadlar halqasi, ko'phad darajasi, ko'phadlarning tengligi va n noma'lumli ko'phadlarning halqa tashkil qila bilishi isbot qilingan;
- 3) Simmetrik ko'phad, simmetrik ko'phadning simmetrik funksiyasi, asosiy simmetrik funksiyalar, asosiy simmetrik funksiyalarning nolga teng bo'lishi haqidagi teorema va simmetrik ko'phadlar nazariyasining asosiy teoremlari isbot qilingan;
- 4) Ikki o'zgaruvchili simmetrik ko'phadlarning elementar algebra misol va masalalariga tadbiqlari atroflicha o'rganilgan.

Shunday qilib, ushbu bitiruv malakaviy ishi maktab o'quvchilari, kollej, akademik litsey talabalari va yosh matematik o'qituvchilarning ko'phadlar sohasidagi o'z bilimlarini yanada oshirishda muhim ahamiyatga ega bo'ladi deb hisoblaymiz.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. А.И Кострикин. “Введение в алгебру” М.1977г 496-ст
2. Л.Я Куликов Алгебра и теория чисел М. 1979г 423-ст
3. А.Г. Курош Олий алгебра курси Т 1976 396-бет

4. А.А Бухштаб Теория чисел М.1966 347-ст
5. Е.Л Ван дер Варден Алгебра М 1979 483-ст
6. А.А Бухштаб, И.М Виноградов Сонлар назарияси асослари Т.1959 257-бет
7. Д.К. Фаддеев, И. С Соминский Сборник задач по высшей алгебре М.1977 317-ст
8. Ж.Х Хожиев, А.С Файнлейб Алгебра ва сонлар назарияси курси Т.2001 256-бет
9. Internet: WWW. Ziyonet.uz,
10. WWW.algebra. narod.ru
11. D.I Yunusova, A.S Yunusov “ Algebra va sonlar nazariyasi”