O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

BUXORO OZIQ-OVQAT VA ENGIL SANOAT TEXNOLOGIYASI INSTITUTI

«Informatika va informatsion texnologiyalar» kafedrasi

5140900 Kasb ta'limi. «Informatika va axborotlar texnologiyasi» yo'nalishi talabalari uchun

«HISOBLASH USULLARI»

fanidan

MA'RUZALAR MATNI

Tuzuvchi: **Asrayev Z.R.**

BUXORO – 2006

Muallif: Asrayev Z.R.

Bux OO v aESTI "Informatika va axborot texnologiyalari" kafedrasi

Taqrizchilar: Bux OO va ESTI «I va AT» kafedrasi dotsenti K.Z. Obidov

Bux DU «AM va ATI» kafedrasi dotsenti J.Jumayev

«Informatika va axborot texnologiyalari» kafedrasining umumiy majlisida muhokama etildi va ma`qullandi (Bayon № 2 4 sentyabr 2006 y).

Institut Uslubiy kengashida muxokama qilindi va chop etishga tavsiya etildi. (Bayon № 2 21 noyabr 2006 y).

Annotatciya

Ushbu ma`ruza matni asosan hisoblash matematikasining hisoblash usullari bo`limiga oid meteriallarni o`z ichiga oladi va oliy o`quv yurtlari uchun muljallangan «Hisoblash usullari» dasturiga mos keladi. Undan hisoblash matematikasi ixtisosi bo`yicha ta`lim olayotgan boshqa oliy o`quv yurtlarining talabalari ham foydalanishlari mumkin.

Ma`ruza matnida masalani EHMda echish bosqichlari, amaliy dasturlardan masala echishda foydalanish, xatoliklar nazariyasi, algebraik va trantsendent tenglamalarni taqribiy echish usullari va ularning ishchi algoritmlari, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish usullari, chiziqli bo’lmagan tenglamalar sistemasini echish usullari, integrallarni taqribiy echish, funktsiyalarni interpolyatsiyalash, sonli differentsiallash, oddiy deferentsial tenglamalarni taqribiy echish kabi nazariy ma`lumotlar keltirilgan.

Ma`ruza matnida keltirilgan usullar qat`iy asoslangan holda berilgan bo`lib, ularning g’oyalari sodda misollarda tushuntiriladi.

SO`Z BOSHI

Elektron hisoblash mashinalarining inson faoliyatining turli soxalariga tobora chuqurroq kirib borishi hozirgi zamon muxandislaridan hisoblash texnikasi va amaliy matematika usullarini etarli darajada bilishlarini talab etmoqda. Oliy texnika o`quv yurtlarining talabalari birinchi kursdayoq hisoblash usullari va algoritmik tillarni o`rganadilar, ulardan umummuxandislik va maxsus fanlar bo`yicha laboratoriya ishlari, kurs ishlari hamda diplom ishlarini bajarishda foydalanadilar.

Hisoblash usullarini yuqori malakali mutaxassislar yaratadilar. Oliy texnika o`quv yurtlarining talabalari va ilmiy xodimlari shu usullarning asosiy g’oyalarini tushunsalar va o`z masalalarini echishda ulardàí foydalana olsalar shuning o`zi etarlidir. Hozirgi paytda amaliy matematikaning qator bo`limlari bo`yichà chuqur mazmunli darsliklar, ilmiy va o`quv qullanmalari mavjud. Ammo, ularning ko’pida muayyan matematik yunalishgina yoritilgan bo`lib, oliy texnika o`quv yurtlarining talabalari ularni o`rganish uchun maxsus matematik tayyorgarlikka ega bo`lmaganliklari tufayli bu fanni o`zlashtirishda qiynaladilar. Ayniqsa hisoblash matematikasi usullari har tomonlama tushunarli qilib yozilgan qo`llanma va darsliklar o`zbek tilida etarli emasligi talabalar uchun bir qancha qiyinchiliklar tug’dirmoqda. Ushbu ma`ruzalar matni shu qiyinchiliklarni ozmi-ko`pmi engillashtiradi degan umiddamiz.

Ma`ruzalar matni o’n to`rtta mavzudan tashkil topgan. Ularda xatoliklar nazariyasi, algebraik va trantsendent tenglamalarni taqribiy echish usullari va ularning ishchi algoritmlari, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish usullari, chiziqli bo`lmagan tenglamalar sistemasini echish usullari, integrallarni taqribiy echish, funktsiyalarni interpolyatsiyalash, sonli differentsiallash, oddiy deferentsial tenglamalarni taqribiy echish haqida dastlabki ma`lumotlar keltirilgan.

Ma`ruzalar matni oliy texnika o`quv yurtlari talabalari va ilmiy xodimlari uchun mo`ljallangan bo`lib, hisoblash ishlari bilan mashg’ul bo`lgan turli soxadagi xodimlar uchun ham foydali bo`lishi mumkin.

MUNDARIJA

1-MAVZU. FANNING AXAMIYATI. MASALANI EHMDA ECHISH BOSQICHLARI

Reja:

1. Hisoblash matematikasining qisqacha tarixi, predmeti va metodi.
2. Hozirgi zamon hisoblash mashinalari va sonli metodlar nazariyasi, ularning o`zaro aloqasi va ta`siri.
3. Matematik modelni qurish printsiplari.
4. Masalani echish uchun boshlang'ich ma`lumotlar.
5. Matematik modellarni echish algoritmini qurish yo`llari.

Tayanch iboralar:

Algoritm, hisoblash matematikasi, funktsional fazo, operator, to`g'ri masala, teskari masala, analogli hisoblash mashinalari, raqamli hisoblash mashinalari, turg'un, noturg'un, matematik model, mul'tiprotsessorli.

1. HISOBLASH MATEMATIKASINING QISQACHA TARIXI, PREDMETI VA METODI

Matematika turmush masalalarini echishga bo`lgan ehtiyoj, ya`ni yuzalar va hajmlarni o`lchash, kema harakatini boshqarish, yuldo`zlar harakatini ko`zatish va boshqalar tufayli vujudga kelganligi uchun ham u hisoblash matematikasi bo`lib, uning maqsadi masala echimini son shaklida topishdan iborat. Bu fikrga ishonch hosil qilish uchun matematika tarixiga nazar tashlash kifoya.

Bobil olimlarining asosiy faoliyati matematik jadvallar tuzishdan iborat bo`lgan. Shu jadvallardan bizgacha etib kelganlaridan biri miloddan 2000 yil avval tuzilgan bo`lib, unda 1 dan 60 gacha bo`lgan sonlarning kvadratlari keltirilgan. Miloddan avvalgi 747 yilda tuzilgan boshqa bir jadvalda Oy va Quyoshning tutilish vaqtlari keltirilgan. Qadimiy misrliklar ham faol hisobchilar bo`lganlar. Ular murakkab kasrlarni surati birga teng bo`lgan oddiy kasrlar yig'indisi (masalan: $\frac{3}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{66}$) shaklida ifodalovchi jadvallar tuzishgan va chiziqli bo`lmagan algebraik tenglamalarni echish uchun vatarlar usulini yaratishgan. Yunon matematiklariga kelsak, miloddan avval 220 yillar atrofida Arximed π soni uchun $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ tengsizlikni ko`rsatdi. Diofant III asrda aniqmas tenlamalarni echishdan tashqari kvadrat tenglamalarni sonli echish usulini yaratgan.

IX-X asrlarda O`rta Osiyoda matematika, astranomiya va boshqa tabiiy fanlar rivojlana boshladi. Bu erda al-Xorazmiydek buyuk alloma dunyoga keldi.

Hisoblash matematikasining mutaxassisi ingliz matematigi e.But o`zini «Sonli metodlar» kitobining kirish qismida «Hisoblash metodlarini sistemaga solganligi uchun birinchi arab matematigi Muxammad ibn – Muso al – Xorazmiydan minnatdormiz» deb yozgan edi.

Abu Abdullo Muxammad ibn-Muso al-Xorazmiy 780 yilda Xivada tug’ilib, 85 yilda Bog’dodda olamdan utgan yoshligidanoq ilm-fanga qiziqqan. O`sha davrda katta ilmiy va madaniy markaz hisoblangan Xalifatning poytaxti - Bog’dodga taklif qilingan. U Sharqning birinchi akademiyasi — Bog’doddagi "Bayt-ul xikmat" ("Donishmandlar uyi")da faol ish olib borgan. U "Donishmandlar uyi"ning kutubxonasini boshqargan. Bu erda uning raxbarligida arablar va boshqa xalqlar bilan bir qatorda Axmad Fargoniy va Axmad ibn Marvaziy kabi O`rta Osiyolik olimlar tadqiqot olib borishgan. Al-Xorazmiy O`rta Osiyoning islomdan oldingi o`ziga xos ilmiy merosiga, qo`shni Xindiston va Yaqin Sharqdagi ellinistik davlatlaridagi ilmiy g’oyalarga tayanib ishladi.

Al-Xorazmiy "Xind sanog’i to`g’risida"gi arifmetik risolasida o`nlik sanoq, sistemasini va bu sistemada to`rtta arifmetik amallarni bajarish qoidalarini birinchi bo`lib bayon qilgan. Bu risola XII asrda lotin tiliga tarjima qilingan va u Osiyoda ham, Evropada ham unlik sanok, sistemasini qo`llanilishiga va tarqalishiga poydevor bo`lgan.

Evropada bunday qoidalar al-Xorazmiy nomi bilan atalib, "Algorizmi" deyilgan. Keyinchalik u Algorithm va Algorithmus ko`rinishlarini olib, oxirida "algoritm" so`ziga aylangan.

Hozirgi vaktda ***algoritm*** **deb ma`lum bir tipga oid xamma masalalarni echishda qo`llaniladigan barcha amallar sistemasining muayyan tartibda bajarilishi haqidagi aniq qoidaga aytiladi.**

Al-Xorazmiyning "Kitob al-muxtasar fi hisob aljabr va muqobala" nomli algebraik risolasida birinchi marta algebra matematikaning mustaqil bo`limi sifatida qaraladi. Unda algebraik miqdorlar ustida amallar bajarish qoidalari, 1- va 2-darajali algebraik tenglamalarni echish usullari va bunday tenglamalarga keladigan hayotiy masalalar keltirilgan. Risola lotinchaga tarjima qilinganda "val-muqobala" tushurib qoldirilgan va "algebra" nomi bilan jahonga tarqalgan (shuning uchun bo`lsa kerak o’rta asrlarda Evropa davlatlarida singan qo`l-oyoqni tiklaydigan tabibni algebrist deb atashgan).

Xorazmiyning bizgacha etib kelgan ilmiy merosi, shu davrda Yaqin va O’rta Sharkda xalkaro til vazifasini bajargan **arab tilida** yozilgan. Shuning uchun ham Yaqin va O’rta Sharkdagi olimlarni Evropada arab olimlari deb bilishgan.

Ingliz matematigi e. But al-Xorazmiyni **arab matematigi** va Evropada hind raqamlari 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 larni **arab raqamlari** deyishga ham sabab shu.

Aytilganlardan tashqari, al-Xorazmiy $\pi = 3{,}1416$ qiymatni aniqladi, matematik jadvallar tuzishda faol qatnashdi.

Abul Vafo al-Bo`zjoniy 960 yilda sinuslar jadvalini hisoblash metodini ishlab chikdi, sin(l/2)° ning qiymatini tuqqizta ishonchli raqam bilan berdi. Bundan tashqari, u tg funktsiyasidan foydalandi va uning qiymatlari jadvalini to`zdi.

XV asrda Amir Temur saltanatining markazi - Samarqandda ilm-fan, madaniyat yuqori darajada rivojlandi. Shu paytda Ulug’bekning madrasayu rasadxonasi barpo etildi. Bu erda Ulug’bek bilan bir qatorda Ulug’bekning ustozi - zamonasining mashhur matematigi va astronomi Qozizoda Rumiy hamda G’iyosiddin Jamshid Koshiy, Mansur Koshiy, Muxammad Birjondiy va Ulugbekning shogirdi Ali Kushchilar madrasada daryo berib, rasadxonada yuldo`zlarni ko`zatish va ilmiy izlanishlar olib borishgan. Ayrim tadqiqotchilar Ulugbek madrasasi bilan rasadxonasini birgalikda ***Ulugbek akademiyasi*** deyishsa, avstriyalik matematika tarixchisi X. Zemanek buni ***Hisoblash markazi*** (XM) deydi. U aytadiki, XM bo`lishi uchun ikkita shart: 1) olimlarning jamoa bo`lib birgalikda ishlashlari va 2) hisoblashning yuqori darajadagi aniqlikda olib borilishi zarur. Bu erda har ikkala shart bajariladi. Shunday qilib, jaxonda birinchi **Hisoblash markazi** (XM). Ulugbek raxbarligida Samarqandda barpo etildi. Bu XMda qilingan ishlar to`g’risida kiskacha to`xtalib o`tamiz:

1. Riyosiddin Koshiy unli kasrlar arifmetikasini yaratdi.

2. $ax^3 + bx + s = 0$ ko`rinishidagi uchinchi darajali algebraik tenglamani echishning iteratsion usuli ishlab chiqildi.

3. Trigonometrik funktsiyalar jadvali 17 xona aniqdikda to`zildi.

4. G’iyosiddin Koshiy π sonining qiymatini 17 xona aniqlik bilan topdi, ya`ni

$$\pi = 3{,}14159265358927932$$

XVI-XVII asrlarda Evropada matematika, mexaniqa, astronomiya rivojlana boshladi va XIX asrga kelib hozirgi zamon matematikasining asosi yaratildi. Matematika bilan bir paytda hisoblash matematikasi ham rivojlandi.

Hisoblash matematikasining tarixida logarifmik jadvallarining tuzilishi katta axamiyatga ega edi. Ingliz matematigi U. Neper (1614,1619), shveytsariyalik I. Byurgi (1620), ingliz Brige (1617), gollandiyalik Vlakk (1628) va boshqalar tomonidan yaratilgan logarifmik jadvallar buyuk frantso`z matematigi va mexanigi P.S. Laplasning so`zi bilan aytganda: "...hisoblashlarni soddalashtirib, astronomlarning umrini o`zaytirdi". Laplas hozirgi zamon komp’yuterlarining ishlashini ko`rganda nima der ekan?

1845 yilda Adams va 1846 yilda Lever’elar hisoblashlar natijasida Neptun sayyorasining mavjudligi va fazodagi o`rnini oldindan aytishlari hisoblash matematikasining buyuk galabasi edi. Neptunii "qalam uchida topilgan sayyora" ham deyishadi.

Tatbiqiy masalalarni sonli echish matematiklar e`tiborini doim o`ziga tortar edi. Shuning uchun ham o`tgan zamonning buyuk matematiklari o`z tadqiqotlarida tabiat jarayonlarini o`rganish, ularning modellarini tuzish, modellarni tadqiq etish ishlarini birga kushib olib borishgan. Ular bu modellarni tekshirish uchun maxsus hisoblash metodlarini yaratishgan. Bu metodlarning ayrimlari N’yuton, eyler, Lobachevskiy, Gauss, CHebishev, ermit nomlari bilan bog’liqdir. Bu shundan dalolat beradiki, hisoblash metodlarini yaratish bilan o`z zamonasining buyuk matematiklari shugullanishgan.

Shuni ham aytish kerakki, limitlar nazariyasi yaratilgandan so`ng matematiklarning asosiy diqqat-e`tibori matematik metodlarga kat`iy mantiqiy zamin tayyorlashga, bu metod qo`llaniladigan ob`ektlar sonini orttirishga, matematik ob`ektlarni sifat jihatidan o`rganishga qaratilgan edi. Natijada, matematikaning juda muxim va ayni paytda ko`pincha kiyinchilik tugdiradigan soxasi: matematik tadqiqotlarni so`nggi sonli natijalargacha etkazish, ya`ni hisoblash metodlari yaratishga kam e`tibor berilar edi, bu soxa esa matematikaning tatbiqlari uchun juda zarurdir.

Hisoblash matematikasining predmeti.

Matematikaning hozirgi zamon fan va texnikasining xilma-xil soxalaridagi tatbiqlaridan, odatda, shunday tipik matematik masalalarga duch kelinadiki, ularni klassik metodlar bilan echish mumkin emas yoki echish mumkin bo`lgan taqdirda ham echim shunday murakkab ko`rinishda bo`ladiki, undan samarali foydalanishning iloji bo`lmaydi. Bunday tipik matematik masalalarga algebra (odatda, tartibi juda katta bo`lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echish, matritsalarning teskarisini topish, matritsalarning xos sonlarini topish, algebraik va trantsendent tenglamalar hamda bunday tenglamalar sistemasini echish) matematik analiz (sonli integrallash va differentsiallash, funktsiyani yaqinlashtirish masalalari) hamda oddiy va xususiy hosilaviy differentsial tenglamalarni echish masalalari va boshqalar kiradi.

Fan va texnikaning jadal ravishda rivojlanishi atom yadrosidan foydalanish, uchuvchi apparatlar (samolyot, raketa)ni loyixalash, kosmik uchish dinamikasi, boshqariladigan termoyadro sintezi muammosi munosabati bilan plazma fizikasini o`rganish va shunga o`xshash ko`p masalalarni echishni taqozo qilmokda. Bunday masalalar, o`z navbatida matematiklar oldiga yangidan-yangi hisoblash metodlarini yaratish vazifasini kuyadi. Ikkinchi tomondan, fan va texnika yutuklari matematiklar ixtiyoriga kuchli hisoblash vositalarini bermokda. Buning natijasida esa mavjud metodlarni yangi mashinalarda qo`llash uchun kaytadan kurib chiqish extiyoji tugilmokda.

Matematikada tipik matematik masalalarning echimlarini etarlicha aniqlikda hisoblash imkonini beruvchi metodlar yaratishga va shu maqsadda hozirgi zamon hisoblash vositalaridan foydalanish yo`llarini ishlab chiqishga bag’ishlangan soxa ***Hisoblash matematikasi*** deyiladi.

Hisoblash matematikasining metodi.

Hisoblash matematikasida uchraydigan ko`p masalalarni $u = Ax$ shaklida yozish mumkin, bu erda *x* va *u* berilgan $R_1$ va $R_2$ funktsional fazolarining elementlari bo`lib, *A* — operator yoki xususiy holda funktsionaldir. Agar *A* operator va *x element* xaqida ma`lumot berilgan bo`lib, *u* ni topish lozim bo`lsa, bunday masala ***to`g’ri masala*** deyiladi. Aksincha, *A va u* xakida ma`lumot berilgan bo`lib, *x* ni topish kerak bo`lsa, bunday masala ***teskari masala*** deyiladi. Odatda, teskari masalani echish ancha murakkabdir. Bu masalalar har doim ham aniq, echilavermaydi. Bunday xollarda hisoblash matematikasiga murojaat qilinadi.

Ba`zan masalani aniq echish ham mumkin, lekin klassik matematika metodlari bilan kerakli sonli qiymat olish uchun juda ko`p hisoblashlar talab qilinadi. Shuning uchun ham hisoblash matematikasi zimmasiga konkret masalalarni echish uchun oqilona va tejamkor metodlar ishlab chiqishi yuklanadi (masalan, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echishda Kramer formulalariga nisbatan Gauss metodi ancha tejamkor metoddir). Hisoblash matematikasida yuqoridagi masalalarni hal qilishning asosiy moxiyati R_1, R_2 fazolarni va A operatorini hisoblash uchun qulay bo`lgan mos ravishda boshqa $\overline{R}_1, \overline{R}_2$ fazolar va $\overline{A}$ operatori bilan almashtirishdan iboratdir. Ba`zan faqat R_1 va R_2 fazolar yoki faqatgina ulardan birortasini, ba`zan esa fakdt A operatorni almashtirish kifoyadir. Bu almashtirishlar shunday bajarilishi kerakki, natijada hosil bo`lgan yangi

$$\overline{y} = \overline{A}\overline{x} \qquad (\overline{x} \in \overline{R}_1,\ \overline{y} \in \overline{R}_2)$$

masalaning echimi biror ma`noda berilgan (1) masalaning echimiga yaqin bo`lsin va bu echimni nisbatan ko`p mexnat sarflamasdan topish mumkin bo`lsin.

Bunga misol sifatida shuni ko`rsatish mumkinki, odatda matematik fizika tenglamalari u yoki bu strukturaga ega bo`lgan algebraik tenglamalar sistemasiga keltirilib echiladi.

Demak, hisoblash matematikasi oldidagi asosiy masala funktsional fazolarda to`plamlarni va ularda aniqlangan operatorlar (funktsionallar)ni yaqinlashtirish hamda hozirgi zamon hisoblash mashinalari qo`llaniladigan sharoitda masalalarni echish uchun oqilona va tejamkor algoritm va metodlar ishlab chiqishdan iboratdir.

2. HOZIRGI ZAMON HISOBLASH MASHINALARI VA SONLI METODLAR NAZARIYASI, ULARNING O`ZARO ALOQASI VA TA`SIRI

Konkret matematik masalani u yoki bu hisoblash metodi bilan echish uchun hisoblovchi ixtiyorida bo`lgan hisoblash mashinalarining imkoniyatlari e`tiborga olinishi kerak. Hozirgi zamon hisoblash mashinalari informatsiyani tasvirlash usuliga va ishlash printsipiga ko`ra ikki sinfga bo`linadi:

1. **Analogli yoki modellovchi hisoblash mashinalari.** Bu mashinalarda informatsiya uzluksiz ravishda o`zgaradigan fizik miqdorlar (chiziqning uzunligi, valning aylanish burchagi, elektr tokining quvvati, kuchlanishi va h.k.) yordamida tasvirlanadi. Ular, odatda biron fizik jarayon yordamida u yoki bu matematik masalani modellaydi. Bunday mashinaga hozirgacha keng tarqalgan logarifmik lineyka misol bo`la oladi.

EHMda analogli mashinalardan planimetrlar, integraflar, garmonik va differentsial analizatorlar, elektro va gidro - analizatorlar ishlatiladi. Analogli mashinalarning aniqligi odatda katta bo`lmaydi va ular tor sinfdagi maxsus masalalarni echish uchun muljallanadi.

2. **Rakamli hisoblash mashinalari.** Bularda informatsiya biror fizik miqdorning diskret qiymatlari yordamida tasvirlanadi va bu mashinalar biror sanok, sistemasi (ikkilik, uchlik, unlik va x.k.) da tasvirlangan sonlar ustida amallar bajaradi; hisob natijasi yana biror sanok, sistemasida yoziladi. Hisobning aniqligi mashina so`zi razryadlarining miqdorlariga bog’liq.. Tarixda birinchi rakamli hisoblash vositasi oddiy chutdir.

Eng sodda rakamli hisoblash mashinalariga hisoblash jarayoni kul bilan boshqariladigan mashinalar - arifmometr, klavishli yarim avtomat va avtomat mashinalar kiradi. Bu mashinalar dastlab elektromexaniq elementlarda kurilgan bo`lsa, so`nggi vaktda ular elektron elementlarda kuriladigan buldi. Bu mashinalarda arifmetik amallar nisbatan tez bajarilishiga karamasdan, hisoblash jarayoni mexaniq printsipga asoslangani sababli hisoblash tezligi uncha katta bo`lmaydi. Shuningdek turli statistik, buxgalterlik va moliyabank hisoblashlari uchun *hisob analitik mashinalari* ishlatiladi. Bunday mashinalar o`zida doimiy joylashtirilgan ma`lumotlar orqali hisoblashlarni avtomatik ravishda bajaradi.

Hozirgi vaktda keng qo`llaniladigan rakamli hisoblash mashinalari - bu universal elektron-hisoblash mashinalari (kiskacha EHM)dir. Bu mashinalarda hisoblash jarayoni boshqarish programmasi yordamida avtomatik ravishda olib boriladi. EHMlar insonning ilmiy faoliyatidagi katta mexnat talab kiladigan jarayonlarni avtomatlashtirishning eng mukammal namunasidir. EHM jarayonlarni turli arifmetik va mantikiy amallarda, katta tezlikda va katta aniqlikda bajaradi. Programmalashtirish va avtomatlashtirish uchun bu mashinalarda katta imkoniyatlar mavjud bo`lib, dastlabki ma`lumotlarni, programmalarni, oraliq va oxirgi natijalarni saklash uchun katta xajmdagi xotira qurilmalari mavjuddir.

EHMlarning rivojlanishi elektron texnikaning muvaffakiyatlari bilan chambarchas bog’liqdir. Birinchi EHMlar elektron lampalar yordamida kurilgan bo`lib, ular birinchi avlod hisoblash mashinalari deyiladi.

Radioelektronikaning rivojlanishi tufayli asosan yarim o`tkazgichli elementlar (tranzistorlar)dan kurilgan ikkinchi avlod hisoblash mashinalari bunyodga kelib, ular birinchi avlod mashinalaridan har tomonlama ustundir. Uchinchi avlod mashinalari esa integral sxemalarda kurilgan bo`lib, bunday mashinalarning har bir moduli unlab tranzistorlardan iboratdir. Ularning kurilish texnologiyasi avvalgilardan katta farq. kiladi.

Bu EHMlar programmadan programmaga utish jarayonini operatsion sistema yordamida, insonning ishtirokisiz, uzluksiz ravishda bajara oladilar.

To`rtinchi avlod EHMlari katta integral sxemalarning qo`llanishiga asoslangan, bu sxemalar bitta massivda yarim o`tkazgichli materialdan qurilgan o`nlab elektr zanjirlar birlashmasi ko`rinishida bo`lgan va ichki boshanishlar bilan birlashtirilgan yagona funktsional blokdir. Ularni hisoblash tezligi bir sekundda bir necha un million amallar bajarilishiga muljallangan.

Beshinchi avlod EHMlari ul’trakatta integral sxemalar (UIKS-ULSI-Ultra Large Scale Integration) va optik elektron elementlarga asoslangan bo`lib, ularning hisoblash tezligi bir sekundda bir milliarddan ko`prok amallar bajarilishiga muljallangan. Bu avlod mashinalarini ko`p xollarda super EHM (super komp’yuterlar) va ko`p protsessorli (mul’tiprotsessorli) hisoblash sistemalari (KXS) sinfiga kiritadilar. Super komp’terlarga misol tariqasida AQSHning Cray Research firmasi (hozirgi paytda u Silicon Graphics firmasi tarkibida) komp’yuterlarini keltirish mumkin. Ulardan Origin-

2000 KXSI 45 GB (Giga byte- Gigabayt) ichki xotira va 128 ta R-10000 turdagi protsessor elementlarga ega bo`lib, har bir protsessor 64 MIPS (Million Instruction Per Second Bir sekundda million komandani bajarish) tezkorlikka ega.

Bu super komp'yuterning eng yuqori umumiy samaradorligi 25 GFHOP sec (Giga Floating point Operation Per Second)ra tengdir, ya`ny bir sekund ichida 25 milliard amalni 64 bitli so`zuvchan nuqtali sonlar ustida bajarish demakdir.

Katta va ul'trakatta integral sxemalarining rivojlanishi mikroprotsessorlarni (MP) paydo bo`lishiga olib keldi. MP katta integral sxema bo`lib, markaziy protsessor funktsiyasini bajaradi. Mikroprotsessorlar majmui asosida hisoblash mashinalarining yangi sinfi - shaxsiy EHM (SHEHM, shaxsiy komp'yuterlar) ishlab chikarildi.

Shaxsiy komp'yuterlar boshqa EHMlardan o`zining arzonligi, ixchamligi, elektr energiyasini kam sarflashi, kushimcha qurilmalarga juda oson boglanishi va ishlashga qulayligi bilan farq kiladi.

Hozirgi paytda 64-razryadli 2-3,2 Ggts (giga gerts) shakli chastotasiga va 512 Mb (mega bayt)dan ko`p tezkor xotiraga ega bo`lgan SHEHMlarni paydo bo`lishi ularni super komp'yuterlarga yaqinlashtirdi. Bularga misol kilib, IBM PC oilasiga mansub (urindosh) shaxsiy komp'yuterlar va SUN firmasining ishchi stantsiyalarini keltirish mumkin. Shuning uchun SHEHMlar fan va texnikaning turli soxalarida qo`llanilmokda.

Yuqorida ta`kidlanganidek, matematiklar ixtiyoridagi bunday hisoblash mashinalari echilishi kerak bo`lgan masalalar sinfini va ularni echish uchun hisoblash metodlarini tanlashni takozo etadi. Ma`lumki, rakamli hisoblash mashinalari arifmetik va mantikiy amallarni bajaradi. Demak, har bir matematik masalani echish uchun shunday metod tanlashimiz kerakki, u berilgan masalani biz ega bo`lgan mashina bajara oladigan amallar ketma-ketligiga keltirilsin. Bundan tashqari, mashinaning tezligi va xotirasining sigimiga qarab, amalda bajarilishi mumkin bo`lgan hisoblashlar xajmini ham aniqlash mumkin. Hisoblash mashinasi kanchalik mukammal bo`lsa, u shunchalik murakkab masalani echishga imkon beradi. Shuni ham ta`kidlab utish kerakki, EHMlarning tarakkiyoti bilan hisoblash matematikasi juda tez rivojlanmokda. Uning yangi bulimlari, masalan, uyinlar nazariyasi, ommaviy xizmat ko`rsatish nazariyasi, kombinatorika, mantikiy funktsiyalarni minimallashtirishga doyr hisoblash metodlari vujudga kelmokda. Bular esa o`z navbatida, yanada mukammalrok. hisoblash mashinalarini loyixalash uchun xizmat kilmokda.

Yangi va mukammal EHMlarni loyixalashda faqat hisoblash qurilmalarining tezkorligini oshirish, o`lchovlarini ixchamlash va signal utishi tezligini kuchaytirish asosida ish kursak printsipial muammolarga duch kelamiz. Buni quyidagicha tushuntirish mumkin.

EHMning utgan asrning 40-yillarida paydo bo`lishida protsessor bir amalni $10^{-1}$ sekundda bajargan bo`lsa, hozirgi paytda 10^{-9} sekunddan kamrok. vaktda ijro etadi. elektr signali 10^{-9} sekundda 30 smga tarqaladi. Ammo bu tezlikni yanada kuchaytirish signallarni o`zatishning fizik jarayoni va texnologiyasi bilan chegaralanadi va murakkablashadi.

Shuning uchun EHM tezkorligini oshirishning asosiy yo`llaridan biri hisoblash qurilmalarini (protsessorlarni) sonini ko`paytirish va mul'tiprotsessorli hisoblash sistemalarini yaratish va ularda parallel hisoblashni tashkil qilishdir. Bu sistemalar tuzilishi EHMning Fon Neyman, ya`ni klassik arxitekturasidan quyidagilar bilan farq kiladi:

- bir yoki bir nechta bir jinsli (bir jinsli emas) protsessorlar mavjudligi;
- xamma protsessorlar uchun umumiy va har bir protsessor bilan bog'liq tezkor xotira ishlatilishi;
- yagona integrallashgan operatsion sistema boshqaruvida bo`lishi;
- protsessorlarni parallel' ishini hisoblash jarayonini maxsus programma yordamida parallellashtirish asosida tashkil kilinishi.

Mul'tiprotsessorli hisoblash sistemalarining paydo bo`lishi matematiklardan parallel hisoblash metodlarini ishlab chiqishni, parallel algoritmlarni yaratishni talab kildi parallel tillar va programmalarni tuzishni yanada rivojlantirdi.

3. MATEMATIK MODELNI QURISH PRINTSIPLARI

Matematik modellar ko`p davrlardan buyon iqtisodiyotda ishlatilmoqda. Masalan, iqtisodiyotda qo`llanilgan model–F.Kene (1758 y.) tomonidan yaratilgan takror ishlab chiqarish modelidir.

Matematik model deganda bu masalaning asosiy shartlari va maqsadining matematik formulalar yordamidagi tasviriga aytiladi.

Umumiy holda matematik dasturlash masalasining matematik modeli quyidagi

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

ko`rinishda bo`ladi:

shartlarni qanoatlantiruvchi ***f(x₁ , x₂ ,…, xₙ)*** funktsiyaning ekstremumi topilsin. Bu erda: $\boldsymbol{f, g_i}$ – berilgan funktsiyalar, $\mathbf{b_i}$ – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Agar $\boldsymbol{f, g_i}$ funktsiyalarning hammasi chiziqli funktsiyalardan iborat bo`lsa, berilgan masala chiziqli dasturlash masalasi bo`ladi.

Agar f va g_i funktsiyalardan birortasi nochiziqq funktsiya bo`lsa, u holda berilgan model chiziqsiz dasturlash masalasini ifodalaydi.

Agar f yoki g_i funktsiyalar tasodifiy miqdorlarni o`z ichiga olsalar, u holda model stoxastik dasturlash masalasini ifodalaydi.

Agar f va g_i funktsiyalar vaqtga bog'liq bo`lib, masalani echish ko`p bosqichli jarayon sifatida qaralsa, u holda berilgan model dinamik dasturlash masalasidan iborat bo`ladi.

Hisoblash masalalari ichida eng yaxshi o`rganilgani chiziqli dasturlashdir. CHiziqli dasturlash usullari bilan ishlab chiqarishni rejalashtirish, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni optimal taqsimlash, optimal aralashmalar tayyorlash, optimal bichish, sanoat korxonalarini optimal joylashtirish va hokazo boshqa ko`plab masalalarni echish mumkin.

Har qanday masalani hisoblash usullarini qo`llab echishdan avval, ularning matematik modelini tuzish kerak, boshqacha aytganda berilgan iqtisodiy masalaning chegaralovchi shartlarini va maqsadini matematik formulalar orqali ifodalab olish kerak. Har qanday masalaning matematik modelini tuzish uchun:

1. masalaning iqtisodiy ma`nosini o`rganib, undagi asosiy shart va maqsadni aniqlash;
2. masaladagi noma`lumlarni belgilash;
3. masalaning shartlarini algebraik tenglamalar yoki tengsizliklar orqali ifodalash;
4. masalaning maqsadini funktsiya orqali ifodalash kerak.

4. MASALANI ECHISH UCHUN BOSHLANG'ICH MA`LUMOTLAR

Masalani EHMlarda echishning o`ziga xos tomonlari bor. Shuning uchun ularga bir oz tuxtalib utamiz. Har bir hisoblash ishi puxta planlashtirishni talab kiladi, ya`ni hisoblash jarayonining shunday sxemasini tuzish kerakki, u oraliqdagi va oxirgi natijalarni nazorat qilish uchun imkon bersin. Aks xolda turli xatolarga yo`l qo`yilishi mumkin, hozirgi EHMlar soatiga un milliardlab amal bajaradi va bu hisoblashlar avtomatik ravishda, hisoblovchining ishtirokisiz bajariladi. Shuning uchun ham hisoblovchi hisoblash mashinasining barcha ishini shunday planlashtirishi kerakki, masalani echish jarayonida uchraydigan har bir maxsus xollarga mashina e`tibor beradigan bo`lsin. U kerakli algoritmning bajarilishini ta`minlashi kerak, ya`ni masalani echishning programmasini tuzishi kerak. Xatto elementar amallarni kaysi tartibda bajarilishi katta axamiyatga ega. Bunga izox berib utamiz. Hisoblash jarayonida, odatda, yaxlitlash amali bajariladi, uning natijasida hisoblash xatosi vujudga keladi. Rakamli hisoblash mashinalarida, umuman aytganda, ko`paytirish va bo`lish amallari faqat olingan natijaning yaxlitlanishi bilan birga urinli bo`ladi. Shuning uchun ham, aslidagi $x{\cdot}y$ ko`paytirish va x/u bo`lish amallari "psevdoko`paytirish" $x*u$ va "psevdobo`lish" $x:u$ amali bilan almashtiriladi. Bunday "psevdoamallar" uchun assotsiativlik va distributivlik kjnunlari bajarilmaydi. Masalan, verguldan keyin uch xona aniqlikda hisoblaydigan bo`lsak, (0,642 + 0,439) * 0,275 = 0,297 bo`lib, shu bilan birga 0,642 * 0,275 + 0,439 * 0,275 = 0,298 bo`ladi, ya`ni har xil natijaga ega bo`lamiz.

5. MATEMATIK MODELLARNI ECHISH ALGORITMINI QURISH YO`LLARI

Bugungi ishlab chiqarish jarayonining tobora murakkablashib, bozor munosabatlarining kengayib borish jarayonida har bir ishni taxlil qilib, ulardan to`g'ri xulosa chiqarishga asos beruvchi ilmiy nazariyalar juda zarur bo`lmokda. Bunday nazariyaning asosini matematik algoritmlarni tuzish va dasturlash tashkil etadi.

Algoritm deganda masalanipg echimlarini ketma-ket hosil qilish jarayonini tushunish kerak. Bu shunday jarayonki, unda eng avval boshlangich echim topiladi, so`ngra bu echim kadam-bakadam yaxshilanib boriladi. Bu jarayon eng yaxshi natija topilguncha davom ettiriladi. Har bir boskichda maxsus ko`rsatkichlar yordamida qanday ish tutish kerakligi, optimal echimga qanday yaqinlashish kerakligi ko`rsatib boriladi.

EHMlarning murakkab masalalarni echishga qo`llanilishi algoritmlarning turgunligini talab kiladi. Buning ma`nosi shundan iboratki, odatda biror natijani olish uchun ko`rsatilgan metod bilan ketma-ket hisoblashlarni bajarish kerak, agar aniqlikni orttirsak, bu hisoblashlar ketma-ketligi yanada kattalashadi. Hisoblashning biror kadamida yo`l qo`yilgan xato keyingi kadamlarda ham o`z ta`sirini ko`rsatadi. Bu ta`sir turli algoritm uchun turlichadir.

Agar hisoblashning dastlabki kadamlarida yo`l qo`yilgan xato, keyingi kadamlarda hisoblash aniq, bajarilganda ortmasa yoki xech bulmaganda bir xil tartibda bo`lsa, u xolda hisoblash algoritmi ***dastlabki xatoga nisbatan turgun*** deyiladi. Agarda kadamdan-kadamga utganda xato ortib borsa, u vaktda ***algoritm noturgun*** deyiladi. Masalan, hisoblash quyidagi

$$y_{n+1} = -10 y_n + 2 y_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots\ldots)$$

rekurrent formula yordamida olib borilsin. Faraz kilaylik, u_{n+1} hisoblanayotganda ε xatoga yo`l qo`yilgan bo`lib (bu yaxlitlash hisobidan bo`lishi mumkin), y_n aniq topilgan bo`lsin. Keyingi hisoblashlar aniq, olib borilgan deb faraz kilsak, ε xatoning ta`siri natijasida u_{p+1} - 2 ε xato bilan, u_{p+2} - 20 ε xato bilan, u_{p+3} *e*sa 204 ε xato bilan aniqlanadi va bundan keyingi kadamlarda xato tez usib boradi. Demak, formula bilan bo`ladigan hisoblash jarayoni ***noturgun e***kan, bunday ***formula bilan hisoblash kat`iyan may qilinadi.***

Turgun bulmagan algoritmga olib keladigan hisoblash metodlari masalani taqribiy echish uchun yaroksizdir. Hozirgi vaktda, hisoblash metodlari va algoritmlarining turli xatolarga, shu jumladan, yaxlitlash xatosiga nisbatan turgunligini tekshirish hisoblash matematikasining muxim yunalishlaridan biri bo`lib koldi. Ikkinchidan, EHMlarda echiladigan masalalarning algoritmlari shunday bir jinsli va tsiklik jarayonlarning ketma-ketligi shaklida yozilishi kerakki, unda natija soddarok. algoritmni ko`p marta qo`llash yuli bilan hosil bo`lsin.

Har bir konkret mashina tilida programma tuzish juda ko`p mexnat talab kiladi. Shuning uchun ham odam bilan konkret mashina o'rtasida vositachi vazifasini bajaradigan tillar yaratish katta axamiyat kasb etadi. Bu tillarda yozilgan programmalarni maxsus - translyatorlar konkret mashina tiliga utkazadi.

Hozirgi vaktda keng tarqalgan programmalash tillaridan Beysik, Paskal', Si, Delphi va Java hisoblanadi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Hisoblash matematikasining qisqacha tarixi, predmeti va metodini izohlang?
2. Algoritm so`zining kelib chiqishi tarixini ayting?
3. Teskari masala deb nimaga aytiladi?
4. Analogli yoki modellovchi hisoblash mashinalari haqida ma`lumot bering?
5. Komp'yuterning rivojlanish tarixini ayting?
6. Matematik model deb nimaga aytiladi?
7. Matematik modelni qurish printsipi qanday amalga oshiriladi?
8. Masalani echish uchun qanday boshlang'ich ma`lumotlar zarur bo`ladi?
9. Algoritm nima va uni qurish yo`llarini ayting?
10. Qanday dasturlash tillarini bilasiz, ularni izohlang.

2-MAVZU. MODULLI DASTURLASH. AMALIY DASTURLARDAN MASALA ECHISHDA FOYDALANISH

Reja:

1. Moduli dasturlash tushunchasi.
2. Excel elektron jadvali yordamida masala echish.
3. Matcad dasturiy vositasi va undan turli masalalarni echishda foydalanish.
4. Ishchi algoritmlar bo`yicha dastur tuzish.

Tayanch iboralar:

Excel elektron jadvali, funktsiya, algoritm, algoritm turlari, blok sxema, dasturlash tillari, Paskal' dasturlash tili, amaliy matematik dasturlar, Matcad va Matlab dasturiy vositalari.

1. MODULI DASTURLASH TUSHUNCHASI

Modulli dasturlashning asosiy tamoyili «Bo`l va hukmronlik qil». Modulli dasturlash dasturni modul deb ataluvchi, tarkibi va ishlatilishi ma`lum qoidalarga bo`ysunuvchi, o`zaro bog'liq bo`lmagan, kattamas bo`laklarga bo`lib hosil qilishni bildiradi.

«Modul» so`zini dasturlash tillarining sintaksis konstruktsiyasi (Turbo Paskalda unit) va katta dasturni alohida bo`laklarga bo`lish birligi (protsedura yoki funktsiyalar ko`rinishida amalga oshirish nazarda tutilayapti) nazarda tutilgandagi ishlatilishlar o`rtasidagi farqlanishlarni ajrata bilish kerak.

Modulli dasturlashdan foydalanish dasturni testdan o`tkazish va xatolarni topishni engillashtiradi.

U, yoki bu dasturlash tili asosida u ishlatilayotgan dasturlar xususiyatiga sezilarli ta`sir etuvchi qandaydir rahbar g'oya yotadi.

Dasturlarni protsedurali tasniflash g'oyasi tarixan birinchi shunday g'oya bo`ldi, unga ko`ra dasturchi o`z dasturiga qanday protseduralarni kiritishni hal qilishi va shundan keyin bu protseduralarni hal qilish uchun eng yaxshi algoritmlarni tanlab olishi kerak edi. Bu g'oyaning paydo bo`lishi hisoblash jarayonlarining algoritmik tomonlarini etarli darajada o`rganmaslik natijasi bo`ldi. G'oya kamchiliklari – qirqinchi-elliginchi yillarda ishlab chiqilgan dastlabki dastur mahsulotlariga xos. Fortran-protsedurali-yo`naltirilgan birinchi tilga tipik misol bo`la oladi (bu til hali ham keng ishlatiladigan tillardan biri). Dasturlarni protsedurali tasniflash g’oyasining keyingi ishlatilishlari, dastur «binosi» ni qurishda gisht vazifasini o`tovchi, nisbatan katta bo`lmagan protseduralar to`plamiga ega bo`lgan keng dasturlash kutubxonasini yaratishga olib keldi.

Hisoblash matematikasi sohasidagi yutuqlar natijasida, dasturlashda urgu protseduralardan ma`lumotlarni tashkil qilishga berila boshlandi. Murakkab dasturlarni samarali ishlab chiqish ma`lumotlarni to`g’ri ishlatishning nazorat usullariga muhtoj ekanligi ma`lum bo`ldi. Nazorat kompilyatsiya bosqichida ham, dasturni o`tkazish bosqichida ham o`tkazilishi kerak, aks holda, amaliyotda isbot qilingani kabi, yirik dastur loyihalarini yaratishda qiyinchiliklar keskin oshadi. Bu muammoning oydinlashuvi ma`lumot tiplarining ozmi-ko`pmi rivojlangan tasnifiga ega, Algol 60, keyinchalik Paskal, Modula, Si va boshqa ko`plab tillarning yaratilishiga olib keldi. Ma`lumotlarni va protseduralarni modul ichiga «yashirish»ga intilish bilan strukturali dasturlar ishlab chiqishga modulli yondoshish, bu yo`nalish rivojlanishining mantiqiy natijasi bo`ldi.

2. EXCEL ELEKTRON JADVALI YORDAMIDA MASALA ECHISH

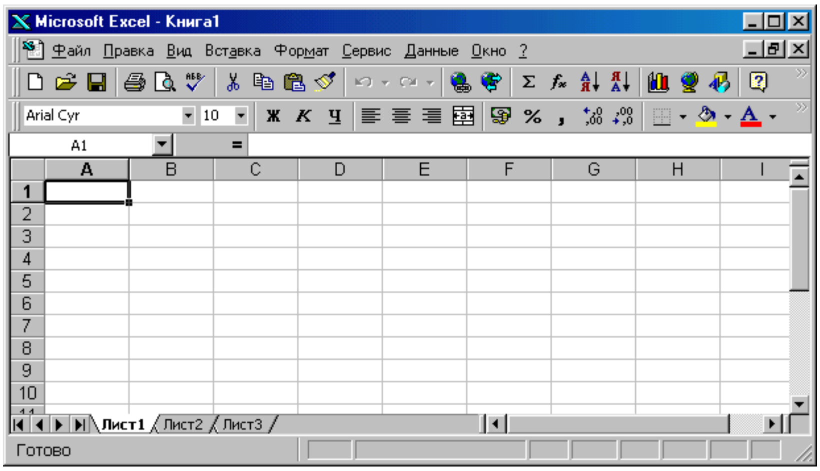
Microsoft Excel – universal jadval muxarriri bo`lib, unda jadvallar kiritish, ular bilan ishlash uchun qulay imkoniyatlar yaratib berilgan. Bu jadval muxarririda boshqa formatda yaratilgan fayllarni import qilish imkoni berilishi bilan bir katorda o`zida yaratilgan jadvallarni Office ning boshqa muxarrirlariga, Web saxifa ko`rinishida va boshqa ko`rinishlarga eksport qilish imkoni ham berilgan.

Jadvallar tayyorlashda qulayliklari juda katta bo`lgan zamonaviy dasturlardan biri Microsoft Excelda tayyorlanadigan jadvalda rasm, formula, grafiklar, ovoz yozilgan fayllar, video-klipplar va xokazolarni kuyish imkonini berilishi bilan birga ko`pgina tayyor formulalar orqali kerakli hisob-kitoblarni amalga oshirish qulaylik lari berilgan.

Odatda Microsoft Excel dasturini ishga tushirish uchun Windowsning Pusk tugmasi bosiladi, menyuning Programmi bo`limidan Microsoft Office nomli qismi tarkibidan Microsoft Office Excel ishga tushiriladi.

Microsoft Excel ishga tushganda quyidagi oynani hosil bo`ladi (1-rasm).

Shu oyna Microsoft Excel dasturi ko`rinishi, u ishga tushgani bilan yangi dokument tayyorlab uni Kniga1 deb nomlab, unda 3ta List1, List2 va List3 lar hosil kilib foydalanuvchi uchun xavola etadi. Excel bizga jadval ko`rinishidagi list berib uning satrlarini 1,2,3,… katorlarini esa A,B,C,D,… kabi nomerlab kuygan. Shu katakchalarni to`ldirib jadvallar hosil kilib, olishimiz mumkin.



1-rasm. Excel oynasi

Excelda formulalar va formulalar yordamchisi bilan ishlash.

Jadvallarda har xil funktsiya va formulalarni ishlatish mumkin. Ularni yozishdan avval = belgisini kuyishingiz kerak. Funktsiyalarda + **(kushish), - (ayirish), * (ko`paytirish), / (bo`lish), ^ (darajaga kutarish)** belgilarini ishlatishingiz mumkin. Formulalarda xonalar nomi faqat lotin xarflar bilan berilishi shart.

Masalan agar **A1** va **V12** xonalardagi sonlarni bir biriga kushish kerak bo`lsa u xolda formulamiz yacheykada quyidagicha bo`ladi: **=A1+V12**

Asosiy funktsiyalar:

MIN (*xonalar*) xonalardagi sonlarni minimalini topish

MAKS (*xonalar*) xonalardagi sonlarni maksimalini topish

SRZNACH (*xonalar*) xonalardagi sonlarni o’rtachasini topish

SUMM (*xonalar*) xonalardagi sonlarni ygindisini topish

ESLI (*shart*, *to`g’ri*, *noto`g’ri*) shart buyicha amalni bajarish

SCHYOTZ(*xonalar*) bush bulmagan xonalar sonini aniqlash

SCHYOTESLI(*xonalar, shart*) shartga javob beruvchi xonalar sonini aniqlash

SEGODNYA ( ) bugungi kunni kuyish

STEPEN’(*son*, *daraja*) ko`rsatilgan sonni kerakli darajaga kutarish

ZNAK(*xona*) ko`rsatilgan xona ichidagi malumatlar ishorasini aniqlash

COS(*son*) ko`rsatilgan sonni kosinusini aniqlash

SIN(*son*) ko`rsatilgan sonni sinsini aniqlash

Formulalarda bir nechta xonalar ko`rsatilgandap ular o’rtasidagi **:** belgi "dan gacha" ma`noni bildiradi. Shu bilan birga **;** belgisi esa "bilan" ma`noni bildiradi. Masalan:

=SUMM(A1:F11) bu **A1** dan **F11** gacha turtburchak soxadadagi ma`lumotlar summasini topish ma`noni bildiradi.

=SUMM(A11;C15) bu **A11** va **C15** xonalardagi sonlar summasini topish ma`noni bildiradi.

Xonalarni sichkoncha yordamida kurganimizda **SHIFT** tugma bilan tanlanganlar "dan gacha", **CTRL** bilan esa "va" ma`nosini bildiradi. Formulalarda kushtirnok « » ichida yozilgan mantlar o`zgartirilmasdan ekranda chikariladi. Masalan:

=ESLI(A1=5, "A`lo", "A`lo emas") bu agar **A1** xonadagi son 5 ga teng bo`lsa u xolda formula xonasida "a`lo" so`zi yoziladi, aks xolda esa "a`lo emas" so`zi yozilish ma`nosini bildiradi.

Formula bor xonani avtoruyxat bilan to`ldirganimizda ichidagi formula o`zgarish satri yoki ustunga qarab o`zgaradi.

Masalan:

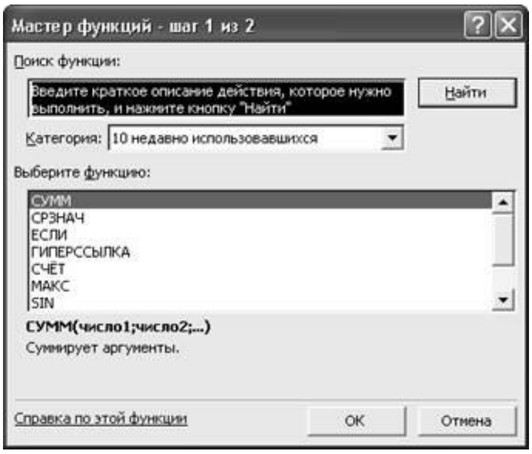
Agar **=ESLI(A1=5, "A`lo", "A`lo emas")** formulasi bor xonani pastka avtoruyxat bilan yuli bilan to`ldirsak, u xolda pastki xonada bu formula **=ESLI(A2=5, "A`lo", "A`lo emas" )** ga o`zgaradi. Agar uni ung tomonga to`ldirsak u xolda ung tomondagi xona formulasi **=ESLI(B1=5, "A`lo", "A`lo emas" )** ga o`zgaradi.

Agar sizga avtoto`ldirish yoki nusxa olish natijasida hosil bo`lgan formulada biror bir xona nomi o`zgarmas bo`lishi kerak bo`lsa, u xolda uning nomi oldida **$** belgisini kuyishingiz kerak.

Masalan:

=ESLI(A2=5, "A`lo", "A`lo emas") formulada **A2** xona nomi o`zgarmas. Agar **$A$2** o`rniga **$A2** u xolda faqat satr nomeri o`zgaruvchan, agar esa **$A$2** o`rniga **A$2** bo`lsa u xolda faqat ustun nomi o`zgaruvchan bo`ladi.

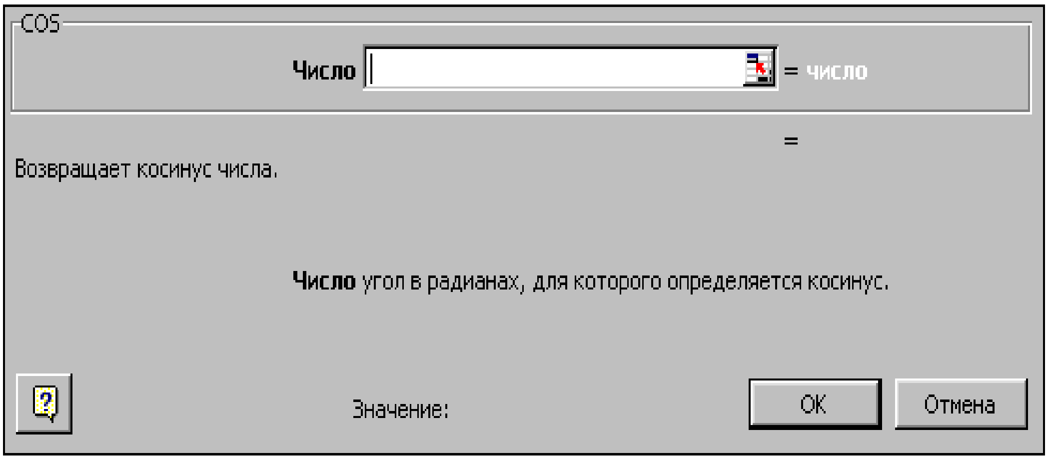
Formulalar bilan ishlashda bizga yordam beruvchi va qulayliklar yaratuvchi **Excel** formulalar masterini (yordamchisini) ishga tushirish uchun yordamchi asboblar (tugmalar) satrida joylashgan  tugmani bosishimiz kerak. Natijada quyidagi dialog oynasi hosil qilinadi.



Ushbu oynada formula yaratishning birinchi kadamda biz formula yoki funktsiyani tanlashimiz kerak. **KATEGORIYA** nomli berk ruyxatda kerakli formulalar guruxini tanlaymiz:

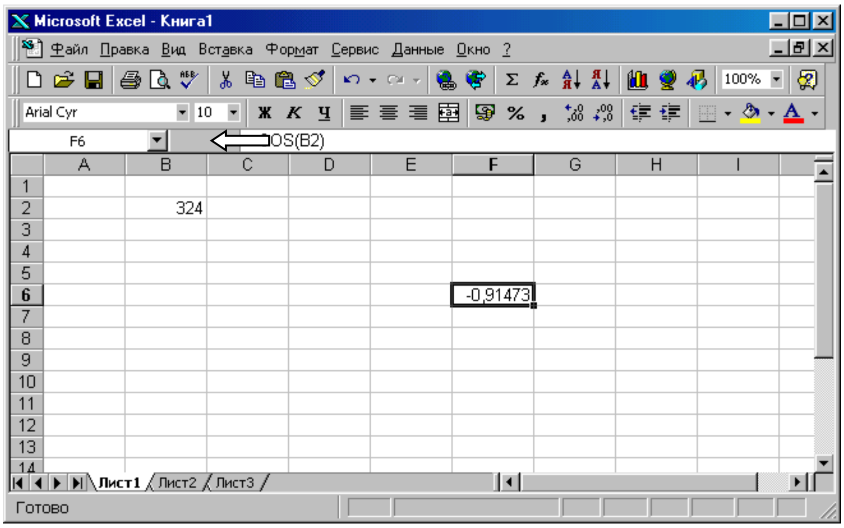
1) 10 nedavno ispol’zovavshixsya - 10 oxirgi ishlatilgan formulalar
2) polniy alfavitniy perechen’ - alfavit buyicha formulalarning tulik ruyxati
3) finansovie - iktisodiy formulalar ruyxati
4) data i vremya - vart va sana bilan ishlash formulalar
5) matematicheskie - matematik formulalar
6) statisticheskie - statistik formulalar
7) ssilki i masivi - giperyullanmalar va massivlar bilan ishlash formulalar.
8) rabota s bazoy dannix - ma`lumotlar ombori bilan ishlash formulalar
9) tekstovie - matn bilan ishlash formulalar
10) logicheskie - mantikiy formulalar
11) proverka svoystv i znacheniy - xonalar ichidagi ma`lumotlarni tekshiruvchi formulalar.

Bu oynaning Kategoriya punktidan kerakli tema tanlanadi, Funktsiya punktidan esa kerakli funtsiyani tanlab OK tugmasi bosiladi. Masalan Kategoriya punktidan Matemachiteskie qismi tanlanib, Funktsiya punktidan esa COS funtsiyasi tanlanib Ok tugmasi bosilsa quyidagi oyna hosil bo`ladi.



Bu oynaning chislo qismiga xoxlasak kaysi sonning kosinusini hisoblash kerakligini yozamiz yoki  tugmachani bosib kaysi katakda yozilgan son kosinusi hisoblanishi kerakligini ko`rsatamiz.

Joriy (kursor urnatilgan) katakda yuqoridagi funktsiya javobi hisoblab yoziladi. Katakda funktsiya javobi kurinidi.



Rasmda strelka orqali ko`rsatilgan katorda esa funktsiyaning formula shaklidagi ko`rinishi kurinadi. Funktsiyani kuygan paytimizda ko`rsatilgan katak masalan V2 bo`lsan, uni o`zgartirish uchun yuqoridagi katordan V2 ni o`zgartirsak etarli.

Hisoblash usullari fanida keltirilgan masalalarni echish uchun Excel dasturidan foydalanamiz. Jadval kataklariga ma`lum qiymatlarni kiritib berilgan formulalar asosida natija olamiz. Masalan, chiziqli tenglamalar sistemasini echishda Gauus usuli qo`llanilsa u Excelda quyidagicha bo`ladi:

1. Noma`lumlar oldidagi koeffitsientlar (sonlar) kiritiladi.
2. Ma`lum formulalar asosida keyingi katakda hisoblash bajariladi.
3. Hisoblashni bajarishda formulada katakning nomi ko`rsatiladi. Masalan, =B5/B1
4. Agar hisoblash jarayoni bir-biriga o`xshash bo`lsa, keyingi kataklar avtomatik to`ldiriladi.
5. Qiymat o`zgartirilsa, hisoblash natijasi avtomatik o`zgaradi.

3. MATCAD DASTURIY VOSITASI VA UNDAN TURLI MASALALARNI ECHISHDA FOYDALANISH

Hozirgi vaktda komp’yuterlarda ilmiy-texnikaviy hisoblashlarni bajarishda odatdagi dasturlash tillaridan va elektron jadvallardan emas, balki Mathematica, MatLab, Maple, Mathcad, Gauss, Reduse, Eureka va boshqa turdagi maxsus matematik dasturlar keng qo`llanilayapti.

Matematik paketlar, ayniksa **Mathcad** - yuqorida sanab utilgan ruyxat ichida eng mashxur paket bo`lib, ilmiy-texnikaviy soxa mutaxassislariga dasturlashning nozik elementlariga e`tibor berilmasdan (masalan: fortran, C, Pascal, BASIC va boshqalar kabi) komp’yuterda matematik modellashtirishni amalga oshirishga katta yordam beradi.

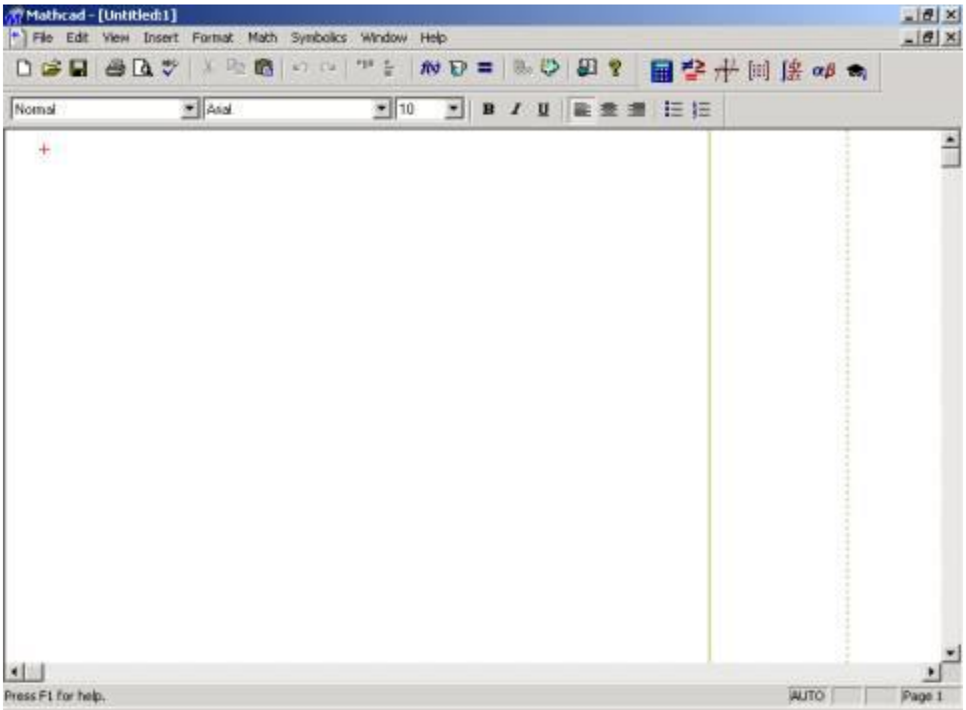
Quyida **Mathcad** matematik dasturlash muxitida ishlashning yaqqol ajralib turadigan imkoniyatlarini sanab o`tmoqchimiz:

- **Mathcad** muxitida matematik ifoda, qabul kilingan ko`rinishda ifodalanadi. Masalan, daraja yuqorida, indeks pastda, integralning yuqori va kuyi chegaralari esa an`anaviy joyida turadi.
- **Mathcad** muxitida «dasturlarning» tuzish va bajarilishi jarayoni parallel kechadi. Foydalanuvchi **Mathcad**-hujjatida yangi ifoda kiritar ekan, uning qiymatini birdaniga hisoblash va ifodani kiritishda yo`l qo`yilgan yashiringan xatoliklarni grafigini kurish imkoniyati ham mavjud.
- **Mathcad** paketi etarli darajada kudratli matematik apparat bilan kurollanganki, ular orqali tashki protseduralarni chakirmasdan turib paydo bo`ladigan muammolarni hal qilishimiz mumkin.
- **Mathcad** muxitiga xos bo`lgan ayrim hisoblovchi qurilmalarni sanab utmokchimiz:
- (CHiziqli va chiziqli bulmagan) algebraik tenglama va sistemalarni echish;
- Oddiy differentsial tenglama va sistemalarni (Koshi masalasi va chegaraviy masala) echish;
- xususiy hosilali differentsial tenglamalarni echish;
- Berilganlarni statik kayta ishlov berish (interpolyatsiya, ekstrapolyatsiya, approksimatsiya va ko`pgina boshqa amallar);
- Vektor va matritsalar bilan ishlash (CHiziqli algebra va boshqalar);
- Funktsional bog’liqlikning maksimum va minimumini izlash.
- **Mathcad** paketi matematik va fizik-kimyoviy formulalarga, hamda o`zgarmaslarga asoslangan yordamchi qo`llanmalar bilan boyitilgan.
- **Mathcad** paketida turli soxalar buyicha elektron darsliklar yaratish mumkin. Masalan: oddiy differentsial tenglamalarni echish, statistika, termodinamika, boshqaruv nazariyasi, materiallar karshiligi va boshqalar bunga misol bulaoladi.
- Foydalanuvchi o`z oldiga qo`yilgan masalani echish bilan cheklanibgina qolmay, fizikaviy masalalarni echishda o`lchovni hisobga olish imkoniyatiga ega. Bunda foydalanuvchi birliklar sistemasini ham tanlashi mumkin.
- Bundan tashqari **Mathcad** muxiti animatsiya vositasi bilan qurollangan, bunda tuzilgan modellarni nafaqat statik (o`zgarmas), balki dinamik (animatsion kliplar) holda yaratish mumkin.

- **Mathcad** muxiti belgili matematika elementlari bilan boyitilgan bo`lib, bunda masalani nafaqat sonli echish, balki analitik usulda ham echishga imkoniyat yaratilgan.
- **Mathcad** muxitidan chikmagan xolda boshqa serverdagi hujjatlarni ishlatish va Internet tavsiya kiladigan yuqori informatsion texnologiya imkoniyatlaridan foydalanish mumkin.

Mathcad dasturini ishga tushirish

Mathcad ishga tushganda quyidagi oynani ko`ramiz:



Bu oyna **Mathcad** programmasi interfeysining ko`rinishi bo`lib, u ishga tushgani bilan yangi hujjat tayyorlab uni **Untitled:1** deb nomlab foydalanuvchiga xavola etadi. e`tibor bersangiz, **Mathcad** ekranining yuqori qismida «kushish» ko`rinishdagi kursorni ko`rasiz. Klaviaturadan kiritiladigan ma`lumotlar, ushbu kursor joylashgan joydan boshlab, yoziladi.

Ekranning yuqori qismida asosiy menyu joylashgan bo`lib, unda hujjat bilan ishlashda kerak bo`ladigan barcha buyruklar jamlangan:

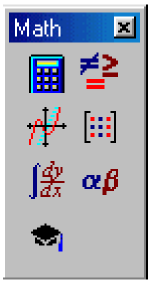
Kiritilgan hujjat ustida ishlash (uni komp'yuter xotirasiga yozib kuyish, kerakli paytda chakirib olish, printerdan chiqarish va xokazolar) uchun Standard panelida joylashgan quyidagi tugmalar bosiladi:

Yuqorida aytilgan tugmalar **Mathcad** Standart panelida joylashgan.

Hujjat formatini o`zgartirish.

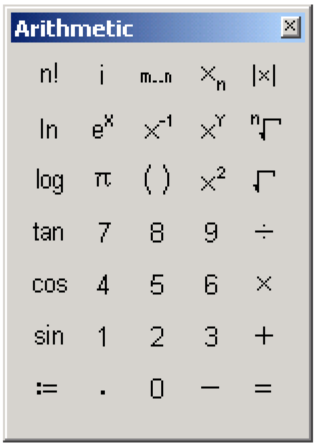
Mathcad da katta-kichik, kalin, kursiv, tagi chizilgan va xokazo formatlarda matn yozishimiz mumkin. Shu maqsadda, yozadigan matnimiz yoki belgilangan matn uchun formatni Formatting panelidagi tugmachalar orqali tanlashimiz kerak. Ushbu tugmalarning vazifalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

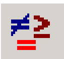
Asosiy menyudan View Toolbars Math tanlanganida

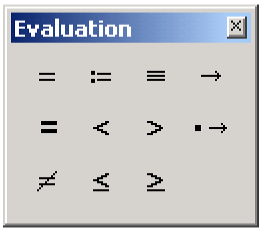


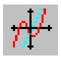
paneli paydo bo`ladi (Agar ilgari tanlanmagan bo`lsa).

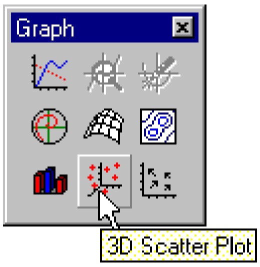
Bu paneldagi  tugmasi arifmetik hisob-kitoblarni hal qilishda juda qulay vosita hisoblanadi. Bu tugma bosilganda quyidagi panel hosil bo`ladi:

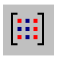


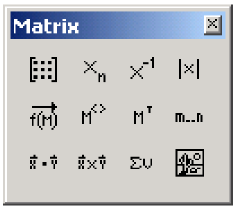
 tugma yordamida munosabat va mantikiy amallardan foydalanish mumkin. Bu tugmani bosganda quyidagi panel hosil bo`ladi:



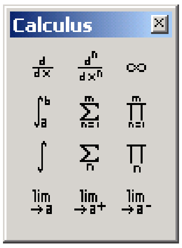
 tugma orqali ixtiyoriy turdagi grafikni hosil qilish mumkin. Bu tugma bosganda quyidagi panel paydo bo`ladi:

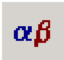


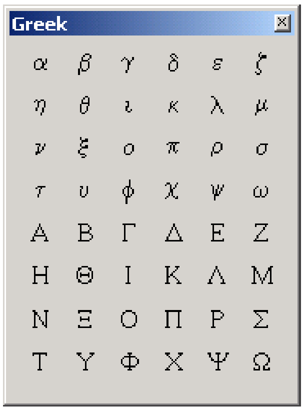
 tugma orqali vektorlar va matritsalar ustida amallar bajarish mumkin. Bu tugma bosganda quyidagi panel paydo bo`ladi:



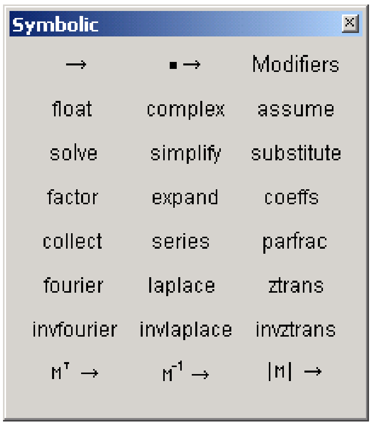
 bu tugma orqali integral, differentsial, limit, yig’indi va ko`paytmalarni hisoblash mumkin. Bu tugma bosilganda quyidagi panel paydo bo`ladi:



 tugma orqali grek alifbosidan foydalanish mumkin. Bu tugma bosilganda quyidagi panel paydo bo`ladi:



 tugma orqali ifodalarni analitik hisoblash mumkin. Bu tugma bosilganda quyidagi panel paydo bo`ladi:



Ekranning kuyi qismida esa xolat satri joylashgan:

Dasturlash

Mathcad Plus boshqa dasturlash tillari kabi, shartli operatorlar, tsikl operatorlari, qismdasturlar va shu kabi konstruktsiyalardan foydalanish imkoniyatini beradi.

Dasturlarning yaratilishi

Arifmetik ifodaning oxirida tenglik belgisini tersangiz, ifoda qiymati hisoblanib, natija ekranda paydo bo`ladi. Funktsiyani (qismdasturni) aniqlash uchun funktsiya nomini, so`ng kavs ichiga olingan uzatiladigan va chikariladigan parametrlar ruyxatini keltirish lozim. Bundan keyin ■ ← ■ belgisini kiritib, funktsiya bajarilishi lozim bo`lgan dasturni tuzish kerak bo`ladi.

Quyidagi misol, funktsiyani aniqlab beruvchi dasturni namoyish kiladi:

$$f(x, w) = \log\left(\frac{x}{w}\right)$$

Bu misol oddiy kurinsada, lekin operatorlarni bir-biridan qanday ajratishni va qanday kilib ■ ← ■ belgisidan foydalanish kerakligini ko`rsatadi.

Funktsiyani chap qismini va ■ := ■ tenglikni yozing va kiritish maydonchasi hosil bo`lganligiga ishonch hosil kiling. endi, boshqarish panellaridan dasturlash panelini tanlash kerak. Shu paneldan «Add line» tugmasini yoki klaviaturadan (**]**) klavishani bosish kerak. Dasturni tashkil etuvchi operatorlarni kiritish uchun ikkita maydonchadan iborat, vertikal ustuncha hosil bo`ladi

f(x,w) := | x
| x

. Agar lozim bo`lsa, kushimcha operatorlarni kiritish uchun, yana «Add line» tugmasini tanlash kerak. Yuqori kiritish maydonchasiga [Tab] klavishasi yordamida utish mumkin. Z ni yozib va ■ ← ■ ni hosil qilish uchun dasturlash panelidagi ■ ← ■ tugmasini bosish kerak.

f(x,w) := | z ← ■
| ■

Dasturlashning katta ustunligidan biri bu, tsiklda ayrim operatorlar ketma-ketligining ko`p marta bajarilishidir.

Mathcad ikki xil tsiklni tavsiya etadi, ular bir-biridan tsiklning tugatish sharti, oldindan aniqlanganligi bilan farq kiladi.

Agar tsiklning bajarilish kadami oldindan ma`lum bo`lsa, u xolda «for» tsiklidan foydalaniladi.

Agar tsiklning tugallanilishi biror shartga bog’liq bo`lsa (bu xolda kadamlar soni oldindan ma`lum emas), «while» tsiklidan foydalaniladi.

«While» tsikli

«While» tipidagi tsikl muayyan shartning chin ekanligi bilan boshqariladi. Natijada tsikl bajarilishi kadamini oldindan bilish shart emas. Faqat tsikl ichida yoki boshqa bir bajariladigan qismida, tsikl shartini yolgon natijaga keltiruvchi operator mavjud bo`lishi zarur. Aks xolda tsikl cheksiz bajarilib turiladi. Agar shu xodisa yuz bersa, unda [Esc] klavishasini bosib tsiklni tuxtatish mumkin.

Grafik yasash

Mathcadda birta grafikaviy soxada yagona koordinata uklari orqali turli boglanishlarni ifodalaydigan bir nechta grafiklarni yasash mumkin. Bundan keyin, grafik qandaydir boglanishni ifodalaydigan nuqtalar to`plami va o`ziga xos formatlash xususiyatlariga ega bo`lgan grafik soxasidan iborat deb tushunamiz. « CHizma» so`zi faqat grafikaviy soxaga daxldor bo`ladi.

Grafik yasash uchun:

1. Grafik yasalishi lozim bo`lgan joyni sichkoncha bilan belgilang.
2. Grafik menyusidan «Dekartov grafik» punktini tanlang yoki @ ni bosing yoki boshqarish panelidan grafik belgisi turgan joydan sichkoncha yordamida ixtiyoriy turdagi grafikni tanlash mumkin.

Paydo bo`ladigan shaklning har bir ukidagi bush maydonchalarida argument va funktsiya belgilarini kiritish lozim (1- shakl).

(1 — шакл)

1. Gorizontal ukning o’rtasidagi bush joy grafikning erkli o`zgaruvchisini ko`rsatish uchun ajratilgan. Bu bush joy diskret o`zgaruvchi, indeksli o`zgaruvchi yoki diskret o`zgaruvchili ixtiyoriy ifodani yozish uchun muljallangan.
2. Vertikal ukning o’rtasidagi bush joyga grafigi yasaladigan funktsiyaning nomi yoki ifodasi yoziladi. Bu bush joyga gorizontal ukda ko`rsatilgan diskret o`zgaruvchili, indeksli o`zgaruvchili yoki diskret o`zgaruvchili ixtiyoriy ifodani yozish mumkin.

3. Kolgan turtta bush joy **Mathcad** da koordinata uklarida o`zgaruvchi chegaralarini avtomatik tanlashni bekor qilish uchun qo`llanishi mumkin.

Masalan: Agar i 20 ta qiymat , j esa 30 ta qiymat qabul kiladigan bo`lsa yi ning xj ga boglanishini ifodalashda **Mathcad** barcha 600 ta nuqtani yasaydi.

Bo`sh maydonchalari to`ldirilgan grafik ko`rsatilgan. $y_i$ ostida paydo bo`lgan chiziqka e`tiboringizni karating. U traektoriya tipi va egri chiziqni ifodalash uchun qo`llanilgan rangni ko`rsatadi. Agar ifoda kompleks qiymatlarni qabul qilsa, Mathcad faqat uning haqiqiy qismini ifodalaydi. Bunda grafikda xatoliklar yuzaga keladi.

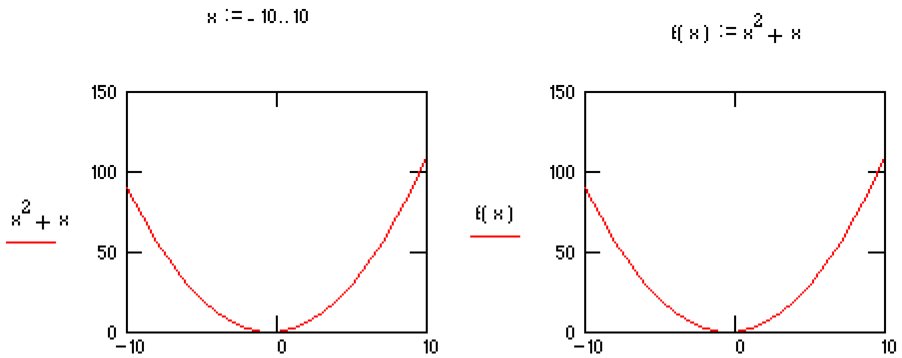
Funktsiya grafigini chizish

CHizmada har bir grafik diskret o`zgaruvchiga bog’liq bo`ladi. Bu diskret o`zgaruvchi ham abtsissa, ham ordinatalar uchun ifoda bo`lishi kerak. **Mathcad**da diskret o`zgaruvchining har bir qiymati bitta nuqtani tasvirlaydi.

Dekart koordinatalar sistemasida grafikni yasash

Grafikni yasash uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak .

1. Argument qiymatining kerakli oraliqdagi qiymatini qabul kiluvchi X diskret o`zgaruvchini aniqlang.
2. Ordinata ukining o’rtadagi bush joyiga grafigi hosil qilinadigan ifodani va abtsissa o`qining o`rtadagi bo`sh joyiga X ni kiriting.
3. Grafik ko`rinishi uchun [F9] ni bosish kerak.

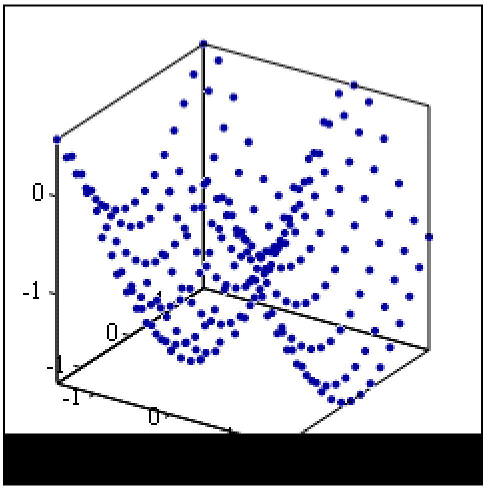


2 - расм

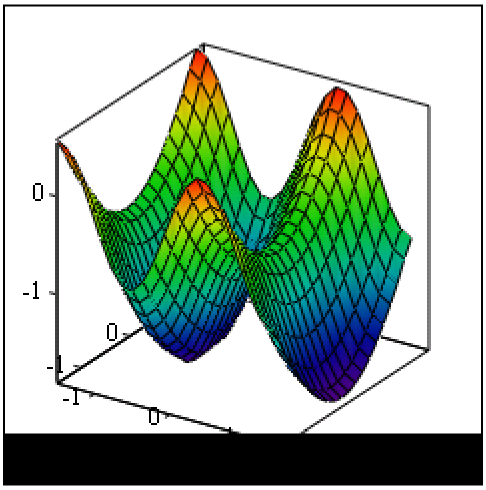
f(x) funktsiyani ham xuddi shunday aniqlash mumkin va uni ordinata uklari o’rtasidagi bush joyga joylashtirish mumkin.

2-rasmdagi 2-grafikda ordinatalar o`qining o`rtasida funktsiya ifodasi o`rnida funktsiyaning nomi yozilgan.

2-rasmdan ko`rinib turibdiki, grafiklar bir xil. Xuddi ifoda kabi grafikni siljitish, kirkish, nusxalash va sigdirma (vstavka) qilish mumkin.



(X, Y, Z)



(X, Y, Z)

Ishchi hujjatidan grafikni yo`qotish uchun:

1. Grafikdan tashqarida sichkoncha knopkasini bosing.
2. Grafikni punktirlangan to`g’ri chiziq orasida joylashtiring.
3. Grafikni yo`qotish uchun [ctrl]+x ni bosing. Xuddi shunday «pravka» menyusidan «virezat’» punktini tanlash mumkin, yoki grafik belgilab olingandan so`ng [Del] klavishasini bosish orqali yo`qotish mumkin.

4. ISHCHI ALGORITMLAR BO`YICHA DASTUR TUZISH

Hisoblash usullari fanida ma`lum bir masalani echish uchun dastlab uning algoritmi ishlab chiqiladi. Bu algoritmlarga ishchi algoritm deyiladi. Ishchi algoritmlar qo`yilgan masalani boshidan oxirigacha to`liq echib beruvchi ketma – ketlikdir. Ishchi algoritmlarni turlicha ifodalash mumkin. Masalan, blok sxemalar orqali, sonli ketma – ketlik orqali va boshqa. Ishchi algoritmni tuzishdan maqsad qo`yilgan masala mohiyati va echimini tasavvur qilishdir.

Ishchi algoritm tuzishda masala mohiyatini to`liq tushinib olib, ma`lum usullar, formulalar qo`llanimladi. Masalan, tenglamalar sistemasini echishning Gauss usuli ishchi algoritmini va dasturini tuzishda, bu usulda qo`llaniladigan formulalar hamda biror dasturlash tilini bilish talab etiladi.

Kundalik hayotda, ko`pincha, oldindan ko`zda tutilgan amallar qatori ko`rsatilgan turli ko`rsatmalarni uchratishga to`g’ri keladi. Ularni ketma-ket bajarib, kutilgan natijaga erishish mumkin. Ko`rsatmalar ketma-ketligi matematik masalalarni echganda ham to`ziladi. Masala mazmuni turli sohalarga tegishli bo`lishidan qat`iy nazar ularni echishning umumiy tomonlari bor. Echish jarayonlari qisqa ko`rsatmalar ketma-ketligi orqali tasvirlanadi. Bu ketma-ketliklar masalani echish algortmini tashkil qiladi. Ko`rsatilgan amallarni bajara borib, talab etilgan natijaga erishish mumkin.

Berilgan ma`lumotlarni qo`llab, talab etilgan natija hosil bo`lishini ta`minlovchi aniq, bir ma`noli ko`rsatmalar ketma-ketligiga algoritm aytiladi. Masalalarni echishda ishtirok etuvchi barcha kattaliklar berilgan ma`lumotlar, algoritmning bajarilishidan oldin ma`lum bo`lgan ma`lumotlar dastlabki ma`lumotlar, masala echimining natijasi - bu so`nggi hosil bo`luvchi ma`lumotlar deyiladi.

Algoritmlarni turlicha yozish mumkin. Algoritmni ifodalash shakli, tarkibi va amallar miqdori mazkur algoritmning ijrochisi kim bo`lishiga bog’liq. Agar masala komp’yuterda echilsa, masalani echish algoritmi mashinaga tushunarli shakldа, ya`ni dastur ko`rinishida yozilishi kerak.

Komp’yuter - murakkab elektron qurilma, uni mufassal o`rganish uchun ancha vaqt zarur bo`ladi. Biroq, komp’yuterdan foydalanuvchilar – dasturchilar uchun uning ishi haqida eng umumiy ma`lumotlarga ega bo`lish etarlidir. Dasturchini asosan mashina dastur buyruqlarini qanday qilib amalga oshirishi, bunda u qanday amallarni bajarishi qiziqtiradi.

Komp’yuter dasturni bajara borib, turli ma`lumotlar (sonlar, mantiqiy qiymatlar, matnlar va h.k.) ustidan amallar bajaradi. Ma`lumotlar ustidagi barcha amallarni mashina protsessori bajaradi.

Har qanday komp’yuterning eng asosiy qurilmalaridan biri uning xotirasidir. Mashina o`z xotirasida masalani echish uchun zarur bo`lgan barcha ma`lumotlarni saqlash xususiyatiga ega. Oddiylik uchun mashina xotirasini kataklarga bo`lingan ko`rinishda tasvirlash mumkin. Bu kataklar *mashina so`zi* yoki *yacheykalar* deb ataladi. Odatda, ma`lumotlarning har biri alohida yacheykaga joylashtiriladi. Xotiraga yozilgan ma`lumotlarni bir necha marta o`qish va hisoblashlarda foydalanish mumkin. Biroq, xotiraning ma`lum yacheykasiga yangi so`z kiritilsa, shu yacheykadagi oldingi saqlab turilgan ma`lumot o`chadi.

Komp’yuter protsessori ma`lumotlarni xotiradan o`qiydi, ular ustida dasturda ko`rsatilgan zarur amallarni bajaradi va hisoblash natijalarini yana komp’yuter xotirasiga yozadi.

Mashina masala mazmunini tushunmaydi, chunki komp’yuter dasturda yozilgan ko`rsatmalarni aniq bajaruvchi elektron robotdir. Shu sababli unga bajarish uchun aniq va bir ma`noli tavsiflangan ko`rsatmalar berilishi kerak.

Mashina dasturni dastlabki ma`lumotlar kabi dastur ham xotiraga kiritilgan holdagina ishlay oladi. Bunda dasturning har bir buyrug'i ma`lum usul bilan kodlanadi. Mashina protsessori dastur matnini buyruqma-buyruq, ketma-ket o`qiydi, ularning mazmunini yoritadi va ko`rsatilgan amallarni bajaradi.

Dasturlash tillari. Hozirgi zamon EHMlari (komp'yuterlari) inson qo`llaydigan rus, o`zbek, ingliz yoki boshqa shu kabi biror bir tilda tuzilgan dasturni tushuna oladigan darajada takomillashgan emas. Shu uchun, mashinaga mo`ljallangan buyruqlar u tushunadigan shaklda yozilishi kerak. Bu maqsadda algoritmik yoki dasturlash tillari deb ataluvchi sun`iy tillar qo`llaniladi.

Dastlab birinchi avlod EHMlari uchun dastur mashina tilida to`zilar edi. Mashina tili aniq amallarni sonli ko`rinishda kodlash qoidalariga olib kelishdan iborat edi. Mashina tili *quyi darajadagi dasturlash tili* hisoblanib, mashinaga mo`ljallangan tillar sinfiga kiradi. Bu tillarning asosida aniq bir hisoblash mashinasining buyruqlar tizimi yotadi. Quyi darajadagi tillarga assembler, makroassembler va mashina tillari kiradi. Hisoblash texnikasining rivojlanishi masalalarning xususiyatlariga butunlay mo`ljallangan va aniq bir mashinaga bog'liq bo`lmagan *yuqori darajadagi dasturlash algoritmik tillari*ning paydo bo`lishi va ularning rivojlanishiga olib keldi. Mazkur tillarning alfaviti, so`z boyligi dastur bilan ishlaydigan insonga (dasturchiga) ham, komp'yuterga ham bir xilda qulay qilib tanlanishi kerak. Yuqori darajadagi dasturlash tillariga algol, fortran, PL/1, Paskal, Si, Simula va boshqa juda ko`p tillar misol bo`la oladi. Komp'yuter dasturda beriladigan buyruqlar ketma-ketligini oson talqin qilishi va bajara olishi kerak. Demak, dasturlash tilini inson va mashinaning muloqot vositasi deb hisoblash mumkin.

Dasturlash tili quyidagi afzalliklarga ega:

- u jonli tilimizga o`xshash bo`lib uni o`rganish oson;
- bu tilda yozilgan dastur mashina tilidagidan qisqaroq bo`ladi;
- dastur yozishga kamroq vaqt sarflanadi va kam xatolikka yo`l qo`yiladi;
- yozilgan dasturni ixtiyoriy dasturchi o`qiy oladi;
- dasturlash tili mashinaga bog'liq emas.

Demak, dasturlash (yuqori darajadagi) tilida dastur tuzish qulayroq, osonroq va buning uchun konkret mashina (quyi darajadagi) tilini bilish shart emas ekan.

Hozirgi paytda dasturlash tillarining soni juda ko`payib ketmoqda. Lekin, shuni aytish kerakki, har qanday dasturlash tili o`zining darajasi va qo`llash sohasiga ega. Ba`zi bir tillar bir necha xil soha masalalarini echishda ishlatiladi. Bunday tillar universal tillar deb ham ataladi.

Takrorlash uchun savollar:

1. Modulli dasturlash deganda nimani tushunasiz?
2. Excel elektron jadvali vazifasini ayting?
3. Excel elektron jadvalida masalalar echish jarayonini tushuntiring?
4. Mathcad dasturining imkoniyatlarini sanab bering.
5. Mathcad dasturida grafik qanday yasaladi?
6. Mathcad dasturidan foydalanib vektorlar ustida turli amallar bajarilishi ketma-ketligini tushuntiring?
7. Ishchi algoritm nima?
8. Dasturlash tillari afzalliklarini ayting?

3-MAVZU. XATOLIKLAR NAZARIYASI

Reja:

1. Aniq va taqribiy sonlar haqida tushuncha.
2. Xatolar manbai.
3. Hisoblash xatosi.
4. Absolyut va nisbiy xatolar.
5. Taqribiy sonlar ustida amallar.

Tayanch iboralar:

Aniq sonlar, taqribiy sonlar, xatolik, boshlang'ich informatsiya xatoligi, hisoblash xatoliklari, absolyut xato, nisbiy xato, aniqlik.

1. ANIQ VA TAQRIBIY SONLAR HAQIDA TUSHUNCHA

Kundalik hayotimizda va texnikada uchraydigan ko`plab masalalarni echishda turli sonlar bilan ish kurishga to`g'ri keladi. Bular aniq yoki taqribiy sonlar bo`lishi mumkin. Aniq sonlar biror kattalikning aniq, qiymatini ifodalaydi. Taqribiy sonlar esa biror kattalikning aniq qiymatiga juda yaqin bo`lgan sonni ifodalaydi. Taqribiy sonning aniq songa yaqinlik darajasi hisoblash yoki o`lchash. jarayonida yo`l qo`yilgan xatolik bilan ifodalanadi.

Masalan, ushbularda: «kitobda 738 ta varak», «auditoriyada 30 ta talaba», «uchburchakda 3 ta kirra», «telefon apparatida 10 ta rakam», 738, 30, 3, 10 aniq sonlar. Ushbularda esa: «Er bo`lagining perimetri 210 m», «Erning radiusi 6000 km», «Qalamning og'irligi 8 g», 210, 6000, 8 taqribiy sonlar. Bu kattaliklarning taqribiy bo`lishlariga sabab, o`lchov asboblarining takomillashmaganligidir. Mutlaq aniq o`lchaydigan o`lchov asboblari yo`q bo`lib, ulardan foydalanganda ma`lum xatoliklarga yo`l qo`yiladi.

Bundan tashqari, Er aniq shar shaklida bulmaganligi tufayli, uning radiusi taqribiy olingan. Uchinchi misolda esa qalamlar har xil bo`lganligi uchun ularning og'irligi turlicha. 8 g deb o'rtacha kalamning og'irligi olingan.

Amaliyotda taqribiy son a deb, aniq qiymatli son A dan biroz farq kiladigan va hisoblash jarayonida uning urnida ishlatiladigan songa aytiladi.

Qisqalik uchun bundan keyin aniq qiymatli son o`rniga aniq son, kattalikning taqribiy qiymati o`rniga taqribiy son deb yozamiz.

Amaliy masalalarni echish asosan quyidagi ketma-ket qadamlardan iborat:

1) echilayotgan masalani matematik ifodalar orqali yozish;
2) qo`yilgan matematik masalani echish.

Tabiatda uchraydigan masalalarni doim ham aniq matematik tilda ifodalash mumkin bulmaganligi tufayli masala ma`lum darajada ideallashgan model' vositasida yoziladi, ya`ni xatolikka yo`l qo`yiladi (birinchi kadamda).

Masalaning tarkibiga kirgan ba`zi parametrlar tajribadan olinganligi tufayli, bunda ham xatolikka yo`l qo`yiladi. Bularning yig'indisi esa boshlang'ich informatsiya xatoligini keltirib chikaradi.

Juda ko`p xollarda matematik masalaning (ikkinchi kadam) aniq echimini (analitik) topishning iloji bo`lmaydi. Shuning uchun amaliyotda taqribiy matematik usullar qo`llaniladi. Aniq, echimning o`rniga taqribiy echimni qabul qilish (majburiy ravishda) yana xatolikni keltirib chikaradi. Masalani echish jarayonida boshlang'ich shartlarni va hisoblash natijalarini yaxlitlashda ham xatolikka yo`l qo`yiladi, bunga h*isoblash xatoliklari* deyiladi.

Taqribiy sonlar bilan ish kurilayotganda quyidagilarga amal qilish lozim:

1. taqribiy sonlarning aniqligi xakida ma`lumotga ega bo`lish;
2. boshlang'ich qiymatlarning aniqlik darajasini bilgan xolda natijaning aniqligini baxolash;
3. boshlangich qiymatlarning aniqlik darajasini shunday tanlash kerakki, natija belgilangan aniqlikda bo`lsin.

2. XATOLAR MANBAI

Ko`pincha matematik masalalarni sonli echishda biz doimo aniq echimga ega bula olmasdan, balki echimni u yoki bu darajadagi aniqlikda topamiz. Demak, aniq echim bilan taqribiy echim orasidagi xatolik qanday kilib kelib koladi degan savol tugilishi tabiiydir. Bu savolga javob berish uchun xatoliklarning hosil bo`lish sabablarini o`rganish lozim.

1. Matematikada tabiat xodisalarining miqdoriy nisbati u yoki bu funktsiyalarni bir-birlari bilan boglaydigan tenglamalar yordamida tasvirlanadi va bu funktsiyalarning bir qismi ma`lum bo`lib *(dastlabki ma`lumotlar),* boshqalarni topishga to`g'ri keladi. Tabiiyki, topilishi kerak bo`lgan miqdorlar (masalaning echimi) dastlabki ma`lumotlarning funktsiyasi bo`ladi. Kerakli echimni ajratib olish uchun dastlabki ma`lumotlarga konkret qiymatlar berish kerak. Bu dastlabki ma`lumotlar, odatda, tajribadan olinadi (masalan, yorug'lik tezligi, Plank doimiysi, Avogadro soni va x.k.)

yoki boshqa biror masalani echishdan hosil bo`ladi. Har ikkala xolda ham biz dastlabki ma`lumotlarning aniq qiymatiga emas, balki uning taqribiy qiymatiga ega bo`lamiz. Shuning uchun agar dastlabki ma`lumotlarning har bir qiymati uchun tenglamani aniq, echganimizda ham, baribir (dastlabki ma`lumotlardagi qiymatlar taqribiy bo`lganligi uchun) taqribiy natijaga ega bo`lamiz va natijaning aniqligi dastlabki ma`lumotlarning aniqligiga bog’liq bo`ladi.

Aniq, echim bilan taqribiy echim orasidagi farq *xato* deyiladi. Dastlabki ma`lumotlarning noaniqligi natijasida hosil bo`lgan xato *yo`qotilmas xato* deyiladi. Bu xato masalani echayotgan matematikga bog’liq. bo`lmasdan, unga berilgan ma`lumotlarning aniqligiga bog’liqdir. Lekin matematik dastlabki ma`lumotlar xatosining kattaligini bilishi va shunga qarab natijaning yo`qotilmas xatosini baxolashi kerak. Agar dastlabki ma`lumotlarning aniqligi katta bo`lmasa, aniqligi juda katta bo`lgan metodni qo`llash urinsizdir. CHunki aniqligi katta bo`lgan metod ko`p mexnatni (hisoblashni) talab kiladi, lekin natijaning xatosi bari bir yo`qotilmas xatodan kam bo`lmaydi.

2. Ba`zi matematik ifodalar tabiat xodisasining ideallashtirilgan modelini tasvirlaydi. Shuning uchun tabiat xodisalarining aniq matematik ifodasini (formulasini, tenglamasini) berib bo`lmaydi, buning natijasida xato kelib chikadi. Yoki biror masala aniq matematik formada yozilgan bo`lsa va uni shu ko`rinishda echish mumkin bo`lmasa, bunday xolda bu masala unga yaqinrok va echish mumkin bo`lgan masalaga almashtirilishi kerak. Buning natijasida kelib chiqadigan xato *metod xatosi* deyiladi.

3. Biz doimo π, *e*, *1p2* va shunga o`xshash irratsional sonlarning taqribiy qiymatlarini olamiz, bundan tashqari, hisoblash jarayonida oraliq natijalarda ko`p xonali sonlar hosil bo`ladi, bularni yaxlitlab olishga to`g’ri keladi. Ya`ni masalalarni echishda hisoblashni aniq olib bormaganligimiz natijasida ham xatoga yo`l kuyamiz, bu xato *hisoblash xatosi* deyiladi.

Shunday kilib, *tulik, xato* yuqorida aytilgan yo`qotilmas xato, metod xatosi va hisoblash xatolarining yig’indisidan iboratdir. Ravshanki, biror konkret masalani echayotganda yuqorida aytilgan xatolarning ayrimlari katnashmasligi yoki uning ta`siri deyarli bo`lmasligi mumkin. Lekin, umuman olganda, xato tulik. analiz kilinishi uchun bu xatolarning xammasi hisobga olinishi kerak.

3. HISOBLASH XATOSI.

Masalani kulda yoki hisoblash mashinasida echayotganda biz barcha haqiqiy sonlar bilan ish kurmasdan, sonlarning ma`lum diskret to`plami bilan ish ko`ramizki, u yoki bu sanok sistemasida ma`lum miqdordagi xonalar bilan olingan sonlar shu to`plamda yotadi. Bu to`plam

$$\pm(a_1 q^n + a_2 q^{n-1} + \ldots + a_m q^{n-m+1}) \qquad (2.1)$$

ko`rinishdagi sonlardan iborat bo`lib, by erda natural son q - sanok sistemasining asosidir; a_1, a_2 ,..., a_m - butun sonlar bo`lib, $0 \le a_i \le q-1$ shartni kanoatlantiradi; *t* bu to`plamdagi sonlar xonasining miqdori, butun *p* son esa $|n| \le n_0$ shartni kanoatlantiradi. Kulda hisoblayotganda, asosan, unlik sanok sistemasi (q = 10) bilan ish kuriladi. Kup EHM larda esa ikkilik sanok sistemasi (q = 2) va ayrimlari uchun uchlik sanok, sistemasi (q = 3) ishlatiladi.

EHM larning ko`pchiligi shunday tuzilganki, ularda $q = 2$, $m = 35$, $n_0 = 63$ bo`ladi.

Odatda, arifmetik amallarni bajarayotganda ko`p xonali sonlar hosil bo`ladi (masalan, ko`paytirishda xonalarning soni ikkilanadi, bo`lishda esa xonalarning soni nixoyatda kattalashib ketishi ham mumkin). Natijada hosil bo`lgan son karalayotgan to`plamdan chikib ketmasligi uchun *t* - xonasigacha yaxlitlanadi, ya`ni shu to`plamdagi boshqa son bilan almashtiriladi, tabiiyki yaxlitlanadigan son unga eng yaqin son bilan almashtirilishi, ya`ni yaxlitlash xatosi eng kichik bo`lishi kerak.

Agar biz juft rakam koidasini qo`llab 5,780475 sonini ketma-ket yaxlitlasak, quyidagi 5,78048; 5,7805; 5,780; 5,78; 5,8; 6 sonlar kelib chikadi.

Ko`pincha biror natijani olish uchun berilgan metodda ko`rsatilgan bir kator amallarni bajarishga to`g’ri keladi. Agar natijani katta aniqlik bilan topish talab kilinsa, bu kator yanada o`zayib ketadi.

4. ABSOLYUT VA NISBIY XATOLAR

Faraz kilaylik *A* aniq son, *a* - uning taqribiy qiymati bo`lsin. Agar *a*<*A* bo`lsa, *a kami bilan olingan taqribiy son* deyiladi. Agar *a*>*A* bo`lsa, *a ortigi bilan olingan taqribiy son* deyiladi.

1 - ta`rif. Taqribiy sonning *xatoligi* deb *A* va *a* orasidagi ayirmaga aytiladi.

Xatolikni Δa deb belgilasak, u holda quyidagicha bo`ladi:

$$\begin{aligned} \Delta a &= A - a; \\ A &= \Delta a + a \end{aligned} \qquad (2.2)$$

2 - ta`rif. Taqribiy sonning *absolyut xatoligi* deb *A va a* orasidagi ayirmaning moduliga aytiladi.

Absalyut xatolikni Δ deb belgilasak, u holda quyidagicha bo`ladi:

$$\Delta = |A - a| \qquad (2.3)$$

Amaliyotda ko`p xollarda 0,01 gacha aniqlik bilan, 1 sm gacha aniqlik bilan va x.k. lar uchraydi. Bu esa absolyut xatolikning 0,01; 1 sm va x.k. ga teng ekanligini bildiradi.

3 - ta`rif. Taqribiy son *a* ning nisbiy xatoligi $\delta(a)$ deb absolyut xatolik Δa ning *A* ning moduliga nisbatiga aytiladi:

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|A|} \qquad (2.4)$$

yoki

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|a|} \qquad (2.5)$$

(2.4) va (2.5) formulalarni 100 ga ko`paytirsak, nisbiy xatolik foiz (%) hisobida chikadi.

1 - misol. L uzunlikdagi kesmani 0,01 sm aniqlikda ulchadilar va *l = 21,4* sm natijani oldilar.

Bu erda absolyut xatolik $\Delta l = 0{,}01$ sm. (2.2) formulaga asosan *L = 21,4 ± 0,01* ya`ni *21,39 ≤ L ≤ 21,41*.

Absolyut xatolik o`lchash yoki hisoblashni faqat miqdoriy tomondan ifodalaydi va sifat tomonlarini tavsiflamaydi. Shu munosabat bilan nisbiy xatolik tushunchasi kiritiladi.

2 - misol. *a* = 35,148 ± 0,00074 taqribiy sonning nisbiy xatosi (foizlarda) topilsin.

Bu erda Δa = 0,00074; *A*=35,148 (2.4) ga asosan

$$\delta(a) = \frac{0{,}00074}{35{,}148} = 0{,}000022 \approx 0{,}003\ \%$$

3 - misol. Nisbiy xatoligi $\delta(a)$ =0,01 % bo`lgan *a*=4,123 taqribiy sonning absolyut xatoligi Δa topilsin.

Foizni unli kasr orqali ifodalab va (2.5) formulaga asosan:

$$\Delta a = |a| \cdot \delta(a) = 4{,}123 \cdot 0{,}0001 = 0{,}0005$$

$$A = 4{,}123 \pm 0{,}0005$$

4-misol. Jismning og’irligini o`lchashda R = 23,4 ± 0,2 g natija olingan. Nisbiy xatolik topilsin.

Bu erda $\Delta P = 0{,}2$ u xolda

$$\delta(p) = \frac{0{,}2}{23{,}4} \cdot 100\% = 0{,}9\ \%$$

5. TAQRIBIY SONLAR USTIDA AMALLAR

Taqribiy sonlarni kushganda yoki ayirganda ularning absolyut xatoliklari kushiladi:

$$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b \qquad (2.6)$$

bu erda *a* va *b* - taqribiy sonlar.

Taqribiy sonni taqribiy songa bo`lganda yoki ko`paytirganda ularning nisbiy xatoliklari kushiladi:

$$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b);$$
$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) = \delta(a) + \delta(b) \qquad (2.7)$$

Taqribiy son darajaga oshirilganda, uning nisbiy xatoligi shu daraja ko`rsatkichiga ko`paytiriladi:

$$\delta(a^n) = n \cdot \delta(a) \qquad (2.8)$$

Misol. Quyidagi funktsiyaning nisbiy xatoligi topilsin:

$$y = \left(\frac{a+b}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(2.6), (2.7) va (2.8) formulalardan foydalansak,

$$\delta(y) = \frac{1}{2}\delta(a+b) + 3\delta(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} + 3 \cdot \frac{\Delta x}{|x|}\right)$$

Faraz kilaylik, *a* bir o`zgaruvchili funktsiya *y =f(x)* ning argumenti *x* ning taqribiy qiymati, $\Delta a$ esa uning absolyut xatoligi bo`lsin. Bu funktsiyaning absolyut xatoligi sifatida uning orttirmasi Δy ni olish mumkin. Orttirmani esa differentsial bilan almashtirsak:

$$\Delta y \approx dy$$

U xolda

$$\Delta y = | f'(a) | \cdot \Delta a$$

Ushbu muloxazani ko`p o`zgaruvchili funktsiyaga ham qo`llash mumkin.

U = f(x, u, z) funktsiyaning argumentlari *x*, *u*, *z* lar uchun taqribiy qiymatlar *a*, *b*, *s* lar bo`lsin. U xolda

$$\Delta u = | f'_x(a,b,c) | \cdot \Delta a + | f'_y(a,b,c) | \cdot \Delta b + | f'_z(a,b,c) | \cdot \Delta c$$

bu erda Δa, Δb, Δc - argumentlar absolyut xatoligi; f'_x, f'_y, f'_z, - moc ravishda *x*, *u*, *z* buyicha olingan xususiy hosilalar.

Nisbiy xatolik esa quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\delta(u) = \frac{\Delta u}{| f(a,b,c) |} \qquad (2.9)$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Aniq son deb nimaga aytiladi?
2. Taqribiy soni izohlang.
3. Xato deganda nimani tushunasiz?
4. Yo`qotilmas xato deb nimaga aytiladi?
5. Hisoblash xatosi nima?
6. Taqribiy sonning xatoligi.
7. Absalyut xato deb nimaga aytiladi?
8. Nisbiy xato nima?

4 - MAVZU. ALGEBRAIK VA TRANSTSENDENT TENGLAMALARNI TAQRIBIY ECHISH USULLARI. ORALIQNI IKKIGA BO`LISH USULI

Reja:

1. Masalaning qo`yilishi.
2. Ildizlarni ajratish.
3. Oraliqni ikkiga bo`lish usuli, uning ishchi algoritmi.

Tayanch iboralar:

Algebraik teglama, transtsendent, oraliq, ildiz, hosila, uzluksiz, uchuvchi, kamayuvchi, keltirilgan tenglama, Dekart koordinatasi.

1. MASALANING QO`YILISHI.

Bir noma`lumli istalgan tenglamani quyidagi ko`rinishga keltirish mumkin

$$f(x)=0, \qquad (4.1)$$

bu erda $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz.

Ta`rif. (4.1) tenglamaning *ildizi (echimi)* deb shunday ξ ($a \le \xi \le b$) songa aytiladiki, ξ ni (4.1) ga kuyganda

$$f(\xi)=0$$

ayniyat hosil bo`ladi.

Agar (4.1) da $f(x)$ funktsiya algebraik, ya`ni

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n \qquad (4.2)$$

bo`lsa, u xolda (2.1) *algebraik tenglama* deb ataladi. (4.2) da $a_0, a_1, \dots, a_n$ – istalgan sonlar, p — natural son.)

Algebraik tenglamaga misolar:

$$x^2 - 5x + 6 = 0; \qquad \sqrt{2x+6} + \sqrt{6x-4} = 14; \qquad \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{x-1}{4} \qquad \text{va x.k.}$$

Algebraik tenglama deganda (4.2) ko`rinishdagi tenglama ko`zda tutiladi. Keltirilgan misollardagi ikkinchi va uchinchi tenglamalarni sodda amallar bajarib (4.2) ko`rinishga keltirish mumkin.

Agar (4.1) tenglamada $f(x)$ funktsiya algebraik bo`lmasa, ya`ni uni (4.2) ko`rinishda ifodalab bo`lmasa, u xolda (4.1) ga t r a n s t s e n d e n t t e n g l a m a deyiladi. Transtsendent tenglamaga misollar:

$x-10\sin x=0;$ $2x-2\cos x=0;$ $\lg(x+1)=\mathrm{tg}x$ va x.k.

Ko`rsatkichli (a^x), logarifmik *{1ogx)*, trigonometrik *(sinx, cosx, tgx* va x.k.) funktsiyalar algebraik bulmagan (transtsendent) funktsiyalardir.

(4.1) tenglama haqiqiy yoki kompleks ildizga ega bo`lishi mumkin. Biz faqat haqiqiy ildizlar topish bilan shugullanamiz va quyidagi masalalarni echamiz:

1) (4.1) tenglama haqiqiy ildizga egami yoki yukmi; agar ega bo`lsa ildizlar soni nechta?
2) haqiqiy ildizlarni aniq usullar bilan yoki berilgan aniqlikda taqribiy usullar bilan topish;

Oliy algebradagi algebraik tenglamalarning ba`zi xossalarini isbotsiz keltiramiz:

1) Har qanday algebraik tenglama juda bulmaganda bitta ildizga ega (haqiqiy yoki kompleks).
2) Kar qanday *p* tartibli algebraik tenglamaning ildizlari soni *p* dan katta bo`lmaydi.
3) Har qanday haqiqiy koeffitsientli algebraik tenglama faqat juft sonli kompleks ildizlarga ega bo`lishi mumkin.
4) Har qanday tok darajali algebraik tenglama juda bulmaganda bitta haqiqiy ildizga ega.

Algebraik tenglama ildizlarini qanday topamiz?

1-, 2-tartibli tenglamalar uchun tayyor hisoblash formulalari mavjud bo`lib, ular bizga o’rta maktab matematikasidan ma`lum. Bu formulalarda ildizlar tenglamaning koeffitsientlari orqali ifodalanadi (masalan kvadrat tenglamaning ildizlarini hoblashda). 3- va 4- tartibli tenglamalar uchun ham formulalar mavjud. Biroq bu formulalar murakkab ko`rinishda. 5- va undan yuqori darajali algebraik tenglamalar uchun bunday formulalarning bo`lishi mumkin emas. Buni Norvegiyalik matematik Abel’ isbotlagan. Bunday tenglamalarni faqat xususiy xollardagina echish mumkin (masalan $ax^p=b$ ni).

Shu munosabat bilan xisoblash matematikasida kator taqribiy usullar ishlab chikilgan. Bu usullar bilan istalgan darajali algebraik yoki transtsendent tenglamalarni berilgan aniqlikda echish mumkin. Shuning uchun taqribiy usullar yuqori darajali tenglamalarni echish uchun asos bo`ladi.

«Berilgan aniqlikdagi taqribiy echim» deganda nimani tushunamiz?

Faraz kilaylik, ξ (4.1) ning aniq echimi, *x* esa uning ε aniqlikdagi taqribiy echimi ($0<\varepsilon<1$) bo`lsin. U xolda yuqoridagi savolimizning javobi $|\xi - x| \le \varepsilon$ bo`ladi. Ushbu bobda biz bir noma`lumli algebraik va transtsendent tenglamalarni ba`zi taqribiy echish usullari bilan tanishib chiqamiz.

2. ILDIZLARNI AJRATISH. ORALIQNI IKKIGA BO`LISH USULI

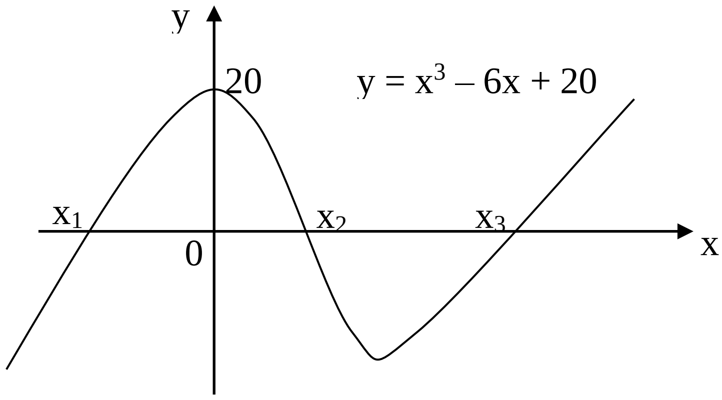
Tenglamalarni taqribiy echish jarayoni ikkita boskichga ajratiladi:

1) ildizlarni ajratish;
2) ildizlarni berilgan aniqlikda topish.

[a,b] kesmada *f(x)* =0 tenglamaning ξ dan boshqa ildizi yo`q bo`lsa, ildiz ξ ajratilgan hisoblanadi. Ildizlarni ajratish uchun *[a,b]* kesmani shunday kesmachalarga bo`lish kerakki, bu kesmachalarda tenglamaning faqat bitta ildizi bo`lsin. Ildizlarni g r a f i k va a n a l i t i k usullar bilan ajratish mumkin.

Ildizlarni grafik usulda ajratish. 1-usul. Bu usul juda sodda bo`lib quyidagicha bajariladi. Dekart koordinat tizimida *u=f(x)* funktsiyaning grafigini chizamiz (bu bizga o'rta maktab dasturidan ma`lum). Shu grafikning *Ox* uki bilan kesishgan nuqtalari izlanayotgan ildizlar (taqribiy) bo`ladi.

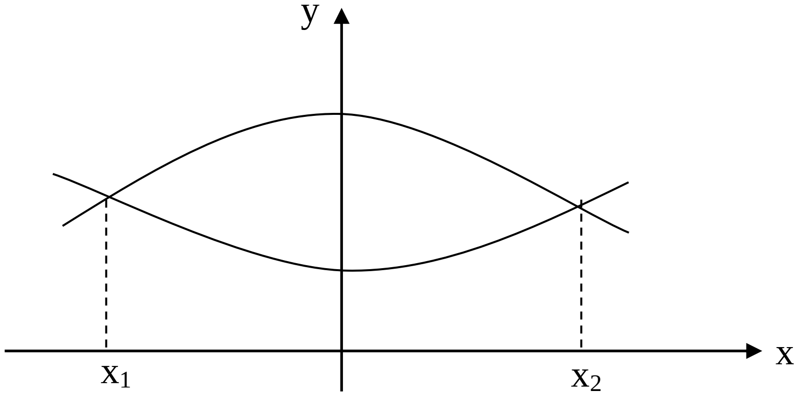
Misol. x^3-$6x^2$+20 =0 tenglamaning taqribiy echimlari x_1, x_2, x_3 1-rasmda ko`rsatilgan.



1- рacм

2-usul. *f(x) = 0* tenglamani *f(x) =$f_2(x)$* ko`rinishda ezib olamiz.

Dekart koordinat tizimida $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funktsiyalarning grafiklarini chizamiz. Agar bu egri chiziqlar o`zaro kesishsa, kesishgan nuqtalaridan *Ox* ukiga tik chiziq (perpendikulyar) o'tkazamiz. Hosil bo`lgan nuqtalar (eki nuqta) taqribiy echimlar bo`ladi. 2- rasmdagi x_1 va x_2 lar (2.1) tenglamaning taqribiy echimlaridir.



2- рacм

Bu usullar bilan tenglamalar echganda aniqroq echimlar olish uchun grafiklarni iloji boricha aniq chizish va katta masshtab olish lozim bo`ladi. Shunga qaramay grafik usullar bilan ildizlarni yuqori aniqlikda hisoblab bo`lmaydi. Grafik usul bilan tenglamaning ildizlarini biror chegaralangan kesmada aniqlaymiz, ya`ni chizmani istalgancha katta o`lchovda ololmaymiz va tenglama nechta ildizga ega ekanligiga javob bera olmaymiz. Ildizlarni yuqori aniqlikda topish lozim bo`lsa, boshqa taqribiy usullardan foydalanish kerak.

Ildizlarni analitik usulda ajratish. $f(x)=0$ tenglamaning ildizlarini analitik usulda ajratish uchun oliy matematika kursidan ba`zi teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. *Agar $f(x)$ funktsiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo`lib, kesmaning chekka nuqtalarida tur li ishorali qiymatlar qabul kilsa, u xolda $[a, b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning juda bulmaganda bitta ildizi yotadi.*

2-teorema. *Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b,]$ kesmada uzluksiz va monoton bo`lib, kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul kilsa, u xolda $[a, b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.*

3-teorema. *Agar $f(x)$ funktsiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo`lib va kesmaning chekka nuqtalarida turli ishorali qiymatlar qabul kilib, $[a,b]$ kesmaning ichida $f'(x)$ hosilasining ishorasi o`zgarmasa, u xolda $[a,b]$ kesmada $f(x)=0$ tenglamaning faqat bitta ildizi yotadi.*

Eslatma. 1) $u= f(x)$ funktsiya berilgan intervalda m o n o t o n deyiladi, agar shu intervalga tegishli istalgan $x_2>x_1$ uchun $f(x_1)\geq f(x_2)$ *($f'(x)\geq 0$) (monoton usuvchi) eki* $f(x_2)\leq f(x_1)$ *($f'(x)\leq 0$) (monoton kamayuvchi) bo`lsa.*

2) Agar $u=f(x)$ funktsiya berilgan intervalda uzluksiz bo`lib, intervalning xamma nuqtalarida hosilalari mavjud bo`lsa, u xolda funktsiyaning bu intervalda monoton bo`lishi uchun $f'(x)\geq 0$ yoki $f'(x)\leq 0$ tengsizliklarning bajarilishi zarur va etarli.

3. ORALIQNI IKKIGA BO`LISH USULI

Faraz kilaylik, $f(x)=0$ tenglamaning biror ξ ildizi $[a,b]$ kesmada ajratilgan bo`lsin. Kesmaning uzunligi $d=b-a$ deb belgilaylik. Tenglamaning $\xi$ echimi $\varepsilon=0{,}001$ aniqlikda topilsin. $\xi$ ildiz $[a,b]$ ning ichida bo`lganligi $\{a<\xi<b\}$ uchun a ni kami bilan olingan taqribiy ildiz, b ni ortigi bilan olingan taqribiy ildiz deb olishimiz mumkin. Agar d<0,001 bo`lsa masala echilgan hisoblanadi va $a$ hamda $b$ lar $f(x)=0$ tenglamaning berilgan $\varepsilon=0{,}001$ aniqlikdagi echimlari bo`ladi. Bu xolda taqribiy echim sifatida a va b

lardan tashqari bular orasida yotgan istalgan x_0 $\{a<x_0<b)$ ni olish mumkin. Taqribiy echim sifatida $x_0 = \frac{a+b}{2}$ ni olish maqsadga muvofik.

Endi faraz kilaylik $d>0{,}001$ va $[a,b]$ kesmaning o'rtasida $c=(a+b)/2$ nuqta olingan bo`lsin. U xolda $[a,b]$ kesma uzunliklari $(b-a)/2$ ga teng bo`lgan $[a,c]$ va $[c,b]$ kesmalarga ajraydi. Shu ikki kesmadan kaysi birining chekka nuqtalarida $f(x)$ funktsiya ishorasini o`zgartirsa, shu kesmani olib kolib keyingisini tashlab yuboramiz. Kolgan kesmaning uzunligi $d_1 \le \varepsilon$ bo`lsa, shu erda tuxtaymiz. Agar shart bajarilmasa, olib qolingan kesmada yuqoridagi muloxazalarni takrorlaymiz. Ikkiga bo`lish jarayonini kesmaning uzunligi $d_n \le\varepsilon$ ($p$-ikkiga bo`lishlar soni) bo`lganiga qadar davom ettiramiz.

Misol. $x^3—4x—1=0$ tenglama ε =0,001 aniqlikda echilsin.

Quyidagi jadvalni to`zamiz

X	-1	0	1	2	2,1	2,2
f(x) ning ishorasi	+	-	-	-	-	+

Jadvaldan kurinyaptiki [-*1;0*]; [2,*1; 2,2*] kesmalarda taqribiy echim (1-teoremaga asosan) bor. Biz uchun qulay kesma [*2,1; 2,2*]. Bunda $f(2.1)=-1{,}39 < 0$; $f(2.1)= 0{,}850 > 0$. Bizda $a=2{,}1$; $b=2{,}2$. Bundan $d=b-a=0{,}1>\varepsilon$. Demak hisoblashni davom ettirish kerak.

$$f(2{,}11) = -0{,}046 < 0; \qquad f(2{,}12) = 0{,}046>0$$

Bu erdan $a=2{,}11$; $b=2{,}12$; $d=b-a=0{,}01>\varepsilon$

Hisoblashni yana davom ettiramiz:

$$f(2{,}114) = -0{,}0085 < 0; \; f(2{,}115) = 0{,}0009 > 0$$

$$a=2{,}114;\ b=2{,}115;\ d=b-a=2{,}115-2{,}114=0{,}001=\varepsilon$$

Qo`yilgan maqsadga erishdik, ya`ni kesmaning uzunligi d avvaldan berilgan aniqlik $\varepsilon=0{,}001$ dan katta emas. Bu misolda izlanayotgan taqribiy echim ξ quyidagi oraliqda bo`ladi $2{,}114<\xi<2{,}115$, ya`ni 2,114 va 2,115 larni taqribiy echim tarzida olish mumkin (ξ aniqlik bilan). Amalda bularning o'rta arifmetigi olinsa echim aniqligi yanada oshadi

Takrorlash uchun savollar:

1. Tenglamaning ildizi nima?
2. Algebraik tenglama deganda nimani tushunasiz?
3. Transtsendent tenglama nima?
4. Ildizlarni ajratish deganda nimani tushunasiz?
5. Ildizlarni berilgan aniqlikda topish nima?
6. Kesmani uzunligi nima?
7. Grafik usul deganda nimani tushunasiz?
8. Funktsiyaning intervalda monotonligi nima?
9. Ildizlarni analitik usulda ajratish qanday bajariladi?
10. Oraliqni ikkiga bo`lish usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?

5-MAVZU. ALGEBRAIK VA TRANSTSENDENT TENGLAMALARNI TAQRIBIY ECHISH USULLARI. VATARLAR USULI. URINMALAR USULI. KETMA – KET YAQINLASHISH USULI

Reja:

1. Vatarlar usuli.
2. Urinmalar (N'yuton) usuli.
3. Ketma - ket yaqinlashish usuli.
4. Usullarning ishchi algoritmlari.

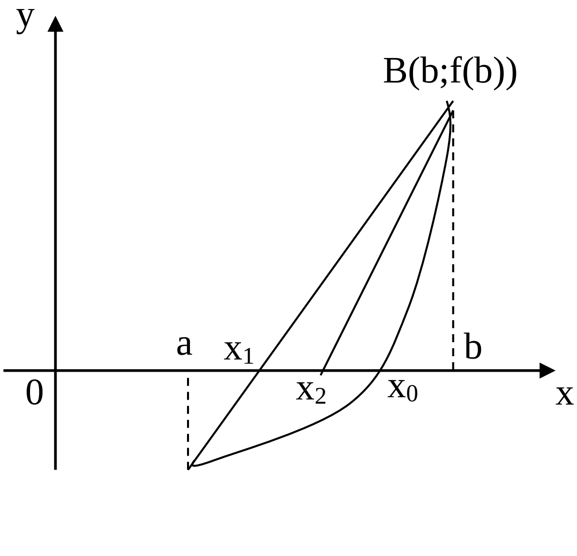
Tayanch iboralar:

Vatar, hosila, n-hosila, taqribiy echim, urinma, egri chiziq, boshlangich yaqinlashish, kombinatsiya, uzluksiz, usuvchi, iteratsiya, teng kuchli.

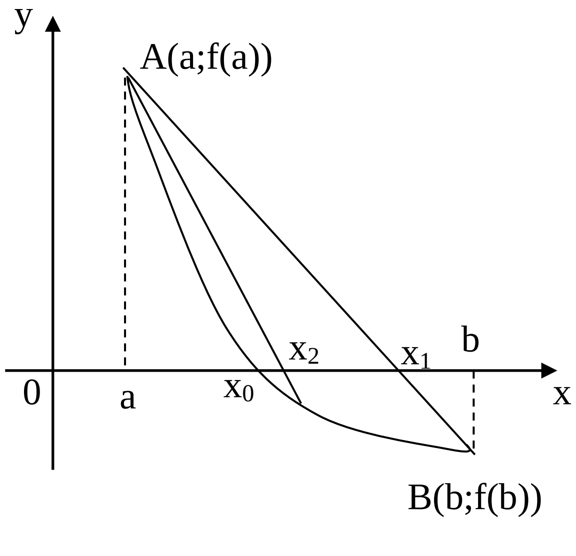
1. VATARLAR USULI

Algebraik va transtsendent tenglamalarni echishda vatarlar usuli keng qo`llanadigan usullardan biridir. Bu usulni ikki xolat uchun kurib chiqamiz.

1-x o l a t . Faraz kilaylik $f(x)$ =0 tenglamaning ildizi $[a,b]$ kesmada ajratilgan va kesmaning chekka nuqtalarida $f(a) \cdot f(b) <0$ bo`lsin. Bundan tashqari birinchi va ikkinchi hosilalari bir xil ishorali qiymatlarga ega bo`lsin, ya`ni $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ yoki $f(a) <0$; $f(b)>0$; $f'(x) >0$; $f''(x)>0$ (5-racm).



5- расм



6- расм

f(x) =0—tenglamaning aniq echimi, *f(x)* funktsiya grafigining *Ox* uki bilan kesishgan nuqtasi x_0. *A* va *V* nuqtalarni turri chiziq (vatar) bilan tutashtiramiz.

Oliy matematikadan ma`lumki, A va V nuqtalarda (5- racm) utgan to`g'ri chiziqning tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} \qquad (2.3)$$

Utkazilgan vatarning *Ox* uki bilan kesishgan nuqtasi x_1 ni taqribiy echim deb qabul kilamiz va uning koordinatasini aniqlaymiz. (2.3) tenglikda $x=x_1$, $u=0$ deb hisoblab uni x_1 ga nisbatan echamiz:

$$x_1=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \qquad (2.4)$$

Izlanayotgan echim x_0 endi $[x_1;\ b]$ kesmaning ichida. Agar topilgan x_1 echim bizni kanoatlantirmasa yuqorida aytilgan muloxazalarni $[x_1;\ b]$ kesma uchun takrorlaymiz va x_2 nuqtaning koordinatini aniqlaymiz:

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)(b-x_1)}{f(b)-f(x_1)} \qquad (2.5)$$

Agar x_2 ildiz ham bizni kanoatlantirmasa, ya`ni avvaldan berilgan ε aniqlik uchun $|x_2 - x_1| \leq \varepsilon$ shart bajarilmasa, x_z ni hisoblaymiz:

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)(b-x_2)}{f(b)-f(x_2)} \qquad (2.6)$$

yoki umumiy xolda

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)} \qquad (2.7)$$

ya`ni hisoblashni $|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$ shart bajarilgunga qadar davom ettiramiz.

Yuqorida keltirilgan formulalarni $f(a) > 0;\ f(b) < 0;\ f'(x) < 0;\ f''(x) < 0$ uchun ham qo`llash mumkin.

2-x o l a t . *f(x)* funktsiyaning birinchi va ikkinchi hosilalari turli ishorali qiymatlarga ega deb faraz kilaylik, ya`ni $f'(x)\cdot f''(x) < 0$ yoki $f(a) > 0,\ f(b) < 0,\ f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$ (6-rasm).

A va *V* nuqtalarni turri chiziq (vatar) bilan tutashtirib uning tenglamasini yozamiz

$$\frac{y-f(b)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-b}{b-a} \qquad (2.8)$$

Bu tenglamada $y = 0$ va $x = x_1$ deb qabul kilib, uni x_1 ga nisbatan echsak,

$$x_1=b-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)} \qquad (2.9)$$

Topilgan x_1 ni taqribiy echim deb olish mumkin. Agar topilgan x_1 ning aniqligi bizni kanoatlantirmasa, yuqoridagi muloxazani $[a, x_1]$ kesma uchun takrorlaymiz, ya'ni x_2 ni hisoblaymiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - a)}{f(x_1) - f(a)} \qquad (2.10)$$

Agar $|x_2 - x_1| \le \varepsilon$ shart bajarilsa, taqribiy echim sifatida x_2 olinadi, bajarilmasa x_3, x_4, … lar hisoblanadi, ya`ni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - a)}{f(x_n) - f(a)} \qquad (2.11)$$

Xisoblash jarayoni $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ bulgunga qadar davom ettiriladi.

$f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ bo`lgan xol uchun ham taqribiy ildiz (2.9) – (2.11) formulalar bilan hisoblanadi. Demak, agar $f'(x) \cdot f''(x) > 0$ bo`lsa taqribiy echim (2.4-2.7) formulalar bilan, $f'(x) \cdot f''(x) < 0$ bo`lsa (2.9) - (2.11) formulalar bilan hisoblanadi.

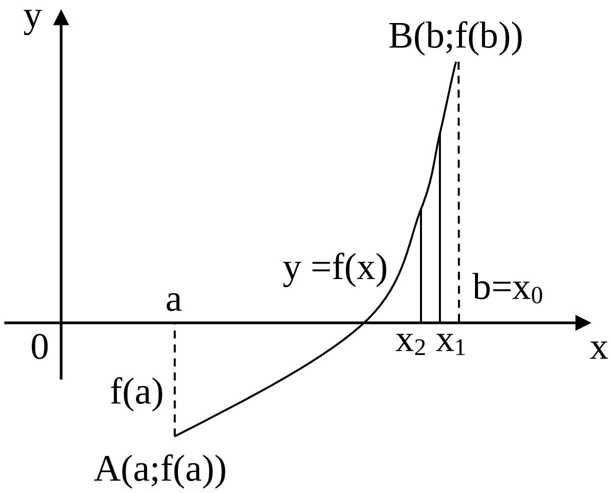
Misol. $x^3 + x^2 - 3 = 0$ tenglama $\varepsilon = 0,005$ aniqlikda vatarlar usuli bilan hisoblansin.

E c h i s h . Ildizlarni ajratsak, 0,5<x<1,5 ga ega bo`lamiz; bu erda $f(0,5) = -2,625 < 0$; $f(1,5) = 2,600 > 0$; $f'(x) = 3x^2 + 2x$; $f''(x) = 6x + 2$. Kidirilayotgan taqribiy ildiz $[0,5; 1,5]$ kesmada ekan. Bu kesmada esa $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$. Demak biz taqribiy ildizni (2.4) - (2.7) formulalar yordamida hisoblaymiz (1- xolat). (2.4) dan $x_1 = 1,012$ ni, (2,5) dan $x_2 = 1,130$ ni; (2.6) dan $x_3 = 1,169$ ni, (2.7) dan (n=3) $x_3 = 1,173$ ni topamiz. Bu erda $|x_4 - x_3| = 1,173 - 1,169 = 0,004 < \varepsilon$. Demak shart 4-kadamda bajarildi. Shuning uchun $x_4 = 1,173$ yuqoridagi tenglamaning $\varepsilon = 0,005$ aniqlikdagi ildizi bo`ladi.

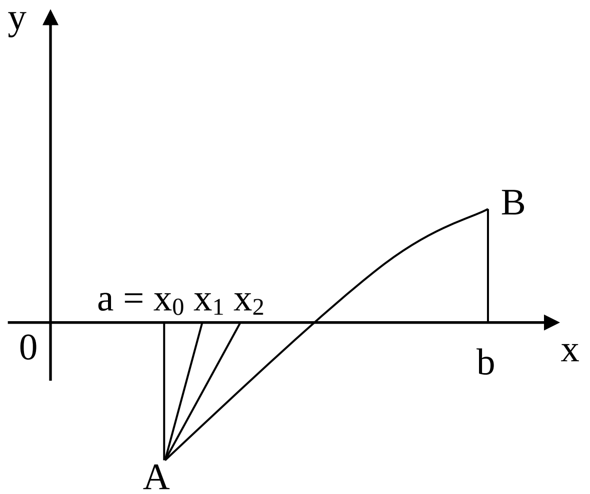
2. URINMALAR (N'YUTON) USULI

Urinmalar usulini N'yuton usuli deb ham ataydilar. Bu usulni ham ikki xolat uchun kurib chiqamiz.

1- x o l a t . Faraz kilaylik, $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0$ yoki $f(a)>0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) < 0$ (7-rasm).



7- racm



8 - racm

$y = f(x)$ egri chiziqka V nuqtada urinma o'tkazamiz va urinmaning Ox uki bilan kesishgan nuqtasi $x_1$ni aniqlaymiz.

Urinmaning tenglamasi quyidagicha:

$$y - f(b) = f'(b)\,(x-b), \tag{2.12}$$

bu erda $y=0, x=x_1$ deb , (2.12) ni x_1 nisbatan echsak,

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \tag{2.13}$$

Shu muloxazani $[a;x_1]$ kesma uchun takrorlab, x_2 ni topamiz:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{2.14}$$

Umuman olganda

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.15}$$

Hisoblashni $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$ shart bajarilganda tuxtatamiz.

2- x o l a t . Faraz kilaylik $f(a) < 0, f(b) > 0, f'(x) > 0, f''(x) < 0$ yoki $f(a)>0, f(b) < 0, f'(x) < 0, f''(x) > 0$ (8- rasm). $y = f(x)$ egri chiziqka A nuqtada urinma o'tkazamiz, uning tenglamasi:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \tag{2.16}$$

Bu erda $y=0, x=x_1$ decak,

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \tag{2.17}$$

$[x_1;b]$ kesmadan

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \tag{2.18}$$

Umuman

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2.19}$$

(2.13) va (2.17) formulalarni bir-biri bilan solishtirsak, ular bir-birlaridan boshlangich yaqinlashishi (*a* yoki *b*) ni tanlab olish bilan farqlanadilar. Boshlangich yaqinlashishni tanlab olishda quyidagi koidadan fondalaniladi; boshlangich yaqinlashish tarzida [a;b] kesmaning shunday chekka (*a* yoki *b)* qiymatini olish kerakki, bu nuqtada funktsiyaning ishorasi uning ikkinchi hosilasining ishorasi bilan bir xil bo`lsin.

Misol. *x-sinx=0,25* tenglamaning ildizi ε=0,0001 aniqlikda urinmalar usuli bilan aniqlansin.

E c h i s h . Tenglamaning ildizi [0,982; 1,178] kesmada ajratilgan (buni tekshirishni kitobxonga xavola kilamiz); bu erda *a=0,982*; *b=1,178*;
$f'(x)=1-\cos x$; $f''(x) = \sin x>0$.

[0,982; 1,178] kesmada $f(1{,}178) \cdot f''(x) > 0$, ya`ni boshlangich yaqinlashishda x_0 =1,178. Hisoblashni (2.13)-(2.15) formulalar vositasida bajaramiz. Hisoblash natijalari quyidagi 2.1-jadvalda berilgan.

2.1-jadval

n	x_n	$-\sin x_n$	$f(x_n)=x_n-\sin x_n-0,25$	$f'(x_n)=1-\text{sos}x_n$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,178	- 0,92384	0,00416	0,61723	- 0,0065
1	1,1715	- 0,92133	0,00017	0,61123	- 0,0002
2	1,1713	- 0,92127	0,00003	0,61110	- 0,0005
3	1,17125				

Jadvaldan kurinadiki, x_3-x_2 = |1,17125 – 1,1713| = 0,00005 < ε . Demak echim deb x = 1,17125 ni (ε =0,0001 aniqlikda) olish mumkin.

5-8 – rasmlarga dikkat bilan e`tibor kilsak shuni ko`ramizki, *f(x)=0* tenglamaning taqribiy echimlarini vatarlar va urinmalar usuli bilan topganda aniq echimga ikki chekkadan yaqinlashib kelinadi. Shuning uchun ikkala usulni bir vaktning o`zida qo`llash natijasida maqsadga tezrok erishish mumkin. Bu usulni k o m b i n a t s i y a l a n g a n u s u l deb ataydilar. Kombinatsiyalangan usul yuqorida keltirilgan usullarning umumlashmasi bo`lgani tufayli bu to`g’rida ko`p tuxtalmaymiz.

3. KETMA - KET YAQINLASHISH USULI

Bizdan $f(x)=0$ tenglamaning ildizini aniqlash talab etilsin. Bu tenglamani quyidagi (teng kuchli) ko`rinishda yozamiz

$$x = \varphi(x) \qquad (2.20)$$

$f(x) =0$ tenglamani $x = \varphi(x)$ ko`rinishga keltirishni juda engil amallar bilan istalgan vaktda amalga oshirish mumkin. (2.20) ning ildizi $[a,b]$ kesmada ajratilgan bo`lsin. $[a,b]$ ning ichida ixtiyoriy x nuqtani olamiz ($a \le x_0 \le b$) va bu nuqtani boshlangich (nolinchi) yaqinlashish deb qabul kilamiz. x ni (2.20) ning ung tarafidagi x ning o`rniga kuyib, hosil bo`lgan natijani x desak,

$$x_1 = \varphi(x_0) \qquad (2.21)$$

x_1 ni birinchi yaqinlashish buyicha (2.20) ning ildizi deyiladi. Keyingi yaqinlashishlar kuiidagicha topiladi:

$$x_2 = \varphi(x_1),$$
$$x_3 = \varphi(x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \varphi(x_{n-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

Buning natijasida quyidagi ketma-ketlikni to`zamiz

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad (2.22)$$

Agar (2.22) ketma-ketlikning limiti mavjud bo`lsa ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$), u xolda $x$ (2.20) ning ildizi bo`ladi. Buning isboti juda sodda. Agar $\varphi(x)$ ni uzluksiz funktsiya desak,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(x)$$

ya`ni $x = \varphi(\bar{x})$ bo`lib, x (2.20) ning ildizi bo`ladi.

Agar (2.20) ketma-ketlikning limiti mavjud bo`lmasa, u xolda ketma-ket yaqinlashish usulining ma`nosi bo`lmaydi.

Yuqorida aytilganlardan xulosa shuki, biz bu usul bilan $f(x) =0$, [$x=\varphi(x)$] tenglamaning echimini topmokchi 5ulsak, quyidagi ketma-ket bajarilishi lozim bo`lgan jarayonni hisoblashimiz kerak bo`ladi:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \varphi(x_0) \\ x_2 = \varphi(x_1) \\ x_3 = \varphi(x_2) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (2.23)$$

bu erda $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ … ketma-ket yaqinlashishlar; x_0 - boshlangich yaqinlashish; x_1 - birinchi yaqinlashish; x_2 - ikkinchi yaqinlashish va x.k.

(2.23) jarayon yaqinlashuvchi bo`lishining etarlilik shartlarini quyidagi teorema ifodalaydi (teoremani isbotsiz keltiramiz).

Teorema. x=φ (x) *tenglamaning ildizi [a, b] kesmada ajratilgan bo`lib, bu kesmada quyidagi shartlar bajarilsa:*

1) φ (x) *funktsiya [a, b] da aniqlangan va differentsiallanuvchi;*
2) *barcha* x∈[a;b] *uchun* φ(x) ∈[a;b];
3) *barcha* x∈[a;b] *da* $|\varphi'(x)| \le M < 1$ *bo`lsa, u xolda* (2.23) *jarayon* ***yaqinlashuvchi*** *bo`ladi*

Bu erda shuni ta`kidlash lozimki, teoremaning shartlari faqat etarli bo`lib, zaruriy emasdir, ya`ni (2.23) jarayon bu shartlar bajarilmaganda ham yaqinlashuvchi bo`lishi mumkin. (2.23) ni hisoblaganimizda, hisoblashni avvaldan berilgan aniqlik uchun quyidagi tengsizlik bajarilgunga qadar davom ettiramiz:

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \qquad (n=1,2,3,4, \dots)$$

Misol. 4x-5lnx =5 tenglama ε =0,0001 aniqlikda ketma-ket yaqinlashish usuli bilan echilsin.

E c h i s h . Tenglamani $\ln x = \frac{4x-5}{5}$ ko`rinishda yozamiz va $y_1 = \ln x$; $y_2 = \frac{4x-5}{5}$ chiziqlar kesishgan nuqtani aniqlaymiz. Bular $x_0 = 2,28$; $x_0 = 0,57$. Bularni boshlangich yaqinlashish nuqtalari deb olamiz. Berilgan tenglamani $x=1,25(1+\ln x)$ ko`rinishda yozsak, $\varphi(x)=1,25(1+\ln x)$ bo`ladi, bundan, $\varphi'(x) = \frac{1,25}{x}$. Bu xolda $x_0 = 2,28$ uchun ketma-ket yaqinlashish jarayoni yaqinlashuvchi bo`ladi:

$$\varphi'(x) = \frac{1,25}{x} < 1$$

Hisoblash natijalari quyidagi 2.2- jadvalda keltirilgan:

2.2-jadval

(1)	(2)	(3)
x	ln(1) +1	1,25(2)
2,28	1,82418	2,28022
2.28022	1.82427	2,28034
2,28034	1,82432	2,28040
2,28040	1,82435	2.28044
2,28044	1,82437	2,28046

Boshlangich yaqinlashish x_0 =0,57 atrofida jarayon yaqinlashuvchi bo`lmaydi, chunki

$$\varphi'(x) = \frac{1,25}{x_0} = \frac{1,25}{0,57} > 1$$

Bu xolda berilgan tenglamani $x = e^{0,8\,x-1}$ ko`rinishda yozib, hisoblashni davom ettirish kerak.

Takrorlash uchun savollar:

1. Tenglamaning aniq echimi nima?
2. To`g'ri chiziqning tenglamasini yozing.
3. Izlanayotgan echim nima?
4. Taqribiy echim nima?
5. Vatarlar usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?
6. Urinmalar usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?
7. Urinmaning tenglamasini yozing.
8. Boshlangich yaqinlashish nima?
9. Urinmalar usulining 1-xolati qanday?
10. Urinmalar usulining 2-xolati qanday?
11. Teng kuchli tenglamalar nima?
12. Ketma-ket yaqinlashish usuli qanday shart asosida amalga oshiriladi?

6-MAVZU. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR TIZIMINI ECHISH USULLARI. GAUSS USULI. BOSH ELEMENTLAR USULI

Reja:

1. Vektorlar va matritsalar xakida ba`zi ma`lumotlar.
2. Masalaning qo`yilishi.
3. Gauss usuli.
4. Bosh elementlar usuli.
5. Usullarning ishchi algoritmlari.

Tayanch iboralar:

Vektor, matritsa, skalyar ko`paytma, vektorning moduli, birlik matritsa, aniq usul, iteratsion tizim, birinchi boskich, ikkinchi boskich.

1. VEKTORLAR VA MATRITSALAR XAKIDA BA`ZI MA`LUMOTLAR

Ushbu ma`ro`zada tenglamalar tizimlarini echish usullarini kurishda lozim bo`ladigan vektorlar va matritsalar xakidagi asosiy ma`lumotlarni keltiramiz. Bular ukuvchiga oliy matematika kursidan ma`lum bo`lsada, bu ma`lumotlar ushbu mavzuni yoritishda muxim bo`lganligi tufayli bu xakda kiskacha tuxtalishni lozim topdik.

Vektor fazoning ikkita nuqtasi uning boshi va oxiri bilan aniqlanadi. Faraz kilaylik, barcha vektorlar fazoning birdan-bir nuqtasi - koordinata boshidan boshlansin. U xolda bu vektorni aniqlash uchun faqat bitta nuqtani, ya`ni uning oxirini ko`rsatish etarli bo`ladi, bu nuqta o`z navbatida uning koordinatalari bulmish uchta son orqali ifodalanadi.

Shunday kilib, koordinata boshidan boshlangan har qanday vektor tartiblangan sonlarning uchligi bilan aniqlanadiki, u vektor oxirining koordinatalari deb ataladi. Aksincha, har qanday tartiblangan sonlar uchligi koordinata boshi bilan shu uchta son koordinatalari vazifasini utovchi nuqtani birlashtiruvchi yagona vektorni aniqlaydi. Biz x vektorga uning koordinatalari yoki tashkil etuvchilari deb atalmish x_1, x_2, x_3 sonlar uchligini mos kuyamiz.

Endi vektorlar ustida bajariladigan amallarni kurib chikaylik.

Vektorni songa ko`paytirish uchun uning koordinatalari shu songa ko`paytiriladi, ya`ni

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \qquad (3.1)$$

Shunga o`xshash

$$(x_1,x_2,x_3) \pm (y_1,y_2,y_3) = (x_1 \pm y_2,\ x_2 \pm y_2,\ x_3 \pm y_3) \qquad (3.2)$$

Vektorning moduli (uzunligi) quyidagicha aniqlanadi:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \qquad \mathbf{(3.3)}$$

x va u vektorlarning skalyar ko`paytmasi deb ularning modullarining hamda oralaridagi burchak kosinusining ko`paytmasiga aytiladi:

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cos (x, y)$$

Agarda x va u vektorlar moc ravishda (x_1,x_2,x_3) va (y_1,y_2,y_3) koordinatalarga ega bo`lsalar, ularning skalyar ko`paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \qquad (3.4)$$

Xuddi yuqoridagi kabi biz endi p o`lchovli vektor va ular ustida bajariladigan amallarni aniqlashimiz mumkin. $p$ o`lchovli vektor deb tartiblangan p ta haqiqiy $x_1, x_2, \ldots x_n$ sonlarni aytamiz. Vektorning λ songa ko`paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\lambda \cdot (x_1,x_2,x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n)$$

($x_1, x_2, \ldots x_n$) hamda ($y_1,y_2,\ldots,y_n$) vektorlarning yig'indisi va ayirmasi esa quyidagiga teng:

$$(x_1, x_2, \ldots x_n) \pm (y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, \ldots, x_n \pm y_n)$$

p o`lchovli vektorning moduli deb quyidagi songa aytiladi:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

Ikki vektorning bir-biriga skalyar ko`paytmasi esa quyidagiga teng:

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

Ba`zi xollarda bitta vektor o`rniga vektorlar tizimi bilan ishlashga to`g'ri keladi. Bunday vektorlar tizimining koordinatalari to`g'ri burchakli jadval ko`rinishiga ega bo`ladi va matritsa deb ataladi. Matritsa elementlari ikkita rakamli (indeksli) bitta xarf orqali ifodalanadi (masalan a_{ij}). Bularning birinchisi satr rakamini, ikkinchisi esa ustun rakamini bildiradi. Matritsa elementlari ikki tomonidan kavslar yoki ikkita vertikal turri chiziq, orasiga olib yoziladi. Masalan, uchta satr va turtta ustundan iborat (3X4 tartibli) matritsa quyidagicha yoziladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \\ a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \\ a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \end{pmatrix}$$

Bu matritsani uchta turt o`lchovli vektor satrlar tizimi sifatida yoki turtta uch o`lchovli vektor ustunlar tizimi sifatida karash mumkin.

Ko`pincha ustunlari va satrlari soni bir xil bo`lgan matritsalar uchraydi. p ta ustun va p ta satrdan iborat matritsani p - tartibli kvadrat matritsa deyiladi.

Matritsalar ustida amallar oddiygina aniqlanadi. Bizga kelgusida faqat matritsani vektorga ko`paytirish va ularning ko`paytmasi kerak bo`lishi tufayli shularnigina kurib chiqamiz.

Matritsaning vektorga ko`paytmasi deb shunday vektor ustunga aytiladiki, uning koordinatalari matritsa satrlaridagi vektorlarning berilgan vektor ustunga skalyar ko`paytmalaridan iborat, ya`ni

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ ... \\ c_m \end{pmatrix}$$

bu erda

$$c_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + ... + a_{1n}b_n$$

$$c_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + ... + a_{2n}b_n$$

$$......................$$

$$c_m = a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + ... + a_{mn}b_n$$

Matritsalarning bir-biriga ko`paytmasini sodda mi-sol tarikasida kvadrat matritsalar uchun aniqlaymiz. Ikkita bir xil tartibli kvadrat matritsaning ko`paytmasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{22}b_{22}...b_{2n} \\ .... \\ b_{n1}b_{2n}...b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}c_{12}...c_{1n} \\ c_{22}c_{22}...c_{2n} \\ .... \\ c_{n1}c_{2n}...c_{nn} \end{pmatrix}$$

bu erda

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + ... + a_{1n}b_{n1}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + ... + a_{1n}b_{n2}$$

$$.......................$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + ... + a_{2n}b_{n1}$$

$$.......................$$

va umuman

$$c_{ik} = a_{i1}b_{ik} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{ik}b_{nk}$$

ya`ni $i$ - satr va $b$ - ustundagi element birinchi matritsa $i$ - satrining ikkinchi matritsa $k$ - ustuniga skalyar ko`paytmasiga teng.

Asosiy diagonalidagi elementlar birga, barcha kolganlari esa nol-ga teng bo`lgan kvadrat matritsa muxim axamiyatga ega. Bunday matritsani b i r l i k m a t r i t s a deyiladi va E bilan belgilanadi:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Bunday matritsa «birlik» deb atalishiga asosiy sabab ixtiyoriy kvadrat matritsa A uchun

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

tenglik urinli.

Kupchilik xollarda teskari matritsa tushunchasi ham ishlatiladi. A matritsaga t e s k a r i A^{-1} m a t r i t s a deb shunday matritsaga aytiladiki, uning uchun

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

tenglik urinlik bo`ladi.

Yuqorida keltirilganlardan foydalanib chiziqli tenglamalar tizimini matritsalar yordamida ifodalaymiz.

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \qquad (3.5)$$

tizim berilgan bo`lsin. $A$ bilan noma`lumlar oldidagi koeffi-tsientlardan tashkil topgan matritsani belgilaymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . \; . \; . & . \; . & . \; . \; . \\ a_{n1}a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

V bilan ozod xadlardan iborat vektor ustunni, X bilan esa noma`lumlardan iborat vektor ustunni belgilaymiz:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

U xolda berilgan (3.5) tizim quyidagicha yoziladi:

$$A \cdot X = B \tag{3.6}$$

2. MASALANING QO`YILISHI

Nazariy va amaliy matematikaning ko`pgina masalalari chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echishga olib keladi.

CHiziqli algebraik tenglamalarni echish asosan ikki usulga - a n i q va i t e r a t s i o n usullarga bo`linadi.

Aniq usul deganda shunday usul tushuniladiki, uning yordamida chekli miqdordagi arifmetik amallarni aniq bajarish natijasida masalaning aniq echimini topish mumkin bo`ladi. Xammaga ma`lum bo`lgan Kramer koidasi aniq usulga misol bula oladi. Lekin, Kramer koidasi amalda juda kam qo`llaniladi, chunki bu usul bilan *p*-tartibli chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echganda nixoyatda ko`p arifmetik amallarni bajarishga to`g’ri keladi.

Biz hisoblash uchun tejamli bo`lgan G a u s s va b o s h e l e m e n t l a r aniq usullarini kurib chiqamiz. Bular noma`lumlarni ketma-ket yuko-tish goyasiga asoslangan.

Iteratsion (ketma-ket yaqinlashish) *usul* shu bilan xarakterlana-diki, bu usulda chiziqli algebraik tenglamalar tizimining echimi ketma-ket yaqinlashishlarning limitidek topiladi.

Iteratsion usullarni qo`llayotganda faqat ularning yaqinlashishlarigina emas, balki yaqinlashishlarning tezligi ham katta axamiyatga ega.

Bu usullar ayrim tizimlar uchun juda tez yaqinlashib, boshqa ti-zimlar uchun sekin yaqinlashishi yoki umuman yaqinlashmasligi ham mumkin. Shuning uchun ham iteratsion usullarni qo`llayotganda tizimni avval tayyorlab olish kerak. Ya`ni, berilgan tizimni unga teng kuchli bo`lgan shunday tizimga almashtirish kerakki, hosil bo`lgan tizim uchun tanlangan usul tez yaqinlashsin.

Tizimdagi tenglamalardan noma`lumlarni ketma-ket yo`qotishni ikki yo`l bilan amalga oshirish mumkin:

a) tenglamalarning kerakli kombinatsiyalarini tuzish;

b) almashtirishning har bir kadamida tizim matritsasining biror elementini yoki biror ustundagi diagonal elementning ostidagi barcha elementlarini nolga aylantirish maqsadida bu mat-ritsani maxsus ravishda tanlab olingan matritsaga ko`paytirish.

Har ikkala xolda ham e`tibor shunga karatilishi kerakki, almashtirishlar natijasida berilgan tizim  unga teng kuchli bo`lgan tizimga almashishi hamda sodda ko`rinishga ega bo`lishi lozim.

3. GAUSS USULI

Gaussning noma`lumlarni ketma-ket yo`qotish usuli chiziqli algebraik tenglamalar tizimini echish usullari ichida eng universal va eng samaralisidir. Soddalik uchun turtta noma`lumli turtta chiziqli tizimni echishning Gauss usulini kurib chiqamiz.

Ushbu tizim berilgan bo`lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4; \end{cases} \qquad (3.7)$$

bu erda x_i $(i=1,4)$ - noma`lum sonlar, $a_{ij}$ $(j = 1,4)$ va  $b_i$ $(i=1,4)$ -  ma`lum koeffitsientlar. Qulaylik uchun $a_{15} = b_1$, $a_{25} = b_2$, $a_{35} = b_3$, $a_{45} = b_4$ deb olamiz.

Gauss usulining tulik tavsifiga utamiz. Birinchi kadamning etakchi elementi deb ataladigan a_{11} koeffitsientni noldan farqli deb hisoblaimiz. (3.7) dagi birinchi tenglamaning xamma xadlarini a_{11} ga bo`lib, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15} \qquad (3.8)$$

Bu erda

$$b_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j = 2,3,4,5)$$

(3.8) tenglikdan foidalanib (3.7) tizimning ikkinchi, uchinchi va turtinchi tenglamalaridan x_1 noma`lumni iukotamiz. Buning uchun (3.8) tenglamani $a_{21}$, $a_{31}$ va $a_{41}$ ga ko`paitirib natijani mos ravishda tizimning ikkinchi, uchinchi va turtinchi tenglamalaridan airish kerak. U xolda uch noma`lumli quyidagi tizimga ega bo`lamiz:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \qquad (3.9)$$

bu erda

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \quad (i = 2,3,4,\ j=2,3,4,5) \qquad (3.10)$$

Endi shu tizimni o`zgartirishga kirishamiz.

Ikkinchi kadamni bajarishga utishdan oldin ikkinchi kadamning etakchi elementi deb ataladigan a^1_{22} elementni noldan farqli deb faraz kilamiz (aks xolda tenglama-larning urnini tegishli ravishda almashtirish lozim). (3.9) tizimning birinchi tenglamasini a^1_{22} ga bo`lamiz, u xolda

$$x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)} \qquad (3.11)$$

bu erda

$$b_{2j}^{(1)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{1}} \qquad (j = 3, 4, 5\ )$$

Yuqoridagiga o`xshash $x_2$ ni yo`qotsak,

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \qquad (3.12)$$

tizimga ega bo`lamiz, bu erda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}b_{2j}^{(1)} \quad (i = 3,4;\ j = 3,4,5) \qquad (3.13)$$

(3.12) ning birinchi tenglamasini $a_{33}^{(2)}$ ga bo`lamiz, u xolda

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}$$

bo`ladi, bu erda

$$b_{34}^{(2)} = \frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}, \qquad b_{35}^{(2)} = \frac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$$

Bu tenglama yordamida (3.12) tizimning ikkinchi tenglamasidanni yo`qotib, quyidagi tenglamaga ega bo`lamiz:

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(2)}$$

bu erda

$$a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)}b_{3j}^{(2)} \qquad (j = 4,5\ ) \qquad (3.14).$$

Shunday kilib, (3.7) tizimni uchburchak matritsali o`ziga teng kuchli bo`lgan quyidagi tizimga keltirdik:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}x_{12} + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}; \\ x_2 + b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}; \\ x_3 + b_{34}^{(1)}x_4 = b_{35}^{(1)}; \\ a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}; \end{cases} \qquad (3.15)$$

Bu erdan ketma-ket quyidagilarni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}; \\ x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4; \\ x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} x_4 - b_{23}^{(1)} x_3; \\ x_1 = b_{15} - b_{14} x_4 - b_{13} x_3 - b_{12} x_2. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Shunday kilib, (3.7) tizimni echish ikki boskichdan iborat:

b i r i n c h i b o s k i c h - to`g'ri yo`l - (3.7) tizimni (3.15) uchburchak ko`rinishiga keltirish;

i k k i n c h i b o s k i c h - teskari yo`l - noma`lumlarni (3.16) formulalar yordamida aniqlash.

Kulda hisoblayotganda xatoga yo`l kuymaslik uchun kisoblash jarayonini tekshirish ma`kuldir. Buning uchun biz ushbu

$$a_{i,n+2} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + f, \qquad \left(i = \overline{1,n}\right)$$

yig'indidan foydalanamiz.

Agar satr elementlari ustida bajarilgan amallarni kar bir satrdagi tekshiruvchi yig'indi ustida ham bajarsak va hisoblashlar xatosiz bajarilgan bo`lsa, u xolda tekshiruvchi yig'indilardan tuzilgan ustunning har bir elementi moe ravishda almashtirilgan satrlar elementlarining yig'indisiga teng bo`ladi. Bu xol esa birinchi boskich (turri yurish) ni tekshirish uchun xizmat kiladi. Ikkinchi boskich (teskari yurish) da esa, tekshiruv $\overline{x_j} = x_j + 1$ $(j=1,4)$ larni topish bilan bajariladi.

Tenglamalar tizimini kulda echilganda hisoblashlarni quyidagi 3.1-jadvalda ko`rsatilgan Gaussning ixcham tarxi buyicha bajarish ma`kuldir. (Jadvalda soddalik uchun turtta tenglamalar tizimini echish tarxi keltirilgan.)

3.1.-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	ozod xadlar	$\sum$	tarx qismlari
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41} … 1	a_{12} a_{22} a_{33} a_{44} … $\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$	a_{13} a_{23} a_{33} a_{44} … $\dfrac{a_{13}}{a_{11}}$	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44} … $\dfrac{a_{14}}{a_{11}}$	b_1 b_2 b_3 b_4 … $\dfrac{b_2}{b_{11}}$	a_{12} a_{26} a_{36} a_{46} … $\dfrac{a_{16}}{a_{11}}$	A

…	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$ … 1	$a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(1)}$ … $\frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$ … $\frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}}$	$b_2^{(1)}$ $b_3^{(1)}$ $b_4^{(1)}$ … $\frac{b_2^{(1)}}{b_{22}}$	$a_{26}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}$ … $\frac{a_{26}^{(1)}}{a_{22}}$	A_1
…	…	$a_{33}^{(2)}$ $a_{43}^{(1)}$ … 1	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$ … $\frac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}}$	$b_3^{(2)}$ $b_4^{(2)}$ … $\frac{b_3^{(2)}}{a_{33}}$	$a_{36}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}$ … $\frac{a_{36}^{(2)}}{a_{33}}$	A_2
…	…	…	$a_{44}^{(3)}$ … 1	$b_4^{(2)}$ … $\frac{b_4^{(2)}}{a_{44}}$	$a_{46}^{(3)}$ … $\frac{a_{46}^{(3)}}{a_{44}}$	A_3
1	1	1	1	x_4 x_3 x_2 x_1	$\bar{x}_4$ $\bar{x}_3$ $\bar{x}_2$ $\bar{x}_1$	B

Misol. Quyidagi tizim Gauss usuli bilan echilsin

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + x_2 + x_2 - x_4 = 3; \\ -x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -8; \\ x_1 + 2x_2 - x_2 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

Tizimni echish jarayoni quyidagi 3.2- jadvalda keltirilgan.

3.2.-jadval

x_1	x_2	x_3	x_4	Ozod xadlar	Σ	Tarx qismlari
1	1	-2	1	6	7	A
2	1	1	-1	3	6	
-1	-3	-1	1	-8	-12	
1	2	-3	2	11	13	

… 1	… 1	… -2	… 1	… 6	… 7	
…	-1 -2 1 … 1	5 -3 1 … -5	-3 2 1 … 3	-9 -2 5 … 9	-8 -5 8 … 8	A_1
		-13 6 … 1	8 -2 … $-\frac{8}{13}$	16 -4 … $-\frac{16}{13}$	11 0 … $-\frac{11}{13}$	A_2
			$-\frac{22}{13}$	$-\frac{44}{13}$	$-\frac{66}{13}$	A_3
1	1	1	1	2 0 3 1	3 1 4 2	V

Shunday kilib,

$$x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = 0;\ x_4 = 2$$

echimiga ega buldik.

4. BOSH ELEMENTLAR USULI

Gauss usulida etakchi elementlar doim ham noldan farqli bulavermaydi. Ba`zan esa ular nolga yaqin sonlar bo`lishi mumkin; bunday sonlarga bo`lganda katta absolyut xatoga ega bo`lgan sonlar hosil bo`ladi. Buning natijasida taqribiy echim aniq echimdan sezilarli darajada chetlashib ketadi.

Hisoblashda bunday chetlashishdan kutilish uchun Gauss usuli bosh elementni tanlash yuli bilan qo`llaniladi. Bu usulning Gauss usulining ixcham tarxidan farqi quyidagidan iborat. Faraz kilaylik, noma`lumlarni yo`qotish jarayonida ushbu tizimga egamiz:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)} x_2 + b_{13}^{(1)} x_3 + \ldots + b_{1n}^{(1)} x_n = b_{1,n+1}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + b_{m,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + b_{mn}^{(m)} x_n = b_{m,n+1}^{(2)}, \\ a_{m+1,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots + a_{m+1}^{(m)} x_n = a_{m+1,n+1}^{(m)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,m+1}^{(m)} x_{m+1} + \ldots a_{n,n}^{(m)} x_n = a_{n,n+1}^{(m)}, \end{cases}$$

bu erda

$$b_{m,j}^{(m)} = \frac{a_{m,j}^{(m)}}{a_{mn}^{(m)}}; \qquad a_{ij}^{(m)} = a_{i,j}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)} b_{mj}^{(m)} \qquad (i, j \geq m+1)$$

Endi $\left| a_{m+1,k}^{(m)} \right| = \max \left| a_{m+1,j}^{(m)} \right|$ tenglikni kanoatlantiradigan k-rakamni topib, o`zgaruvchilarni kayta belgilaymiz: $x_{m+1}=x_k$ va $x_k=x_{m+1}$. Cungra (m+2) tenglamadan boshlab, barchasidan $x_{m+1}$ noma`lumni yo`qotamiz. Bunday kanta belgilashlar yo`qotish tartibini o`zgartirishga olib keladi va ko`p xollarda hisoblash xatoligini kamaytirishga xizmat kiladi.

Misol. Bosh elementlar usulidan foydalanib quyidagi tizim echilsin.

$$\begin{cases} 1{,}1161\,x_1 + 0{,}1254\,x_2 + 0{,}1397\,x_3 + 0{,}1490\,x_4 = 1{,}5471 \\ 0{,}182\,x_1 + 1{,}1675\,x_2 + 0{,}1768\,x_3 + 0{,}1871\,x_4 = 1{,}6471 \\ 0{,}1968\,x_1 + 0{,}2071\,x_2 + 1{,}2168\,x_3 + 0{,}2271\,x_4 = 1{,}7471 \\ 0{,}2368\,x_1 + 0{,}2471\,x_2 + 0{,}2568\,x_3 + 1{,}2671\,x_4 = 1{,}8471 \end{cases}$$

Tizimni echish jarayoni quyidagi 3.3- jadvalda keltirilsin.

3.3-jadval

	i	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\Sigma=a_{i6}$
I	1	0,11759	1,11610	0,1254	0,1397	0,1490	1,5471	3,07730
	2	0,14766	0,1582	1,1675	0,1768	0,1871	1,6471	3,33760
	3	0,17923	0,1968	0,2071	0,2168	0,2271	1,7471	3,59490
	4		0,2368	0,2471	0,2568	1,2671	1,8471	3,85490
II	1	0,09353	1,08825	0,09634	0,10960		1,32990	2,62399
	2	0,11862	0,12323	1,13101	0,13888		1,37436	2,76748
	3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
III	1	0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
	2		0,10492	0,11170			1,20639	2,42301
IV	1		1,06616				1,10944	2,17560
V	1		1				1,04059	2,04059
	2			1			0,98697	1,98697
	3				1		0,93505	1,93505
	4					1	0,88130	1,88130

bu erda $m_i = a_{iq}/a_{pq}$; barcha $i \neq p$ lar uchun a_{pq} — bosh element. Jadvaldan quyidagi echimni xosil kilamiz:

$$x_1 = 1,04059; \qquad x_2 = 0,98697;$$
$$x_3 = 0,93505; \qquad x_4 = 0,88130.$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Vektor nima?
2. Matritsa nima?
3. Skalyar ko`paytma nima?
4. Vektorning uzunligi deganda nimani tushunasiz?
5. Kvadrat matritsa nima?
6. Matritsani vektorga ko`paytmasi nima?
7. Matritsalarni bir-biriga ko`paytmasi qanday bajariladi?
8. Teskari matritsa nima?
9. Birlik matritsa nima?
10. Gauss usuli nima?
11. Bosh elementar usuli nima?

7-MAVZU. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR TIZIMINI ECHISH. ITERATSION USULLAR. ODDIY ITIRATSION USUL. ZEYDEL USULI.

Reja:

1. Iteratsion usullar.
2. Iteratsion usullarning umumiy xarakteristikasi.
3. Oddiy iteratsion usul.
4. Zeydel usuli.
5. Usullarning ishchi algoritmlari.

Tayanch iboralar:

Iteratsiya, statsonar, rekkurent, nostatsionar, xatolik, parametr, empirik, boshlangich yaqinlashish, diogonal elementlar, oshkor usul.

1. ITERATSION USULLAR

Bugunda turli tamoyil (printsip)larga asoslangan juda ko`plab iteratsion usullar mavjud. Umuman, bu usullarning, o`ziga xos tomonlaridan biri shundan iboratki, pul kuiilgan xatoliklari har kadamda to`g’rilanib boradi. Aniq usullar bilan ishlayotganda, agar biror kadamda xatoga pul kunilsa, bu xato oxirgi natijaga ham ta`sir kiladi. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonning biror kadamida yo`l qo`yilgan xatolik esa faqat bir necha iteratsiya kadamini ortikcha bajarishgagina olib keladi xolos. Biror kadamda yo`l qo`yilgan xatolik keyingi kadamlarda to`zatilib boriladi. Boz ustiga bu usullarning hisoblash tartibi sodda bo`lib, ularni EHM larda hisoblash qulaydir. Lekin har bir iteratsion usulning qo`llanish soxasi chegaralangandir. CHunki iteratsiya jarayoni berilgan tizim uchun o`zoklashi-shi yoki shuningdek, sekin yaqinlashishi mumkinki, buning okibatida amalda echimni konikarli aniqlikda topib bo`lmaydi.

Shuning uchun ham iteratsion usullarda faqat yaqinlashish masalasigina emas, balki yaqinlashish tezligi masalasi ham katta axamiyatga egadir. Yaqinlashish tezligi dastlabki yaqinlashish vektorining qulay tanlanishiga ham borlikdir.

Bu paragrafda avval iteratsion usullarning umumiy xarakteristikasini kurib chiqamiz, so`ngra esa hisoblash amaliyotida keng qo`llaniladigan iteratsion usullarni keltiramiz.

2. ITERATSION USULLARNING UMUMIY XARAKTERISTIKASI

Yuqorida kayd etilganidek, iteratsion usullar tizimning izla-ngan x echimiga yaqinlashadigan y_0, y_1, y_2, … iteratsion ketma-ketliklarni kurishga asoslangan. Har bir shunday usul navbatdagi y_{k+1} yaqinlashishni avvalgilari yordamida hisoblashga imkon beradigan iteratsion formulalar bilan xarakterlanadi. eng sodda xolda y_{k+1} ni hisoblashda faqat bitta avvalgi y_k iteratsiyadan foydalaniladi. Bunday usullar bir kadamli deyiladi. Bir kadamli usullar uchun iteratsion formulani quyidagi

$$B_{k+1}\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f \qquad (3.17)$$

standart kanonik ko`rinishda yozish qabul kilingan; bunda $\tau_{k+1}$ - iteratsion parametrlar ($\tau_{k+1}>0$), $B_{k+1}$ – yordamchi maxsusmas matritsalar. Agar $\tau$ va B lar k+1 indeksga bog'liq bo`lmasa, ya`ni (3.17) formula ixtiyoriy k lar uchun bir xil ko`rinishga ega bo`lsa, u xolda bu iteratsion usul s t a t s i o n a r u s u l deyiladi. Statsionar usullar hisob-lash jarayonini tashkil etish nuqtai nazaridan soddadir. Ammo nostatsionar usullar boshqa ustunliklarga ega: ular $\{\tau_{k+1}\}$, $\{B_{k+1}\}$ ketma-ketliklarni tanlash bilan boglangan kushimcha «erkinlik darajasiga» ega. Bundan y_k iteratsiyalar tizimning *x* echimiga yaqinlashish tezligini oshirishda foydalanish mumkin.

(3.17) iteratsion formula yordamida navbatdagi y_{k+1} yaqinlashishni topish ushbu

$$B_{k+1}\, y_{k+1} = F_{k+1} \qquad (3.18)$$

tenglamalar tizimini echishni talab etadi. Bunda

$$F_{k+1} = (B_{k+1} - \tau_{k+1} A)\, y_k + \tau_{k+1} f$$

Shunday hisoblashni kar bir kadamda bajarishga turri keladi. B_{k+1} matritsa sifatida birlik B_{k+1} = E matritsa olsak, iteratsion ketma-ketlik xadlarini hisoblash uchun eng sodda tarxga ega bula-miz. Bu xolda (3.17) formula ketma-ketlikning navbatdagi y_{k+1} xadini uning avvalgi y_k xadi orqali oshkor ifodalash imkonini beradi:

$$y_{k+1} = y_k - \tau_{k+1} A\, y_{k+1} + \tau_{k+1} f \qquad (3.19)$$

Ana shunday rekkurent formulaga asoslangan iteratsion usullar oshkor usullar deyiladi.

Oshkormas usullar ($B_{k+1} \neq E$ orasida B_{k+1} matritsani uchburchakli kilib tanlanadigan usullar eng ko`p tarqalgan. Bu kolda navbatdagi y_{k+1} iteratsiyani topish uchun y_{k+1} ning komponentlarini (3.18) uchburchakli tizimdan birin-ketin Gauss usulining teskari yurishiga kilinganidek topishga keltiriladi.

Qandaydir iteratsion usulning qo`llanishi $\{y_k\}$ ketma-ketlik tizimning *x* echimiga yaqinlashishni bildiradi:

$$\lim_{k \to \infty} y_k = x \qquad (3.20)$$

(3.20) tenglik quyidagini anglatadi:

$$\sqrt{\left(y_1^{(k)} - x_1\right)^2 + \left(y_2^{(k)} + x_2 + \ldots + \left(y_n^{(k)} - x_n\right) \to 0} \qquad (3.21)$$

(3.21) dan kurinadiki, *u* vektorlar ketma-ketligining *x* vektorga yaqinlashishining zaruriy va etarli sharti kar bir komponentning yaqinlashuvchiligidan iborat:

$$\lim_{k \to \infty} y_1^{(k)} = x_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

Ushbu ayirma $z_k = y_k - x$ xatolik deyiladi. y_k ni $y_k = x + z_k$ ko`rinishda yozib va (3.17) ga kuyib, xatolik uchun,

$$B_{k+1} \frac{z_{k+1} - z_k}{\tau_{k+1}} + Az_k = 0 \qquad (3.22)$$

iteratsion formulami hosil kilamiz. (3.17) dan farqli ularok, u tizimning ung tomoni (*f*) ni o`z ichiga olmaydi, ya`ni bir jinslidir. (3.20) yaqinlashishni talab etish z_k ning nolga intilishi lozimligini anglatadi:

$$\lim_{k \to \infty} z_k = 0 \qquad (3.23)$$

Har bir iteratsion usul yaqinlashuvchiligining etarlilik shartlari A, B_{k+1} matritsalar va τ_{k+1} iteratsion parametrlar kanoatlantirishi lozim bo`lgan ko`rinishda ifodalanadi. Ulardan ba`zilarini, ayniksa, iteratsion parametrlarni optimal tanlashga oid shartlarni tekshirish kiyin. Natijada hisoblashlarni bajarayotganda iteratsion parametrlarni ko`pincha tajriba yuli bilan (empirik) tanlashga turri keladi.

3. ODDIY ITERATSION USUL

Faraz kilaylik,

$$Ax = b \qquad (3.24)$$

tizim biror usul bilan

$$x + Cx + f \qquad (3.25)$$

ko`rinishga keltirilgan bo`lsin, bu erda *S* — qandaydir matritsa, *f* - vektor ustun. Dastlabki yaqinlashish vektori $x^{(0)}$ biror usul bilan (masalan, $x^{(0)} = 0$) topilgan bo`lsin. Agar keyingi yaqinlashishlar

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + f \qquad (k=0,1,2,\ \ldots)$$

rekkurent formula yordamida topilsa, bunday usul oddiy iteratsiya usuli deyiladi.

Agarda *S* matritsa elementlari

$$\sum_{i=1}^{n}\left|C_{ij}\right| \le a \le 1 \qquad (i=1,2,\ldots,n) \qquad (3.26)$$

va

$$\sum_{i=1}^{n}\left|C_{ij}\right| \le \beta \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n) \qquad (3.27)$$

shartlardan birortasini kanoatlantirsa, u xolda iteratsion jarayon berilgan tenglamaning *x* echimiga ixtiyoriy boshlangich $x^{(0)}$ vektorda yaqinlashishi isbotlangan, ya`ni

$$x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$$

Shunday kilib, tizimning aniq echimi cheksiz kadamlar natijasida -hosil qilinadi va hosil kilingan ketma-ketlikning ixtiyoriy vektori taqribiy echimni beradi. Bu taqribiy echimning xatoligini quyidagi formulalardan biri orqali ifodalash mumkin:

$$\left(x_i - x_i^{(k)} \right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_{j=1,2,\ldots n}\left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| \qquad (3.28)$$

agarda (3.26) shart bajarilsa, yoki

$$\left| x_i - x_i^{(k)} \right| \le \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n}\left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right| \qquad (3.29)$$

agarda (3.27) shart bajarilsa. Bu baxolarni moc ravishda quyidagicha kuchaytirish mumkin:

$$m\left(x_i - x_i^{(k)}\right) \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max\left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right|$$

eki

$$\sum_{j=1}^{n}\left| x_i - x_i^{(k)} \right| \le \frac{\beta}{1-\beta} \sum_{j=1}^{n}\left| x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)} \right|$$

Iteratsion jarayonlarni yuqoridagi baxolar oldindan berilgan aniqlikni kanoatlantirganda tugallaydilar.

Boshlangich $x^{(0)}$ vektor, umuman olganda, ixtiyoriy tanlanishi mumkin. Ba`zan $x^{(0)} = f$ deb olishadi. Ammo $x^{(0)}$ vektorning komponentlari sifatida noma`lumlarning ko`pol taxminlarda aniqla-ngan qiymatlari olinadi.

(3.24) tizimni (3.25) ko`rinishga keltirishni bir necha xil usullarda amalga oshirish mumkin. Faqat (3.26) yoki (3.27) shartlardan birortasining bajarilishi lozim. Shunday usullardan ikkitasiga tuxtalamiz.

"Birinchi usul. Agarda *A* matritsaning diagonal elementlari noldan farqli bo`lsa, ya`ni

$$a_{ii} \neq 0 \qquad (I=1,2,\dots,n)$$

u xolda berilgan tizimni

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n\right) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{22}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n\right) \\ \dots \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}\right) \end{cases} \qquad (3.30)$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bu xolda *S* matritsa elementlari quyida-gicha aniqlanadi:

$$C_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \neq j), \quad C_{ii} = 0$$

hamda (3.26) va (3.27) shartlar mos ravishda quyidagi ko`rinishni qabul kiladi:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq a < 1 \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (3.31)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \leq \beta < 1 \qquad (j = 1,2,\dots,n) \qquad (3.32)$$

(3.31) va (3.32) tengsizliklar *A* matritsaning diagonal elementlari

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \qquad (i = 1,2,\dots,n) \qquad (3.33)$$

shartlartlarni kanoatlantirganda urinli bo`ladi.

Ikkinchi usul. Bu usulni quyidagi misol orqali namoyish kilamiz.

Umuman olganda, har qanday keltirilmagan matritsali tizim uchun yaqinlashuvchi iteratsion usullar mavjud, ammo ularning barchasi kisoblash uchun qulay emas.

Agarda iteratsiya usuli yaqinlashuvchi bo`lsa, u xolda bu usul yuko-rida kurilgan usullardan quyidagi afzalliklarga ega bo`ladi:

1. Iteratsion jarayon tezrok yaqinlashsa, ya`ni tizimning echimini aniqlash uchun *p* dan kamrok iteratsiya talab kilinsa, u xolda vaktdan yutiladi, chunki arifmetik emallar soni p^2 ga mutanosib (proportsional) (Gauss usuli uchun esa bu son p^3 ga mutanosib).

2. Yaxlitlash xatoliklari iteratsiya usulida natijaga kamrok ta`-sir etadi. Bundan tashqari iteratsiya usuli o`z xatoligini to`g’rilab boruvchi usuldir.

3. Iteratsiya usuli tizimning muayyan koeffitsientlari nolga teng bo`lgan kolda juda ham qulaylashadi. Bunday tizimlar xususiy hosilali differentsial tenglamalarni echganda ko`prok uchraydi.

4. Iteratsiya jarayonida bir xil turdagi amallar bajariladi, bu esa eX.M uchun programmalashtirishni osonlashtiradi.

1- misol. Quyidagi tizim oddiy iteratsiya usuli bilan echilsin:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 6 \\ -x_1 + 25x_2 - x_3 - 5x_4 - 2x_5 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 20x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -19 \\ x_2 - x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 20x_5 = -32 \end{cases}$$

E c h i s h . Birinchi usulda aytilganidek, bu tizimning tenglamalarini mos ravishda 10, 25, - 20, 10, 20 larga bo`lib, quyidagi ko`rinishda yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}6 - 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}1x_5 \\ x_2 = 0{,}44 + 0{,}04x_1 - 0{,}04x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}08x_5 \\ x_3 = 0{,}95 + 0{,}1x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}1x_4 - 0{,}15x_5 \\ x_4 = 1 - 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 + 0{,}5x_5 \\ x_5 = 1{,}6 + 0{,}05x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}05x_3 + 0{,}1x_4 \end{cases}$$

bu erda (3.31) shart bajariladi. Xakikatan ham,

$$\sum_{j=1}^{5} |C_{1j}| = 0{,}3 < 1; \qquad \sum_{j=1}^{5} |C_{2j}| = 0{,}28 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{5} |C_{3j}| = 0{,}41 < 1; \qquad \sum_{j=1}^{5} |C_{4j}| = 0{,}5 < 1;$$

$$\sum_{j=1}^{5} |C_{5j}| = 0{,}3 < 1;$$

Dastlabki yaqinlashish $x^{(0)}$ sifatida ozod xadlar ustuni (0,6; 0,44; 0,95; 1; 1,6) ni olib keyingi yaqinlashishlarni topamiz:

$x_1^{(1)} = 0{,}6 - 0{,}1x_2^{(0)} + 0{,}3x_3^{(0)} + 0{,}2x_4^{(0)} - 0{,}1x_5^{(0)} =$

0,6 – 0,1 · 0,44 + 0,3 · 0,95 + 0,2 · 1 – 0,1 · 1,6 = 0.881

$x_2^{(1)}$= 0,44 + 0.04 · 0,6 – 0,04 · 0,95 + 0,2 · 1 + 0,08 · 1,6 = 0,754

Shunga o`xshash $x_3^{(1)}$= 0,892; $x_4^{(1)}$= 1,851; $x_5^{(1)}$= 1,72. Hisoblashlarning davomini 3.4-jadvalda keltiramiz:

3.4-jadval

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0.881	0,754	0.892	1,851	1,72
2	0.9884	0.9482	1,0029	1,9147	1,9859
3	0,9904	0,9814	0,9908	1,9939	1,9854
4	0,99944	0.99753	0,99789	1,99364	1.99897
5	0,99839	0,99865	0,99929	1,99954	1,99970
6	0.99986	0,99989	0,99977	1,99976	1.99960
7	0,999934	0,999920	1,000018	1,999788	1,999947
8	0.999974	0,999951	0,999976	2,000042	1,999978

Yuqoridagi 3.4- jadvaldan ko`ramizki, 8-iteratsiya x_1= 0,999974; x_2= 0,99951; x_3= 0,99998; x_4 = 2,00004; x_5= 1,99998 echimdan iborat. Bu topilgan taqribiy echim aniq echim

$$x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1; \qquad x_4^* = x_5^* = 2$$

dan beshinchi xonaning birliklari buyichagina farqlanadi.

2- misol.

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}10x_3 = 0{,}795 \\ -0{,}11x_1 - 1{,}03x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}849 \\ -0{,}11x_1 - 0{,}12x_2 + 1{,}04x_3 = 1{,}398 \end{cases}$$

tizimni Z ta iteratsiya bajarib eching va xatoligini baxolang.

E c h i s h . Berilgan tizim-matritsaning diaganal elementlari birga yaqin, kolganlari esa birdan ancha kichik.

Shu sababli iteratsiya usulini qo`llash uchun berilgan tizimni quyidagicha yozib olamiz:

$$x_1 = 0{,}795 - 0{,}02x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}10x_3;$$
$$X_2 = 0{,}849 + 0{,}11x_1 - 0{,}03x_2 + 0{,}05x_3;$$
$$x_3 = 1{,}398 + 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}04x_3.$$

(3.31) yaqinlashish sharti bu tizim uchun bajariladi. Xakikatan ham,

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{1j}| = 0{,}02 + 0{,}05 + 0{,}10 = 0{,}17 < 1$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{2j}| = 0{,}11 + 0{,}03 + 0{,}05 = 0{,}19 < 1$$

$$\sum_{j=1}^{3} |C_{3j}| = 0{,}11 + 0{,}12 + 0{,}04 = 0{,}27 < 1$$

Boshlangich yaqinlashish $x^{(0)}$ sifatida ozod xadlar ustuni elementlarini ikki xona aniqlikda olamiz

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,80 \\ 0,85 \\ 1,40 \end{pmatrix}$$

Endi ketma-ket quyidagilarni aniqlaymiz:

k = 1 da

$x_1^{(1)} = 0,795 - 0,016 + 0,0425 + 0,140 = 0,9615 \approx 0,962$

$x_2^{(1)} = 0,849 + 0,088 - 0,255 + 0,070 = 0,9815 \approx 0,982$

$x_3^{(1)} = 1,398 + 0,088 + 0,1020 - 0,056 = 1,532$

k = 2 da

$x_1^{(3)} = 0,980$, $x_2^{(3)} = 1,004$, $x_3^{(3)} = 1,563$

k = 3 da

$x_1^{(3)} = 0,980$, $x_2^{(3)} = 1,004$, $x_3^{(3)} = 1,563$

Noma\`lumlarning k=2 va k=3 dagi kiimatlari $3\cdot 10^{-3}$ dan kamrok farq kilayapti, shuning uchun noma\`lumlarning taqribiy qiymatlari sifatida

$x_1 \approx 0,980$, $x_2 \approx 1,004$, $x_3 \approx 1,563$

larni olamiz.

4. ZEYDEL USULI

Zeydel usuli chiziqli bir kadamli birinchi tartibli iteratsion usuldir. Bu usul oddiy iteratsion usuldan shu bilan farq kiladiki, dastlabki yaqinlashish $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ ga ko\`ra $x_1^{(1)}$ topiladi. So\`ngra $x_1^{(1)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ ko\`ra $x_2^{(1)}$ topiladi va x.k. Barcha $x_1^{(1)}$ lar aniqlangandan so\`ng $x_i^{(2)}, x_i^{(3)}, \ldots$ lar topiladi. Aniqroq aytganda, hisoblashlar quyidagi tarx (sxema) buyicha olib boriladi:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{b_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{n} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \sum_{j=3}^{n} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i}{a_{ii}} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)}$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n}{a_{nn}} - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^{(k+1)}$$

3.3.2. dagi yaqinlashish shartlari Zeydel usuli uchun ham urinlidir. Ko`pincha Zeydel usuli oddiy iteratsiya usuliga nisbatan yaxshirok yaqinlashadi, ammo har doim ham bunday bulavermaydi. Bundan tash-kari Zeydel usuli programmalashtirish uchun qulaydir, chunki $x_i^{(k+1)}$ ning qiymati hisoblanayotganda $x_1^{(k)},...., x_{i-1}^{(k)}$ larning qiymatini saklab kolishning xojati yo`q.

Misol. Zeydel usuli bilan 3.3.2. dagi 1- misolning echimi 5 xona aniqlikda topilsin.

E c h i s h . Tizimni

$$x_1=0,6 - 0,1x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4 - 0,1x_5,$$
$$x_2 = 0,44 + 0,04x_1 - 0,04x_3 + 0,2x_4 + 0,08x_5,$$
$$x_3 = 0,95 + 0,1x_1 + 0,05x_2 + 0,1x_4 - 0,15x_5,$$
$$x_4 = 1 - 0,1x_2 + 0,1x_3 + 0,5x_5,$$
$$x_5 = 1,6 + 0,05x_1 + 0,1x_2 + 0,05x_3 + 0,1x_4$$

ko`rinishda yozib olamiz va dastlabki yaqinlashish x sifatida oddiy iteratsiya usulidagidek x =(0,6; 0,44; 0,95;1; 1,6) deb olamiz.

Iteratsiyaning birinchi kadamini bajaramiz:

$$x_1^{(1)} = 0,6 – 0,1\, x_2^{(0)} + 0,3x_3^{(0)} +0,2x_4^{(0)} – 0,1x_5^{(0)} =$$
$$=0,6 – 0,1 \cdot 0,44 + 0,3 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 – 0,1 \cdot 1,6 = 0,881$$
$$x_2^{(1)} = 0,44 + 0,04\, x_1^{(4)} - 0,04x_3^{(0)} +0,2x_4^{(0)} + 0,08x_5^{(0)} =$$
$$= 0,44 + 0,04 \cdot 0,881 - 0,04 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 1 – 0,08 \cdot 1,6 = 0,771$$
$$x_3^{(1)} = 0,95 + 0,1\, x_1^{(1)} + 0,05x_2^{(1)} +0,1x_4^{(0)} – 0,1x_5^{(0)} =$$
$$= 0,95 + 0,1 \cdot 0,881 + 0,05 \cdot 0,771 + 0,1 \cdot 1 – 0,15 \cdot 1,6 = 0,937$$
$$x_4^{(1)} = 1 – 0,1\, x_2^{(1)} + 0,1x_3^{(1)} +0,5x_5^{(0)} = 1,817$$
$$x_5^{(1)} = 1,6 + 0,05x_1^{(1)} + 0,1x_2^{(1)} + 0,05x_3^{(1)} +0,1x_4^{(1)} = 1,948$$

Keyingi yaqinlashishlarni 3.5- jadvalda keltiramiz:

3.5-jadval

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$	$x_5^{(k)}$
0	0,6	0,44	0,95	1	1,6
1	0.881	0,771	0,937	1,817	1,948

2	0,973	0,961	0,985	1.974	1,992
3	0,995	0,995	0,999	1,996	1,999
4	0,9995	0,9991	0,9997	1,9995	1,9998
5	0,99992	0,99989	0,99997	1.99991	1,99997
6	0,99999	0,99998	0,99999	1,99999	2.00000

Ko`rinib turibdiki, Zeydel usuli oddiy iteratsiya usuliga nisbatan tezrok yaqinlashmokda.

Takrorlash uchun savollar:

1. Iteratsion usul nima?
2. Statsionar usul nima?
3. Oshkor usullar nima?
4. oshkormas usullar nima?
5. Birinchi usul nima?
6. Ikkinchi usul nima?
7. Boshlangich yaqinlashish nima?
8. Zeydel usuli nima?
9. Zeydel usulining oddiy iteratsiya usulidan farqi?

8-MAVZU. CHIZIQLI BO`LMAGAN ALGEBRAIK TENGLAMALAR TIZIMINI ECHISH USULLARI. KETMA-KET YAQINLASHISH USULI

Reja:

1. CHiziqli bo`lmagan tenglamalar tizimining moxiyati va axamiyati.
2. Ketma – ket (boshlang'ich) yaqinlashish usuli.
3. Usulning ishchi algoritmi.

Tayanch iboralar:

Xususiy hosila, chiziqli tenglama, oddiy iteratsiya, chiziqli bulmagan tenglama, uzluksiz tizim, boshlangich yaqinlashish, kvadrat to`g'ri turtburchak, birinchi yaqinlashish, ikkinchi yaqinlashish.

1. CHIZIQLI BO`LMAGAN TENGLAMALAR TIZIMINING MOXIYATI VA AXAMIYATI

Shu paytgacha biz faqat chiziqi tenglamalar tizimini echish usullari bilan tanishdik. endi tenglamalar tizimi chiziqli bulmagan hol ustida tuxtalamiz. Soddalik uchun ikki noma`lumli ikkita chizimi bulmagan tizimni oddiy iteratsiya usuli bilan echishga tuxtalamiz. Bunday tizim quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (3.34)$$

Faraz kilaylik boshlangich x , *u* yaqinlashishlar berilgan bo`lsin. Berilgan tizimni quyidagicha yozamiz:

$$\begin{cases} x = F(x, y) \\ y = \Phi(x, y) \end{cases} \qquad (3.35)$$

hamda bu tizimning ung tomonidagi x va *u* lar o`rniga boshlangich yaqinlashish x , *u* larni kuyib, birinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$\begin{cases} x_1 = F(x_0, y_0) \\ y_1 = \Phi(x_0, y_0) \end{cases} \qquad (3.36)$$

Xuddi shuningdek ikkinchi yaqinlashishni aniqlaymiz:

$$x_2 = F\ (x_1, y_1)$$
$$y_2 = F\ (x_1, y_2) \qquad (3.37)$$

va umuman

$$\begin{cases} x_n = F(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n = \Phi(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{cases} \qquad (3.38)$$

Agarda (*x, u)* va F(x, *u)* funktsiyalar uzluksiz, hamda $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ va $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo`lsa, u xolda ularning limitlari berilgan tenglamaning echimi bo`ladi.

2. KETMA – KET (BOSHLANG'ICH) YAQINLASHISH USULI

Yuqorida keltirilgan iteratsion jarayonning yaqinlashuvchi bo`lish shartlariga tuxtalamiz.

Teorema, x va $\bar{u}$ (3.34) tizimning aniq echimlari, a < $\bar{x}$ < b, c < $\bar{y}$ < d bo`lib, *x=a,x=b, y=c* va *y=d* to`g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to`g'ri turtburchak ichida boshqa echimlar yo`q bo`lsa, u xolda ko`rsatilgan turri turtburchakda quyidagi

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \le P_1, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le q_1, \qquad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \le P_2, \qquad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \le q_2$$

($R_1 + R_2 \le M < 1$ va $q_1 + q_2 \le M < 1$) tengsizliklar bajarilsa, iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo`ladi va boshlangich yaqinlashish *x,u* sifatida turri turtburchakning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

Teoremaning isbotini keltirib utirmaymiz.

Misol

$$\begin{cases} f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0 \\ \varphi(x, y) = x^3 - y^3 - 6x + K = 0 \end{cases}$$

tizimning musbat echimini iteratsion usul bilan uch xona aniqlikda toping.

Berilgan tizimni quyidagi ko`rinishda yozib olamiz:

$$x = \frac{x^3 + y^3}{6} + \frac{1}{2} = F(x, y)$$

$$y = \frac{x^3 - y^3}{6} + \frac{1}{3} = \Phi(x, y)$$

$0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ kvadratni karaymiz. Agarda x_0, y_0 nuqta shu kvadratga tegishli bo`lsa, u xolda $0 < F(x_0, y_0) < 1$ va $0 < F(x_0, y_0) < 1$ bo`ladi. (x_0, y_0) boshlangich yaqinlashish qanday tanlanishidan kat`i nazar $(x_k, y_k)$ yaqinlashishlar kvadratga tegishli bo`ladi, chunki

$$0 < \left(x_0^3 + y_0^3\right) / 6 < \frac{1}{3}$$

$$-1/6 < \left(x_0^3 - y_0^3\right) / 6 < \frac{1}{6}$$

Bundan tashqari (x_k, y_k) nuqtalar $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{6}$, $\frac{1}{6} < y < \frac{1}{2}$ kvadratga tegishli. Bu kvadrat nuqtalari uchun:

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} < \frac{\frac{25}{36} + \frac{1}{4}}{2} = \frac{34}{72} < 1$$

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| = \frac{x^2}{2} + \left|\frac{y^2}{2}\right| < \frac{34}{72} < 1$$

bajariladi.

Demak, ko`rsatilgan kvadratda tizim yagona echimga ega va uni iteratsion usulda aniqlash mumkin.

$x_0 = \frac{1}{2}$ va $y_0 = \frac{1}{2}$ deb olamiz, u xolda

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{6} = 0{,}542, \qquad y_1 = \frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}{6} = 0{,}333$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}542^3 + 0{,}333^3}{6} = 0{,}533$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}542^3 - 0{,}333^3}{6} = 0{,}354$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}533^3 + 0{,}354^3}{6} = 0{,}533$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}533^3 - 0{,}354^3}{6} = 0{,}351$$

$$x_4 = \frac{1}{2} + \frac{0{,}533^3 + 0{,}351^3}{6} = 0{,}532$$

$$y_2 = \frac{1}{3} + \frac{0{,}533^3 - 0{,}351^3}{6} = 0{,}351$$

Bu erda $q_1 = q_2 = 34/72 < 0{,}5$ bo`lgani sababli birinchi uchta unlik rakamlarning mos tushganligi kerakli aniqlikdagi echimni topish imkoniyatini beradi. Shunday kilib kuyndagi echimga ega buldik.

$$x = 0{,}532; \qquad y = 0{,}351$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Birinchi yaqinlashish qanday aniqlanadi?
2. Ikkichni yaqinlashish qanday aniqlanadi?
3. Boshlangich yaqinlashish xakidagi teorema?
4. Boshlangich yaqinlashish qanday shartga asosan topiladi?
5. To`g’ri turtburchakning ifodalovchi tenglamani yozing.
6. Iteratsion jarayon yaqinlashuvi shartini yozing.
7. Oshkor funktsiya nima?
8. Oshkormas funktsiya nima?
9. Nuqtani kvadratga tegishlilik shartini yozing.
10. Uzluksizlik funktsiya nima?

9-MAVZU. ANIQ INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASH. TO`G’RI TO`RTBURCHAK VA TRAPETSIYA USULLARI

Reja:

1. Masalaning qo`yilishi.
2. Aniq integralning geometrik ma`nosi.
3. To`g’ri to`rtburchak va trapetsiya usullari.
4. Usullarning ishchi algoritmlari, ularning xatoliklari miqdorini baholash va uni kamaytirish yo`llari.

Tayanch iboralar:

Boshlangich funktsiya, elementar funktsiya, integral, aniq integral, aniqmas integral, kvadratur, kvadratur formula, to`g’ri turtburchak formulasi, trapetsiya formulasi, egri chiziqli trapetsiya, egri chiziqli trapetsiya yuzi, aniq echim, bulinish nuqtalari.

1. MASALANING QO`YILISHI

Kundalik xayotimizda uchraydigan ko`p muxandislik masalalarini echishda aniq integrallarni hisoblashga to`g’ri keladi. Faraz kilaylik, $\int_a^b f(x)dx$ hisoblash talab etilsin. Bu erda *f(x)* - [*a; b*] kesmada berilgan uzluksiz funktsiya. Bu integralni hisoblashda quyidagi formula (N’yuton—Leybnits formulasi) qo`llaiiladi:

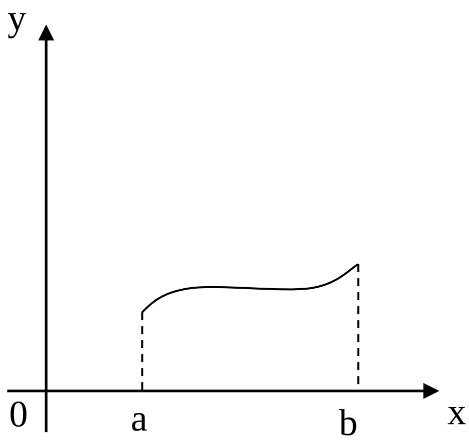
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

bu erda *F(x)* – boshlangich funktsiya. Agar boshlangich funktsiya *F(x)* ni elementar funktsiyalar orqali ifodalab bo`lmasa yoki integral ostidagi funktsiya *f(x)* jadval ko`rinishida berilsa, u xolda (5.1) formuladan foydalanish mumkin emas. Bu xolda aniq integralni taqribiy formulalar orqali hisoblashga to`g’ri keladi. Bunday formulalarga *kvadratur formulalar* deyiladi.

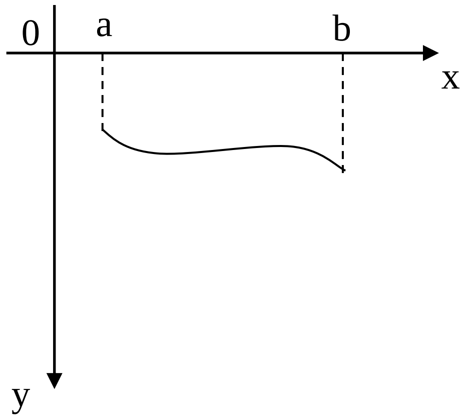
2. ANIQ INTEGRALNING GEOMETRIK MA`NOSI

Bunday formulalarni keltirib chiqarish uchun aniq integralning geometrik ma`nosini bilmoklik lozim.

Agar [$a; b$] kesmada $f(x) \geq 0$ bo`lsa, u xolda $\int_a^b f(x)dx$ ning qiymati son jixatidan $y = f(x)$ funktsiyani grafigi hamda $x=a$, $x=b$, to`g’ri chiziqlar bilan chegaralangan shakl (figura) ning yuziga teng (11-rasm). Agar [a;b] kesmada $f(x)< 0$ bo`lsa, integralning qiymati yuqorida keltirilgan shaklning teskari ishora bilan olingan yuziga teng (12-racm).



11- rasm



12-rasm

Shunday kilib aniq integralni hisoblash deganda biror shaklning yuzini hisoblash tushuniladi. Quyida aniq integralni hisoblash uchun ba`zi taqribiy formulalar bilan tanishib chiqamiz.

3. TO`G’RI TURTBURCHAKLAR VA TRAPETSIYALAR FORMULASI

Faraz kilaylik, bizdan $\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning taqribiy qiymatini topish talab etilsin. $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ nuqtalar yordamida $[a; b]$ kesmani p ta teng bulakchalarga bo`lamiz. Har bir bulakchaning uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$. Bulinish nuqtalari esa:

$$x_0 = a; \quad x_1 = a + h; \quad x_2 = x + 2h; x_3 = a+3h \ldots x_{n-1} = a+(n-1)h; \quad x_n = b$$

Bu nuqtalarni tugun nuqtalar deb ataymiz. $f(x)$ funktsiyaning tugun nuqtalaridagi qiymatlari $y_0, y_1, y_2, \ldots y_n$ bo`lsin. Bular $y_0 = f(a); y_1 = f(x_1) \ldots y_n=f(b)$ larga teng bo`ladi .

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish uchun [a,b] kesmani bo`lish natijasida hosil bo`lgan barcha turtburchaklarning yuzini hisoblab, ularni jamlash kerak bo`ladi. Albatta bu yuzachalarni hisoblashlarda ma`lum darajada xatoliklarga yo`l qo`yiladi (shtrixlangan yuzachalar). Bularni va 5.1-da aytilgan aniq integralning geometrik ma`nosini hisobga olsak, quyidagini yozishimiz mumkin bo`ladi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\cdot y_0 + hy_1 + hy_2 + ... + hy_{n-1} = h(y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) = h\sum_{k=0}^{n-1} y_k;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k \qquad (5.2)$$

Bu erda to`g’ri turtburchak yuzini hisoblashda uning chap tomon ordinatasi olindi. Agar ung tomon ordinatami olsak ham shunday formulaga ega bo`lamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_n) = h\sum_{k=1}^{n} y_k;$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k \qquad (5.3)$$

(5.2) va (5.3) larni moe ravishda *chap* va *ung formulalar* deyiladi. Agar 13- rasmga e`tibor bersak, (5.2) formula bilan integralning qiymati hisoblanganda integralning taqribiy qiymati aniq qiymatidan ma`lum darajada kamrok chikadi, (5.3) yordamida hisoblanganda esa taqribiy qiymat aniq qiymatdan ma`lum darajada kattarok chikadi. Ya`ni (5.2) va (5.3) formulalar yordamida aniq integralning taqribiy qiymati hisoblanganda bu formulalardan biri integralning aniq qiymatini kami bilan ifodalasa, ikkinchisi esa ko`pi bilan ifodalaydi. 13- rasmdan kurinadiki, (5.2) va (5.3) formulalarni qo`llaganda yo`l qo`yiladigan xatolikni kamaytirish uchun bulinish nuqtalarini iloji boricha ko`prok olish, ya`ni kadam *h* ni tobora kichraytirish lozim bo`ladi. Albatta, h ni kichraytirish hisoblash jarayonining keskin usishiga olib keladi. Bu narsadan xavotirga tushmasligimiz kerak, chunki butun hisoblash jarayoni EHM ga yuklanadi.

Misol. To`g’ri turtburchaklar formulalari (5.2) va (5.3) yordamida $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ integralning taqribiy qiymatlari topilsin.

E c h i s h . Bu erda *a=0; b=1; n=10; h=(b- a)/n=0,1.*

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$x_0=a=0;$ $x_1=a+h=0,1;$ $x_2=a+2h=0,2;$ $x_3=a+3h=0,3$

$x_4=a+4h=0,9$ ... $x_9=a+9h=0,9;$ $x_{10}=b=1$

$$y_0 = f(x) = \frac{1}{1+x_0} = \frac{1}{1+0} = 1; \qquad y_1 = f(x_1) = \frac{1}{1+0,1} = 0,909;$$

$$y_2 = f(x_2) = 0,833; \; y_3 = f(x_3) = 0,769; \; ... y_9\, f(x_9) = 0,53; \qquad y_{10} = f(x_{10}) = 0,5.$$

(5.2) dan $\int\limits_{o}^{1} \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}1(1+0{,}909+...+0{,}526) = 0{,}718$

(5.3) dan $\int\limits_{o}^{1} \frac{dx}{1+x} \approx 0{,}1(0{,}909+0{,}833+...+0{,}5) = 0{,}6688$

Ma`lumki, $\int\limits_{o}^{1} \frac{dx}{1+x} = \ln 2,\ \ln 2 \approx 0{,}693$. Bulardan kurinadiki, aniq echim chap va ung formulalar orqali topilgan echimlar orasida yotadi.

Topilgan echimlar 0,718 va 0,668 ning o'rta arifmetigini olsak, bu 0,693 ga teng bo`ladi, bu esa aniq echim bilan ustma-ust tushadi.

Bu xulosalarni nazarga olgan xolda (5.2) va (5.3) formulalar xad-larini moc ravishda kushib o'rta arifmetigini olsak, quyidagi ifoda hosil bo`ladi:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \approx h\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right) = h\left(\frac{y_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{y_n}{2}\right) \quad (5.4)$$

(5.4) formula *trapetsiyalar formulasi* deb ataladi. Bu formula yordamida topilgan integralning taqribii qiymatining aniqligini oshirish uchun bulinish nuqtalari soni n» ni ikki, uch va x.k. marta oshirish kerak bo`ladi. Albatta bunda ham hisoblash xajmi bir necha marotaba oshadi.

4. USULLARNING ISHCHI ALGORITMLARI, ULARNING XATOLIKLARI MIQDORINI BAHOLASH VA UNI KAMAYTIRISH YO`LLARI

Faraz kilaylik, $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ integralning aniq qiymati I bo`lsin. U xolda

$$I = I_m + R, \qquad (5.12)$$

bu erda I_m – trapetsiyalar formulasi yoki Simpson formulasi yordamida integralni hisoblaganda chikkan natija; R – shu formulalarni qo`llaganda yo`l qo`yilga xatolik. Agar integral ostidagi *f(x)* funktsiya analitik (formula) ko`rinishda bo`lsa, integrallarni taqribiy hisoblash xatoligini ifodalovchi formulalarni matematik analiz usullari bilan keltirib chiqarish mumkir Agar integral ostidagi funktsiya jadval yoki grafik ko`rinishda bo`lsa, bunday formulalarni keltirib chiqarishning iloji bo`lmaydi. Shuning uchun bu xolda boshqa usullar qo`llashga to`g'ri keladi. Shulardan ba`zi birlarini kurib chiqamiz.

Ukuvchiga ortikcha kiyinchiliklar tugdirmaslik hamda kiskalik uchun formulalarni keltirib chiqarishni (isbotlashni) lozim kur-madik. Yuqorida aytilganidek, bular xammasi matematik analiz usullari yordamida isbotlanadi.

Faraz kilaylik $\int_a^b f(x)dx$ integralni *n=2m* ta va *n=4m* ta bulakchalarga bo`lib, Simpson formulasini qo`llab olingan natijalar I_{2m} va I_{4m} bo`lsin. $I_{2m}$ ning qiymatini $I_{4m}$ bilan solishtirib Simpson formulasining aniqligi xakida muloxaza yuritish mumkin. Bunda $I_{2m}$ ning xatoligi quyidagi sondan katta bo`lmaydi:

$$R_{4m} \leq \frac{|I_{4m} - I_{2m}|}{15} \qquad (5.13)$$

[*a,b*] kesmada $M_k = max\ f^k\ (x)$. (5.12) dan R-I-I_m. Bu xolda xatolik-lar quyidagicha baxolanadi:

Trapetsiyalar formulasi uchun

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} \qquad (5.14)$$

Simpson formulasi uchun

$$|R| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{180(2m)^4}; \quad \left(M_4 = f^{(IV)}(x)\right) \qquad (5.15)$$

Misol. $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$ integralni trapetsiyalar va Simpson formulalari yordamida hisoblaganda yo`l qo`yiladigan xatoliklar topilsin.

E c h i s h .

$f(x) = \frac{1}{1+x}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$; $f^{(IV)}(x) = \frac{2}{(x+1)^5}$ [0,1] kesmada $|f''(x)| \leq 2$; $|f^{(IV)}(x)| \leq 24$.

n=8 da (5.14) dan trapetsiyalar formulasi uchun:

$$|R| \leq \frac{2}{12 \cdot 64} = \frac{1}{384} < 0{,}003;$$

(5.15) dan Simpson formulasi uchun:

$$|R| \leq \frac{24}{180 \cdot 8^2} = \frac{1}{30720} < 0{,}000034;$$

Takrorlash uchun savollar:

1. N'yuton-Leybnits formulasini ifodalang.
2. N'yuton-Leybnits formulasi kanakangi integrallarni hisoblashda qo`llaniladi?
3. Kvadratur formulalar deb nimaga aytiladi?

4. Aniq integralning geometrik ma`nosini tushuntiring.
5. Tugun nuqtalar nima?
6. Ixtiyoriy egri chiziqli trapetsiyani chizing.
7. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash formulasini yozing.
8. CHap formulani yozing.
9. Ung formulani yozing.
10. Trapetsiyalar formulasini yozing.

10-MAVZU. ANIQ INTEGRALLARNI TAQRIBIY HISOBLASHDA SIMPSON (PARABOLA) USULI

Reja:

1. Simpson (parabola) usuli.
2. Usulning ishchi algoritmi, uning xatoligi miqdorini baholash.

Tayanch iboralar:

Elementar funktsiya, integral, aniq integral, aniqmas integral, kvadratur, egri chiziqli trapetsiya, egri chiziqli trapetsiya yuzi, aniq echim, bulinish nuqtalari, Simpson formulasi.

1. SIMPSON (PARABOLA) USULI

Simpson formulasi yuqorida keltirib chikarilgan formulalarga karaganda aniqligi yuqori bo`lgan formula hisoblanadi. Bu formulada integralning qiymatini yuqori aniqlikda olish uchun bulinish kadamlarini tobora oshirish talab etilmaydi. *[a,b]* kesmani $a=x_0<x_1<x_2...x_{n-1}<x_n=b$ nuqtalar bilan $p=2$ ta juft teng bulakchalarga ajratamiz. $u=f(x)$ egri chiziqka tegishli bo`lgan (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2) nuqtalar orqali parabola o'tkazamiz. Bizga ma`lumki, bu parabolaning tenglamasi

$$y = Ax^2 + Bx + C \qquad (5.5)$$

bo`ladi, bu erda *A, V, S* — hozircha noma`lum bo`lgan koeffitsientlar. $[x_0,x_2]$ kesmadagi egri chiziqli trapetsiyaning yuzini shu kesmadagi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtirsak, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2}\left(Ax^2+Bx+C\right)dx = \left[A\frac{x^3}{3}+Cx+B\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_2} = A\frac{x_2^3-x_0^3}{3}+B\frac{x_2^2-x_0^2}{2}+C(x_2-x_0)$$

$(x_2 — x_0)$ ni kavsdan tashqariga chikarib, umumiy maxraj-ga keltirsak:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{x_2-x_0}{6}\left[2A\left(x_0^2+x_0x_2+x_2^2\right)+3B(x_0+x_2)+6C\right] \qquad (5.6)$$

(5.5) dagi noma`lum *A, V, S* koeffitsientlar quyidagicha topiladi: x ning x_0, x_1, x_2 qiymatlarida $f(x)$ ning qiymatlari y_0, y_1, y_2 ekanini va $x_1=\frac{x_0+x_2}{2}$ j a m i n i hisobga olsak, (5.5) dan:

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C, \\ y_1 &= A\left(\frac{x_0 + x_2}{3}\right)^2 + B\frac{x_0 + x_2}{2} + C, \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C. \end{aligned}\right\} \qquad (5.7)$$

(5.7) ning ikkinchi ifodasini turtga ko`paytirib, uchala tenglikni bir-biriga kushsak:

$$\begin{aligned} & y_0 + 4y_1 + y_2 = A\left[x_0^2 + (x_0 + x_2)^2 + x_2^2\right] + B\left[x_0 + 2(x_0 + x_2) + x_2\right] + 6C = \\ & = 2A\left[x_0^2 + x_0x_2 + x_2^2\right] + 3B(x_0 + x_2) + 6C \end{aligned} \qquad (5.8)$$

Bu ifodani (5.6) bilan solishtirsak, bularning ung taraflari bir xil ekanligini ko`ramiz. (5.8) ni (5.6) ning ung tarafiga kuysak va $x_2$-$x_0$=$2h$ [$h$=($b$-$a$)/$n$] ekanligini e`tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni topamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \qquad (5.9)$$

Xuddi shunday formulani [x_2, x_4] kesma uchun ham keltirib chiqarish mumkin:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \qquad (5.10)$$

Bu formulalarni butun kesma [a, b] uchun keltirib chikarib, bir-biriga kushsak, quyidagini hosil kilamiz:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \qquad (5.11)$$

Bu topilgan formula *Simpson formulasidir*. Ba`zi xollarda uni *parabolalar formulasi* deb ham ataydilar.

(5.11) ni eslab kolish unchalik kiyin emas; tok rakamli ordinatalar turtga, juft rakamli ordinatalar (ikki chekkadagi ordinatadan tashqari) ikkita ko`paytiriladi. CHekkadagi ordinatalar $y_0$, $y_{2m}$ esa birga ko`paytiriladi.

2. USULNING ISHCHI ALGORITMI, UNING XATOLIGI MIQDORINI BAHOLASH

Misol. $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralning qiymatini trapetsiyalar formulasi hamda Simpson formulasi yordamida toping.

E c h i s h : Bu erda $0 \le x \le 1$; $n=10 \cdot a=0$; $b=1 \cdot h=(b-a)/n=0{,}1$; $f(x) = y = \frac{1}{1+x^2}$.

Quyidagi 5.1-jadvalni to`zamiz

5.1-jadval

x	x^2	1+x^2	$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	x	x^2	1+x^2	$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$
0,0	0,00	1,00	1,0000000	0,6	0,36	1,36	0,73522941
0,1	0,01	1,01	0,9900990	0,7	0,49	1,49	0,6711409
0,2	0,04	1,04	0,9615385	0,8	0,64	1,64	0,6097561
0,3	0,09	1,09	0,9174312	0,9	0,81	1,81	0,5524862
0,4	0,16	1,16	0,8620690	1,0	1,00	2,00	0,5000000
0,5	0,25	1,25	0,8000000				

Trapetsiyalar formulasiga asosan

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx h\left(\frac{y_0+y_{10}}{2}+y_1+y_2+...+y_9\right)=0{,}1\left(\frac{1+0{,}5}{2}+0{,}9900990+...+0{,}5524862\right)=$$
$$=0{,}7849815$$

Simpson formulasiga asosan

$$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+2y_6+4y_7+2y_8+4y_9+y_{10}\right)=$$
$$=\frac{0{,}1}{3}\left[1+0{,}5+4(0{,}9900990+0{,}9174312+...+0{,}5524862+2(0{,}9615385+...+0{,}6097561))\right]=$$
$$0{,}7853981$$

Bizga ma`lumki, $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=arctgx\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}78539816$

Bulardan kurinadiki, bu misol uchun trapetsiyalar formulasi qo`llanganda nisbiy xatolik 0,06 % da oshmaydi. Simpson formulasi qo`llanganda esa nisbiy xatolik deyarli yo`q.

Takrorlash uchun savollar:

1. Simpson formulasini ifodalang.
2. Simpson formulasi yana qanday nomlanadi?
3. Integrallarni hisoblashda yo`l qo`yilgan xatoliklar qanday topiladi?
4. Trapetsiya va Simpson usullarining asosiy farqi nimada?
5. Simpson usuli mohiyatini tushuntiring.

11-MAVZU. FUNKTSIYALARNI INTERPOLYATSIYALASH

Reja:

1. Masalaning qo`yilishi.
2. CHekli ayirmalar va ularning xossalari.
3. N'yutonning 1 interpolyatsion formulasi.
4. N'yutonning 2 interpolyatsion formulasi.
5. CHekli ayirmalar jadvali va N'yutonning interpolyatsion formulalari uchun ishchi algoritmlar.

Tayanch iboralar:

Interpolyatsiyalar, ayirma, chekli ayirma, yig'indi, n-tartibli ayirma, N'yutonning interpolyatsion formulalari, interpolyatsiya tugun, interpolyatsiya kadami, chiziqli, parabolik, analitik ko`rinish, koldik xad, orkaga qarab interpolyatsiyalash.

1. MASALANING QO`YILISHI

Aksariyat hisoblash usullari masalaning qo`yilishida katnashadigan funktsiyalarni unga biror muayyan ma`noda yaqin va tuzilishi soddarok bo`lgan funktsiyalarga almashtirish goyasiga asoslangan. Bu bobda funktsiyalarni yaqinlashtirish masalasining eng sodda va juda keng qo`llaniladigan qismi — funktsiyalarni interpolyatsiyalash masalasi kurib chikiladi.

Interpolyatsiya masalasining moxiyati quyidagidan iborat. Faraz kilaylik $u=f(x\}$ funktsiya jadval ko`rinishida berilgan bo`lsin:

$$Y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$$

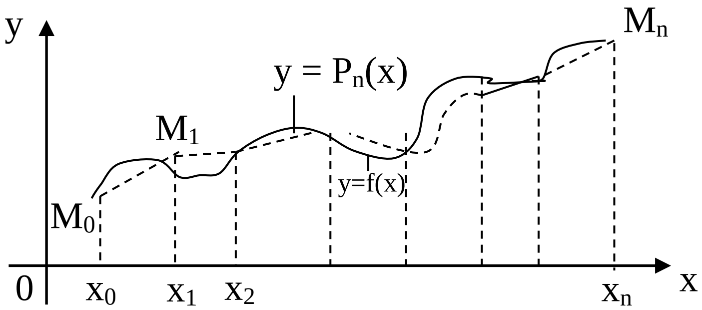
Odatda interpolyatsiyalash masalasi quyidagicha ko`rinishda qo`yiladi: Shundai n-tartiblidan oshmagan $R(x) = R_n(x)$ ko`pxad topish kerakki, $P(x_i)$ berilgan $x_i(i=0,1,1,\ldots,n)$ nuqtalarda $f(x)$ bilan bir xil qiymatlarni qabul kilsin, ya`ni $P(x_i) = y_i$.

Bu masalaning geometrik ma`nosi quyidagidan iborat:

darajasi p dan ortmaydigan shunday

$$y = P_n (x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (4.1)$$

ko`pxad kurilsinki, uning grafigi berilgan M_i (x_i, u_i) ($i = 0,1, \ldots n$) nuqtalardan utsin (9-rasm). Bu erdagi x_i ($i=0,1,2,\ldots n$) nuqtalar interpolyatsiya tugun nuqtalari yoki tugunlar deyiladi. $R(x)$ esa interpolyatsiyalovchi funktsiya deyiladi.



9- rasm

Amalda topilgan $R(x)$ interpolyatsion formula $f(x)$ funktsiyaning berilgan x argumentning (interpolyatsiya tugunlaridan farqli) qiymatlarini hisoblash uchun qo`llaniladi. Ushbu operatsiya funktsiyani interpolyatsiyalash deyiladi. (Agar $x\in$ (a,b) bo`lsa interpolyatsiyalash $x\in$ (a,b) bo`lsa, ekstrapolyatsiyalash deyiladi).

2. CHEKLI AYIRMALAR VA ULARNING XOSSALARI

Faraz kilaylik argumentning o`zaro teng o`zoklikda joylashgan $x_i=x_0+ih$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = const$ (h-jadval kadami) qiymatlarida $f(x)$ funktsiyaning moc ravishdagi $y_i=f(x_i)$ qiymatlari berilgan bo`lsin.

Birinchi tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta y_i=f(x_{i+1}) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i \qquad (4.2)$$

ifodaga ikkinchi tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta^2 y_i=\Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2}-2 y_{i+1} + y_i \qquad (4.3)$$

ifodaga va xokazo n-tartibli chekli ayirmalar deb

$$\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i \qquad (4.4)$$

ifodaga aytiladi. CHekli ayirmalarni quyidagi 4.1- jadval ko`rinishida kam olish mumkin.

4.1-jadval

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	…
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$		
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$			
x_3	y_3	Δy_3				
x_4	y_4					
…						

(4.2) dan quyidagiga egamiz

$$y_{i+1}= y_1+\Delta y_i = (1+\Delta)\, y_i \qquad (4.5)$$

Bu erdan ketma-ket quyidagilarni keltirib chikaramiz:

$$y_{i+2} = (1+\Delta)y_{i+1} = (1+\Delta)^2 y_i,$$

$$y_{i+3} = (1+\Delta)y_{i+2} = (1+\Delta)^3 y_i$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_{i+n} = (1+\Delta)^n y_i$$

N'yuton binomi formulasidan foydalanib, quyidagiga ega bo`lamiz:

$$y_{i+n} =y_i +C_n^1\, \Delta y_i + \ldots +\Delta^n y_i$$

Bundan esa:

$$\Delta^n y_i = [(1+\Delta)-1]^n y_i = (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i + C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} y_i - \ldots + (-1)^n y_i$$

yoki

$$\Delta^n y_i = y_{i+1} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \ldots + (-1)^n y_i \qquad (4.6)$$

Masalan, (4.6) dan

$$\Delta^2 y_i= y_{i+2}-2y_{i+1}+y_i,$$

$$\Delta^3 y_i=y_{i+3}-3y_{i+2}+3y_{i+1}-y_1$$

va x.k.

CHekli ayirmalar quyidagi x o s s a l a r g a ega.

1.Funktsiyalar yig'indisining (ayirmasining) chekli ayirmasi funktsiyalarning chekli anirmalari yig'indisiga (ayirmasiga) teng:

$$\Delta^n (f(x) \pm \varphi(x))= \Delta^n f(x) \pm \Delta^n \varphi(x).$$

2. Funktsiya o`zgarmas songa ko`paytirilsa, uning chekli ayirmasi usha songa ko`payadi:

$$\Delta^n(k \cdot f(x))=k \cdot \Delta^n f(x).$$

3. n-tartibli chekli ayirmaning /p-tartibli chekli ayirmasi *(p+t)- tartibli* chekli ayirmaga teng:

$$\Delta^m(\Delta^n y)= \Delta^{m+n} y.$$

4. n-tartibli ko`paddning p-tartibli chekli ayirmasi o`zgarmas songa, $n+1$-tartibli chekli ayirmasi esa nolga teng.

Misol. Jadval kadamini $h=1$ va dastlabki qiymatni $x_o= 0$ deb xisoblab, $u = 2x^3 - 2x^2 + Zx - 1$ ko`pxadning ayirmalar jadvali to`zilsin.

E c h i s h . u ning $x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $y_0 = -1,\ y_1=2,\ y_2 = 13,\ y_3 = 44.$ Bundan esa quyidagilar kelib chikadi: $\Delta y_0=y_1-y_0=3$, $\Delta y_1=y_2-y_1=11$, $\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0=8$. Bu qiymatlarni 4.2- jadvalga joylashtiramiz:

4.2-jadval

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	8		
1	2	11	8	12
2	13	31	20	12
3	44	63	32	12
4	107	107	44	
5	214			
…	…	…	…	…

Berilgan funktsiya Z- darajali kundad bo`lganligi sa-babli uning 3-tartibli ayirmasi o`zgarmas son bo`lib, $\Delta^3 y=12$ bo`ladi. Jadvalning kolgan ustunlari

$$\Delta^2 y_{i+1}=\Delta^2 y_i+12, \qquad (i=0,1,2,\ldots);$$

$$\Delta y_{i+1}=\Delta y_i+\Delta^2 y_i \qquad (i=1,2,\ldots);$$

$$y_i+{}^1=y_i+\Delta y_i \qquad (i=2,3,..)$$

formulalar yordamida to`ldiriladi.

3. N'YUTONNING 1- INTERPOLYATSION FORMULASI

Faraz kilaylik $y=f(x)$ funktsiya uchun $y_1=f(x)$ qiymatlar berilgan va interpolyatsiya tugunlari teng o`zoklikda joylashgan bo`lsin, ya`ni $x_1=x_0+ih$ $(I=0,1,2,\ldots,h)$ ($h$ – interpolyatsiya kadami). Argumentning moc qiymatlarida darajasi h dan oshmaydigan moc qiymatlar oladigan ko`pxad tuzish lozim bo`lsin va bu ko`pxad kuiidagi ko`rinishga ega bo`lsin:

$$P_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \qquad (4.7)$$

Bu n-tartibli ko`pxad. Interpolyatsiya masalasidagi shartga ko`ra $R(x)$ ko`pxad $x_0, x_1, \ldots, x_n$ interpolyatsiya tugunlarida $P_n(x_0)=y_0$. $P_n(x_1)=y_1$, $P_n(x_2)=y_2$,... $P_n(x_n)=y_n$ qiymatlarni qabul kiladi. $x=x_0$ deb tasavvur etsak, (4.7) formuladan $y_0=P_n(x_0)=a_0$, ya`ni $a_0=y_0$. So`ngra $x$ ga $x_1$ va $x_2$ larning qiymatlarini berib, ketma-ket quyidagiga ega bo`lamiz:

$$y_1=P_n(x_1)=a_0+a_1(x_1-x_0), \text{ bundan } a_1=\frac{\Delta y_0}{h}$$

$$y_2=P_n(x_2)=a_0+a_1(x_2-x)+a_2(x_2-x_0)(x_2-x_1),$$

ya`ni $$y_2 - 2\Delta y_0 - y_0=2h^2 a_2$$

yoki $$y_2-2y_1+y_0=2h^2 a_2, \text{ bundan } a_2=\frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

Bu jarayonni davom ettirib, $x=x_n$ uchun kuiidagi ifodani hosil kilamiz:

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

Topilgan a_0, a_1, $a_2, \ldots a_n$ koeffitsientlarning qiymatlarini (4.7) formulaga kuysak,

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!y^n}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}) \qquad (4.8)$$

~~ko`ri~~nishga ega bo`lamiz. Bu formulada $\frac{x - x_0}{h} = q$, ya`ni $x = x_0 + hq$ belgilash kiritilsa, u xolda

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = q - 1,$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = q - 2, \text{ va x.k.}$$

Natijada N'yutonning 1- interpolyatsion formulasiga ega bo`lamiz:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots$$
$$+ \frac{q(q-1) \cdot \ldots \cdot (q - n + 1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.9)$$

N'yutonning 1-interpolyatsion formulasini [a, b] ning boshlangich nuqtalarida qo`llash qulay.

Agar $p==1$ bo`lsa, u xolda $P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0$ ko`rinishdagi chiziqli interpolyatsion formulaga, $p=2$ bo`lganda esa

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0$$

ko`rinishdagi parabolik interpolyatsion formulaga ega bo`lamiz.

N'yutonning 1-formulasini *oldinga qarab interpolyatsiyalash formulasi ham* deyiladi.

(4.9) formulaning koldik, xadi

$$P_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \qquad (4.10)$$

bu erda $\xi \in [x_0, x_n]$

Funktsiyaning analitik ko`rinishi har doim ham ma`lum bulavermaydi. Bundai xollarda chekli ayirmalar to`zilib,

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi. U xolda N'yutonning birinchi interpolyatsion formulasi uchun xatolik

$$P_n(x) \approx \frac{q(q-1)...(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)}y_0 \qquad (4.11)$$

formula orqali topiladi.

Misol. *u=lgx* funktsiyaning 4.3-jadvalda berilgan qiymatlaridan foydalanib, uning x=1001 bo`lgan xoldagi qiymatini toping.

4.3-jadval

x	*y*	*Δy*	*Δ²y*	*Δ³y*
1000	3,0000000	43214	- 426	8
1010	3,0043214	42788	- 418	9
1020	3,0086002	42370	- 409	8
1030	3,0128372	41961	- 401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

E c h i s h . CHekli aiirmalar jadvalini to`zamiz. 4.3- jadvaldan ko`rinib turibdiki, 3-tartibli chekli ayirma o`zgarmas, shu sababli (4.9) formula uchun n=3 olish etarli:

$$y(x) = P_3(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

x=1001 uchun *q = 0,1* (*h=10*). Shuning uchun

$$\lg 1001 = 3{,}0000000 + 0{,}1 \cdot 0{,}0043214 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{2} \times$$

$$\times 0{,}0000426 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9}{6} \cdot 0{,}0000008 = 3{,}0004341$$

Endi koldik xadni baxolaymiz. (4.10) formulaga asosan n=3 bo`lganda quyidagiga egamiz:

$$R_3(x) = \frac{h^4 \cdot q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} f^{(4)}(\xi)$$

bu erda 1000<ξ<1030.

f(x) =lgx bo`lgani sababli $f^{(4)}(x) = -\frac{3!}{x^4}\lg e$; shuning uchun

$$\left|f^{(4)}(\xi)\right| < \frac{3!}{(1000)^4}\lg e .$$

h=10 va *q=0,1* uchun quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\left|R_3(1001)\right| = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9 \cdot 2{,}9 \cdot 10^4 \lg e}{4 \cdot (1000)^4} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-9}$$

Shunday kilib, koldik xad $R_3(1001) \approx 0,5 \cdot 10^{-9}$ ekan.

4. N'YUTONNING 2 - INTERPOLYATSION FORMULASI

N'yutonning birinchi interpolyatsion formulasi jadvalning boshida va ikkinchi formulasi esa jadvalning oxirida interpolyatsiyalash uchun muljallangan. N'yutonning ikkinchi interpolyatsion formula-sini keltirib chikaramiz.

Faraz kilaylik $y=f(x)$ funktsiyaning $n+1$ ta qiymati ma`lum bo`lsin; ya`ni argumentning $n=1$ ta $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymatlarida funktsiyaning qiymatlar $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ bo`lsin. Tugunlar orasidagi masofa h o`zgarmas bo`lsin. Quyidagi ko`rinishdagi interpolyatsion ko`pxadni ko`ramiz:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_n)+ a_2(x-x_n)(x-x_n-1) + a_3(x-x_n)(x-x_n-1)(x-x_n-2)+ \ldots +$$
$$+ a_n(x-x_n)(x-x_{n-1}) \ldots (x-x_1) \qquad (4.12)$$

Bunda katnashayotgan $a_0, a_1, \ldots, a_n$ noma`lum koeffitsientlarni topishni $x=x_n$ bo`lgan xoldan boshlash kerak. So`ngra argumentga $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots$ qiymatlar berib, kolgan koeffitsientlar animanadi.

Yuqorida kurilgan muloxazalarni (4.12) formula uchun ham qo`llasak, u xolda noma`lum koeffitsientlar $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ larni topish uchun quyidagilarni hosil kilamiz:

$$a_0 = y_n, \qquad a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}, \qquad \ldots, a_n = \frac{\Delta_n y_0}{n!h^n}$$

Topilgan koeffitsientlarning qiymatlarini (4.12) formulaga kuysak,

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)x - x_{(n-1)} + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)\ldots(x-x_1) \quad (4.13)$$

ko`rinishdagi *N'yutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi* kelib chikadi. Bu formulada $q=(x-x_n)/h$ belgilash kiritsak,

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (4.14)$$

hosil bo`ladi. Ba`zan bu formulani *orkaga qarab interpolyatsiyalash formulasi* ham deyiladi. (4.14) formuladan $[a,b]$ kesmaning oxirgi nuqtalarida foydalanish qulayrokdir.

N'yutonning ikkinchi interpolyatsion formulasining koldik xadini baxolash formulasi quyidagicha bo`ladi:

$$P_n(x) = h^{n+1}\frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!}F^{(n+1)}(\xi)$$

bu erda $q=(x-x_n)/h$, $\xi \in [x_0, x_n]$

Agar funktsiyaning analitik ko`rinishi ma`lum bo`lmasa, u xolda chekli ayirmalar to`zilib,

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi. Shuning uchun N’yutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi uchun xatolik formulasi

$$P_n(x) \approx \frac{q(q+1)\ldots(q+n)}{(n+1)!} \Delta^{(n+1)} y_n$$

bo`ladi.

Misol. *u=lgx* funktsiyaning 4.4-jadvalda bermlgan qiymatlaridan foydalanib, uning x=1044 dagi qiymatini hisoblang (h=10).

4.4- jadval

X	y
1000	3,0000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

E c h i s h . CHekli ayirmalar jadvalini to`zamiz: 4.5.-jadval

x	U	Δu	Δ^2u	Δ^3u
1000	3,0000000	73214	- 426	8
1010	3,0043214	42788	- 418	9
1020	3,0086002	42370	- 409	<u>8</u>
1030	3,0128372	41961	<u>- 401</u>	
1040	3,0170333	<u>41560</u>		
<u>1050</u>	3,0211893			

$x_n = 1050$ bo`lsin, u xolda

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{1044 - 1050}{10} = -0.6$$

4.5- jadvaldagi tagiga chizilgan ayirmalardan foydalangan xolda (4.14) formulaga asosan quyidagiga ega bo`lamiz:

$$\lg 1044 = 3{,}0211893 + (-0{,}6)\cdot 0{,}0041560 + \frac{(-0{,}6)\cdot(-0{,}6+1)}{2} \times$$

$$\times 0{,}0000401 + \frac{(-0{,}6)\cdot(-0{,}6+1)\cdot(-0{,}6+2)}{6} \cdot 0{,}0000008 = 3{,}0187005$$

Takrorlash uchun savollar:

1. Odatda interpolyatsiya masalasi qanday ko`rinishda qo`yiladi?
2. Interpolyatsiya masalasining geometrik ma`nosi qanday ko`rinishdan iborat?
3. Interpolyatsiya tugun nuqtalari deb kaysi nuqtalarga aytiladi?
4. Interpolyatsiyalovchi funktsiya deb qanday funktsiyalarga aytiladi?
5. 1-tartibli chekli ayirmalar deb qanday ifodaga aytiladi?
6. N'yuton-Binomi formulasini keltiring.
7. CHekli ayirmalar xossalarini sanab bering.
8. N'yutonning 1-interpolyatsion formulasini yozing.
9. Parabolik interpolyatsion formulani yozing.
10. N'yutonning 1-interpolyatsion formulasi uchun xatolik kaysi formula yordamida topiladi?
11. N'yutonning 2-interpolyatsion formulasini yozing.
12. Orkaga qarab interpolyatsiyalash formulasini yozing.
13. N'yutonning 2-interpolyatsion formulasi uchun xatolik kaysi formula yordamida hisoblanadi?

12-MAVZU. FUNKTSIYALARNI INTERPOLYATSIYALASH. LAGRANJNING INTERPOLYATSION FORMULASI. EKSTRAPOLYATSIYA. TESKARI INTERPOLYATSIYA

Reja:

1. Lagranjning interpolyatsion formulasi.
2. Ekstrapolyatsiya.
3. Teskari interpolyatsiya.
4. Interpolyatsion formulalar uchun ishchi algoritmlar.

Tayanch iboralar:

Interpolyatsiya, interpolyatsion formula, interpolyatsiya tuguni, tizm, tizim determinanti, oshkor ko`rinish, fundamental ko`pxad, interpolyatsion ko`pxad, Lagranj ko`pxadi, interpolyatsiya koldik xadi, ektrapolyatsiya, teskari interpolyatsiya.

1. LAGRANJNING INTERPOLYATSION FORMULASI

Topilishi lozim bo`lgan ko`pxadning ko`rinishini quyidagicha olaylik:

$$L_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \qquad (4.15)$$

bu erda a_i *(i =0,1,2, ..., p)* — noma`lum o`zgarmas koeffitsientlar. Shartga ko`ra $L_n(x)$ funktsiya x_0, x_1, …, x_n interpolyatsiyalash tugunlarida qiymatlarga erishadi. Buni hisobga olgan xolda (4.15) dan quyida-gilarni topish mumkin:

x_0 interpolyatsiya tugunida

$$L_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n$$

va nixoyat x_n interpolyatsiya tugunida

$$L_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n$$

Ushbu ifodalarni tenglamalar tizimi ko`rinishida yozsak:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \qquad (4.16)$$

bu erda x_i va y_i (1=0,1,2, ..., *p)* – berilgan funktsiyaning jadval qiymatlari. Bu tizimning determinanti

$$\begin{vmatrix} 1\,x_0\,x_0^2\,x_0^3 \dots x_0^n \\ 1\,x_1\,x_1^2\,x_1^3 \dots x_1^n \\ \dots \ \dots. \ \dots \ \dots \ \dots \\ 1\,x_n\,x_n^2\,x_n^3 \dots x_n^n \end{vmatrix}$$

x_0, x_1, x_2, …, x_n tugunlar ustma-ust tushmagan xolda noldan farqli bo`ladi. Masala mazmunidan ravshanki, $x_0$, $x_1$, $x_2$, …, $x_n$ nuqtalar bir-biridan farqli, demak bu determinant noldan farqlidir. Shuning uchun ham (4.16) tizim va shu bilan birga qo`yilgan interpolyatsiya masalasi yagona echimga ega. Bu tizimni echib, a_0, a_1, …, a_n larni topib (4.15) ga kuysak, $L_n(x)$ ko`pxad aniqlanadi. Biz $L_n(x)$ ning oshkor ko`rinishini topish uchun boshqacha yo`l tutamiz. Avvalo fundamental ko`pxadlar deb ataluvchi $Q_i(x)$ larni, ya`ni

$$Q_i(x_j) = \delta_{ij}\begin{cases} 0, & \text{агар } i \neq j \text{ булганда} \\ 1, & \text{агар } i = j \text{ булганда} \end{cases} \tag{4.17}$$

shartlarni kanoatlantiradigan n-darajali ko`pxadlarni ko`ramiz.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i Q_i(x) \tag{4.18}$$

izlanayotgan interpolyatsion ko`pxad bo`ladi. (4.17) shartni kanoatlantiruvchi ko`pxad

$$Q_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \tag{4.19}$$

ko`rinishida bo`ladi. (4.19) ni (4.18) ga kuysak,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \cdot y_i \tag{4.20}$$

ko`rinishdagi Lagranj interpolyatsion formulasiga ega bo`lamiz.

Bu formulaning xususii xollarini ko`raylik:

n=1 bo`lganda Lagranj ko`pxadi ikki nuqtadan utuvchi to`g’ri chiziq tenglamasini beradi:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_1-x_0} y_0 + \frac{x-x_0}{x_0-x_1} y_1$$

Agar *p*=2 bo`lsa, u xolda kvadratik interpolyatsion ko`pxadga ega bo`lamiz, bu ko`pxad uchta nuqtadan utuvchi va xertikal ukka ega bo`lgan parabolani aniqlaydi:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

Lagranj interpolyatsion formulasining boshqa ko`rinishini keltiramiz. Buning uchun

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x-x_i)$$

ko`pxadni kiritamiz. Bundan hosila olsak,

$$\omega_{n+1}^{`}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\prod_{i\neq k} (x-x_1) \right]$$

Kvadrat kavs ichidagi ifoda $x = x_i$, va k≠j bo`lganda nolga ylanadi, chunki ($x_j$ - $x_i$) ko`paytuvchi katnashadi. Demak,

$$\omega_{n+1}^{`}(x_j)=\prod_{i\neq j}(x-x_1)$$

Shuning uchun ham, $\prod_{i\neq k}\frac{(x-x_1)}{(x_j-x_i)}$ Lagranj koeffitsientini

$$\frac{\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}^{`}(x_j)(x-x_j)}$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bunda esa Lagranj ko`pxadi quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi

$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f(x_j)\omega_{n+1}(x)}{\omega_{n+1}^{`}(x_j)(x-x_j)} \qquad (4.21)$$

Endi tugunlar bir xil o`zoklikda joylashgan $x_1$-$x_0$ =$x_2$–$x_1$ = … =$x_n$–$x_{n-1}$=h xususiy xolniko`ramiz.

Bu xolda soddalik uchun x=x_0+th almashtirish bajaramiz, u xolda

$$x-x_j=h(t-j), \qquad \omega_{n+1}(x)=h^{n+1}\omega_{n+1}^{*}(t).$$

bu erda

$$\omega_{n+1}^{*}(t)=t(t-1)\ldots(t-n), \;\; \omega_{n+1}^{*}(x_j)=(-1)j!\,(h-j)!\,h^n$$

bo`lib, (4.21) Lagranj interpolyatsion ko`pxadi quyidagi ko`rinishni oladi:

$$L_n(x+th)=\omega_{n+1}^{*}(x)\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}f(x_j)}{(t-j)j!(n-j)!} \qquad (4.22)$$

Endi Lagranj interpolyatsion formulasining koldik, xadini baxolashni ko`ramiz. Agar biror [*a*,*b*] oraliqda berilgan *f (x)* funktsiyani $L_n$(x) interpolyatsion ko`pxad bilan almashtirsak, ular interpolyatsiya tugunlarida o`zaro ustma-ust tushib, boshqa nuqtalarda esa bir-biridan farq kiladi. Shuning uchun koldik xadning R(x) = f (x) - $L_n$(x) ko`rinishini topish va uni baxolash bilan shurullanish maqsadga muvofik. Buning uchun interpolyatsiya tugun-larini o`z ichiga oladigan [*a*,*b*] oraliqda f (x) funktsiya (n+1) tartibli $f^{(n+1)}(x)$ uzluksiz hosilaga ega deb faraz kilamiz. Interpolyatsiyaning koldik xadi R(x) uchun quyidagi teorema urinlidir:

Teorema. Agar f(x) funktsiya [a,b] oraliqda (n+1)tartibli uzluksiz hosilaga ega bo`lsa, u xolda interpolyatsiya koldik, xadini

$$f(a)-L_n(x)=R(x)=f^{(n+1)}(\xi)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!} \qquad (4.23)$$

ko`rinishda ifodalash mumkin. Bu erda* $\xi\in[a,b]$ *bo`lib, umuman aytganda x ning funktsiyasidir.

M i s o l . Agar ln100, 1n101, 1n102, 1n103 larning qiymatlari ma`lum bo`lsa, Lagranjning interpolyatsiey formulasi yordamida 1n100,5 ni qanday aniqlikda kisoblash mumkin?

E c h i s h . Lagranj interpolyatsion formulasining koldik xadi, agar n=3 bo`lsa, quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Bizning xolda $x_0=100$, $x_1=101$, $x_2=102$, $x_3=103$, $x=100,5$; $100<\xi<100,5$. CHunki $f(x) = \ln x$ u xolda $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$. Shunday kilib,

$$|R(100,5)| \le \frac{6}{(100)^4 \cdot 4!} \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,5 \cdot 2,5 = 0,23 \cdot 10^{-8}$$

2. EKSTRAPOLYATSIYA

Ekstrapolyatsiya. ekstrapolyatsiya, ya`ni argumentning jadvaldagi qiymatlaridan tashqari qiymatlarida funktsiyaning qiymatini topish masalasi ustida tuxtalib utamiz. ekstrapolyatsiyalash odatda, jadvalning bir-ikki kadami mikyosida bajariladi. CHunki argu-mentning jadvaldagi qiymatidan o`zokrok qiymatida ekstrapolya-tsiyalanganda xato ortib ketadi. Jadval boshida ekstrapolyatsiyalash uchun N’yutonning birinchi interpolyatsion formulasi qo`llanilib, jadval oxirida esa ikkinchisi qo`llaniladi. Interpolyatsion ko`p-xadning tartibi odatda jadvalning amaliy o`zgarmas ayirmalar-ining tartibiga teng kilib olinadi.

M i s o l . 4.6-jadvaldan foydalanib x=1,210 va x = 1,2638 nuqtalar uchun ko`pxadning ko`rinishi aniqlansin.

4.6-jadval;

x	$y = f(x)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1,215	0,106044	7232	-831	95
1,220	0,113276	6395	-742	93
1,225	0,119671	5653	-649	93
1,230	0,125324	5004	-556	91
1,235	0,130328	44448	-465	90
1,240	0,134776	3983	-375	88
1,245	0,138759	3608	-287	87
1,250	0,142367	3321	-200	
1,255	0,145688	3121		
1,260	0,148809			

E c h i s h . Jadvaldagi uchinchi tartibli ayirma amalda o`zgarmasdir. Shuning uchun ham uchinchi tartibli interpolyatsion formuladan foydalanamiz. Jadval boshida va oxirida ekstrapolyatsiyalash uchun formulalar quyidagicha yoziladi:

$$P_3(x) = 0{,}106044 + 0{,}007232\ q + (-0{,}000837)\cdot\frac{q(q-1)}{2} + 0{,}000095\ \cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}$$

$$P_3(x) = 0{,}148809 + 0{,}003121\ q + (-0{,}000200)\cdot\frac{q(q-1)}{2} + 0{,}000087\ \cdot\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}$$

Birinchi formulaga $q = (x - x_0)/h = \dfrac{1{,}210 - 1{,}215}{0{,}05} = -1$

qiymatni kuysak:

$$y(1{,}210) \approx 0{,}106044 + (-1)\cdot 0{,}007232 + \frac{(-1)\cdot(-2)}{2}\cdot(-0{,}000837) +$$
$$+\frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}\cdot 0{,}000095 = 0{,}097880$$

Shunga o\`xshash $q = \dfrac{x - x_4}{h} = \dfrac{1{,}2638 - 1{,}260}{0{,}005} = 0{,}76$ ni ikkinchi formulaga kuysak,

$$y(1{,}2638) \approx 0{,}148809 + 0{,}76\cdot 0{,}003121 + \frac{0{,}76\cdot 1{,}76}{2}\cdot(-0{,}000200) +$$
$$+\frac{0{,}76\cdot 1{,}76\cdot 2{,}76}{3!}\cdot 0{,}0000535 = 0{,}1511007$$

3. TESKARI INTERPOLYATSIYA

Teskari interpolyatsiya. Shu paytgacha *y=f(x)* funktsiyaning jadvali berilgan xolda argumentning berilgan qiymati *x* da funktsiyaning taqribiy qiymatini topish masalasi bilan shugul-landik. Teskari interpolyatsiya masalasi quyidagicha qo\`yiladi: *y=f(x)* funktsiyaning berilgan $\bar{u}$ qiymati uchun argumentning shunday $\bar{x}$ qiymatini topish kerakki, $f(\bar{x})\ \bar{y}$ bo\`lsin. Faraz kilaylik, jadvalning karalayotgan oraligida *f (x)* funktsiya monoton va demak, bir qiymatli teskari funktsiya $x=\varphi(y)$ $(f(\varphi(y))=y)$ mavjud bo\`lsin. Bunday xolda teskari interpolyatsiya $\varphi(y)$ funktsiya uchun odatdagi interpolyatsiyaga keltiriladi. $x=\varphi(y)$ qiymatni topish uchun Lagranj yoki N’yutonning tugunlari har xil o\`zoklikda joylashgan xol uchun formulalardan foydalanish mumkin. Masalan, Lagranjning interpolyatsion formulasi

$$L_n(y) = \sum_{i=0}^{n} x_i \prod_{j\neq i}\frac{y - y_i}{y_i - y_j} \qquad (4.25)$$

ko\`rinishga ega bo\`lib, koldik xadi

$$\varphi(y) - L_n(y) = \frac{\varphi^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i\neq K}^{n}(y - y_i)$$

bo\`ladi.

Agar *f(x)* monoton bo\`lmasa, yuqoridagi formula yaramaydi. Bunday xolda u yoki bu interpolyatsion formulani yozib, argumentning ma\`-lum qiymatlaridan foydalanib va funktsiyani ma`lum deb hisoblab, hosil bo`lgan tenglama u yoki bu usul bilan argumentga nisbatan echiladi.

M i s o l . Funktsiyaning quyidagi qiymatlari jadvali berilgan:

4.7-jadval

x	0,880	0,881	0,882	0,883
y=f(x)	2,4109	2,4133	2,4157	2,4181

x argumentning shunday qiymati topilsinki, u=2,4 bo`lsin.

E c h i s h . 4.7- jadvaldagi qiymatlarga ko`ra funktsiya monoton, shuning uchun ham n=3 deb olib, (4.25) formuladan foydalanamiz:

$$L_3(y)=\frac{(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4157)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4109-2{,}4133)(2{,}4109-2{,}4157)(2{,}4109-2{,}4181)}\,0{,}880+$$

$$+\frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4157)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4133-2{,}4133)(2{,}4133-2{,}4157)(2{,}4133-2{,}4181)}\,0{,}881+$$

$$+\frac{(2{,}41-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4181)}{(2{,}4157-2{,}4109)(2{,}4157-2{,}4133)(2{,}4157-2{,}4181)}\,0{,}882+$$

$$+\frac{(2{,}4142-2{,}4109)(2{,}4142-2{,}4133)(2{,}4142-2{,}4157)}{(2{,}4181-2{,}4109)(2{,}4181-2{,}4133)(2{,}4181-2{,}4157)}\,0{,}883=$$

$$=-0{,}0634766\cdot 0{,}880+0{,}6982421\cdot 0{,}881+0{,}4189452\cdot 0{,}882-0{,}0537109\cdot 0{,}883=0{,}88137$$

Yuqorida keltirilgan muloxazalardan so`ng quyidagilarni aytish mumkin:

N’yutonning birinchi interpolyatsion formulasi [*a*,*b*] kesmaning boshlangich nuqtalarida interpolyatsiyalash va kesmaning oxirgi nuqtalarida ekstrapolyatsiyalash uchun, ikkinchi formulasi esa kesmaning oxirgi nuqtalarida interpolyatsiyalash va kesmaning boshlangich nuqtalarida ekstropolyatsiyalash uchun qo`llaniladi. Shuni ham aytish lozimki, ekstrapolyatsiyalash interpolyatsiyalashga karaganda kattarok xatoliklar beradi, ya`ni uning qo`llanish chegarasi cheklangan. Lagranj va N’yuton interpolyatsion formulalarini bir-birlari bilan solishtirsak quyida-gilar bilan farqlanishini ko`ramiz:

Lagranj formulasidagi har bir xad teng xukukli n-tartib-li ko`pxaddan iborat. Shuning uchun avvaldan (hisoblanmasdan avval) birorta xadini tashlab yubora olmaimiz. N’yuton formu-lasining xadlari esa darajasi oshib boruvchi ko`pxadlardan iborat bo`lib, ularning koeffitsientlari faktoriallarga bulingan chekli ayir-malardan iborat. Shuning uchun N’yuton formulasidagi kichik koeffitsientlar oldidagi xadlarni tashlab yuborishimiz mumkin. Ya`ni bu xolda funktsiyaning oraliq qiymatlarini etarli aniqlikda sodda interpolyatsion formulalardan foydalanib hisoblash mumkin.

Takrorlash uchun savollar:

1. Lagranjning interpolyatsion formulasini yozing.
2. Interpolyatsiya tuguni nima?
3. Tizim nima?
4. Tenglamalar tizmini echishning kaysi usullarini bilasiz?
5. Determinant nima?
6. n-darajali ko`pxadni ifodalang.
7. n-ning qanday qiymatida Lagranj ko`pxadi ikki nuqtasidan utuvchi to`g’ri chiziq tenglamasini ko`rsating.
8. Lagranjning interpolyatsion formulasining boshqa ko`rinishini keltiring.
9. Interpolyatsiya koldik xadi xakidagi teorema.
10. ekstrapolyatsiya nima?
11. Teskari interpolyatsiya masalasi qanday qo`yiladi?

13-MAVZU. SONLI DIFFERENTSIALLASH. ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMALARNI TAQRIBIY ECHISH USULLARI. PIKAR ALGORITMI.

Reja:

1. Sonli differentsiallash. Umumiy mulohazalar.
2. Differentsial tenglamalar.
3. Koshi masalasi.
4. Ketma-ket yaqinlashish usuli (Pikar algoritmi).

Tayanch iboralar:

Differentsial tenglama, xususiy hosilali differentsial tenglama, integral egri chizig'i, umumiy echim, boshlang'ich shartlar, Koshi masalasi, Pikar algoritmi, analitik usul, grafik usul, raqamli usul, integral tenglama.

1. SONLI DIFFERENTSIALLASH. UMUMIY MULOHAZALAR

Ko`p amaliy masalalarda funktsiya hosilalarini ayrim nuqtalarda taqribiy hisoblashga to`g'ri keladi. Bu masala sonli differentsiallash masalasi deyiladi. Funktsiyaning analitik ko`rinishi noma`lum bo`lib uning ayrim nuqtalaridagi qiymatlari ma`lum bo`lsa, masalan, tajribadan topilgan bo`lsa, u holda uning hosilasi sonli differentsiallash yo`li bilan topiladi. Umuman aytganda, funktsiyani sonli differentsiallash masalasi doimo bir qiymatli ravishda echilavermaydi. Masalan, f(x) funktsiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasini topish uchun h>0 ni olib,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad (13.1)$$

yoki

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \qquad (13.2)$$

yoki

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \qquad (13.3)$$

kabi olishimiz mumkin. Ko`pincha (13.1) o`ng hosila, (13.2) chap hosila va (13.3) markaziy hosila deyiladi.

2. DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR

Agar tenglamada noma`lum funktsiya hosila yoki differentsial ostida qatnashsa, bunday tenglama differentsial tenglama deyiladi.

Agar differentsial tenglamada noma`lum funktsiya faqat bir o`zgaruvchiga bog’liq bo`lsa, bunday tenglama oddiy differentsial tenglama deyiladi. Masalan:

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{3}(1-2y); \quad y'=\frac{x^4}{2}; \quad \frac{dy}{dt}=t^2-1; \quad \sqrt{2}\frac{d^2y}{dx^2}=x^2+1; \quad xdy=3dx$$

Agar differentsial tenglamadagi noma`lum funktsiya ikki yoki undan ortiq o`zgaruvchilarga bog’liq bo`lsa, bunday tenglama xususiy hosilali differentsial tenglama deyiladi. Masalan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$

Differentsial tenglamaning tartibi deb, shu tenglamada qatnashuvchi hosilaning (differentsialning) eng yuqori tartibiga aytiladi. Masalan:

$$\frac{dz}{dx}=5(z-1); \qquad (u')^3=x^2+2$$

birinchi tartibli tenglamalar,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=5\left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 u}{\partial z^3}\right), \qquad \frac{d^4T}{dt^4}=1-(l^t+2)$$

esa 4-tartibli differentsial tenglamalardir.

Mavzularda faqat oddiy differentsial tenglamalarni ko`rib chiqamiz. n – tartibli oddiy differentsial tenglamaning umumiy ko`rinishi quyidagicha:

$$F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0 \qquad (13.4)$$

bu erda x – erkli o`zgaruvchi; y – noma`lum funktsiya, $y',y'',...,y^{(n)}$ - noma`lum funktsiyaning hosilalari.

(13.4) ni ko`p hollarda quyidagi ko`rinishda yozish mumkin:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',y'',...,y^{(n-1)}) \qquad (13.5)$$

(13.5) ning echimi (yoki integrali) deb uni qanoatlantiruvchi shunday $y=\varphi(x)$ funktsiyaga aytiladiki, $\varphi(x)$ ni (13.5) ga qo`yganda u ayniyatga aylanadi.

Oddiy differentsial tenglama echimining grafigi uning integral egri chizig’i deyiladi.

n-tartibli differentsial tenglamaning echimida n ta erkli o`zgarmas son qatnashadi. Bu o`zgarmas sonlarni o`z ichiga olgan echim umumiy echim deyiladi. Umumiy echimning grafik ko`rinishi integral egri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Umumiy echimda qatnashuvchi erkli o`zgarmaslarning aniq son qiymatlari ma`lum bo`lsa umumiy echimdan xususiy echimni ajratib olish mumkin.

Umumiy echimga kiruvchi erkli o`zgarmaslar masalaning boshlang'ich shartlaridan aniqlanadi. Bunda masala quyidagicha qo`yiladi: (13.4) differentsial tenglamaning shunday echimi $y = \phi(x)$ ni topish kerakki, bu echim erkli o`zgaruvchi x ning berilgan qiymati $x=x_0$ da quyidagi qo`shimcha shartlarni qanoatlantirsin:

$$x = x_0 \ \partial a \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \qquad (13.6)$$

(13.6) shartlar boshlang'ich shartlar deyiladi, $x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}$ - sonlar esa echimning boshlang'ich qiymatlari deyiladi. Boshlang'ich shartlar (13.6) yordamida umumiy echimdan xususiy echimni ajratib olinadi.

3. KOSHI MASALASI

$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)})$ differentsial tenglamaning echimini $x = x_0 \ \partial a \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ boshlang'ich shartlar asosida topishga **Koshi masalasi** deyiladi. Birinchi tartibli differentsial tenglama (n=1) uchun Koshi masalasi quyidagichadir: boshlang'ich shart $x=x_0$ da $y=y_0$ ni qanoatlantiruvchi $y' = f(x, y)$ differentsial tenglamaning echimi topilsin. Birinchi tartibli differentsial uchun Koshi masalasining geometrik ma`nosi shundaki, umumiy echimdan (egri chiziqlar dastasidan) kordinatalari $x=x_0$, $y=y_0$ bo`lgan nuqtadan o`tuvchi integral egri chiziq ajratib olinadi.

Agar $f(x, y)$ biror $R_{|a,b|} = \{| x - x_0 | < a; \ | y - y_0 | < b\}$ sohada uzluksiz bo`lib, shu sohada Lipshits sharti $| f(x, \bar{y}) - f(x, y) | \leq N | \bar{y} + y |$ bajarilsa, u holda Koshi masalasi $y(x_0)=y_0$ shartni bajaruvchi yagona echimga egadir (bunda N – Lipshits doimiysi).

Differentsial tenglamalarning aniq echimini topish juda kamdan – kam xollardagina mumkin bo`ladi. Amaliyotda uchraydigan ko`pdan – ko`p masalalarda aniq echimni topishning iloji bo`lmaydi. Shuning uchun differentsial tenglamalarni echishda taqribiy usullar muhim rol' o`ynaydi. Bu usullar echimlar qay tarzda ifodalanishlariga qarab quyidagi guruhlarga bo`linadilar:

1. Analitik usullar. Bu taqribiy usullarda echim analitik (formula) ko`rinishda chiqadi.

2. Grafik usullar. Bu hollarda echimlar grafik ko`rinishlarda ifodalanadi.
3. Raqamli usullar. Bunda echim jadval ko`rinishida olinadi.

Hisoblash matematikasida mazkur uch guruhga kiruvchi bir qancha usullar ishlab chiqilgan. Bu usullarning bir-birlariga nisbatan muayyan kamchiliklari va ustunliklari mavjud. Muhandislik masalalarini echishda shularni hisobga olgan holda u yoki bu usulni tanlab olish lozim bo`ladi.

Koshi masalasi :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

differentsial tenglamaning [*a*,*b*] kesmada aniqlangan va

$$y(x_0) = y_0$$

boshlang'ich shartlarni kanoatlantiruvchi taqribiy echimi topilsin.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z) \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z) \end{aligned}\right\},$$

$$y(x_0) = y_0, z(x_0) = z_0,$$

taqribiy qiymatlar $y(x_i) \approx y_i, z(x_i) \approx z_i$ lar uchun yaqinlashishlar quyidagi formulalar bo`yicha topiladi.

$$\left\{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \Delta y_i, \Delta y_i = hf(x_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} &= z_i + \Delta z_i, \Delta z_i = hf(x_i, y_i, z_i) \end{aligned}\right\} \quad \text{bunda} \quad i=0,1,2,\ldots, n$$

4. KETMA-KET YAQINLASHISH USULI (PIKAR ALGORITMI)

Pikar algoritmi analitik usullardan bo`lib amaliy masalalarni echishda qo`llaniladi.

Faraz qilaylik,

$$y' = f(x, y) \qquad (13.7)$$

differentsial tenglamaning o`ng tomoni $\{|x - x_0| \leq a; \quad |y - y_0| \leq b\}$ to`rtburchakda uzluksiz va y bo`yicha uzluksiz xususiy hosilaga ega bo`lsin. (13.7) tenglamaning $x=x_0$ da

$$y(x_0) = y_0 \qquad (13.8)$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi echimi topilsin.

(13.7) dan $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y); \quad dy = f(x,y)dx$ bu ifodaning ikala tomonini x_0 dan x gacha integrallasak,

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx$$

Bundan (13.8) hisobga olinsa,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \qquad (13.9)$$

(13.9) da noma`lum funktsiya integral ifodasi ostida qatnashganligi tufayli u *integral tenglama* deb ataladi. (13.9) da *f(x,y)* funktsiyadagi *y* o`rniga uning ma`lum qiymati $y_0$ ni qo`yib birinchi yaqinlashish bo`yicha echimni topamiz:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_0)dx \qquad (13.10)$$

Endi (13.9) dagi *f(x,y)* funktsiyadagi *y* o`rniga uning ma`lum qiymati y_1 ni qo`ysak, ikkinchi yaqinlashish bo`yicha echim $y_2(x)$ ni topamiz:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_1)dx \qquad (13.11)$$

Ushbu jarayonni davom ettirsak,

$$\begin{cases} y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_2)dx \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y_{n-1})dx \end{cases} \qquad (13.12)$$

Shunday qilib, quyidagi funktsiyalar ketma – ketligi $\{y_i(x)\}$ ni tashkil qildik:

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_n(x) \qquad (13.13)$$

(13.13) yaqinlashuvchi yoki o`zoqlashuvchi bo`lishi mumkin. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

Teorema. Agar $(x_0; y_0)$ nuqta atrofida *f(x,y)* funktsiyaning uzluksiz va chegaralangan xususiy hosilasi $f'_y(x,y)$ mavjud bo`lsa, u holda $\{y_i(x)\}$ ketma – ketlik $y' = f(x,y)$ tenglamaning echimi bo`lgan va $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi y(x) funktsiyaga yaqinlashadi.

Demak, differentsial tenglamalarni echishda ushbu teoremaning shartlari bajarilsa (ya`ni (13.13) yaqinlashuvchi bo`lsa), Pikar usulini qo`llash mumkin. Agar (13.13) o`zoqlashuvchi bo`lsa, bu usulning ma`nosi bo`lmaydi.

Misol. Ketma – ket yaqinlashish usuli bilan (Pikar usuli) $y' = \frac{dy}{dx} = x + y$ differentsial tenglamaning x=0 da y=1 shartni qanoatlantiruvchi xususiy echimi topilsin.

Echish. $\frac{dy}{dx} = x + y$ bundan x=0 da y=1 ekanligini hisobga olsak,

$$y = 1 + \int_0^x (x + y)dx$$

(13.10) ga asosan,

$$y_1 = 1 + \int_0^x (x + 1)dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

(13.11) ga asosan,

$$y_2 = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + \frac{x^2}{2})dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6}$$

y_3 va y_4 ni hisoblaymiz:

$$y_3 = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{6})dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$$

$$y_4 = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + x^2 + \frac{x^4}{24})dx = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{120}$$

Berilgan tenglamaning aniq echimi:

$$y = 2e^x - x - 1 = 1 + x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{60} + \frac{x^6}{360} + ...$$

Bundan ko`rinadigan taqribiy echimlar y_3 va y_4 aniq echimdan faqat oxirgi hadlari bilan farq qiladilar.

Takrorlash uchun savollar:

1. Differentsiallash deganda nimani tushunasiz?
2. Differentsial tenglama deb nimaga aytiladi?
3. Oddiy differentsial tenglama va xususiy xosilali differentsial tenglama farqi nimada?
4. Oddiy differentsial tenglamaga misollar keltiring.
5. n-tartibli differentsial tenglamaning echimi qanday bo`ladi?
6. Differentsial tenglamalarni echishning qanday usularini bilasiz?
7. Koshi masalasi deb nimaga aytiladi?
8. Pikar algoritmi nima, uning asosiy formulalarini izohlang?

14-MAVZU. ODDIY DIFFERENTSIAL TENGLAMALARNI TAQRIBIY ECHISH USULLARI. EYLER VA RUNGE-KUTTA USULLARI

Reja:

1. Eyler usuli.
2. Runge-Kutta usuli.
3. Usullarning ishchi algoritmlari.

Tayanch iboralar:

Noma`lum koeffitsientlar, koeffitsientlarni topish, eyler usuli, Runge-Kutta usuli, boshlang’ich shart, funktsiyaning orttirmasi.

1. EYLER USULI

Yuqorida ko`rilgan usullar taqribiy analitik usullar bo`lib, bu hollarda echimlar analitik (formula) ko`rinishlarida olindi. Bu usullar bilan topilgan echimning aniqlik darajasi haqida fikr yuritish birmuncha murakkab bo`ladi. Masalan, ketma – ket differentsiallash usulini qo`llaganda qatorning juda ko`p hadlarini hisoblashga to`g’ri keladi va ko`p hollarda bu qatorning umumiy hadini aniqlab bo`lmaydi. Pikar algoritmini qo`llaganimizda esa, juda ko`p murakab integrallarni hisoblashga to`g’ri keladi va ko`p hollarda integral ostidagi funktsiyalar elementar funktsiyalar orqali ifodalanmaydi. Amaliy masalalarni echishda echimlarni formula ko`rinishida emas, balki jadval ko`rinishida olish qulay bo`ladi. Differenuial tenglamalarni raqamli usullar bilan echganda echimlar jadval ko`rinishida olinadi. Amaliy masalalarni echishda ko`p qo`llaniladigan eyler va Runge – Kutta usullarini ko`rib chiqamiz.

Eyler usuli. Quyidagi

$$y' = f(x, y) \qquad (14.1)$$

birinchi tartibli differentsial tenglamaning [a,b] kesmada boshlang’ich shart $x=x_0$ bo`lgan hol uchun $y=y_0$ ni qanoatlantiruvchi echimi topilishi lozim bo`lsin. [a,b] kesmani x_0 , x_1, x_2 ,…, x_n nuqtalar bilan n ta teng bo`lakchalarga ajratamiz; bunda $x_i = x_0 + ih$ (i= 0,1,2,…n), $h = \frac{b-a}{n}$ - qadam.

(14.1) tenglamani [a,b] kesmaga tegishli bo`lgan biror [x_k, x_{k+1}] kesmada integrallasak,

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'dx = y(x)\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

ya`ni,

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx \qquad (14.2)$$

Bu erda integral ostidagi funktsiyani $x{=}x_k$ nuqtada boshlang'ich o`zgarmas qiymatiga teng deb qabul qilinsa, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y)dx = f(x_k, y_k)\cdot x\Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k)\cdot(x_{k+1} - x_k) = y_k' \cdot h$$

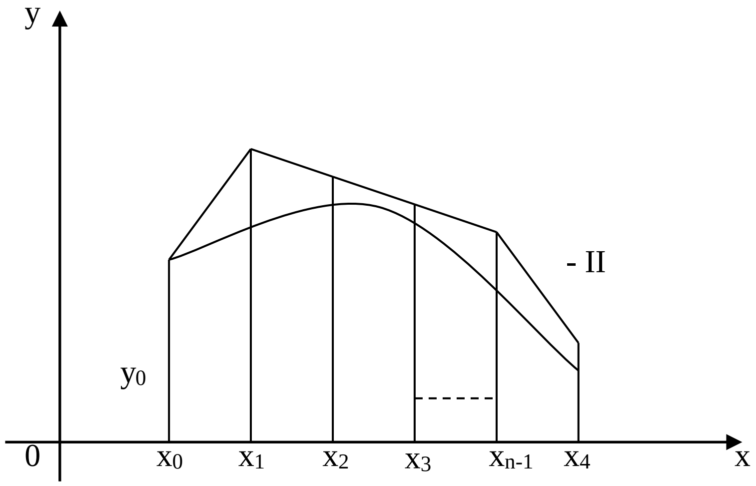
U holda (14.2) dan

$$y_{k+1} = y_k + y_k' h \qquad (14.3)$$

$y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$ ya`ni $y_k' h = \Delta y_k$ deb belgilasak,

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \qquad (14.4)$$

Ushbu jarayonni [a,b] ga tegishli bo`lgan har bir kesmacha uchun takrorlab, (14.1) ning echimini ifodalovchi jadvalini to`zamiz. eyler usulining geometrik ma`nosi shundayki, bunda (14.1) ning echimini ifodalovchi integral egri chiziq siniq (II) chiziqlar bilan almashtiriladi (10 - rasm).



10 – rasm

Quyidagi tizim

$$\begin{cases} y' = f_1(x,y,z) \\ z' = f_2(x,y,z) \end{cases} \qquad (14.5)$$

uchun

$$x{=}x_0 \text{ da } y{=}y_0,\ z{=}z_0 \qquad (14.6)$$

boshlang'ich shart berilgan. (14.5) ning taqribiy echimlari quyidagi formulalar orqali topiladi:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \qquad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i$$

bu erda

$$\Delta y_i = hf_1(x_i, y_i, z_i); \qquad \Delta z_i = hf_2(x_i, y_i, z_i) \qquad\qquad (i = 0,1,2,...)$$

Misol. eyler usuli yordamida $y' = y - \dfrac{2x}{y}$ differentsial tenglamaning [0,1] kesmada olingan va $u(0)=1$ boshlang'ich shartni qanotlantiruvchi *u(x)* echimining taqribiy qiymatlarini h=0,2 qadam bilan toping.

Echish:

$$f(x,y) = y - \frac{2x}{y}; \; a = 0, \; b = 1, \; x_0 = 0, \; y_0 = 1, \; h = 0{,}2$$

Quyidagi hisoblash jadvalini to`zamiz.

1- qator .

i=0, $x_0 = 0, y_0 = 1{,}0000$

$$f(x_0, y_0) = y_0 - \frac{2x_0}{y_0} = 1 - \frac{2*0}{1} = 1{,}0000$$

$$\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0{,}2*1 = 0{,}2000$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, i = 0; y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2000$$

2-qator.

i=1 , $x_1 = 0 + 0{,}2 = 0{,}2; y_1 = 1{,}2000;$

$$f(x_1, y_1) = y_1 - \frac{2x_1}{y_1} = 1{,}2 - \frac{2*0{,}2}{1{,}2} = 0{,}8667$$

$$\Delta y_1 = hf(x_1, y_1) = 0{,}2*0{,}8667 = 0{,}1733$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 1{,}2 + 0{,}1733 = 1{,}3733$$

va xakazo i=2,3,4,5lar uchun hisoblanadi.

i	x_i	y_i	$f(x_i, y_i) = y_i - \frac{2x_i}{y_{i;}}$	$\Delta y_i = hf(x_i, y_i)$
0	0,1	1,0000	1,0000	0,200
1	0,2	1,2000	0,8667	0,1733
2	0,4	1,3733	0,7908	0,1582

3	0,6	1,5315	0,7480	0,1496
4	0,8	1,6811	0,7293	0,1459
5	1,0	1,8270		

2. RUNGE-KUTTA USULI

Runge - Kutta usuli ko`p jihatdan Eyler usuliga o`xshash, ammo aniqlik darajasi eyler usuliga nisbatan yuqori bo`lgan usullardan biridir.

Runge-Kutta usuli bilan amaliy masalalarni echish juda qulay. CHunki, bu usul orqali noma`lum funktsiyaning $x_{i+1}$ dagi qiymatini topish uchun uning $x_i$ dagi qiymati aniq bo`lishi etarlidir. Runge-Kutta usuli uning aniqlash darajasiga ko`ra bir necha turlarga bo`linadi. Shulardan amaliyotda eng ko`p qo`llaniladigani to`rtinchi daraja aniqlikdagi Runge-Kutta usulidir.

Birinchi tartibli $y=f(x,y)$ differentsial tenglama uchun $x=x_i$ ($i=0,1,2,\ldots n$) $y=y_i$ ma`lum bo`lsin. Bu erda y_i boshlang'ich shart ma`nosida bo`lmasligi ham mumkin. Noma`lum funktsiya $y$ ning $x=x_{i+1}$ dagi qiymati $y_{i+1}=y_{i+1}(x)$ ni topish uchun quyidagi ketma-ket hisoblash jarayonini amalga oshirmoq lozim bo`ladi:

$$\left.\begin{aligned} & x_{i+1}=x_i+h, \quad y_{i+1}=y_i+\Delta y_i, \\ & \Delta y_i=\frac{1}{6}[Q_1^{(i)}+2Q_2^{(i)}+2Q_3^{(i)}+Q_4^{(i)}], \end{aligned}\right\} \qquad (14.7)$$

bu erda

$$\begin{aligned} & Q_1^{(i)}=hf(x_i,y_i), \\ & Q_2^{(i)}=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{Q_1^{(i)}}{2}), \\ & Q_3^{(i)}=hf(x_i+\frac{h}{2},y_i+\frac{Q_2^{(i)}}{2}), \\ & Q_4^{(i)}=hf(x_i+h,y_i+Q_3^{(i)}), \end{aligned} \qquad (14.8)$$

$i=0,1,2,\ldots,n-1$, $\quad h=\dfrac{b-a}{n}$ - integrallash qadami.

Tenglamaning echimi qidirilayotgan [a,b] kesma $x_i=x_0+ih$ $\quad$ *(i=0,1,2,…,n)* nuqtalar bilan o`zaro teng n ta bo`lakka bo`lingan. *i* ning ha bir qiymati uchun (14.7) va (14.8) dagi amallarni bajaramiz va noma`lum funktsiya *y* ning qiymatlarini (tenglamaning echimini) quyidagi formuladan topamiz:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i \qquad (i=0,1,2,...,n) \qquad (14.9)$$

Misol: Runge-Kutta usuli bilan $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{5}})$ tenglamaning [1,8; 2,8] kesmada aniqlangan va *u(*1,8*)*=2,6 boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi echimini *h*=0,1 qadam bilan hisoblang.

Echish:

$$f(x,y)=x+\cos(\frac{y}{\sqrt{5}}); x_0 = 1,8; y_0 = 2,6,$$

$$h = 0,1; a = 1,8; b = 2,8; h = \frac{b-a}{n} = 0,1; n = 10,$$

$$i = 0; x_0 = 1,8; y_0 = 2,6,$$

$$Q_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0,1\left\{x_0 + \cos(\frac{y_0}{\sqrt{5}}) = 0,2196\right.,$$

$$Q_2^0 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{Q_1^{(0)}}{2}) = 0,1 * f(1,85;2,7098) = 0,2012,$$

$$Q_3^{(0)} = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{Q_2^{(0)}}{2}) = 0,1 * f(1,85;2,7006) = 0,2205,$$

$$Q_4^{(0)} = hf(x_0 + h, y_0 + Q_3^{(0)}) = 0,1 * f(1,9;2,6099) = 0,2927,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}[Q_1^{(0)} + 2Q_2^{(0)} + Q_4^{(0)}] = 2,0259,$$

$$i = 1; x_1 = 1,9; y_1 = 2,0259; y_2 = 3,0408$$

va hokazo.

Qiymatlar jadvali

i	0	1	2	3	4	5
x_i	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3
y_i	2,6	2,0259	3,0408	3,2519	3,4861	3,4861
I	6	7	8	9	10	
x_i	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	
y_i	3,9260	4,1478	4,3700	4,5971	4,9172	

Takrorlash uchun savollar:

1. Pikar algoritmi va eyler usuli farqini tushuntiring.
2. Eyler usuli ifodasini izohlang.
3. Eyler usulining geometrik ma`nosi.
4. Runge – Kutta usuli yordamida differentsial tenglamalar qanday echiladi?
5. Runge – Kutta usulining asosiy formulalarini ayting?
6. Eyler va Runge – Kutta usullarining asosiy farqi nimada?
7. Usullar ichida qaysi ko`proq aniq echimni beradi?
8. Qaysi usulda hisoblashlar kamroq bajariladi?

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO`YXATI

1. Isroilov M. «Hisoblash metodlari», T., "O`zbekiston", 2003
2. Shoxamidov Sh.Sh. «Amaliy matematika unsurlari», T., "O`zbekiston", 1997
3. Boyzoqov A., Qayumov Sh. «Hisoblash matematikasi asoslari», O`quv qo`llanma. Toshkent 2000.
4. Abduqodirov A.A. «Hisoblash matematikasi va programmalash», Toshkent. "O`qituvchi" 1989.
5. Vorob`eva G.N. i dr. «Praktikum po vichislitel’noy matematike» M. VSh. 1990.
6. Abduhamidov A., Xudoynazarov S. «Hisoblash usullaridan mashqlar va laboratoriya ishlari», T.1995.
7. Siddiqov A. «Sonli usullar va programmalashtirish», O`quv qo`llanma. T.2001.
8. Internet ma`lumotlarini olish mumkin bo`lgan saytlar:

   www.exponenta.ru

   www.lochelp.ru

   www.math.msu.su

   www.colibri.ru