ӨЗБЕКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ЖОҚАРЫ ҲӘМ ОРТА АРНАЎЛЫ БИЛИМЛЕНДИРИЎ МИНИСТРЛИГИ

ҚАРАҚАЛПАҚ МӘМЛЕКЕТЛИК УНИВЕРСИТЕТИ

“ӘМЕЛИЙ МАТЕМАТИКА ҲӘМ ИНФОРМАТИКА” КАФЕДРАСЫ

ЭКОНОМИКАЛЫҚ ИНФОРМАТИКА

пәнинен

Л Е К Ц И Я Л А Р   Т Е К С Т И

(“Әмелий математика ҳәм информатика” бакалавр бағдары 3-курс студентлери ушын)

Дүзиўши: **асс. Тлеуов Қ**

асс. Р.Шыхыев

Нөкис-2007

Кирисиў

Соңғы ўақытлары әмелий математикасында, ноқатлардың берилген көплигинде (областында), көп сандағы белгисизлерден ғәрезли болған базы бир функцияның ең үлкен (максимум) ямаса ең киши (минимум) мәнисин, яғный экстремум ноқатын табыў талап етилетуғын, оптимизациялаў мәселелерин шешиўге үлкен дыққат аўдарылып киятыр ("экстремум" атамасы латынның "extremum" деген сөзинен алынған болып, бизиңше "шетки", "ең соңғы" деген мәнислерди аңлатады). Бул мәселелер, көбинесе экономикалық изертлеўлерде, жобалаў ҳәм өндиристи шөлкемлестириў практикасында жийи-жийи келип шығатуғын, математикалық программаластырыў мәселелери деп аталатуғын мәселелердиң топарына жатады.

Ҳәзирги ўақытта математикалық программаластырыў әмелий математикасының оғада тез пәт пенен раўажланып баратырған тараўларының бири болады. Өйткени, илимий-техникалық алға илгерлеўдиң жетискенликлерин ҳалық хожалығына табыслы енгизиў ҳәр қыйлы қурамалы әмелий мәселелерди шешиў ушын математикалық усыллардан ҳәм есаплаў техникасының бай мүмкиншиликлеринен пайдаланыўға тығыз байланыслы. Сонлықтан университеттиң "Әмелий математика ҳәм информатика", "Математика", "Экономика" қәнигеликлериниң студентлериниң ҳәм магистрлериниң қурамалы әмелий мәселелерди шешиўдеги математикалық усыллардың ҳәм ҳәзирги заман есаплаў техникасының мүмкиншиликлерин, олардан пайдаланыўда келип шығатуғын ҳәр қыйлы машқалаларды билиўлери зәрүрли болады.

Математикалық программаластырыўдың усылларын ислеп шығыўға ҳәм жетилистириўге америкалы илимпазлар да үлкен үлес қосты. Сызықлы программаластырыўдың мәселелерин шешиўдиң тийкарғы усылы – симплекс усылы 1949-жылы Дж Данциг тәрепинен усынылды. Сызықлы ҳәм сызықлы емес программаластырыў усылларын ислеп шығыўға ҳәм буннан былай раўажландырыўға Форд, Фалкерсон, Кун, Лемке, Гасс, Чернес, Бил ҳәм басқа америкалы илимпазлар салмақлы үлеслерин қосты.

Ҳәзирги ўақытлары математикалық программаластырыўдың усыллары, шешимлерин бул усыллар менен табыў мүмкин болған, илимий-техникалық ҳәм экономикалық мәселелерди анықлаў, сондай-ақ, жеке компьютерде иске асырыў ушын қолайлы алгоритмлерин ислеп шығыў бағдарларында раўажландырылып атыр.

1-§. Экономика-математикалык моделлестириу хэм онын озгешеликлери.

Математикалық программаластырыў экстремаллық мәселелерди изертлеў менен ҳәм оларды шешиў усылларын ислеп шығыў менен шуғылланатуғын математикалық пән болады.

Улыўма турде экстремаллық мәселениң математикалық қойылыўы төмендегише болады:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1,n}) \qquad (1)$$

шәртлерин қанаатландыратуғын $x_1, x_2, ..., x_n$ белгисизлериниң мәнислери арасынан n аргументли

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (2)$$

функциясына ең үлкен (максимум) ямаса ең киши (минимум) мәнис беретуғын манислерин табыў талап етиледи. Бунда f ҳәм g_i – берилген функциялар, ал b_i – берилген базы бир ҳақықый санлар, f – мәселениң мәқсет функциясы деп аталады.

Жоқарыдағы экстремаллық мәселеде корсетилген f ҳәм g_i – функцияларинин қәсийетлерине байланыслы, математикалық программаластырыў, оз гезегинде бир неше бөлимлерге (тараўларға) болинеди. Бул тараўлардың ҳәр бири белгили класстағы экстремаллық мәселелерди изертлеў менен ҳәм оларды шешиўсыларын ислеп шығыў менен шуғылланады.

Бәриненде бурын, математикалық программаластырыў мәселелери сызықлы ҳәм сызықлы емес программаластырыў мәселелери болып, үлкен еки тапарға болинеды. Егерде f ҳәм g_i – сызықлы функциялар болса, онда сайкес экстремаллық мәселе сызықлы программаластырыў мәселеси болады. Ал егерде, бул функциялардың ең кеминде биреўи ямаса екеўи де сызықлы емес функциялар болса, онда экстремаллық мәселе сызықлы емес программаластырыў мәселеси деп аталады.Математикалық программаластырыўдың әдеўир толықрақ үйренилген тараўы сызықлы программаластырыў болими болады. Сызықлы программаластырыўдың коп санлы натийжели алгоритмлери ҳәм бағдарламалары исленилип шығылған.

Сызықлы емес программаластырыўдың мәселелериниң ишинде әдеўир тереңрек изертленгени ойыс программаластырыў мәселелери болады. Бундай мәселелерди шешиўдың нәтийжесинде доңес (ойыс) туйық копликте ойыс функцияның минимум (ең киши) ямаса доңес функцияның максимум (ең үлкен) мәниси анықланады.

Өз гезегинде, доңес программаластырыў мәселелериниң ишинде квадратлық программаластырыў мәселелери әдеўир толық изертленген. Бундай маселелерди шешиўдиң натийжесинде квадратлық функцияның максимумын (ямяса минимумын) табыў талап етиледи. Бунда мәселедеги ғәрезсиз өзгериўшилер сызықлы теңсизликлердиң ямаса сызықлы теңлемелердиң системаларын, сондай ақ сызықлы теңсизликлерден ҳәм сызықлы теңлемелерден дүзилген қурамалы (қоспалы) системаны қанаатландырады.

Математикалық программаластырыўдың жане бир топар маселелерин пүтин санлы, параметрли ҳәм бөлшек-сызықлы программаластырыў маселелери дүзеди.

Пүтин санлы программаластырыў мәселелеринде ғарезсиз өзгериўшилер (аргументлер) тек пүтин санлы мәнислерди ғана қабыл етеди.

Параметрли программаластырыў маселелеринде мәқсет функциясы ямаса ғарезсиз өзгериўшилердиң мүмкин болған өзгериў областын анықлайтуғын функциялар, сондай ақ, бул функциялардың екеўи де базы бир параметрлерден ғарезли болады.

Болшек-сызықлы программаластырыў мәселелеринде мақсет функциясы еки сызықлы функцияның қатнасы көринисинде бериледи, ал өзгериўшилердиң мүмкин болған өзгериў областын анықлайтуғын функциялар, сызықлы функциялар болады.

Стохостикалық ҳәм динамикалық программаластырыў мәселелери өз алдына сәйкес мәселердиң топарын дүзеди.

Егерде мәселениң мәқсет функциясында ямаса өзгериўшилердиң мүмкин болған өзгериў областын анықлайтуғын функцияларда **тосыннанлық шамалар бар болса,** онда бундай мәселе стохостикалық программаластырыў мәселесине жатады.

Шешимин табыў коп этаплы усыл менен орынланатуғын мәселе динимикалық программаластырыў маселелериниң топарына киреди.

2-§ Сызыклы программаластырыу маселесинин экономико-математикалык моделлери

Математикалық программаластырыў мәселелерин шешиў төменги үш этаптан турады:

1) мәселениң математикалық моделин жасаў;

2) математикалық усыллардың биреўин қолланып, мәселениң оптималь шешимин табыў (“оптималь” атамасы латынның “optimus”деген сөзинен алынған болып, бизиңше “ең жақсы”, “ең қолайлы” деген мәнислерди аңлатады);

3) мәселени шешиўден алынған нәтийжелерди ҳалық хожалығына енгизиў.

Илимий-техникалық ямаса экономикалық мәселениң математикалық модели деп, оның тийкарғы шәртлерин ҳәм мақсетин математикалық формулалар жәрдеминде жазып көрсетиўге айтылады. Басқаша айтқанда, бундай модельде мәселениң тийкарғы өзгешеликлери ҳәм оның шешимине тиккелей тәсир жасайтуғын шеклеўши (шегаралаўшы) шәртлер есапқа алыныўы керек. Әмелий мәселениң математикалық модельин жасаў өз гезегинде мына этаплардан турады:

1) мәселениң өзгериўшилерин (мәнислери анықланатуғын белгисизлерин) сайлап алыў;

2) шеклеўши шәртлердиң системасын жасаў;

3) мақсет функциясын, яғный экстремум мәниси изленетуғын функцияны анықлаў.

Қойылған әмелий мәселениң мәнисин толық сыпатлайтуғын $x_1, x_2, ..., x_n$ шамалары, оның өзгериўшилери деп аталады. Оларды әдетте $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ вектор көринисинде жазады. Мәселениң шеклеўши шәртлериниң системасы, оның өзгериўшилери қанаатландырыўы керек болған теңлемелер ҳәм теңсизликлердиң системасынан ибарат болады. Мәселениң мақсет функциясы деп, мәселениң өзгериўшилериниң функциясы болған, оның шәртлериниң орынланыў сапасын сыпатлайтуғын ҳәм экстремум мәнисин табыў талап етилетуғын функцияға айтылады.

Математикалық программаластырыў экстремаллық мәселелерди изертлеў ҳәм оларды шешиў усылларын ислеп шығыў менен шуғылланатуғын математикалық пән болады.

Экстремаллық мәселениң улыўма турде математикалық қойылыўы төмендегише болады:

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \quad (i = \overline{1,n}) \tag{1}$$

шәртлерин қанаатландыратуғын $x_1, x_2, ..., x_n$ белгисизлериниң мәнислериниң арасынан n аргументли

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{2}$$

функциясына ең үлкен (максимум) ямаса ең киши (минимум) мәнис беретуғын мәнислерин табыў талап етиледи. Бунда f ҳәм $g_i -$берилген функциялар, ал $b_i -$берил- ген базы бир ҳақықый санлар, $f -$мәселениң мақсет функциясы деп аталады.

Жоқарыдағы экстремаллық мәселеде көрсетилген f ҳәм $g_i -$функцияларының қәсийетлерине байланыслы, математикалық программаластырыў, өз гезегинде бир неше бөлимлерге (тараўларға) бөлинеди. Бул тараўлардың ҳәр бири белгили класстағы экстремаллық мәселелерди изертлеў менен ҳәм оларды шешиў усыларын ислеп шығыў менен шуғылланады.

Бәриненде бурын, математикалық программаластырыў мәселелери **сызықлы** ҳәм **сызықлы емес программаластырыў** мәселелери болып, үлкен еки топарға бөлинеди. Егерде f ҳәм $g_i -$сызықлы функциялар болса, онда сәйкес экстремаллық мәселе **сызықлы программаластырыў** мәселеси болады. Ал егерде, бул функциялардың ең кеминде биреўи ямаса екеўи де **сызықлы емес функциялар** болса, онда экстремаллық мәселе **сызықлы емес программаластырыў мәселеси** деп аталады. Математикалық программаластырыўдың әдеўир толығырақ үйренилген тараўы **сызықлы программаластырыў бөлими** болады. Сызықлы программаластырыўдың көп санлы нәтийжели алгоритмлери ҳәм бағдарламалары исленип шығылған.

Математикалық программаластырыў XX-әсирдиң 30-жылларында пайда болды. Венгриялы математик Б. Эгервари 1931-жылы сызықлы программаластырыў мәселесин математикалық жақтан қәлиплестирди ҳәм оны шешиўдиң соңынан "венгер" усылы деп аталған усылын ислеп шықты. Сызықлы программаластырыў мәселелерин толық изертлеў ҳәм оларды шешиўдиң улыўмалық усылларын ислеп шығыў 1939-жылы рус математиги Л. В. Канторовичтиң мийнетлеринде басланды. Ол усы жылы сызықлы программаластырыў мәселелерин шешиўдиң шешиўши көбейтиўшилер усылын, ал 1949-жылы М. К. Гавурин менен бирликте транспорт мәселелерин шешиўдиң потенциаллар усылын ислеп шықты. Л. В. Канторович, В.С. Немчинов, В.В. Новожилов, А.Л. Лурье, А, Брудно, А.Г. Аганбегян, Д.Б. Юдин, Е.Г. Гольштейн ҳ.т.б математиклердиң ҳәм экономистлердиң мийнетлеринде сызықлы ҳәм сызықлы емес программаластырыўдың математикалық теориясы ҳәм олардың усылларының ҳәр қыйлы илимий-техникалық ҳәм экономикалық мәселелерди изертлеўге қолланыўлары буннан былай раўажландырылды.

3-§ Сызыклы програмаластырыу маселесинин турлери хэм геометриялык маниси

Шегаралаўшы шәртлериниң системасы теңсизликлерден ибарат болған мына сызықлы программаластырыў мәселесин қараймыз:

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{3}$$

Жоқарыда атап өтилгениндей (3-§ ке қараң), (2) ҳәм (3) шегаралық шәртлерин қанаатландыратуғын қәлеген $X = (x_1, x_2, ... x_n)'$ векторы (1)-(3) сызықлы программаластырыў мәселесиниң мүмкин болған шешими деп аталады. Егерде мәселениң шеклеўлериниң системасы ең кеминде бир шешимге ийе болса, онда ол бирликли, ал кери жағдайда бирликли емес система деп аталады.

Дәслеп берилген мәселениң шеклеўлериниң системасы бирликли деп уйғарып, n=2 болған дара жағдайын қараймыз:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min, \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \le b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right) \qquad (5)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \qquad (6)$$

Бундағы (5) шеклеўлер системасының хәр бир теңсизлиги геометриялық жақтан, шегарасы $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$ туўрысы болған, ал белгисизлериниң терис болмаў (6) шәртлери $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ туўрылары менен шегараланған ярым тегисликлерди анықлайды. Уйғарымыз бойынша (5),(6) шеклеўлериниң системасы бирликли. Сонлықтан бул ярым тегисликлер дөңес көпликлер болғанлықтан, өз-ара кесилисип дөңес көпликти пайда етеди (6-§ ке қараң). Соңғы көпликтиң хәр бир ноқатының координаталары (5),(6) шеклеўлерин қанаатландырады, яғный (4)-(6) мәселесиниң мүмкин болған шешимлериниң көплигин дүзеди. Усы себепли бул көплик шешимлер көпмүйешлиги деп аталады. Ол бир ноқат, кесинди, нур, көпмүйешлик, шегараланбаған көпмүйешлик болыўы мүмкин. Мәселен, $m = 4$ болғанда (4)-(6) мәселесиниң мүмкин болған шешимлериниң көплиги 6-сүўреттегидей көпмүйешлик болыўы мүмкин.

Егерде (1)-(3) мәселесинде $n = 3$ болса, онда оның (2) шеклеўлер системасының хәр бир теңсизлиги геометриялық жақтан, шегарасы $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$ тегислиги, ал белгисизлериниң терис болмаў шәртлери шегаралары $x_j = 0 \ \left(j = 1,2,3\right)$ тегисликлери болған үш мүйешли R^3 кеңислигиниң ярым кеңисликлерин аңлатады. Олардың дөңес көпликлерди дүзетуғынлығы мәлим. Егерде шеклеўлер системасы бирликли болса, онда бул ярым кеңисликлер кесилисип, R^3 кеңислигинде дөңес көпликти дүзеди. Бул дөңес көплик берилген сызықлы программаластырыў мәселесиниң мүмкин болған шешимлериниң көпжақлысы деп аталады. Ол бир ноқат, кесинди, нур, көпмүйешлик, көпжақлы, шегараланбаған көпжақлы область болыўы мүмкин.

Мейли, (2)-(3) шеклеўлер системасында $n > 3$ болсын. Бул жағдайда (2) теңсизликлериниң хәр бири n өлшемли кеңисликтиң, шегарасы $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$ гипертегисликлери болған, ярым кеңисликлерин, ал (3) терис болмаў шәртлери – шегарасы $x_j = 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right)$ гипертегисликлери болған, ярым кеңисликлерин анықлайды (координаталары $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i=\overline{1,m})$ теңлемелерин қанаатландыратуғын $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ ноқатларының көплиги гипертегислик деп аталады. “Гипер” қосымтасы гректиң “huper” деген сөзинен алынған болып, бизиңше “артық”, “тысқары” мәнислерин аңлатады).

Егерде (1)-(3) мәселесиниң шеклеўлер системасы бирликли болса, онда ол R^3 кеңислиги жағдайындағы сыяқлы, шешимлер көпжақлысы деп аталатуғын – R^n кеңислигиниң улыўма үлесин пайда етеди. Өйткени, оның хәр бир ноқатының координаталары (1)-(3) сызықлы программаластырыў мәселесиниң мүмкин болған шешими болады.

Солай етип, (1)-(3) сызықлы программаластырыў мәселесиниң геометриялық мәниси шешимлер көпжақлысының (1) сызықлы функциясына минимум мәнис беретуғын ноқатын табыўдан ибарат болады. Соның менен бирге, бул көпжақлының барлық ноқатлары (1)-(3) мәселесиниң мүмкин болған шешимлери болады.

4-§. Сызыклы программаластырыу маселесин шешиудин графикалык усылы

Бул усыл мәселениң мүмкин болған шешимлериниң областын графиклик сүўретлеў мүмкиншилигине хәм олардың арасынан оптималь шешимин табыўға тийкарланған. Ол тийкарынан алғанда еки өлшемли R^2 кеңислигинде (тегисликте) берилген сызықлы программаластырыў мәселелерин шешиў ушын қолланылады. Себеби кеңисликтиң өлшеми $n \ge 3$ болғанда ярым кеңисликлердиң кесилисиўлеринен пайда болатуғын шешимлер көпжақлысын жасаў әдеўир қыйынласады.

Мейли, еки өлшемли кеңисликте төмендеги сызықлы программаластырыў мәселеси берилген болсын:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ &\dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0 \tag{3}$$

Дәслеп (2), (3) теңсизликлериниң системасы бирликли ҳәм оған сәйкес шешимлер көпмүйешлиги M шегараланған деп уйғарамыз. Сонда берилген (1)-(3) сызықлы программаластырыў мәселеси, мақсет функциясы максимум мәнисине ийе болатуғын, шешимлер көпмүйешлигиниң ноқатын табыўды аңлатады (7-параграфқа қараң). Егерде шешимлер көпмүйешлиги M бос көплик болмаса ҳәм бул көпликте мақсет функциясы жоқарыдан шегараланған болса, онда оның бундай ноқаты бар болады. Бул шәртлер орынланғанда M көпмүйешлигиниң төбелериниң биреўинде мақсет функциясы өзиниң максимум мәнисине ериседи. Шешимлер көпмүйешлигиниң бундай ноқатын анықлаў ушын **дәреже сызықлары** ҳәм **таяныш туўрылары пайдаланылады**.

Мақсет функциясы үстинде турақлы мәнислерди қабыл ететуғын туўры, бул функцияның **дәреже сызығы** деп аталады. $Z(X)$ тың дәреже сызығының теңлемеси улыўма жағдайда, $c_1x_1 + c_2x_2 = l \ (l = const)$ көринисинде жазылады ҳәм барлық дәреже сызықлары бир-бирине параллель болады.

Мәселениң мүмкин болған шешимлериниң областы бир тәрепинде жататуғын ҳәм бул область пенен ең кеминде бир улыўма ноқатқа ийе болатуғын **дәреже сызығы**, оның **таяныш туўрысы** деп аталады (6-параграфқа қараң). Қәлеген мәселениң мүмкин болған шешимлериниң областы екиден артық болмаған таяныш туўрыларына ийе болады. Мине усы таяныш туўрыларының биреўиниң үстинде мәселениң оптималь шешими жатыўы мүмкин.

Функцияның градиент-векторының бағыты оның ең тез өсиў, ал оған қарама-қарсы бағыт – ең тез кемиў бағыты болатуғынлығы белгили. Ал (1) сызықлы функциясының градиенти $gradZ(X) = (c_1, c_2) = \overline{N}$ болады. Солай етип, R^2 кеңислигиниң ҳәр бир ноқатында (1) сызықлы функциясының градиенти турақлы болады ҳәм бул функцияның белгисизлериниң коэффициентлеринен жасалған вектор менен сәйкес келеди. Сондай ақ, сызықлы функцияның градиенти оның ҳәр бир дәреже сызығына перпендикуляр болады.

Егерде дәреже сызығы $\overline{N} = (c_1, c_2)$ градиент векторының бағытында өзине-өзи параллель етип жылжытылса, онда мәселениң мақсет функциясының мәнислери барған сайын өсип барады, ал градиент векторының бағытына қарама-қарсы бағытқа жылжытылса, мақсет функциясының мәнислери барған сайын кемейип барады. Сонлықтан, берилген шеклеўлер системасында мақсет функциясының минимум мәнисин табыў, оның максимум мәнисин табыўдан тек $c_1x_1 + c_2x_2 = l \ (l = const)$ дәреже сызығын $\overline{N} = (c_1, c_2)$ векторының бағытында емес, ал оған қарама-қарсы бағытта жылыстырыў менен ғана парық қылады.

5-§. Графикалык усыл жардеминде маселелердин экономикалык анализи

Солай етип, (1)-(3) сызықлы программаластырыў мәселесин графиклик усыл менен шешиў алгоритми мыналардан ибарат болады:

1. Мәселениң мүмкин болған шешимлериниң областы жасалады.
2. Басы O(0,0) ноқатында болған $\overline{N} = (c_1, c_2)$ векторы жасалады.
3. $\overline{N} = (c_1, c_2)$ векторына перпендикуляр етип, $Z(X)$ функциясының дәреже сызықларының биреўи жүргизиледи. Мәселен, $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ теңлемесине сәйкес келетуғын дәреже сызығы жасалады.
4. Дәреже сызығы таяныш туўрысы аўҳалына жеткенше өзине-өзи параллель етип

жылыстырылады. Бул таяныш туўрысының үстинде $Z(X)$ мақсет функциясы өзиниң максимум ямаса минимум мәнисине ериседи.

Мүмкин болған шешимлериниң областының ҳәм $Z(X)$ мақсет функциясының көринисине байланыслы, (1)-(3) мәселеси бир шешимге (9а-сүўрет), шексиз көп шешимге (9б-сүўрет) ийе болыўы ямаса оптималь шешимге улыўма ийе болмаўы да мүмкин (9в-сүўрет).

Бунда 9а-сүўретинде дәреже сызығы шешимлер көпмүйешлигине еки рет таяныш туўры болады. Мақсет функциясы В ноқатында минимум, ал Д ноқатында максимум мәнисине ериседи. Келеси 9б-сүўретинде мақсет функциясы шешимлер көпмүйешлигиниң бир тәрепи менен сәйкес келетуғын таяныш туўрысының үстинде минимум мәниске ийе болады. Ал 9в-сүўретинде мүмкин болған шешимлериниң областы мақсет функциясының өсиў бағытында, яғный жоқарыдан шегараланбаған.

1-мысал. Төмендеги сызықлы программаластырыў мәселесин графикалик усыл менен шешиң:

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max ,$$

$$x_1 - x_2 + 2 \geq 0 , \qquad (1)$$

$$3x_1 - 2x_2 - 6 \leq 0 , \qquad (2)$$

$$2x_1 + x_2 - 2 \geq 0 , \qquad (3)$$

$$x_2 \leq 3 , \qquad (4)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Шешилиўи. 1) Мәселениң мүмкин болған шешимлериниң областын жасаймыз. Туўрымүйешли декарт координаталар системасында (1) шеклеўине сәйкес келетуғын $x_1 - x_2 + 2 = 0$ (L_1) туўрысын жасаймыз (10-сүўрет). Бул туўрының координаталар тегислигин бөлиўинен пайда болған еки ярым тегисликтиң қайсысы (1) теңсизлигиниң шешимлериниң областы болатуғынлығын анықлаймыз. Буның ушын туўрының үстинде жатпайтуғын қандай да бир ноқаттың координаталарын (1) теңсизлигине апарып қойыў жеткиликли. L_1 туўрысы координаталар басы арқалы өтпейтуғынлықтан, O(0,0) ноқатының координаталарын (1) теңсизлигиниң апарып қоямыз: $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \geq 0$. Нәтийжеде қатаң $2 > 0$ теңсизлигине ийе боламыз. Демек, O(0,0) ноқаты (1) теңсизлигиниң шешимлериниң ярым тегислигинде жатады. Солай етип, L_1 туўрысының ушларындағы стрелкалар O(0,0) ноқаты жайласқан ярым тегисликке қарай бағдарланыўы керек. Тап усы сыяқлы $3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$ (L_2), $2x_1 + x_2 - 2 = 0$ (L_3), $x_2 = 0$ (L_4) туўрыларын ҳәм (2), (3), (4) шеклеўлериниң шешимлериниң областларын жасаймыз. Белгисизлердиң терис болмаў шәртлерин есапқа алып, (1)-(4) теңсизликлериниң шешимлериниң ярым тегисликлериниң улыўма үлесин табамыз. Усындай жол менен келип шыққан, берилген мәселениң мүмкин болған шешимлерининң областы сүўретте штрихланып көрсетилген.

2) $\overline{N} = (c_1, c_2)$ градиент векторын ҳәм дәреже сызықларының биреўин, мәселен $3x_1 + 2x_2 = 0$ $(l = 0)$ дәреже сызығын жасаймыз. Мақсет функциясының максимумын табыў мәселеси шешилип атырғанлықтан, бул дәреже сызығын градиент векторының бағытында өзине өзин параллель етип, таяныш туўрысына айланғанша жайластырамыз. Бул туўры (2) ҳәм (4) теңсизликлерине сәйкес келетуғын ҳәм мүмкин болған шешимлердиң областын шегаралаўшы туўрылардың X^* кесилисиў ноқаты арқалы өтеди. $X^* = L_2 \cap L_4$ ноқатының координаталарын анықлаймыз. Буның ушын

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

системасын шешип, $x_1^* = 4,\ x_2^* = 3$ мәнислерине ийе боламыз. Сонлықтан $X^* = (4,\ 3)$ ноқаты келип шығады. Бул ноқатта $Z(X^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18$, яғный $\max Z(X) = 18$ болады.

2-мысал. Берилген сызықлы программаластырыў мәселесин графиклик усыл менен шешиң:

$$Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \min$$

$$4x_1 - x_2 \geq 0, \qquad (5)$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6, \quad (6)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 16, \quad (7)$$
$$x_1 \quad\quad \leq 4, \quad (8)$$
$$x_1 - x_2 \leq 0, \quad (9)$$

Шешилиўи. Мүмкин болған шешимлериниң областын, градиент векторы $\overline{N} = (4,2)$ векторын ҳәм бул область пенен улыўма ноқатларға ийе болған, дәреже сызықларының биреўин жасаймыз (11-сүўрет). Мақсет функцияның минимумын табыў мәселеси шешилип атырғанлықтан, дәреже сызығын $\overline{N} = (4,2)$ векторының бағытына қарама-қарсы бағытта жылыстырамыз. Басқаша айтқанда, дәреже сызығы L_2 туўрысына қарай жылыстырылады. Бирақта $\overline{N} = (4,2)$ градиент векторы менен $Z_1(X) = 2x_1 + x_2 - 6$ функциясының градиенти $\overline{N} = (2,1)$ өз-ара паралель болады. Өйткени олардың координаталары пропорциональ $(4:2 = 2:1)$. Демек, мүмкин болған шешимлериниң областының таяныш туўрысы, бул областты шегаралаўшы ҳәм оның еки төбеси арқалы өтетуғын L_2 туўрысы менен сәйкес келеди. Сонлықтан берилген мәселе $[x_1^*, x_2^*]$ кесиндисиниң ноқатлары болған, шексиз көп оптималь шешимлерге ийе болады. Бул $X_1^* = L_2 \cap L_5$, $X_2^* = L_1 \cap L_2$ ноқатларының координаталарын анықлаў ушын теңлемелердиң мына еки системасын шешемиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, & (L_2) \\ x_1 - x_2 = 0 & (L_5) \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, & (L_1) \\ 2x_1 + x_2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$3x_1 = 6, \qquad 6x_1 = 6,$$
$$x_1^* = 2,\ x_2^* = 2, \qquad x_1^* = 1,\ x_2^* = 4$$
$$X_1^* = (2;2); \qquad X_2^* = (1;4).$$

Сонда $Z(X_1^*) = Z(X_2^*) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12$ болады. Сонлықтан $\min Z(X) = 12$, $X^* = \lambda X_1^* + (1-\lambda)X_2^*$, $0 \leq \lambda \leq 1$ шешимине ийе боламыз.

6-7-§. Сызыклы программаластырыу маселесин шешиудин Симплекс усылы

Егерде мәселениң шәртлери ҳәм дәслепки берилген мағлыўматлары симплекс-кесте деп аталатуғын арнаўлы кестеге жазылса, онда оның таяныш шешимин оптималлыққа тексериў ҳәм буннан соңғы есаплаў жумысларын орынлаў әдеўир жеңиллеседи (1-кесте).

Кестениң Б бағанасына таяныш шешимниң базисине кирген векторлар, ал $C_Б$ бағанасына, берилген базистиң векторлары қандай индекслерге ийе болса, мақсет функциясының белгисизлеринен тап сондай индекслерге ийе болған коэффициентлери жазылады. P_0 бағанасына басланғыш таяныш шешиминиң оң дүзиўшилери (шеклеўлериниң салтаң ағзалары) жазылады: Усы бағанаға есаплаўларды орынлаўдың нәтийжесинде келип шыққан, мәселениң оптималь шешиминиң оң дүзиўшилери де жазылады. Ал P_j векторларының бағаналары бул векторларды базис векторлары бойынша жиклеўдиң коэффициентлерин аңлатады.

1-кесте

i	Б	$C_Б$	P_0	c_1	c_2	$\dots$	c_r	$\dots$	c_m	c_{m+1}	$\dots$	c_k	$\dots$	c_n
				P_1	P_2	$\dots$	P_r	$\dots$	P_m	P_{m+1}	$\dots$	P_k	$\dots$	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	$\dots$	0	$\dots$	0	a_{1m+1}	$\dots$	a_{1k}	$\dots$	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	$\dots$	0	$\dots$	0	a_{2m+1}	$\dots$	a_{2n}	$\dots$	a_{2n}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
r	P_r	c_r	b_r	0	0	$\dots$	1	$\dots$	0	a_{rm+1}	$\dots$	a_{rn}	$\dots$	a_{rn}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mk}	$\dots$	a_{mn}
$m+1$			z_0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	δ_{m+1}	$\dots$	δ_k	$\dots$	δ_n

Кестениң дәслепки m қатары мәселениң дәслепки берилген мағлыўматлары менен анықланады, ал $(m+1)$ қатарындағы мағлыўматлар есаплаўларды орынлаў арқалы табылады. Бул соңғы қатарына P_0 векторының бағанасына берилген таяныш шешимине сәйкес мақсет функциясының мәниси Z_0, ал P_j векторының бағанасына $\delta_j = Z_j - c_j$ баҳасының мәниси жазылады. Бундағы Z_j мәниси P_j $\left(j=\overline{1,m}\right)$ векторының $C_Б = (c_1, c_2, ..., c_m)$ векторына скаляр көбеймеси есабында анықланады ((15) формуласына қараң):

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$$

Ал Z_0 мәниси P_0 векторының $C_Б$ векторына скаляр көбеймесине тең

$$Z_j = Z\left(X^{(0)}\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$$

Бул 1-симплекс-кестени толтырып болғаннан соң, басланғыш таяныш шешимди оптималлыққа тексереди. Буның ушын кестениң $(m+1)$-қатарын көзден өткереди. Усының нәтийжесинде төмендеги үш жағдайдың биреўи орын алыўы мүмкин:

1) $j = m+1,\ m+2, ..., n$ мәнислери ушын $\delta_j \geq 0$ ($j=\overline{1,m}$ болғанда $\delta_j = 0$ ҳәм $Z_j = c_j$) болады. Сонлықтан бул жағдайда барлық $j=\overline{1,n}$ ушын $\delta_j \geq 0$ теңсизлиги орынланады;

2) базы бир j индекси ушын $\delta_j < 0$ ҳәм бул индекске сәйкес келетуғын барлық $a_{ij} \leq 0$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ болады;

3) базы бир j индекслери ушын $\delta_j < 0$ ҳәм бундай ҳәр бир j ушын a_{ij} санларының ең кеминде биреўи оң сан болады.

Биринши жағдайда оптималлық шәрти бойынша басланғыш таяныш шешими оптималь шешим болады. Екинши жағдайда мүмкин болған шешимлер көплигинде мақсет функциясы жоқарыдан шегараланбаған. Ал, үшинши жағдайда, мәселениң мақсет функциясының мәниси өскендей етип, басланғыш таяныш шешиминен жаңа таяныш шешимине өтиўге болады. Мәселениң бир таяныш шешиминен оның екинши таяныш шешимине өтиў, дәслепки базистен қандай да бир векторды шығарыў ҳәм оның орнына базиске жаңа векторды киргизиў арқалы иске асырылады. Базиске киргизилетуғын вектор есабында $\delta_j < 0$ шәртин қанаатландыратуғын қәлеген P_j векторын алыўға болады. Мәселен, егерде $\delta_k < 0$ болса, онда базиске P_k векторы киргизиледи.

Базистен шығарылатуғын векторды анықлаў ушын барлық $a_{ik} > 0$ санлары ушын $\min\limits_i \left(\dfrac{b_i}{a_{ik}}\right)$ шамасын табады. Мейли, бул минимумға $i = r$ болғанда ерисилген болсын. Сонда базистен P_r векторы шығарылады, ал a_{rk} санын **шешиўши элемент** деп атайды. Шешиўши элемент кесилиспесинде жайласқан бағана ҳәм қатар **бағдарлаўшы бағана** ҳәм **бағдарлаўшы қатар** деп аталады.

Бағдарлаўшы бағана ҳәм бағдарлаўшы қатар анықланғаннан соң, жаңа таяныш шешими ҳәм P_j векторының бул шешимге сәйкес жаңа базис векторлары бойынша жиклениўиниң коэффициентлери табылады. Буны Жордан-Гаусс усылы менен аңсат иске асырыўға болады. Бул жағдайда, жаңа таяныш шешиминиң оң дүзиўшилери мына формулалар менен есапланады:

$$b_i' = \begin{cases} b_i - (b_r / a_{rk}) a_{ik}, & \text{егер } i \neq r \text{ болса,} \\ b_r / a_{rk}, & \text{егер } i = r \text{ болса} \end{cases} \tag{2}$$

Ал P_j векторларының жаңа таяныш шешимине сәйкес келетуғын жаңа базистиң векторлары бойынша жиклениўлериниң коэффициентлери төмендеги формулалар бойынша табылады:

$$a_{ij}' = \begin{cases} a_{ij} - (a_{rj} / a_{rk}) a_{ik}, & \text{егер } i \neq r \text{ болса,} \\ a_{rj} / a_{rk}, & \text{егер } i = r \text{ болса} \end{cases} \tag{3}$$

Бул (22) ҳәм (23) формулалары бойынша b_i' ҳәм a_{ij}' санлары есапланғаннан соң, олардың сан мәнислери жаңа симплекс-кестеге жазылады (2-кесте). Сонда бул кестениң $(m+1)$-қатарының элементлери

$$z_0' = z_0 - \left(b_r / a_{rk}\right)\delta_k, \tag{4}$$

$$\delta_j' = \delta_j - \left(a_{rj} / a_{rk}\right)\delta_k \tag{5}$$

формулалары менен ямаса олардың анықламасы бойынша есапланады.

2-кесте

i	Б	$C_Б$	P_0	c_1	c_2	$\ldots$	c_r	$\ldots$	c_m	c_{m+1}	$\ldots$	c_k	$\ldots$	c_n
				P_1	P_2	$\ldots$	P_r	$\ldots$	P_m	P_{m+1}	$\ldots$	P_k	$\ldots$	P_n
1	P_1	c_1	b_2'	1	0	$\ldots$	a_{1r}'	$\ldots$	0	a_{1m+1}'	$\ldots$	0	$\ldots$	a_{1n}'
2	P_2	c_2	b_2'	0	1	$\ldots$	a_{2r}'	$\ldots$	0	a_{2m+1}'	$\ldots$	0	$\ldots$	a_{2n}'
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
r	P_r	c_r	b_r'	0	0	$\ldots$	a_{rr}'	$\ldots$	$\ldots$	a_{rm+1}'	$\ldots$	1	$\ldots$	a_{rn}'
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
m	P_m	c_m	b_m'	0	0	$\ldots$	a_{mr}'	$\ldots$	1	a_{mm+1}'	$\ldots$	0	$\ldots$	a_{mn}'
$m+1$			z_0'	0	0	$\ldots$	δ_r'	$\ldots$	0	δ_{m+1}'	$\ldots$	0	$\ldots$	δ_n'

Есаплаўларды жеңиллетиў мақсетинде базиске киргизилетуғын вектор, абсолют шамасы бойынша ең үлкен $\delta_j < 0$ саны менен анықланады. Егерде бундай санлар бир неше болса, онда $\delta_j < 0$ санлары менен анықланған c_j санларының ең үлкени қандай индекске ийе болса, тап сондай индекске ийе болған P_j векторы базиске киргизиледи.

Солай етип, мәселениң бир таяныш шешиминен екиншисине өтиў бир симплекс-кестеден екинши симплекс-кестеге өтиўди аңлатады. Жаңа симплекс-кестениң элементлерин (2)-(5) формулалары ямаса олардан тиккелей келип шығатуғын қәделер бойынша есаплаўға болады. Бул қәделер төмендегилерден ибарат.

Базиске кирген векторлардың бағаналарына, аты бирдей векторлардың қатарлары ҳәм бағаналарының кесилискен жерине бирликлер (1лер) қойылады, ал бул бағаналардың қалған барлық элементлерин нольге тең деп есаплайды.

Жаңа симплекс-кестениң базиске киргизилетуғын вектор жазылған қатарындағы P_0 ҳәм P_j векторларының элементлери, дәслепки симплекс-кестениң тап усындай қатарындағы элементлерди **шешиўши элементке** бөлиўден келип шығады. Соңғы кестениң $C_Б$ бағанасына, базиске киргизилетуғын вектордың қатарына c_k шамасы жазылады, бунда k-базиске киргизилетуғын вектордың индекси.

Ал, жаңа симплекс-кестениң P_0 ҳәм P_j векторларының бағаналарының қалған элементлери **үшмүйешлик қәдеси** бойынша есапланады. Бул элементлердиң қандай да болса биреўин есаплаў ушын төмендеги үш санды анықлайды:

1) дәслепки берилген симплекс-кестеде, жаңа симплекс-кестениң изленип атырған элементиниң орнында турған сан;

2) дәслепки берилген симплекс-кестеде, жаңа симплекс-кестениң изленип атырған элементи жайласқан қатар менен базиске киргизилетуғын векторға сәйкес бағананың кесилискен жеринде турған сан;

3) жаңа симплекс-кестеде, изленип атырған элемент жайласқан бағана менен базиске жаңадан киргизилетуғын вектордың қатарының кесилискен жеринде жайласқан сан (жоқарыда атап көрсетилгениндей, жаңа симплекс-кестениң бул қатары дәслепки симплекс-кестениң сәйкес қатарының элементлерин **шешиўши элементлерге** бөлиўден келип шығады).

Бул үш сан, еки төбеси дәслепки симплекс-кестедеги еки санға, ал үшинши төбеси жаңа симплекс-кестедеги санға сәйкес келетуғын, айрықша үшмүйешликти пайда етеди. Жаңа симплекс-кестениң изленип атырған элементин анықлаў ушын биринши саннан екинши ҳәм үшинши санлардың көбеймесин алады.

Жаңа симплекс-кестени толтырғаннан соң оның $(m+1)$-қатарын тексереди. Егерде барлық $\delta_j' = Z_j' - c_j \geq 0$ болса, онда жаңа таяныш шешими оптималь шешим болады. Ал, егерде δ_j'

санларының арасында терис санлар бар болса, онда жоқарыда көрсетилген әмеллер избе-излигин орынлап, жаңа таяныш шешимин табады. Бул процессти мәселениң оптималь шешими табылғанша ямаса оның шешими жоқ екенлиги анықланғанша даўам етеди.

Жоқарыда сызықлы программаластырыў мәселеси таяныш шешимлерге ийе ҳәм олардың ҳәр бири **айнымаған шешими** болады деп уйғарылды. Ал, егерде мәселе **айныған таяныш шешимлерге** ийе болса, онда симплекс усылдың базы бир адымында (итерациясында) таяныш шешимниң бир неше белгисизлери нольге тең болыўы мүмкин. Сонлықтан бул жағдайда, бир таяныш шешиминен екиншисине өткенде мақсет функциясының мәниси өзгермей, алдыңғы адымындағыдай болып қалыўы мүмкин. Буннан тысқары, мәселениң мақсет функциясы усылдың бир неше адымында өзиниң мәнисин өзгертпей сақлаўы, сондай ақ, басланғыш базиске қайтып келиў мүмкиншиликлери де бар. Соңғы жағдайда, әдетте **цикллесиў (топарласыў)** келип шықты деп айтады. Бирақта, әмелий мәселелерди шешиўде бундай жағдай оғада сийрек ушырасады. Сонлықтан оны талқылаўға тоқтамаймыз.

Солай етип, (1)-(3) сызықлы программаластырыў мәселесиниң оптималь шешимин симплекс усылы менен табыў төмендеги этаплардан турады:

1. Берилген сызықлы программаластырыў мәселесин каноникалық көриниске келтирип жазады.

2. Бирлик векторлардан дүзилген базиси бар басланғыш таяныш шешимин ҳәм шегаралық шәртлердеги векторлардың таяныш шешимниң базиси бойынша жиклениўлериниң коэффициентлерин табады. Егерде мәселениң таяныш шешими жоқ болса, онда шеклеўлер системасының бирликли болмаўы себепли, мәселе шешимге ийе болмайды.

3. Таяныш шешимниң δ_j баҳаларын есаплайды, симплекс-кестени толтырады ҳәм δ_j санларының арасында терис санлардың барын ямаса жоқлығын анықлайды. Егерде олардың арасында терис санлар бар болса, онда я мәселениң шешимге ийе болмайтуғынлығы анықланады, ямаса жаңа таяныш шешимине өтеди.

4. Бағдарлаўшы бағананы ҳәм қатарды табады. Бағдарлаўшы бағана абсолют шамасы бойынша ең үлкен $\delta_j < 0$ саны менен, ал бағдарлаўшы қатар – P_0 векторының бағанасындағы дүзиўшилериниң бағдарлаўшы бағананың оң дүзиўшилерине қатнасларының ең кишиси менен анықланады.

5. Жоқарыдағы (2)-(5) формалары бойынша жаңа таяныш шешимниң оң дүзиўшилерин, P_j векторының жаңа базистиң векторлары бойынша жиклениўиниң коэффициентлерин, Z_0' ҳәм δ_j' санларын анықлайды. Бул санлардың барлығын жаңа симплекс-кесетеге жазады.

6. Табылған таяныш шешимди оптималлыққа тексереди. Егерде ол оптималь шешим болмаса ҳәм жаңа таяныш шешимге өтиў керек болса, онда 4-этапқа қайтып келеди, ал оптималь шешим табылса ямаса мәселениң шешиминиң жоқ екенлиги анықланса, онда мәселени шешиў процесси тоқтатылады.

1-мысал. Төмендеги сызықлы программаластырыў мәселесин симплекс усылы менен шешиң:

$$Z(X) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to \max, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad\quad &\le 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \quad + x_5 &= 30 \end{aligned} \tag{7}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right) \tag{8}$$

Шешилиўи. 1) Дәслеп берилген мәселени каноникалық көриниске келтиремиз. Буның ушын мәселениң (7) шеклеўлериндеги 1-теңсизликтиң шеп жағына $x_6 \ge 0$ қосымша белгисизин қосамыз. Мәселениң мақсет функциясына x_6 белгисизи ноль (0) коэффициенти менен қатнасады, яғный оны өзгертпейди. Сонда каноникалық көринисте жазылған мына сызықлы программаластырыў мәселесине ийе боламыз:

$$Z(X) = 9x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to \max, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 \qquad\quad + x_6 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad &= 24, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 \quad + x_5 \quad &= 30 \end{aligned} \qquad (10)$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,6}\right) \qquad (11)$$

2) Каноникалық көринисте жазылған (9)-(11) мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин табамыз. Буның ушын еркли (базислик емес) белгисизлерди нольге теңеймиз: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Сонда $x_4 = 24,\ x_5 = 30,\ \ x_6 = 6$ болады ҳәм $Б_0 = (P_4, P_5, P_6)$ бирлик базисли $X^{(0)} = (0,0,0,24,30,6)$ басланғыш таяныш шешимине ийе боламыз.

3) Шегаралық шәртлердиң векторларының таяныш шешимниң базиси бойынша жиклениўлериниң баҳаларын есаплаймыз. Буның ушын (5) ҳәм (6) формаларынан пайдаланамыз:

а) $Z_0 = (C_Б, P_0) = (0,3,2)\cdot(6,24,30) = 0 + 72 + 60 = 132$;

$Z_1 = (C_Б, P_1) = (0,3,2)\cdot(1,1,2) = 0 + 3 + 4 = 7$;

$Z_2 = (C_Б, P_2) = (0,3,2)\cdot(-2,\ 2,1) = 0 + 6 + 2 = 8$;

$Z_3 = (C_Б, P_3) = (0,3,2)\cdot(2,1,-4) = 0 + 3 - 8 = -5$;

б) $\delta_1 = Z_1 - c_1 = 7 - 9 = -2$; $\delta_2 = Z_2 - c_2 = 8 - 5 = 3$; $\delta_3 = Z_3 - c_3 = -5 - 4 = -9$;

в) Егерде мәселениң мақсет функциясының коэффициентлери "$C_Б$" бағанасына дурыс жайластырылса, онда базиске кирген бирлик векторлардың баҳалары барқулла нольге тең болады. Бул жағдайда $Б_0 = (P_4, P_5, P_6)$ болғанлықтан $\delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = 0$ болады. Ҳақыйқатында да,

$$Z_4 = (C_Б, P_4) = (0,3,2)\cdot(0,1,0) = 0 + 3 + 0 = 3;$$

$$Z_5 = (C_Б, P_5) = (0,3,2)\cdot(0,0,1) = 0 + 0 + 2 = 2;$$

$$Z_6 = (C_Б, P_6) = (0,3,2)\cdot(1,0,0) = 0 + 0 + 0 = 0;$$

$$\delta_4 = Z_4 - c_4 = 3 - 3 = 0;\ \delta_5 = Z_5 - c_5 = 2 - 2 = 0;\ \delta_6 = Z_6 - c_6 = 0 - 0 = 0$$

нәтийжелери келип шығады.

3) Мәселениң табылған таяныш шешими, шегаралық шәртлердиң векторларының базис векторлары бойынша жиклениўлериниң коэффициентлери ҳәм таяныш шешимниң табылған баҳалары симплекс-кестеге жазылады (3-кесте).

3-кесте

Б	$C_Б$	P_0	9	5	4	3	2	0	θ_1	θ_3
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6		
P_6	0	6	1	-2	2	0	0	1	6	3
P_4	3	24	1	2	1	1	0	0	24	24
P_5	2	30	2	1	-4	0	1	0	15	-
δ_j		132	-2	3	-9	0	0	0		

Кестениң "Б" бағанасына таяныш шешимниң базисине кирген векторлар жазылады. Оларды симплекс-кестеге жазыў тәртиби шеклеўши теңлемелердеги базислик белгисизлердиң номерлерине сәйкес келеди. $C_Б$ бағанасына мақсет функциясының базислик белгисизлериниң коэффициентлери тап сондай тәртипте жазылады. Кестениң соңғы қатарына δ_j баҳалары менен бирге, оның P_0 бағанасына мақсет функциясының $X^{(0)}$ таяныш шешиминдеги $Z_0 = Z\left(X^{(0)}\right)$ мәниси жазылады.

Мәселениң басланғыш таяныш шешими $X^{(0)} = (0,0,0,24,30,6)$ векторы, оның оптималь шешими болмайды. Өйткени P_1 көп P_3 векторлары ушын $\delta_1 = -2$, $\delta_3 = -9$ баҳалары таяныш шешимниң оптималлық шәртине қарама-қарсы келеди. Максимум мәселесинде таяныш шешимниң оптималь шешим болыўы ушын шегаралаўшы шәртлердиң барлық векторлары ушын $\delta_j \geq 0$ болыўы талап етиледи. Сондай ақ, максимум мәселесинде, ең кеминде бир векторға терис баҳа сәйкес келсе, онда мақсет функцмясының мәнисиниң өсиўин тәмийинлейтуғын, жаңа таяныш шешимин табыўға болады.

4) Енди базиске киргизилетуғын ҳәм базистен шығарылатуғын векторларды анықлаймыз. Абсолют шамасы бойынша ең үлкен терис δ_j саны 4-қатарда P_3 векторының бағанасына жайласқан. Демек, базиске P_3 векторы киргизиледи. Базистен шығарылатуғын векторды анықлаймыз. Буның ушын барлық $a_{i3} > 0$ ушын $\theta_0 = \min\left(\frac{b_i}{a_{i3}}\right)$ санын табамыз: $\theta_0 = \min\left(\frac{6}{2}, \frac{24}{1}\right) = \frac{6}{2} = 3$ ҳәм $a_{13} = 2$ болады. Сонлықтан базистен P_1 векторы шығарылады, ал $a_{13} = 2$ саны шешиўши элемент болады. Буннан P_3 векторының бағанасы ҳәм кестениң 1-қатары бағдарлаўшы бағана ҳәм бағдарлаўшы қатар болады.

Усылдың екинши адымының симплекс-кестесин жасаймыз (4-кесте).

4-кесте

Б	$C_Б$	P_0	9	5	4	3	2	0	θ_2
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_3	4	3	$1/2$	-1	1	0	0	$1/2$	-
P_4	3	21	$1/2$	3	0	1	0	$-1/2$	7
P_5	2	42	4	-3	0	0	1	2	-
δ_j		159	$5/2$	-6	0	0	0	9	

Бул кестени толтырыў төмендеги избе-изликте иске асырылады. Дәслеп базиске жаңадан киргизилген вектордың қатарын, яғный номери бағдарлаўшы қатардың (3-кестеде 1-қатар бағдарлаўшы қатар болады) номери менен сәйкес келетуғын қатар толтырылады. Сонда, 4-кестениң 1-қатарының элементлери 3-кестениң 1-қатарының элементлерин шешиўши элементке, яғный $a_{13} = 2$ санына бөлиўден келип шығады. Бунда кестениң "$C_Б$" бағанасына мақсет функциясының, базиске киргизилетуғын бағанасында жайласқан, $c_3 = 4$ коэффициенти жазылады. Буннан соң кестениң, жаңа $Б_1 = (P_3, P_4, P_5)$ базисине кирген векторларының бағаналары толтырылады. Бул бағаналардың бирдей атлы (номерли) қатар ҳәм бағаналар кесилискен жерлерине 1 лер қойылады, ал қалған басқа элементлер нольге тең деп уйғарылады.

Буннан соң, 4-кестениң қалған элементлери (22)-(25) формулалары бойынша есапланылады. Бул формулаларда $a_{13} = 2$ $(r = 1, k = 3)$ деп алынады. Нәтийжеде берилген мәселениң жаңа $X^{(1)} = (0,0,3,21,42,0)$ таяныш шешими келип шығады. Мәселениң бул таяныш шешими де, оның оптималь шешими болмайды. Себеби P_2 векторы $\delta_2 = -6$ терис баҳасына ийе. Сонлықтан табылған жаңа $X^{(1)}$ таяныш шешимин жақсылаў ушын P_2 векторын базиске киргизиў керек. Базистен шығарылатуғын векторды анықлаў ушын барлық $a'_{ir} > 0$ ушын $\theta'_0 = \min\left(\frac{b'_i}{a'_{ir}}\right)$ шамасы есапланады. Бирақ P_2 векторының бағанасында тек бир $a'_{22} = 3$ оң саны бар. Соның ушын $\theta'_0 = \min\left(\frac{b'_2}{a'_{2r}}\right) = \frac{21}{3} = 7$ болады. Буннан, $a'_{22} = 3$ саны шешиўши элемент, ал кесилискен жеринде бул элемент жайласқан 2-қатар ҳәм 2-бағана бағдарлаўшы қатар ҳәм бағдарлаўшы бағана болады.

Усылдың келеси адымында $Б_2 = (P_3, P_2, P_5)$ болады. Жоқарыда көрсетилген избе-изликте келеси симплекс-кесте толтырылады (5-кесте). Бул кестеден мәселениң келеси таяныш шешими $X^{(2)} = (0,7,10,0,63,0)$ векторы болатуғынлығы келип шығады. Кестениң соңғы, 4-қатарынан, базиске кирмеген барлық векторлардың базис векторлары бойынша жиклениўлериниң баҳалары оң болатуғынын көремиз: $\delta_1 = 7/2$, $\delta_4 = 2$, $\delta_5 = 7/2$. Сонлықтан соңғы табылған таяныш шешими берилген мәселениң бирден бир оптималь шешими болады. Солай етип, берилген мәселениң оптималь шешими $X^* = X^{(2)} = (0, 7, 10, 0, 63, 0)$ векторы, ал мақсет функциясының оған сәйкес оптималь мәниси $\max Z(X) = Z\left(X^{(2)}\right) = 201$ болады.

5-кесте

Б	$C_Б$	P_0	9	5	4	3	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_3	4	10	$2/3$	0	1	$1/3$	0	$1/3$
P_2	5	7	$1/6$	1	0	$1/3$	0	$-1/6$
P_5	2	63	$9/2$	0	0	1	1	$3/2$
δ_j		201	$7/2$	0	0	2	0	$7/2$

2-мысал. Берилген мәселени симплекс усылы менен шешиң:

$$Z(X) = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5 \to \min, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 &= 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 &= 18 \end{aligned} \tag{13}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right) \tag{14}$$

Шешилиўи. 1) (13) теңлемелериниң системасын векторлық көринисинде жазамыз:

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0 \tag{15}$$

Бунда

$$P_1 = (-2, -1, 3)', \; P_2 = (1, -2, -1)', \; P_3 = (1, 0, 0)', \; P_4 = (0, 1, 0)',$$

$$P_5 = (1, 3, -12)', \; P_6 = (0, 0, 1)', \; P_0 = (20, 24, 18)'$$

2) $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ векторларының арасында P_3, P_4, P_6 үш бирлик векторлары бар болғанлықтан, берилген мәселениң басланғыш таяныш шешимин тиккелей жазыўға болады: $X^{(0)} = (0, 6, 20, 24, 0, 18)$. Усылдың I адымының симплекс-кестесин жасаймыз (6-кестениң I бөлими) ҳәм $X^{(0)}$ таяныш шешимин оптималлыққа тексеремиз.

6-кесте

Б	$C_Б$	P_0	2	-6	0	0	5	0	Кестениң бөлимлери
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_3	0	20	-2	1	1	0	1	0	I
P_4	0	24	-1	-2	0	1	3	0	
P_5	0	18	3	-1	0	0	-12	1	
δ_j		0	-2	6	0	0	-5	0	
P_2	-6	20	-2	1	1	0	1	0	II
P_4	0	64	-5	0	2	1	5	0	
P_6	0	38	1	0	1	0	-11	1	
δ_j		-120	10	0	-6	0	-11	0	
P_2	-6	96	0	1	3	0	-21	2	III
P_4	0	254	0	0	7	1	-50	5	
P_1	2	38	1	0	1	0	-11	1	
δ_j		-500	0	0	-16	0	99	-10	

Кестениң I бөлиминен көринип турғанындай, $X^{(0)}$ таяныш шешими оптималь шешим болмайды. Өйткени, P_2 векторына оң $\delta_2 = 6$ баҳасы сәйкес келеди. Минимум мәселесиниң оптималлық белгиси (өлшеми) бойынша базиске кирмеген барлық векторлардың баҳалары терис санлар болыўы керек. Сондай-ақ, P_2 векторының бағанасында $a_{12} = 1$ оң саны бар. Сонлықтан мәселениң жаңа таяныш шешимине өтиўге болады. Буның ушын базиске P_2 векторын киргизип, базистен P_3 векторы шығарылады. Себеби бул жағдайда P_2 векторының бағанасында тек бир $a_{12} = 1$ оң саны бар ҳәм $\theta_0 = \dfrac{20}{1}$ болады, яғный $a_{12} = 1$ саны шешиўши элемент, ал кестениң 1-қатары ҳәм 2-бағанасы сәйкес бағдарлаўшы қатар ҳәм бағдарлаўшы бағана болады. Сонда усылдың II адымына сәйкес симплекс-кесте 6-кестениң II бөлиминиң көринисине ийе болады.

Бул кестеден, табылған жаңа $X^{(1)} = (0, 20, 0, 64, 0, 38)$ таяныш шешими оптималь шешим болмайтуғынлығы көринип тур. Өйткени, P_1 векторына сәйкес $\delta_1 = 10$ баҳасы оң сан. Сонлықтан мәселениң келеси жаңа таяныш шешимине өтемиз (P_1 векторының бағанасында $a_{21} = 1$ оң саны бар). Буны иске асырыў ушын P_1 векторын базиске киргизип, P_6 векторын базистен шығарамыз. Сонда (22)-(25) формулалары бойынша сәйкес есаплаўларды орынлап, 6-кестениң III бөлиминде көрсетилген симплекс-кестеге ийе боламыз. Усының нәтийжесинде келип шыққан $X^{(2)} = (38, 96, 0, 254, 0, 0)$ векторы да мәселениң оптималь шешими болмайды, өйткени P_5 векторының бағанасында оң $\delta_5 = 99$ саны бар. Екиншиден, P_5 векторының бағанасында оң санлар жоқ болғанлықтан, берилген мәселе оптималь шешимге ийе болмайды.

8-§. Карханanын ондирислик потенциалын пайдаланыудын эффективлигин анализлеу

Сызықлы программаластырыў мәселесиниң оптималь шешимин, оның барлық таяныш шешимлерин емес, ал олардың базы бир үлесин тексерип көриў жолы менен табыў мүмкин. Буның ушын ҳәр бир таяныш шешимин оптималлыққа тексерип, мәселениң мақсет функциясы максимум мәселеси жағдайында өсип, ал минимум мәселеси берилгенде кемип барғандай етип, бир таяныш шешиминен екиншисине өтиўди иске асырыў мақсетке муўапық келеди.

Мейли, (1)-(3) мәселеси шешимге ийе болып, оның ҳәр бир таяныш шешими айнымаған болсын. Бул жағдайда (5) таяныш шешими ушын (6) жиклениўи ҳәм

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_n c_n = Z\left(X^{(0)}\right) \tag{16}$$

теңлиги орынланады. Бунда барлық $x_i > 0$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$ ҳәм $Z\left(X^{(0)}\right)$ – мақсет функциясының (5) шешимине сәйкес мәниси.

Сондай ақ (4) деги қәлеген P_j векторы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ базис векторлары бойынша тек бир усыл менен ғана жикленеди:

$$x_{1j} P_1 + x_{2j} P_2 + \ldots + x_{mj} P_m = P_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \tag{17}$$

Сонлықтан P_j векторының (13) жиклениўине мақсет функциясының да тек бир

$$x_{1j} c_1 + x_{2j} c_2 + \ldots + x_{mj} c_m = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} = Z_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \tag{18}$$

мәниси сәйкес келеди. Бунда Z_j – мақсет функциясының белгисизлериниң орнына P_j векторының (13) жиклениўиниң сәйкес коэффициентлерин апарып қойғандағы, оның мәниси.

Қолайлылық ушын $\delta_j = Z_j - c_j$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$ белгилеўин киргиземиз, бунда c_j – мақсет функциясының P_j векторына сәйкес келетуғын коэффициенти. Уйғарыўымыз бойынша $P_1, P_2, \ldots, P_m$ векторлары бирлик векторлар болғанлықтан, (14) де $x_{ij} = a_{ij}$ болады (a_{ij} – (2) шеклеўлериниң коэффициентлери). Сонлықтан

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \tag{19}$$

$$\delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{20}$$

болады. Бундағы $\delta_j = Z_j - c_j$ шамасы P_j векторының базис векторлары бойынша **жиклениўиниң баҳасы** ямаса мәселениң сәйкес **таяныш шешиминиң баҳасы** деп те аталады. Сонда төмендеги теорема дурыс болады.

1-теорема. Егерде (4) деги базы бир P_j векторы ушын $\delta_j = Z_j - c_j < 0$ шәрти орынланса, онда (1)-(3) мәселесиниң $X^{(0)}$ шешими оптималь шешим болмайды ҳәм $Z(X) > Z\left(X^{(0)}\right)$ шәрти орынланатуғын X шешимин жасаўға болады.

Дәлиллениўи. Дәслеп (13) ҳәм (14) теңликлерин $\theta > 0$ шамасына көбейтип, келип шыққан нәтийжелерди сәйкес (8) ҳәм (12) теңликлеринен аламыз. Сонда мына теңликлер келип шығады:

$$\left(x_1 - \theta x_{1j}\right)P_1 + \left(x_2 - \theta x_{2j}\right)P_2 + ... + \left(x_m - \theta x_{mj}\right)P_m + \theta P_j = P_0, \tag{21}$$

$$\left(x_1 - \theta x_{1j}\right)c_1 + \left(x_2 - \theta x_{2j}\right)c_2 + ... + \left(x_m - \theta x_{mj}\right)c_m + \theta c_j = Z\left(X^{(0)}\right) - \theta \delta_j \tag{22}$$

Бундағы (18) теңлигиниң еки жағына барлық $j = 1,2,...,n$ ушын θc_j шамасы қосылған, ал (17) теңлигинде $x_i > 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$. Сонлықтан $P_1, P_2, ..., P_m, P_j$ векторларының барлық коэффициентлери терис болмайтуғындай етип, $\theta > 0$ шамасын сайлап алыўға болады. Басқаша айтқанда, жаңа $X = \left(x_1 - \theta x_{1j},\, x_2 - \theta x_{2j}, ..., x_m - \theta x_{mj}, 0, 0, ..., 0\right)$ таяныш шешимин жасаўға болады. Сонда (18) теңлиги тийкарында, мәселениң бул шешимине мақсет функциясының мына мәниси сәйкес келеди:

$$Z(X) = Z\left(X^{(0)}\right) - \theta\delta_j$$

Теореманың шәрти бойынша $\delta_j < 0$ ҳәм $\theta > 0$ болғанлықтан, буннан $Z(X) > Z\left(X^{(0)}\right)$ теңсизлиги келип шығады. Теорема дәлилленди.

Салдар (максимум мәселеси жағдайында таяныш шешиминиң оптималлық шәрти). Егерде (1)-(3) мәселесиниң базы бир $X^{(0)}$ шешими ушын барлық P_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ векторларының берилген базис бойынша жиклениўлери

$$\delta_j = Z_j - c_j \geq 0 \tag{23}$$

шәртин қанаатландырса, онда $X^{(0)}$ векторы бул мәселениң оптималь шешими болады.

Солай етип, (20) теңсизлиги (1)-(3) мәселесиниң $X^{(0)}$ таяныш шешиминиң оптималлық шәрти болады. Сонлықтан, мақсет функциясының максимум мәниси изленип атырған мәселениң таяныш шешими, оның оптималь шешими болыўы ушын, бул шешимниң баҳаларының терис емес болыўы зәрүрли ҳәм жеткиликли.

Мақсет функциясының минимум мәниси изленип атырған (1)-(3) сызықлы программаластырыў мәселеси ушын мына теорема дурыс болады.

2-теорема. Егерде (4) деги базы бир P_j векторы ушын $\delta_j = Z_j - c_j > 0$ шәрти орынланса, онда бундай сызықлы программаластырыў мәселесиниң $X^{(0)}$ шешими, оның оптималь шешими болмайды ҳәм $Z(X) < Z\left(X^{(0)}\right)$ теңсизлиги орынланатуғын X шешимин жасаўға болады.

Бул теореманың дәлиллениўи 1-теореманың дәлиллениўине уқсас. Сонлықтан оның дәлиллениўин келтирмеймиз.

Салдар (минимум мәселеси жағдайында таяныш шешимниң оптималлық шәрти). Егерде (1)-(3) минимум мәселесиниң базы бир $X^{(0)}$ шешими ушын P_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ векторларының берилген базис бойынша жиклениўлери

$$\delta_j = Z_j - c_j \leq 0 \tag{24}$$

теңсизлигин қанаатландырса, онда мәселениң $X^{(0)}$ таяныш шешими оның оптималь шешими болады.

Солай етип, мақсет функциясының минимум мәниси изленип атырған (1)-(3) мәселесиниң таяныш шешими, оның оптималь шешими болыўы ушын (23) теңсизлигиниң орынланыўы, зәрүрли ҳәм жеткиликли болады. Сонлықтан (23) теңсизлиги мақсет функциясының минимум мәниси изленетуғын (1)-(3) мәселесиниң таяныш шешиминиң оптималлық шәрти болады.

9-§. Жасалма базис вектор усылы

Жасалма базис усылы, каноникалық көринисте жазылған сызықлы программаластырыў мәселесин шешиў ушын, оның бирлик векторлардан дүзилген базислик басланғыш таяныш шешими болмаған жағдайда қолланылады.

Бул усылдың мәниси бойынша берилген сызықлы программаластырыў мәселеси ушын **кеңейтилген мәселе** деп аталатуғын мәселе дүзилип, ол симплекс усыл менен шешиледи. Қеңейтилген мәселени шешиўдиң нәтийжелери тийкарында я берилген мәселениң оптималь шешими табылады, ямаса оның шешими болмайтуғын себеплери анықланады.

Мейли, сызықлы программаластырыўдың каноникалық мәселеси берилген болсын:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{3}$$

Бунда $b_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right)$, $m < n$ ҳәм $P_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1})'$, $P_2 = (a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2})'$, $\ldots$, $P_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})'$ векторларының арасында бирлик векторлар жоқ деп уйғарылады.

Анықлама.

$$\overline{Z}(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m} \tag{4}$$

функциясының

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{aligned} \tag{5}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n+m}\right) \tag{6}$$

шәртлериндеги максимум мәнисин табыў мәселеси (1)-(3) мәселесине салыстырғанда **кеңейтилген мәселе** деп аталады. Бунда М – мәниси әдетте берилмейтуғын, базы бир жеткиликли үлкен оң сан.

Кеңейтилген мәселе

$$X^{(0)} = (0; 0; \ldots; 0;\ \ b_1; b_2 \ldots; b_m) \tag{7}$$

көринисиндеги басланғыш таяныш шешимине ийе. Ол m өлшемли векторлық кеңисликтиң **жасалма базиси** деп аталатуғын $P_{n+1}, P_{n+2}, \ldots, P_{n+m}$ бирлик векторларының системасы менен анықланады. Сондай-ақ, бундағы $x_{n+i} \left(i = \overline{1,m}\right)$ белгисизлери де жасалма өзгериўшилер деп аталады. Кеңейтилген (4)-(6) мәселеси басланғыш таяныш шешимине ийе болғанлықтан, оның шешимин симплекс усыл менен табыўға болады.

Теорема. Егерде (4)-(6) кеңейтилген мәселесиниң $\overline{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+m}^*\right)$ оптималь шешиминде жасалма өзгериўшилердиң мәнислери $x_{n+i} = 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right)$ болса, онда $\overline{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ берилген (1)-(3) мәселесиниң оптималь шешими болады.

Дәлиллениўи. Егерде $\overline{X}^*$ – кеңейтилген мәселениң оптималь шешими болса, онда X^* – дәслепки берилген мәселениң шешими ҳәм $\overline{Z}\left(\overline{X}^*\right) = Z\left(X^*\right)$ болады. Өйткени, $\overline{X}^*$ шешими X^* шешиминен, нольге тең соңғы m дүзиўшилери менен ғана парқ қылады.

X^* – дәслепки берилген мәселениң оптималь шешими болатуғынын дәлийллеймиз. Мейли, X^* – бул мәселениң оптималь шешими болмасын. Бул жағдайда $Z\left(\overline{X}\right) > Z\left(X^*\right)$ теңсизлиги орынланатуғын $\overline{X}$ оптималь шешими бар болады. Буннан, кеңейтилген мәселениң шешими болатуғын $X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}, x_{n+1}^{(1)}, ..., x_{n+m}^{(1)}\right)$ векторы ушын мына қатнасларды жазыўға болады:

$$\overline{Z}\left(X^{(1)}\right) = Z\left(\overline{X}\right) > Z\left(X^*\right) = \overline{Z}\left(\overline{X}^*\right),$$

Буннан

$$\overline{Z}\left(X^{(1)}\right) > \overline{Z}\left(\overline{X}^*\right)$$

теңсизлиги келип шығады. Солай етип $\overline{X}^*$ векторы кеңейтилген мәселениң оптималь шешими болмайды. Бул теореманың шәртине қарсы келеди. Теорема дәлилленди.

Солай етип, егерде кеңейтилген мәселениң табылған оптималь шешиминде жасалма өзгериўшилердиң мәнислери нольге тең болса, онда дәслепки берилген мәселениң оптималь шешими табылды деп есаплаўға болады. Сонлықтан кеңейтилген мәселениң шешимин табыўға толығырақ тоқтап өтемиз.

Кеңейтилген мәселениң (7) таяныш шешиминде (4) сызықлы функциясының мәниси $\overline{Z}_0 = -M\sum_{i=1}^{m} b_i$ ге, ал $\delta_j = \overline{Z}_j - c_j$ санларының мәнислери $-M\sum_{i=1}^{m} a_{ij} - c_j$ ге тең болады. Солай етип, $\overline{Z}_0$ ҳәм $\overline{Z}_j - c_j$ айырмалары бир-биринен ғәрезсиз еки үлестен турады: олардың биреўи M нен ғәрезли, ал екиншиси оннан ғәрезли болмайды. $\overline{Z}_0$ ҳәм δ_j лердиң есапланылған мәнислери, кеңейтилген мәселениң басланғыш мағлыўматлары, әдеттеги симплекс-кестеден бир қатары артық болған кестеге жазылады. Бул кестениң $(m+1)$-қатарына M көбейтиўшиси жоқ қосылыўшылар, ал $(m+2)$- қатарына M ниң коэффицентлери жазылады.

Бир таяныш шешимнен екиншисине өткенде базиске $(m+2)$-қатарының абсолют шамасы бойынша ең үлкен терис санына сәйкес келетуғын вектор киргизиледи. Базы бир адымда базистен шығарылған жасалма вектор алдағы ўақытта базиске киргизилмейди. Сонлықтан бул вектордың бағанасының үстинде түрлендириўлер орынланбайды, яғный келеси адымларда бул бағананы шығарып таслаўға болады.

Бир таяныш шешиминен екиншисине өткенде симплекс-кестени қайта дүзиў симплекс усылының улыўма қәделери бойынша иске асырылады.

Кестениң $(m+2)$-қатары бойынша итерацияларды орынлаў мына еки шәрт орынланғанша даўам еттириледи:

1) барлық жасалма векторлар базистен шығарылып болғанша;

2) барлық жасалма векторлар базистен шығарылмаған, бирақ кестениң $(m+2)$-қатарында $P_1, P_2, ..., P_{n+m}$ векторларының бағаналарында терис санлар жоқ.

Биринши жағдайда, базис дәслепки берилген мәселениң базы бир таяныш шешимине сәйкес келеди ҳәм оның оптималь шешимин анықлаўды кестениң $(m+1)$-қатары бойынша даўам етеди.

Екинши жағдайда, егерде P_0 векторының бағанасының кестениң $(m+2)$-қатарында жайласқан элементи терис болса, онда дәслепки берилген мәселе шешимге ийе болмайды; егерде бул элемент нольге тең болса, онда дәслепки берилген мәселениң табылған таяныш шешими **айнығaн шешим** болады ҳәм базисте ең кеминде жасалма базистиң векторларының биреўи бар болады.

Егерде дәслепки мәселе бир неше бирлик векторларға ийе болса, онда оларды жасалма базиске киргизиў керек.

Солай етип, (1)-(3) мәселесин жасалма базис усылы менен шешиў төмендеги этаплардан турады:

1. Кеңейтилген (4)-(6) мәселесин дүзеди.
2. Кеңейтилген мәселениң таяныш шешимин табады.
3. Әдеттеги симплекс усылды қолланып, жасалма векторларды базистен шығарады. Нәтийжеде, я дәслепки берилген (1)-(3) мәселесиниң таяныш шешимин табады ямаса оның

шешимге ийе болмайтуғынын анықлайды.

4. Буннан соң, (1)-(3) мәселесиниң табылған таяныш шешимин пайдаланып, симплекс усыл менен дәслепки берилген мәселениң оптималь шешимин табады ямаса оның шешими жоқ екенлигин анықлайды.

Мысал. Төмендеги сызықлы программаластырыў мәселесин жасалма базис усылы менен шешиң:

$$Z(X) = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \to \min, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad &\le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad &\ge 10, \end{aligned} \tag{9}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \tag{10}$$

Шешилиўи. Берилген мәселени каноникалық көринисте жазамыз:

$$Z(X) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 \to \max, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 &= 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad - x_6 &= 10, \end{aligned} \tag{12}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,6}\right) \tag{13}$$

Бул мәселениң теңлемелериниң системасындағы белгисизлердиң коэффициентлеринен дүзилген векторды жазамыз:

$$P_1 = (2,1,1)', \; P_2 = (1,2,-1)', \; P_3 = (-2,4,2)', \; P_4 = (1,0,0)', \; P_5 = (0,1,0)', \; P_6 = (0,0,-1)'$$

Олардың арасында тек еки бирлик вектор бар (P_4 ҳәм P_5). Сонлықтан шегаралаўшы системаның үшинши теңлемесиниң шеп жағына $x_7 \ge 0$ қосымша белгисизин қосамыз ҳәм мына кеңейтилген мәселени дүземиз:

$$Z(X) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7 \to \max, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad &= 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \quad + x_5 \qquad &= 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad - x_6 + x_7 &= 10, \end{aligned} \tag{15}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,7}\right) \tag{16}$$

Кеңейтилген мәселе, P_4, P_5, P_7 бирлик векторларының системасы менен анықланады, $X^{(0)} = (0;0;0;24;22;0;10)$ таяныш шешимине ийе. Биринши адымы бес қатардан ибарат болған кестени жасаймыз (төмендеги кестениң I бөлимине қараң). Оның 4- ҳәм 5- қатарларын толтырыў ушын $\overline{Z}_0$ ҳәм $\delta_j = \overline{Z}_j - c_j \; \left(j = \overline{1,7}\right)$ диң мәнислерин есаплаймыз:

$$\overline{Z}_0 = 24 - 10M; \; \delta_1 = \overline{Z}_1 - c_1 = 0 - M; \; \delta_2 = \overline{Z}_2 - c_2 = 4 + M, \; \delta_3 = \overline{Z}_3 - c_3 = -8 - 2M;$$

$$\delta_4 = \overline{Z}_4 - c_4 = 0; \; \delta_5 = \overline{Z}_5 - c_5 = 0; \; \delta_6 = \overline{Z}_6 - c_6 = 0 + M; \; \delta_7 = \overline{Z}_7 - c_7 = 0$$

Көринип турғанындай $\overline{Z}_0$ ҳәм $\delta_j = \overline{Z}_j - c_j$ лердиң мәнислери еки қосылыўшыдан турады: олардың биреўинде M бар, ал екиншисинде M жоқ. Итерациялық процессти орынлаўдың қолайлылығы ушын, M ниң алдындағы коэффициенти 5-қатарға, ал M жоқ қосылыўшыны 4-қатарға жазамыз.

Кестениң 5-қатарында $P_j \; \left(j = \overline{1,7}\right)$ векторларының бағаналарында еки терис сан бар (-1 ҳәм -2). Бул санлардың бар болыўы, кеңейтилген мәселениң таяныш шешими оптималь шешим болмайтуғынын аңлатады. Енди кеңейтилген мәселениң жаңа таяныш шешимине өтемиз. Базиске P_3 векторын киргиземиз. Базистен шығарылатуғын векторды анықлаў ушын $\theta_0 = \min\left(\frac{22}{4}; \frac{10}{2}\right) = \frac{10}{2}$ санын анықлаймыз. Демек, P_7 векторы базистен шығарылады. Бул вектор келеси базислердиң хеш қайсысына киргизилмейди. Сонлықтан алдағы ўақытта бул вектор жайласқан бағана толтырылмайды.

i	Базис	$C_Б$	P_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$	Кестениң бөлимлери
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
1	P_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0	I
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0	
3	P_7	$-M$	10	1	-1	2	0	0	-1	1	
4			24	0	4	-8	0	0	0	0	
5			-10	-1	1	-2	0	0	1	0	
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	-1		II
2	P_5	0	2	-1	4	0	0	1	2		
3	P_3	0	5	$1/2$	$-1/2$	1	0	0	$-1/2$		
4			64	4	0	0	0	0	-4		
1	P_4	1	35	$5/2$	2	0	1	$1/2$	0		III
2	P_6	0	1	$-1/2$	2	0	0	$1/2$	1		
3	P_3	0	$11/2$	$1/4$	$1/2$	1	0	$1/4$	0		
4			68	2	8	0	0	2	0		

Енди мәселени шешиўдиң екинши адымына өтемиз (кестениң II бөлимине қараң). Бул бөлиминде барлығы төрт қатар бар, өйткени жасалма вектор базистен шығарылды.

Кестениң II бөлиминен, дәслепки берилген мәселениң таяныш шешими $X^{(1)} = (0;0;5;34;2)$ векторы болатуғынлығы көринип тур. Оны оптималлыққа тексеремиз. Буның ушын 4-қатардың элементлерин көрип шығамыз. Бул қатарда P_6 векторының бағанасында (-4) терис саны бар. Демек, екинши адымда табылған таяныш шешим оптималь шешим болмайды. Сонлықтан P_6 векторының базиске киргизилиўине байланыслы, оны жақсылаўға болады. Буның ушын базистен P_5 векторын шығарамыз. Үшинши адымда табылған мағлыўматлар кестениң III бөлимине жайластырылған.

Кестениң бул бөлиминиң 4-қатарында δ_j санларының арасында терис санлар жоқ. Бул дәслепки берилген мәселениң табылған $X^* = (0;0;1/2;35;0;1)$ жаңа таяныш шешими, оның оптималь шешими болатуғынын аңлатады. Мәселениң оптималь шешиминде мақсет функциясының оптималь мәниси $Z_{\max} = 68$ болады.

10-§. Сызыклы программаластырыу маселесине косарлы маселелердин математикалык моделлери

Сызықлы программаластырыўдың дәслепки ямаса туўры мәселеси деп аталатуғын қәлеген мәселесине, белгили қәде бойынша, оған салыстырғанда қосарлы ямаса түйинлес мәселе деп аталатуғын, оның басқа мәселесин сәйкес келтириўге болады. Бул мәселелер сызықлы программаластырыўдың қосарлы ямаса түйинлес мәселелериниң жубын дүзеди. Мәселелердиң бундай жубының хәр бир мәселеси екиншисине салыстырғанда қосарлы мәселе деп аталады. Сызықлы программаластырыўдың улыўма мәселеси ушын қосарлы мәселениң анықламасын келтиремиз. Мейли дәслепки берилген мәселе төмендеги көринисте болсын:

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max, \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2,\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \le b_k,\\
&a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1},\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned} \tag{2}$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,s};\ \ s \le n\right) \tag{3}$$

Анықлама. Сызықлы программаластырыўдың төмендеги мәселеси

$$F(Y) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \to \min, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1,\\
&a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2,\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&a_{1i}y_1 + a_{2i}y_2 + \dots + a_{mi}y_m \ge c_i,\\
&a_{1i+1}y_1 + a_{2i+1}y_2 + \dots + a_{mi+1}y_m = c_{i+1},\\
&\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\
&a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_m,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$y_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,k};\ \ k \le m\right) \tag{6}$$

(1)-(3) мәселесине салыстырғанда қосарлы ямаса түйинлес мәселе деп аталады.

Солай етип, (1)-(3) ҳәм (4)-(6) мәселелери сызықлы программаластырыўдың қосарлы мәселелериниң жубын дүзеди.

Сызықлы программаластырыўдың жоқарыда келтирилген еки қосарлы мәселесин салыстырып, дәслепки берилген мәселеге қосарлы мәселе төмендеги қәделер бойынша келип шығатуғынын байқаймыз:

1. Егерде дәслепки берилген (1)-(3) мәселесиниң мақсет функциясының максимумын табыў керек болса, онда оған қосарлы (4)-(6) мәселесиниң мақсет функциясының минимумын табыў талап етиледи ҳәм керисинше. Басқаша айтқанда, егерде $Z(X) \to \max$ болса, онда $F(Y) \to \min$, ал $Z(X) \to \min$ болса, онда $F(Y) \to \max$ мәселеси шешиледи.

2. Дәслепки берилген (1)-(3) мәселесиниң (2) шеклеўлер системасының белгисизлериниң коэффициентлеринен дүзилген

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

матрицасы ҳәм (4)-(6) қосарлы мәселесиниң тап сондай

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{8}$$

матрицасы бир-биринен транспоплаў жолы менен, яғный қатарларын сәйкес бағаналары менен, ал бағаналарын сәйкес қатарлары менен алмастырыўдан келип шығады (“транспоплаў” атамасы ески латын тилиниң “transpositio” деген сөзинен алынған болып, бизиңше “орнын алмастырыў”, “орнын өзгертиў” деген мәнислерди аңлатады).

3. (4)-(6) қосарлы мәселесиндеги белгисизлердиң саны дәслепки берилген (1)-(3) мәселесиндеги (2) қатнасларының санына, ал (4)-(6) қосарлы мәселесиниң (5) системасындағы шеклеўлердиң саны – дәслепки мәселедеги белгисизлердиң санына тең.

4. Дәслепки берилген (1)-(3) мәселесиниң (2) шеклеўлер системасының салтаң ағзалары (4)-(6) қосарлы мәселесиниң (4) мақсет функциясының коэффициентлери, ал дәслепки берилген

мәселениң (1) мақсет функциясының белгисизлериниң коэффициентлери қосарлы мәселедеги (5) шеклеўлер системасының салтаң ағзалары болады.

5. а) Егерде дәслепки берилген (1)-(3) мәселесинде x_j белгисизи тек оң мәнислерди ғана қабыл ететуғын болса, онда (4)-(6) қосарлы мәселесиниң (5) шеклеўлер системасындағы j-шәрт "$\geq$" көринисиндеги теңсизлик болады.

б) Егерде x_j белгисизи оң ҳәм терис мәнислерди қабыл етиўи мүмкин болса, онда (5) шеклеўлер системасындағы j-қатнасы теңлеме болады.

Тап усындай байланыслар (а) ҳәм б) байланыслары) дәслепки берилген (1)-(3) мәселесиниң (2) шеклеўлери менен (4)-(6) қосарлы мәселесиниң белгисизлериниң де арасында бар болады.

в) Егерде дәслепки мәселениң (2) шеклеўлер системасындағы i-қатнас теңсизлик болса, онда қосарлы мәселениң i-белгисизи $y_i \geq 0$ болады. Кери жағдайда, y_i белгисизи оң да, терис те мәнислерди қабыл етиўи мүмкин.

Сызықлы программаластырыўдың қосарлы мәселелериниң жубы әдетте симметриялы ҳәм симметриялы емес қосарлы мәселелер болып еки топарға бөлинеди. Қосарлы мәселелердиң симметриялы жубында дәслепки мәселениң (2) шеклеўлери ҳәм қосарлы мәселениң (5) қатнаслары "$\leq$" көринисиндеги теңсизликлер болады. Солай етип, еки мәселениң де белгисизлери тек терис емес мәнислерди ғана қабыл ете алады.

Сызықлы программаластырыўдың қосарлы мәселелериниң теориясында қосарлы мәселелердиң төрт жубы пайдаланылады. Қолайлылық ушын олардың матрицалық көринисте жазылыўларын келтиремиз.

Дәслепки мәселе	**Қосарлы мәселе**	
Симметриялы жуплары		
1. $Z(X) = (C, X) \to \max$,	$F(Y) = (Y, A_0) \to \min$,	
$AX \leq A_0$,	$YA \geq C$,	(9)
$X \geq \theta$	$Y \geq \theta$	
2. $Z(X) = (C, X) \to \min$,	$F(Y) = (Y, A_0) \to \max$,	
$AX \geq A_0$,	$YA \leq C$,	(10)
$X \geq \theta$	$Y \geq \theta$	
Симметриялы емес жуплары		
3. $Z(X) = (C, X) \to \max$,	$F(Y) = (Y, A_0) \to \min$,	
$AX = A_0$,	$YA \geq C$	(11)
$X \geq \theta$		
4. $Z(X) = (C, X) \to \min$,	$F(Y) = (Y, A_0) \to \max$	
$AX = A_0$,	$YA \leq C$	(12)
$X \geq \theta$		

Бул жерде төмендеги белгилеўлер киргизилген:

$C = (c_1, c_2, ..., c_n)$, $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, $\theta = (0,0,...,0)'$, $A_0 = (b_1, b_2, ..., b_m)'$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)'$, ал, A – (7) көринисиндеги матрица.

Солай етип, берилген мәселеге сәйкес қосарлы мәселени жазбастан бурын, дәслепки мәселениң шеклеўлер системасын керекли көриниске келтирип алыў керек болады.

11-§. Косарлылык теориясынан пайдаланып маселелерге экономикалык анализ жасау

Мейли, сызықлы программаластырыўдың каноникалық көринисте жазылған ҳәм оған қосарлы болған еки мәселесиниң жубы берилген болсын.

а) Берилген мәселе:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{3}$$

б) Қосарлы мәселе:

$$F(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ , \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{5}$$

Бул мәселелердиң ҳәр бири сызықлы программаластырыўдың өз алдына мәселелери болып, олар бир-биринен ғәрезсиз шешилиўи мүмкин. Бирақ та симплекс усылды қолланып, бул мәселелердиң биреўиниң оптималь шешими табылса, онда екиншисиниң де оптималь шешимин аңсат табыўға болады.

Келтирилген (1)-(3) ҳәм (4), (5) қосарлы мәселелердиң жубының шешимлери арасындағы байланыслар төмендеги қосарлық леммалары ҳәм теоремалары менен сыпатланады. Оларды дәлиллеўсиз келтиремиз.

1-лемма. Егерде $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – дәслепки берилген (1)-(3) мәселесиниң базы бир шешими, ал $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ – (4), (5) мәселесиниң қәлеген шешими болса, онда дәслепки берилген (1)-(3) мәселесиниң мақсет функциясының X шешиминдеги мәниси (4), (5) қосарлы мәселесиниң мақсет функциясының Y шешиминдеги мәнисинен артық болмайды, яғный $Z(X) \leq F(Y)$ теңсизлиги орынланады.

2-лемма. Егерде (1)-(3) ҳәм (4), (5) мәселелериниң базы бир X^* ҳәм Y^* шешимлери ушын $Z\left(X^*\right) = F\left(Y^*\right)$ болса, онда X^* – берилген мәселениң, ал Y^* – оған қосарлы мәселениң оптималь шешими болады.

1-теорема. Егерде (1)-(3) ҳәм (4), (5) қосарлы мәселелериниң жубының биреўи оптималь шешимге ийе болса, онда олардың екиншиси де оптималь шешимге ийе болады ҳәм олардың мақсет функцияларының оптималь шешимлердеги мәнислери өз-ара тең, яғный $Z_{\max} = F_{\min}$ болады.

Егерде қосарлы мәселелердиң биреўиниң мақсет функциясы шекленбеген болса ((1)-(3) мәселесинде – жоқарыдан, ал (4), (5) мәселесинде – төменнен), онда екинши мәселе улыўма шешимге ийе болмайды.

2-теорема. Тек
$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \tag{6}$$

теңлиги орынланғанда ғана ҳәм тек усы жағдайда ғана (1)-(3) мәселесиниң $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ шешими ҳәм (4), (5) мәселесиниң $Y^* = \left(y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*\right)$ шешими бул мәселелердиң оптималь шешимлери болады.

Енди қосарлы мәселелердиң оптималь шешимлерин табыў мәселесине өтемиз.

Мейли, симплекс усыл жәрдеминде (1)-(3) мәселесиниң X^* оптималь шешими табылып, ол $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}$ векторларынан дүзилген базис пенен анықланған болсын.

$C_Б = \left(c_{i_1}, c_{i_2}, ..., c_{i_m}\right)$ арқалы (1)-(3) мәселесиниң (1) мақсет функциясындағы белгисизлердиң коэффициентлеринен дүзилген қатар-векторды, ал P^{-1} арқалы – базистиң $P_{i_1}, P_{i_2}, ..., P_{i_m}$ векторларының дүзиўшилеринен жасалған P матрицасына кери матрицаны белгилеймиз. Сонда мына тастыйықлаў дурыс болады.

3-теорема. Егерде сызықлы программаластырыўдың каноникалық көринисте жазылған (1)-(3) мәселеси X^* оптималь шешимине ийе болса, онда $Y^* = C_Б P^{-1}$ оған қосарлы болған (4), (5) мәселесиниң оптималь шешими болады.

Солай етип, симплекс усылы менен (1)-(3) мәселесиниң оптималь шешими табылса, онда соңғы симплекс кестеден пайдаланып, $C_Б$ векторын ҳәм P^{-1} кери матрицасын анықлаўға ҳәм олардың жәрдеминде (4), (5) қосарлы мәселесиниң

$$Y^{*} = C_{Б} P^{-1} \tag{7}$$

оптималь шешимин табыўға болады.

Егерде (2) теңлемелер системасындағы белгисизлердиң коэффициентлеринен дүзилген $P_1, P_2, ..., P_n$ векторларының арасында m бирлик векторлар бар болса, онда P^{-1} матрицасын соңғы симплекс-кестениң дәслепки m қатарында бул бирлик векторлардың бағаналарында жайласқан санлар дүзеди. Бул жағдайда қосарлы мәселениң оптималь шешимин $Y^{*} = C_{Б} P^{-1}$ формуласы менен анықлаўдың зәрүрлиги болмайды. Өйткени, егерде берилген c_i коэффициенти нольге тең болса, онда оптималь шешимниң дүзиўшилери соңғы симплекс-кестениң $(m+1)$-қатарында, бирлик векторлар бағаналарында жайласқан санлар менен сәйкес келеди; ал, егерде $c_i \neq 0$ болса, онда соңғы симплекс-кестениң $(m+1)$-қатарының сәйкес элементи менен c_i коэффициентиниң қосындысына тең болады.

Жоқарыда айтылғанлар симметриялы қосарлы мәселелер ушын да орынлы болады. Бунда, егерде дәслепки берилген мәселениң шегаралық шәртлери "$\leq$" көринисиндеги теңсизликлерден ибарат болса, онда қосарлы мәселениң оптималь шешиминиң дүзиўшилери берилген мәселениң соңғы симплекс-кестесиниң $(m+1)$-қатарындағы санлар менен сәйкес келеди. Бул санлар жәрдемши өзгериўшилерге сәйкес векторлардың бағаналарында жайласады.

Мысал. Берилген мәселениң ҳәм оған қосарлы мәселениң шешимин табың:

$$Z(X) = x_1 - 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \to \max, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \quad &= 11, \\ x_1 - 2x_2 \quad + x_5 &= 2, \end{aligned} \tag{9}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right) \tag{10}$$

Шешилиўи. Бул мәселеге қосарлы мәселе мына көриниске ийе болады:

$$F(Y) = y_1 + 11y_2 + 2y_3 \to \min, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} -2y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq 1, \\ y_1 + 3y_2 - 2y_3 &\geq -6, \\ y_1 \quad &\geq 2, \\ y_2 \quad &\geq -1, \\ y_3 &\geq 3 \end{aligned} \tag{12}$$

Бул қосарлы мәселелердиң бириншисин шешиў қолайлы. Себеби оның $Б_0 = (P_3, P_4, P_5)$ базисли $X^{(0)} = (0, 0, 1, 11, 2)$ басланғыш таяныш шешими белгили ҳәм бул мәселени, қосымша түрлендириўлерди орынламай, тиккелей симплекс усыл менен шешиўге болады. Берилген (8)-(10) мәселесин симплекс усыл менен шешиў төмендеги кестеде келтирилген.

1-кесте

Базис	$C_Б$	P_0	1	-6	2	-1	3	θ_0	θ_1	Кестениң бөлимлери
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5			
P_3	2	1	-2	1	1	0	0	-	1	
P_4	-1	11	2	3	0	1	0	$11/2$	$11/3$	I
P_5	3	2	1	-2	0	0	1	2	-	
δ_j		-3	-4	-1	0	0	0			
P_3	2	5	0	-3	1	0	2			
P_4	-1	7	0	7	0	1	-2			II
P_1	1	2	1	-2	0	0	1			
δ_j		5	0	-9	0	0	4			

P_3	2	8	0	0	1	$3/7$	$8/7$	$\max Z(X)=14$, $X^*=(4,1,8)$, $C_Б=(P_3,P_2,P_1)$	III
P_2	-6	1	0	1	0	$1/7$	$-2/7$		
P_1	1	4	1	0	0	$2/7$	$3/7$		
δ_j		14	0	0	0	$9/7$	$10/7$		

Солай етип, дәслепки берилген (8)-(10) мәселесиниң оптималь шешими $X^*=(4,1,8)$ векторы, оптималь шешимниң $Б_0^*=(P_3,P_2,P_1)$ базиси, мақсет функциясының $\max Z(X)=Z(X^*)=14$ мәниси симплекс усылының III адымында табылды. Енди симплекс усылдың бул адымының нәтийжелеринен пайдаланып, (11), (12) қосарлы мәселесиниң оптималь шешимин (7) формуласы бойынша анықлаймыз. Соңғы базис $Б^*=(P_3,P_2,P_1)$ хәм $C_Б^*=(2,-6,1)$ болғанлықтан

$$P=(P_3,P_2,P_1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

көринисиндеги матрица болады. Оған кери P^{-1} матрицасы симплекс усылдың III адымының P_3,P_4,P_5 бағаналарындағы коэффициентлерден жасалады:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3/7 & 8/7\\ 0 & 1/7 & -2/7\\ 0 & 2/7 & 3/7\end{pmatrix}$$

Сонлықтан

$$Y^*=C_Б^*P^{-1}=(2,-6,1)\begin{pmatrix}1 & 3/7 & 8/7\\ 0 & 1/7 & -2/7\\ 0 & 2/7 & 3/7\end{pmatrix}=\left(2,3/7,31/7\right)$$

болады. Солай етип, (11), (12) қосарлы мәселесиниң шешими $Y^*=\left(2,3/7,31/7\right)$ векторы хәм $\min F(Y)=F(Y^*)=14$ болады.

2-§ Қосарлы симплекс усылы

Қосарлы симплекс усылы, симплекс усылы сыяқлы, каноникалық көринисте жазылған сызықлы программаластырыў мәселесиниң оптималь шешимин табыў ушын қолланылады. Бул усылда да, шегаралаўшы теңлемелердиң системасындағы белгисизлердиң коэффициентлеринен жасалған P_j $(j=\overline{1,n})$ векторларының арасында m сандағы бирлик векторлар бар деп уйғарылады. Соның менен бирге, қосарлы симплекс усылды, шегаралаўшы теңлемелериниң системасының салтаң ағзалары қәлеген санлар болған, сызықлы программаластырыў мәселелерин шешиў ушын да қолланыўға болады. Бундай мәселелерди симплекс усыл менен шешкенде көрсетилген теңлемелер системасының салтаң ағзалары терис емес санлар деп есапланады. Енди, $P_1,P_2,...,P_m$ бирлик векторлар деп уйғарып, төмендеги мәселени қараймыз:

$$Z(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n\to\max \tag{1}$$

$$x_1P_1+x_2P_2+...+x_mP_m+x_{m+1}P_{m+1}+...+x_nP_n=P_0, \tag{2}$$

$$x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,n}) \tag{3}$$

Бунда

$$P_1=(1,0,0,...,0)',\ P_1=(0,1,0,...,0)',\dots,\ P_m=(0,0,0,...,1)';$$

$P_{m+1} = \left(a_{1m+1}, a_{2m+1}, a_{3m+1}, ..., a_{mm+1}\right)', ..., P_n = \left(a_{1n}, a_{2n}, a_{3n}, ..., a_{mn}\right)', P_0 = \left(b_1, b_2, b_3, ..., b_m\right)'$ хәм $b_i \ \left(i = \overline{1, m}\right)$ санларының арасында терис санлар бар деп уйғарылады.

$X = \left(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0\right)$ векторы сызықлы теңлемелердиң (2) системасының шешими болады. Бирақта бул вектор (1)-(3) мәселесиниң таяныш шешими болмайды. Өйткени, оның дүзиүшилериниң арасында терис санлар бар.

Уйғарыўымыз бойынша $P_1, P_2, ..., P_m$ бирлик векторлар болғанлықтан, $P_j \ \left(j = \overline{1, n}\right)$ векторларының хәр бирин бул бирлик векторлардың сызықлы бирикпеси (комбинациясы) түринде көрсетиўге болады. Сонда $P_j \ \left(j = \overline{1, n}\right)$ векторларын $P_1, P_2, ..., P_m$ векторлары бойынша жиклеўдиң коэффициентлери $x_{ij} = a_{ij} \ \left(i = \overline{1, m}; \ j = \overline{1, n}\right)$ санлары болады. Сонлықтан

$$Z_i = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \qquad \delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j \ \left(j = \overline{1, n}\right) \tag{4}$$

болады.

Анықлама. Егерде қәлеген $j \ \left(j = \overline{1, n}\right)$ ушын $\delta_j \geq 0$ болса, онда $P_1, P_2, ..., P_m$ базиси менен анықланған сызықлы теңлемелердиң (2) системасының $X = \left(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0\right)$ шешими (1)-(3) мәселесиниң псевдо шешими (жалған шешими) ямаса **дерлик мүмкин болған таяныш шешими** (ДМБТШ) деп аталады ("псевдо" қосымшасы гректиң "pseudos" деген сөзинен алынған болып, бизиңше "жалған", "өтирик" деген мәнислерди аңлатады).

1-теорема. Егерде барлық $a_{ij} \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right)$ болғанда $P_1, P_2, ..., P_m$ базиси менен анықланған $X = \left(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0\right)$ жалған шешиминде ең кеминде бир терис $b_i < 0$ саны бар болса, онда (1)-(3) мәселеси улыўма шешимге ийе болмайды.

2-теорема. Егерде $P_1, P_2, ..., P_m$ базиси менен анықланған $X = \left(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0\right)$ жалған шешиминде $b_i < 0$ терис санлары бар болып, олардың қәлегени ушын $a_{ij} < 0$ терис санлары табылса, онда (1)-(3) мәселесиниң мақсет функциясы кемимейтуғын, оның жаңа жалған шешимине өтиўге болады.

Дәлиллеўсиз келтирилген бул теоремалар қосарлы симплекс усылдың есаплаў алгоритмин жасаў ушын тийкар болады. Мейли, $X = \left(b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0\right)$ (1)-(3) мәселесиниң жалған шешими болсын. Мәселениң дәслепки берилген мағлыўматлары бойынша, P_0 векторының бағанасының гейпара элементлери терис санлар болған, симплекс-кесте жасалады (2-кесте). Егерде бундай санлар жоқ болса, онда уйғарыўымыз бойынша барлық $\delta_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1, n}\right)$ болғанлықтан, симплекс-кестеге (1)-(3) мәселесиниң оптималь шешими жазылған болады. Сонлықтан, егерде мәселениң оптималь шешими бар болса, онда P_0 векторының бағанасында терис санлар жоқ болғанша, бир симплекс-кестеден екиншисине тәртип бойынша өтиледи. Бунда кестениң $(m+1)$-қатарының барлық элементлери терис болмаўы, яғный қәлеген $j \ \left(j = \overline{1, n}\right)$ ушын $\delta_j = Z_j - c_j \geq 0$ болыўы керек.

2-кесте

i	Базис	$C_Б$	P_0	c_1	c_2	…	c_s	…	c_m	c_{m+1}	…	c_r	…	c_n
				P_1	P_2	…	P_s	…	P_m	P_{m+1}	…	P_r	…	P_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	a_{1m+1}	…	a_{1r}	…	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	a_{2m+1}	…	a_{2r}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
s	P_s	c_s	b_s	0	0	…	1	…	0	a_{sm+1}	…	a_{sr}	…	a_{sn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	P_i	c_i	b_i	0	0	…	0	…	0	a_{im+1}	…	a_{ir}	…	a_{in}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

m	P_m	c_m	b_m	0	0	$\dots$	0	$\dots$	1	a_{mm+1}	$\dots$	a_{mr}	$\dots$	a_{mn}
$m+1$			z_0	0	0	$\dots$	0	$\dots$	0	δ_{m+1}	$\dots$	δ_r	$\dots$	δ_n

Солай етип, симплекс-кестени жасағаннан соң P_0 векторының бағанасында терис санлардың бар я жоғын тексереди. Егерде бундай санлар жоқ болса, онда дәслепки берилген мәселениң оптималь шешиминиң табылғаны. Ал, егерде терис санлар бар болса, онда абсолют шамасы бойынша ең үлкен терис санды сайлап алады. Бундай санлар бир неше болған жағдайда, олардың қәлеген биреўин сайлап алады. Мейли b_i саны сайлап алынған болсын. Бул санды сайлап алыў менен базистен шығарылатуғын вектор анықланады: базистен P_i векторы шығарылады. Қайсы вектордың базиске киргизилетуғынын анықлаў ушын

$$\min_j\left(-\frac{\delta_j}{a_{ij}}\right), \quad a_{ij}<0 \tag{5}$$

шамасы табылады.

Мейли, бул киши мәниске $j=r$ болғанда ерисилсин. Сонда базиске P_r векторы киргизиледи, ал a_{ir} саны шешиўши элемент болады. Жаңа симплекс-кесетеге өтиў симплекс усылдың әдеттеги қәдеси бойынша иске асырылады. Итерациялық процесс P_0 векторының бағанасында терис сан қалмағанша даўам еттириледи. Нәтийжеде дәслепки берилген мәселениң, демек, қосарлы мәселениң оптималь шешими табылады. Егерде итерациялық процесстиң базы бир адымында симплекс-кестениң i-қатарында, P_0 векторының бағанасында, $b_i<0$ саны бар болып, бул қатарда басқа терис санлар жоқ болса, онда дәслепки берилген мәселе шешимге ийе болмайды.

Жоқарыда айтылғанлардың тийкарында (1)-(3) мәселесин қосарлы симплекс усылы менен шешиў төмендеги этаплардан турады:

1. Берилген мәселениң жалған шешимин табады.
2. Бул жалған шешимди оптималлыққа тексереди. Егерде жалған шешим оптималь шешим болса, берилген мәселениң шешиминиң табылғаны. Кери жағдайда, я берилген мәселениң шешимге ийе болмайтуғыны анықланады, ямаса жаңа жалған шешимге өтеди.
3. P_0 векторының бағанасындағы абсолют шамасы бойынша ең үлкен терис санды сайлап алыў арқалы шешиўши қатарды ҳәм (5) шамасы бойынша шешиўши бағананы анықлайды.
4. Жаңа жалған шешимди табады ҳәм 2-этаптан баслап барлық көрсетилген әмеллерди тәкирарлайды.

Мысал. Төмендеги сызықлы программаластырыў мәселесин қосарлы симплекс усылы менен шешиң:

$$Z(X)=x_1+x_2+2x_3\rightarrow\max, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3&=8,\\ x_1-x_2\quad&\geq 4,\\ x_1+x_2\quad&\geq 6,\end{aligned} \tag{7}$$

$$x_1,x_2x_3\geq 0 \tag{8}$$

Шешилиўи. Дәслеп берилген сызықлы программаластырыў мәселесин каноникалық көринисте жазамыз:

$$Z(X)=x_1+x_2+2x_3\rightarrow\max,$$
$$x_1+x_2+x_3=8,$$
$$x_1-x_2\quad -x_4=4,$$
$$x_1+2x_2\qquad -x_5=6,$$
$$x_j\geq 0\quad\left(j=\overline{1,5}\right)$$

Соңғы мәселениң шегаралаўшы системасының 2- ҳәм 3- теңлемелерин (-1) ге көбейтип, мына мәселеге келемиз:

$$Z(X) = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \quad &= 8, \\ -x_1 + x_2 \quad + x_4 \quad &= -4, \\ -x_1 - 2x_2 \quad + x_5 &= -6 \end{aligned} \tag{10}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right) \tag{11}$$

Бул мәселе ушын қосарлы мәселени жасаймыз. Ол төмендеги көринисте жазылады:

$$F(Y) = 8y_1 - 4y_2 - 6y_3 \to \min, \tag{12}$$

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 - y_3 \ &\geq 1, \\ y_1 + y_2 - 2y_3 &\geq 1, \\ y_1 \qquad &\geq 2, \end{aligned} \tag{13}$$

$$y_2, y_3 \geq 0 \tag{14}$$

Базис есабында P_3, P_4, P_5 векторларын сайлап алып, дәслепки берилген (9)-(11) мәселеси ушын симплекс-кестени жасаймыз (3-кесте).

3-кесте

i	Базис	$C_Б$	P_0	1	1	2	0	0	Кестениң бөлимлери
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_3	2	8	1	1	1	0	0	I
2	P_4	0	-4	-1	1	0	1	0	
3	P_5	0	-6	-1	-2	0	0	1	
4			16	1	1	0	0	0	
1	P_3	2	5	$1/2$	0	1	0	$1/2$	II
2	P_4	0	-7	$-3/2$	0	0	1	$1/2$	
3	P_2	1	3	$1/2$	1	0	0	$-1/2$	
4			13	$1/2$	0	0	0	$1/2$	
1	P_3	2	$8/3$	0	0	1	$1/3$	$2/3$	III
2	P_1	1	$14/3$	1	0	0	$-2/3$	$-1/3$	
3	P_2	1	$2/3$	0	1	0	$1/3$	$-1/3$	
4			$32/3$	0	0	0	$1/3$	$2/3$	

Кестеден көринип турғанындай (кестениң I бөлимине қараң), $Y = (2,0,0)$ векторы (12)-(14) қосарлы мәселесиниң шешими болады ҳәм бул шешимде $F(Y) = 16$ болады. P_0 векторының бағанасында -4 ҳәм -6 еки терис санлары бар, ал 4-қатарында терис санлар жоқ болғанлықтан, қосарлы симплекс усылының алгоритмине сәйкес жаңа симплекс-кестеге өтемиз. Бул жағдайда буны иске асырыўға болады, өйткени P_4 ҳәм P_5 векторларының қатарларында терис санлар бар. Егерде ол санлар жоқ болғанда, онда мәселе шешимге ийе болмас еди.

Базистен шығарылатуғын вектор P_0 векторының бағанасындағы абсолют шамасы бойынша ең үлкен терис сан менен анықланады. Бундай сан -6 саны болады. Демек, базистен P_5 векторы шығарылады. Қайсы векторды базиске киргизиў кереклигин анықлаў ушын (5) шамасын табамыз:

$$\min_j\left(-\frac{\delta_j}{a_{3j}}\right) = \min\left(\frac{-1}{-1}; \frac{-1}{-2}\right) = \frac{1}{2}$$

Сонлықтан базиске P_2 векторы киргизиледи. Буннан соң жаңа симплекс-кестеге өтемиз (3-

кестениң II бөлимине қараң).

Кестениң бул бөлиминен $Y=\left(2,0,\frac{1}{2}\right)$ векторы қосарлы мәселениң жаңа шешими болатуғыны көринип тур. Бул шешиминде (12) сызықлы функциясының мәниси $F(Y)=13$ болады. Солай етип, қосарлы симплекс усылының алгоритми жәрдеминде қосарлы мәселениң бир шешиминен екинши шешимине өтиў белгили қәде бойынша иске асырылды.

Бирақта, P_0 векторының бағанасында -7 терис саны бар болғанлықтан, 2-қатардың элементлерин көзден өткеремиз. Бул санлардың арасында тек бир $-\frac{3}{2}$ саны бар. Егерде бундай сан болмағанла, дәслепки берилген мәселе шешимге ийе болмаған болар еди. Бул жағдайда жаңа симплекс-кестеге өтемиз (3-кестениң III бөлимине қараң).

Кестениң соңғы бөлиминен дәслепки берилген ҳәм қосарлы мәселениң оптималь шешимлери табылғанын көремиз:

$$X^*=\left(\frac{14}{3},\frac{2}{3},\frac{8}{3},0\right) \text{ ҳәм } Y^*=\left(2,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right).$$

Бул шешимлерде берилген ҳәм қосарлы мәселелердиң мақсет функцияларының мәнислери $Z_{\max}=F_{\min}=\frac{32}{3}$ болады.

13-§. Транспорт маселеси модели

Ҳәзирги ўақытта сызықлы программаластырыўдың транспорт мәселеси ҳәр қыйлы экономикалық мәселелерди теориялық жақтан тийкарлаўда ҳәм жобаластырыў практикасында кең қолланылады. Ол, әсиресе, санаат ҳәм аўылхожалығының ең әҳмийетли өнимлерин жеткерип бериўде, сондай-ақ жүк тасыўдың ҳәм транспорттың ҳәр қыйлы түрлериниң жумысларын оптималь жобаластырыўда оғада айырықша әҳмийетке ийе болады.

Транспорт мәселеси сызықлы программаластырыў мәселеси болғанлықтан, оны симплекс усылы менен шешиўге болады. Бирақ, симплекс усылын транспорт мәселесин шешиўге тиккелей қолланыў мақсетке муўапық келмейди. Өйткени, бул усыл сызықлы программаластырыўдың қәлеген мәселесин шешиўдиң ҳәр тәреплемели (универсал) усылы бола отырып, транспорт мәселесиниң шегаралаўшы шәртлериниң өзгешеликлерин есапқа алмайды. Сонлықтан транспорт мәселесин шешиўге симплекс усылын қолланыў үлкен көлемдеги есаплаў жумысларын орынлаўды талап етеди.

Транспорт мәселесиниң шегаралаўшы шәртлериниң коэффициентлеринен жасалған $A=\left(a_{ij}\right)$ $\left(i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}\right)$ матрицасының элементлери 0 ҳәм 1 цифрларынан ибарат болып, оның ҳәр бир бағанасында тек еки элемент нольден өзгеше, ал қалған элементлери нольге тең болады. Бул мәселениң шеклеўлер системасының матрицасының көрсетилген қәсийети есапқа алынып, оны шешиўдиң, симплекс усылы менен салыстырғанда әдеўир әпиўайы ҳәм қолланыў ушын қолайлы, арнаўлы усыллары исленип шығылған. Олар, симплекс усылы сыяқлы, дәслеп мәселениң басланғыш таяныш шешимин, ал соңынан оны жақсылай отырып, оптималь шешимин табыўға мүмкиншилик береди. Көпшилик жағдайларда бундай усыллар симплекс усылының дара жағдайлары болады.

Транспорт мәселесиниң (ямаса тәмийнлеўшилерди тутыныўшыларға бекитиў мәселесиниң) қойылыўы жоқарыда 2-параграфта келтирилген еди. Енди бул мәселениң мазмунын еске түсиремиз.

Мейли, тәмийнлеўши $A_1,A_2,...,A_m$ базаларында сәйкес $a_1,a_2,...,a_m$ тонна бир қыйлы өним (жүк) (мәселен, ун, қант, дуз, таскөмир ҳ.т.б.) бар болсын. Бул өнимди талаплары сәйкес $b_1,b_2,...,b_n$ тонна болған $B_1,B_2,...,B_n$ тутыныўшыларына (складларына) жеткерип бериў керек. Бир тонна өнимди i-тәмийнлеўшиден j-тутыныўшыға жеткерип бериў ушын жумсалатуғын транспорт шығыны c_{ij} пул бирлигине тең. Сонда, барлық өнимди толық тасып, тутыныўшылардың талапларын толық қанаатландырғандай ҳәм транспорт шығынларының улыўма муғдары ең аз (минимум) болғандай етип, өнимди тасыў жобасын жасаў талап етиледи.

Усылайынша қойылған транспорт мәселесиниң математикалық моделин жасаў ушын x_{ij} арқалы i-тәмийнлеўшиден j-тутыныўшыға тасылыўы керек өнимниң муғдарын белгилеймиз.

Сонда транспорт мәселесиниң шәртлерин төмендеги арнаўлы кестеге жазыўға болады.

1-кесте

Тәмийнлеўшилер	Тутыныўшылар				Өнимниң бар муғдары
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Талаплары	b_1	b_2	…	b_n	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$

Кестедеги $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n})$ матрицасы – өним тасыў жобасы деп, ал $C = (c_{ij})$ $(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n})$ матрицасы транспорт шығынларының матрицасы деп аталады.

Мәселениң шәрти бойынша i-тәмийнлеўшиден j-тутыныўшыға x_{ij} тонна өним тасыў жобаластырылған. Бундай муғдардағы өнимди тасыў ушын жумсалатуғын транспорт шығыны $c_{ij}\, x_{ij}$ пул бирлигине тең болады. Сонлықтан жобаластырылған барлық өнимди тасыў ушын жумсалатуғын транспорт шығынларының улыўма муғдары

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

функциясы менен аңлатылады.

Шеклеўлер системасы мәселениң төмендеги шәртлеринен келип шығады:

а) ҳәр бир тәмийнлеўшидеги барлық өним тутыныўшыларға толық тасылыўы (бөлистирилиўи) керек. Бул талап математикалық жақтан төмендегише жазылады:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m})$$

Бул теңлемелер 1-кестениң қатарларынан келип шығады;

б) тутыныўшылардың талаплары толық қанаатландырылады:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n})$$

Бул теңлемелер 1-кестениң бағаналарынан келип шығады;

в) өнимди тасыўдың көлеми терис болмаўы керек:

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}).$$

Солай етип, транспорт мәселесиниң математикалық модели төмендегише жазылады:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}). \tag{4}$$

Транспорт мәселесиниң бул математикалық моделинде тәмийнлеўшилерде бар өнимниң улыўма муғдары тутыныўшылардың талапларының улыўма муғдарына тең деп уйғарылды:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{5}$$

Сонлықтан транспорт мәселесиниң (1)-(4) модели, оның жабық модели деп аталады. Егерде (5) шәрти орынланбаса, онда транспорт мәселесиниң бул модели, оның ашық модели деп аталады.

Соңғы (5) теңлиги транспорт мәселесиниң шешимге ийе болыў шәрти де болады. Бул ҳаққында төмендеги теорема дурыс болады.

1-теорема. Транспорт мәселеси шешимге ийе болыўы ушын (5) шәртиниң орынланыўы зәрүрли ҳәм жеткиликли.

Дәлиллениўи. Дәслеп теореманың шәртиниң зәрүрли екенлигин дәлиллеймиз. Мейли, (2) ҳәм (3) шеклеўлериниң системасы мәселениң мүмкин болған шешимлериниң көплигинде бирликли, яғный (2) ҳәм (3) системаларын қанаатландыратуғын $x_{ij} \geq 0$ $\left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right)$ санлары бар болсын. Сонда (2) теңликлерин избе-из i индекси бойынша, ал соңынан (3) теңликлерин j индекси бойынша қосып шығып, мына еки теңликке келемиз:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i , \qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Бул теңликлердиң шеп жақлары бир-биринен тек барлық x_{ij} ларды есаплаўдың тәртиби менен ғана парық қылады. Сонлықтан олар бир-бирине тең болады. Буннан олардың оң жақларының да тең болатуғыны келип шығады:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Енди теореманың шәртиниң жеткиликли болатуғынын дәлиллеймиз. Мейли,

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d > 0$$

болсын. Сонда $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{d}$ $\left(i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}\right)$ шамалары шеклеўлердиң (2), (3) системаларын қанаатландырады, яғный мәселениң шешими болады. Ҳақыйқатында да, x_{ij} лердиң мәнислерин (2) ҳәм (3) теңлемелерине апарып қойып, мына нәтийжелерге келемиз:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{a_i}{d} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{d} \cdot d = a_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{d} = \frac{b_j}{d} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{d} \cdot d = b_j$$

Буннан тысқары, $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{d} > 0$ болады.

Келеси мәселе транспорт мәселесиниң мүмкин болған шешимлериниң көплигинде, оның мақсет функциясының шегараланғанын көрсетиў болады. Буның ушын c_{ij} лердиң мәнислериниң арасынан ең үлкен $c' = \max c_{ij}$ мәнисин сайлап алып, (1) мақсет функциясының барлық коэффициентлерин c' шамасына алмастырамыз. Сонда (2) теңлигин есапқа алып, мына теңликке келемиз:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \leq c' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = c' \sum_{i=1}^{m} a_i = c'd$$

Тап сондай етип, c_{ij} лердиң мәнислериниң арасынан ең киши $c'' = \min c_{ij}$ мәнисин сайлап алып, мақсет функциясының барлық коэффициентлерин c'' санына алмастырамыз ҳәм (2) теңлигин есапқа алып, төмендеги қатнасларды жаза аламыз:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ge c''\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = c''\sum_{i=1}^{m} a_i = c''d$$

Соңғы еки теңсизликти бириктирип, жуўмағында мына қос теңсизликке келемиз:

$$c''d \le Z(X) \le c'd \, ,$$

яғный транспорт мәселесиниң мақсет функциясы, оның мүмкин болған шешимлериниң көплигинде шегараланған болады. Солай етип, (5) шәрти орынланғанда транспорт мәселеси оптималь шешимге ийе болады. Теорема дәлилленди.

Енди ашық моделли транспорт мәселесине қысқаша тоқтап өтемиз. Егерде өнимниң тәмийнлеўшилерде бар муғдары тутыныўшылардың талапларының қосындысынан артық болса, яғный

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6}$$

теңсизлиги орынланса, онда өнимге болған талабы

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{7}$$

шамасына тең, жалған $(n+1) - B_{n+1}$ тутыныўшысы киргизиледи. Бул тутыныўшыға жумсалатуғын транспорт шығынлары нольге тең деп есапланады: $c_{in+1} = 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right)$. Усылайынша келип шыққан транспорт мәселеси ушын (5) шәрти орынланады.

Тап сол сыяқлы, егерде

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{8}$$

болса, онда жалған $(m+1) - A_{m+1}$ тәмийнлениўшиси киргизиледи. Ондағы өнимниң бар муғдары

$$a_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_j \tag{9}$$

шамасына тең деп есапланып, бул муғдардағы өнимди тасыў ушын жумсалатуғын транспорт шығынлары нольге тең деп уйғарылады: $c_{n+1j} = 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right)$. Нәтийжеде бул жағдайда да әдеттеги жабық моделли транспорт мәселеси келип шығады ҳәм бул соңғы мәселениң оптималь шешиминен дәслепки берилген мәселениң оптималь шешими анықланады.

Көрсетилген себеплерге байланыслы, алдағы ўақытта жабық моделли транспорт мәселеси қаралады. Егерде ашық моделли транспорт мәселеси берилген болса, онда жоқарыда көрсетилген усыллардың биреўинен пайдаланып, мәселениң шәртлериниң кестесин (5) шәрти орынланғандай етип, қайта жасаў керек.

Жоқарыда келтирилген (1)-(4) транспорт мәселеси канոникалық көринисте жазылған сызықлы программаластырыў мәселеси болады. Егерде m тәмийнлениўшиси ҳәм n тутыныўшысы бар транспорт мәселеси берилген болса, онда x_{ij} өзгериўшилериниң (белгисизлериниң) саны $n \cdot m$ ге, ал (2) ҳәм (3) системаларындағы теңлемелердиң саны $n+m$ ге тең болады. Бирақта уйғарыўымыз бойынша (5) шәрти орынланатуғынлықтан, сызықлы байланыссыз теңлемелердиң саны, яғный (2), (3) теңлемелериниң коэффициентлеринен жасалған матрицаның ранги $n+m-1$ ге тең болады. Демек, транспорт мәселесиниң таяныш шешими $n+m-1$ ден артық болмаған нольден өзгеше дүзиўшилерге ийе бола алады.

Егерде транспорт мәселесиниң таяныш шешиминде нольден өзгеше дүзиўшилериниң саны дәл $n+m-1$ ге тең болса, онда оның бул шешими айнымаған, ал $n+m-1$ ден киши (кем) болса, онда айныған шешими деп аталады.

Транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин табыўдың бир неше усыллары бар. Төменде олардың айырымлары менен танысамыз.

14-§. Транспорт маселесинде тирек планларды табыу

1. Арқа-батыс мүйеши усылы. Транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин табыўдың бир неше усыллар бар. Олардың ишинде ең әпиўайысы арқа-батыс мүйеши усылы болады. Бул усылда, гезектеги тәмийнлеўшидеги өнимлердиң бар муғдары толық тасып (бөлистирилип) болғанынша, гезектеги тутыныўшылардың талапларын қанаатландырыў ушын пайдаланылады. Тек буннан соң ғана гезектеги тәмийнлеўшидеги өнимниң бар муғдары бөлистириледи.

Бул усылдың мәнисин түсиндириў ушын транспорт мәселесиниң белгили параметрлери ҳәм белгисизлери жазылған жоқарыдағы 1-кестеден пайдаланамыз. Бул кестедеги нольден өзгеше x_{ij} жазылған клеткалар (көзгенеклер) “толтырылған клеткалар” деп, ал қалғанлары “бос клеткалар” деп аталады.

Кестениң мына қәсийетлерин атап өтемиз:

а) i - қатарының толтырылған клеткаларындағы санлардың қосындысы a_i ге тең;

б) j - бағанасының толтырылған клеткаларындағы санлардың қосындысы b_j ге тең;

в) соңғы қатарындағы санлардың қосындысы соңғы бағанасындағы санлардың қосындысына тең.

Транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин табыўдың арқа-батыс мүйеши усылы шекли сандағы адымлардың избе-излигинен турады. Оның ҳәр бир адымында, гезектеги тәмийнлеўшидеги өнимниң бар муғдарын ҳәм гезектеги тутыныўшының талабын есапқа алып, 1-кестениң жоқарғы шеп мүйешиндеги (арқа-батыс мүйешиндеги) тек бир клеткасы толтырылады. Сонлықтан бар өними толық тасылып болынған тәмийнлеўши ямаса өнимге болған талабы толық қанаатландырылған тутыныўшы алдағы ўақытта есапқа алынбайды (қаралмайды, сызылады).

Дәслеп (A_1, B_1) клеткасында жайласқан x_{11} белгисизиниң мәниси табылады: $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Бунда: а) егер $a_1 < b_1$ болса, онда $x_{11} = a_1$, $x_{1j} = 0 \quad (j = 2,3,\dots,n)$, $b_1' = b_1 - a_1$ деп қабыл етиледи; б) егер $a_1 > b_1$ болса,онда $x_{11} = b_1$, $x_{i1} = 0 \quad (i = 2,3,\dots,m)$, $a_1' = a_1 - b_1$ деп қабыл етиледи.

Мейли, а) жағдайы орын алсын. Бул жағдайда кестениң 2-қатарындағы 1-элементиниң мәниси табылады:

$$x_{21} = \min(a_2, b_1')$$

Егер $a_2 > b_1'$ болса, онда

$$x_{21} = b_1', \; x_{i1} = 0 \quad (i = 3,4,\dots,m), \quad a_2' = a_2 - b_1' \qquad \text{деп алынады.}$$

Егер $a_2 < b_1'$ болса, онда

$$x_{21} = a_2, \; x_{2j} = 0 \quad (j = 3,4,\dots,n), \; b_1'' = b_1' - a_2$$

деп алынады.

Тап усылайынша даўам етип, усылдың ҳәр бир адымында бир x_{ij} диң мәниси табылады. Бул процесс барлық $a_i \quad (i = \overline{1,m})$ ҳәм $b_j \quad (j = \overline{1,n})$ нольге айланғанша даўам етеди.

Солай етип, арқа-батыс мүйеши усылының ҳәр бир адымы 1-кестениң толтырылмаған үлесиниң жоқарғы шеп мүйешинен басланады ҳәм я қатардың, ямаса бағананың толтырылыўына алып келеди. Бундай адымлардың улыўма саны, яғный мәселениң мүмкин болған шешиминдеги оң x_{ij} лардың саны $n + m - 1$ ден артық болмайды. Усылдың көрсетилген алгоритми менен есаплаўларды орынлаў, тәмийнлеўшилерден барлық өнимлер толық тасылып болғанша ҳәм тутыныўшылардың өнимге болған талаплары толық қанаатландырылғанша даўам етеди. Басқаша айтқанда, бул усыл менен есаплаў процесси, кестениң ең соңғы қатары менен бағанасының барлық элементлери нольге тең болғанда ғана тоқтатылады.

Мысалы. Төмендеги транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин арқа-батыс мүйеши усылы менен табың:

2-кесте

	Тутыныўшылар					Өнимниң бар	a_i'	a_i''	a_i'''

Тәмийнлеўшилер	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	муғдары: a_i			
A_1	$\boxed{10}$ 100	$\boxed{7}$	$\boxed{4}$	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	100	0	0	0
A_2	$\boxed{2}$ 100	$\boxed{7}$ 50	$\boxed{10}$	$\boxed{6}$	$\boxed{11}$	250	150	0	0
A_3	$\boxed{8}$	$\boxed{5}$ 50	$\boxed{3}$ 100	$\boxed{2}$ 50	$\boxed{2}$	200	150	50	0
A_4	$\boxed{11}$	$\boxed{8}$	$\boxed{12}$	$\boxed{16}$ 50	$\boxed{13}$ 250	300	250	0	0
Талаплары: b_j	200	200	100	100	250	850			
b'_j	100	50	0	50	0				
b''_j	0	0	0	0	0				

Шешилиуи. Бул мәселеде тәмийнлеўшилердиң саны $m=4$, ал тутыныўшылардың саны $n=5$. Демек, берилген мәселениң басланғыш таяныш шешими толтырылған 5+4-1=8 клеткалардағы санлар менен анықланады.

Транспорт шығынларының

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 10 & 6 & 11 \\ 8 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 11 & 8 & 12 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

матрицасының элементлери 2-кестениң клеткаларының жоқарғы оң мүйешлерине жазылған.

Кестени толтырыўды (белгисизлердиң мәнислерин анықлаўды) x_{11} белгисизи жазылған клеткадан баслаймыз, яғный B_1 тутыныўшысының талабын A_1 тәмийнлеўшисинде бар өнимниң есабынан қанаатландырыўға ҳәрекет етемиз. Сонда берилген мәселени арқа-батыс мүйеши усылы менен шешиўдиң 1-адымының нәтийжелери төмендегише болады:

$$x_{11}=\min(a_1,b_1)=\min(100,200)=100;$$

$$a'_1=a_1-x_{11}=100-100=0; \quad b'_1=b_1-a_1=200-100=100$$

Демек, 1-тәмийнлеўшиниң өними толық таўсылды. Сонлықтан оны ўақытша өширемиз ҳәм C матрицасының 1-қатарын сызамыз.

2-адымы: $x_{21}=\min(a_2,b'_1)=\min(250,100)=100$; $a'_2=a_2-b'_1=250-100=150$; $b''_1=b'_1-x_{21}=100-100=0$

Бул адымда 1-тутыныўшының талабы толық қанаатландырылды. Сонлықтан кестениң 1-бағанасы сызылады.

3-адымы. $x_{22}=\min(a'_2,b_2)=\min(150,200)=150$; $a''_2=a'_2-x_{22}=150-150=0$; $b'_2=b_2-a'_2=200-150=50$

Бунда 2-тәмийнлеўшиниң өними толық таўсылды. Сонлықтан ол ўақытша қаралмайды ҳәм кестениң 2-қатары сызылады.

4-адымы. $x_{32}=\min(a_3,b'_2)=\min(200,50)=50$; $a'_3=a_3-b'_2=200-50=150$; $b''_2=b'_2-x_{32}=50-50=0$

Бул жағдайда 2-тутыныўшының талабы толық қанаатландырылды. Сонлықтан ол ўақытша есапқа алынбайды ҳәм кестениң 2-бағанасы сызылады.

5-адымы. $x_{33}=\min(a'_3,b_3)=\min(150,100)=100$; $a''_3=a'_3-b_3=150-100=50$; $b'_3=b_3-x_{33}=100-100=0$

Демек, бул адымда 3-тутыныўшының талабы толық қанаатландырылды. Сонлықтан ол алдағы ўақытта ўақытша есапқа алынбайды ҳәм кестениң 3-бағанасы сызылады.

6-адымы. $x_{34}=\min(a''_3,b_4)=\min(50,100)=50$; $a'''_3=a''_3-x_{34}=50-50=0$;

$b_4' = b_4 - a_3'' = 100 - 50 = 50$

Демек, 3-тәмийнлеўшиниң өними толық таўсылды. Ол ўақытша есапқа алынбайды ҳәм кестениң 3-қатары сызылады.

7-қатары. $x_{44} = \min(a_4, b_4') = \min(300, 50) = 50$; $a_4' = a_4 - b_4' = 300 - 50 = 250$; $b_4'' = b_4' - x_{44} = 50 - 50 = 0$

Сонлықтан 4-тутыныўшы есаптан шығарылады ҳәм кестениң 4-бағанасы сызылады.

8-адымы. $x_{45} = \min(a_4', b_5) = \min(250, 250) = 250$; $a_4'' = a_4' - b_5 = 250 - 250 = 0$; $b_5' = b_5 - x_{45} = 250 - 250 = 0$

Бул адымда ең соңғы 4-тәмийнлеўшиниң өними толық таўсылды ҳәм ең соңғы 5-тутыныўшының да талабы толық қанаатландырылды.

Усылдың ҳәр бир адымында алынған нәтийжелерди 2-кестениң сәйкес клеткаларына жазамыз. Усының менен берилген транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин табыў процесси тамамланады.

Орынды үнемлеў мақсетинде x_{ij} белгисизлериниң табылған мәнислери де 2-кестеге жазылған (әдетте мәселениң табылған шешимин жазыў ушын өз алдына жаңа кесте жасалады). Сондай-ақ, қолайлылық ушын тәмийнлеўшилерден еле алып кетилмеген өнимниң муғдарлары a_i', a_i'', a_i''' бағаналарына, ал тутыныўшылардың еле қанаатландырылмаған талапларының муғдарлары b_j', b_j'' қатарларына жазылған. Нәтийжеде 2-кестеде берилген транспорт мәселесиниң мына басланғыш таяныш шешимине ийе боламыз:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 100 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 250 \end{pmatrix}$$

Табылған $X^{(0)}$ шешими берилген транспорт мәселесиниң айнымаған басланғыш таяныш шешими болады. Себеби 2-кестедеги толтырылған кестелердиң саны $r = n + m - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$ болыўы керек. Ҳақыйқатында да, бул кестеде оң x_{ij} санлары жазылған 8 клетка бар.

Өнимди тасыўдың табылған $X^{(0)}$ жобасы бойынша барлық өнимди тасыў ушын жумсалатуғын улыўма транспорт шығынлары

$$Z\left(X^{(0)}\right) = 10 \cdot 100 + 2 \cdot 100 + 7 \cdot 150 + 5 \cdot 50 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 50 + 16 \cdot 50 + 13 \cdot 250 = 6950$$

пул бирлигине тең болады.

2. Ең аз шығынлар усылы. Жоқарыда баянланған арқа-батыс мүйеши усылында транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин жасағанда транспорт шығынлары есапқа алынбады. Бул жағдай мәселениң басланғыш таяныш шешимин табыў ушын керекли болған адымлардың санының әдеўир көбейиўине (артыўына) алып келеди. Ең аз шығынлар усылында арқа-батыс мүйеши усылының бул кемшилиги сапластырылған. Сонлықтан мәселениң ең аз шығынлар усылы менен табылған басланығыш таяныш шешими, арқа-батыс мүйеши усылы менен табылған бундай шешими менен салыстырғанда оның оптималь шешимине әдеўир жақын болады. Өйткени бул усылда транспорт шығынларының $C = (c_{ij})$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ матрицасы пайдаланылады. Арқа-батыс мүйеши усылы сыяқлы, ең аз шығынлар усылы да бир неше бир қыйлы адымлар избе-излигинен турады. Усылдың ҳәр бир адымында транспорт мәселесиниң кестесиниң ең аз $\min c_{ij}$ шығыны сәйкес келетуғын клеткасы толтырылады ҳәм кестеден тек бир қатар (тәмийнлеўши) ямаса тек бир бағана (тутыныўшы) шығарылады. Буннан соң, $\min c_{ij}$ мәниси сәйкес келетуғын гезектеги клеткасы арқа-батыс мүйеши усылының қәделери бойынша толтырылады. Бар өними толық тасып болынған тәмийнлеўши ҳәм өнимге болған талабы толық қанаатландырылған тутыныўшы буннан былай ўақытша есаптан шығарылады (қаралмайды). Солай етип, усылдың ҳәр бир адымында я бир тәмийнлеўши, ямаса бир тутыныўшы есаптан шығарылып барылады.

Ең аз шығынлар усылы транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешишмин дәл

$n+m-1$ адымнан соң табыўға мүмкиншилик береди. Бунда $x_{ij}>0$ белгисизлериниң саны $n+m-1$ ден киши болыўы да мүмкин. Бундай жағдайларда берилген трнаспорт мәселесиниң айныған таяныш шешими келип шығады.

Мысалы. Басланғыш таяныш шешими жоқарыда арқа-батыс мүйеши усылы менен табылған транспорт мәселесин қараймыз (2-кестеге қараң). Енди оның бундай шешимин анықлаў ушын ең аз шығынлар усылын қолланамыз.

Шешилиўи. Дәслеп, транспорт шығынлары матрицасынан ең аз шығынларды сайлап алыў, оның есаптан шығарылған қатарларын ҳәм бағаналарын сызыў қолайлы болыўы ушын бул матрицаны өз алдына бөлек жазып аламыз:

$$C=\begin{array}{c c}\begin{pmatrix}10 & 7 & 4 & 1 & 4\\ 2 & 7 & 10 & 6 & 11\\ 8 & 5 & 3 & 2 & 2\\ 11 & 8 & 12 & 16 & 13\end{pmatrix} & \begin{array}{c}1\\4\\3\\7\end{array}\\ \begin{array}{ccccc}2 & 5 & 6 & 1 & 7\end{array} & \end{array}$$

Буннан соң, берилген транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин ең аз шығынлар усылы менен анықлаў төмендеги избе-изликте орынланады:

1) Транспорт шығынлары матрицасының элементлериниң арасынан ең кишисин сайлап аламыз: $\min c_{ij}=c_{14}=1$ ҳәм оны дөңгелеклеп қоямыз. Бул c_{14} элементи жайласқан клеткадағы x_{14} белгисизиниң мәнисин анықлаймыз:

$$x_{14}=\min(a_1,b_4)=\min(100,\ 100)=100\,;$$

$$a_1'=a_1-b_4=100-100=0\,,\quad b_4'=b_4-x_{14}=100-100=0$$

Солай етип, 1-тәмийнлеўшиниң өними таўсылды ҳәм 4-тутыныўшының талабы толық қанаатландырылды. Сонлықтан олар есаптан шығарылады, яғный C матрицасының 1-қатары ҳәм 4-бағанасы сызылады:

2) C матрицасының қалған үлесиндеги ең киши элемент $c_{21}=2$ болады. Сонлықтан x_{21} белгисизиниң мәнисин анықлаймыз:

$$x_{21}=\min(a_2,b_1)=\min(250,\ 200)=200\,;$$

$$a_2'=a_2-b_1=250-200=50\,;\quad b_1'=b_1-x_{21}=200-200=0$$

Усылдың бул адымында 1-тутыныўшының талабы толық қанаатландырылды. Сонлықтан 1-тутыныўшы есаптан шығарылады ҳәм C матрицасының 1-бағанасы сызылады.

3) Бул адымда C матрицасының қалған үлесиндеги ең киши элемент $c_{35}=2$ болады. Усы себепли x_{35} белгисизиниң мәнисин есаплаймыз:

$$x_{35}=\min(a_3,b_5)=\min(200,\ 250)=200\,;$$

$$a_3'=a_3-x_{35}=200-200=0\,;\quad b_5'=b_5-a_3=250-200=50$$

Демек, 3-тәмийнлеўши есаптан шығарылады ҳәм C матрицасының 3-қатары сызылады.

4) C матрицасының қалған үлесиндеги ең киши элемент $c_{22}=7$ саны болады. Сонлықтан бул адымда x_{22} белгисизиниң мәниси есапланады:

$$x_{22}=\min(a_2',b_2)=\min(50,\ 200)=50\,;$$

$$a_2''=a_2'-x_{22}=50-50=0\,;\quad b_2'=b_2-a_2'=200-50=150$$

Бул адымда 2-тәмийнлеўши есаптан шығарылады ҳәм C матрицасының 2-қатары сызылады.

5) Бул адымда

$$c_{42}=8\,,\ x_{42}=\min(a_4,b_2')=\min(300,\ 150)=150\,;$$

$$a_4'=a_4-b_2'=300-150=150\,;\quad b_2''=b_2'-x_{42}=150-150=0$$

болады ҳәм 2-тутыныўшы есаптан шығарылып, C матрицасының 2-бағанасы сызылады.

6) Бул адымда есаплаўлар мына нәтийжелерге алып келеди:

$$c_{43}=12\,,\ x_{43}=\min(a_4',b_3)=\min(150,\ 100)=100\,;$$

$$a_4''=a_4'-b_3=150-100=50\,;\quad b_3'=b_3-x_{43}=100-100=0$$

Сонлықтан 3-тутыныўшы есаптан шығарылады ҳәм C матрицасының 3-бағанасы сызылады.

7) Усылдың бул адымында сәйкес есаплаўларды орынлап, мына нәтийжелерге келемиз:

$$c_{45} = 13, \; x_{45} = \min(a_4'', b_5') = \min(50,\, 50) = 50;$$

$$a_4''' = a_4'' - b_5' = 50 - 50 = 0; \quad b_5'' = b_5' - x_{45} = 50 - 50 = 0$$

Бул жағдайда 4-тәмийнлеўши ҳәм 5-тутыныўшы есаптан шығарылады, яғный C матрицасының 4-қатары ҳәм 5-бағанасы сызылады.

Нәтийжеде, берилген транспорт мәселесиниң ең аз шығынлар усылы менен табылған, мына басланғыш таяныш шешимине ийе боламыз:

$$\overline{X}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 100 & 0 \\ 200 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 150 & 100 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Мәселениң бул шешиминде x_{ij} белгисизлериниң жети оң мәнислери бар: $x_{14} = 100$, $x_{21} = 200$, $x_{22} = 50$, $x_{35} = 200$, $x_{42} = 150$, $x_{43} = 100$, $x_{45} = 50$. Ал, транспорт шығынларының C матрицасының ранги $r = n + m - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$ ге тең, яғный оң мәнислерге ийе болған белгисизлердиң саны $r = 8$ санынан 1 ге кем. Сонлықтан берилген мәселениң ең аз шығынлар усылы менен табылған басланғыш таяныш шешими оның айныған шешими болады.

Табылған $\overline{X}^{(0)}$ басланғыш шешимине сәйкес келетуғын транспорт шығынларының улыўма муғдары

$$Z = \left(\overline{X}^{(0)}\right) = 1 \cdot 100 + 2 \cdot 200 + 7 \cdot 50 + 2 \cdot 200 + 8 \cdot 150 + 12 \cdot 100 + 13 \cdot 50 = 4300$$

пул бирлигине тең.

Солай етип, $\overline{X}^{(0)}$ шешими ушын транспорт шығынлары, арқа-батыс мүйеши усылы менен табылған $X^{(0)}$ шешими менен салыстырғанда

$$Z\left(X^{(0)}\right) - Z\left(\overline{X}^{(0)}\right) = 6950 - 4300 = 2650$$

пул бирлигине кем болады. Басқаша айтқанда, ең аз шығынлар усылы менен табылған $\overline{X}^{(0)}$ таяныш шешими арқа-батыс мүйеши усылы менен табылған $X^{(0)}$ таяныш шешими менен салыстырғанда берилген транспорт мәселесиниң оптималь шешимине жақынырақ болады.

15-16-§. Транспорт маселесин шешиудин потенциаллар усылы

Жоқарыда баянланған арқа-батыс мүйеши ҳәм ең аз шығынлар усылларынан пайдаланып, транспорт мәселесиниң айныған ямаса айнымаған басланғыш таяныш шешимин табыўға болады. Транспорт мәселеси сызықлы программаластырыў мәселеси болғанлықтан, оның табылған таяныш шешимин симплекс усылын қолланып, оптималь шешимине шекем жеткериўге болады. Бирақта, бул усыл менен мәселениң оптималь шешимин табыў ушын $n \cdot m$ белгисизлери бар симплекс-кестелерин жасаў ҳәм үлкен көлемдеги есаплаў жумысларын орынлаў талап етиледи. Сонлықтан транспорт мәселесиниң оптималь шешимин табыў ушын симплекс усылы менен салыстырғанда әдеўир әпиўайы ҳәм қолланыў ушын қолайлы усылларынан пайдаланады. Соңғы усыллардың арасында есаплаў практикасында кең таралғаны **потенциаллар усылы** болады ("потенциал" атамасы латынның "patentia" деген сөзинен алынған болып, бизиңше "күш", "қуўат" деген мәнислерди аңлатады. Оның физикалық мәниси: берилген ноқаттағы күш майданын (электр майданын, тартылыс күши майданын ҳ.т.б.) сыпатлайтуғын шама болады).

Потенциаллар усылы менен транспорт мәселесиниң оптималь шешишмин табыў сызықлы программаластырыў мәселесин симплекс усылы менен шешиўге уқсас орынланады. Атап айтқанда, дәслеп мәселениң таяныш шешимин табады, ал оннан соң бул шешимин оптималь шешими табылғанша избе-из жақсылап барады.

Егерде транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешимин табыў ушын арқа-батыс мүйеши ямаса ең аз шығынлар усылы пайдаланылса, онда мәселениң шәртлериниң кестесинде толтырылған $n + m - 1$ клеткаларды алыўға кепиллик бериледи. Соның менен бирге, бул клеткалардың айырымларында нольлерде болыўы, яғный мәселениң айнымалы таяныш шешими де келип шығыуы мүмкин. Мәселениң көрсетилген усыллар менен табылған айныған ямаса айнымаған басланғыш таяныш шешимин оптималлықќа тексериў керек болады.

Потенциаллар усылында тарнспорт мәселесиниң оптималь шешимин табыў басланғыш таяныш шешиминен басланып, оның оптималь шешимине жақынырақ болған, жаңа таяныш шешимине избе-из өтилип барылады. Нәтийжеде шекли сандағы адымлардан (итерациялардан) соң, мәселениң оптималь шешими табылады. Усылдың ҳәр бир адымында табылған таяныш шешимин оптималлыққа тексериў ушын ҳәр бир A_i тәмийнлеўшисине ҳәм B_j тутыныўшысына, оның потенциалы деп аталатуғын α_i ҳәм β_i шамалары сәйкес келтириледи. Бул потенциаллар $\alpha_i + \beta_i = c_{ij}$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ теңлиги орынланғандай етип, яғный олардың қосындысы A_i тәмийнлеўшисинен B_j тутыныўшысына бир бирлик өнимди тасыў ушын жумсалатуғын c_{ij} пул бирлигине (шығынға) тең болғандай етип, сайлап алынады. Потенциаллар усылының тийкарында төмендеги теорема жатады.

2-теорема. Егерде транспорт мәселесиниң базы бир $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ таяныш шешими ушын $x_{ij}^* > 0$ болғанда

$$\alpha_i + \beta_i = c_{ij} \qquad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right); \tag{10}$$

$x_{ij}^* = 0$ болғанда

$$\alpha_i + \beta_i \le c_{ij} \qquad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right) \tag{11}$$

шәртлерин қанаатландыратуғын $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$; $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ санлары бар болса, онда X^* – транспорт мәселесиниң оптималь шешими болады.

Дәлиллениўи. Мейли, (1)-(4) транспорт мәселесиниң базы бир $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ таяныш шешими ушын (10), (11) шәртлерин қанаатландыратуғын α_i, β_i $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ санлары бар болсын. Бул мәселениң X^* ҳәм қәлеген басқа $X = \left(x_{ij}\right)$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ таяныш шешими (2)-(4) шеклеўлерин қанаатландырады. Сонда буны ҳәм (10), (11) қатнасларын есапқа алып, төмендеги нәтийжеге келемиз:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \ge \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_i + \beta_j\right)x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\sum_{j=1}^{n}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{i=1}^{m}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{n}b_j\beta_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^* + \sum_{j=1}^{n}\beta_j\sum_{i=1}^{m}x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\alpha_i + \beta_j\right)x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}^* = Z\left(X^*\right)$$

Демек

$$Z(X) \ge Z\left(X^*\right)$$

болады. Буннан, (10) ҳәм (11) шәртлерин қанаатландыратуғын α_i, β_j $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ санлары бар болғанда $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ таяныш шешими (1)-(4) транспорт мәселесиниң оптималь шешими болатуғыны келип шығады. Теорема дәлилленди.

Дәлилленген теорема транспорт мәселесиниң оптималь шешимин потенциаллар усылы менен табыўдың алгоритмин жасаўға мүмкиншилик береди. Ол мыналардан ибарат.

1. Мейли, жоқарыда келтирилген арқа-батыс мүйеши ҳәм ең аз шығынлар усылларының биреўин қолланып, транспорт мәселесиниң басланғыш таяныш шешими табылған болсын. Ҳәр бир тәмийнлеўши ҳәм тутыныўшы ушын α_i, β_j $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ потенциаллары анықланады. Бул санларды

$$\alpha_i + \beta_j = c_{ij} \tag{12}$$

системасынан табады. Бунда c_{ij}-транспорт шығынлары матрицасының сәйкес элементлери, яғный алдын ала берилген санлар.

2. Транспорт мәселесиниң шәртлериниң кестесинде толтырылатуғын клеткаларының саны $n+m-1$ ге тең болғанлықтан, $n+m$ белгисизи бар (12) системасында $n+m-1$ теңлемелер бар, яғный белгисизлериниң саны теңлемелериниң санынан 1 ге артық болады. Сонлықтан белгисизлериниң биреўин қәлеген санға тең, мәселен $\alpha_1 = 0$ деп алып, (12) системасынан қалған белгисизлердиң мәнислерин избе-из анықлаўға болады. Барлық потенциаллар табылғаннан соң, кестениң хәр бир бос клеткасы ушын

$$\alpha_{ij} = \alpha_i + \beta_j - c_{ij} \qquad (13)$$

санын анықлайды.

а) егерде бул α_{ij} санларының арасында оң санлар жоқ болса, онда табылған таяныш шешими мәселениң оптималь шешими болады;

б) ал, егерде базы бир бос клетка ушын $\alpha_{ij} > 0$ болса, онда дәслепки таяныш шешими мәселениң оптималь шешими болмайды ҳәм жаңа таяныш шешимине өтиў керек болады. Буның ушын $\alpha_{ij} > 0$ болған барлық бос клеткаларды тексереди ҳәм бул санлардың арасынан ең үлкенин сайлап алады. Бундай санға сәйкес келетуғын бос клетканы толтырыў керек болады. Буны иске асырыў ушын толтырылған бир неше клеткалардағы ҳәм олар менен **цикл бойынша** байланысқан басқа клеткалардағы өнимлердиң көлемлери өзгертиледи.

Анықлама. Транспорт мәселесиниң шәртлериниң кестесиндеги цикл деп, төбелери кестениң толтырылған клеткаларында, ал буўынлары (бөлеклери) кестениң қатар ҳәм бағаналары бойынша жайласқан сынық сызыққа айтылады. Циклдиң ҳәр бир төбесинде сынық сызықтың биреўи кестениң қатарында, ал екиншиси кестениң бағанасында жатырған, дәл еки буўыны ушырасады.

Егерде цикл дүзиўши сынық сызықтың бөлеклери кесилиссе, онда кесилисиў ноқатлары циклдиң төбелери болмайды. Цикллердиң базы бир мысаллары 12-сүўретинде көрсетилген.

12-сүўрет

Мәселениң таяныш шешими дурыс табылса, онда кестениң қәлеген бос клеткасы ушын тек бир циклди жасаўға болады. Сайлап алынған бос клетка ушын цикл дүзилгеннен соң, жаңа таяныш шешимине өтеди. Буның ушын, бул бос клетка менен байланыслы клеткалардағы өнимлердиң орынлары алмастырылады. Бундай алмастырыўлар төмендеги қәделер бойынша орынланады:

1) сайлап алынған бос клетка менен цикл бойынша байланысқан ҳәр бир клеткаға бир анық белги бериледи. Бунда дәслепки алынған бос клеткаға қосыў (+) белгиси, ал басқа клеткаларға гезеги бойынша алыў (-) ҳәм қосыў (+) белгилери бериледи (12-сүўретке қараң). Бул клеткаларды қосыў белгили ҳәм алыў белгили клеткалар деп те атайды:

2) сайлап алынған бос клеткаға алыў белгили клеткалардағы санлардың ең кишисин жазады. Буннан соң, бул санды қосыў (+) белгили клеткалардағы санларға қосады, ал алыў (-) белгили клеткалардағы санлардан алады. Нәтийжеде сайлап алынған ҳәм бурын бос болған клетка енди толтырылған клетка болады, ал x_{ij} санларының ең кишиси жазылған клетка енди бос клеткаға айланады.

Солай етип, сайлап алынған бос клетка менен цикл бойынша байланысқан клеткалардағы өнимлердиң орынларын алмастырыў, транспорт мәселесиниң жаңа таяныш шешимин анықлайды. Усындай усыл менен транспорт мәселесиниң бир таяныш шешиминен екинши таяныш шешимине өтиў **қайта есаплаў цикли бойынша жылыстырыў** деп аталады.

Қайта есаплаў цикли бойынша жылыстырғанда толтырылған клеткалардың саны өзгериссиз қалады, яғный $n+m-1$ ге тең болады. Егерде бунда алыў белгили клеткаларда еки ямаса оннан көп тең x_{ij} санлары бар болса, онда бундай клеткалардың тек биреўин ғана босатады, ал қалғанлары толтырылған клеткалар болып қалады.

Транспорт мәселесиниң көрсетилген усыл менен табылған жаңа таяныш шешими оптималлыққа тексериледи. Буның ушын тәмийнлеўшилердиң ҳәм тутыныўшылардың потенциалларын анықлайды ҳәм (13) санларын табады. Егерде бул санлардың арасында оң санлар жоқ болса, онда мәселениң оптималь шешиминиң табылғаны. Ал, егерде оң санлар бар болса, онда жоқарыда көрсетилген усыл менен жаңа таяныш шешимине өтеди. Усылдың шекли сандағы бир неше адымларын орынлағаннан соң, транспорт мәселесиниң оптималь шешими анықланады.

Солай етип, транспорт мәселесиниң оптималь шешимин потенциаллар усылы менен табыў төмендеги этаплардан турады:

1. Басланғыш таяныш шешими табылады. Бунда толтырылған клеткалардың саны $n+m-1$ ге тең болыўы керек.

2. Тәмийнлеўшилердиң ҳәм тутыныўшылардың сәйкес α_i ҳәм β_j потенциалларын табады.

3. Ҳәр бир бос клетка ушын (13) формуласы бойынша α_{ij} санларын анықлайды. Егерде α_{ij} санларының арасында оң санлар жоқ болса, онда транспорт мәселесиниң оптималь шешиминиң табылғаны; ал, егерде ондай санлар бар болса, онда жаңа таяныш шешимине өтеди.

4. $\alpha_{ij} > 0$ санларының арасынан ең үлкенин сайлап алады, оған сәйкес бос клетка ушын қайта есаплаў циклин жасайды ҳәм ол бойынша жылыстырыў орынланады.

5. Табылған таяныш шешимин оптималлыққа тексереди, яғный 2-этаптан баслап барлық әмеллерди қайтадан тәкирарлайды.

Жуўмағында мынаны айырықша атап өтемиз. Көрсетилген усыл менен транспорт мәселесин шешиўдиң барысында айныған таяныш шешими келип шығыўы мүмкин. Бундай жағдайларда цикллесиў қубылысынан қутылыў ушын таяныш шешимниң нольге тең элементлерин оғада киши $\varepsilon > 0$ саны менен алмастырып, мәселени айнымаған мәселе есабында шешиў керек. Бундай мәселениң оптималь шешиминде ε шамасы нольге тең деп есапланады.

Мысалы. 1. Дәслепки мағлыўматлары төмендеги кестеде берилген транспорт мәселесин потенциаллар усылы менен шешиң:

3-кесте

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	1	200
A_2	2	3	5	6	300
A_3	6	7	9	12	500
b_j	200	200	300	400	1000 1100

Шешилиўи. Мәселениң шешимге ийе болыўының зәрүрли ҳәм жеткиликли шәртиниң орынланыўын, яғный (5) теңлигиниң орынланыўын тексеремиз:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 200+300+500=1000, \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 200+200+300+400=1100$$

Демек, ашық моделли транспорт мәселеси берилген. Бул жағдайда (8) теңсизлиги орынланады. Сонлықтан өнимниң бар муғдары $a_4 = 1100-1000=100$ бирликке тең ҳәм өнимниң бир бирлигин тасыў шығыны нольге тең болған, төртинши жалған тәмийнлеўшини киргиземиз (4-кесте).

4-кесте

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	1 200	200
A_2	2 200	3 100	5	6	300
A_3	6	7 100	9 300	12 100	500
	0	0	0	0	100

A_4	0	0	0	0 100	100
b_j	200	200	300	400	1100 1100

2. Мәселениң басланғыш $X^{(0)}$ таяныш шешимин ең аз шығынлар усылы менен табамыз (4-кесте). Ол мәселениң айнымаған шешими болады. Өйткени $r = n + m - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ ге тең ҳәм $x_{ij} > 0$ белгисизлериниң саны да 7 ге тең. Транспорт мәселесиниң мақсет функциясының усы $X^{(0)}$ басланғыш таяныш шешиминдеги мәнисин есаплаймыз:

$$Z\left(X^{(0)}\right) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 100 + 9 \cdot 300 + 12 \cdot 100 + 0 \cdot 100 = 5300$$

3. Табылған басланғыш таяныш шешимин оптималлыққа тексериў ушын α_i, β_j $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$ потенциалларын анықлаў керек. Буның ушын (12) системасын дүзип, оны шешемиз:

$$\alpha_1 + \beta_4 = 1,$$
$$\alpha_2 + \beta_1 = 2,$$
$$\alpha_2 + \beta_2 = 3,$$
$$\alpha_3 + \beta_2 = 7,$$
$$\alpha_3 + \beta_3 = 9,$$
$$\alpha_3 + \beta_4 = 12,$$
$$\alpha_4 + \beta_4 = 0$$

Бул система сегиз белгисизли жети теңлемеден турады, яғный анықланбаған система. Сонлықтан потенциаллардың биреўине қәлеген мәнис беремиз: мейли, $\alpha_3 = 0$ болсын. Сонда қалған потенциаллар бир мәнисли анықланады:

$$\alpha_3 = 0,\ \beta_2 = 7,\ \beta_3 = 9,\ \beta_4 = 12,\ \alpha_1 = -11,\ \alpha_4 = -12,\ \alpha_2 = -4,\ \beta_1 = 6$$

4. Енди 4-кестедеги $X^{(0)}$ басланғыш таяныш шешимин оптималлыққа тексеремиз. Усы мақсетте, толтырылмаған клеткалар ушын (13) теңлигинен пайдаланып α_{ij} санларын есаплаймыз (толтырылған клеткалар ушын $\alpha_{ij} = 0$ болады):

$$\alpha_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - c_{11} = -11 + 6 - 4 = -9;$$
$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - c_{12} = -11 + 7 - 3 = -7;$$
$$\alpha_{13} = \alpha_1 + \beta_3 - c_{13} = -11 + 9 - 2 = -4;$$
$$\alpha_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - c_{23} = -4 + 9 - 5 = 0;$$
$$\alpha_{24} = \alpha_2 + \beta_4 - c_{24} = -4 + 12 - 6 = 2;$$
$$\alpha_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - c_{31} = 0 + 6 - 6 = 0;$$
$$\alpha_{41} = \alpha_4 + \beta_1 - c_{41} = -12 + 6 - 0 = -6;$$
$$\alpha_{42} = \alpha_4 + \beta_2 - c_{42} = -12 + 7 - 0 = -5;$$
$$\alpha_{43} = \alpha_4 + \beta_3 - c_{43} = -12 + 9 - 0 = -3.$$

Басланғыш таяныш $X^{(0)}$ шешими (4-кестеде) оптималь шешими болмайды, өйткени $\alpha_{24} = 2$ оң саны бар.

5. Жаңа таяныш шешимине өтемиз. Буның ушын $\alpha_{24} = 2$ саны жайласқан (2, 4) клеткасы ушын цикл дүземиз (5-кестеде цикл көрсетилген). Сонда (2, 4), (3, 4), (3, 2), (2, 2) клеткалары цикл дүзеди. Циклдиң төбелерине, (2, 4) клеткасынан баслап, гезекпе-гезек “+” ҳәм “-” белгилерин қойып шығамыз. Буннан соң, “+” белгиси бар клеткаларға қосымша θ бирлигиндеги өним қосылады, ал “-” белгиси бар клеткалардағы өнимлерден усы муғдардағы өнимлер алынады. Цикл бойынша қайта бөлистирилетуғын θ өниминиң шамасын анықлаймыз. Ол, циклдиң “-” белгили

клеткаларына жазылған өнимлердиң ең кишисине тең болады: $\theta = \min\limits_{"-"}(100, 100) = 100$. Сонлықтан $\theta = 100$ шамасына цикл бойынша жылыстырыўды орынлап, мәселениң жаңа $X^{(1)}$ таяныш шешимине ийе боламыз (6-кесте).

(5-кесте)

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	3	2	1 200	200
A_2	2 200	3 100	5	6	300
A_3	6	7 100	9 300	12 100	500
A_4	0	0	0	0 100	100
b_j	200	200	300	400	1100 1100

(6-кесте)

B_j / A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1					200
A_2					300
A_3					500
A_4					100
b_j	200	200	300	400	

6. Енди жаңа $X^{(1)}$ таяныш шешимин оптималлыққа тексеремиз. Дәслеп (12) теңлемесинен пайдаланып, бул шешим ушын сәйкес потенциалларды анықлаймыз:

$$\alpha_1 + \beta_4 = 1,$$
$$\alpha_2 + \beta_1 = 2,$$
$$\alpha_2 + \beta_4 = 6,$$
$$\alpha_3 + \beta_2 = 7,$$
$$\alpha_3 + \beta_3 = 9,$$
$$\alpha_4 + \beta_4 = 0.$$

Бул системада сегиз белгисизли алты теңлеме бар. Сонлықтан потенциаллардың биреўине қәлеген мәнис беремиз. Мейли, $\alpha_2 = 0$ болсын. Сонда $\beta_1 = 2$, $\beta_4 = 6$, $\alpha_1 = -5$, $\alpha_4 = -6$ мәнислерин қабыл етеди. Потенциалларды анықлаў усы жерде иркилип қалды. Өйткени α_3, β_2, β_3 потенциаллары анықланбай қалды. Буның себеби $X^{(1)}$ айныған таяныш шешими ҳәм толтырылған бир клетка жетиспейди. Бул қолайсызлықтан қутылыў ушын өниминиң муғдары нольге тең болған, жалған толтырылған клетканы киргизип, толтырылған клеткалардың санын $r = n + m - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ ге жеткеремиз. Мәселен, α_3, β_2, β_3 потенциалларын анықлаў ушын я A_3 қатарының, ямаса B_2 бағанасының бос клеткаларының биреўин жалған толтырылған клеткаға айландырыў керек. Мәселениң мақсет функциясының минимумы ҳаққындағы мәселе шешилип атырғанлықтан, ең киши $c_{ij} \neq 0$ жайласқан клетканы жалған толтырылған клеткаға айландырыў мақсетке муўапық келеди. Бул талапты (A_2, B_2) клеткасы қанаатландырады: $c_{22} = 3$. Сонлықтан бул клетка ушын $\alpha_2 + \beta_2 = 3$ теңлигин жазыўға болады ҳәм буннан $\beta_2 = 3$ мәнисине ийе боламыз. Сонда жоқарыда жазылған $\alpha_3 + \beta_2 = 7$, $\alpha_3 + \beta_3 = 9$ теңликлеринен $\alpha_3 = 4$, $\beta_3 = 5$ мәнислери келип шығады. Солай етип, керекли потенциаллардың мәнислери толық анықланады:

$$\alpha_1 = -5,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 4,\ \alpha_4 = -6;\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 3,\ \beta_3 = 5,\ \beta_4 = 6$$

7. Буннан соң (13) теңлигинен пайдаланып, ҳәр бир бос клетка ушын α_{ij} санларын анықлаймыз:

$$\alpha_{11} = \alpha_1 + \beta_1 - c_{11} = -5 + 2 - 4 = -7;$$
$$\alpha_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - c_{12} = -5 + 3 - 3 = -5;$$
$$\alpha_{13} = \alpha_1 + \beta_3 - c_{13} = -5 + 5 - 2 = -2;$$
$$\alpha_{23} = \alpha_2 + \beta_3 - c_{23} = 0 + 5 - 5 = 0;$$
$$\alpha_{31} = \alpha_3 + \beta_1 - c_{31} = 4 + 2 - 6 = 0;$$
$$\alpha_{34} = \alpha_3 + \beta_4 - c_{34} = 4 + 6 - 12 = -2;$$
$$\alpha_{41} = \alpha_4 + \beta_1 - c_{41} = -6 + 2 - 0 = -4;$$
$$\alpha_{42} = \alpha_4 + \beta_2 - c_{42} = -6 + 3 - 0 = -3;$$
$$\alpha_{43} = \alpha_4 + \beta_3 - c_{43} = -6 + 5 - 0 = -1.$$

Бул санлардың арасында оң санлар жоқ. Сонлықтан $X^{(1)}$ таяныш шешими мәселениң оптималь шешими болады. Мәселениң мақсет функциясының бул оптималь шешимдеги мәнисин есаплаймыз:

$$Z\left(X^{(1)}\right) = 1 \cdot 200 + 2 \cdot 200 + 6 \cdot 100 + 7 \cdot 200 + 9 \cdot 300 + 0 \cdot 100 = 5200.$$

Әдебиятлар:

1. Громов. Г.Р Основы информацион технология .
2.Абдуҳәмлидов А.М, Алимов К. Бошкарув жараенларның ахборотли техналогияси. 1994.
3. Купраҳәм Т.А. Создание и программироҳәмние Б.Д. средстҳәмми СУБД. 1991.
4. М. Арипов, Ю. Пудовченко, К. Арипов. Основы интернет. “Ташкент” Университет 2002
5. Кучарова А.С., Шакирова Г. Internet. (Учебное пособие) Ташкент 2001.
6. Б.Ю.Ходиев, Т.И. Сарсатская. Технологии Интернет.
7. Б.Ю.Ходиев, Т.И. Сарсатская. Введение в интернет
8. А.Е. Крупнова. Интернет (Справочная книга руководителя).
9. М.Павликова. Сетевые технологии.