

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

TERMIZ DAVLAT UNIVYERSITETI

Amaliy matematika va informatika kafedrası

**MATEMATIK PROGRAMMALASH MASALALARINI
YECHISH BO'YICHA USLUBIY QO'LLANMA**

I-QISM

TERMIZ – 2010

Ushbu uslubiy qo'llanma matematik programmalash fanidan amaliy mashg'ulotlar uchun mo'ljallangan bo'lib, iqtisodiyot yo'nalishidagi ixtisosliklarning o'quv dasturi asosida tayyorlangan.

Uslubiy qo'llanma II qismdan iborat bo'lib, I-qismda matematik programmalashning chiziqli programmalash masalalarini yechish bayon etilgan hamda ularga tegishli masalalar yechib ko'rsatilgan.

Qo'llanmada matematik programmalash faniga oid iqtisodiy masalalar, ularning turlari va ularga matematik modellar tuzish hamda turli usullar orqali optimal yechimlarini topish texnologiyalari keltirilgan.

Mazkur uslubiy qo'llanma iqtisodiy yo'nalishlarda o'qiyotgan talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, amaliy mashg'ulotlar uchun foydalanilsa maqsadga muvofiq bo'ladi.

Qo'llanmadan magistratura va amaliy matematika yo'nalishlarida o'qiyotgan talabalar ham foydalanishlari mumkin.

Termiz davlat universiteti «Fizika-matematika» fakul'teti Ilmiy Kengashi qaroriga asosan nashrga tavsiya etilgan “____” “_____” 2010 yildagi № _____ bayonnoma.

Tuzuvchilar: katta o'qituvchi L.Yu.Turayeva, o'qituvchi O.B.Soqiyeva

Taqrizchilar: f-m.f.dok.Normurodov Ch.B., Norbekov J.

Термиз – 2010 у

Kirish

Har qanday rivojlangan jamiyatda, shu jumladan O'zbekiston Respublikasida ham iqtisodiyotni yanada rivojlantirishning asosiy shartlaridan biri unda matematik usullar va yangi kompyuter texnologiyalariga asoslangan hisoblashlarni amalga oshirish va shu asosda iqtisodiy yechimlar qabul qilishdan iboratdir.

Inson faoliyatining turli sohalarida shunday holatlar bo'ladiki, mavjud bo'lgan bir qancha variantlar ichidan birini tanlashga to'g'ri keladi. Agar variant yagona bo'lsa, shubhasiz o'sha tanlanadi. Biroq variantlar ko'p bo'lsa, ularning ixtiyoriysi tanlanmaydi, balki ma'lum ma'noda eng yaxshisi, eng samaralisini tanlash maqsadga muvofiq bo'ladi. Odatda bunday variantlar optimal deb ataladi. Optimal so'zi aslida lotincha bo'lib, eng yaxshi (mavjud imkoniyatlar doirasida undan yaxshisi yo'q) eng ma'qul, eng samarali kabi ma'noni anglatadi.

Optimal yechimni, optimal variantni tadbiq etish davr talabidir. Turli sohalarda resurslar miqdorining cheklanganligi, imkoniyatlar ko'lami chekli bo'lganligi tufayli, mavjud resurslarni sarflashda eng oqilona variant, ya'ni optimal variantni tanlash zaruratga aylanib qoldi. Masalan, aholi sonining o'sib borishi, shahar maydonining kengayishi, yangi shaharlar va aholi yashash punktlarining paydo bo'lishi mavjud ekinga yaroqli yer maydonini qisqarishiga olib keladi. Undan tashqari, yerdan olinadigan mahsulotlarga bo'lgan talab esa to'xtovsiz o'sib boradi. Bu muammolarning barchasi yerdan unumli, ya'ni optimal foydalanish masalasini tadqiq etishni taqoza etadi.

Optimal yechimni izlash masalasi keng ko'lamli bo'lib, matematikada avvalo ekstremal (maksimal yoki minimal) masalalar deb ataluvchi sohani qamrab oladi.

Mazkur uslubiy qo'llanmada matematik programmalashning asosiy yo'nalishi sanalgan chiziqli programmalash masalalarini yechish usullari yoritilgan bo'lib, unda mustaqil bajarish ucun misol va masalalar variantlaridan tashqari nazorat savollari o'rin olgan.

1-Amaliy mashg'ulot.

Mavzu: Matematik modellarga oid tadbiqiy masalalar

Chiziqli programmalash matematik programmalashning bo'limlaridan biri bo'lib, unda noma'lumlarga chiziqli tenglama yoki tengsizlik shaklidagi chegaralovchi shartlar qo'yilgan chiziqli funksiyaning eng kichik yoki eng katta qiymatini topish masalasi yechiladi. Chiziqli programmalash usullarini qo'llab amaliyot masalalarini yechishda, avvalo, masalaning matematik modelini tuzish kerak. Berilgan masalaning matematik modelini tuzish quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1. Masalaning mazmuni bilan tanishib, undagi noma'lumlarni belgilash;
2. Masalaning chegaraviy shartlarini chiziqli tenglamalar yoki tengsizliklar shaklida ifodalash;
3. Masalaning maqsadini chiziqli funksiya orqali ifodalash;

O'rganilayotgan ob'ektning asosiy xossalari va xususiyatlarini o'zida ifodalovchi maxsus qurilgan yordamchi ob'ektga model deyiladi.

Modellashtirish deb esa, tadqiq etilayotgan ob'ektning muhim xususiyatlarini ifodalash, akslantirish jarayoniga aytiladi. Odatda, modellar turlicha bo'ladi: fizik modellar, elektron modellar, mantiqiy modellar, abstrakt modellar, matematik modellar va boshqalar.

Tadqiq etilayotgan ob'ektning asosiy xarakteristikalarini matematik ifodalar va munosabatlar orqali ifodalovchi modelga matematik model deb ataladi. Bu model tadqiqot uchun barcha modellardan qulay bo'lib, u ortiqcha xarajat va qurilmalar talab etmaydi. Undan tashqari modelashtirish jarayonida modelni yanada takomillashtirish, mukammallashtirish imkoniyati mavjuddir.

Quyida ba'zi sodda iqtisodiy masalalarning chiziqli modellarini tuzishga oid namunalar keltiramiz.

1-masala. Korxonada *A*, *B* va *C* mahsulotlarni tayyorlash uchun tokarlik, frezerlik, payvandlash va silliqlash uskunalaridan foydalaniladi. Har bir mahsulotning bir birligini tayyorlash uchun sarf qilinadigan vaqt, har bir uskunaning umumiy ish vaqti fondi, hamda har bir turdagi birlik mahsulotni sotishdan olinadigan daromad jadvalda keltirilgan.

1-jadval

Uskunalar	Har bir turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan vaqt (stanok-soat)			Uskunaning umumiy ish vaqti fondi (soat)
	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	
Tokarlik	1	8	6	280
Frezerlik	2	4	5	120
Payvandlash	7	4	5	240
Silliqlovchi	4	6	7	360
Daromad(shartli birlik)	10	14	12	

Korxona mahsulotlarni sotishdan oladigan daromadi eng ko'p bo'lishi uchun qaysi turdagi mahsulotdan qancha ishlab chiqarishi kerakligini aniqlash talab qilinadi. Masalaning matematik modelini tuzing.

Yechilishi. Aytaylik, korxona x_1 dona *A*, x_2 dona *B* va x_3 dona *C* mahsulot tayyorlashni rejalashtirgan bo'lsin, u holda shuncha miqdordagi mahsulotni tayyorlash uchun $1 \cdot x_1 + 8x_2 + 6x_3$ stanok-soat tokarlik uskunasining vaqti sarflanadi.

Tokarlik uskunasidan foydalanish vaqti jami **280** soatdan oshmasligi kerak, ya'ni

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280$$

tengsizlik bajarilishi lozim.

Xuddi shunga o'xshash mulohazalar bilan frezerlik, payvandlash va silliqlash uskunalaridan foydalanish vaqtiga nisbatan quyidagi tengsizliklar hosil bo'ladi.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360, \end{cases}$$

Tayyorlanadigan mahsulotlar soni manfiy bo'la olmaydi, shu sababli

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

Shuningdek, agar x_1 birlik **A**, x_2 birlik **B** va x_3 birlik **C** mahsulot tayyorlansa, ularni sotishdan korxona oladigan jami daromad $F=10x_1+14x_2+12x_3$ shartli birlikni tashkil etadi.

Shunday qilib, quyidagi matematik masalaga kelimiz:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280, \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360, \end{cases} \quad (1)$$

sistemani qanoatlantiruvchi shunday

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \quad (2)$$

noma'lumlarni topish kerakki, ular

$$F=10x_1+14x_2+12x_3, \quad (3)$$

funksiyaga maksimal qiymat bersin.

Yuqorida keltirilgan (1), (2) va (3) munosabatlar berilgan masalaning matematik modelini ifodalaydi.

2-masala. Ekin maydonlaridan unumli foydalanish masalasi.

Aytaylik, ma'lum bir sondagi qishloq xo'jaligi ekinlari, ma'lum sondagi ekin maydonlariga ekishga mo'ljallangan bo'lsin. Bu yer maydonlari, joylashuvi va tuprog'i tarkibiga qarab farqlanadi. Har bir maydonga mo'ljaldagi ekinlardan bir yoki bir nechta ekilishi mumkin. Ekish rejasini shunday tuzish kerakki, yetishtirilgan hosil mahsulotlarini sotishdan olinadigan foyda eng katta bo'lsin.

Yechilishi. Masalaning matematik modelini tuzish maqsadida ekin turlarini $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ekin maydonchalarini esa $S_1, S_2, \dots, S_m$ kabi belgilaylik. Deylik, Q_j , $j = \overline{1, n}$, ekin turini S_i , $i = \overline{1, m}$ ekin maydoniga ekishidan olingan hosildorlik miqdori gektaridan a_{ij} sentnyerni tashkil etib, S_i ekin maydoni a_i gektardan iborat bo'lsin. Shuningdek, har bir Q_j ekindan yetishtiriladigan hosil miqdori b_j va uning xarid narxi s_j ma'lum bo'lsin. Agar x_{ij} , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, i -maydondagi Q_j ekin ekilgan maydoncha yuzasi bo'lsa, masala shartiga ko'ra quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4)$$

ya'ni hosil miqdori belgilangan miqdordan kam bo'lmasin;

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

ya'ni ekin maydonlari yig'indisi belgilangan gektarni tashkil etsin;

$$\sum_{j=1}^n c_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} x_{ij} \right) \rightarrow \text{maksimal}, \quad (6)$$

ya'ni jami foyda maksimal bo'lsin. Bu yerda ham masalaning matematik modeli (4), (5), (6) munosabatlardan iborat bo'ladi.

3-masala. Dieta (parhez taom) haqidagi masala. Tarkibida ma'lum sondagi (masalan, n ta) to'yimli moddalar (vitaminlar, oqsil, kraxmal va boshqa) belgilangan miqdordan kam bo'lmagan parhez taom tayyorlash lozim bo'lsin. Bu moddalar xarid qilinishi lozim bo'lgan ma'lum bir sondagi (masalan, m ta) xom ashyolar tarkibida turli miqdorlarda uchraydi. Mahsulotlarni qanday miqdorda xarid qilish kerakki, so'ralgan taom tayyorlansin va uning tannarxi eng arzon bo'lsin.

Yechilishi. Bu, iqtisodiyot masalasining matnli bayonidir. Uning matematik modelini tuzaylik. Shu maqsadda, x_i , $i = \overline{1, m}$, orqali xarid qilinishi lozim bo'lgan i -mahsulot miqdorini; b_j , $j = \overline{1, n}$, orqali esa talab etilayotgan j -moddaning zaruriy miqdorini belgilaylik. U holda

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$$

- miqdor xarid qilinadigan barcha mahsulot tarkibidagi j -zaruriy modda miqdorini ifodalaydi. Masala shartiga ko'ra

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \geq b_j, j = \overline{1, n}, \quad (7)$$

munosabat o'rinli bo'lishi lozim. Shuningdek, xarid qilinadigan mahsulotlar miqdori uchun ushbu

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0 \quad (8)$$

tengsizliklar o'rinlidir. Agar mahsulotlarning birlik narxlarini mos ravshda $c_1, c_2, \dots, c_m$ orqali belgilasak,

$$\sum_{i=1}^m c_i x_i \quad (9)$$

miqdor barcha mahsulotlarning jami narxini ifodalaydi va uning minimal qiymatini izlash talab etiladi. Shunday qilib, masalaning matematik modeli (7) va (8) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi hamda (9) chiziqli funksiyaga minimal qiymat beruvchi $x_1, x_2, \dots, x_m$ miqdorlarni aniqlashdan iboratdir.

4-masala. Ishlab chiqarish masalasi. Faraz qilaylik, korxonada turli mahsulotlar ishlab chiqarilsin va mahsulotning har bir turi turli texnologiya asosida ishlab chiqarilishi mumkin bo'lsin. Har bir mahsulotni ishlab chiqarish miqdori esa chegaralangan turli resurslar sarfiga bog'liqdir. Tayyor mahsulot ishlab chiqarish texnologiyaga bog'liq ravishda narxga ega bo'ladi. Ishlab chiqarish qanday tashkil etilsa, korxonada ishlab chiqarilgan mahsulotlarning jami narxi maksimal bo'ladi.

Yechilishi. Masalaning matematik modelini tuzish maqsadida quydagicha belgilashlar kiritamiz: x_{ij} - j texnologiya bilan ishlab chiqarishga mo'ljallangan i -mahsulot miqdori bo'lsin, $i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}; a_{ijk}$ - birlik i -mahsulotni j -texnologiya bilan ishlab chiqarish uchun sarflangan k -resurs miqdori bo'lsin, $k = \overline{1, l}$. S_{ij} - j texnologiya bilan ishlab chiqarilgan birlik i -mahsulotning narxi, b_k esa k -resursni chegaralovchi son bo'lsin.

U holda masala shartlari matematik munosabatlar yordamida quyidagicha ifodalanadi:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ijk} x_{ij} \leq b_k, k = \overline{1, l}, \quad (10)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Barcha texnologik usullar bilan ishlab chiqarilgan jami mahsulot narxi esa

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \quad (12)$$

miqdordan iborat bo'ladi. Shunday qilib, masala (10) va (11) shartlarni qanoatlantiruvchi $x_{ij}, i = \overline{1, n}$, miqdorlar ichidan (12) chiziqli funksiyaga maksimal qiymat beruvchilarini topishidan iborat bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

Quyidagi masalarning matematik modelini tuzing.

1. Sex ikki turdagi mahsulot, deylik, stollar va stullar ishlab chiqarsin. Bitta stol ishlab chiqarish uchun ishchi 3 soat, bitta stul uchun esa 2 soat vaqt sarflaydi. Korxona 1 ta stolni sotishdan 8 ming so'm, 1 ta stulni sotishdan esa 6 ming so'm foyda ko'radi. Sex kamida 100 ta stol va 200 ta stul yasash majburiyatini olgan. Agar ajratilgan ishchi soati 900 ga teng bo'lsa, eng katta foyda olish uchun qolgan vaqtda nechta stol va stul ishlab chiqarish kerak?

2. A_1, A_2, A_3, A_4 turdagi mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun 2 xil xom ashyodan foydalaniladi. Ishlab chiqarish davriga 1- turdagi xomashyodan 92 birlik, 2- turdagi xomashyodan 88 birlik ajratilgan. Birlik miqdorda A_1, A_2, A_3, A_4 mahsulot ishlab chiqarish uchun 1-xomashyodan mos ravishda 1,2,1 va 3 birlik, 2-xomashyodan esa 4,3,1 va 2 birlik sarflanadi. A_1, A_2, A_3, A_4 turdagi birlik mahsulotlarni sotishdan mos ravishda 4 ming so'm, 5 ming so'm, 10 ming so'm va 5 ming so'm foyda olinadi. Maksimal foyda olish uchun ishlab chiqarish qanday rejalashtirilishi kerak?

3.Xo'jalikda 850 ga ekinga yaroqli yer bo'lib, unga ishlov berish uchun 15000 t organik o'g'it va 50000 ishchi kuni ajratilgan. Resurslar sarfi va hosil miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan

Ko'rsatkich	Ekin		
	kartoshka	karam	beda
Mehnat sarfi, ishchi-kun	50	30	10
organik o'g'it sarfi (t)	20	15	10
hosil miqdori (ming so'm)	1000	800	200

Hosilni (pul hisobida) maksimal bo'lishini ta'minlaydigan ekish rejasini tuzing. Bedaga ajratilgan yer maydoni 100 ga dan kam bo'lmagan holda ekinlarni optimal ekish rejasini toping.

4.Qoramollarni boqishda sutkalik optimal ratsion miqdorini toping. Zaruriy moddalar va ularning miqdorlari quyidagi jadvalda berilgan:

Oziqaviy moddalar (Shartli birlikda)	Birlik yemdagi to'yimli modda (turiga qarab)		Sutkalik minimal norma
	I tur	II tur	
Yem birliklari	1	0,5	5
Oziqaviy protein	80	200	560
Kal'siy	1	8	20
1 birlik yem narxi (so'm)	30	50	

4. A_1, A_2, A_3 punktlarda miqdori $a_1=90, a_2=30, a_3=50$ tonna bo'lgan sement bor. Bu yuklarni talab miqdori $b_1=40, b_2=60, b_3=70$ tonna bo'lgan V_1, V_2, V_3 qurilish maydonlariga tashib kelish kerak. Yukni tashish tariflari quyidagi jadvalda berilgan.

5.

B_j	40	60	70
a_i			
90	5	4	5
30	6	2	3
50	4	5	8

Yuk tashishni shunday tashkil etish kerakki: barcha yuk tashib ketilsin; barcha talab qondirilsin; jami tashish xarajatlari minimal bo'lsin.

6. $A_i, i=\overline{1,4}$ punktlardan 100, 400, 100, 100 birlik yuklarni talab miqdori mos ravishda 50, 100, 150, 200 va 225 birlik bo'lgan $B_j, j=\overline{1,5}$ punktlarga tashish masalasi qaralayotgan bo'lsin. Yuklarni tashish tariflari quyidagi jadvalda keltirilgan

B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_i					
A_1	1	6	8	12	16
A_2	16	10	8	6	15
A_3	4	1	9	11	13
A_4	3	2	7	7	15

Umumiy tashish narxi eng kam bo'lgan tashish rejasi tuzilsin.

7. Besh yilga mo'ljallab ajratilgan 1 mln. so'm pulga bir xil, har biri 100000 so'm bo'lgan uskuna sotib olib, ishlab chiqarishni tashkil etish talab etiladi. Har bir dastgoh korxonaga yiliga 40000 so'm foyda keltiradi. Har yili tushgan foydani bir qismini yana ishlab chiqarishni kengaytirish maqsadida qo'shimcha uskuna olishga ishlatish mumkin. Korxonani shunday kengaytirish kerakki, besh yilda olingan jami foyda maksimal bo'lsin.

8. Aytallik, 5 ta texnologik jarayon bo'lib, ularga zahira miqdori 1000 birlik bo'lgan xomashyo sarflansin. i-jarayonga x_i xomashyo ajratilishi $2x_i$ foyda keltirsin. Xomashyoni shunday taqsimlash kerakki, barcha xomashyo sarflansin va yakuniy foyda maksimal bo'lsin.

9. Neft mahsulotlarini tashish uchun hajmi 62 t bo'lgan silindrik idishlar zarur bo'ladi. Idishning parametrlari qanday bo'lganda uni yasashga eng kam metall list ishlatiladi.

10. Gazni saqlash va tashishni tashkil etish maxsus idishni talab etadi. Deylik, 1000 m^3 gazni qanday shakldagi idishda doimiy joyda saqlash tavsiya etiladi va u idishning o'lchamlari qanday bo'lganda uni yasashga ketadigan qimmatbaho maxsus metall listlarga ajratiladigan xarajat minimal bo'ladi?

11. Burg'ulash uskunasi to'g'ri yo'ldan 9 km.masofada joylashgan. To'g'ri yo'l bo'ylab ketganda to'g'ri yo'lning burg'ulash uskunasi to'g'risidagi nuqtasidan eng yaqin aholi yashash punktigacha bo'lgan masofa 15 km. Zudlik bilan punktga borish zarur bo'lib qoldi. Agar velosipedchining to'g'ri yo'lgacha tezligi 8 km/soat, to'g'ri yo'l bo'ylab 10 km/soat bo'lsa, eng qisqa vaqtda borish uchun qanday yo'lni tanlash kerak?

12.Ko'ldagi qayiq to'g'ri chiziqli qirg'oqdan 3 km. Masofada joylashgan. Yo'lovchi qirg'oq bo'ylab ro'paradagi nuqtadan 5 km uzoqda bo'lgan qishloqqa borishga shoshilmoqda. Agar yo'lovchi qayiqda 4 km/soat, quruqlikda 5 km/soat tezlikda yo'l bossa, qishloqqa eng qisqa vaqt ichida borishi uchun qanday yo'lni tanlashi kerak?

13.Qandolatchilik fabrikasi 3 turdagi *A*, *B* va *C* karamellarni ishlab chiqarish uchun 3 turdagi xom ashyodan, ya'ni shakar, meva qiyomi va shinnidan foydalanadi. Har bir turdagi karameldan **1 t** ishlab chiqarish uchun sarflanadigan turli xom ashyolar miqdori (normalari) quyidagi jadvalda keltirilgan. Shuningdek, jadvalda fabrika ishlatishi mumkin bo'lgan har bir turdagi xom ashyolarning umumiy miqdori va har bir turdagi karamelning 1 tonnasini sotishdan olinadigan daromad ham keltirilgan.

<i>Xom ashyo turi</i>	<i>1t. karamel uchun sarflanadigan xom ashyo normasi (t)</i>			<i>Xom ashyoning umumiy miqdori (tonna)</i>
	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>S</i>	
<i>Shakar</i>	0,8	0,5	0,6	800
<i>Shinni</i>	0,4	0,4	0,3	600
<i>Meva qiyomi</i>	-	0,1	0,1	120
<i>1t mahsulotni sotishdan keladigan daromad (shartli birlik)</i>	108	112	126	

Fabrikaning oladigan daromadini maksimallashtiruvchi karamel ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

14. Sutni qayta ishlash zavodi shisha idishlarda qadoqlangan sut, kefir, qaymoq ishlab chiqaradi. 1 tonnadan sut, kefir, qaymoq ishlab chiqarish uchun mos ravishda **1010**, **1010** va **9450** kg sut zarur bo'ladi. Bunda 1 tonna sut va kefir tayyorlashda mos ravishda **0,18** va **0,19** mashina-soat ish vaqti sarflanadi. 1 tonna qaymoq tayyorlash uchun maxsus avtomatlar **3,25** soat ishlaydi. Zavod sut mahsulotlarini ishlab chiqarish uchun hammasi bo'lib **136000** kg sut ishlatishi mumkin. Asosiy ishlab chiqarish jihozlari **21,4** mashina-soat, qaymoq quyish avtomatlari esa **16,25** soat ishlashi mumkin. 1 tonna sut, kefir va qaymoqni sotishdan olinadigan daromad mos ravishda **30**, **22** va **136** birlikka teng. Zavod bir kunda **100** tonnadan

kam bo‘lmagan miqdorda shisha idishga qadoqlangan sut ishlab chiqarishi kerak. Mahsulotning boshqa turlari uchun chegaralar yo‘q. Zavod har kuni mahsulotni qanday miqdorda ishlab chiqarsa, uni sotishdan keladigan daromad maksimal bo‘ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

15. Tikuv fabrikasida 4 turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun 3 turdagi gazlamalar ishlatiladi. Turli mahsulotning bittasini tikish uchun sarflanadigan turli gazlamalar normasi jadvalda keltirilgan. Fabrika ixtiyoridagi har bir gazlamalarning umumiy miqdori va mahsulotlar bahosi ham ushbu jadvalda berilgan. Fabrika har bir turdagi mahsulotdan qancha miqdorda ishlab chiqarsa, ishlab chiqarilgan mahsulotlar bahosi maksimal bo‘ladi? Masalaning matematik modeli tuzilsin.

<i>Gazlama turi</i>	<i>I ta mahsulotga sarflanadigan gazlama normasi (m)</i>				<i>Gazlamalarning umumiy miqdori (m)</i>
	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	
<i>1</i>	<i>1</i>	<i>-</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	<i>180</i>
<i>2</i>	<i>-</i>	<i>1</i>	<i>3</i>	<i>2</i>	<i>210</i>
<i>3</i>	<i>4</i>	<i>2</i>	<i>-</i>	<i>4</i>	<i>800</i>
<i>Mahsulotlar bahosi (ming so‘m)</i>	<i>9</i>	<i>6</i>	<i>4</i>	<i>7</i>	

16. Korxona 4 xildagi mahsulot ishlab chiqarishda: tokarlik, frezerlik va silliqdash jihozlaridan foydalanadi. Har bir turdagi jihozning mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqt normasi jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning umumiy ish vaqti fondi, hamda turli mahsulot birliklarini sotishdan olinadigan daromad ham ushbu jadvalda berilgan.

<i>Jihoz turi</i>	<i>Har bir turdagi bir birlik mahsulot ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqt normasi</i>				<i>umumiy ish vaqti fondi (stanok-soat)</i>
	<i>I</i>	<i>I</i> <i>I</i>	<i>II</i> <i>I</i>	<i>I</i> <i>V</i>	
<i>Tokarlik</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>3</i>	<i>300</i>
<i>Frezerlik</i>	<i>1</i>	<i>-</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	<i>70</i>
<i>Silliqdash</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	<i>-</i>	<i>340</i>
<i>Bir birlik mahsulot sotishdan keladigan daromad (so‘m.b.)</i>	<i>8</i>	<i>3</i>	<i>2</i>	<i>1</i>	

Eng ko‘p daromad keltiradigan ishlab chiqarish rejasini topish masalasining matematik modeli tuzilsin.

17. Korxona 3 turdagi mahsulotni ishlab chiqarmoqda. Ishlab chiqarishning bir oylik dasturiga asosan korxona **2000** ta 1- turdagi, **1800** ta 2 – turdagi va **1500** ta 3 – turdagi mahsulot ishlab chiqaradi. Mahsulot ishlab chiqarish uchun bir oylik xarajati **61000** kg dan oshmaydigan xom ashyo ishlatilmoqda. 1 – turdagi mahsulot birligini ishlab chiqarish uchun **8** kg xom ashyo, 2- turdagi mahsulot birligi uchun **10** kg, 3 – turdagi mahsulot uchun esa **11** kg sarf qilinadi. 1- turdagi mahsulotning ulgurji bahosi **70** so‘m, 2- va 3 - mahsulotlariniki esa mos ravishda **100** va **70** so‘mni tashkil qiladi. Korxonaga maksimal daromad keltiradigan mahsulot ishlab chiqarishning optimal rejasini topilsh masalasining matematik modeli tuzilsin.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Matematik programmalashning predmeti nimadan iborat?
2. Iqtisodiy masalaning matematik modeli nima va u qanday tuziladi?
3. Chiziqli programmalash masalasining chegaralovchi shartlari qanday ko'rinishda bo'lishi mumkin?
4. «Ishlab chiqarishni rejalashtirish» masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funksiya qanday ma'noni bildiradi?
5. «Iste'mol savati» masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funksiya qanday ma'noni bildiradi?
6. «Optimal bichish» masalasidagi noma'lumlar, asosiy shartlar va maqsad funksiya qanday ma'noni bildiradi?

2-Amaliy mashg'ulot.

Mavzu: Chiziqli programmalash masalasining umumiy, kanonik ko'rinishi va uning turli formalarda ifodalanishi.

Chiziqli programmalashtirish masalasining analitik ifodasi, ushbu

$$Z = S_1X_1 + S_2X_2 + \dots + S_nX_n \quad (1)$$

chiziqli funktsiyani, quyidagi

$$\begin{aligned} a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n &\leq b_p, \quad p = \overline{1, k}, \\ a_{q1}x_1 + a_{q2}x_2 + \dots + a_{qn}x_n &= b_q, \quad q = \overline{k+1, l}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a_{e1}x_1 + a_{e2}x_2 + \dots + a_{en}x_n &\geq b_e, \quad e = \overline{l+1, m}, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0, \quad r \leq n, \end{aligned} \quad (3)$$

tenglik va tengsizliklar bilan aniqlanadigan to'plamdagi ekstremumini topishdan iborat.

Chiziqli programmalashtirish masalasining normal, simmetrik yoki standart ko'rinishi deb uning quyidagi ko'rinishiga aytiladi:

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &\rightarrow \max, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ \text{-----} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0. \end{aligned}$$

Bu yerda “ $\rightarrow \max$ ” belgisi mazkur chiziqli funktsiyaning maksimum qiymati izlanyotganligini bildiradi.

Shuningdek, chiziqli programmalashtirish masalasining ushbu

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n &\rightarrow \max \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \text{-----} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ko'rinishiga uning kanonik ko'rinishi deyiladi.

Agar masala umumiy (1)-(3) ko'rinishda ifodalangan bo'lsa, algebraik amallar va almashtirishlar yordamida uni normal yoki kanonik ko'rinishga keltirish mumkin. Haqiqatan, umumiy masaladagi biror

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

tengsizlikni, yangi $x_{n+i} \geq 0$ o'zgaruvchi qo'shish yordamida, ushbu

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i$$

tenglik shakliga keltirish mumkin. Natijada masalaning formasi kerakli tarzga keltiriladi, biroq masaladagi noma'lumlar soni mos ravishda ortadi.

Shuningdek, (3) da x_i o'zgaruvchilardan birortasiga manfiymaslik sharti qo'yilmagan bo'lsa (masalan, x_k o'zgaruvchiga), u

$$x_k = x_k^1 - x_k^2, \quad x_k^1 \geq 0, x_k^2 \geq 0,$$

ko'rinishda ifodalanadi. Natijada, barcha o'zgaruvchilar uchun manfiymaslik shartiga ega bo'lamiz. Biroq, bu holda ham masalaning o'lchami kattalashadi, ya'ni undagi noma'lumlar soni ortadi. Yuqoridagi mulohazalardan kelib chiqadiki, masalani normal yoki kanonik holda tadqiq etish mumkin va olingan natija umumiy masala uchun ham mos xulosa chiqarishga imkon beradi. Chegaraviy shartlari tengsizliklar shaklida berilgan ChPM larni kanonik ko'rinishga keltirish uchun « $\leq$ » shakldagi tengsizliklarning chap qismiga qo'shimcha nomanfiy o'zgaruvchilarni qo'shish va « $\geq$ » shakldagi tengsizliklarni chap qismidan qo'shimcha nomanfiy o'zgaruvchilarni ayirish kerak. Agar maqsad funksiyasi maksimallashtirishga berilgan bo'lsa, uni (-1) ga ko'paytirib, minimallashtirish masalasiga keltirish mumkin. Kanonik ko'rinishdagi chiziqli programmalashtirish masalasiri vektor va matritsa shaklida ham ifodalash mumkin.

Shuningdek, qulaylik tug'dirish maqsadida masalani vektor-matrisali ko'rinishda yozib olamiz. Agar

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kabi belgilashlar kiritsak, normal masala ushbu

$$c^1 x \rightarrow \max \quad (10)$$

$$Ax \leq b, \quad (11)$$

$$x \geq 0 \quad (12)$$

ko'rinishda, kanonik masala esa

$$c^1 x \rightarrow \max \quad (13)$$

$$Ax = b, \quad (14)$$

$$x \geq 0 \quad (15)$$

ko'rinishda ifodalanadi. Masalaning bunday formalarda ifodalanishi nazariy tadqiqotlar uchun qulaylik tug'diradi.

Masaladagi (14) cheklashlarga asosiy cheklashlar, (15) cheklashlarga ega bevosita (to'g'ri) cheklashlar deb ataladi. Shuningdek, $c^1 x$ funksiyani maqsad funksiyasi deb, c vektorni-narx vektori, b vektorni - cheklash vektori, A -matrisani -shart matrisasi deb yuritishadi. Shart matrisasi

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

kabi ifodalanib,

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

vektorlarga shart vektorlari deyiladi.

1-ta'rif. Masalaning asosiy va bevosita cheklashlarini qanoatlantiruvchi har bir n -vektor x masalaning rejasi deb ataladi.

2-ta'rif. Masalaning yechimi bo'lgan reja, ya'ni

$$c^0 x^0 = \max c^0 x, Ax^0 = b, x^0 \geq 0$$

Shartni qanoatlantiruvchi x^0 reja optimal reja deb ataladi.

3-ta'rif. Agar biror x rejaning $n-m$ ta komponentlari nolga teng bo'lib, qolganlariga mos keluvchi shart vektorlari chiziqli erkli bo'lsa, bunday reja bazis reja deb ataladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, masalan, $n=5, m=3$ bo'lgan masalada $X^0=(x_1, x_2, 0, x_4, 0)$ reja bo'lib x_1, x_2, x_4 o'zgaruvchilarga mos bo'lgan a^1, a^2 va a^4 shart vektorlari chiziqli erkli – bo'lsa, x reja bazis reja ham bo'ladi. Odatda bunday x_1, x_2, x_4 o'zgaruvchilarga bazis o'zgaruvchilar deyiladi.

4-ta'rif. Agar bazis rejaning barcha bazis o'zgaruvchilari aniq musbat bo'lsa, bunday rejaga buzilmagan bazis reja deb ataladi.

1- masala. Quyidagi ChPM ni kanonik ko'rinishga keltiring, hamda uni vektor va matritsa formasida ifodalang.

$$F = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$$

Yechish. Dastlab chiziqli funksiyani maksimalashtirishdan minimallashtirish masalasiga o'tamiz. Buning uchun maqsad funksiyani **(-1)** ga ko'paytirish kifoyadir. So'ngra tengsizliklar shaklida berilgan chegaraviy shartlardan tenglamalarga o'tamiz.

Natijada quyidagi kanonik ko'rinishdagi ChPM ni hosil qilamiz.

$$F = -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 = 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 15, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

Ushbu masala vektor formada quyidagicha ifodalanadi:

$$F = C \cdot X \rightarrow \min,$$

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 + P_5 x_5 + P_6 x_6 + P_7 x_7 = P_0,$$

$$X \geq 0.$$

Bunda $C=(-1; 2; -1; 1; 0; 0; 0)$, $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ - vektor qator, CX - skalyar ko'paytma, hamda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

-shart vektorlari.

$$P_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Masalaning matritsa formasidagi ifodalanishi esa quyidagicha:

$$F = C \cdot X \rightarrow \min$$

$$A \cdot X = B_0$$

$$X \geq 0$$

Bunda $C=(-1; 2; -1; 1; 0; 0; 0)$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{shart matritsasi.}$$

Masaladagi nomanfiy x_5, x_6, x_7 o'zgaruvchilar qo'shimcha o'zgaruvchilar deb ataladi va ularning maqsad funksiyasidagi koeffitsientlari 0 ga teng deb hisoblanadi. Yuqoridagi ta'riflarni oydinlashtirish maqsadida quyidagi masalani qaraymiz.

2-masala. Berilgan chiziqli programmalash masalasini kanonik ko'rinishga keltiring va uni turli shaklda ifodalang:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 \leq -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max. \end{cases} \quad (I)$$

Yechish. Masalaning cheklamalaridagi birinchi va uchinchi tengsizliklarning kichik tomoniga $x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib, ularni tenglamalarga aylantiramiz, hamda birinchi tenglamaning ikki tomonini (-1) ga ko'paytirib undagi ozod hadni musbat songa aylantiramiz va (I) masalaga ekvivalent bo'lgan quyidagi masalani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \\ Y = 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \max. \end{cases} \quad (II)$$

Ushbu masalada $Y \rightarrow \max$ ni teskari ishora bilan olib, uni $Y \rightarrow \min$ ga aylantiramiz. Natijada berilgan masalaning kanonik ko'rinishiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, \\ Y = -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 \rightarrow \min. \end{cases} \quad (III)$$

(III) masalada quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}, \quad C' = (-3 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 0), \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ushbu belgilashlarda (III) masala quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$AX=B, \quad X \geq 0, \quad Y=C'X \rightarrow \min. \quad (IV)$$

(III) masalada yana quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad P_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix},$$

$$C' = (-3 \ 2 \ -1 \ 0 \ 0).$$

Ushbu belgilashlarda masala quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{aligned} P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 + P_4 x_4 + P_5 x_5 &= P_0, \\ X &\geq 0, \\ Y = C' X &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (V)$$

3-masala. $A_1 (3; -2; 5)$ va $A_2 (-1; 6; 1)$ nuqtalar berilgan. Ushbu nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgan $A(x_1, x_2, x_3)$ nuqtani toping.

Yechish. A nuqta A_1 va A_2 nuqtalarning qavariq kombinasiyasidan iborat bo'lgani uchun $A = \lambda A_1 + (1-\lambda)A_2$, ($0 \leq \lambda \leq 1$) shart o'rinli bo'ladi.

Agar $\lambda = 1/3$ bo'lsa, u holda

$$A = \frac{1}{3} A_1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) A_2 = \frac{1}{3} A_1 + \frac{2}{3} A_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

va natijada quyidagiga ega bo'lamiz: $(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3}(3, -2, 5) + \frac{2}{3}(-1, 6, 1)$

$$x_1 = \frac{1}{3}; \quad x_2 = \frac{10}{3}; \quad x_3 = \frac{7}{3}.$$

$$J: \quad A = \left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right).$$

4-Masala.

$$\begin{aligned} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &\rightarrow \max \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4, \\ x_i &\geq 0, i = 1, 4. \end{aligned}$$

Bu masalada $X^0 = (1, 0, 0, 1)$ buzilmagan bazis reja bo'ladi, chunki $n-m=4-2=2$ va ikkita komponenta nolga teng, hamda $x_1^0=1, x_4^0=1$ ga mos keluvchi

$$a_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ va } a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vektorlar chiziqli yerkli, ya'ni ulardan birini ikkinchisi orqali ifodalab bo'lmaydi. Undan tashqari x_1^0 va x_4^0 lar aniq musbat, demak, a_1, a_4 - vektorlar bazisni tashkil etadi, hamda $(1; 0; 0; 1)$ -buzilmagan bazis reja bo'ladi. Qaralayotgan masala uchun $X_I = (0, 4, 0, 0)$ ham bazis reja bo'ladi, chunki $a_1^0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, a_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektor chiziqli yerkli, biroq bazisga mos o'zgaruvchi $x_I^I = 0$ bo'lganligi tufayli X_I buzilmagan bazis reja bo'la olmaydi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyidagi chiziqli programmashtirish masalalarini normal (kanonik) ko'rinishda ifodalang:

a)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + x_2 \leq 1, \\ 2x_1 - x_2 \leq 2; \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 \rightarrow \max \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 \leq 1, \\ x_1 \geq 0; \end{array}$$

v)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ x_1 - x_3 \leq 1, \\ x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 \geq 0; \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 - x_2 = 0, \\ x_2 \leq 1, \\ x_3 \geq 0; \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 \rightarrow \min \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \leq 1; \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 = 3x_4 \rightarrow \min \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 - x_4 \leq 5, \\ x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0; \end{array}$$

j)

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ x_1 + x_2 - x_4 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_4 \leq 1, \\ x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0; \end{array}$$

z)

$$\begin{array}{l} x_2 + x_4 \rightarrow \min \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_4 = 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0; \end{array}$$

i)

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 + 10x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_3 + x_4 = 1; \end{array}$$

k)

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \\ x_1 + 4x_2 \geq 4, \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_2 \leq 4, \\ x_2 \geq 0; \end{array}$$

2. Quyidagi berilgan masalalarning har birini kanonik ko'rinishga keltiring, hamda uni vektor va matritsa formalarida ifodalang.

1.

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8 \\ 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 14 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$$F = 3x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 18 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$$F = 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

3.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 4 \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 8x_4 \geq 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$F = 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 \rightarrow \min$$

4.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 12 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 18 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 16 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$F = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$$

5.

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 16 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 18 \\ x_3 \leq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

$$F = -3x_1 - 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Chiziqli programmalash masalasi vektor formada qanday yoziladi?
2. Chiziqli programmalash masalasining matrisa ko'rinishi qanday?
3. Chiziqli programmalash masalasining yig'indilar ko'rinishdagi ifodasi qanday?
4. Chiziqli programmalash masalasining joiz yechimi deganda nimani tushunasiz?
5. Chiziqli programmalash masalasining bazis yechimi nima?
6. Aynigan va aynimagan bazis yechimlarni ta'riflang.
7. Chiziqli programmalash masalasining optimal yechimi nima?
8. Chiziqli programmalash masalasida qanday teng kuchli almashtirishlarni bajarish mumkin?
9. Qavariq to'plamni ta'riflang.
10. Chiziqli programmalash masalasi yechimlaridan tashkil topgan to'plam qanday to'plam bo'ladi?

3-Amaliy mashg'ulot.

Mavzu: Chiziqli programmalash masalasining geometrik talqini. ChPM ni grafik usulda yechish

Aniqlik uchun chiziqli programmalash masalasining normal formasini qaraylik. Masala shartlarini real fazoda ixtiyoriy n va m uchun geometrik talqin qilib bo'lmaydi. Biroq $n \leq 3$, m -ixtiyoriy, yoki n va m lar $n-m \leq 3$ shartni qanoatlantirsa, masalani geometrik usulda ifodalash, agar yechim mavjud bo'lsa, uni topish ham mumkin bo'ladi.

Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida, $n=2$, m -ixtiyoriy bo'lgan holni qaraylik. Normal masala bu holda quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1}, \quad (1)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2, \quad (2)$$

$$\frac{-----}{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m,} \quad (3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Yuqoridagi (2) va (3) tengsizliklardan har biri x_1Ox_2 tekisligida mos yarim tekisliklarni ifodalaydi. Ularni aniqlash uchun dastlab, yarim tekisliklarni chegaralovchi to'g'ri chiziqlarni qurib olish lozim bo'ladi. Masalan, aniqlik uchun

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 \leq b_k, 1 \leq k \leq m \quad (4)$$

tengsizlik qaralayotgan bo'lsin. Uning chegarasi

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 = b_k, 1 \leq k \leq m, \quad (5)$$

to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, u tekislikni ikkita yarim tekisliklarga ajratadi. Tengsizlikning yechimi qaysi yarim tekislik ekanligini aniqlash maqsadida, tekislikning (5) to'g'ri chiziqda yotmagan ixtiyoriy nuqtasida (4) tengsizlikni tekshiramiz. Agar nuqta tengsizlikni qanoatlantirsa, tengsizlikning yechimi shu nuqta yotgan yarim tekislik, qanoatlantirmasa, shu nuqta yotmagan yarim tekislik bo'ladi. Bu chiziqli tengsizlikka xos xususiyatdir.

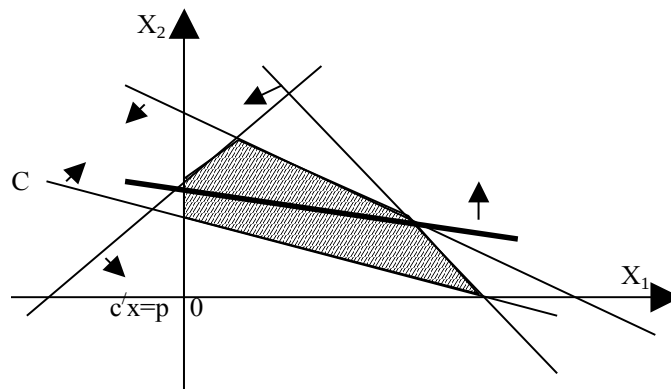
Shu usul bilan barcha tengsizliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamini aniqlab olamiz. Bu to'plam masalaning rejalar to'plami bo'lib, u bo'sh to'plam, yagona nuqta, chegaralangan qavariq ko'pburchak va chegaralanmagan sohalaridan iborat bo'lishi mumkin. Aniqlik uchun, rejalar to'plami qavariq ko'pburchakdan iborat bo'lgan holni qaraylik. (1) chiziqli funksiyani maksimumga tekshirish uchun uni biror o'zgarmas son p ga tenglashtirib,

$$c_1x_1 + c_2x_2 = p \quad (6)$$

chiziqni x_1Ox_2 tekisligida qurib olamiz. So'ngra uni rejalar to'plamida qaraymiz va chiziqli funksiyani planlar to'plami uzra

$$\text{grad}c'x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

gradient vektor yo'nalishi bo'ylab parallel siljitamiz. To'g'ri chiziqning shu yo'nalishda rejalar to'plami bilan hosil qilgan tayanch nuqtasi maqsad funksiyaga maksimal qiymat beruvchi nuqta bo'ladi (1-chizma).



1-chizma

1-izoh. Agar maqsad funksiyani s vektor yo'nalishi bo'ylab parallel qancha siljitganda ham uning rejalar to'plami bilan umumiy nuqtalari qolavyorsa, maqsad funksiya rejalar to'plamida chegaralanmagan bo'ladi, ya'ni masala yechimga ega bo'lmaydi (2-chizma).



1-Masala. Quyidagi ChPM berilgan bo‘lsin.

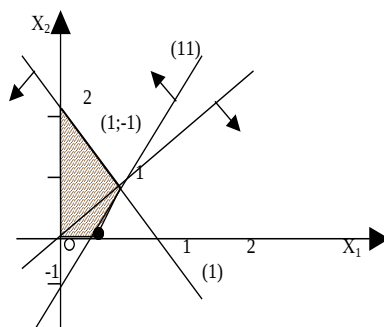
$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \min (\max).$$

1. Yechimlar ko'pburchagini yasash;
2. $\vec{N}(C_1; C_2)$ - yo'naltiruvchi vektorni qurish;
3. Yo'naltiruvchi vektorga perpendikulyar bo'lgan va koordinatalar boshidan o'tuvchi $\vec{F}=\vec{0}$ to'g'ri chiziqni aniqlash;
4. Yo'naltiruvchi vektor bo'yicha $\vec{F}=\vec{0}$ to'g'ri chiziqni o'z-o'ziga parallel siljitib, yechimlar ko'pburchagining maqsad funksiyasiga minimal (yoki maksimal) qiymat beruvchi chetki nuqtasini topib, javobni yozish.

2-Masala. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yeching

$$\frac{2x_1 - x_2 \leq 1,}{x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.} \quad (\text{II})$$

19



3-chizma

Endi $n - m \leq 3$ bo'lgan holni qaraylik. Deylik, aniqlik uchun chiziqli programmalashning kanonik masalasi ya'ni (8)-(9) masala berilgan bo'lsin. Agar $n - m = 3$ bo'lsa, masalani yechish muammosi uch o'lchovli fazoga ko'chiriladi. Bu fazoda chizmalarni bajarish murakkab ekanligini inobatga olib, $n - m = 2$ bo'lgan holni qaraymiz. Bu holda n ta o'zgaruvchilardan $n - 2$ tasini qolgan ikkitasi orqali ifodalab olamiz. Deylik, (8) munosabatlardan $x_3, x_4, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar x_1 va x_2 orqali ifodalangan bo'lsin:

$$\begin{aligned} x_3 &= e_{31}x_1 + e_{32}x_2, \\ x_4 &= e_{41}x_1 + e_{42}x_2, \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= e_{n,1}x_1 + e_{n,2}x_2. \end{aligned} \quad (8)$$

U holda, (9) shartlarga ko'ra

$$\begin{aligned} e_{31}x_1 + e_{32}x_2 &\geq 0, \\ e_{41}x_1 + e_{42}x_2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots \\ e_{n,1}x_1 + e_{n,2}x_2 &\geq 0, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

tengsizliklarga ega bo'lamiz. Shuningdek, (8) ni maqsad funksiyaga qo'yib, faqat x_1 va x_2 ga bog'liq bo'lgan

$$c_1^*x_1 + c_2^*x_2 \rightarrow \max \quad (11)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Hosil bo'lgan (10), (11) masala esa yuqorida bayon etilgan $n=2$, m -ixtiyoriy bo'lgan hol singari hal etiladi va natijada, agar yechim mavjud bo'lsa, mos (x_1^0, x_2^0) ekstremal nuqta topiladi. So'ngra (8) dan optimal rejani, ya'ni $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ni topishga erishiladi.

Izoh. Masalani yechish jarayonida berilgan tenglik va tengsizliklarni imkon boricha ixchamlash, o'zgaruvchilardan qulaylarini yekin o'zgaruvchi sifatida tanlash yaxshi samara beradi.

3-Masala. Quyidagi chiziqli programmalashtirish masalasini grafik usulda yeching.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\rightarrow \min \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ x_i &\geq 0, i=1,2,3,4. \end{aligned}$$

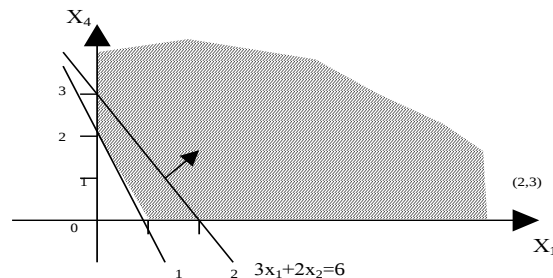
Dastlab, asosiy tengliklarni qo'shib, $x_2^0=1$ ni aniqlab olamiz va ikkita tenglik o'rniga bitta

$$2x_1 - x_3 + x_4 = 2$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan, $x_3 \geq 0$ tengsizlikni e'tiborga olib, hamda $x_2^0=1$, $x_3=2x_1+x_4-2$ ni tekshirilayotgan maqsad funksiyaga qo'yib, x_1 va x_4 o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan quyidagi masalaga kelimiz:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_4 &\rightarrow \min \\ 2x_1 + x_4 &\geq 2, \\ x_1 &\geq 0, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

Bu masalani x_1 o' x_4 tekisligida yuqoridagi usul yordamida yechib, $x_1^0=1$, $x_4^0=0$ ni topamiz (4-chizma). So'ngra, o'z navbatida $x_3^0=2x_1^0+x_4^0-2=0$ ni aniqlaymiz. Shunday qilib $(1,1,0,0)$. Reja optimal bo'lib, maqsad funksiyaning minimal qiymati esa: $c^0x_{\min}=2$ bo'ladi.



4-chizma

4-masala. Firma ikki xil **A** va **B** mahsulotlarni ishlab chiqaradi. Har bir mahsulotga **I**, **II** va **III** turdagi mashinalarning har birida ishlov beriladi. Mahsulotlarga mashinalarda ishlov berish soatlari quyidagicha berilgan:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

I, **II**, **III** mashinalarning haftalik ishlash vaqtlari mos ravishda **40**, **36** va **36** soatni tashkil etadi. Sotilgan **A** va **B** mahsulotlardan mos ravishda **5** va **3** birlik foyda olinadi.

Firmaga maksimal foyda keltiradigan haftalik ishlab chiqarish rejasini tuzish talab qilinadi. Masalani ChPM shaklida ta'riflang va uni yeching.

Yechilishi. Hafta davomida ishlab chiqarish rejalashtirilgan **A** mahsulot miqdori x_1 va **B** mahsulot miqdori x_2 bo'lsin, u holda masalaning berilganlaridan foydalanib, quyidagi ChPM ni hosil qilamiz.

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 \leq 40, \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 \leq 36, \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 36, \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad (2)$$

$$F = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \quad (3)$$

Bu masalada noma'lumlar soni ikkita, hamda chegaraviy shartlar tengsizliklar shaklida bo'lganligi uchun grafik usulni qo'llash mumkin.

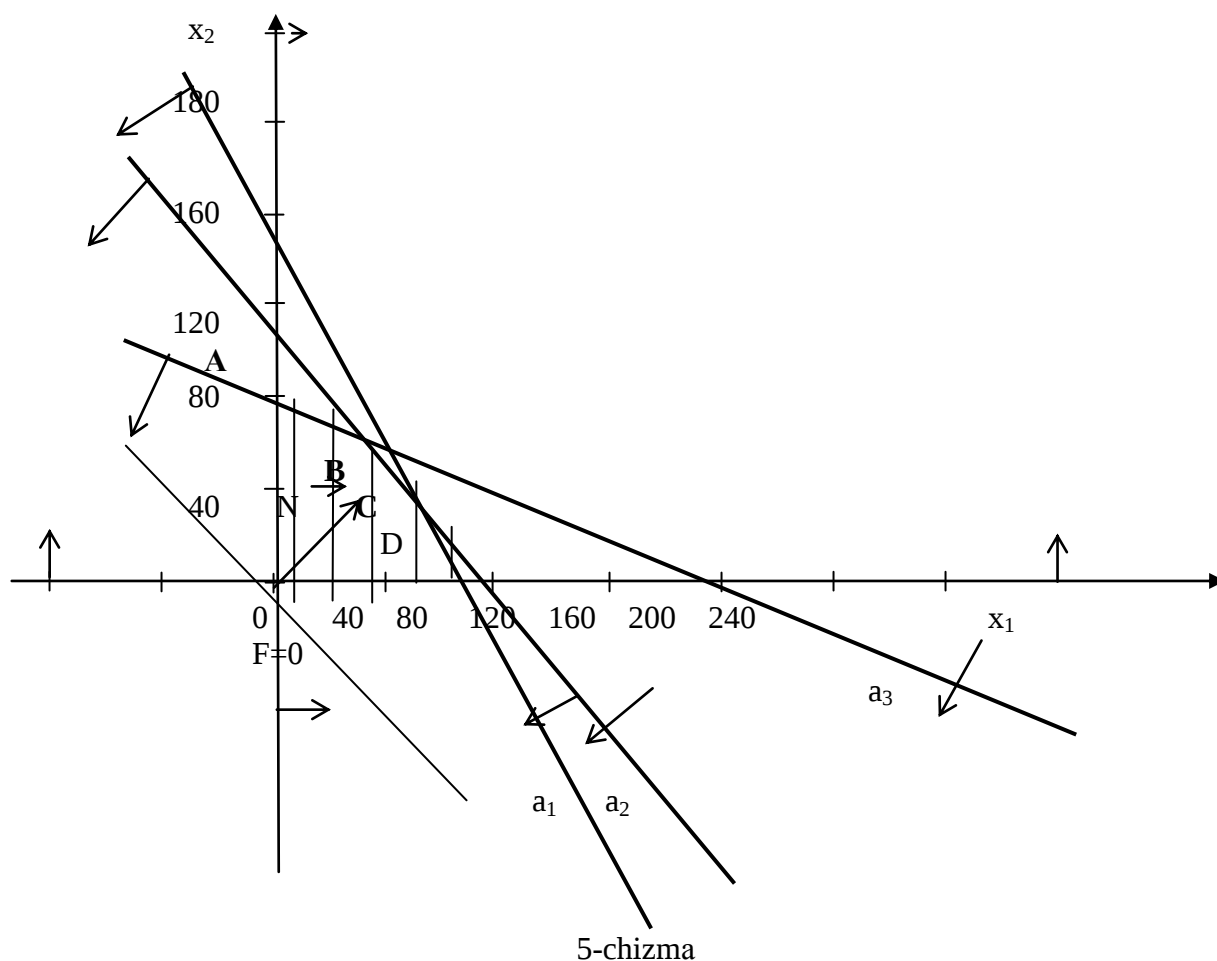
Masaladagi (1) va (2) chegaraviy shartlardagi har bir tengsizlik x_1 o' x_2 koordinata tekisligida chegaralari mos

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 = 40, & (a_1) \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 = 36, & (a_2) \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 = 36, & (a_3) \end{cases}$$

to'g'ri chiziqlardan va koordinata o'qlaridan iborat yarim tekisliklarni ifodalaydi.

Ushbu yarim tekisliklarni va ularning kesishmasidan iborat bo'lgan rejalar ko'pburchagini chizib olamiz, hamda $\vec{N} = (5;3)$ yo'naltiruvchi vektor yordamida

$F = 5x_1 + 3x_2$ maqsad funksiyasiga maksimal qiymat beruvchi nuqtani aniqlaymiz.



Chizmadan ko‘rinib turibdiki, $F=5x_1+3x_2$ maqsad funksiyasi o‘zining maksimal qiymatiga $ABCD O$ – rejalar ko‘pburchagining C nuqtasida erishadi. Bu nuqta a_1 va a_2 to‘g‘ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo‘lganligi uchun uning koordinatasini

$$\begin{cases} 0,5x_1 + 0,25x_2 = 40, & (a_1) \\ 0,4x_1 + 0,3x_2 = 36, & (a_2) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib topamiz. Sistemaning yechimi $x_1=60$ va $x_2=40$. Bu yechimga maqsad funksiyasining $F_{max}=5 \cdot 60 + 3 \cdot 40=420$ qiymati mos keladi.

Shunday qilib, firma 420 birlik foydaga erishish uchun A mahsulotdan 60 ta va B mahsulotdan 40 ta ishlab chiqarishni rejalashtirishi kerak bo‘ladi. Bunda I va II tur mashinalarning ish vaqti fondidan to‘laligicha foydalaniladi, hamda III tur mashina vaqtdan $(0,2x_1+0,4x_2 \leq 36$ tengsizlikka ko‘ra) 8 soat ortib qoladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Chiziqli programmalash masalasining geometrik talqini qanday?
2. Grafik usulni chiziqli programmalash masalasi yechimlarining qanday xossalriga tayanib qo‘llash mumkin?
3. Chiziqli programmalash masalasi rejalaridan tashkil topgan qavariq ko‘pburchak qanday bo‘lishi mumkin?
4. Qanday holda chiziqli programmalash masalasi birdan ortiq optimal yechimga ega bo‘lishi mumkin?
5. Iqtisodiy masalani grafik usulda yechganda xom ashyolarning kamyob yoki kamyob emasligini qanday aniqlash mumkin?
6. Passiv va aktiv chegaralovchi shartlar nima?
7. Aktiv shartlarni (kamyob xom ashyolarni) bir birlikka oshirganda optimal yechim qanday o‘zgaradi?
8. Optimal yechimni o‘zgartirmagan holda passiv shartlarni qanchalik o‘zgartirish mumkin?

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyidagi tengsiliklar sistemalarining yechimlaridan iborat sohani geometrik tasvirlang.

a)

$$x_1 + 5x_2 \leq 10,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 1,$$

$$x_1 - x_2 \leq 7,$$

$$7x_1 - 3x_2 \leq 1;$$

v)

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 \leq 1,}{x_i \geq 0, i = 1, 3;}$$

d)

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 + x_3 \leq 1,$$

$$x_2 + x_3 \leq 1;$$

j)

$$x_1 + x_2 = 2,$$

$$x_2 + x_3 = 2,$$

$$x_1 - x_3 \leq 0,$$

$$x_2 \geq 0;$$

i)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 4;$$

b)

$$x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4,$$

$$x_1 - x_2 = 0;$$

g)

$$0 \leq x_i \leq 1,$$

$$i = 1, 3;$$

e)

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$x_1 - x_3 \leq 1,$$

$$x_2 + x_3 \leq 1;$$

z)

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,$$

$$x_1 - x_3 = 2,$$

$$x_2 - x_3 = 1,$$

$$x_2 \geq 0;$$

k)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 4;$$

2. Quyidagi chiziqli programmashtirish masalalarini grafik usulda yeching:

a)

$$\frac{2x_1 + x_2 \rightarrow \max}{x_1 + x_2 \geq 1,}$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 16,$$

$$4x_1 + x_2 \leq 12,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

v)

$$\frac{x_1 + x_2 \rightarrow \min}{0 \leq x_1 \leq 1,}$$

$$0 \leq x_2 \leq 2,$$

$$0 \leq x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 0;$$

d)

$$\frac{-x_1 + 3x_2 \rightarrow \max}{x_1 - x_2 \leq 2,}$$

$$x_1 + x_2 \geq 4,$$

$$3x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$x_1 \geq 0 \dots x_2 \geq 0;$$

b)

$$\frac{x_1 + 2x_2 \rightarrow \max}{x_1 + x_2 \leq 1,}$$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

g)

$$\frac{x_1 - x_2 \rightarrow \max}{1 \leq x_1 + x_2 \leq 2,}$$

$$2 \leq x_1 - 2x_2 \leq 3,$$

$$1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

e)

$$\frac{2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max}{x_1 + x_2 \leq 18,}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 24,$$

$$0 \leq x_1 \leq 12,$$

$$0 \leq x_2 \leq 8;$$

3. Quyidagi masalalarni grafik usulida yeching.

1. Mebel fabrikasi shkaf va stollar ishlab chiqarish uchun zarur resurslardan foydalanadi. Har bir turdagi mahsulotga sarflanadigan resurslar normasi, 1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad va bor bo'lgan resurslarning umumiy miqdori quyidagi jadvalda berilgan.

Resurslar	1 ta mahsulotga sarflanadigan resurslar miqdori		Resurslarning umumiy miqdori
Yog'och (m)			
1 xil uchun	0,2	0,1	40
2 xil uchun	0,1	0,3	60
Mehnat sarfi (kishi-soat)	1,2	1,5	371,4
1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad	6	8	

Fabrika qancha stol va shkaf ishlab chiqarsa, ularni sotishdan keladigan daromad maksimal bo'ladi?

$$J: X_{opt}=(102;166), F_{max}=1940.$$

2. **A** va **B** turdagi mahsulot ishlab chiqarish uchun tokarlik, frezerlik va silliqlash jihozlari ishlatiladi. Har bir turdagi jihozning har bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishga sarflaydigan vaqtlari normalari jadvalda keltirilgan. Har bir turdagi jihozning ish vaqti umumiy fondi hamda 1 ta mahsulotni sotishdan keladigan daromad quyidagi jadvalda berilgan.

Jihoz turi	1 ta mahsulot tayyorlashga sarflanadigan vaqt (soat)		Jihozning foydali ish vaqti umumiy fondi (s)
	A	B	
Frezerlik	10	8	168
Tokarlik	5	10	180
Silliqlash	6	12	144
1 ta mahsulot sotishdan keladigan daromad (so'm)	14	18	

A va **B** mahsulotlar ishlab chiqarishning shunday rejasi topilsinki, ulardan keladigan daromad maksimal bo'lsin.

$$J: X_{opt}=(12;6), F_{max}=276.$$

4-Amaliy mashg'ulot

Mavzu: Chiziqli programmalash masalasining tayanch yechimi.

Ma'lumki, chiziqli programmalash masalasining tayanch yechimi n ta o'zgaruvchili m ta tenglamalar sistemasining nomanfiy yechimidan iborat bo'ladi.

Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

Bu sistemani matrisa ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$AX = B, \quad (2)$$

bu yerda: $A = (a_{ij})$ – (1) sistemaning koeffisientlaridan tuzilgan matrisa, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – vektor ustun, $B = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ – ozod hadlardan tashkil topgan vektor-ustun. Bu sistema « n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi» deb ataladi. Agar $n = m$ bo'lsa, A matrisa kvadrat matrisa bo'ladi. Ana shunday matrisaning ditermenanti $|A| \neq 0$ bo'lsa, A^{-1} matrisa A matrisaga

nisbatan teskari matriza mavjud bo'ladi. (2) sistemaning ikki tomonini A^{-1} matrisaga ko'paytirib berilgan sistemaning yechimi topiladi

$$X = A^{-1}B$$

Jordan-Gauss usuli chiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun zaruriyat tug'ilganda A^{-1} teskari matrisani topish uchun eng qulay usullardan biridir. Bu usulning mohiyati quyidagidan iborat.

Sistemadagi birinchi tenglamadan ixtiyoriy 0 dan farqli ko'efficientli noma'lum tanlanadi, hamda birinchi tenglamaning, hamma hadlari shu noma'lum oldidagi ko'efficientga bo'linadi. Birinchi tenglama yordamida tanlangan noma'lum boshqa hamma tenglamalardan yo'qotiladi. Ikkinchi tenglamadan ko'efficienti 0 dan farqli bo'lgan noma'lum tanlanadi hamda ikkinchi tenglamaning barcha hadlari shu noma'lum oldidagi ko'efficientga bo'linadi. Ikkinchi tenglamadan tanlangan noma'lum boshqa tenglamalardan yo'qotiladi, va hokazo. Shunday yo'l bilan har bir tenglamadan bittadan noma'lum ajratilguncha shu jarayon takrorlanadi. Natijada quyidagi ko'rinishdagi sistema hosil bo'ladi.

[illegible]

(3) sistemadagi $x_1, x_2, \dots, x_m$ o'zgaruvchilar «ajratilgan (bog'liq) o'zgaruvchilar» deb, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ o'zgaruvchilar esa «ajratilmagan (erкли) o'zgaruvchilar» deb ataladi. (3) sistemadan foydalanib berilgan (1) sistemaning umumiy yechimini topish mumkin:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - a_{1m+1}x_{m+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ x_2 = b'_2 - a_{2m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n, \\ \text{-----} \\ x_m = b'_m - a_{2m+1}x_{m+1} - \dots - a_{2n}x_n, \end{cases} \quad (4)$$

Bundan erkli $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ noma'lumlarga turli qiymatlar berib bog'liq- $x_1, x_2, \dots, x_m$ noma'lumlarning mos qiymatlarini topish mumkin.

Erkli noma'lumlarga 0 qiymat berib topilgan $x_1=b_1'$, $x_2=b_2'$,..., $x_m=b_m'$, yechim berilgan sistemaning bazis yechimi deyiladi.

Chiziqli programmalashtirish masalasining geometrik talqiniga ko'ra, masalaning mumkin bo'lgan yechimlari to'plami qavariq ko'pyoqlidan iborat bo'ladi. Bu ko'pyoqlining har bir uchiga (chetki nuqtasiga) tayin bir tayanch reja mos keladi. Chiziqli programmalashtirish masalasining maqsad funksiyasi o'zining optimal qiymatiga shu tayanch rejalaridan birida erishadi. Noma'lumlar soni 2 ta bo'lgan (yoki $n-m=2$ shartni qanoatlantiruvchi, n -noma'lumlar soni, m - tenglamalar soni), hamda chegaraviy shartlari tengsizliklar shaklida berilgan masalalarning tayanch rejalarini geometrik tasvirlash mumkin.

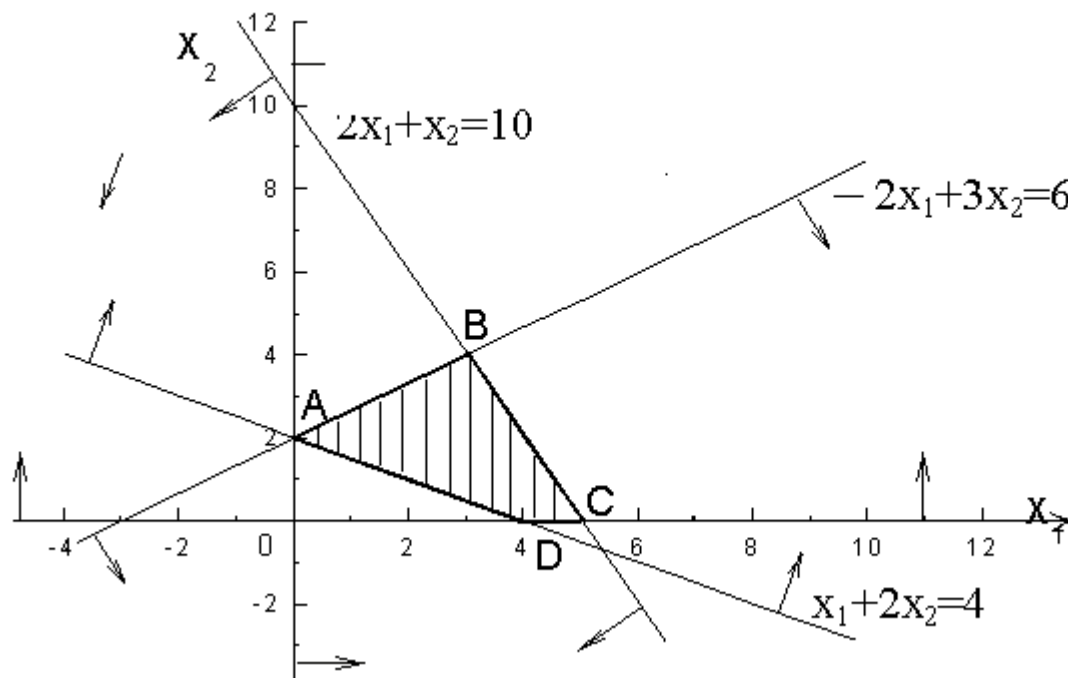
Chiziqli programmallashtirish masalasining barcha tayanch yechimini toping.

1-misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

Yechish. Chegaraviy shartlarga binoan yechimlar ko‘pburchagini chizib olamiz.

$$2x_1 + x_2 = 10, \quad -2x_1 + 3x_2 = 6, \quad x_1 + 2x_2 = 4.$$



1- chizma.

Chizmadan ko‘rinib turibdiki, yechimlar ko‘pburchagi $ABCD$ - ko‘pburchakdan iborat bo‘lib, bu ko‘pburchakning A, B, C va D uchlariga berilgan masalaning $X_A = (0; 2)$, $X_B = (3; 4)$, $X_C = (5; 0)$ va $X_D = (4; 0)$ tayanch rejalari mos keladi. Bunda B nuqtaning koordinatalari ikki to‘g‘ri chiziqning kesishish nuqtasining koordinatalari, ya’ni

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 = 6. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasining yechimi sifatida topilganligini eslatib o‘tamiz.

Shunday qilib, berilgan masalaning barcha tayanch rejalari to‘rtta bo‘lib, ular $X_1 = (0; 2)$, $X_2 = (3; 4)$, $X_3 = (5; 0)$ va $X_4 = (4; 0)$ yechimlardan iboratdir.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1.ChPMning geometrik talqinidan foydalanib, quyidagi masalalarning barcha tayanch yechimlarini toping.

1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ -2x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -x_1 + 3x_2 \rightarrow \min.$$

3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min.$$

4.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$F = -3x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$

5-Amaliy mashg'ulot

Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis yechimini topish.

Sistemaning nomanfiy yechimini topishda qaysi noma'lumning ajratilishi va uni qaysi tenglamadan ajratilishi farqsiz emas. Mana shu shartlarni e'tiborga oluvchi usullardan biri–Eydelnant usulidir. Bu usulning algoritmi bilan tanishamiz.

Buning uchun quyidagi sistemani ko'ramiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (2)$$

(1) sistemaning (2) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinadi. Buning uchun quyidagi ishlar amalga oshiriladi:

1. (1) sistemadagi tenglamalarning chap tomonidan barcha elementlar o'ng tomonga o'tkazilib, 0 – tenglamalar sistemasi tuziladi:

$$\begin{cases} 0 = b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n, \\ 0 = b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \dots - a_{2n}x_n, \\ \text{-----} \\ 0 = b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 - \dots - a_{mn}x_n, \end{cases} \quad (3)$$

2. Berilgan sistemaning birgalikda emaslik va nomanfiy yechimini mavjud emaslik shartlari tekshiriladi:

a) agar (3) sistemadagi kamida bitta tenglama $0 = b + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$

ko'rinishda bo'lib, $b \neq 0$ bo'lsa, berilgan tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lmaydi.

b) agar (3) sistemada kamida bitta tenglama $0 = b + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \dots + a_n \cdot x_n$

ko'rinishda bo'lib, $b, a_1, a_2, \dots, a_n$ lar bir xil ishorali bo'lsa, berilgan sistema nomanfiy yechimga ega bo'lmaydi. Agar yuqoridagi a) va b) shartlardan birortasi bajarilsa, yechish jarayoni to'xtatiladi, aks holda sistemani yechish davom ettiriladi.

3. Agar (3) tenglamalar sistemasida $0 = 0 + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$

ko'rinishdagi tenglama qatnashsa, bunday tenglamalarni noma'lumlarning ixtiyoriy qiymatlari qanoatlantirgani uchun, ular o'chirib tashlanadi.

4. Qolgan 0 – tenglamalarni o'zaro qo'shib, nazorat tenglama (n.t.) deb ataluvchi tenglama tuziladi. Nazorat tenglama ikki xil vazifani bajaradi:

1. Ajratilishi kerak bo'lgan noma'lum nazorat tenglamadan tanlanadi;

2. Har bir qadamdan keyin hosil bo'lgan nazorat tenglama qolgan 0 – tenglamalar yig'indisiga teng ekanligiga asoslanib, hisoblashlar to'g'ri olib borilayotganini tekshirib borish mumkin.

5. Nazorat tenglamadan koeffisienti eng kichik bo'lgan noma'lum (masalan, x_k) ajratilishi kerak bo'lgan noma'lum sifatida tanlanadi.

6. Tanlangan x_k noma'lum

$$\min_{a_{ik} < 0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{a_{lk}}.$$

shartni qanoatlantiruvchi l -tenglamadan ajratilib, yangi sistemaning birinchi tenglamasi tuziladi. Har bir tenglamaga mos keluvchi $b_i / |a_{ik}|$ ($a_{ik} < 0$) nisbat i -tenglamada x_k noma'lum bo'yicha hisoblangan aniqlovchi koeffisient (A.K.) deb ataladi.

7. Topilgan x_k noma'lumning qiymatini eski sistemaning qolgan tenglamalariga va nazorat tenglamaga qo'yish uchun bu tenglamalarga qo'shimcha tenglama tuziladi.

8. Har bir tenglamani, shu jumladan nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemaning qolgan tenglamalari va nazorat tenglamasi hosil qilinadi. Agar hosil bo'lgan yangi sistema uchun yuqoridagi a) va b) mavjud emaslik mezonlari bajarilmasa, yuqoridagi 4-8 punktlarda qilingan ishlar yana takrorlanadi. Shunday yo'l bilan sistemani yechish hamma 0-tenglamalar x -tenglamaga (noma'lumi ajratilgan tenglamaga) aylanguncha, ya'ni nazorat tenglama $0=0$ ko'rinishga kelguncha takrorlanadi. So'ngra sistemaning nomanfiy yechimi (haqiqiy yoki bazis) yoziladi.

1-misol. Sistemaning nomanfiy bazis yechimini toping.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Yechish. Berilgan tenglamalar sistemasini 0-tenglamalar sistemasiga aylantiramiz va nazorat tenglama tuzamiz.

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 1 - x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4, \\ 0 = 2 + x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4, \\ -2x_2 = -1 + x_1 - x_3 - x_4, \\ 0 = 5 - x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4, \\ -5x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4, \\ h.m. 0 = 8 - x_1 - 9x_2 - 3x_3 + x_4, \\ -9x_2 = -\frac{9}{2} + \frac{9}{2}x_1 - \frac{9}{2}x_3 - \frac{9}{2}x_4, \end{array} \right. \begin{array}{l} 1/2 \\ 2/2 = 1 \\ \\ 5/5 = 1 \\ \\ \end{array}$$

Nazorat tenglamadan eng kichik koeffisientli noma'lumni, ya'ni x_2 ni tanlaymiz. 0-tenglamalar sistemasidagi har bir tenglama uchun $b_i / |a_{i2}|$ ($a_{i2} < 0$) nisbatlarni, ya'ni aniqlovchi koeffisientlarni hisoblaymiz. Aniqlovchi koeffisientlar ichida eng kichigiga mos kelgan 1-tenglamadan x_2 ni ajratib x -tenglamaga aylantiramiz:

$$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4.$$

Bu tenglamadan foydalanib eski sistemaning har bir qolgan tenglamalariga, hamda nazorat tenglamaga qo'shimcha tenglama tuzamiz va ularni mos tenglamalar tagiga yozamiz. Har bir tenglamani va nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemani hosil qilamiz. Yangi sistemaning nazorat tenglamasidan eng kichik koeffisientli x_3 noma'lumni tanlaymiz va sistemadagi tenglamalarda bu noma'lum uchun aniqlovchi koeffisient hisoblaymiz.

Aniqlovchi koeffisientlar ichida eng kichigi 2-tenglamaga mos kelgani uchun x_3 ni 2-tenglamadan ajratib x -tenglamaga aylantiramiz.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4, \\ \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4, \\ 0 = 1 + 2x_1 - 4x_3 - 2x_4, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_3 - \frac{3}{2}x_4, \\ -\frac{7}{2}x_3 = -\frac{7}{8} - \frac{7}{4}x_1 + \frac{7}{4}x_4, \end{array} \right. \\ \text{h.m.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 - \frac{15}{2}x_3 - \frac{7}{2}x_4, \\ -\frac{15}{2}x_3 = -\frac{15}{8} - \frac{15}{4}x_1 + \frac{15}{4}x_4, \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} — \\ \\ 1/ \\ 5/ \end{array}$$

Topilgan x_3 ning qiymatini boshqa tenglamalarga va nazorat tenglamaga qo'yish uchun ularga qo'shimcha tenglamalar tuzamiz. Har bir tenglamani va nazorat tenglamani o'zining qo'shimchasi bilan qo'shib yangi sistemani hosil qilamiz.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_4, \\ \frac{1}{2}x_1 = \frac{5}{4} - 2x_2 - \frac{1}{2}x_4, \end{array} \right. \\ x_2 = \frac{5}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_4, \\ -\frac{1}{4}x_1 = -\frac{5}{8} + x_2 + \frac{1}{4}x_4, \end{array} \right. \\ \text{h.m.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{13}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{4}x_4, \\ -\frac{1}{4}x_1 = -\frac{5}{8} + x_2 + \frac{1}{4}x_4, \end{array} \right. \end{array} \right. \begin{array}{l} — \\ \\ 5/2 \\ 13/2 \end{array}$$

Endi nazorat tenglamadan x_1 ni tanlab uning ustida yuqoridagi ishlarni bajaramiz va quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} - 4x_2 - x_4 \\ x_3 = \frac{3}{2} - 2x_2 - x_4 \\ 0 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\ \text{h.m.} 0 = 1 + x_2 + \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

Hosil bo'lgan yangi sistemada b) mavjud emaslik sharti bajariladi. 3-tenglamada ozod had bilan noma'lumlar oldidagi koeffisientlar bir xil ishorali bo'lganligi sababli sistema nomanfiy yechimga ega bo'lmaydi. Yuqoridagi usul bilan chiziqli tengsizliklar sistemasining ham nomanfiy yechimini topish mumkin. Lekin bunda tengsizliklarning kichik tomoniga $x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0, \dots, x_{m+n} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar qo'shib tenglamalar sistemasini hosil qilish kerak bo'ladi.

2-misol. Berilgan tengsizliklar sistemasining nomanfiy bazis yechimini toping.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Yechish. Sistemadagi birinchi tengsizlikga x_5 ni, ikkinchisiga x_6 ni qo'shib quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + x_6 = 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan tenglamalar sistemasini yuqoridagi algoritm asosida yechamiz.

$$I \text{ qadam} \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2 - x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5, \\ 0 = 5 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_6, \\ -2x_1 = -4 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5, \\ h.m.0 = 7 - 3x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 - x_6, \\ -3x_1 = -6 + 6x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5, \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} A.K.(x_1) \\ 2 \\ 5/2 \\ \\ \end{array} \right|$$

$$II \text{ qadam} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5, \\ 2x_3 = \frac{2}{7} + \frac{6}{7}x_2 + \frac{6}{7}x_4 + \frac{4}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6, \\ 0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6, \\ h.m.0 = 1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 - x_6, \\ -7x_3 = -1 - 3x_2 - 3x_4 - 2x_5 + x_6, \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} A.K.(x_3) \\ - - \\ 1/7 \end{array} \right|$$

$$III \text{ qadam} \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{7} + \frac{3}{7}x_2 + \frac{3}{7}x_4 + \frac{2}{7}x_5 - \frac{1}{7}x_6, \\ x_1 = \frac{16}{7} - \frac{8}{7}x_2 - \frac{1}{7}x_4 - \frac{3}{7}x_5 - \frac{2}{7}x_6, \end{array} \right.$$

$$N.T. \quad 0 = 0$$

Javob. Bazis yechim: $x_1 = 16/7, x_2 = 0, x_3 = 1/7, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 0$.

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasining ixtiyoriy bir nomanfiy bazis yechimini toping.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 0 = 31 - 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ 0 = 12 + 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{array} \right.$$

3. Quyidagi chiziqli tengsizliklar sistemasining ixtiyoriy bir nomanfiy bazis yechimini toping.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 20, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 2x_3 \geq -5, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Tenglamalar sistemasining bazis yechimi nima?
2. 0-tenglamalar sistemasi qanday tuziladi?
3. Tenglamalar sistemasining nomanfiy yechimini mavjud emaslik shartlari qanday?
4. Nazorat tenglama qanday tuziladi va u nima uchun kerak?
5. Aniqlovchi koeffisient nima va u qanday hisoblanadi?
6. x - tenglamalar sistemasi nima?

6-Amaliy mashg'ulot

Mavzu: Tayanch yechimning optimallik sharti. Chekli optimal yechimning mavjud bo'lmashlik sharti. Yangi tayanch yechimga o'tish qoidasi.

Faraz qilaylik, kanonik ko'rinishdagi chiziqli programmalash masalasi berilgan bo'lsin.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (3)$$

Agar masala kanonik formada bo'lmasa, u bu ko'rinishga keltiriladi. Buning uchun masala cheklamalarida tengsizliklar qatnashsa, tengsizlikning kichik tomoniga qo'shimcha nomanfiy o'zgaruvchi qo'shish yordamida u tenglamaga aylantiriladi. Agar chiziqli funksiya $Y \rightarrow \max$ ko'rinishida bo'lsa, undagi ishoralarni almashtirib $Y \rightarrow \min$ ga aylantiriladi. Masalaning optimal yechimi uning bazis yechimlaridan biri bo'lib, unda (3) maqsad funksiya minimal qiymatga erishadi. Demak, optimal yechimni bazis yechimlar ichidan qidirish kerak.

Faraz qilaylik, o'tgan mavzuda tanishgan usul bilan (1) sistemaning (2) shartni qanoatlantiruvchi yechimi $x_1, x_2, \dots, x_m$ bazis o'zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan bo'lib, bu sistema x -tenglamalar sistemasi deyiladi. Bu sistemadan foydalanib (3) maqsad funksiyasini erkli o'zgaruvchilarning funksiyasi, ya'ni

$$Y = c_{00} + \sum_{j=1}^{n-m} c_{0j}x_{m+j} \quad (4)$$

ko'rinishida ifodalash mumkin. (1) ifodadagi erkli o'zgaruvchilarni 0 ga tenglab, $x_1=b_{10}, x_2=b_{20}, \dots, x_m=b_{m0}$ bazis yechimni topamiz. Bu bazis yechimdagi (3) maqsad funksiyaning qiymati $Y=c_{00}$, bo'ladi. Agar (1) sistemadagi barcha ozod hadlar musbat bo'lsa, ya'ni $b_{i0}>0$ ($i=1,2,\dots,m$), bo'lsa, u holda

$$X_0 = (b_{10}, b_{20}, \dots, b_{m0}, 0, 0, \dots, 0)$$

vektor berilgan masalaning bazis rejalaridan biri bo'ladi. Bu rejaga maqsad funksiyaning $Y(X_0)=c_{00}$

qiymati mos keladi. Agar (3) yoyilmadagi $c_{01}, c_{02}, \dots, c_{0n-m}$ koeffisientlar musbat ishorali bo'lsa, u holda topilgan X_0 bazis reja optimal reja bo'ladi. Optimal rejadagi maqsad funksiyaning eng kichik qiymati

$$Y_{\min} = Y(X_0) = c_{00}$$

bo'ladi.

Agar c_{0j} ($j=1, \dots, n-m$) koeffisientlardan kamida bittasi manfiy ishorali bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'lmaydi. Uni optimal rejaga yaqinroq bo'lgan, ya'ni

$$Y(X_1) \leq Y(X_0)$$

shartni qanoatlantiruvchi boshqa X_I bazis reja bilan almashtirish kerak bo'ladi. Bunday jarayonni amalga oshirish uchun quyidagi ishlarni bajarish kerak:

$$1) \quad \min_{c_{0j} < 0} c_{0j} = c_{OS}$$

shartni qanoatlantiruvchi ustunga mos keluvchi x_{m+s} noma'lum tanlanadi, ya'ni bazisga kiritilishi kerak bo'lgan noma'lum belgilanadi. Bu yerda ikki xil vaziyat ro'y berishi mumkin:

a) x_{m+s} erkli o'zgaruvchiga mos keluvchi ustundagi elementlarning barchasi musbat, ya'ni $b_{is} \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, m$).

Bunday shart bajarilganda maqsad funksiya chekli minimum qiymatga ega bo'lmaydi va demak, berilgan masalaning chekli optimal yechimi mavjud bo'lmaydi .

b) x_{m+s} erkli o'zgaruvchiga mos keluvchi ustundagi elementlar ichida kamida bittasi manfiy ishorali bo'lsin deylik. U holda bazisga x_{m+s} o'zgaruvchini kiritib,

$$\min_{b_{is} < 0} \frac{b_{i0}}{b_{is}} = \frac{b_{k0}}{b_{ks}}$$

shartni qanoatdantiruvchi qatordagi x_k o'zgaruvchi bazisdan chiqariladi. So'ngra topilgan x_{m+s} no'malumning qiymati boshqa tenglamalarga va maqsad funksiyasiga qo'yib chiqiladi. Natijada yangi bazis reja topiladi. Agar yangi bazis reja optimal reja bo'lsa, u holda masalani yechish to'xtatiladi. Aks holda, agar imkoniyat bo'lsa, yuqoridagi yo'l bilan yangi bazis yechimga o'tiladi. Bazis rejalarni almashtirish jarayoni berilgan masalaning optimal yechimi topilguncha yoki undagi maqsad funksiyaning chekli minimum qiymati mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Ixtiyoriy chiziqli programmalash masalasining bazis rejasini topish va bu rejani boshqa bazis rejalarga almashtira borib, optimal yechimni topish jarayonini jadval ko'rinishda ham tasvirlash mumkin .Buning uchun :

1. Chiziqli almashtirishlarni qo'llab, berilgan chiziqli programmalash masalasi quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = b_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n, \\ 0 = b_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n, \\ \\ 0 = b_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (6)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min .. \quad (7)$$

2. (5) sistemaning birgalikda emaslik va uning nomanfiy yechimining mavjud emaslik shartlari tekshiriladi:(a va b shartlarning bajarilishi tekshiriladi). Agar bu shartlar bajarilmasa, (5)-(7) masala quyidagi “Simpleks jadval” deb ataluvchi jadvalga joylashtiriladi.

Bazis garuvchilar(X_{baz})	B	x_j					
		x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
0	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
0	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...
0	b_l	a_{l1}	a_{l2}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...
0	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mk}	...	a_{mn}

<i>N.T.</i>	S_0	S_1	S_2	...	S_k	...	S_n
<i>Y</i>	c_0	c_1	c_2	...	c_k	...	c_n

3. jadvalning $m+1$ –qatoriga nazorat tenglama (N.T.) deb ataluvchi va dastlabki m ta tenglamalar yig'indisidan iborat bo'lgan tenglama joylashtirilgan.

Bunda

$$S_0 = \sum_{i=1}^m b_i; \quad S_1 = \sum_{i=1}^m a_{i1}; \quad S_2 = \sum_{i=1}^m a_{i2}; \quad \dots \quad S_n = \sum_{i=1}^m a_{in};$$

Jadvalning oxirgi $m+2$ -qatoriga maqsad funksiya

$$Y = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

ko'rinishda yozilgan.

4. Nazorat tenglamadagi

$$\max_j S_j = S_k$$

shartni qanoatlantiruvchi ustunga mos keluvchi no'malum belgilanadi. Belgilangan no'malum

$$\min_{a_{ik} < 0} \frac{b_i}{|a_{ik}|} = \frac{b_l}{|a_{lk}|}$$

shartni qanoatlantiruvchi tenglamadan ajratiladi. So'ngra Jordan-Gauss usulini qo'llab ajratilgan (baza) o'zgaruvchi boshqa tenglamalardan, N.T. dan va maqsad funksiya dan yo'q qilinadi, ya'ni simpleks jadval almashtiriladi. Bu jarayon nazorat tenglama (N.T.) $0=0$ ko'rinishga kelguncha takrorlanadi. So'nggi holatda (5)-(7) sistema baza o'zgaruvchilarga nisbatan aniqlangan shaklga ya'ni x - tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keladi. Bu holda simpleks jadval quyidagi ko'rinishga keladi:

<i>Bazis o'zgaruvchilar</i>	B_0	<i>Erkli o'zgaruvchilar</i>					
		x_{m+1}	x_{m+2}	...	x_{m+s}	...	x_{m+n}
x_1	b_{10}	b_{11}	b_{12}	...	b_{1s}	...	b_{1n-m}
x_2	b_{20}	b_{21}	b_{22}	...	b_{2s}	...	b_{2n-m}
...	...	...	...	...	...	...	...
x_k	b_{k0}	b_{k1}	b_{k2}	...	b_{ks}	...	b_{kn-m}
...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	b_{m0}	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{ms}	...	b_{mn-m}
<i>Y</i>	c_{00}	c_{01}	c_{02}	...	c_{0s}	...	c_{0n-m}

Bu bosqichda masalaning boshlang'ich bazis yechimi topiladi;

5. Topilgan bazis rejada jadvalning Y qatoridagi barcha $c_{0j} \geq 0$ ($j=1,2,\dots,n-m$) bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'ladi. Agar birorta $c_{0j} < 0$ ($j=1,2,\dots,m$) bo'lsa, u holda topilgan bazis reja optimal reja bo'lmaydi. Uni optimal rejaga yaqinroq bo'lgan boshqa rejaga almashtirish uchun yuqorida keltirilgan usul bilan simpleks jadval almashtiriladi;

6. Masalaning javobini (optimal yechimni) yozish uchun erkli o'zgaruvchilar 0 ga, bazis o'zgaruvchilar esa ozod hadlarga tenglashtiriladi.

Topilgan no'malumlarining qiymatidan foydalanib Y_{min} , so'ngra (agar zarur bo'lsa) Y_{max} ning qiymati topiladi.

1-Masala. Masalaning bazis yechimlaridan birini toping va uni optimal yechimga aylantiring:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}),$$

$$Y = -x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$

Yechish. Masalaning shartlaridagi tenglamalar sistemasini 0- tenglamalar sistemasiga aylantiramiz:

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2x_1 - x_2 - x_3, \\ 0 = 2 - x_1 + 2x_2 - x_4, \\ 0 = 5 - x_1 - x_2 - x_5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,5}),$$

$$Y = -x_1 + x_2 \rightarrow \min.$$

Hosil bo'lgan masalani quyidagi simpleks jadvalga joylashtiramiz va yuqorida tanishgan iterasion jarayonni bajaramiz.

Bazis o'zgaruv chilar (X_{baz})	B	x_j					A. K.
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	2	2	-1	-1	0	0	2
0	2	-1	2	0	-1	0	-
0	5	-1	-1	0	0	-1	-
N.t.	9	0	0	-1	-1	-1	
Y	0	-1	1	0	0	0	
x_3	2	2	-1	-1	0	0	-
0	2	-1	2	0	-1	0	2
0	5	-1	-1	0	0	-1	5
N.t.	7	-2	1	0	-1	-1	
Y	0	-1	1	0	0	0	
x_3	6	0	3	-1	-2	0	-
x_1	2	-1	2	0	-1	0	-
0	3	0	-3	0	1	-1	1
N.t.	3	0	-3	0	1	-1	
Y	-2	0	-1	0	1	0	
x_3	9	0	0	-1	-1	-1	
x_1	4	-1	0	0	-1/3	-2/3	
x_2	1	0	-1	0	1/3	-1/3	
N.t.	0	0	0	0	0	0	
Y	-3	0	0	0	2/3	1/3	

Oxirgi bosqichda topilgan x -tenglamalar sistemasini va Y maqsad funksiyani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$x_3 = 9 - x_4 - x_5,$$

$$x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5,$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5,$$

$$Y = -3 + \frac{2}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5.$$

Bu yerda x_1, x_2, x_3 lar ajratilgan bazis o'zgaruvchilar, x_4 va x_5 esa erkli o'zgaruvchilardir. Erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat berib, masalaning bazis rejasini topamiz .

$$X_0 = (4; 1; 9; 0; 0), \quad Y(X_0) = -3.$$

Erkli o'zgaruvchilar maqsad funksiya Y da musbat koeffisientlar bilan qatnashgani uchun topilgan bazis reja optimal reja bo'ladi. Optimal reja quyidagicha yoziladi:

$$X_{opt} = (4; 1; 9; 0; 0), \quad Y_{min} = -3.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. ChP masalalari qanday shartlar bajarilganda yechimga ega bo'lmaydi ?
2. Bazis yechimning (rejaning) optimallik sharti nimadan iborat?
3. Maqsad funksiyani chekli minimumga ega bo'lmaslik sharti qanday?
4. Bazis yechimlarni almashtirish qoidasi qanday?

Mustaqil yechish uchun misollar.

1. Quyidagi masalalarning nechta bazis yechimi borligini aniqlang va ixtiyoriy bir bazis yechimini toping.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8, \\ 12x_1 + 9x_2 + 3x_3 \leq 14, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 \geq 8, \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 \leq 18, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,3}), & x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,3}), \\ Y = 3x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \max. & Y = 3x_1 - 4x_2 + x_3 \rightarrow \max. \end{array}$$

2. Quyidagi ChP masalalarining optimal yechimlarini toping.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 8, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4}), \\ Y = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \rightarrow \max. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad \begin{cases} 0 = 50 + x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4, \\ 0 = 200 - 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4}), \\ Y = 500 - 2x_1 + 4x_2 - 9x_3 - x_4 \rightarrow \min. \end{array}$$

3. Quyidagi ChP masalalarida chekli optimal yechimning mavjud emaslik shartlari tekshirilsin.

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 5, \\ -x_1 + 4x_2 + x_4 \leq 1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 8, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,4}), \\ Y = x_1 + 1,5x_2 - 2,5x_3 + 3x_4 \rightarrow \max. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad \begin{cases} -x_1 + 0,5x_2 - 1,5x_3 \leq 1, \\ -x_1 - x_2 + x_3 \leq 4, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1, \end{cases} \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,3}), \\ Y = x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max. \end{array}$$

7-Amaliy mashg'ulot.

Mavzu: Chiziqli programmalash masalasini yechishning Simpleks usuli.

Dansig yaratgan simpleks usul har bir tenglamada bittadan ajratilgan no'malum (baza o'zgaruvchi) qatnashishi shartiga asoslangan. Boshqacha aytganda, ChP masalasida m ta o'zaro chiziqli erkli vektorlar mavjud deb qaraladi. Umumiylikni buzmagani holda bu vektorlar birinchi m ta $P_1, P_2, \dots, P_m$ vektorlardan iborat bo'lsin, deylik. U holda masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \text{-----} \\ x_m + a_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (3)$$

(1) sistemani vektor shaklida yozib olaylik:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_mx_m + P_{m+1}x_{m+1} + \dots + P_nx_n = P_0, \quad (4)$$

bu yerda

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{p}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1m+1} \\ \mathbf{a}_{2m+1} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{mm+1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{2n} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}$$

$P_1, P_2, \dots, P_m$ vektorlar sistemasi m -o'lchovli fazoda o'zaro chiziqli erkli bo'lgan birlik vektorlar sistemasidan iborat. Ular m o'lchovli fazoning bazisini tashkil qiladi. Ushbu vektorlarga mos keluvchi $x_1, x_2, \dots, x_m$ o'zgaruvchilarni «bazis o'zgaruvchilar» deb ataladi.

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ – bazis bo'lmagan (erkli) o'zgaruvchilar. Agar erkli o'zgaruvchilarga 0 qiymat bersak, bazis o'zgaruvchilar ozod hadlarga teng bo'ladi. Natijada $X_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ yechim hosil bo'ladi. Bu yechim boshlang'ich yechim bo'ladi. Ushbu yechimga $x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m = P_0$ yoyilma mos keladi. Bu yoyilmadagi $P_1, P_2, \dots, P_m$ vektorlar o'zaro erkli bo'lganligi sababli topilgan joiz yechim bazis yechim bo'ladi.

Dansig usulida simpleks jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_k	...	c_n
			P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_k	...	P_n
P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1k}	...	a_{1n}
P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2k}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_l	c_l	b_l	0	0	...	0	a_{lm+1}	...	a_{lk}	...	a_{ln}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mk}	...	a_{mn}
$\Delta_j = Z_j - C_j$	...	$Y_0 = \sum_{i=0}^m c_i b_i + c_0$	$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = 0$	...	$\Delta_m = 0$	$\Delta_{m+1} = \sum_{i=0}^m a_{im+1} c_i - c_{m+1}$	...	$\Delta_k = \sum_{i=0}^m a_{ik} c_i - c_k$	...	$\Delta_n = \sum_{i=0}^m a_{in} c_i - c_n$

Jadvaldagi C_{baz} bilan belgilangan ustun $x_1, x_2, \dots, x_m$ bazis o'zgaruvchilarning chiziqli funksiyadagi koeffisientlardan tashkil topgan vektor, ya'ni $C_{baz} = (c_1, c_2, \dots, c_m)$.

Jadvalda har bir P_j vektorning ustiga x_j noma'lumning chiziqli funksiyadagi koeffisienti c_j yozilgan. $m+1$ - qatorga esa $x_1, x_2, \dots, x_m$ bazis o'zgaruvchilardagi chiziqli funksiyaning qiymati

$$Y_0 = \sum_{i=1}^m b_i c_i + c_0 \quad (5)$$

hamda bazis yechimning optimallik mezonini baholovchi son

$$\Delta_j = Z_j - c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} c_i - c_j \quad (j=1, \dots, n) \quad (6)$$

yozilgan. Bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi $P_1, P_2, \dots, P_m$ vektorlar bazis vektorlar deb belgilangan. Bu vektorlar uchun $\Delta_j = Z_j - c_j = 0$ ($j=1, \dots, n$) bo'ladi.

Agar barcha ustunlarda $\Delta_j \leq 0$ bo'lsa, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ yechim optimal yechim bo'ladi. Bu yechimdagi chiziqli funksiyaning qiymati Y_0 ga teng bo'ladi.

Agar kamida bitta j uchun $\Delta_j > 0$ bo'lsa, u holda masalaning optimal yechimi topilmagan bo'ladi. Shuning uchun topilgan bazis rejani optimal rejaga yaqin bo'lgan boshqa bazis rejaga almashtirish maqsadida bazisga

$$\max_{\Delta_j > 0} (\Delta_j) = \Delta_k$$

shartni qanoatlantiruvchi P_k vektorni kiritish kerak. Agar P_k bazisga kiritilsa, eski bazis vektorlardan birortasini bazisdan chiqarish kerak. Bazisdan

$$\min_{a_{ik} > 0} (b_i / a_{ik}) = b_l / a_{lk}$$

shart o'rinli bo'lgan P_l vektor chiqariladi. Bu holda a_{lk} element hal qiluvchi element sifatida belgilandi. Shu element joylashgan j -qatordagi P_l vektor o'rniga u joylashgan ustundagi P_k vektor bazisga kiritiladi. P_l vektorning o'rniga P_k vektorni kiritish uchun simpleks jadval quyidagi formulalar asosida almashtiriladi.

$$\begin{cases} b'_i = b_i - (b_l / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ b'_l = b_l / a_{lk}, \\ a'_{ij} = a_{ij} - (a_{lj} / a_{lk}) \cdot a_{ik}, \\ a'_{lj} = a_{lj} / a_{lk}. \end{cases}$$

Simpleks jadval almashgandan so'ng yana qaytadan $\Delta_j \leq 0$ baholar aniqlanadi. Agar barcha j lar uchun $\Delta_j \leq 0$ bo'lsa, optimal yechim topilgan bo'ladi. Aks holda topilgan bazis reja boshqa bazis reja bilan almashtiriladi. Bunda quyidagi teoremlarga asoslanib ish ko'riladi.

1- teorema. Agar $X=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ bazis reja uchun $\Delta_j = Z_j - c_j \leq 0$ ($j=1, \dots, n$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda bu reja optimal reja bo'ladi.

2- teorema. Agar X_0 bazis rejada tayin bir j uchun $\Delta_j = Z_j - c_j > 0$ shart o'rinli bo'lsa, u holda X_0 optimal reja bo'lmaydi va shunday X_1 rejani topish mumkin bo'ladiki, uning uchun $Y(X_1) < Y(X_0)$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar tayin bir j uchun $\Delta_j = Z_j - c_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda 2-teoremaga asosan bu bazis rejani ham yangi bazis rejaga almashtirish kerak bo'ladi. Bu jarayon optimal reja topilguncha yoki masaladagi maqsad funksiyaning quyidan chegaralanmagan ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Masalaning optimal yechimining mavjud bo'lmaslik sharti quyidagicha:

Agar tayin j uchun $\Delta_j = Z_j - c_j > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu ustundagi barcha elementlar $a_{ij} \leq 0$ ($i=1, \dots, m; j=1, \dots, n$) bo'lsa, u holda masalaning maqsad funksiyasi chekli ekstremumga ega bo'lmaydi.

Faraz qilaylik, simpleks jadvalda optimallik sharti ($\Delta_j \leq 0, j=1, \dots, n$) bajarilsin. Bu holda bu yechim

$$X_0 = B^{-1}P_0$$

formula orqali topiladi. Bu yerda $B=(P_1, P_2, \dots, P_m)$ matrisa bazis vektorlardan tashkil topgan matrisadir.

(1)-(3) masala uchun B matrisa m o'lchovli J_m - birlilik matrisadir,

ya'ni $B=J_m$.

$BB^{-1}=J_m$ bo'lganligi sababli B^{-1} matrisa ham birlik matrisa bo'ladi.

Demak, $X_0=P_0=(b'_{10}, b'_{20}, \dots, b'_{m0}, 0, \dots, 0)$ optimal yechim bo'ladi.

1-misol. Masalani simpleks usul bilan yeching

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$Y=x_2-3x_3+2x_5 \rightarrow \min.$$

Yechish. Belgilashlar kiritamiz va simpleks jadvalni to'ldiramiz

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$C' = (0; 1; -3; 0; 2)$$

i	Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	0	1	-3	0	2	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_1	0	7	1	3	-1	0	-2	0
2	P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
3	P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j			0	0	-1	3	0	-2	0
1	P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	-2	0
2	P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
3	P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j			-9	0	1/2	0	-3/4	-2	0
1	P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	-4/5	0
2	P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	-2/5	0
3	P_6	0	11	1	0	0	-1/2	6	1
Δ_j			-11	-1/5	0	0	-4/5	-8/5	0

Simpleks usulning I bosqichida bazisga P_3 vektor kiritilib P_4 vektor chiqarildi, II bosqichida P_2 kiritildi va P_1 chiqarildi. Simpleks jadval (7) formulalar asosida almashtirilib borildi. III bosqichda optimal yechim topildi:

$$X = (0; 4; 5; 0; 0; 11), Y_{min} = -11.$$

2-Masala. Korxonada to'rt xil mahsulot tayyorlanadi. Birlik mahsulotlarning sotuv narxlari mos ravishda 2,1,3 va 5 ming so'mdan bo'lsin. Mahsulotlarni tayyorlash uchun energiya, xomashyo va mehnat sarflanadi. Birlik mahsulot uchun saflanadigan resurslar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan.

	1 xil mahsulot	2 xil mahsulot	3 xil mahsulot	4 xil mahsulot	Resurslar
Energiya	2	3	1	2	30
Xomashyo	4	2	1	2	40
Mehnat	1	2	3	1	25

Mahsulotlarni ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzish kerakki, mahsulotlarning sotuv narxlari yig'indisi maksimal bo'lsin.

Bu iqtisodiyot masalasini yechish uchun uning matematik modelini tuzamiz. Shu maqsadda x_1, x_2, x_3, x_4 lar orqali rejalashtirilgan mahsulotlar miqdorlarini belgilaymiz. Ularning narxi

$$\sum_{i=1}^4 c_i x_i = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

bo'ladi. Mahsulotlarga sarflanadigan energiya miqdori $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$, xomashyo miqdori $4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$ va mehnat miqdori $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$ dan iborat bo'ladi.

Masala shartiga ko'ra, quyidagi chiziqli programmashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$\frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \max}{2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 30,} \quad (1)$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 40, \quad (2)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 25,}{x_i \geq 0, i = 1, 4.} \quad (3)$$

Bu masalani simpleks metod yordamida yechish uchun uni kanonik ko'rinishga keltiramiz. Shu maqsadda (2) tengsizliklarga muvozanatlovchi, yordamchi, x_5, x_6 va x_7 miqdorlarni qo'shamiz.

Bu miqdorlarni iqtisodiy talqin etsak, ular qaralayotgan reja uchun erkin resurslarni anglatadi. Natijada quyidagi kanonik masalaga ega bo'lamiz:

$$\frac{2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \rightarrow \max}{2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 30,} \quad (4)$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 40, \quad (5)$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 25,}{x_i \geq 0, i = \overline{1,7}.} \quad (6)$$

Bu masala uchun (0,0,0,0,30,40,25) bazis reja bo'ladi va unga

$$A_B = (a_5, a_6, a_7) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bazis mos keladi. Demak, (4)-(6) masalani simpleks metod yordamida yechish mumkin. Dastlab, yuqorida bayon etilgan algoritm asosida birinchi simpleks jadvalni to'ldiramiz.

	S_i	S_B	2	1	3	5	0	0	0	
b, a_i		b, x	a_1	a_2	a_3	A_4	a_5	a_6	a_7	θ
a_B										
a_5	0	30	2	3	1	2	1	0	0	15
a_6	0	40	4	2	1	2	0	1	0	20
a_7	0	25	1	2	3	1	0	0	1	25
Z		0	0	0	0	0	0	0	0	
Z-C			-2	-1	-3	-5	0	0	0	
a_4	5	15	1	3/2	1/2	1	1/2	0	0	30
a_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a_7	0	10	0	1/2	5/2	0	-1/2	0	1	4
Z		75	5	15/2	5/2	5	5/2	0	0	
Z-C			3	13/2	-1/2	0	5/2	0	0	
a_4	5	13	1	7/5	0	1	3/5	0	-1/5	
a_6	0	10	2	-1	0	0	-1	1	0	
a_3	3	4	0	1/5	1	0	-1/5	0	2/5	
Z		77	5	38/5	3	5	12/5	0	1/5	
Z-C			3	33/5	0	0	12/5	0	1/5	

Demak ikkinchi iterasiya natijasida uchinchi qadamda optimallik sharti bajarildi. Optimal reja $x_{opt}=(0,0,4,13,0,10,0)$ bo'lib, maqsad funksiyaning joiz maksimal qiymati $c'x_{opt} = 77$ bo'ladi.

Izoh. Har bir jadvalning Z satridagi uchinchi katakda maqsad funksiyaning mos rejadagi qiymati hosil bo'ladi va har bir iteratsiyada bu qiymat oshib boradi.

Chiziqli programmashtirish masalasini yechishning Simpleks usuli bir tayanch yechimdan boshqasiga o'tish asosida maqsad funksiyasiga optimal qiymat beruvchi yechimni topishga asoslangandir. Har bir tayanch yechimdan boshqasiga o'tilganda maqsad funksiya qiymati o'sib boradi (maksimallashtirish masalasi uchun) yoki kamayib boradi (minimallashtirish masalasi uchun). Chekli qadamdagi hisoblashlardan keyin masalaning optimal yechimi topiladi yoki maqsad funksiyasi yechimlar sohasida chegaralanmaganligi aniqlanadi. Barcha hisoblash jarayonlari, bir yechimdan boshqasiga o'tish va tayanch yechimning optimallik shartlarini tekshirish simpleks jadval deb ataluvchi maxsus jadvalda bajariladi.

Simpleks usulni quyidagi masalalarni yechish jarayonida tavsiflaymiz.

3-masala. Quyidagi ChPMni simpleks usulda yeching.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 7, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

$$F = -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \rightarrow \min.$$

Yechish. Masalaning tenglamalar sistemasini vektor formada yozib olamiz:

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x_4 P_4 + x_5 P_5 = P_0,$$

bunda

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$C = (-2; -1; 1; -1; 1).$$

Berilgan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 vektorlar orasida uchta birlik P_3, P_4 va P_5 vektorlar bo'lganligi uchun, masalaning boshlang'ich tayanch rejasini bevosita yozish mumkin:

$$X_0 = (0; 0; 0; 5; 9; 7)$$

Birlik vektorlarga mos x_3, x_4 va x_5 - o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar bo'lib, qolgan x_1, x_2, x_3 - o'zgaruvchilar esa bazismas o'zgaruvchilardir. Bazis o'zgaruvchilarga mos keluvchi chiziqli funksiya koeffitsientidan tuzilgan vektor $C_{baz}(1; -1; 1)$ dan iborat.

Masalani quyidagi simpleks jadvalga joylashtiramiz. Jadvalning $m+1$ qatoriga rejaning bahosi deb ataluvchi va

$$\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} C_i - C_j$$

formula orqali aniqlanuvchi ko'rsatkichlar joylashtiriladi. Agar barcha $\Delta_j \leq 0$ ($j = \overline{1, n}$) bo'lsa, topilgan tayanch reja optimal yechim bo'ladi. Agar birorta $j=k$ uchun $\Delta_k > 0$ bo'lsa, u holda topilgan tayanch yechim optimal reja bo'lmaydi. Uni boshqa tayanch rejaga almashtirish kerak.

i	Bazis	C_δ	P_0	-2	-1	1	-1	1	A.k.
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
1	P_3	1	5	1	1	1	0	0	5
2	P_4	-1	9	2	1	0	1	0	9
3	P_5	1	7	1	2	0	0	1	7/2*
$m+1$	$\Delta_j = F_j - C_j$		3	2	3*	0	0	0	
1	P_3	1	3/2	1/2	0	1	0	-1/2	3*
2	P_4	-1	11/2	3/2	0	0	1	-1/2	11/3
3	P_2	-1	7/2	1/2	1	0	0	1/2	7
$m+1$	$\Delta_j = F_j - C_j$		-15/2	1/2*	0	0	0	-3/2	
1	P_1	-2	3	1	0	2	0	-1	
2	P_4	-1	1	0	0	-3	1	1	
3	P_2	-1	2	0	1	-1	0	1	
$m+1$	$\Delta_j = F_j - C_j$		-9	0	0	-1	0	-1	

Tayanch rejalarni almashtirish jarayoni optimal yechim topilguncha yoki uning yechimi yo'q ekanligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Simpleks usulni qo'llab, *I* qadamda $\max_{\Delta_j \neq 0} \Delta_j = 3$ ga mos keluvchi P_2 bazisga kiritilib, P_5 vektor bazisdan chiqariladi. *II* qadamda $\Delta_3 = \frac{1}{2}$ ga mos keluvchi P_1 vektor bazisga kiritilib, P_3 bazisdan chiqariladi va nihoyat *III* qadamda optimal yechim topiladi. Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, berilgan masalaning optimal rejasi $X^* = (3; 2; 0; 1; 0)$ bo'lib, unga chizilgan funksiyaning $F_{min} = -9$ qiymati mos keladi. Topilgan yechim yagonadir, chunki nolga teng Δ_j baholar faqat bazis vektorlar uchun o'rinalidir.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyidagi masalarni dastlabki x_0 rejadan foydalanib Simpleks usul yordamida yeching:

a)

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3}, \\ x_0 = (1; 1, 0); \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \\ x_0 = (0, 1, 1) \end{array}$$

v)

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (0, 0, 1, 1); \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{l} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \rightarrow \max \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (1, 0, 0, 1); \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \end{array}$$

d) $x_1 - x_2 + x_3 = 0,$

$$\begin{array}{l} x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (0, 1, 1, 0); \end{array}$$

e) $2x_1 - x_3 + x_4 = 1,$

$$\begin{array}{l} x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (0, 1, 0, 1); \end{array}$$

j)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_0 = (0, 0, 0, 1); \end{array}$$

z)

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + ax_3 \rightarrow \max \\ x_1 + x_2 + (2+a)x_3 = 3+a, \\ x_1 - x_2 + (a-2)x_3 = a-3, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3}, \\ a \neq 0, x_0 = (0, 1, 1). \end{array}$$

2. Simpleks usulda yeching.

a) $f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ \frac{3}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 \leq 7,5 \\ x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4} \right) \end{cases}$$

b) $f(x) = 7,5x_1 + 9x_2 - 15x_3 \quad (\max)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4,5x_2 + 6x_3 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 15 \\ x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,3} \right) \end{cases}$$

$$v) f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 2 \\ x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4}) \end{cases}$$

$$g) f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 1 \\ x_1 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + x_3 \leq 2 \\ x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,3}) \end{cases}$$

3. Quyidagi masalalarda dastlab ChPM ning biror tayanch rejasini toping va Simpleks usulini qo'llab optimal yechimni aniqlang.

1.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 - x_3 - 3\delta_4 \rightarrow \max.$$

$$J: X_{opt}(0;6;0;6), F_{max}=24.$$

2.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

$$F = 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 \rightarrow \min.$$

$$J: F_{min} \rightarrow -\infty.$$

3.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 16, \\ x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 16, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

$$F = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \rightarrow \min.$$

$$J: X_{opt}(3;0;0;4;0), F_{min}=7.$$

4.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ 4x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -12, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

$$F = 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 \rightarrow \max.$$

$$J: X_{opt}(9;12;0;0), F_{max}=66.$$

8-Amaliy mashg'ulot

Mavzu: Sun'iy bazis usuli

Agar masalaning shartlarida o'zaro erkli bo'lgan m ta birlik vektorlar (bazis vektorlar) qatnashmasa, ular sun'iy ravishda kiritiladi. Masalan, masala quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_2 \\ \text{-----} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (1)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (2)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max. \quad (3)$$

Bu masalaga $x_{n+1} \geq 0, x_{n+2} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritilsa, quyidagi kengaytirilgan masala hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{b}_2 \\ \text{-----} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+m} = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \quad (5)$$

$$Y = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n + 0(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \min. \quad (6)$$

Bu holda $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektorlar bazis vektorlar va $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilar «bazis o'zgaruvchilar» deb qabul qilinadi.

Agar berilgan masala quyidagi ko'rinishda bo'lsa:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ \text{-----} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (7)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \quad (8)$$

$$Y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min. \quad (9)$$

Bu masalaga sun'iy $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ o'zgaruvchilarni kiritib quyidagi kengaytirilgan masala hosil qilinadi:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{b}_2 \\ \text{-----} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+m} = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \quad (11)$$

$$Y = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n + M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \rightarrow \min. \quad (12)$$

bu yerda: M – yetarlicha katta musbat son.

Sun'iy bazis o'zgaruvchilariga mos keluvchi $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$ vektorlar «sun'iy bazis vektorlar» deb ataladi.

Berilgan (7)-(9) masalaning optimal yechimi quyidagi teoremaga asoslanib topiladi.

Teorema. Agar kengaytirilgan (10)-(12) masalaning optimal yechimida sun'iy bazis o'zgaruvchilari nolga teng bo'lsa, ya'ni:

$$x_{n+i} = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu yechim berilgan (7)-(9) masalaning ham optimal yechimi bo'ladi.

Agar kengaytirilgan masalaning optimal yechimida kamida bitta sun'iy bazis o'zgaruvchi noldan farqli bo'lsa, u holda masala yechimga ega bo'lmaydi.

1-misol. Masalani sun'iy bazis usuli bilan yeching:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_4 = 3 \\ 2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 = 3 \\ \mathbf{x}_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 4) \\ Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 \rightarrow \max. \end{cases}$$

Yechish. Masalaga sun'iy $x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$ o'zgaruvchilar kiritamiz va uni normal ko'rinishga keltiramiz.

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 2\mathbf{x}_3 + 2\mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 = 3 \\ 2\mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_6 = 3 \\ \mathbf{x}_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6) \\ Z = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \rightarrow \min. \end{cases}$$

Hosil bo'lgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz.

i	Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	-5	-3	-4	1	M	M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_5	M	3	1	3	2	2	1	0
2	P_6	M	3	2	2	1	1	0	1
Δ_j			$6M$	$3M+5$	$5M+3$ *	$3M+4$	$3M-1$	0	0
1	P_2	-3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	P_6	M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1
Δ_j			$M-3$	$4/3M+$ 4*	0	- 1/3M+ 2	-1/3M- 3	-5/3M-1	0
1	P_2	-3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4
2	P_1	-5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4
Δ_j			-6	0	0	3*	-2	1-M	-3-M
1	P_3	-4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3
2	P_1	-5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3
Δ_j			9	0	-4	0	-5	-1-M	-2-M

Shunday qilib, simpleks usul bo'yicha 4-ta qadamdan iborat yaqinlashishda optimal yechim topildi. $\Delta_j \leq 0$. Optimal yechim $x=(1;0;1;0;0;0)$, $Y_{min}=-9$.

Kengaytirilgan masalaning optimal yechimidagi sun'iy o'zgaruvchilar 0 ga teng ($x_5=0$, $x_6=0$). Shuning uchun (3-teoremaga asosan) berilgan masalaning optimal yechimi:

$$X=(1;0;1;0); \quad Z_{min}=-9; \quad Z_{max}=9; \quad \text{bo'ladi.}$$

2-Masala. Quyidagi kanonik masalani sun'iy bazis usuli yordamida yeching.

$$\begin{aligned} & \underline{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max} \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ & -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ & \underline{x_i \geq 0, i=1,4.} \end{aligned}$$

Bu masalda $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ bo'lgani sababli, asosiy cheklashlardagi ikkinchi tenglamani -1 ga ko'paytirib, $b \geq 0$ holatga olib kelamiz:

$$\begin{aligned} & \underline{2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max} \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ & x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 1, \\ & \underline{x_i \geq 0, i=1,4.} \end{aligned}$$

Bu masalaga mos sun'iy masala quyidagicha bo'ladi.

$$\begin{aligned} & \underline{-x_5 - x_6 \rightarrow \max} \\ & x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ & x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 + x_6 = 1, \\ & \underline{x_i \geq 0, i=1,6.} \end{aligned}$$

Bu masalaning yechimini simpleks usul yordamida izlasa bo'ladi, chunki masala kanonik ko'rinishda bo'lib, $x_0=(0,0,0,0,4,1)$ buzilmagan bazis rejadir. Yechimni izlash jarayoni quyidagi jadvalda keltirilgan.

			2	1	3	1		
	S_B		0	0	0	0	-1	-1
A_B		x_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_5	-1	4	1	2	5	-1	1	0
a_6	-1	1	1	-1	-1	2	0	1
Z		-5	-2	-1	-4	-1	-1	-1
Z-C			-2	-1	-4	-1	0	0
a_3	0	4/5	1/5	2/5	1	-1/5	1/5	0
a_6	-1	9/5	6/5	-3/5	0	9/5	1/5	1
Z		-9/5	-6/5	3/5	0	-9/5	-1/5	-1
Z-C			-6/5	-3/5	0	-9/5	4/5	0
a_3	3	1	1/3	1/3	1	0		
a_4	1	1	2/3	-1/3	0	1		
Z		4	5/3	2/3	3	1		
Z-C			-1/3	-1/3	0	0		
a_2	1	3	1	1	3	0		
a_4	1	2	1	0	1	1		
Z		5	2	1	4	1		
Z-C			0	0	1	0		

$$x_{omm} = (0,3,0,2), c'x_{omm} = 5.$$

Izoh. Masalani yechish jarayonida 1-fazaga tegishli so'nggi jadvalda bazisga mos $S_B=0$ bo'lgani sababli, optimallik kriteriyi bajariladi. Shu sababli, S_B ning qiymatlarini katak burchagiga joylashtirib, sun'iy shart vektorlariga mos ustunlarni e'tiborsiz qoldirish mumkin. Shuningdek, dastlabki jadvalning 1-satri ustiga mos raviShda dastlabki masalaga tegiShli narx vektori koordinatalarini yozib qo'yish ham qulaylik tug'diradi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Simpleks usul bo'yicha masalaning chekli optimal yechimga ega bo'lmaslik sharti nima ?
2. Simpleks usul bo'yicha ChP masalasi bazis rejasining optimal bo'lish sharti nimadan iborat?
3. Sun'iy bazis vektor usuli qachon qo'llaniladi?
4. Qo'shimcha o'zgaruvchilar bilan sun'iy o'zgaruvchilarning farqi nimadan iborat?
5. Sun'iy bazis vektor usuli bilan yechilganda ChP masalasi qaysi hollarda yechimga ega bo'lmaydi?

Mustaqil yechish uchun masalalar.

1. Quyidagi chiziqli programmalash masalalarini sun'iy bazis vektor usuli bilan yeching.

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3), \\ Y = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \min. \end{cases} \quad b) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3), \\ Y = 4x_1 + 6x_2 + 30x_3 \rightarrow \min. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 3, \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4), \\ Y = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 \rightarrow \min. \end{cases} \quad d) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3,4), \\ Y = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 \rightarrow \max. \end{cases}$$

2. Quyidagi masalarni sun'iy bazis usuli yordamida yeching:

a)

$$\begin{aligned} & \underline{x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max} \\ & x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq 1, \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 2, \\ & \underline{x_i \geq 0, i = \overline{1,4};} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & \underline{x_1 + x_2 \rightarrow \max} \\ & x_1 - x_2 \leq 1, \\ & x_2 - x_3 \leq 1, \\ & \underline{x_1 + x_3 \leq 2,} \\ & \underline{x_i \geq 0, i = \overline{1,3};} \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} & \underline{x_1 + 4x_2 + x_3 \rightarrow \max} \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ & 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ & \underline{x_i \geq 0, i = \overline{1,3};} \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} & \underline{x_1 - 10x_2 + x_3 \rightarrow \max} \\ & 2x_1 - 11x_2 - 14x_3 = -26, \\ & 2x_1 + 29x_2 + 14x_3 = 30, \\ & \underline{x_i \geq 0, i = \overline{1,3};} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} & \underline{x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max} \\ & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 4, \\ & \underline{x_i \geq 0, i = \overline{1,4};} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} & \underline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max} \\ & 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ & 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 5, \\ & \underline{3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 4,} \\ & \underline{x_i \geq 0, i = \overline{1,4};} \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned} & \underline{3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \rightarrow \max} \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 9, \\ & 2x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 8, \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 7, \\ & \underline{x_i \geq 0, i = \overline{1,3};} \end{aligned}$$

z)

$$\begin{aligned} & \underline{12x_1 + 27x_2 + 6x_3 \rightarrow \min} \\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 14, \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6, \\ & \underline{6x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 22,} \\ & \underline{x_i \geq 0, i = \overline{1,3}.} \end{aligned}$$

9-Amaliy mashg'ulot.

Mavzu: Ikkilanma simpleks metod

1. Dastlabki masalaning simpleks jadvalidan ikkilanma masala yechimini topish

$$\text{Dastlabki masala} \quad c'x \rightarrow \max \quad (1)$$

$$Ax = b, \quad (2)$$

$$x \geq 0 \quad (3)$$

ko'rinishda bo'lib, unga ikkilanma masala

$$b'y \rightarrow \min \quad (4)$$

$$A'y \geq c \quad (5)$$

bo'lsin. Shuningdek, x^0 -reja (1)- (3) masalaning yechimi bo'lib, aniqlik uchun uning dastlabki m komponentlari musbat bo'lsin. U holda

$$x_B^0 = A_B^{-1}b \quad (6)$$

bo'lib,

$$y^{01} = c_B^1 A_B^{-1} \quad (7)$$

vektor (4)-(6) masalaning yechimi bo'ladi. Haqiqatan, bir tomonidan

$$y^{01}A = y_s^{01}\{A_B; A_H\} = \{C_B^1; C_B^1 A_B^{-1} A_H\} \quad (8)$$

Ikkinchi tomondan, simpleks jadvaldagi Z-satr, S_B vektorining $a_1, \dots, a_m$ bazisdagi $(E, A_B^{-1} A_H)$ yoyilmasidan iborat, ya'ni

$$Z^1 = (C_B^1, C_B^1 A_B^{-1} A_H) \quad (9)$$

x^0 reja (1)-(3) masalaning yechimi bo'lgani uchun, optimallik kriteriyiga asosan $Z \geq C$ shart bajariladi, demak, (8)-(9) larga ko'ra

$$y^{01}A \geq c'$$

bo'ladi. Bu esa y^0 vektorning joiz reja ekanligini bildiradi hamda (6), (7) ga ko'ra

$$b'y = b'(A_B^{-1})' C_B = X_B^{0'} C_B = C'X^0.$$

Bu esa y^0 reja ikkilanma masalaning optimal rejasi ekanligini anglatadi. Simpleks jadval terminida (7) munosabat, y^0 vektorning koordinatalari Z-satrd, birlik vektorga mos ustunlar ostida joylashganini anglatadi.

1-Masala. Quyidagi masalani yechish talab etilayotgan bo'lsin:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\rightarrow \min \\ x_1 + x_2 &\geq 1, \\ 0,5x_1 + 2x_2 &\geq 1, \\ x_1 + 3x_2 &\geq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Masalaning normal ko'rinishi quyidagicha

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &\rightarrow \max \\ -x_1 - x_2 &\leq -1, \\ -0,5x_1 - 2x_2 &\leq -1, \\ -x_1 - 3x_2 &\leq -2, \\ x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Bu masalaga mos ikkilanma masalaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 2y_3 &\rightarrow \max \\ y_1 + 0,5y_2 + y_3 &\leq 1, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\leq 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Yordamchi $y_4 \geq 0, y_5 \geq 0$ o'zgaruvchilar kiritish hisobiga masalani kanonik ko'rinishga keltiramiz:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + 2y_3 &\rightarrow \max \\ y_1 + 0,5y_2 + y_3 + y_4 &= 1, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_5 &= 2, \\ y_i \geq 0, i &= 1, 5. \end{aligned}$$

Bu masala uchun (0,0,0,1,2) bazis reja bo'lib, unga a_4, a_5 birlik vektorlar mos keladi. Bazis rejani optimallika tekshiramiz.

1-jadval.

	S		1	1	2	0	0	
S_B								
A		X	A_1	a_2	a_3	A_4	a_6	θ
A_B								
a_4	0	1	1	0,6	1	1	0	1
a_6	0	2	1	2	3	0	1	2/3
Z		0	0	0	0	0	0	
Z-C			-1	-1	-2	0	0	
a_4	0	1/3	2/3	-1/6	0	1	-1/3	1/2
a_3	2	2/3	1/3	2/3	1	0	1/3	
Z		4/3	2/3	4/3	2	0	2/3	
Z-C			-1/3	1/3	0	0	2/3	
a_1	1	1/2	1	-1/4	0	3/2	-1/2	
a_3	2	1/2	0	3/4	1	-1/2	1/2	
Z		3/2	1	6/4	2	1/2	1/2	
Z-C			0	1/4	0	1/2	1/2	

Jadvaldan ma'lum bo'ldiki, $y_{onm} = (1/2; 0, 1/2)$, $b'y_{onm}^0 = 3/2$.

Simpleks jadvaldan foydalanib, ikkilanma masalaning yechimini topish qoidasiga ko'ra, Z-satrd, birlik shart vektorlari ostida, ya'ni a_4, a_5 vektorlar ostida $x_1^0 = 1/2, x_2^0 = 1/2$.

Shunday qilib, dastlabki masalada $x_{onm} = (1/2, 1/2), c'x_{onm} = 3/2$, ya'ni $c'x_{\max} = b'y_{\min}$.

2-Masala. Berilgan masala va unga ikkilangan masalaning yechimini toping:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10, \\ x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6) \\ Z = x_2 - 3x_3 + 2x_5 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Yechish. Masalaga qo'shma masalani tuzamiz:

$$\begin{aligned} 3y_1 - 2y_2 - 4y_3 &\leq 1, \\ -y_1 + 4y_2 + 3y_3 &\leq -3, \\ 2y_1 + 8y_3 &\leq 2, \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 &\leq 0, \\ F = 7y_1 + 12y_2 + 10y_3 &\rightarrow \max. \end{aligned}$$

Berilgan masalani simpleks jadvalga joylashtirib, uni simpleks usul bilan yechamiz:

Bazis vekt.	C_{baz}	P_0	0	1	-3	0	2	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	0	7	1	3	-1	0	2	0
P_4	0	12	0	-2	4	1	0	0
P_6	0	10	0	-4	3	0	8	1
Δ_j		0	0	-1	3*	0	-2	0
P_1	0	10	1	5/2	0	1/4	2	0
P_3	-3	3	0	-1/2	1	1/4	0	0
P_6	0	1	0	-5/2	0	-3/4	8	1
Δ_j		-9	0	1/2*	0	-3/4	-2	0
P_2	1	4	2/5	1	0	1/10	4/5	0
P_3	-3	5	1/5	0	1	3/10	2/5	0
P_6	0	11	1	0	0	-1/2	10	1
Δ_j		-11	-1/5	0	0	-4/5	-12/5	0

III bosqichda optimal yechimga ega bo'lamiz:

$$X^0 = (0; 4; 5; 0; 0; 11); \quad C^0 = (1; -3; 0);$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix};$$

$$Y^0 = C^0 B^{-1} = (1 \quad -3 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 10 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{5} \quad -\frac{4}{5} \quad 0 \right).$$

Jadvaldan ko'rinadiki, qo'shma masalaning yechimini hisoblab o'tirmaslik ham mumkin. Oxirgi simpleks jadvalda B^{-1} matrisa kiruvchi (P_1, P_4, P_6) vektorlarga mos keluvchi $m+1$ qator elementlari Y^0 vektorning (qo'shma masala yechimining) elementlarini beradi.

$m+1$ qatorning P_0 vektorga mos kelgan element esa optimal yechimga mos keluvchi Z_{min} va F_{max} funksiyalarning

$$Z(X^0) = Z_{min} = F(Y^0) = F_{max} = -11.$$

qiymatini beradi. Shunday qilib, aytish mumkinki, optimal yechimda qo'shma masalalar maqsad funksiyalarining optimal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi.

3-masala.

$$\begin{aligned} & x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1, \\ & x_1 - x_2 \geq 2, \\ & 3x_1 + x_3 \geq 0, \\ & x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ & x_i \geq 0, i = \overline{1,3}. \end{aligned}$$

Masala dieta haqidagi masala bo'lgani sababli dastlabki jadval quyidagicha bo'ladi. 2- jadval.

	C_B		1	3	1
A_B		X	a_1	a_2	a_3
$-e_1$	0	-1	-2	-1	1
$-e_2$	0	-2	-1	1	0
$-e_3$	0	0	-3	0	-1
$-e_4$	0	-1	0	-1	-2
Z-C			1	3	1
$-e_1$	0	3	0	-3	1
a_1	1	2	1	-1	0
$-e_3$	0	6	0	-3	-1
$-e_4$	0	-1	0	-1	-2
Z-C			1	4	1
$-e_1$	0	6/2	0	6/2	0
a_1	1	2	1	-1	0
$-e_3$	0	13/2	0	7/2	0
a_3	1	1/2	0	1/2	1
Z-C			1	7/2	1/2

Optimal reja: $x = \{2, 0, 1/2\}$, $c'x_{max} = \frac{5}{2}$.

Mustaqil yechish uchun masalalar.

1. Quyidagi masalalarga mos bo'lgan ikkilanma masalalarni tuzing:

a)

$$\underline{2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$\underline{x_1 + 4x_2 \leq 4},$$

$$x_i \geq 0, x_2 \geq 0;$$

v)

$$\underline{3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 \rightarrow \min}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \geq 5,$$

$$\underline{3x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 \geq 4},$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$$

d)

$$\underline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max}$$

$$x_1 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 = 6,$$

$$\underline{x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 2},$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$$

b)

$$\underline{x_1 - 10x_2 \rightarrow \min}$$

$$2x_1 - x_2 \geq 0,$$

$$\underline{x_1 - 5x_2 \geq -5},$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

g)

$$\underline{2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \rightarrow \max}$$

$$4x_1 - 3x_2 - x_3 = 4,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4,$$

$$\underline{3x_1 + 4x_3 = 7},$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3};$$

e)

$$\underline{3x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 \rightarrow \max}$$

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 7,$$

$$\underline{x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 = -12},$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,4};$$

2. Quyidagi masalarni ikkilanma simpleks metod yordamida yeching:

a)

$$\underline{4x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \max}$$

$$x_1 + 2x_3 = 4,$$

$$x_1 - x_2 = 3,$$

$$-5x_1 - 3x_2 + x_3 = -10,$$

$$\underline{x_1 + 6x_2 - x_3 = 5},$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3};$$

v)

$$\underline{4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 8,$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10,$$

$$\underline{3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 12},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$$

b)

$$\underline{3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \rightarrow \max}$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 4,$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 7,$$

$$\underline{x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3};$$

g)

$$\underline{-2x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \max}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6,$$

$$-2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4,$$

$$\underline{-2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 7},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,3}.$$

10-Amaliy mashg'ulot. Transport masalasini yechish

Masalaning qo'yilishi va uning matematik modeli

m ta A_i ($i = \overline{1,2,\dots,m}$) ta'minotchilarda yig'ilib qolgan bir jinsli a_i miqdordagi mahsulotni n ta B_j iste'molchilarga mos ravishda b_j ($j = \overline{1,2,\dots,n}$) miqdorda etkazib berish talab qilinadi. Har bir i -ta'minotchidan har bir j -iste'molchiga bir birlik yuk tashishga sarf qilinadigan yo'l harajati ma'lum va u c_{ij} — so'mni tashkil qiladi.

Yuk tashishning shunday rejasini tuzish kerakki, ta'minotchilardagi barcha yuklar olib chiqib ketilsin, iste'molchilarning barcha talablari qondirilsin va shu bilan birga yo'l harajatlarining umumiy qiymati eng kichik bo'lsin.

Masalaning matematik modelini tuzish uchun i -ta'minotchidan j -iste'molchiga etkazib berish uchun rejalashtirilgan yuk miqdorini x_{ij} orqali belgilaymiz, u holda masalaning shartlarini quyidagi jadval ko'rinishda yozish mumkin:

<i>Ta'minotchilar</i>	<i>Iste'molchilar</i>				<i>Zahiralar miqdori</i>
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
<i>Talablar miqdori</i>	b_1	b_2	...	b_n	$\Sigma a_i = \Sigma b_j$

Jadvaldan ko'rinadiki, i -ta'minotchidan j -iste'molchiga rejadagi x_{ij} – birlik yuk yetkazib berish uchun sarf qilinadigan yo'l harajati c_{ij} x_{ij} – so'mni tashkil qiladi. Harajatlarning umumiy qiymati esa,

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

ga teng bo'ladi.

Masalaning birinchi shartiga ko'ra, barcha yuklar olib chiqib ketilishi kerak, demak

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

tengliklar bajarilishi kerak.

Ikkinchi shartga ko'ra, ya'ni barcha talablar to'la qondirilishi uchun

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$

tengliklar o'rinli bo'lishi kerak.

Shunday qilib, masalaning matematik modeli quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

chiziqli tenglamalar sistemasining

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi shunday yechimini topish kerakki, bu yechim

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (4)$$

chiziqli funksiyaga eng kichik qiymat bersin.

Bu modelda mahsulotga bo'lgan talab taklifga teng, ya'ni

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (5)$$

tenglik o'rinli deb faraz qilinadi. Bunday masalalar «yopiq modeli transport masalasi» deyiladi.

Boshlang'ich joiz rejani topish usullari.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmalash masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch rejani qurishdan boshlanadi.

Masalaning (1) va (2) cheklamalari birgalikda mn ta noma'lumli $m+n$ ta tenglamalarda iborat. Agar (1) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo'shsak, va alohida (2) sistemaning tenglamalarini hadma-had qo'shsak, ikkita bir xil tenglama hosil bo'ladi. Bu esa (1) va (2) dan iborat sistemada bitta chiziqli bog'liq tenglama borligini ko'rsatadi. Bu tenglama umumiy sistemadan chiqarib tashlansa, masala $m+n-1$ ta chiziqli bog'liq bo'lmagan tenglamalar sistemasidan iborat bo'lib qoladi. Demak, masalaning aynimagan joiz rejasi $m+n-1$ ta musbat komponentalarni o'z ichiga oladi.

Shunday qilib, transport masalasining joiz rejasi biror usul bilan topilgan bo'lsa, (x_{ij}) – matrisaning $m+n-1$ ta komponentalari musbat bo'lib, qolganlari nolga teng bo'ladi. Agar transport masalasining shartlari va uning joiz rejasi yuqoridagi jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, noldan farqli x_{ij} – lar joylashgan kataklar «band kataklar», qolganlari «bo'sh kataklar» deyiladi.

Agar band kataklarni vertikal yoki gorizontal kesmalar bilan tutashtirilganda yopiq ko'pburchak hosil bo'lsa, bunday xol sikllanish deyiladi va yechim tayanch yechim bo'lmaydi. Demak, birorta yechim bazis yechim bo'lishi uchun band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lib, sikllanish ro'y bermasligi kerak.

Shimoliy-g'arb burchak usuli. Transport masalasi jadval ko'rinishida berilgan bo'lsin. Yo'l harajatlarini hisobga olmay B_1 iste'molchining talabini A_1 ta'minotchi hisobiga qondirishga kirishamiz. Buning uchun a_1 va b_1 yuk birliklaridan kichigini (A_1, B_1) katakning chap pastki burchagiga yozamiz. Agar $a_1 < b_1$ bo'lsa, B_1 ning ehtiyojini to'la qondirish uchun (A_2, B_1) katakka yetishmaydigan yuk birligini A_2 dan olib yozamiz va h.k. Bu jarayonni (A_m, B_n) katakka yetguncha davom ettiramiz. Agar (5) shart o'rinli bo'lsa, bu usulda tuzilgan yechim albatta tayanch yechim bo'ladi.

Deylik, yopiq modelli transport masalasi qarayotgan bo'lib, u quyidagi jadval ko'rinishida ifodalangan bo'lsin: 1-jadval.

Iste'molchi Ta'minotchi	V_1	V_2	...	V_n	Zahira miqdori
A_1	S_{11}	S_{12}		S_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}		C_{2n}	a_2
· · ·	...	...	...	...	...
A_m	C_{m1}	C_{m2}		C_{mn}	a_m
Mahsulotga bo'lgan talab miqdori	b_1	b_2	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$

Bu yerda tashilishi lozim bo'lgan yuk bir jinsli bo'lib, birlik miqdordagi yukning tashish tariflari $c_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, mos ravishda kataklarning yuqori o'ng burchagida yozib qo'yilgan.

Shimoliy-g'arbiy burchak usuli. Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat.

Mazkur usulda yuklarni iste'molchilarga taqsimlashni jadvalning shimoliy-g'arbiy burchagidan boshlash tavsiya etiladi. Jadvaldagi (1,1) nomerli katakka mos keluvchi yuk miqdorilari mos ravishda a_1 va b_1 dan iborat bo'lgani sababli bu katakka shu sonlarning kichigini joylashtiramiz. Agar bu sonni x_{11} deb belgilasak, $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ bo'ladi.

Agar $b_1 > a_1$ bo'lsa, $x_{11} = a_1$ bo'lib, $x_{1j} = 0$ ($j = 2, \dots, n$), $b'_1 = b_1 - a_1$.

A_1 ta'minotchi boshqa yuk tarqatmaydi, ya'ni birinchi satrdagi qolgan barcha kataklarga nollar yozib qo'yiladi.

Agar $a_1 > b_1$ bo'lsa, $x_{11} = b_1$ bo'lib, $x_{i1} = 0$ ($i=2, \dots, m$), $a'_1 = a_1 - b_1$ bo'lib, V_1 iste'molchi boshqa mahsulot talab etmaydi, ya'ni birinchi ustundagi qolgan barcha kataklarga yuk taqsimlanmaydi. Shu sababli u kataklarga nollar yozib qo'yiladi.

Faraz qilaylik, birinchi hol bajarilsin. Bu holda ikkinchi qatordagi birinchi elementning qiymatini topamiz. $x_{21} = \min\{a_2, b_1\}$

Agar $a_1 > b_1$ bo'lsa, $x_{21} = b'_1$ bo'lib, $x_{i1} = 0$ ($i=3, \dots, m$), $a'_2 = a_2 - b_1$.

Agar $a_2 < b_1$ bo'lsa, $x_{21} = a_2$ bo'lib, $x_{2j} = 0$ ($j=3, \dots, n$), $b'_1 = b_1 - a_2$.

Xuddi shunay uo'l davom etib, har bir qadamda bitta x_{ij} ning qiymati topib boriladi. By jarayon barcha a_i va b_j lar 0 ga aylanguncha takrorlanadi. Bu tadbirni so'nggi katakni to'ldirguncha davom ettirib, natijada, ushbu

$$\{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mn}\}$$

rejaga ega bo'lamiz. Bu rejaning ko'plab elementlari nollardan iborat bo'ladi.

1-masala. Uchta ko'mir omboridan to'rtta isitish tarmog'iga ko'mirni talabga mos ravishda «shimoli-g'arbiy» usuldan foydalanib tarqating. Zaxira, talab va tariflar miqdorlari jadvalda keltirilgan. 2-jadval.

B_j	76	80	60	86
a_i				
100	6	7	3	6
160	1	2	6	6
60	3	10	20	4

Masalani to'liq jadval shaklida ifodalab, «shimoli-g'arbiy» usulni qo'llasak, natijada quyidagi jadvalga ega bo'lamiz. 3-jadval.

V_j A_i	B_1	B_2	B_3	B_4	Zaxira miqdori
A_1	⁶ 76	⁷ 26	³ 0	⁶ 0	100
A_2	¹ 0	² 66	⁶ 60	⁶ 36	160
A_3	³ 0	¹⁰ 0	²⁰ 0	⁴ 60	60
Talab miqdori	76	80	60	86	300

Jadvaldan ma'lum bo'ldiki, reja $\{75, 25, 0, 0, 0, 55, 60, 35, 0, 0, 0, 50\}$ bo'lib, transport xarajati $6 \cdot 76 + 7 \cdot 26 + 2 \cdot 66 + 60 \cdot 6 + 6 \cdot 36 + 4 \cdot 60 = 1446$ birlik pulni tashkil etadi.

Ma'lumki, ixtiyoriy chiziqli programmashtirish masalasining optimal yechimini topish jarayoni boshlang'ich tayanch yechimni qurishdan boshlanadi. Transport masalasini boshlang'ich tayanch yechimini ilgari foydalangan usullar yordamida topish mumkin, biroq bu ayrim qiyinchiliklarni yuzaga keltiradi. Transport masalasini boshlang'ich tayanch yechimini qurishining bir nechta oddiy sxemalari mavjud.

Rejalashtirish jadvalida yo'l harajatini hisobga olmay B_1 iste'molchining talabini dastlab A_1 ta'minotchi hisobidan qondiramiz. Buning uchun $\min(a_1, b_1)$ ni (A_1, B_1) katakchanning

chap pastki burchagiga yozamiz, ya'ni $x_{11} = \min(a_1, b_1)$. Agar $a_1 < b_1$ bo'lsa, B_1 ning ixtiyojini to'la qondirish uchun (A_2, B_1) katakchaga yetishmaydigan yuk birligini A_2 dan olib yozamiz va h.k. Bu jarayonni (A_m, B_n) katakchaga yetguncha davom ettiramiz. Natijada band katakchalar soni $m+n-1$ dan oshmaydi va tuzilgan yechim tayanch yechim bo'ladi. Agar band katakchalar soni $m+n-1$ ga teng bo'lsa, buzilmagan tayanch yechim hosil bo'ladi.

2-Masala. Ushbu transport masalasining boshlang'ich yechimini toping.

Ta'minotchilar	Iste'molchilar				Zahira hajmi
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	5	7	11	100
A_2	1	4	6	2	130
A_3	5	8	12	7	170
Talab hajmi	150	120	80	50	

Yechish. Boshlang'ich tayanch yechimini shimoliy-g'arbiy burchak usuli bilan topamiz. Buning uchun rejalar matrisasini quyidagi ko'rinishda yozamiz.

Bu a_i bilan	$b_j \backslash a_i$	150	120	80	50
	100	3	5	7	11
	130	1	4	6	2
	170	5	8	12	7

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

jadvalda

ta'minotchilardagi mahsulot zahirasi, b_j bilan esa iste'molchilarning mahsulotga bo'lgan talabini belgiladik. Topilgan tayanch reja quyidagidan iborat:

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Band katakchalar soni rosa $m+n-1=3+4-1=6$ ga teng. Tuzilgan boshlang'ich yechim buzilmagan tayanch yechim (reja) bo'ladi. Tuzilgan rejaga mos keluvchi harajatni hisoblaymiz.

$$F(X) = 100 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 80 \cdot 4 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2300.$$

Transport masalasi – chiziqli programmalashning alohida xususiyatli masalasi bo'lib, bir jinsli yuk tashishning eng tejamli rejasini tuzish masalasidir. Bu masala xususiyligiga qaramay qo'llanish sohasi juda kengdir.

3-Masala. Quyidagi transport masalasining boshlang'ich tayanch yechimini toping.

$b_j \backslash a_i$	3	6	2	1
4	2	5	9	5
2	8	3	5	8

3	7	3	1	4
3	5	9	7	2

Yechish.

1-qadam. $X_{11}=\min(4,3)=3$. Shuning uchun, $b'_1=0$, $a'_1=4-3=1$ ga o'zgaradi, hamda $x_{21}=x_{31}=x_{41}=0$.

2-qadam. $X_{12}=\min(1,6)=1$. Bunda $a'_1=0$ va $b'_2=6-1=5$ ga o'zgaradi, hamda $x_{13}=x_{14}=0$.

3-qadam. $X_{22}=\min(2,5)=2$. Bunda $a'_2=0$ va $b'_2=5-2=3$ ga o'zgaradi, hamda $x_{23}=x_{24}=0$.

4-qadam. $X_{32}=\min(3,3)=3$. Bunda $a_3=b_2=0$ bo'ladi, hamda $x_{33}=x_{34}=x_{42}=0$.

5-qadam. $X_{43}=\min(3,2)=2$. Bunda $a'_4=3-2=1$, $b_3=0$.

6-qadam. $X_{44}=\min(1,1)=1$. Bunda, $a_{44}=b_4=0$ bo'ladi.

$a_i \backslash b_j$	3	6	2	1
4	3	1		
2		2		
3		3		
3			2	

1.2.Minimal xarajatlar usuli

Yuqorida bayon etilgan usulda, rejani topish jarayonida transport xarajatlari inobatga olinmadi. Bu esa ta'minotchi va iste'molchini qanoatlantiruvchi rejadan ancha uzoq bo'lishi mumkin. Shu sababli, dastlabki rejani tuzishda c_{ij} tariflarni hisobga olish yaxshi samara beradi.

Minimal xarajatlar usulining mohiyati shundaki, har gal iste'molchining talabi qondirilayotgan paytda eng kam xarajatli katak to'ldirib boriladi. Ya'ni agar c_{ke} eng kam xarajatni ifodalasa, (k,e) katakka $\min(a_k, b_e)$ ni yozamiz. Natijada, a_k va b_e ning qiymatlariga qarab, yo k -satr, yoki e -ustunning qolgan kataklari nollar bilan to'ldiriladi. Agar eng kichik tarifni ifodalovchi son bir nechta bo'lsa, ularning ixtiyoriy birini tanlash mumkin. So'ngra navbatdagi kichik tarif qaraladi va bu jarayon oxirgi katak to'ldirilguncha davom ettiriladi. Transport xarajatini taqqoslash maqsadida, yuqorida qaralgan 1-masalaning dastlabki rejasini minimal xarajatlar usuli bilan topsak, quyidagi jadvalga ega bo'lamiz. 4-jadval

$A_i \backslash V_j$	B_1	B_2	B_3	B_4	Zaxira miqdori
A_1	0	6	60	36	100
A^2	76	76	0	0	160
A^3	0	0	0	60	60
Talab miqdori	76	80	60	86	300

Jadvalga asosan, dastlabki reja $(0,6,60,36,76,76,0,0,0,0,60)$ bo'lib, mos transport xarajatlari $6*7+60*3+36*6+76*1+76*2+60*4=816$ birlik pulni tashkil etadi. Bu xarajat, shimoli-g'arbiy usuldagi xarajattan ancha kam ekanligini payqash qiyin emas.

Bu usulda boshlang'ich yechim qurish uchun avval yo'l harajati eng kichik bo'lgan katakchaga a_i va b_i lardan kichigi yoziladi va

navbatdagi eng kichik harajatli katakchaga o'tiladi va h.k. Bu usulda tuzilgan boshlang'ich yechimni sikllanishga tekshirish shart.

2-Masala. Yuqorida berilgan transport masalasining boshlang'ich yechimini "minimal harajatlarni" usuli yordamida tuzing.

Yechish.

$b_j \backslash a_i$		120	80	
	150			50
100	20	80		
130	130			
170		40	80	50

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 80 & 0 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

Bunda ham band katakchalar soni 6 ga teng bo'ldi, ya'ni tuzilgan boshlang'ich yechim buzilmagan tayanch yechim bo'lib chiqdi. Yechim tuzilayotganda yo'l harajati inobatga olindi. Shu sababdan tuzilgan rejaning harajati oldingi yechim harajatidan kichik va optimal yechimga yaqinroq bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$F(X) = 20 \cdot 3 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 1 + 40 \cdot 8 + 80 \cdot 12 + 50 \cdot 7 = 2200.$$

Boshlang'ich yechim qurishning yana boshqa usullari ham mavjud.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan usullar yordamida boshlang'ich tayanch yechim qurish mumkin. Tuzilgan boshlang'ich tayanch yechimni potentsiallar usuli yordamida optimal yechimgacha yetkazish mumkin.

1.3. Potentsiallar usuli

Biror usul bilan topilgan boshlang'ich reja umuman olganda optimal reja bo'lavermaydi, biroq usulning samarasiga qarab, optimal rejaga yaqinroq bo'lishi mumkin. g'ar qanday yopiq modelli transport masalasi optimal rejaga ega ekanligini inobatga olib, optimal rejani topish usullaridan biri bo'lgan potentsiallar usulini bayon qilamiz. Bu usulda, dastlabki reja topilgandan so'ng, har bir ta'minotchi va iste'molchiga, potensial deb ataluvchi $u_i, i = \overline{1, m}$ va $v_j, j = \overline{1, n}$ sonlarni mos qo'yamiz. Bu sonlarni aniqlash uchun, jadvaldagi barcha band (yuk taqsimlangan) kataklar uchun potentsiallarni aniqlovchi tenglamalar tuzamiz. Deylik, (i, j) - katak band bo'lsin. U holda u_i va v_j larni shunday tanlaymizki, ularning yig'indisi mos tarifga teng bo'lsin:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Barcha u_i va v_j miqdorlar soni $n+m$ ta, band kataklar soni esa $n+m-1$ ta bo'lgani sababli, $n+m$ ta noma'lumni topish uchun $n+m-1$ ta tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamalardan noma'lumlarni bir qiymatli topib bo'lmasligi tufayli, noma'lumlardan birini ixtiyoriy tanlaymiz (masalan, $u_1 = 0$ deb tanlaymiz), qolgan o'zgaruvchilar bir qiymatli aniqlanadi.

Optimallik shartini tekshirish maqsadida barcha bo'sh (yuk taqsimlanmagan) kattaklar uchun qalbaki tarif kiritamiz:

$$c'_{ke} = u_k + v_e.$$

So'ngra har bir bo'sh katak uchun shu katakka mos tarif va qalbaki tariflar farqini hisoblaymiz:

$$s_{ke} = c_{ke} - c'_{ke}.$$

Qaralayotgan masala uchun o'rinli bo'lgan ushbu teoremani keltiraylik:

Teorema. Transport masalasida qaralayotgan reja optimal bo'lishi uchun, barcha band kataklar uchun

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

bo'lishi va barcha bo'sh kataklar uchun

$$s_{ke} = c_{ke} - c'_{ke} \geq 0$$

bo'lishi zarur va etarlidir.

Bu teorema isboti ikkilanmalik nazariyasi natijalaridan kelib chiqadi.

Optimal rejani topish algoritmini davom ettiraylik. Agar optimallik sharti bajarilsa, qaralayotgan reja optimal bo'ladi. Deylik, optimallik sharti bajarilmasin, ya'ni s_{ke} sonlar ichida manfiylari bor bo'lsin. Bunday sonlarning borligi planni yanada «yaxshilash» imkoniyatini beradi. Shu maqsadda, manfiy s_{ke} lar ichidan eng kichigini tanlaymiz (agar yagona bo'lsa o'zini, eng kichigi bir nechta bo'lsa, ulardan ixtiyoriy bittasini tanlaymiz). Tanlangan katakni qutb deb ataymiz va unga $\oplus$ ishorasini qo'yib, uni band kataklar safiga qo'shamiz. Natijada, jadvaldagi band kataklar soni $n+m$ taga yetadi va bir uchi qutbda qolgan uchlari band kataklardan iborat yagona sikl qurish mumkin bo'ladi. So'ngra, sikl bo'ylab, qutbdan boshlab, qutbning barcha uchlari soat strelkasi yo'nalishi bo'ylab navbat bilan $\oplus$ va $-$ ishorasini qo'yib chiqamiz. Barcha $-$ ishoraga mos keluvchi yuklarni taqqoslab, eng kichik yukni o'lchov miqdori sifatida qabul qilib, $-$ ishorali kataklardagi yuk miqdoridan o'lchov miqdorini ayirib, ustun bo'yicha, $\oplus$ ishorali kataklardagi yukka qo'shamiz. Natijada yangi reja hosil bo'ladi. Yangi reja uchun yana potentsiallarni aniqlab, optimallik sharti bajarilmasa, yuqoridagi tadbirlarni optimal rejani topguncha davom ettiramiz va chekli qadamdan so'ng optimal reja topiladi.

Potentsiallar sistemasini qurish.

Potentsiallar sistemasini barcha band katakchalar uchun $U_i + V_j = C_{ij}$ ko'rinishda tuzamiz.

Potentsiallar sistemasini faqat buzilmagan tayanch yechim uchun qurish mumkin. Bunday yechim uchun $m+n-1$ band katakcha mos keladi. Noma'lum potentsiallar soni esa $m+n$ ga teng. Ya'ni potentsiallarni topish uchun $m+n$ noma'lumli $m+n-1$ bog'liqmas tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistema aniqmas sistema bo'ladi. Shuning uchun biror noma'lumga (odatda, U_1 ga) nol qiymat beriladi ($U_1=0$). Bundan boshqa potentsiallar bir qiymatli holda aniqlanadi. So'ngra har bir bo'sh katakcha uchun mos potentsiallar $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij} \leq 0$ shartni qanoatlantirishini tekshiramiz. Agar bu shartlar barcha bo'sh katakchalarda bajarilsa, topilgan tayanch yechim optimal bo'ladi. Agarda bu shartlar ayrim bo'sh katakchalarda bajarilmasa, ya'ni, $\Delta_{ij} = (U_i + V_j) - C_{ij} > 0$ bo'lsa, u holda tayanch yechim uchun optimallik sharti bajarilmaydi. Undan boshqa tayanch yechimga o'tish kerak bo'ladi. Navbatdagi tayanch yechimga o'tish uchun Δ_{ij} larning eng kattasiga mos kelgan katakcha to'ldiriladi. Buning uchun unga θ son qo'shiladi va shu katakchadan boshlab vertikal va gorizontaal yo'nalishlar bo'ylab band katakchalardagi taqsimotlardan θ ni ayirib va qo'shib borib yopiq kontur chiziladi. Ko'pburchakning uchlari $+\theta$ ishorali katakchadan boshlab ketma-ket $-\theta$ va $+\theta$ belgilar qo'yib chiqiladi. So'ngra $-$ ishorali katakchalardagi taqsimotlari ichidan eng kichigini θ ning son qiymati deb qabul qilinadi va u $+$ ishorali katakchalarga qo'shiladi va $-$ manfiy ishorali katakchalardan ayiriladi. Natijada band kataklar soni $m+n-1$ ta bo'lgan yangi tayanch reja hosil bo'ladi. Bunda ayrim band katakchalardagi yuk birligi nol bo'lib qolishi mumkin.

3- Masala. Yuqorida keltirilgan transport masalasini potentsiallar usuli bilan yeching.

Yechish. Bu masalaning shimoliy-g'arb burchak usuli bilan topilgan tayanch yechimi uchun mos potentsiallar sistemasini ko'raylik.

$b_j \backslash a_i$	150	120	80	50	U_i
100	100- θ		$+\theta$	$\bigcirc$	0
	3	5	7	11	
		1	3	-6	

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 50 & 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 80 & 50 \end{pmatrix}$$

130	¹ 50+ θ	⁴ 80- θ	⁶ 2	² 1	-2
170	⁵ 0	⁸ 40+ θ	¹² 80- θ	⁷ 50	2
V_j	3	⁶	1 0	5	$\theta = 80$

$$F(X_0) = 2300$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 + V_1 = 3; \\ U_2 + V_1 = 1; \\ U_2 + V_2 = 4; \\ U_3 + V_2 = 8; \\ U_3 + V_3 = 12; \\ U_3 + V_4 = 7; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} U_1 = 0; \quad V_1 = 3; \\ U_2 = 1 - V_1 = 1 - 3 = -2; \\ V_2 = 4 - U_2 = 4 + 2 = 6; \\ U_3 = 8 - V_2 = 8 - 6 = 2; \\ V_3 = 12 - U_3 = 12 - 2 = 10; \\ V_4 = 7 - U_3 = 7 - 2 = 5. \end{array}$$

Endi bo'sh kataklar uchun optimallik shartini tekshiramiz:

$$\begin{array}{ll} \Delta_{12} = (U_1 + V_2) - C_{12} = 1; & \Delta_{23} = (U_2 + V_3) - C_{23} = 2; \\ \Delta_{13} = (U_1 + V_2) - C_{13} = 3; & \Delta_{24} = (U_2 + V_4) - C_{24} = 1; \\ \Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -6; & \Delta_{31} = (U_3 + V_1) - C_{31} = 0. \end{array}$$

Ko'rinib turibdiki, Δ_{ij} lar ichida musbatlari bor. Demak, bu reja optimal emas. Yangi tayanch rejaga o'tamiz, $\max \{3; 2; 1\} = 3 = \Delta_{13}$. Demak, jadvalda (A_1, B_3) katakchaga "+ θ " belgi kiritamiz va yopiq kontur yasaymiz. "- θ " belgini katakchalardagi taqsimotlari ichidagi eng kichigini tanlab uni θ ning son qiymati $\theta = \min \{100, 80\} = 80$ deb qabul qilamiz. $\theta = 80$ ni "+" ishorali katakchalarga qo'shib va "-" ishorali katakchalardan ayirib, yangi tayanch reja tuzamiz:

$b_j \backslash a_i$	150	120	80	50	U_i
100	³ 20	⁵	⁷ 80	¹¹ 	0
130	¹ 130	⁴ 0- θ	⁶ -1	² + θ	-2
170	⁵ 0	⁸ 120+ θ	¹² -3	⁷ 50- θ	2
V_j	3	⁶	7	5	$\theta = 0$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$$F(X_1) = 2060$$

X_1 -aynigan tayanch reja bo'lmasligi uchun (A_2, B_2) va (A_3, B_3) katakchalardan bittasini, ya'ni harajati katta bo'lgan (A_3, B_3) katakchani bo'sh katakchaga aylantirib, (A_2, B_2) katakchadagi

taqsimotni esa 0 ga teng deb qabul qilamiz va bu katakchani band katakcha deb qaraymiz, hamda potensial tenglamalar tuzib, potentsiallarning son qiymatini topamiz:

$$\begin{aligned} U_1+V_1 &= 3; & U_1 &= 0; & V_1 &= 3; \\ U_1+V_3 &= 7; & U_2 &= -2; & V_3 &= 7; \\ U_2+V_1 &= 1; & U_3 &= 2; & V_2 &= 6; \\ U_2+V_2 &= 4; \\ U_3+V_2 &= 8; \\ U_3+V_4 &= 7; \end{aligned}$$

Endi bo'sh katakchalar uchun optimallik shartini tekshiramiz:

$$\begin{aligned} \Delta_{12} &= (U_1+V_2) - C_{12} = 1; \\ \Delta_{14} &= (U_1+V_4) - C_{14} = -6; \\ \Delta_{23} &= (U_2+V_3) - C_{23} = -1; \\ \Delta_{31} &= (U_3+V_1) - C_{31} = 0; \\ \Delta_{33} &= (U_3+V_3) - C_{33} = -3; \\ \Delta_{24} &= (U_2+V_4) - C_{24} = 1; \end{aligned}$$

X_1 reja optimal emas, chunki $\Delta_{31} = \Delta_{12} = 1 > 0$. Demak, jadvaldagi (A_3, B_1) va (A_1, B_2) katakchalardan harajati kamiga " $+\theta$ " belgi qo'yib, yopiq ko'pburchak yasaymiz va θ ni topamiz.
 $\theta = \min\{50, 0\} = 0$, yangi tayanch reja tuzamiz.

$b_j \backslash a_i$	150	120	80	50	U_i
100	20		80		0
130	$130 - \theta$				-2
170	θ				3
V_j	3		7	4	$\theta = 50$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 130 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$$F(X_2) = 2060$$

Topilgan yangi X_2 reja optimal yechim bo'lmaydi, chunki

$$\Delta_{31} = (U_3+V_1) - C_{31} = 1 > 0.$$

Navbatdagi tayanch yechimga o'tish uchun (A_3, B_1) katakchaga « $+\theta$ » belgi qo'yib, yopiq kontur tuzamiz va $\theta = 50$ ni topamiz.

$b_j \backslash a_i$	150	120	80	50	U_i

100	³ 20- θ	⁵ + θ	⁷ 80	¹¹ ○ -7	0
		1			
130	¹ 80	⁴	⁶ ○ -1	² 50	-2
		0			
170	⁵ 50 + θ	⁸ 120- θ	¹² ○ -3	⁷ ○ 1	2
V_j	3	6	7	4	$\theta = 20$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 20 & 0 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 50 & 120 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(X_3) = 2010$$

Hosil bo'lgan tayanch reja optimal yechim bo'lmaydi, chunki $\Delta_{12}=1>0$. Yangi tayanch yechimga o'tish uchun (A_1, B_2) katakchaga «+ θ » belgi qo'yamiz va yopiq kontur tuzib, $\theta = 20$ ekanligini aniqlaymiz va yangi X_4 rejani topamiz.

b_j a_i	150	120	80	50	U_i
100	³ ○ -1	⁵ 20	⁷ 80	¹¹ ○ -8	0
130	¹ 80	⁴ ○ 0	⁶ ○ 0	² 50	-1
170	⁵ 70	⁸ 100	¹² ○ -2	⁷ ○ 1	3
V_j	2	5	7	3	

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 80 & 0 \\ 80 & 0 & 0 & 50 \\ 70 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(X_4) = 1990$$

X_4 aynimagan tayanch yechim. Bu yechim optimal yechim bo'ladi, chunki u uchun optimallik shartlarini barchasi bajariladi:

$$\Delta_{11} = (U_1 + V_1) - C_{11} = -1;$$

$$\Delta_{14} = (U_1 + V_4) - C_{14} = -8;$$

$$\Delta_{22} = (U_2 + V_2) - C_{22} = 0;$$

$$\Delta_{23} = (U_2 + V_3) - C_{23} = 0;$$

$$\Delta_{33} = (U_3 + V_3) - C_{33} = -2.$$

$$\Delta_{34} = (U_3 + V_4) - C_{34} = -1;$$

$$\text{Demak, } X_4 = X_{opt}; \quad F_{min} = F(X_4) = 1990.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

1. Quyidagi transport masalalarining optimal yechimi topilsin.

1.

	Iste'molchilar	Zahira
--	----------------	--------

<i>Ta'minotchilar</i>	B_1	B_2	B_3	B_4	<i>hajmi.</i>
A_1	2	1	4	1	90
A_2	2	3	3	2	55
A_3	3	2	3	2	80
<i>Talab hajmi</i>	70	40	70	45	

2.

<i>Ta'minotchilar</i>	<i>Iste'molchilar</i>				<i>Zahira hajmi.</i>
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	8	10	20	1	50
<i>Talab hajmi</i>	75	80	60	85	

3.

<i>Ta'minotchilar</i>	<i>Iste'molchilar</i>				<i>Zahra hajmi.</i>
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	8	1	9	7	110
A_2	4	6	2	12	190
A_3	3	5	8	9	90
<i>Talab hajmi</i>	80	60	170	80	

4.

<i>Ta'minotchilar</i>	<i>Iste'molchilar</i>				<i>Zahira hajmi.</i>
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	60
A_2	4	3	2	0	80
A_3	0	2	2	1	100
<i>Talab hajmi</i>	40	60	80	60	

2. Quyidagi transport masalalarining dastlabki rejasini shimoli-g'arbiy va minimal xarajatlar usulida toping va maqsad funksiyaning mos qiymatlarini taqqoslang.

a)

$\begin{array}{c} \text{bj} \\ \text{ai} \end{array}$	40	60	70
90	4	4	6
30	6	2	3
60	4	6	8

b)

$\begin{array}{c} \text{bj} \\ \text{ai} \end{array}$	46	66	76
96	2	4	6
36	2	6	4
66	1	6	6

v)

$\begin{array}{c} \text{bj} \\ \text{ai} \end{array}$	26	27	28
29	4	2	1
31	3	6	8
20	1	4	6

g)

$\begin{array}{c} \text{bj} \\ \text{ai} \end{array}$	36	46	60
30	3	2	1
40	4	2	6
60	1	2	3

d)

$\begin{array}{c} \text{bj} \\ \text{ai} \end{array}$	40	26	20	60
60	6	4	1	2

e)

$\begin{array}{c} \text{bj} \\ \text{ai} \end{array}$	20	30	20	20
20	4	1	6	3

40	4	2	6	3
36	7	3	6	4

30	2	6	4	7
40	6	3	6	4

3. Quyidagi transport masalalarini potentsiallar usuli yordamida yeching:

a)

bj \ ai	30	40	20
20	7	6	3
40	4	6	1
30	3	2	4

b)

bj \ ai	20	26	30	26
40	4	2	6	7
30	6	0	3	1
30	6	4	2	6

4. To'rtta omborxonadan beshta savdo shoxobchasiga kartoshka tashib keltirilishi lozim bo'lsin. Tashish xarajatlari quyidagi jadval ko'rinishida berilgan:

Savdo shaxobchalari \ Omborxonalar	V1	V2	V3	V4	V6	Omborxonadan chiqarilgan yuklar
A1	4	2	3	6	1	60
A2	6	3	4	2	6	160
A3	3	4	7	3	2	70
A4	2	6	6	4	3	100
Savdo shoxobchasi qabul qilgan yuklar	80	100	90	60	60	

Tashish xarajatlari eng kam bo'lgan rejani aniqlang. Bu yerda yuklar tonnada, tariflar ming so'mda ifodalangan.

5. Ochiq modeli transport masalalarini yeching:

a)

bj \ ai	26	30	40	16
30	4,6	3,0	2,7	1,6
40	4,2	2,3	4	6,2
30	1,6	6,4	3,6	4,4

b).

bj \ ai	20	60	46	30
40	6,6	4,3	6,1	4
60	3	7,4	3,6	6,3
30	4,3	6,7	6,6	3,8

11- Amaliy mashg'ulot. Butun sonli chiziqli programmalash masalalari.

O'zgaruvshilariga butun bo'lishlik sharti qo'yilgan chiziqli programmalash masalalari katta amaliy ahamiyatga egadir. Bunday masalalar butun sonli programmalash masalalari deb ataladi. Butun sonli programmalash masalalariga sayyoh haqidagi masala, optimal jadval tuzish masalasi, optimal bishish masalasi, transrort vositalarini marshrutlarga optimal taqsimlash masalasi,

bo'linmaydigan mahsulot ishlab shiqaruvshi korxonaning ishini optimal rejalashtirish masalasi va boshqa masalalar misol bo'la oladi.

Butun sonli programmalash masalasini umumiy holda quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1)$$

$$x_j \geq 0 \quad x_j - \text{butun}, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2)$$

$$Y = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad (3)$$

yoki vektor formada

$$AX = B,$$

$$X \geq 0, \quad \text{va butun},$$

$$Y = C'X \rightarrow \min. \quad (4)$$

Agar butun sonli programmalash masalalaridagi noma'lumlarning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar to'la butun sonli programmalash masalalari deb ataladi.

Noma'lumlarning ma'lum bir qismi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilgan masalalar qisman butun sonli programmalash masalalari deb ataladi.

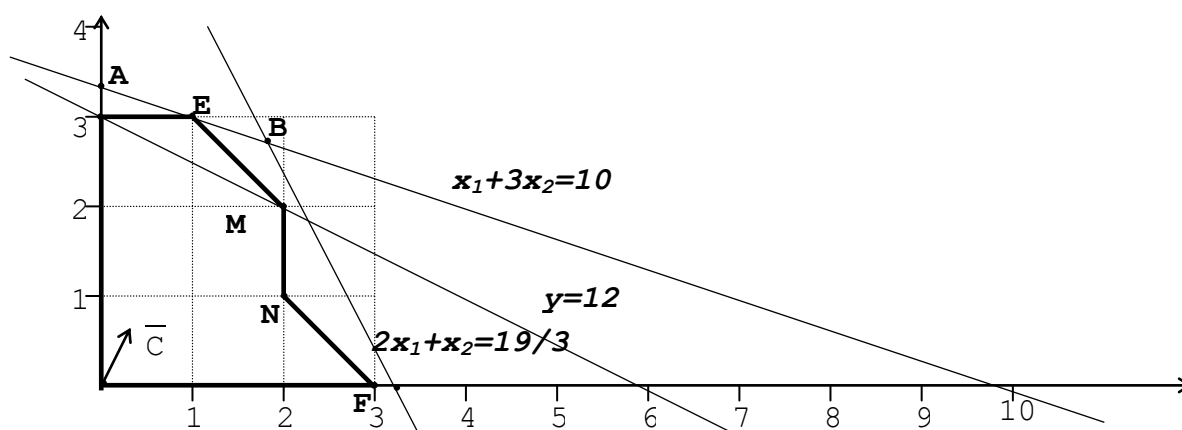
Agar butun sonli programmalash masalasidagi noma'lumlar faqat 0 yoki 1 qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lsa, u holda bu masala Bul programmalash masalasi deb ataladi.

Butun sonli programmalash masalasining geometirik talqini bilan tanishamiz.

1-masala. Ikki o'zgaruvchili butun sonli programmalash masalasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq \frac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \leq 10, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \\ x_j - \text{butun} \quad (j = \overline{1, 2}), \\ Y = 2x_1 + 4x_2 \rightarrow \max. \end{cases}$$

Ushbu masaladagi noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan uni grafik usulda yechamiz (1-shakl).



1-shakl.

Natijada **OABC** qavariq ko'rburchakni- joiz rejalar to'rlamini hosil qilamiz. Bu ko'pburchakka tegishli bo'lgan nuqtalar ichida berilgan butun sonli programmalash masalasining yechimi bo'la oladigan nuqtani torish uchun bu ko'rburchakni **OKEMNF** ko'rburchak bilan almashtiramiz. Bu ko'rburchakning burshak nuqtalarining koordinatalari butun sonlardan iborat bo'ladi. Ana shu burchak nuqtalaridan birida maqsad funksiya maksimum qiymatga erishadi. Bunday nuqtani topish uchun **Y** ga **0** qiymat berib

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

to'g'ri chiziqni yasaymiz. Bu chiziqni **C(2;4)** vektor yo'nalishida o'z-o'ziga parallel surib borib, shu yo'nalishdagi burchak nuqta **E(1;3)** ni toramiz. Bu nuqtada maqsad funksiya maksimumga erishadi. Demak, berilgan masalaning yechimi

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 3; \quad Y_{\max} = 14;$$

bo'ladi.

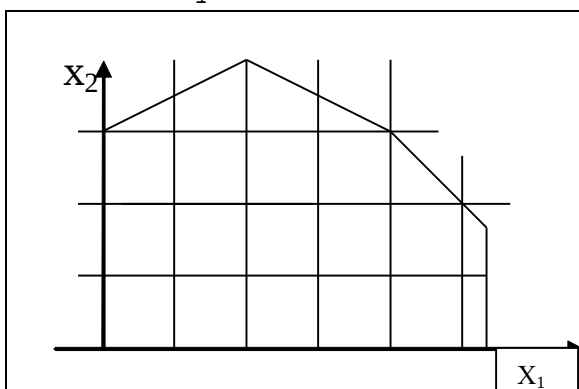
R.Gomori usuli.

Homa'lumlarga butun bo'lishlik charti qo'yilganligi sababli chiziqli programmalash masalalarini yechish usullarini butun sonli programmalash masalalarini yechish uchun qo'llab bo'lmaydi.

Butun sonli programmalash masalalarini yechish ushuncha ularning xususiyatlarini nazarga oluvchi usullar yaratilgan bo'lib, ular orasida amerika olimi R.Gomori yaratgan usul optimal butun sonli yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi. Gomori usuli yordami bilan to'la butun sonli, hamda qisman butun sonli masalalarni yechish mumkin. Quyida biz R.Gomori usuli bilan to'la butun sonli programmalash masalasini yechish jarayoni bilan tanishamiz.

Bu usulning g'oyasi quyidagidan iborat bo'lib, berilgan butun sonli programmalash masalasini noma'lumlarning butun bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan, uni oddiy chiziqli programmalash masalasi sifatida simpleks usuldan foydalanib yechamiz. Agar topilgan yechim butun sonli bo'lsa, u holda u butun sonli programmalash masalasining ham yechimi bo'ladi. Aks holda noma'lumlarning butun sonli bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va «kesuvchi tenglama» deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuziladi. Bu tenglama asosiy tenglamalar sistemasiga kiritib yoziladi va bazis yechim almashtiriladi. Buning uchun noma'lum kesuvchi tenglamadan ajratiladi va uning qiymati boshqa tenglamalarga qo'yib chiqiladi. Bunday ishlar masalaning butun sonli yechimi topilguncha yoki uning mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlanadi.

Har bir bosqichda tuzilgan qo'shimcha tenglama kesuvchi tenglama deb atalishiga sabab, bu tenglama yordamida berilgan butun sonli programmalash masalasi yechimidagi kasr sonli yechimni o'z ichiga oluvchi qismi kesib boriladi. Bu aytilganlarni quyidagi shakl orqali tasvirlash mumkin.



Kesish jarayoni joriy rejalar to'plamining faqat butun sonli yechimlarni o'z ichiga oluvchi qismi K_1 topilguncha takrorlanadi. K_1 to'plamining chetki nuqtalarining koordinatalari butun sonlardan iborat bo'ladi.

Kesuvchi tenglamani tuzish.

1. Faraz qilaylik, yuqorida berilgan (1)-(3) butun sonli programmalash masalasidagi noma'lumlarning butun son bo'lishlik shartiga e'tibor bermasdan uning optimal yechimi topilgan bo'lsin va bu optimal yechim $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bo'lsin. Oxirgi simpleks jadvaldagi bazis vektorlar $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_m$ lardan iborat bo'lsin. U holda bu simpleks jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$X = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{1m+1} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{2m+1} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & x_{im+1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & x_{mm+1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix}$$

Agar barcha x_i lar butun sonlar bo'lsa, u holda topilgan yechim butun sonli programmalash masalasining yechimi bo'ladi.

2. Faraz qilaylik, ba'zi x_i lar kasr sonlardan iborat bo'lsin, hamda ba'zi x_{ij} lar ham kasr sonlardan iborat bo'lsin. x_i va x_{ij} larning butun qismini mos ravishda $[x_i]$ va $[x_{ij}]$ bilan belgilaymiz. U holda bu sonlarning kasr qismlarini quyidagicha aniqlash mumkin.

$$\begin{cases} q_i = x_i - [x_i] \\ q_{ij} = x_{ij} - [x_{ij}] \end{cases} \quad (5)$$

Deylik, ba'zi $q_i \neq 0$ bo'lsin. U holda X matrisaning $\max q_i = q_k$ $q_i \neq 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi k -qatori uchun kesuvchi tenglama tuziladi. Buning uchun eng avvalo

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + \dots + q_{kn}x_n \geq q_k \quad (6)$$

tengsizlik tuziladi, so'ngra uni (-1)ga ko'paytirib qo'shimcha o'zgaruvchi kiritiladi. Natijada quyidagi tenglama hosil bo'ladi.

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - \dots - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k \quad (7)$$

Bu tenglama kesuvchi tenglama deb ataladi.

3. Kesuvchi tenglamani simpleks jadvalning $m+2$ qatoriga joylashtiriladi. Bu tenglamadagi x_{n+1} o'zgaruvchiga mos keluvchi P_{n+1} vektorni «bazis vektor» deb qabyl qilingan. By bazis vektorga mos kelyvshi x_i ozod had manfiy ishorali. Shuning uchun ikkilangan simpleks usulni qo'llab, P_{n+1} vektor bazisdan chiqariladi va uning o'rniga

$$\min_{q_{kj} < 0} \left(\frac{\Delta_j}{q_{kj}} \right) = \frac{\Delta_k}{q_{ki}}$$

shartni qanoatlantiruvchi P_l vektor kiritiladi va simpleks jadval almashtiriladi. Agar hosil bo'lgan yangi simpleks jadvaldagi barcha x_j ozod hadlar butun sonli bo'lsa, u holda torilgan yechim butun sonli programmalash masalasining yechimi bo'ladi. Aks holda yuqoridagi 2-3 punktlarda qilingan ishlarni yana qaytadan takrorlash kerak. Umuman, bu ishlarni masalaning butun sonli yechimi torilguncha, yoki uning butun sonli yechimini mavjud emasligi aniqlanguncha takrorlash kerak.

Agar kasr sonli x_i ga mos keluvchi qatorda barcha x_{ij} lar butun sonli bo'lsa, u holda masala butun sonli yechimga ega bo'lmaydi.

2- Masala. Quyidagi chiziqli programmalash masalasining butun sonli yechimini toring:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \text{butun},$$

$$Y = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

Yechish. Masalani noma'lumlarning butun bo'lish shartini tashlab yuborib, simpleks usul bilan yechamiz. Buning uchun, eng avvalo, masalani kanonik ko'rinishga keltirib, simpleks jadvaliga joylashtiramiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0,$$

$$Y = 8 - 3x_1 - x_2 \rightarrow \min.$$

Masalani oddiy simpleks usul bilan yechamiz. Yechish jarayonining III bosqichida quyidagi optimal yechim toriladi.

Bazis vektorlar	C	P_0	-3	-1	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4
P_2	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6
P_1	-3	9/4	1	0	1/4	1/4
Δj		3/4	0	0	-11/12	-7/12

Jadvaldan ko'rinadiki, torilgan yechim butun sonli programmalash masalasining yechimi bo'lmaydi. Bu yechimni butun sonli yechimga aylantirish uchun jadvalning I-qatoriga nisbatan kesuvchi tenglama tuzamiz. Uning uchun eng avval, quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz:

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2},$$

tengsizlikning ikki tomonini (-1) ga ko'paytiramiz va qo'shimcha noma'lumni kiritib, quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}.$$

Bu tenglamani simpleks jadvalining 4-qatoriga joylashtiramiz.

Bazis vektorlar	C	P_0	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-1	1/2	0	1	1/6	-1/6	0
P_1	-3	9/4	1	0	1/4	1/4	0
Δj		3/4	0	0	-11/12	-7/12	0
P_5	0	-1/2	0	0	-1/6	1/6	1

Bazisdan P_5 ni chiqarib, o'rniga P_3 ni kiritamiz. Hatijada simpleks jadval almashadi va quyidagi ko'rinishga keladi.

Bazis vektorlar	C	P_0	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-1	0	0	1	0	0	0
P_1	-3	3/2	1	0	0	1/2	0
P_3	0	3	0	0	1	-1	0
Δj		9/2	0	0	0	-3/2	0
P_6	0	-1/2	0	0	0	-1/2	1

Endi yangi simpleks jadvalning 2-qatoriga nisbatan kesuvchi tenglama tuzamiz. Uning uchun avval

$$\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2},$$

tengsizlikni tuzamiz va undan quyidagi kesuvchi tenglamani hosil qilamiz.

$$-\frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2},$$

Bu tenglamani simpleks jadvalning 5-qatoriga joylashtiramiz. So'ngra bazisdan P_6 vektorni chiqarib, P_4 ni bazisga kiritamiz. Natijada simpleks jadval almashadi va quyidagi ko'rinishga keladi.

Bazis vektorlar	C	P_0	-3	-1	0	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_2	-1	0	0	1	0	0	0
P_1	-3	1	1	0	0	0	1
P_3	0	4	0	0	1	0	1
P_4	0	1	0	0	0	1	-2
Δj		8- 3=5	0	0	0	0	-3

Hosil bo'lgan simpleks jadvaldagi P_0 vektorning barcha elementlari butun sonlardan iborat. Demak, butun sonli programmalash masalasining yechimi topilgan va u $X=(1;0;4;1)$ bo'lib, bu yechimdagi maqsad funksiyaning qiymati $Y_{min}=5$ bo'ladi.

3- Masala. Quyidagi butun sonli chiziqli programmalash masalasi berilgan bo'lsin

$$x_0 = 7x_1 + 9x_2 \rightarrow \max,$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$7x_1 + x_2 \leq 35,$$

$$x_1, x_2 \geq 0 - \text{butun}.$$

Tengsizliklarni chap tomonga mos ravishda $x_3, x_4 \geq 0$ larni qo'shib, diagonal ko'rinishga keltiramiz

$$x_0 = -7(-x_1) - 9(-x_2),$$

$$x_1 = -(-x_2),$$

$$x_2 = -(-x_2),$$

$$x_3 = 6 - (-x_1) + 3(-x_2),$$

$$x_4 = 35 + 7(-x_1) + (-x_2),$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 - \text{butun}$$

Algoritmgaga asosan avval x_1, x_2, x_3, x_4 larni butunligini talab qilmasdan simpleks metod bilan yechamiz. Buning uchun 1-jadvalni tuzib, unga Simpleks metodni qo'llasak 3-jadvaldagi $x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = \frac{7}{2}$ optimal yechimga ega bo'lamiz.

	1-jadval			2-jadval			3-jadval		
	1	$-x_1$	$-x_2$	1	$-x_1$	$-x_2$	1	$-x_1$	$-x_2$
$x_0 =$	0	-7	-9	18	-10	3	63	16/1	28/11
$x_1 =$	0	-1	0	0	-1	0	9/2	3/22	-1/2
$x_2 =$	0	0	-1	2	-1/3	1/3	7/2	1/22	7/22
$x_3 =$	6	-1	3*	0	0	-1	0	0	-1

$x_4 =$	36	7	1		33	$22^*/3$	-	1/3		0	-1	0
										-	-	-
										1/2	3/22	21/22

S
1

3-jadvalda o'zgaruvchi $x_1 \left(= \frac{9}{2} \right)$ kasr yechimga ega, Shuning uchun bu satr hosil qiladigan satr deb olinadi va bu satr elementlarini kasr qismi yordamida yangi satr tuziladi. Bu yangi satr hal qiluvchi satr bo'lib xizmat qiladi. Hal qiluvchi ustun topilib ikkilanma simpleks metod yordamida keyingi 4-jadvalga o'tiladi. Bunda x_0 joylashgan satrning birinchi elementi kasr sonidan iborat bo'lganligi uchun bu satr hosil qiladigan satrdir. Yana yangi satr qo'shilib, u hal qiluvchi satr bo'lib xizmat qiladi va hokazo. Bu jarayon ozod hadlar ustunida butun sonlar paydo bo'lguncha davom ettiriladi, yoki bunday yechim yo'qligi ko'rsatiladi. Bu masalada 6-jadvalda $x_1 = 4, x_2 = 3$ optimal yechimga ega bo'lamiz, maqsad funksiyaning qiymati esa $x_0 = 55$ ga teng bo'ladi.

4-jadval				5-jadval			
	1	$-x_4$	$-s_1$		1	$-s_6$	$-s_3$
$x_0 =$	186/3	1	8/3	$x_0 =$	66	6/2	2
$x_1 =$	96/21	1/7	-1/21	$x_1 =$	4	1	-1
$x_2 =$	10/3	0	1/3	$x_2 =$	3	-1/2	1
$x_3 =$	11/21	1/7	-22/21	$x_3 =$	1	6/2	-4
$x_4 =$	0	-1	0	$x_4 =$	4	-13/2	26/6
$s_6 =$	-2/3	0	-2/3				

4- **Masala.** Quyidagi BSCHP masalasi qaralayotgan bo'lsin.

$$x_0 = -2x_1 - 5x_2 - x_3 \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \geq 5, \quad (2)$$

$$7x_1 + 2x_2 + 5x_3 \geq 18, \quad (3)$$

$$10x_1 + 5x_2 + 12x_3 \geq 26, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 - \text{butun}. \quad (5)$$

(3) tengsizliklarning o'ng tomoniga $x_4, x_5, x_6 \geq 0$ larni mos ravishda qo'shib diagonal ko'rinishga keltiramiz:

$$x_0 = 2(-x_1) + 5(-x_2) + (-x_3) \rightarrow \max, \quad (6)$$

$$x_i = -(-x_i), i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

$$x_4 = -5 - 3(-x_1) - 4(-x_2) - (-x_3), \quad (8)$$

$$x_5 = -18 - 7(-x_1) - 2(-x_2) - 5(-x_3), \quad (9)$$

$$x_6 = -26 - 10(-x_1) - 5(-x_2) - 12(-x_3), \quad (10)$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6 - \text{butun}.$$

Boshlang'ich jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

1-jadval					2-jadval				
	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$		1	$-x_1$	$-x_2$	$-s_1$
$x_0 =$	0	2	6	1	$x_0 =$	-2	1	3	1
$x_1 =$	0	-1	0	0	$x_1 =$	0	-1	0	0
$x_2 =$	0	0	-1	0	$x_2 =$	0	0	-1	0
$x_3 =$	0	0	0	-1	$x_3 =$	2	1	2	-1
$x_4 =$	-6	-3	-4	-1	$x_4 =$	-3	-2	-2	-1

$x_6 =$	-18	-7	-2	-6
$x_6 =$	-26	-10	-6	-12
$s_1 =$	-2	-1	-2	-1*

$x_6 =$	-8	-2	8	-6
$x_6 =$	-2	2	19	-12
$s_2 =$	-2	-1*	-1	-1

Bu jadval ikkilanma joiz jadval bo'lib, x_4 joylashgan satr birinchi elementi (x_4 qiymati) manfiy, shuning uchun u hosil qiladigan satr bo'ladi. Bu satrning barcha elementlari manfiy sonlardan iborat bo'lganligi uchun, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vektorlarning leksikografik minimumini topamiz, bu α_3 vektordir.

Quyidagi

$$\alpha_3 \pi \frac{\alpha_j}{\mu_j}, j = 1, 2,$$

Shartdan eng katta musbat, butun μ_j sonlarni aniqlaymiz:

$\mu_1 = 1, \mu_2 = 4, \mu_3 = 1$. Endi $\lambda_0 = -\frac{a_{ij}}{\mu_j}$ tenglik yordamida λ_j larni topamiz: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1$, demak $\lambda = 3$.

Shu $\lambda = 3$ yordamida yangi chegara hosil qilib jadval tagiga yozib qo'yamiz. Bu yangi satr hal qiluvchi satr bo'lib xizmat qiladi. α_3 ustun esa hal qiluvchi ustun, ularning kesishgan joydagi element - 1 hal qiluvchi elementdir. Bu hal qiluvchi element yordamida keyingi 2-jadvalga o'tamiz. Bu 2-jadvalda ham x_4 satr hosil qiladigan satrdir. Bu satrning barcha elementlari manfiy, shuning uchun $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vektorlardan leksikografik ma'noda minimumini topamiz, u α_1 vektordir.

$$\alpha_1 \pi \frac{\alpha_j}{\mu_j}, j = 2, 3$$

shartdan μ_2, μ_3 larni aniqlaymiz: $\mu_2 = 3, \mu_3 = 1, \lambda_j$ larni $\lambda_j = -\frac{a_{4j}}{\mu_j}$ tenglikdan topsak:

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{2}{3}, \lambda_3 = 1$ kelib chiqadi, demak $\lambda = 2$. Bu $\lambda = 2$ yordamida S_2 hal qiluvchi satrni tuzamiz.

Keyingi jadvallarda ham oldingi jarayonni davom ettirsak, 6-iterasiyadan so'ng to'g'ri joiz jadvalga ega bo'lamiz. Ya'ni, berilgan masalaning optimal yechimi: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$, maqsad funksiyaning qiymati esa $x_0 = -5$ bo'ladi.

3-jadval

	1	- s_6	- x_2	- s_4
$x_0 =$	-6	1	3	0
$x_1 =$	2	-2	2	1
$x_2 =$	0	0	-1	0
$x_3 =$	1	3	-2	-2
$x_4 =$	2	-3	0	1
$x_6 =$	1	1	2	-3
$x_6 =$	6	16	-9	-14

Bu yerda strelka bilan hosil qiladigan satr ko'rsatilgan, yulduzcha esa hal qiluvchi elementni bildiradi.

5-Masala. Quyidagi BSCHP masalasi odatdagidek diagonal holga keltirilgan bo'lsin

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \max, \\ x_4 &= 22 + 2(-x_1) - (-x_2) + 22(-x_3), \\ x_5 &= 6 + 2(-x_1) - (-x_2) + 6(-x_3), \end{aligned}$$

$$x_6 = 2 + 2(-x_1) - 5(-x_2) + 2(-x_3),$$

$$x_1 = -(-x_1),$$

$$x_2 = -(-x_2),$$

$$x_3 = -(-x_3),$$

$$x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 0,$$

$$x_1, x_2, \dots, x_7 - \text{большин},$$

qo'shimcha chegarani quyidagicha kiritamiz:

$$x_L = 10 - x_1 - x_2 - x_3$$

u holda, boshlang'ich jadval quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$x_0 =$	0	-1	-1	-1
$x_4 =$	22	2	7	22
$x_6 =$	6	2	-1	6
$x_6 =$	2	2	-6	2
$x_7 =$	1	-4	1	1
$x_1 =$	0	-1	0	0
$x_2 =$	0	0	-1	0
$x_3 =$	0	0	0	-1
$x_L =$	10	1	1	1
$s_1 =$	1	1*	-3	1

1	$-s_1$	$-x_2$	$-x_3$
1	1	-4	0
20	-2	13	20
4	-2	6	4
0	-2	1	0
6	4	-11	6
1	1	-3	1
0	0	-1	0
0	0	0	-1
0	-1	4	0
0	-2	1*	0

α_1 vektor leksikografik ma'noda minimum, demak 1-ustun hal qiluvchi ustun bo'lib xizmat qiladi.

$\frac{a_{i0}}{a_{il}} (a_{il} > 0)$ nisbatning eng kichigiga x_6 - satrda erishiladi, u hosil qiladigan satr bo'ladi, $V_0(1) = \{6\}$

hosil qiladigan satr yordamida (x_6 - satr elementlarini 2 soniga bo'lish orqali) hal qiluvchi satrni topamiz. Hal qiluvchi element 1 ga teng, simpleks metod bilan keyingi jadvalga o'tamiz. Bu jadvalga α_2 ustun hal qiluvchi ustun bo'lib, $V_1(2) = \{5, 6\}$, lekin x_6 - satr oldingi $V_0(1)$ da ham ishtirok etganligi uchun, yana uni hosil qiladigan satr, sifatida olamiz. Bu joiz qoidadan kelib chiqadi.

Bu jarayonni davom ettirsak 1-jadvalda quyidagi optimal yechimga ega bo'lamiz:
 $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 0$.

1-jadval

	1	$-s_7$	$-s_6$	$-x_3$
$x_0 =$	6	1	0	6
$x_4 =$	0	-7	-37	0
$x_6 =$	0	1	-3	0
$x_6 =$	4	6	-7	4
$x_7 =$	16	-1	6	16
$x_1 =$	4	0	1	4
$x_2 =$	2	1	-1	2
$x_3 =$	0	0	0	-1
$x_L =$	4	-1	0	-6

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Butun sonli programmalash masalasi qanday qo'yiladi?
2. Butun sonli programmalash masalalarining qanday turlari mavjud?

3. Butun sonli programmalash masalasining geometrik talqini qanday?

4. Qanday iqtisodiy masalalarning matematik modellari butun sonli programmalash

masalasiga misol bo'la oladi?

5. Sayyoh haqidagi masalaning matematik modeli qanday?

6. Bo'linmaydigan mahsulot ishlab chiqarishni optimal rejalashtirish masalasining

matematik modeli qanday?

7. R. Gomori usulining g'oyasi qanday?

8. Kesuvshi tenglama nima va u qanday tuziladi?

9. Masalaning butun sonli yechimga ega bo'lmaslik sharti qanday?

10. Butun sonli yechimning optimallik sharti qanday?

Mustaqil yechish uchun masalalar.

I. Berilgan iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzing.

1. Uzunligi 3 m bo'lgan g'o'lalardan uzunliklari 1,2 m va 0,9 m bo'lgan 2 xil xomaki mahsulotlar tayyorlash kerak bo'lsin. Shu bilan birga birinchi xomaki mahsulotdan 50 tadan, ikkinchi xomaki mahsulotdan esa 81 tadan kam bo'lmagan miqdorda tayyorlash kerak bo'lsin. G'o'lalarni xomaki mahsulotlarga uch xil usullar bilan kesish mumkin. Har bir kesish usuli bo'yicha hosil bo'ladigan xomaki mahsulotlar, hamda chiqindilar miqdori quyidagi jadvalda keltirilgan:

Xomaki mahsulot turlari	Kesish usullari			Xomaki mahsulot ishlab shiqarish rejasi
	I	II	III	
1,2 m	2	1	-	50
0,9 m	-	2	3	81
Shiqindilar miqdori	0,6	0	0,3	

G'o'lalarni qaysi usul bilan qanchasini kesganda rejadagidan kam bo'lmagan miqdorda xomaki mahsulot tayyorlanadi, hamda chiqindilar miqdori eng kam bo'ladi?

2. Sexda qo'shimcha uskuna o'rnatishga qaror qilinib, uning uchun $19/3 \text{ m}^2$ maydon ajratildi. Bu uskunani sotib olish uchun korxona 10 (p.b) pul ajratdi. Sex o'z imkoniyatlaridan kelib chiqib 2 turdagi uskunalar sotib olishi mumkin. I tur uskunaning bahosi 1000 p.b., II turdagisining bahosi esa 3000 p.b. ga teng.

I va II tur uskunalarni o'rnatilishi oqibatida har smenada sex mos ravishda 2 va 4 birlik mahsulot ko'proq ishlab chiqaradi. I tur uskunani o'rnatish uchun 2 m^2 , II tur uskuna uchun esa 1 m^2 maydon kerak.

Qaysi uskunadan qanchadan sotib olganda sexda ishlab chiqarilgan qo'shimcha mahsulotlarning miqdori maksimal bo'ladi?

II. Berilgan butun sonli programmash masalasini grafik usulda yeching.

$$1. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 18, \\ x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 0 \leq x_1 \leq 5, \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \end{cases}$$

x_1, x_2 – бутун.

$$Z = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max.$$

$$2.. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2, \\ 3x_1 + x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}),$$

x_1, x_2, x_3 – бутун.

$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \rightarrow \min.$$

III. Berilgan masalalarni R.Gomori usuli bilan yeching.

$$1. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 14, \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 11, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,3}),$$

x_j – бутун, $(j = \overline{1,3})$,

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \rightarrow \max.$$

$$2.. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = \frac{11}{2}, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \text{ бутун } (j = \overline{1,4}),$$

$$Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min.$$

M U N D A R I J A

Kirish.....	4
1. Matematik modellarga oid tadbiqiy masalalar.....	5
2. Chiziqli programmalash masalasining umumiy, kanonik ko‘rinishi va uning turli formalarda ifodalanishi.....	11
3. Chiziqli programmashtirish masalasining geometrik talqini. Masalani grafik usulda yechish.....	17
4. Chiziqli programmalash masalasining tayanch yechimi.....	24
5. Chiziqli tenglamalar sistemasining nomanfiy bazis yechimini topish.....	27
6. Tayanch yechimning optimallik sharti. Chekli optimal yechimning mavjud bo‘lmaslik sharti. Yangi tayanch yechimga o‘tish qoidasi.....	32
7. Chiziqli programmalash masalasini yechishning Simpleks usuli.....	37
8. Sun‘iy bazis usuli.....	44
9. Ikkilanma simpleks metod.....	48
10. Chiziqli programmalashning transport masalasini yechish.....	52
11. Butun sonli chiziqli programmalash masalalari.....	64
Foydalanilgan adabiyotlar ruyxati.....	74
Mundarija	75

Foydalanilgan adabiyotlar ruyxati

- 1.A.V.Kuznetsov,G.I.Novikova, Sbornik zadach po matematicheskomu programmirovaniyu.1985 g.
- 2.Yu.L. Zaslavskiy. Sbornik zadach po lineynomu programmirovaniyu. 1985g.
- 3.N.I.Djemilyov, N.I.Eydellant. Sbornik zadach po matematicheskomu programmirovaniyu. 1990g.
- 4.X.Taxa. “Vvedenie v issledovanie operatsii” Tom 1,2. M.Mir.1985
- 5.G.Vagner. “Osnovo` issledovaniya operatsii” Tom 1,2. M.Mir. 1973
- 6.Issledovanie operatsii (pod. Red. DJ.Moudara), Tom 1,2. M.Mir. 1981
- 7.R.L.Raytskas i dr. “Kolichestvenno`y analiz v ekonomike” M.Mir. 1987
- 8.V.G.Karmanov. Matematicheskoe programmirovanie. M. Nauka 1986 g.
- 9.Jumayev X.N., Otaniyozov B., Yugay L.P., Jalilov A., Matematik programmalashtirish.Toshkent-2005 g. 230 bet.
- 10.A.V.Kuznetsov i dr. matematicheskoe programmirovanie. M. 1984.
- 11.L.A.Petrosyan i dr. Teoriya igr. M. 1998 g.
- 12.V.V.Rozen. Matematicheskie modeli prinyatiya resheniy v ekonomike. M. 2002 g.
- 13.Yudin L.V., Yudin A.D. “Ekstremalno`e modeli v ekonomike”, M. Ekonomika, 1979
- 14.Venttsel E.S. “Issledovanie operatsiy: zadachi, printsipo`, metodologiya”, Nauka. 1980.
- 15.Nogin V.L. i dr. “Osnovo` teorii optimizatsii” M, “Vo`sshaya shkola”, 1986
- 16.Lyahenko I.N. i dr. “Lineynoe i nelineynoe programmirovanie”, Kiev, 1971g.
- 17.Safaeva K., Beknazarova N. Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. 1,2-qismlar, T.1984, 1990.
- 18.R.Gabasov, F.Kirillova. Optimallashtirish usullari. Toshkent, 1995.
- 19.Makarov I.M. i dr. Teoriya vibora prinyatiya resheniy. M.Nauka, 1982 g.
- 20.Vorobev N.N. Teoriya igr dlya ekonomistov – kibernetikov (uchebnik) M. “Nauka” 1985 g.
21. Safaeva K. Matematik programmalash.Toshkent-2004 g. 237 bet.

