

O'ZBEKSTAN RESPUBLİKASI JOQARG'I HA'M ORTA ARNAWLI

BİLİMLENDİRİW MİNİSTRLİĞİ

BERDAQ atındag'ı QARAQALPAQ MA'MLEKETLİK UNİVERSİTETİ

MATEMATİKA FAKULTETİ

Magistratura qa'nigeli : 5A480103- « A'meliy matematika h'a'm informatsiyalıq texnologiyalar»

«KORREKT EMES MA'SELELERDİ ShESHİW USILLARI»

PA'Nİ BOYINShA

LEKTsİYa TEKSTLERİ

Oqıtıwshı:

f.-m.i.k. M.Aminov

ass. R. Shixiev

NO'KİS 2007

Mazmuni

Kirisiw	
I-bap. Korrekt ha'm korrekt emes ma'seleler teoriiyası.....	
1-§. Adamar boyınsha korrektlik tu'sinigi (1-lektsya).....	
2-§. Sha'rtli korrekt, yag'nıy Tixonov boyınsha korrektlik tu'sinigi (2-lektsya).....	
II-Bap. Birinshi ta'rtpi differentsial operator ten'lemeler	
1-§. Birinshi ta'rtpi differentsial- operator ten'leme ushin qoyilg'an Koshi ma'sesei.	(3,4-lektsyalar)
2-§. O'zgeriwshi-operatorlı birinshi ta'rtpi differentsial ten'leme...(5,6 -lektsyalar).....	
3-§ Regulyarizatsiya metodi menen juwıq sheshimdi tabıw.....(7,8 -lektsyalar).....	
III-bap. Ekinshi ta'rtpi differentsial operator ten'lemeler.....	
1-§. Ekinshi ta'rtpi differentsial operator ten'lemeler ushin Koshi ma'sesei...	(9,10 -lektsyalar)
2-§ . Ekinshi ta'rtpi barlıq koeffitsientleri operator bolg'an ten'leme ushin qoyilg'an Koshi ma'sesei.....	(11,12-lektsyalar)....
Paydalang'an a'debiyatlar	

Kirisiw

Korrekt emes ma'seleler teoriiyası ha'zirgi da'wir matematikasının' en' a'hmiyetli bo'limlerinen biri. Korrekt emes ma'seleler teoriiyasına akademiklerden A. N. Tixonov, M.M.Lavrentev ha'm V.K.İvanovlar tiykar salg'an. Bizin' O'zbekistanımızda bul ma'sele boyınsha ko'plegen ilimpazlarımız jumıs alıp barıp atır. Olardan Sh.Yarmuxammedov, Q.Fayazov, A.Begmatov, A.Xaydarov ha'm t.b. atap o'tsek boladı. Korrekt emes qoyılǵ'an ma'seleler tiykarınan differentsial ten'lemeler, funktsional analiz, funktsiyalar teoriiyası, matematikalıq analiz siyaqlı matematika tarawlarında ushırasadı.

Korrekt emes ma'seleler teoriiyasında ko'binese ma'seleler abstrakt Gilbert ken'isliginde izertlenip, birden-birlik ha'm ornıqlılıq teoremları da'lillenedi. Ma'selenin' sheshimi bolsa, **apriori** bar dep esaplanadı. Ma'sele sheshiminin' barlıǵ'ı ma'selenin' fizikalıq mazmunınan kelip shıǵ'adı. Bunda logarifmikalıq do'n'eslik ha'm Karleman tu'rdegi bahalardan paydalanıladı.

Akademik A.N.Tixonovtın' regulyarizatsiya metodı menen juwıq sheshim tabıladı. I-bapta korrekt emes ma'seleler teoriiyasının' tiykarg'ı tu'sinikleri beriledi. II-bapta birinshi ta'rtpili operator tip koeffitsientli differentsial ten'leme ushın qoyılǵ'an Koshi ma'seselezi izertlenedi. Regulyarizatsiya metodı menen juwıq sheshim tabıladı.

III-bapta ekinshi ta'rtpili differentsial-operator ten'lemeushın qoyılǵ'an Koshi ma'seselezi qarap shıǵ'ıladı. Tiyisli misallar beriledi.

Oqıwlıq qollanba matematika fakultetin' 4 kurs studentleri ha'm magistrturanin' matematika qa'nigeligi ushın arnalg'an. Onnan differentsial ten'lemeler menen shug'ıllanıwshı qa'nigeler de paydalanıwǵ'a boladı.

I-bap. Korrekt ha'm emes ma'seleler teoriyası.

1-§. Adamar boyınsha korrektlik tu'sinigi.

Korrekt qoyılǵ'an matematikalıq fizika ma'seleleri tu'sinigi frantsuz matematigi. J. Adamar ta'repinen kiritilgen.

Anıqlama 1. Egerde to'mendegi sha'rtler orınlansa, yag'nıy

A) ma'selenin' sheshimi bar;

B) ma'selenin' sheshimi birden-bir;

C) ma'selenin' sheshimi baslang'ısh berilgenlerge u'zliksiz baylanıslı bolsa, onda berilgen ma'sele korrekt qoyılǵ'an dep ataladı. Eger usı sha'rtlerden birewi orınlanbasa, onda berilgen ma'sele korrekt emes qoyılǵ'an ma'sele dep ataladı.

Sonın' menen birge J. Adamar korrekt emes qoyılǵ'an ma'selege misalda keltirip o'tedi.

Bul misal Laplas ten'lemesi ushın Koshi ma'seleleri bolıp tabıladı.

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, \\ u(x, y)|_{y=0} = f(x), \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \varphi(x), -\infty < x < \infty \end{cases}$$

Egerde

$$f_1(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{n} \sin nx$$

bolsa, onda ma'selenin' sheshimi

$$u_1(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin nx \sinh ny, \quad n > 0$$

boladı.

Eger

$$f_2(x) = 0, \varphi_2(x) = 0$$

bolsa, onda

$$u_2(x, y) = 0$$

boladı.

Demek,

$$\begin{aligned} \rho_C(f_1, f_2) &= \sup |f_1(x) - f_2(x)| = 0 \\ \rho_C(\varphi_1, \varphi_2) &= \sup |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

biraq

$$n \rightarrow \infty$$

de

$$\rho_C(u_1, u_2) = \sup |u_1(x, y) - u_2(x, y)| = \frac{1}{n^2} \text{shny} \rightarrow \infty$$

Al bul bolsa berilgenlerge u'zliksiz baylanisli joq ekenligin bildiredi, yag'niy Laplas ten'lemesi ushin Koshi ma'seleleri korrekt emes qoyilg'an eken.

Meyli, A - sızıqlı operator bolıp, ol X -banax ken'isliginen Y -banax ken'isligine ta'sir etetug'in bolsın.

$D(A)$ - A operatorın' anıqlanıw oblastı

$$D(A) \subseteq X$$

$R(A)$ - A operatorın' ma'nisler ko'pligi

$$R(A) \subseteq Y$$

Meyli, bizge

$$Au = f \quad (1)$$

berilgen bolsın, bunda

$$u \in D(A), f \in Y$$

Funktsional analiz tilinde korrekt qoyilg'an ma'sele anıqlaması to'mendegishe

Аnıqlama 2. Eger qa'legen $u \in D(A)$ ushin

$$\|u\|_x \leq C \|Au\|_r \quad (2)$$

ten'sizligi orınli bolsa (bul jerde $C = \text{const}$), onda (1) ma'sele korrekt qoyilg'an dep ataladı.

Аnıqlama 3. Eger (2) sha'rt orınlanbasa, onda berilgen ma'sele korrekt emes qoyilg'an dep ataladı.

Korrekt emes ma'seleler teoriyasında ma'selenin' sheshimi bar esaplanıp, onın' birden-birligi ha'm baslang'ish berilgenlerge u'zliksiz baylanislig'ı da'liylenedi.

2-§. Sha'rtli korrekt, yag'niy Tixonov boyınsha korrektlik tu'sinigi

Аnıqlama 4.

Eger A) sheshimdin' bar ekenligi ha'm onın' funktsional ken'islikтин' qanday-da bir M -ko'pligine tiyisli ekenligi belgili bolsa;

B) sheshim M ko'plikte birden-bir; C) M ko'plikte sheshim da'slepki berilgenlerge u'zliksiz baylanisli bolsa, onda berilgen ma'sele sha'rtli korrekt yamasa Tixonov boyınsha korrekt qoyilg'an ma'sele dep ataladı. M -ko'binese kompakt ko'plik bolıp, ol korrektli ko'pligi dep ataladı.

Bul jerde to'mendegi Tixonov teoreması orınli boladı.

Teorema. Meyli - X, F — banax ken'islikleri, A -u'zliksiz operator M - kompakt ha'm $M \subset X$ bolsın.

Eger

$$Au = f \quad (3) \quad (x \in X, f \in F)$$

ten'lemenin' sheshimi birden-bir bolsa, onda M -ko'plikte ol on' ta'repke u'zliksiz baylanisli,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \delta > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in M \quad \|Ax_1 - Ax_2\| \leq \delta$$

yag'niy ushin

$$\|x_1 - x_2\| \leq \varepsilon$$

ten'sizligi orinli.

II-Bap. Birinshi ta'rtpi differentsial operator ten'lemeler

1-§. Birinshi ta'rtpi differentsial operator ten'leme ushın qoyılǵ'an Koshi ma'sesei

Meyli, $u(t)$ funksiya t skalyar argumenttin' funksiya bolıp, ol ma'nislerin N - Gilbert ken'isliginde qabillasın, $f(t)$ ha'm t skalyar argumenttin' funksiya bolıp, ol F – gilbert ken'isliginde ma'nislerin qabillasın. A-opertor

$$A: H \rightarrow F$$

Anıqlama 5. $\frac{du}{dt} = Au + f$ ko'rinishindegi opertor tip koeffitsentli ten'leme birinshi ta'rtpi differentsial-

operator ten'leme dep atladı.

Usı Koshi ma'sesein qarap o'temiz

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f & (4) \\ u(0) = u_0 & (5) \end{cases}$$

Bul jerde biz A-opertordı simmetriyalı ha'm onı operator dep esaplaymız, yag'nıy qa'legen $u, v \in D(A)$ ushın $(Au, v) = (u, Av)$; $(Au, u) \geq 0$

Anıqlama 6. Eger $u(t): [0, T] \rightarrow H$ funksiya to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlандırsa, yag'nıy

A) $0 \leq t \leq T$ da $u \in C[0, T], u \in D(A), f \in D(A)$;

B) $0 \leq t \leq T$ da u anıqlang'an;

C) $\forall t \in [0, T]$ da $u(t)$ funksiya (5)-(6) ten'lemeni qanaatlандırsa, onda ol (5)-(6) Koshi ma'seseinin' sheshimi dep ataladı.

(5)-(6) Koshi ma'sesei, ulıwma alg'anda, korrekt emes qoyılǵ'an.

Aldın bir tekli ten'lemeni ko'rip shıǵ'amız, yag'nıy

$$\frac{du}{dt} = Au$$

ten'lemeni ko'rip shıǵ'amız ($f = 0$).

Teorema 1. $u(t)$ funksiya (5)-(6) ma'selenin' sheshimi bolıp, $f = 0$ bolsın. Onda to'mendegi interpoliation tiptegi ten'sizlik orinli

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|u(T)\|^{\frac{t}{T}} \quad (7)$$

Da'liyleniwi.

Meyli,

$$\varphi = (u, u)$$

bolsin.

Onda

$$\begin{aligned}\varphi' &= ((u, u))' = 2(u', u); \\ \varphi'' &= 2(u', u') + 2(u, u'') = 2(u', u') + 2(u, Au') = \\ &= 2(u', u') + 2(Au, u') = 2(u', u') + 2(u', u') = 4(u', u').\end{aligned}$$

Endi

$$\psi(t) = \ln \varphi(t)$$

dep alsaq, onda

$$\begin{aligned}\psi' &= \frac{\varphi'}{\varphi}; \\ \psi'' &= \frac{\varphi''\varphi - (\varphi')^2}{\varphi^2} = \frac{4(u', u')(u, u) - 4(u', u)^2}{(u, u)^2} \geq 0\end{aligned}$$

Koshi-Bunyakovskiy ten'sizligi boyinsha jaza alamiz.

Bunnan

$$\psi(t) \leq (\psi(0)) \cdot \frac{T-t}{T} + (\psi(T)) \cdot \frac{t}{T}$$

yag'nıy

$$\ln \varphi(t) \leq (\ln \varphi(0)) \cdot \frac{T-t}{T} + (\ln \varphi(T)) \cdot \frac{t}{T}$$

Bul ten'sizlikni potentsiallap

$$\varphi(t) \leq (\varphi(0))^{\frac{T-t}{T}} \cdot (\varphi(T))^{\frac{t}{T}}$$

yag'nıy

$$\|u\| \leq \|u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|u(T)\|^{\frac{t}{T}}$$

ten'sizligine iye bolamiz.

Usini da'liyllew talap etilgen edi.

Meyli,

$$M = \{u \mid \|u(T)\| \leq m\}$$

bolsin.

Teorema 2. (5)-(6) Koshi ma'selesini sheshimi M ko'plikte birden-bir ha'm baslang'ish berilgenlerge u'zliksiz bylanisli.

Da'liylleniwi. u_1 ha'm u_2 (5)-(6) Koshi ma'selesinin' eki sheshimi bolsin. Onda (7) ten'sizligi boyinsha

$$u = u_1 - u_2$$

funktsiyasi ushin

$$\|u\| \leq \|u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|u(T)\|^{\frac{t}{T}} = 0$$

$$(u(0)) = u_1(0) - u_2(0) = 0$$

Bunnan

$$u_1 - u_2 = 0$$

yag'niy

$$u_1 = u_2$$

ekeni kelip shıg'adı.

Endi

$$\|u_1 - u_2\| \leq \varepsilon$$

bolsın. Onda (7) ten'sizligi boyınsha

$$\|u\| \leq \|u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|u(T)\|^{\frac{t}{T}} \leq \varepsilon^{\frac{T-t}{T}} m^{\frac{t}{T}}$$

ekenligin tabamız.

Bul ten'sizlik $m < \infty$ bolg'anlıg'ı ushın berilgen ma'sele sheshiminin' ornıqlılıg'ın, yag'niy baslang'ısh berilgenlerge u'zliksiz baylanıslıg'ın ko'rsetedi.

Teorema da'liyllendi.

Endi bir tekli bolmag'an jag'day ushın Koshi ma'selesin ko'rip shıg'amız.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au + f & (8) \\ u(0) = 0 & (9) \end{cases}$$

bul jerde

$$f \neq 0.$$

Ulıwma aytqanda

$$u(0) = 0$$

dep alsaq boladı, sebebi eger

$$u(0) = g$$

funktsiyası ushın

$$\frac{dv}{dt} = Av + f$$

ha'm

$$v(0) = u(0) - g = g - g = 0$$

boladı.

To'mendegi teorema orınlı.

Teorema 3. $u(t)$ funktsiyası (8)-(9) ma'selesinin' sheshimi ha'm

$$s > 0$$

bolsa, onda

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq \frac{|(u(T), Au(T))|}{s} + \frac{e^{sT^2}}{s} \int_0^T \|f\|^2 dt$$

Bul teorema ma'sele sheshiminin' Karleman tu'rindagi bahasi dep ataladi.

Da'liylleniwi.

Meyli,

$$\varphi(t) = (T - t)^2$$

bolsin.

Onda

$$\varphi' = -2(T - t) < 0, \varphi''(t) = 2 > 1$$

Jan'a o'zgeriwshi kiritilip to'mendegini alamiz, yag'nuy

$$u = e^{-s\varphi} v$$

bolsin, bul jerde

$$s > 0$$

Onda

$$u' = e^{-s\varphi} (v' - s\varphi'v)$$

bolg'anlig'ı ushin

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{2s\varphi} \|f\|^2 dt &= \int_0^T e^{2s\varphi} \|u' - Au\|^2 dt = \int_0^T e^{2s\varphi} \|e^{-s\varphi} (v' - s\varphi'v) - Ae^{-s\varphi} v\|^2 dt = \\ &= \int_0^T \|v' - s\varphi'v - Av\|^2 dt = \int_0^T \|v\|^2 dt - 2 \int_0^T s\varphi(v', Av) dt + \int_0^T \|s\varphi'v'\|^2 dt - 2 \int_0^T (v', Av) dt \geq \\ &- 2 \int_0^T s\varphi'(v', v) dt - 2 \int_0^T (v', Av) dt = \int_0^T s\varphi''\|v\|^2 dt - s\varphi'\|v\|^2 \Big|_0^T - (v, Av) \Big|_0^T = \\ &- s \int_0^T \varphi''\|v\|^2 dt - s\varphi'(T)v(T)^2 - (v(T), Av(T)) \geq s \int_0^T \varphi''\|v\|^2 dt - (v(T), Av(T)) \end{aligned}$$

Bul jerden

$$s \int_0^T \varphi''\|v\|^2 dt \leq |(v(T))| + \int_0^T e^{2s\varphi} \|f\|^2 dt$$

Biraq,

$$v = e^{s\varphi} u$$

bolg'anı ushin

$$\begin{aligned} s \int_0^T e^{2s\varphi} \|u\|^2 dt &\leq e^{2s\varphi(T)} |(u(T), Au(T))| + \int_0^T e^{2s\varphi} \|f\|^2 dt \\ s \int_0^T \|u\|^2 dt &\leq |(u(T), Au(T))| + e^{sT^2} \int_0^T e^{2s\varphi} \|f\|^2 dt \end{aligned}$$

yag'nuy

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq \frac{|(u(T), Au(T))|}{s} + \frac{e^{sT^2}}{s} \int_0^T \|f\|^2 dt$$

Usını da'liyllew talap etilgen edi.

Teorema 4. $u(t)$ funktsiya (8)-(9) ma'selenin' sheshimi ha'm $f = 0$

bolsa, onda bul ma'selenin' sheshimi birden-bir.

Da'liylleniwi. u_1 ha'm u_2 (8)-(9) ma'selesinin' eki sheshimi bolsın.

Onda

$$u = u_1 - u_2$$

Usı ma'sele sheshimi boladı

$$\begin{cases} u' - Au = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Teorema 3 boyınsha

$$\int_0^T \|u\|^2 dt \leq \frac{|(u(T), Au(T))|}{s}$$

Son'g'ı ten'sizlikte

$$s \rightarrow \infty$$

dep alsaq, onda

$$\int_0^T \|u\|^2 dt = 0$$

yag'nıy

$$u = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Demek, ma'sele sheshimi birden-bir eken.

Teorema da'lillendi.

2-§. O'zgeriwshi-operatorlı birinshi ta'rtpi differentsial ten'leme

Meyli,

$$\frac{du}{dt} = A(t)u \quad (10)$$

ten'leme berilgen bolsın, bunda $u(t)$ funktsiya t skalyar argumenttin' funktsiyası bolıp, ol ma'nislerin Noqat-Gilbert ken'isliginde qabıllasın, $f(t)$ ha'm t skalyar argumenttin' bolıp, ol F – Gilbert ken'isliginde ma'nislerin qabıllasın. A-operator

$$A(t): H \rightarrow F$$

Teorema 5. Eger $A(t)$ operatorlar semayasi $[0, T]$ da u'zliksiz differentsiallawshi bolip,

$$\forall t \in [0, T] \quad \text{ham} \quad y \in X$$

ushin

$$[A'(t)y, y] \geq 2a(ay, y) + 2b(y, y)$$

ten'sizligi orinlasa, onda

$$\|u\| \leq \|u(T)\|^{\omega(t)} \|u(0)\|^{1-\omega(t)} c(t)$$

bul jerde

$$\omega(t) = \frac{1 - e^{-at}}{1 - e^{-aT}};$$

$$c(t) = \exp\left(\frac{b(1 - e^{-at})T - (1 - e^{-aT})t}{1 - e^{-aT}}\right)$$

Da'lilleniwi. Aldin to'mendegi lemmani da'lilleyimiz.

Lemma 1. Tuth $\alpha(t) \in C^2[0, T]$ ushin

$$\alpha''(t) + a\alpha'(t) + b \geq 0,$$

(bul jerde $a=\text{const}$, $b=\text{const}$) bolsa, onda

$$\alpha(t) \leq (1 - \omega(t))\alpha(0) + \omega(t)\alpha(T) + c(t)$$

ten'sizligi orinli boladi.

Lemmani da'lilleyimiz.

$\beta(t)$ arqali

$$\beta''(t) + a\beta'(t) + b = 0 \quad (11)$$

ten'lemenin'

$$\beta(0) = \alpha(0), \quad \beta(T) = \alpha(T)$$

sha'rtlerini qanaatlandiraturg'in sheshimi bolsin. Onda $\forall t \in [0, T]$ ushin

$$\alpha(t) \leq \beta(t)$$

boladi.

(11) ten'lemenin' sheshimi

$$\beta(t) = C_1 + C_2 e^{-at} - \frac{b}{a}t$$

bolip tabiladi.

$$\beta(0) = \alpha(0), \quad \beta(T) = \alpha(T)$$

sha'rtlerden

$$C_1 = \frac{\alpha(t) - \alpha(0)e^{-aT} + \frac{b}{a}t}{1 - e^{-aT}}; \quad C_2 = \frac{\alpha(0) - \alpha(T) - \frac{b}{a}T}{1 - e^{-aT}};$$

Demek

$$\beta(t) = \omega(t)\alpha(t) + (1 - \omega(t))\alpha(0) + c(t),$$

yag'niy

$$\alpha(t) \leq \omega(t)\alpha(t) + (1 - \omega(t))\alpha(0) + c(t)$$

Endi teoremani da'lilleyimiz.

$$\varphi = (u, u)$$

bolsin.

Onda

$$\begin{aligned}\varphi' &= ((u, u))' = (u', u) = 2(Au, u) = 2((A^* + a)u, u); \\ \varphi'' &= 2(u', u) + 2(u, u'') = 2(u', u') + 2(u, uAu') = \\ &= 2((A^* + A)u, (A^* + A)u) + 2(A'u, u).\end{aligned}$$

Endi

$$\psi(t) = \ln \varphi(t)$$

dep alsaq,
onda

$$\begin{aligned}\psi' &= \frac{\varphi'}{\varphi}; \\ \psi'' &= \frac{\varphi''\varphi - (\varphi')^2}{\varphi^2} = \\ &= \frac{((A + A^*)u, (A + A^*)u)(u, u) - ((A + A^*)u, u)^2}{\varphi^2} \geq \\ &\geq \frac{(A'u, u)}{(u, u)} \geq -a\psi'(t) - b\end{aligned}$$

yag'niy

$$\psi''(t) + a\psi'(t) + b \geq 0$$

Bul jerlen lemma boyınsha

$$\|u\| \leq \|u(T)\|^{\omega(t)} \|u(0)\|^{1-\omega(t)} c(t)$$

ekenligin tabamiz.

3-§ Regularizatsiya metodi menen juwıq sheshimdi tabıw.

Regularizatsiya metodi akademik A. N. Tixonov tarepinen kiritilgen.

Meyli, Adamar boyınsha qandayda bir korrekt emes qoyılǵ'an matematikalıq fizika maselesi berilgen bolsın.

Anıqlama 7.

Eger A) qa'legen $\alpha > 0$ de maseleler semyası korrekt qoyılǵ'an.

B) ger mag'lıwmat sonday etip berilip, korrekt emes masele sheshimi bar bolsa, onda $\alpha \rightarrow 0$ da maseleler semyası sheshimler izbe-izligi berilgen masele sheshimine jaqınlassa, onda maseleler semyası berilgen maselege qarata regularizatsiyalawshı semya dep ataladı. Ko'binese, α sıpatında natural sanlarda alınıu mu'mkin.

$$Ax = f, \quad x \in X, \quad f \in F,$$

bul jerde

X, F – banax kenislikleri, A–uziliksiz operator bolsın.

B_n -sızıqlı operatorlar semyasın ko'rip shıǵ'amız.

$$B_n \div F \rightarrow X$$

Анıqlаmа 3. Еger А) qаlegen $n \geq 0$ de, B_n -u'ziliksiz,

B qаlegen $x \in X$ ushın

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n Ax = x$$

bolsа, оndа $\{B_n\}$ operatorlar semyası.

$$Ax = f$$

ten'lemeѕi ushın regularizatsiyalawshı semya dep ataladı.

$$\frac{du}{dt} = Au \quad (12)$$

ten'leme berilip bolıp, оndа $-A$ - simmetriyalı x 'm noqatlı spektrge iye bolsın, yagnıy

A -operatordın' ortonormallastırılǵ'an

$$\{\varphi_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

menshikli funktsiyalar sisteması x 'm menshikli ma'nisleri

$$\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

bar boladı.

(bul jerde λ_k o'siw ta'rtibinde jaylasqan bolsın.)

Bul sha'rtlerde

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k \varphi_k, u_k = (u, \varphi_k), k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty$$

(13 ten'lemeden)

$$\frac{du_k}{dt} = \lambda_k u_k(t), k = -\infty, \dots, 0, \dots, \infty$$

Baslang'ısh sha'rtten

$$u(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(0) \varphi_k, u_k(0) = (u(0), \varphi_k)$$

Demek,

$$u_k(t) = u_k(0) e^{\lambda_k t}$$

Eger $|\lambda_k| \leq C$ bolsa, оndа ten'leme ushın Koshi maselesi korrekt boladı.

$$\|u(t)\| \leq e^{\lambda t} \|u(0)\|$$

Eger $\{\lambda_k\}$ izbe-izligi joqaridan shegaralanbag'an bolsa, onda Koshi maselesi korrekt emes boladı, yag'nıy qalegen

$$\varepsilon > 0, t > 0, \mu > 0$$

ushın

$$\|u(0)\| \leq \varepsilon$$

bolıp,

$$\|u(t)\| \geq \mu$$

boladı.

Eger $B_n(t)$ arqalı to'mendegi formula menen aniqlang'an

$$B_n(t)u_0 = \sum_{k=-\infty}^n e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k$$

Operatorlar izbe-izligin alsaq, ol (12) tenlemege qoyılǵ'an Koshi ma'selesı ushın regularizatsiyalawshı operatorlar semyası bolıp, tabıladı.

Dalilleniwi

$$A) B_n(t)u_0 = \sum_{k=-\infty}^n e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k \text{ -uzliksiz operatorlar,}$$

V)

$$\|u - B_n(t)u_0\| = \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k - \sum_{k=-\infty}^n e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{\lambda_k t} u_k(0) \varphi_k \right\| \rightarrow 0$$

Mısal.

$$\text{Meyli, } D = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \pi\} \text{ oblastta}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \\ u(x,0) = \frac{1}{n} \sin nx \end{cases}$$

aralas ma'selesı berilgen bolsın.

Bul ten'lemenin' sheshimi

$$u(x,t) = \frac{1}{n} \sin nx e^{-n^2 t}$$

ekenligin tabamız.

Tekseriw.

$$u_t = \frac{1}{n} \sin nx \cdot n^2 e^{n^2 t} = n \sin nxe^{n^2 t}; \quad u_{xx} = -n \sin nxe^{n^2 t};$$

$$u_t + u_{xx} = 0$$

Bizge belgili, $\forall \varepsilon > 0, C \geq 0$ sanları ushın sonday n tabılıp, onda barlıq $t \geq 0$ ushın to'mendegi tensizlikler orınlı

$$\|u(x, 0)\| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$\|u(x, t)\| = \frac{1}{n} e^{n^2 T} > C$$

yag'nıy bul ma'sele korrekt emes qoyılǵ'an eken. Sonın' ushın bul ma'sele Tixonov boyınsha korrektlikke izertlenedi.

Bul jerde A operator to'mendegishe anıqlanadı.

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0$$

A operatorı simmetriyalı ekenligin da'lilleyimiz.

$$(Au, v) = -\int_0^\pi u_{xx} v dx = -u_x v \Big|_0^\pi + \int_0^\pi u_x v_x dx = \int_0^\pi u_x v_x dx$$

$$= u x_x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi u v_{xx} dx = -\int_0^\pi u v_{xx} dx = (u, Av)$$

yag'nıy

$$A^* = A$$

Meyli,

$$\varphi(t) = \int_0^\pi u^2 dx$$

bolsın.

Onda

$$\varphi'(t) = 2 \int_0^\pi u u_t dx, \quad \varphi''(t) = 2 \int_0^\pi u_t^2 dx + 2 \int_0^\pi u u_{tt} dx$$

Biraq

$$2 \int_0^\pi u u_{tt} dx = -2 \int_0^\pi u u_{xx} dx = -2 \int_0^\pi u_t u_{xt} dx = 2 \int_0^\pi u_t^2 dx$$

Demek,

$$\varphi'(t) = 4 \int_0^\pi u_t^2 dx$$

Endi

$$\psi(t) = \ln \varphi(t)$$

bolsın.

$$\psi'(t) = \frac{\varphi'}{\varphi}; \psi''(t) = \frac{\varphi'' \cdot \varphi - (\varphi')^2}{\varphi^2} =$$

$$\frac{4 \int_0^\pi u'^2 dx \cdot \int_0^\pi u^2 dx - 4 \left(\int_0^\pi u' u dx \right)^2}{\left(\int_0^\pi u^2 dx \right)^2} \geq 0$$

Bul jerden

$$\psi(t) \leq \psi(0) \frac{T-t}{T} + \psi(T) \frac{t}{T}$$

yag'niy

$$\int_0^\pi u^2 dx \leq \left(\int_0^\pi u^2(x,0) dx \right)^{\frac{T-t}{T}} \left(\int_0^\pi u^2(x,T) dx \right)^{\frac{t}{T}}$$

Demek, to'mendegi teorema orinli.

Teorema 7. Meyli,

$$\int_0^\pi u^2(x,0) dx \leq \varepsilon, \int_0^\pi u^2(x,T) dx \leq m$$

bolsın.

Onda

$$\int_0^\pi u^2 dx \leq \varepsilon^{\frac{T-t}{T}} m^{\frac{t}{T}}$$

Bul teoremadan berilgen ma'sele sheshiminin' birden-birligi ham ornıqlılıg'ı kelip shıg'adı.

III-bap. Ekinshi ta'rtpi differentsial operator ten'lemeler.

1- §. Ekinshi ta'rtpi differentsial operator ten'lemeler ushin Koshi ma'selesı.

Meyli, $u(t)$ funksiya t skalyar argumentin' funksiya bolip, ol ma'selerin H-Gilbert ken'isliginde qabillasın, $f(t)$ ha'm t skalyar argumentin' funksiya bolip, ol F-Gilbert ken'isliginde ma'nislerin qabillasın.

A-operator

$$A: H \rightarrow F.$$

Aniqlama 6. $\frac{d^2 u}{dt^2} = Au + f$ ko'rinisdeg operator tip koeffitsientli ten'leme ekinshi ta'rtipli differentsial-operator ten'leme dep ataladi.

Usi Koshi ma'selesin qaraymiz

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = Au \\ u'(0) = u_1, u(0) = u_0 \end{cases} \quad (14)$$

$$(15)$$

Bul jerde biz A-operator simmetiyali ha'm on' operator dep esaplaymiz, yag'niy qa'legen $u, v \in D(A)$ ushin $(Au, v) = (u, Av); (Au, u) \geq 0$.

Aniqlama 7. Eger $u(t): [0, T] \rightarrow H$ funktsiyasi to'mendegi sha'rtlerdi qanaatlandirsa, yag'niy

$$A) 0 \leq t \leq T \text{ da } u \in C^2 [0, T], \quad u_1, u \in D(A), f \in D(A); \quad B)$$

$0 \leq t \leq T$ da u_1 , aniqlang'an;

C) $\forall t \in [0, T]$ da $u(t)$ funktsiya (14)-(15) ten'lemeni qanaatlandirsa, onda ol (14)-(15) Koshi ma'selesinin' sheshimi dep ataladi.

(14)-(15) Koshi ma'sele, uliwma alg'anda, korrekt emes qoyilg'an.

Teorema 2. $U(t)$ funktsiya (14)-(15) ma'selenin' sheshimi bolsa, onda to'mendegi interpolatsion tiptegi ten'sizlik orinli

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 &\leq \exp(2t(T-t))(\|u(0)\|^2 + |a|)^{\frac{T-t}{T}} (\|u(T)\|^2 + |a|)^{\frac{t}{T}} - |a| \\ a &= \frac{1}{2} ((Au(0), u(0)) - (u'(0), u'(0))) \end{aligned} \quad (16)$$

Da'lilleniwi.

Meyli,

$$\varphi = (u, u)$$

boisin.

Onda

$$\begin{aligned} \varphi' &= ((u, u))' = 2(u', u); \\ \varphi'' &= 2(u', u)' = 2(u', u') + 2(u, Au) \end{aligned}$$

Sonin' ushin

$$\varphi''(t) = 4(u', u') + 4a.$$

Endi

$$\psi(t) = \ln(\varphi(t) + |a|)$$

dep alsaq

$$\psi' = \frac{\varphi'}{\varphi};$$

$$\psi'' = \frac{\psi''(\cdot\varphi + |a|) - (\varphi')^2}{(\varphi + |a|)^2} \geq -4$$

-Koshi-Bunyakovskiy ten'sizligi boyinsha.

Bul jerden

$$\psi(t) \leq (\psi(0)) \cdot \frac{T-t}{T} + \psi(T) \cdot \frac{t}{T} + 2t(T-t),$$

yag'niy

$$\ln \varphi(t) \leq (\ln(\varphi(0) + |a|)) \cdot \frac{T-t}{T} + \ln(\varphi(T) + |a|) \cdot \frac{t}{T} + \ln(\exp(2t(T-t)))$$

Bul ten'sizlikni potentsiyallap

$$\|u(t)\|^2 \leq \exp(2t(T-t))(\|u(0)\|^2 + |a|)^{1-\frac{T-t}{T}} (\|u(T)\|^2 + |a|)^{\frac{t}{T}} - |a|$$

ten'sizligine iye bolamiz.

2-§ . Ekinshi ta'rtpili barliq koefitsientleri operator bolg'an ten'leme ushin qoyilg'an Koshi ma'selesi.

Usi Koshi qaraymiz

$$\begin{cases} B \frac{d^2 u}{dt^2} = Au \\ u(0) = u_1, u(T) = u_0 \end{cases} \quad (17)$$

$$u(0) = u_1, u(T) = u_0 \quad (18)$$

Teorema 8.

Eger $\forall u \in D(A)$ usin $A = A^*, (Au, u) \geq \lambda(u, u), B = B^*, \exists B^{-1}$ bolsa, onda (17)-(18) ma'sele sheshimi ushin to'mendegi ten'sizlik orinli

$$\|u(t)\|^2 \leq \exp(2t(T-t))(\|u(0)\|^2 + |a|)^{1-\frac{T-t}{T}} (\|u(T)\|^2 + |a|)^{\frac{t}{T}} - |a|$$

$$a = \frac{1}{2}((Au(0), B^{-1}A(0)) - (Au'(0), u'(0))) \quad (19)$$

Da'llileniwi.

Meyli,

$$\varphi = (Au, u)$$

bolsin.

Onda

$$\varphi' = ((u, u))' = 2(Au', u);$$

$$\varphi'' = 2(Au', u') + (u, Au'') = 2(Au', u') + 2(Au, B^{-1}Au)$$

Biraq,

$$\frac{d}{dt}(Au'', u') + 2(Au', u'') = (B^{-1}Au, Au) + (Au', B^{-1}Au) = \frac{d}{dt}(Au, B^{-1}Au).$$

Sonin' ushin

$$\varphi''(t) = 4(u', u') + 4a.$$

Bul jerde

$$a = \frac{1}{2}((Au(0), B^{-1}A(0)) - (Au'(0), u'(0)))$$

Endi

$$\psi(t) = \ln(\varphi(t) + |a|)$$

dep alsaq

onda

$$\begin{aligned}\psi' &= \frac{\varphi'}{\varphi}; \\ \psi'' &= \frac{\psi''(\varphi + |a|) - (\varphi')^2}{(\varphi + |a|)^2} \geq -4\end{aligned}$$

-Koshi-Bunyakovskiy ten'sizligi boyinsha.

Bul jerden

$$\psi(t) \leq (\psi(0)) \cdot \frac{T-t}{T} + (T) \cdot \frac{t}{T} + 2t(T-t),$$

yag'niy

$$\ln \varphi(t) \leq (\ln \varphi(0) + |a|) \cdot \frac{T-t}{T} + (\ln \varphi(T) + |a|) \cdot \frac{t}{T} + 2t(T-t)$$

Bul ten'sizlikni potentsyallap

$$\|u(t)\|^2 \leq \exp(2t(T-t))(\|u(0)\|^2 + |a|)^{1-\frac{T-t}{T}}(\|u(T)\|^2 + |a|)^{\frac{T-t}{T}} - |a|,$$

ten'sizligine iye bolamiz.

Misal.

Meyli, $Q = \{(-1 < x < 1) \times (0, T)\}$ oblsta aralas ten'lemege qoyilg'an to'mendegi shegaraliq ma'seleni qaraymiz

$$\begin{cases} \operatorname{sign} x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(0, x) = f(x), u_1(0, x) = g(x), -1 \leq x \leq 1 \\ u(t, -1) = u(t, 1) = 0, 0 \leq t \leq T \\ u(t, -0) = u(t, +0), u_x(t, -0) = u_x(t, +0). \end{cases}$$

Bul jerde $H = L_2(-1, 1)$, al A operator bolsa to'mendegishe aniqlanadi:

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u|_{x=-1} = u|_{x=1} = 0.$$

В оператор retinde signx funktsiyasina ko'beytiwdi qaraymiz.

Teorema boyinsha bul ma'selenin' sheshimi birden-bir ha'm orniqlili.

A'debiyatlar.

1. Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973б 72 с.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.:Наука, 1980, 285 с.
3. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. М.: Наука, 1991, 331 с.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979, 285 с.
5. Фаязов К.С. Хисоблаш математикаси, математик физика ва анализнинг нокоррект масалаларини ечиш усуллари. Тошкент, 2001, 130 б.
6. Alaminov M.X. О единственности и устойчивости решения задачи Коши для вырождающегося дифференциального неравенства четного порядка. Узбекский математический журнал, 2000 г., № 2, с.3-13.
7. Alaminov M.X. Задача Коши для операторно-дифференциального уравнения высокого порядка. Вестник ККО АН РУз., 2002 г., N1- 2, с.54-57.
8. Fayazov K.S., Alaminov M.X. III- posed Cauchy Problem for higher order Differential Equations wiyh Operator type coefficients// Second World Conference on Intelligent System for Industrial Automation, Proceedings. Uzbekistan. Tashkent. 2002, June, 4-5, s.100-104.