

Бердақ номидаги Қорақалпоқ давлат университети

Математика факультети

«Амалий математика ва информатика» кафедраси

3-курс талабалари учун

Ҳисоблаш эксперименти технологиялари фанидан

МАЪРУЗА МАТНИ

Тузган:

асс. Ш.Тажибоев

асс. Р.Шыхыев

Нукус 2007

1- Маъруза(2соат).

Мавзу: Кириш. Математик моделлаштириш ва ҳисоблаш эксперименти.

Таянч сузлар:(математик модел, ҳисоблаш эксперименти, физик моделлар)

Фан ва техникада аввалдан реалъ объектларнинг моделлари, ҳодисаларни моделлаштириш илмий гипотезаларни текшириш ва экспериментал материаллар олиш учун кулланилиб келмокда. Бунга мисол тариқасида авиасозлик соҳасини олиш мумкин. Бу ерда янги машина яратишда конструкторлик ва проектлик ишларнинг аҳамиятли элементларидан бири сифатида унинг шаклини танлаш, аэродинамик тавсифини оптималлаштиришни курсатиш мумкин. Бу буйича якуний назарий ишлар йук булиб, уни экспериментал тадқиқотлар билан тулдиришга тугри келади. Аммо, ҳақиқий самолетлар билан тажриба утказиш мақсадга тугри келмайди, чунки бундай тажриба қимматга тучиши ва учувчи учун хавфли булиши аниқ. Мана шундай ҳолларда бизга моделлар ердам беради. Ҳақиқий самолет ва унинг кичик нусхаси ҳаво оқидамида бир хил аэродинамик қонунларга буйсинади. Шу сабабдан бу физик моделни урганиш орқали ҳақиқий самолетнинг аэродинамик сифатларини ҳисоблаб топилади.

Шундай қилиб модель бу ғакат ташки томаннан объектга ухшашлик эмас, унинг асосий хоссаларини узида мужассамлантирувчи ва ҳаракати буйича объект билан бир хил қонунларга буйсинувчи воситадир. Бу модельга объектнинг физик модели дейилади. Физик модел тузиш ердамида объектнинг еки жараеннинг хоссаларини урганишни физик моделлаштириш дейилади. Асосан физик моделлаштириш ҳам физик тажрибаларни утказишни такозо қилади ва бундай тажрибалар утказишнинг узи қийин булиб қоладиган ҳоллар учрайди. Масалан мураккаб жараенлар устида физик тажриба утказиш учун қиммат асбоб-ускуналар керак булиши еки тажриба утказишга шароит етишмаслиги мумкин. Бундай ҳолларда шу физик жараенларнинг математика тилида езилган моделларини урганиш мақсадга қупрок тугри келади. Асосан физик жараенларнинг математик моделлари математик масалалар қуринишинда берилган булиб, бу масалалар тенгламалар (функционал, дифференциал ва интеграл тенгламалар) қуринишинда берилган булиб уларни тузиш ва ечиш жараенини математик моделлаштириш деб атаймиз. Бу тенгламалар физик қонунларнинг(моддаларнинг сақланиш қонуни, энергия сақланиш қонуни ва х.) математика тилида езилишидан келиб чиқади. Математик моделлаштиришни яхши тучунтириш учун қуйидаги мисолни қурайлик.

Маълум баландликтан ерга ташланган тошнинг ҳаракати моделини қурайлик. Тошнинг ерга тушиш сабабининг илмий асосини инглиз олими И. Ньютон илк бор узининг бутун дуне тортилиш қонунин очиш натижасида курсатиб берган. У қонун қуйидагича езилади

$$F = G (mM_3)/ R^2$$

бу ердаю m ва M тош ва Ер массалари, R -тортилувчи жисмлар орасидаги масофа, G - доимий.

Агар биз тош устидаги тажрибамизни Ер бетига якин баландликларда утказсак у холда $R=R_3$. Агар тошга куч таъсир килса у холда унинг харакати Ньютоннинг иккинчи конуни буйича тасвирланади

$$ma = F$$

Бу ерда m - тош массаси. Тошнинг ерга тушишини курсатувчи физик ходисанинг содда математик моделини ушбу икки конун тулик аниқлайди. Уни олиш учун икки формулани тенглаштирамиз

$$ma = G (mM_3) / R_3^2,$$

яъни ҳамма жисмлар бир хил тезланиш билан ерга тушар экан

$$a = G M_3 / R_3^2, \quad (1)$$

ва уни жисм огирлик кучининг тезланиши дейилади ва g деб белгиланади. Унинг экспериментдан олинган киймати - 980 см/сек. (1) тенглама жисмнинг ерга кулаб тушишининг содда математик модели булиб хисобланади. Аниқлик учун математик моделга кушимча шартлар киритилади, яъни баландлик микдори H ва бошлангиш тезлик v_0 берилиши керак. Бу ерда тошга куч тасир килмагани учун $v_0 = 0$. Математик модел тузилди уни ечиб жисмларнинг тушиши хакида тулик маълумот олса булади. Бу харакат бир текис тезланувчан харакат булиб, хоклаган t вақт учун баландлик h ни ва тезлик v ни курсатиш мумкин:

$$h(t) = H - gt^2 / 2, \quad v = gt. \quad (2)$$

Лаборатория тажрибалари ушбу математик моделнинг тугрилигини тасдиқлайди. Бундан ушбу математик моделнинг хоклаган жисмнинг тушишини тулик акслантирадими деган савол тугилиши табиий. Унинг учун иккита физик ходисадан мисол келтирайлик. Агар биз япрокнинг тушиши ва парашют билан тушаётган адами кузатсак бу моделга тугри келмаслигини курамиз. Чунки улар доимий тезлик билан ерга тушади. Демак берилган моделимиз барча ходисаларни уз ичига ола алмайди, бу дегани модел универсал эмас. Бу ерда хавонинг каршилиги хисобга олинмаган, Агар ҳамма ходисаларни уз ичига оладиган математик моделни тузган билан у мураккаб булиб уни еча олмаслигимиз мумкин. Лекин хаетга бунака мураккаб моделларни ечишга зарурат тугула бермайди. Чунки купчилик факторлар ахамиятга эга эмас булиб, бирнечта асосий микдорлар билан иш куриш мумкин. Шунинг учун математик модел тузиш пайтида кайси факторлар асосий, кайсилари иккинчи даражали эканлигини ажратиш мухим ахамият касб этади. Юкорида каралган моделимизда хавонинг каршилигини хисобга олмаса булади, унинг таъсири моделга жуда кам, шунинг учун моделимиз лабораторик экспериментларга мос келди. Яна шуни айтиш керакки математик модел тузишда баъзи шартларнинг бажарилиши талаб килинади. Шундай килиб

хулоса килиб айтганимизда математик модел тузиш бу унинг факат тенгламасини езиш эмас, яна шу моделнинг кулланилиш чегарасини аниқлави шартларни ҳам аниқлашни такоза этади.

Математик моделлар тузиш ердамида реалъ физик ходисаларни урганиш, яъни математик масалаларга олиб келиб ечиш ЭХМ лар пайдо булиши билан кескин ривожланди. Натижада амалий математика фанида хисоблаш эксперименти тушунчаси файда булди ва у купгина амалий масалаларни ечишда асосий урин тутди. Хисоблаш экспериментининг таркиби куйидагидан иборат:

1. Математик модел тузиш.
2. Математик масалани ечишнинг сонли усулларни келтириб чикариш еки танлаш.
3. Масалани ечишнинг алгоритмини программалаштириш.
4. ЭХМ да хисоблашлар утказиш.
5. Олинган натижаларни тажриба натижалари билан таккослаш ва моделга тузатиш киритиб хисоблашларни янгидан бошлаш.

Хисоблаш экспериментининг мураккаб физик, техник ва илим-фаннинг бошка сохалариндаги мураккаб масаларни ечишда кумаги катта. Чунки реал экспериментларни утказиш молиявий еки техник жихатлардан мумкин булмаган пайтта хисоблаш экспериментини утказиш мумкин ва у куп харажатни талаб этмайди.

2-Маъруза (2 соат).

Мавзу: Физиканинг чизикли математик моделларини тадқиқод килиш.

Таянч сузлар: (математик модел, физик модел, газлар динамикаси, кучиш тенгламаси, Коши масаласи)

Физикада чизикли ва чизикли эмас жараенлар.

Физикада унинг кадимги усуллар аввалдан кенг кулланилиб келмокда. Уз навбатида физика математикани янги куйилган масалалар билан таъминлаб турди ва бу масалалар математиканинг ривожланишига ижобий таъсир курсатиб унда янги йуналишларни келтириб чикарди. Купчилик машхур физиклар математикани ҳам яхши билдилар, шунинг учун уларнинг номлари физик ва математик адабиетларда баровар келтирилади. Мана шундай олимлар ердамида математик моделлаштириш фани ривожланди ва физикада татбики мустахкамланиб борди. Бунга классик мисол тарикасида француз астрономи У. Леверье томонидан 1846-йили Нептун планетасининг очилишини курсатиш мумкин. Янгилик математик хисоблашлар натижасида яратилди. Кейинчалик унинг хисоблашлари буйича янги планета олмон олими Галле томонидан курсатилди.

Энди биз математика билан физика фанлари кушилишидан фойда булган фан математик физика фани моделларини урганишни караймиз. Ушбу фан мисолида математик

узулларнинг физикада кулланилиши яккол куринади. Аввалдан маълум ҳар қандай физик ҳодисалар ва жараёнларни урганиш унинг содда чизикли моделини урганишдан бошланади. Чунки чизикли моделларни урганиш осон бўлиб, бундай моделлар ердамида жараённинг эки объектнинг ҳаракатини, аҳолини қузатиш натижаларини олдиннан айтиш мумкинчилигига эга бўламиз. Яъни чизикли моделлар ҳатти ҳаракати натижалари олдиннан маълум, бу унинг хусусиятидан келиб чиқади. Лекин ҳар қандай мураккаб жараёнларни чизикли моделлар ердамида урганиш тула маълумот олишга мумкинчилик бермайди. Фақат биз объектнинг, жараённинг асосий хоссаларини урганишга мувофиқ бўламиз. Яъни чизикли моделлар объект ҳақида дастлабки маълумотларни олишга мумкинчилик беради. Агар объект ҳақида тула тасаввурга эга бўлиш учун, унинг чизикли эмас моделларини урганишга тугри келади. Мисол тарикасида қуйидаги математик моделни курайлик.

Газлар динамикасида содда математик модел тарикасида газларнинг чизикли қучиш тенгламасини қурсатиш мумкин бу ерда $u(x, t)$ функцияси t вақтдаги x нуқтадаги амплитуда микдорини аниқлайди, а-мусбат доимий тебраниш тезлиги маъносини англатади. Тебраниш сабаблари бошланғиш микдорга боғлиқ бўлади:

$$t=0; u(x, 0)=u_0(x). \quad (1)$$

Бошланғиш амплитуда қуйидаги шаклга эга бўлсин. Тенгламанинг ечимини $-\infty < x < \infty$ оралигида қараймиз. У ҳолда Коши масаласига эга бўламиз ва унинг ечими осон тузилади:

$$u(x, t)=u_0(x-at)$$

Бундан қурииб турипти бошланғиш амплитуда қиймати узининг шаклини узгартирмасдан фазо бўйлаб а тезлик билан тарқалар экан ва шу сабабдан (1) тенглама тарқалиш тенгламаси деб аталган. Бундай содда ечимнинг тузилиши тенгламанинг чизикли бўлишидан келиб чиқади.

Энди тенгламанинг қурилишини узгартирайлик

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

ва тенглама чизикли эмас тенгламага айланди. Лекин ечимди аввалгидек тузса бўлади

$$u(x, t)=u_0(x-u(x, t)t)$$

Лекин бу ерда тезлик ролини а нинг урнини u ечим алмаштиради, шу сабабдан бошланғиш амплитуданинг фазо бўйлаб тарқалиши чизикли ҳолдагидай ҳамма жойда бир хил шаклга эга бўлмайди, агар $u(x, t)$ катта қийматларга эга бўлса шунга мос профилнинг нуқталари тезроқ ҳаракат қилади, қиёқ қийматларида эса бундай нуқталар секин ҳаракатланади. Натижада профилнинг устки томони тезроқ ҳаракатланиши натижасида профил узғариб қийшайиб қолади. Ечимнинг профили $t=u$ бўлганда қийшайиб бир нуқтада ечимнинг учта қиймати пайдо бўлди. Физика, механика, радиотехника масалаларида бундай ҳоллар абсурд

булиб хакикатга тугри келмайди, чунки физик микдорлар масалан газнинг зичлиги бир нуктада бир неча кийматга эга булиши мумкин эмас. Шунинг учун бундай холларда физикада узилиш ходисаси юз берди дейилади. Бу асосан чизикли эмас масалаларгатаъаллукли булиб, силлик ечимлардан вақт утиши билан узилишга эга ечимлар пайдо булади. 2-расмдаги тасвир денгиз тулкинла рининг киргокка урилишини эслатади. Киргокка якинлаган сари чуқурлик пасайиб, тулкинларнинг пастки кисми тезлиги юкарги кисмидан аркода колганлиги сабабли киргокка тулкинларнинг устки кисми келиб урилади.

Чизикли моделларни урганишни асонлаштирувчи муҳим хоссаларидан бири суперпозиция принципи булиб хисобланади. Яъни ечимлар йигиндиси яна ечим булади ва ечимни бирор сонга купайтсак у ҳам ечим булади. Бу хосса чизикли моделларнинг умумий ечимини яхши урганилган хусусий ечимлар йигиндиси сифатида топишга ижозат беради.

Чизикли эмас моделлар учун бу принцип ишламайди, шу сабабдан чизикли холдаги ечимларни тузиш усулларини бу ерда куллаб булмайди.

Шундай килиб чизикли эмас масалалар урганиш ва ечишда катта кийинчиликлар тугдириши мумкин. Аналитик усуллар эса бу ерда иш бермайди. Аналитик усуллар билан охиригача ечилган чизикли эмас масалаларни бармок билан санаб курсатса булади, улар жуда кам. Шунинг учун бундай масалаларни ечишга хисоблаш усулларини кулланиш мумкин. Иккинчи томоннан хозирги замон фан ва техника масалалари асосан чизикли эмас масалалардан тошкил топган. Демак бу масалаларни ечишда фақат хисоблаш экспериментин кулланиш натижасида ижобий натижа олиш мумкинлигига яна бир исбот. Бунга яна бир далил келтириш мумкин. Олдинлари конструкторлар томонидан янги машиналар лойихасини куришда олдинги машиналар параметрларини хисобга олган холда уларни озгина узгартириш натижасида лойиха тузиш усули мавжуд эди. Чунки параметрлар кийматини озгина узгартириш чизикли эмас моделлар тавсифига унчалик таъсир курсатмайди. Лекин параметрларга етарли фарк килувчи узгартиришлар киритилганда бу усулни куллаб булмайди ва бундай холларда математик моделлаштириш ва хисоблаш экспериментсиз янги лойихалар куриш нихоятда кийин булади.

Чизикли эмас моделларни урганиш учун аввал чизикли моделларни урганишдан бошлаш керак. Шунинг учун чизикли моделларни урганишни математик физиканинг муҳим тенгламаларининг бири исиклик таркалиш тенгламасидан бошлаймиз. Бу тенглама исиклик таркалишини, магнит майдоннинг плазмасига сингишини, ядро реакторида нейтронларнинг хатти-харакатини тасвирлайди.

Икки томонидан исиклик утказмаслик учун бекитилган, доимий узунликдаги ва доимий зичликка эга стерженни карайлик. Бизни агар шу стерженни нотекис киздирганимизда, унинг хар бир нуктасидаги температура кизиктиради. Унинг хар

бирнуктасига координатаси x -ни мос келтирайлик. Вакт бирлигидаги шу нуктадаги температурани $T(x, y)$ функцияси билан таърифлаш мумкин.

Стерженнинг Dx узунликдаги кичкина булагини олиб, шу булакда Dt вақт ичида энергия узгаришини курайлик. Агар стерженнинг узунлик бирлигидаги иссиқлик сизимлигининг C десак, у ҳолда шу булакда энергия $E = C \cdot T \cdot \Delta x$

Бундан Δt вақтда энергиянинг узгаришини топамиз

$$\Delta E = [cT(x, t + \Delta t) - cT(x, t)] \Delta x \quad (3)$$

Энергия иккинчи томондан булақларнинг четки томонларидан оқиб ўтувчи иссиқлик оқими айирмаси билан ҳам ўлчанади.

$$\Delta E = [W(x - \Delta x/2, t) - W(x + \Delta x/2, t)] / \Delta x$$

бу ерда $W(x, t)$ - t вақтда x нукта кесимидан оқиб ўтувчи иссиқлик миқдори. Оқим Фурье қонуни бўйича температурага боғлиқ бўлади.

$$W(x, t) = -ks[T(x + \Delta x/2, t) - T(x - \Delta x/2, t)] / \Delta x$$

Δt ва Δx ларни нолга интилдирамиз ва қуйидаги белгилашлар киритамиз:

$$T_t'(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(x, t + \Delta t) - T(x, t)}{\Delta x}$$

$$T_x'(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T(x + \Delta x, t) - T(x, t)}{\Delta x}$$

$$T_{xx}''(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{T_x(x + \Delta x, t) - T_x(x, t)}{\Delta x}$$

(x, t) нукта учун айtilган бу фикрларни бошқа нукталар учун ҳам уринли деб иссиқлик тарқалиш тенгламасига келамиз.

$$T_t' = a T_{xx}'' \quad , \quad a = ks/c \quad (4)$$

t -вақтда температурани аниқлаш учун унинг бошланғич қийматини билиш керак, яъни бошланғич шартни бериш керак

$$T(x, 0) = T^0(x)$$

Яна стерженнинг ўчлари иссиқлик ўтказмаслигининг ҳисобга олсак чегаравий шартлар келиб чиқади ва масала тулиқ ҳолда қуйидаги қуринишда ёзилади:

$$T_t' = a T_{xx}''$$

$$T(x, 0)=T^0(x) \quad , \quad 0 < x < 1, \quad (5)$$

$$T_x(0, t)=T_x(1, t)=0$$

Агар $T(x, t)$ (5) масаланинг $T^0(x)$ бошлангиш профилдаги ечими ва $T_2(x, t)$ унинг $T_2^0(x)$ бошлангиш профилдаги ечими булса у холда $T_3(x, t)=T_1(x, t)+T_2(x, t)$ функцияси ҳам ечим булиб, унинг бошлангиш профили $T_3^0(x)=T_1^0(x)+T_2^0(x)$ булишини осон куриш мумкин. Бунга биз суперпозиция принципи деймиз.

Бу принцип ердамида $T_0(x)$, $T_1(x)$, . . . , $T_n(x)$ бошлангиш функциялар берилганда умумий ечим $T(x, t)$ ни топиш мумкин экан.

$$T(x, t) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(x, t), \quad \text{агар} \quad T^0(x) = \sum_{k=0}^n c_k T_k^0(x),$$

булса

Энди хусусий ечимлар $T_0(x, t)$, $T_1(x, t)$, . . . ларни топишнинг узгарувчиларни айириш усулини курайлик. Ечимни $T(x, t)=g(t)f(x)$ курнишида кидирамиз. Уни тенгламага обориб куйсак

$$\begin{array}{l} g'_t(t) f(x) = a f''_{xx}(x) g(t) \\ \text{ва} \quad \frac{g'_t(t)}{g(t)} = \frac{a f''_{xx}(x)}{f(x)} \end{array}$$

бундан

$$f''_{xx} + \lambda f = 0, \quad g'_t + a \lambda g = 0 \quad (7)$$

тенгламаларни оламиз.

Биринчи тенглама маятникнинг кичик тебраниш тенгламаси, унинг ечими

$$f(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x + \varphi)$$

иккинчисининг ечими $g(t) = B \exp(-a \lambda t)$.

Аммо бу ечимларнинг хаммаси-ям чегаравий шартларга тугри кела бермайди, улардан факат $\varphi = 0$, $\sqrt{\lambda} = \pi n / l, n = 0, 1, 2, \dots$ ларни оламиз. Шундай килиб чексиз сондаги ечимни оламиз.

$$T_n(x, n) = g_n(x) f_n(x) = e^{\frac{-a \pi^2 n^2 t}{l^2}} \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \quad (8)$$

бу ерда $T_0(x)=f_n(x)$ ва $f_n(x)$ - хос ечимлар деб аталади. Хос ечимлар туплами тула булиб харкандай бошлангиш профилни Фурье катори курнишида езиш мумкин

$$T^0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (9)$$

ва мос келувчи ечимни йигинди курнишида езиш мумкин

$$T(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n(x) f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) f_n(x) \quad (10)$$

n-нинг усьиши билан $f_n(x)$ функцияларининг максимумлар сони ям усади. Хос функциялар буйича каторга ейиш усулини Фурье усули деб атаймиз. Канчама каторга ейилувчи функциямиз силлик булса, шунча тез Фурье коэффициентлари n усьиши билан $c_n(t)$ нолга интилади.

МАЪРУЗА 3 (2-соат)

Мавзу: Физиканинг чизикли эмас моделларини урганиш.

Таянч сузлар: (Чизикли эмас моделлар, исиклик таркалиш тенгламаси, локал жараенлар, структура.)

Чизикли эмас математик моделларни карайлик. Исиклик таркалиш тенгламасини умумлаштиришдан бошлаймиз. Айрим жараенларни плаз-мада, биологик тизимларда, химик реакцияларда куйидаги тенглама билан тасвирлаш мумкин

$$T_t' = (k(T)T_x')'_x + Q(T) \quad (1)$$

Бу тенглама (2. 3) тенгламага ухшаш, маъноси якин. (1) тенгламани исиклик жараенлари ва енишни тасвирловчи тенглама десак булади.

Бу ерда $(k(T)T_x')'_x$ аъзо исиклик утказишни тасвирлайди, аммо коэффициент К температурага боглик булади. Чизикли эмас $Q(T)$ функцияси ениш манбаини курсатади. Физик плазма $K(T)$ ва $Q(T)$ температуранинг даражали функциялари булсин:

$$k(T) = k_0 T^\sigma, Q(T) = q_0 T^\beta, k_0, q_0, \sigma > 0, \beta > 1. \quad (2)$$

бу ерда k_0, q_0 , -доимий коэффициентлар, σ ва β курсаткишлар температура усьиши билан бу функцияларнинг усьиш тезлигини аниклайди.

Бу ерда ям ечим куриниши бошлангиш профилга боглик чизикли моделдагидек узгаради деб уйлаш мумкин. Лекин компьютерда чизикли эмас моделни ечиш натижалари кизик натижаларни беради.

Дастлаб максимал температура камаяди(t_2 -вакгда). Кейин у уса бошлайди(t_3, t_4, t_5). Бу ерда чизикли холдан фаркли хар бир вакт моментиде температура нул буладиган ва нулдан фаркли буладиган соханинг чегарасини аник курсатиш мумкин. Бу чегарани чекли исиклик фронти дейилади. Бу хосса исиклик утказиш коэффициенти К нинг чизикли эмаслигидан келиб чикади. Бундан кейин бу фронт баъзи бир А ва В нукталарига етгач туктайди(t_4, t_5 , 1-а, расм). Шундай килиб исиклик чекли сохада(улчами L_f булган)

локаллашади ва бундан кейин киздирилган соханинг ярим узунлиги доимий булиб қолади, амплитудаси эса ортиб боради. Бу амплитуданинг узишиям одаттан ташкари куринишга эга:

Температура чекланган t_f вақтда чексизликгача усади. Бундай режимларнинг маъноси нимада?

Хеч каерда микдорларнинг чексиз узиши кузатилган эмас. Бу масаланинг идеаллаштирилганидан келиб чиқади.

Исикликнинг локалланиш эффекти чизикли моделларда юз бермайдиган ходиса. Бу факат бошланиши, янаям кутилмаган ходисалар чизикли эмас моделларда куп учрайди.

Агар L_f масофадан катта масофада иккита бир хил бошлангиш профил олсак, улар бир бирига умуман таъсир курсатмайди. Агар бошлангиш профилларнинг биттасининг амплитудаси кичик булса, у ҳолда унга боғлиқ жараён тухтайди ($t \rightarrow t_f$ булганда) аммо иккинчиси $t \rightarrow t_f$ чексиз усади. Бундай ҳолларни кескинлашиш режими деб атаймиз.

Энди бошлангиш тақсимланишининг амплитуда ва ярим узунлигини узгартсак нимага олиб келишини курайлик. Хисоблашлар шуни курсатадики кескинлашиш вақти t_f узгаради, аммо лекин ениш шакли ва локалланиш соҳаси узгармас экан. Локалланиш соҳасида температура бир хил конунга бўйсинар экан, яъни ениш келишилган ҳолда утар экан. Шу сабабдан биз диссипатив структура тушунчасини киритамиз.

Диссипация деганимиз энергиянинг бир турдан иккинчи турга утиши, таркалишига айтилади. Мисол тариқасида исиклик ва диффузия жараёнларин келтириш мумкин.

Структура деб элементларнинг маълум узгаришлар давомида сакланиб қолувчи тартибланганлигиги (композиция) айтилади.

Исиклик структурасининг шаклининг узгармаслиги диффузия билан чизикли эмас ениш ва урталиқнинг биргаликда ҳаракати натижасидир.

Чизикли тенгламада температура вақт утиши билан бир хил ҳолга утадиган булса, чизикли эмас ҳолда структураларнинг шаклланишига олиб келар экан.

Диссипатив структуранинг қандай шаклга эга бўлишини та аниқлайлик, яъни локаллашиш соҳасининг узунлиги L_f ни ва урликнинг температурасининг узиш конуни топиш керак.

Олдинги параграфтаги усулни куллаймиз.

Тенгламанинг ечимини қуйидаги қуринишда излаймиз.

$$T(x, t) = g(t)f(\xi), \quad \xi = x / \varphi(t) \quad (3)$$

(3) ни (1) тенгламага қуйиб

$$g(t) = \bar{A}_1 (1 - t/t_f)^{-1/(\beta-1)} \quad (4)$$

$$\varphi(t) = \bar{A}_2 (1 - t/t_f)^{0.5(\beta-\sigma-1)/(\beta-1)}$$

оламиз. $f(\xi)$ ни аниқлаш учун тенглама

$$\frac{1}{(\beta-1)t_f} f + \frac{\beta-\sigma-1}{2(\beta-1)t_f} f'_{\xi} \xi = (f^{\sigma} f'_{\xi})'_{\xi} + f^{\beta} \quad (5)$$

келиб чиқади. Бу ерда $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$ -доимий микдорлар булиб, β , σ , k_0 , q_0 параметрлар ердамида аникланади. $g(t)$ функцияси амплитуданинг усиш конунини аникласа, $\varphi(t)$ ярим кенгликнинг узгаришини курсатади. (5) формуладан куришиб турибди $\beta=\sigma+1$ булганда температура $T(x, t)$ профилининг ярим кенглиги доимий булиб қолади. 1-расмнинг а) кисмида шу акс эттирилган $f(\xi)$ функцияси структуранинг шаклини аниклайди. $\beta=\sigma+1$ булганда (5) тенгламани аналитик усул билан ечса булади. Ечим

$$f(\xi) = [\cos^2(\pi\xi/L_f) 2(\sigma+1)\sigma^{-1}(\sigma+2)^{-1}]^{1/(\sigma+1)} \quad (6)$$

курунишда топилади. Бу ерда

$$L_f = (2\pi/\sigma)(\sigma+1) (k_0/q_0)$$

локалланиш сохасини аниклайди. (3) формуладан температуранинг вақт утиши билан таксимланиши узига ухшаш булиб қолади, яъни температура x , t уки буйлаб маълум марта чузилади холос. Бундай ечимга автомодел ечимлар дейилади. Унинг маъноси уз-узига ухшаш ечим дегани.

Суперпозиция принципи чизикли эмас моделлар учун ишламас экан унда автомодель ечимлар нима учун керак деган савол тугилиши табиий. Хисоблашлар шуни курсатадики температуранинг хар кандай таксимоти $t \rightarrow t_f$ булганда шу автомодель ечимгакелар экан. Бундай интенсив ениш холларинда кандай структураларнинг пайдо булишини биз биламиз. Шу вақтгача биз масаланинг параметрлари узгармас деб бошлангиш температура профилини узгартириб келдик. Энди температура бошлангиш профилини узгартирмасдан, чизикли эмас мухитнинг параметрлари β ва σ ни узгартирайлик. Автомодель ечимди караймиз, ундан куринадики $\beta > \sigma+1$ булганда $\varphi(t) \rightarrow 0$ агар $t \rightarrow t_f$ булса ва $\varphi(t) \rightarrow \infty$ агар $t \rightarrow t_f$, $\beta > \sigma+1$ булса. Биринчи холда профилнинг ярим кенглиги кискаради ва буни LS-кескинлашувчи режим деб атайди. Иккинчи холда биз HS режимга эга буламиз. Агар $\beta = \sigma+1$ булса профилнинг ярим кенглиги доимий, шунинг учун у S-режим булади. Лекин бизга номаълум нарса шу ечим LS ва HS режимларнинг кескинлашган холини тасвирлайдими еки йукми. Бунга жавоб бериш учун хисоблашлар юритилганда бу режимларда ҳам вақт утиши билан шуечим билан аникланувчи режимга келар эканмиз, яъни диссипатив структуралар пайдо булади.

МАЪРУЗА-4 (2 соат).

Мавзу: Химиядаги чизикли эмас жараенларни урганиш.

Таянч сузлар: (Химик кинетика, брюсселятор, чизикли эмас тенглама.)

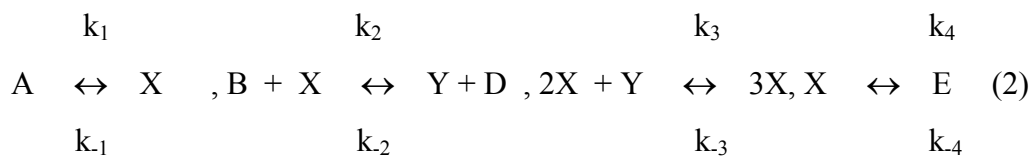
Классик термодинамикада тизимлардаги тенг вазнли жараенлар каралади, яъни куршаган мухит билан масса, энергия алмашуви булмайди. Бундай тизимларда заррачаларнинг хоссалари ердамида улар ансамблининг хоссаларини олдиннан билиш мумкин. Шунинг учун бу тизимларни урганишда макросиопик микдорлар хисобга олинади(зичлик, температура, концентрация). Шунга асосан XIX аср бошларида шу усулни чизикли моделни умумлаштириш мумкин, яъни тизимларнинг кенгрок класига кулланса булади деган фикр пайдо булди. Аммо бу схемага тугри келмайдиган жараенлар ҳам бор эканлиги кейинрок аникланди.

И. Пригожин бошчилигидаги Брюссель олимлари бундай жараенларни урганиш учун чизикли эмас моделлар таклиф этди. И. Пригожиннинг очик тенг эмас вазнли системалардаги кайтарилмайдиган жараенлар буйича ишлари 1977-йили химиядан Нобель мукофатига сазовар булди. Улар томондан брюсселятор модели яратилди.

Мактаб курсидан маълум реакцияда катнашувчи икки модда X ва Y реакция натижасида Z моддасини хосил килса ($X+Y \rightarrow Z$), у холда Z моддасининг узгариш тезлиги x, у концентрациялар купайтмасига пропорционал булади. Шу моддаларнинг концентрацияларини X, Y, Z деб олиб куйидаги тенгламани езамиз

$$\frac{dZ}{dt} = kXY \quad (1)$$

Хакикатда реакция юриши учун, X моддасининг молекулалари Y моддасининг молекулалари билан тукнашиши керак. Унинг эхтимоллиги бирлик хажмдаги молекулалар сонига яъни X га пропорционал булиши шубхасиз, худди шундай у Y га ҳам пропорционал булиш керак. Пропорционаллик коэффиценти k молекулалар улчами, уларнинг тезликларига боглик булади. Энди моделнинг узига утайлик ва реакция куйидаги схема буйича утсин



A ва B моддалар концентрацияси доимий а холда ушлаб турилсин ва D, E моддалари чиқариб юбарилсин. У холда тизим очик куринишга эга булади. Тескари реакция тезликлари ($k_{-1}, k_{-2}, k_{-3}, k_{-4}$) турисига солиштирганда анча секин булсин. Шу фаразлар асосида химиядаги харакаттаги массалар конуни буйича куйидаги тенгламалар системасига эга буламиз:

$$\begin{aligned} X_t' &= k_1 A - (k_2 B + k_4) X + X^2 Y + D_1 X_{xx}'' , \\ Y_t' &= k_2 B X - k_3 X^2 Y + D_2 Y_{xx}'' , \end{aligned} \quad (3)$$

X ва Y концентрациялар хархил нукталарда турлича булиши мумкин, шунинг учун уларнинг диффузиясини хисобга олувчи $D_1 X_{xx}$, $D_2 Y_{xx}$ аъзолар киритилган. Унчалик мураккаб эмас. Узгарувчиларни олмаштиришдан кейин ($t' = k_4 t$, $X = (k_3/k_4)^{1/2} X$, $Y = (k_3/k_4)^{1/2} Y$, $A = (k_1 k_2 k_3/k_4^3)^{1/2} A$, $B = B k_2/k_4$, $D_1 = D_1/k_4$, $D_2 = D_2/k_4$) брюсселятор деб номланган моделни оламиз.

$$\begin{aligned} X_t' &= A - (B + 1)X + X^2 Y + D_1 X_{xx}''', \\ Y_t' &= BX - X^2 Y + D_2 Y_{xx}''', \end{aligned} \quad (4)$$

модда реакторда колади. Шунинг учун куйидаги чегаравий шартларнинг бажарилишини талаб киламиз.

$$X_x'(0, t) = X_x'(1, t) = 0, \quad Y_x'(0, t) = Y_x'(1, t) = 0, \quad (5)$$

Ечимларни текшириш. (4) тенгламанинг стационар ечими бор йуклигини текширайлик.

$$A - (B + 1)X + X^2 Y = 0, \quad BX - X^2 Y = 0 \quad (6)$$

Унинг ягона ечими $X=A$, $Y=B/A$. Биз учун бу ечим алохида урин тутеди. Иссиклик структураларидек В моддасининг концентрациясини ва бошлангиш концентрация таксимотини $X(x, 0)$, $Y(x, 0)$ узгартириб борамиз ва тенгламалар ечимининг узгаришини кузатамиз. ЭХМ да хисоблашлар юритамиз. Агар В моддасининг концентрацияси кичик булса, у холда бошлангиш маълумотлардан мустакил равишда маълум вақтдан кейин концентрациялар $X(x, t)=A$, $Y(x, t)=B/A$ булади. Бундай кизик ечим купчилик чизикли эмас тенгламалар системасида учрар экан. Бу ечим термодинамик тармок деган ном олди. Бир карашда шундай хоклаган В учун хам уринлидек куринади. Аммо бу ундай эмас. Бошлангиш концентрациялар $X(x, 0)$, $Y(x, 0)$ ларни узгартмасдан В ни купайтурсак, маълум В нинг критик кийматидан бошлаб монотон булмаган концентрацияларнинг таксимотига утилади. Шундай жараенлар учун биринчи марта И. Пригожин томонидан диссипатив структура тушунчаси киритилган эди.

Стационар ечим $X=A$, $Y=B/A$ чегаравий масалани хоклаган В учун каноатлантиради. Демак $B > B_c$ булганда бир нечта стационар ечимлар пайдо булади, яъни ечимлар тармоги бифуркация хосил булади.

Энди $B > B_c$ бирор кийматини узгармас килиб бошлангиш концентрациялар $X(x, 0)$, $Y(x, 0)$ ларни узгартириб курайлик. В нинг айирим кийматларида кизик эффектни пайкаш мумкин: бошлангиш концентрацияларнинг маълум кийматларида бир стационар ечимга чикилса, бошка кийматларида бошка ечимга келамиз. Бу ерда бир хил стационар ечимга бир эмас бир нечта бошлангиш концентрациялар олиб келади, яъни бошлангиш маълумотларни унитиш холи юз беради.

Агар ечим $X=A$, $Y=B/A$ идеал холда булса узгармастан туради, аммо лекин реал хисоблашларда бошкача картинани оламиз. Бу хисоблашларда ечимнинг озгина узгаришидан пайдо булган хатоликлар тезда усиб тургин стационар холларнинг бирига

модель утади. Бундай оз узгарувчиларни флюктуация деб атайди ва у купчилик чизикли эмас системалар учун хос. ЭХМ да хисоблашлар натижаси бу флюктуацияларнинг чизикли холдан фаркли чизикли эмас моделларнинг бутун ахволини аниқлар экан. Бу холда термодинамик тармок нотургин булади. Бу холни куйидаги мисолда тушинтириш мумкин. Иккита идиш уртасига куйилган кичкина шарни тасаввур килайлик.

Шарни идиш уртасига куйганимизда механика конунлари га асосан у шу 0 нуктада туради, аммо флюктуация таъсири натижасида шар еки М еки N нуктага кулаб тучади. Унинг кайси идишга тушиш флюктуация ишорасига боглик булади. Бу ерда 0 нуктаси термодинамик тармок ролини уйнайди, М ва N лар стационар тургун ечимларда аниқлайди. Бундай холлар купчиликтенг эмас вазнли чизикли эмас системаларда учрайди.

Стационар холдаги брүсселятор моделидаги структураларнинг стационар эмас исиклик струклардан фарки: исиклик структуралари локаллашган унга чегаравий шартлар таъсир этмайди, бунинг аксинча стационар структураларда чегаравий шартларнинг узгариши бутунлай ечимнинг узгаришига олиб келади. Катта сохаларда катта сондаги экстремумларга эга структуралар пайдо булиши мумкин. Бундай ечимларни тадқиқот килиш учун чизикли тенгламаларга утилиб, унинг тургунлиги тахлил килинади. $V < V_c$ холида структуралар пайдо булмайди, сабаби бу холда чизикли эмас тенгламанинг аъзолари кичкина булиб, чизикли аъзоларга таъсир кила олмайди. У вақтда тенгламалар системаси чизикли моделга якин булади ва уни ечиш усулларини чизикли эмас моделга кулланса булади.

МАЪРУЗА 5(2 соат).

Мавзу: Биологияда чизикли эмас жараенларнинг моделини урганиш.

Таянчсузлар: (Чизикли эмас модел, морфогенез, активатор, ингибитор, концентрация, биология.)

Хозирги замон биологияси олдида турган мухим масалаларнинг бири тирик организмларнинг аъзолари ривожланишини бошқарувчи жараенларни урганиш. Бу масалани бошқача морфогенез масаласи деб ҳам атайди. Организмларнинг шаклланишига ухшаган жумбоги куп масалаларни топиш кийин. Чунки бутун организм битта клеткадан пайдо булади. Лекин ҳамма клеткалар бир хил булса-ям, кейинчалик кандай килиб хархил аъзоларнинг(юрэк, мийа, ошказон) клеткаларига айланади. Хозирги вақтда биология хар хил аъзоларнинг клеткалари нима сабабдан бир-биридан морфологик ва физиологик жихатдан фарк килади ва бу айирма кандай пайдо булади деган саволга жавоб бералмаеп ти. Аниқрок килиб айтганимизда 3 та саволга жавоб топишимиз керак:

- 1) Мазкур клеткада булиниб чиқадиган ферментлар кандай бошқарилади?
- 2) Нима сабабдан айрим ферментлар ривожланишнинг маълум боскишида пайдо булади?

3) Нима сабабдан клеткаларнинг харбир типига хос 4 белоклар комплекси пайдо булади, агар куп клеткали организм-ларнинг клеткалари бир хил генетик кодга эга булса?

Мураккаб жараенларни урганишни содда ходисаларни тахлил килишдан бошлаш керак. Морфогенез масаласида бу регенерация(кайта тикланиш ходисаси). Айрим хайвонларда нафакат яраларнинг тузалиб кетиши айрим йукотилган аъзоларнинг кайтадан пайдо булиши кузатилади. Бундай кайта тикланиш(регенерация) ходисаси организмда ривожланиш тухташи билан туктайдиган морфогенетик жараенларнинг кайта тикланишини курсатади. Регенерацияга юкари даражада мойил организмлардан емгир курти, гидралар, тритон, саламандр ва калтакесакларни курсатса булади. Шу ходиса А. Тюринг томонидан (1952-й)тузилган биринчи морфогенез моделига асос булди. Бу жараенларни моделлаштириш учун А. Тюринг хусусий хосилалар 2 та тенгламалар системасини кулланди. Хозирги вақтда биологияда кенг таркалган А. Гирер билан М. Мейнхаррт моделлари кулланилади ва шу моделни караймиз.

Гидрадаги морфогенетик жараенни кузатайлик. Унинг организми тахминан 15 хил 10^5 сондаги клеткалардан туради ва узунлиги бир нечта миллиметр. Организмнинг бир ушда боши жойлашган. Бошининг бир кисмини кесиб олиб бошка жойга жойлаштирганимизда куйидаги ходиса юз беради. Агар кучирилган бош билан олдинги бош ораси якин булса янги бош усиб чикмайди, агар бу оралик катта булса янги бош пайдо булади. Бу морфогенетик жараенларга таъсир курсатувчи химик моддалар бор булса керак. Курсатилган ходисани тугри акс эттириш учун бундай химик моддалардан иккитаси ишлаб чикилади десак, унинг бирисин ингибитор деб атайлик, иккинчисин активатор деймиз. Ингибитор янги бошнинг усишига йул куймайди, аксинча активатор усишни тезлаштиради. Икки модда хам гидранинг бош томонидан ишлаб чикилади деб фараз килайлик. Ингибитор ва активатор диффузия хоссасига эга деб фараз килайлик.

Активатор концентрациясини a , ингибиторникини h деб белгилайлик. a ва h координаталар x ва t га боглик булсин. a моддасининг узгариши берилган нуктада кандай булишини курамиз. Бу узгариш куйидаги факторларда боглик булади: активаторнинг ρ унимдорлик билан ишлашига, μ_a микдорига булинишига ва $D_a a_{xx}$ диффузияга. Эксперимент натижасида ингибиторнинг активаторга таъсирини ka^2/h курнишида бериш мумкин экан.

Ушбу айтилганларни хисобга олсак a моддасининг узгариши учун тенгламага келамиз.

$$a_t' = \rho - \mu_a + ka^2/h + D_a a_{xx}'' \quad (1)$$

Худди шунга ухшаш ингибитор концентрациясининг узгариши учун куйидаги тенгламани езамиз.

$$h_t' = ca^2 - \nu h + D_h h_{xx}'' \quad (2)$$

бу ерда ca^2 -активаторнинг ингибиторга таъсири, $-v h$ ингибиторнинг булиниб кетиши, $D_h h_{xx}$ -диффузия хоссаси.

(1), (2) система ЭХМ ердамида тадқиқ қилиниши мумкин. Бу модель Брюсселятор моделига ўхшаш модель бўлиб ҳисобланади.

(1), (2) моделнинг таъбиқи шуни кўрсатадики ингибитор эски бошнинг енида пайдо бўладиган максимум ва минимумларни ўқиради. Активатор билан ингибиторнинг ўз-ара таъсири натижа сизда фазо бўйича периодли моддаларнинг тақсмоти сезилади.

Шу содда модельни ўрганиш орқали мураккаб жараёнлардаги ҳодисаларни ўрганиш мумкин экан.

Қуйидаги моделнинг натижалари 1-расмда кўрсатилган.

$$u_t' = 0,18u_{xx}'' + u - v + (4^v - u)(u^2 + v^2) \quad (3)$$

$$v_t' = 0,57v_{xx}'' + u + v - (u + 4v)(u^2 + v^2) \quad (4)$$

1 - расм.

МАЪРУЗА 6 (2 соат)

Мавзу: Чекли айирмалар схемалар назариясининг асосий формулалари ва тушунчалари.

Таянч сузлар: (чекли айирма, булаклар суммалаш, Грин формуласи, коррект масала)

Математик физика масалаларини сонли ечишнинг ҳозирги вақтда асосий усулларида бири бу чекли айирмалар схемалар усули бўлиб ҳисобланади. Бу усул ўзининг универсаллиги ва ЭХМ да программалаштиришга қулайлиги билан бошқа усуллардан ажралиб туради. Олдинги лекцияларда қаралган масалаларни ечишда асосан чекли айирмалар усули қўлланилади. Бунинг асосий сабаби қаралаётган дифференциал масалалар қизикли эмас бўлганлиги учун бошқа усулларни қўлланиш, хусусий ҳолларни ҳисобга олмаганда, ўнчалик яхши натижа бермайди. Чекли айирмалар схемаларни тузишни қарашдан олдин ўнинг назариясига тегишли бошланғич маълумотлар билан танишиб чиқайлик.

Қўпайтмани чекли айирмада дифференциаллаш формуласи Дифференциал ҳисоб курсида қуйидаги формуланинг мавжудлиги маълум

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Шунга ўхшаш формулаларни чекли айирмадаги ҳосилаларни ҳисоблашда ҳам қўлланиш мумкин. Агар биз биринчи тартибли дифференциал ҳосилани чекли айирмадаги ҳосилга олмаштиришнинг бир нечта формулалари бўлганлиги учун, ўннан икки ҳолни қарасак, яъни чап ва ўнг чекли айирмалар ҳосилани ҳисобга олганда қўпайтма ҳосиласини ҳисоблашнинг қуйидаги формулаларига эга бўламиз

$$(uv)_x = u_x v + u^{(+1)} v_x = u_x v^{(+1)} + u v_x \quad (1)$$

$$(uv)_{x-} = u_{x-} v + u^{(-1)} v_{x-} = u_{x-} v^{(-1)} + u v_{x-} \quad (2)$$

Бу ерда куйидаги белгилашлар киритилди

$$f^{(+1)} = f(x+h), f_x = (f^{(+1)} - f)/h, f_{x-} = (f - f^{(-1)})/h.$$

(1) формулани исбот килайлик

$$(u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_i) / h = (u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_{i+1}) / h + (u_i v_{i+1} - u_i v_i) / h.$$

Булаклаб суммалаш формулалари. Булаклаб интеграллаш формуласини курайлик

$$\int_0^1 uv^{\odot} dx = uv|_0^1 - \int_0^1 u^{\odot} v dx$$

Турдаги функциялар учун шунга ухшаш формула келиб чиқади

$$(u, v_x) = u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{x-}, v) \quad (3)$$

$$(u, v_{x-}) = u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v] \quad (4)$$

(3) формулани исбот килайлик. (1) формула асосида куйидагини оламиз

$$(u, v_x) = \sum_{i=1}^{N-1} (u_i v_x)_i h = \sum_{i=1}^{N-1} (uv)_{x,i} h - \sum_{i=1}^{N-1} (u_x v^{(+1)})_i h = (uv)_N - u_1 v_1 - \sum_{i=1}^N u_{x-,i} v_i h + (u_{x-} v)_1 h \quad (6)$$

Гриннинг биринчи формуласи. Куйидаги формулани Гриннинг биринчи формуласи деб атайдимиз

$$\int_0^1 u(kv^{\odot})^{\odot} dx = -\int_0^1 ku^{\odot} v^{\odot} dx + kuv^{\odot} |_0^1$$

Турдаги функциялар учун Грин формуласининг аналогини булаклаб суммалаш формулалари ердамида келтириб чиқариш мумкин, яъни

$$(z, (ay_{x-})_x) = - (ay_{x-}, z_{x-}] + azy_{x-}|_N - a_1 y_{x-,0} z_0. \quad (7)$$

Агар $z_0 = z_N = 0$ булса Гриннинг биринчи формуласи куйидагича булади

$$(z, (ay_{x-})_x) = - (ay_{x-}, z_{x-}] \quad (8)$$

бу ерда хусусий холда $z=y$ булганда шуни оламиз

$$(y, (ay_{x-})_x) = - (ay_{x-}, y_{x-}] = - (a, (y_{x-})^2) \quad (9)$$

Чекли айирмалли масаланинг корректлик тўғрисида

Майли чегараси Γ булган G сохада куйидаги дифференциал масаланинг ечимини топиш керак булсин

$$Lu = f(x), x \in G \quad (1)$$

$$lu = \mu(x), x \in \Gamma \quad (2)$$

бу ерда $f(x)$, $\mu(x)$ берилган функциялар (бошлангиш маълумотлар); l - баъзи чизикли дифференциал оператор. Фараз килайлик, (1)-(2) масаланинг ечими мавжуд ва ягона булсин. $G+\Gamma$ сохада тур (сетка) киритайлик ва h тур (сетка) параметри (кадам), x_i - тур тугунлари, ω_p - турнинг ички нукталари туплами, γ_p - чегаравий нукталар туплами булсин. Энди дифференциал масалага мос куйидаги чекли айирмалли масалани езиш мумкин

$$L_h u_h = \varphi_h, x \in \omega_h; l_h u_h = \chi_h, x \in \gamma_h \quad (3)$$

бу ерда φ_h , χ_h - берилган тур (сетка) функциялари. L_h , l_h - чекли айирмадаги операторлар. u_p - турда аниқланган айирмалли масала ечими. (3) формулани **айирмалли схема** деб атаймиз.

Матфизика масалалари учун масала **коррект куйилган** дейилади, агар икки шарт бажарилса:

1. Баъзи класстан олинган хамма бошлангиш маълумотлар учун дифференциал масала бир маънода ечимга эга булса.

2. Масаланинг ечими бошлангиш маълумотлардан узликсиз богликли булса.

Шунга ухшаш айирмли масаланинг корректлиги тучуншасини киритиш мумкин. Чекли айирмадаги масала (схема) h нинг етарлича кичик кийматларида $|h| \leq h_0$, коррект куйилган дейилади агар:

1) Мумкин булган φ_h барча кийматлари учун чекли айирмали масаланинг ечими y_h мавжуд ва ягона булса,

2) y_h ечим бошлангиш функция φ_h узликсиз богликли булса ва бу богликлик h параметр буйича тенгулчовли булса.

Аниқрок айтганда иккинчи шарт куйидагини англатади. Шундай $M > 0$ доимийси мавжуд булиб $|h| \leq h_0$ шартини каноатлантирувчи h лар учун тенгсизлик уринли

$$\|y_h - y_h^*\|_1 \leq M \|\varphi_h - \varphi_h^*\|_2, \quad (4)$$

бу ерда y_h^* чекли айирмали масаланинг бошлангиш функция φ_h^* мос келувчи ечими, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ турда берилган функциялар туплами учун аниқланган нормалар. Ечимнинг бошлангиш маълумотлардан узликсиз боглик булишининг (4) тенгсизлик шаклида берилиши **айирмали схеманинг тургунлиги** деб аталади.

Энди $z_h = y_h - u_h$ деб тақрибий ечим билан аниқ ечимлар орасидаги хатони белгиласак, ухолда унинг учун куйидаги масалани оламир

$$L_h z_h = \psi_h, x \in \omega_h; \quad l_h z_h = v_h, x \in \gamma_h \quad (5)$$

бу ерда ψ_h, v_h - берилган дифференциал тенглама ва чегаравий шартларни чекли айирмадаги тенглама ва чегаравий шартларга олмаштириш яъни аппроксимация хатолари. (5) нинг урнига формал турда куйидагини етса да булади

$$\bar{L}_h z_h = \bar{\psi}_h,$$

$\bar{L}_h$ - агар бу оператор чизикли булса ва айирмали масала коррект булса, у холда (5) дан

$$\|z_h\|_1 \leq M \|\bar{\psi}_h\|_2, \text{ еки } \|z_h\|_1 \leq M (\|\bar{\psi}_h\|_2 + \|v_h\|_3) \quad (6)$$

Шуннан куруниб турибдики, агар айирмали схема тургун булиб берилган дифференциал масалани аппроксимацияласа у холда у айирмали схема яқинлашувчи булади. Яъни аппроксимация ва тургунликтан айирмали схеманинг ечимининг дифференциал масала ечимига яқинлашувчилиги келиб чиқади ва яқинлашувлик тартиби (тезлиги) аппроксимация тартибига тенг булади. Бундан хулоса килиб шуни айтиш мумкинки, айирмали схемаларни тадқиқот килиш, уларнинг аппроксимация хатоликларини, тургунлигини урганишга олиб келади ва (6) ухшаш баҳоларни урнатишни талаб этади. Бу баҳоларга априор баҳолар деб атайти.

МАЪРУЗА 7 (2 соат)

Мавзу: Иккинчи тартибли чизикли эмас оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалани ечишнинг чекли айирмалар усули.

Таянч сузлар: (дифференциал тенглама, чегаравий масала, чекли айирмалик схема)

Иккинчи тартибли дифференциал тенглама учун чегаравий масалани ечишни карайлик:

$$u''(x) = f(x, u(x)) \quad (1)$$

$$u(a) = A, u(b) = B \quad (2)$$

Фараз килайлик $f(x, u)$ функцияси аргументлари буйича узликсиз ва иккинчи тартибли узликсиз хосилаларга эга, чегараланган функция булсин. Белгилаш киритамиз

$$M_1 = \max_{x \in (a,b)} |f_n|, \quad M_2 = \max_{x \in (a,b)} |u^{(IV)}| \quad (3)$$

(1), (2) масалани чекли айирмалар усули билан ечишни караймиз. $[a, b]$ оралигида тур (сетка) киритамиз: $[a, b]$ аралигида тур (сетка) киритамиз: $\omega_h = \{x_i = a + ih, i = 1, n-1, h = (b-a)/N\}$.

Шу турда (1), (2) масала учун куйидаги айирмали схемани тузамиз:

$$\begin{cases} y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f(x_i, y_i), i = \overline{1, n-1} \\ y_0 = A, \quad y_n = B \end{cases} \quad (4)$$

$$\quad (5)$$

Айирмали схема ечими y_i нинг дифференциал масала ечими $u(x_i)$ га якинлашувчилигини исботлайлик.

Фараз килайлик $f_u \geq m_1 > 0$ булсин. Дифференциал иккинчи тартибли хосила учун куйидаги тенглик уринли

$$u^{\circ\circ}(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - \frac{h^2}{12} u^{(IV)}(\xi_i), \xi_{ii} \in (x_{i-1}, x_{i+1})$$

Буни (1) тенгламага куйсак

$$\begin{cases} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = h^2 f(x_i, u_i) + \frac{h^2}{12} u^{(IV)}(\xi_i), i = \overline{1, n-1} \\ u_0 = A, \quad u_n = B \end{cases} \quad (6)$$

Бу ерда $z_i = y_i - u_i$ ечимлар хатолигин олиб, $f(x_i, y_i) - f(x_i, u_i) = (f_u)_i z_i$ ни хисобга олсак куйидаги масалага эга буламиз

$$\begin{cases} z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1} = h^2 (f_u)_i z_i - \frac{h^4}{12} u^{(IV)}(\xi_i), i = \overline{1, n-1} \\ z_0 = z_n = 0 \end{cases} \quad (7)$$

(7) масалада $z_{i_0} = \max_{0 \leq i \leq n} |z_i|$ булсин, у холда

$$(2 + h^2 (f_u)_{i_0}) |z_{i_0}| \leq |z_{i_0-1}| + |z_{i_0+1}| + \frac{h^4}{12} |u^{(IV)}(\xi_{i_0})|$$

бундан тенгсизликни кучайтирсак

$$(2 + h^2 (f_u)_{i_0}) \|z\|_c \leq 2 \|z\|_c + \frac{h^4}{12} M_2$$

еки

$$\|z\|_c \leq \frac{h^2 M_2}{12 m_2} \quad (8)$$

Бу (8) тенгсизликдан айирмали схема ечими y_i нинг дифференциал тенглама ечими u_i - га 2 тартибли аниклик билан биртекис якинлашувчи булишини кураимиз.

Энди (4), (5) айирмали схемани ечиш усулларини караймиз, чунки бу айирмали схема чизикли эмас. Бундай айирмали схемаларни ечиш учун итерацион усуллар кулланилади.

Оддий итерация усулини куллансак

$$\begin{cases} y_{i+1}^{(k)} - 2y_i^{(k)} + y_{i-1}^{(k)} = h^2 f(x_i, y_i^{(k-1)}), i = \overline{1, n-1} \\ y_0^{(k)} = A, \quad y_n^{(k)} = B \end{cases} \quad (9)$$

ушбу схемани оламиз. Харбир итерацияда чизикли айирмалисхема келиб чиқади ва уни кувиш усули билан ечамиз. Энди итерация усулининг хатолигини бахолаймиз. Агар $v_i^{(k)} = y_i^{(k)} - y_i$ десак, итерация хатолиги учун куйидаги масалага эга буламиз

$$\begin{cases} v_{i+1}^{(k)} - 2v_i^{(k)} + v_{i-1}^{(k)} = d_i^{(k)}, i = \overline{1, n-1} \\ v_0^{(k)} = 0, \quad v_n^{(k)} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$d_i^{(k)} = h^2 f(x_i, y_i^{(k-1)}) - h^2 f(x_i, y_i) \approx h^2 f_u(x_i, y_i) v_i^{(k-1)}$$

Бу масалани кувиш усули билан ечайлик. У холда кувиш усулининг коэффициентлари куйидагича хисобланади:

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{2 - \xi_i} = \frac{i}{i+1}, \quad 0 \leq i \leq N-2; \quad \xi_N = 0,$$

$$\eta_{i+1} = \xi_{i+1}(\eta_i - d_i^{(k)}) = -1/(i+1) \sum_{j=1}^i j d_i^{kj}, \quad i=1, N-1$$

Кувиш усулининг тескари юриш формулалари куйидагича

$$езилади v_i^{(k)} = \xi_{i+1} v_{i+1}^{(k)} + \eta_{i+1} = -i \sum_{j=i+1}^N (1/j(j+1)) \sum_{p=1}^{j-1} p d_p^{(k)} \quad (11)$$

ва (10) масала ечимини беради.

(10) системанинг унги томони учун қуйидаги тенгсизликлар уринли

$$\|d_i^{(k)}\| \leq q^{(k)} \cdot q^{(k)} = h^2 M_1 \|v_i^{(k-1)}\|_C$$

буни (11) га қуйиб, ушбуни оламиз

$$\|v_i^{(k)}\| \leq q^{(k)} i \sum_{j=i+1}^N (1/j(j+1)) \sum_{l=1}^{j-1} p = 1/2 q^{(k)} i(N-i) \leq 1/8 q^{(k)} N^2$$

$$\text{бундан } \|v_i^{(k-1)}\|_C \leq q \cdot \|v_i^{(k-1)}\|_C, q = N^2 h^2 M_1 / 8 = (b-a)^2 M_1 / 8 \quad (12)$$

Бу ердан итерациялик усулнинг қуйидаги шарт бажарилгандаги яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади:

$$(b-a)^2 M_1 / 8 < 1, M_1 = \max |\partial f / \partial u|$$

яъни $v_i^{(k)} = y_i^{(k)} - y_i \rightarrow 0$, агар $k \rightarrow \infty$. Бу яқинлашувчилик чизикли бўлиб, тезлиги жуда секин бўлади.

Яқинлашиш тезлиги юкари булган Ньютон итерациялик усулини кулласак, у ҳолда қуйидаги формулага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} y_i^{(k+1)} &= y_i^{(k)} + \Delta_i^{(k)}, 0 \leq i \leq N \\ \Delta_{i-1}^{(k)} - (2 + h^2 f_u) \Delta_i^{(k)} + \Delta_{i+1}^{(k)} &= h^2 f_i^{(k)} - y_{i-1}^{(k)} + 2 y_i^{(k)} - y_{i+1}^{(k)} \\ \Delta_0^{(k)} &= \Delta_N^{(k)} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Бу ерда ҳам (13) айирмалли схема қувиш усули билан ечилади. Итерацион усулнинг яқинлашувчилигин юкарида курсатилган усулда исботлаш мумкин. Яъни $v_i^{(k)} = y_i^{(k)} - y_i$ учун қуйидаги баҳони оламиз

$$\|v_i^{(k)}\|_C \leq \|(f_{uu}''(x, u) / 2f_u(x, u))\|_C \|v_i^{(k-1)}\|_C^2,$$

бундан агар бошланғиш яқинлашув нуктасини ечимга яқин олганимизда, масалан

$$\|v_i^{(0)}\|_C \leq \|2f_u / f_{uu}''\|_C$$

булса итерациялик усулнинг квадрат тезликда яқинлашувчи бўлишини қураимиз.

Ньютон итерацион усулидаги қийинчиликлардан бири бошланғиш ечимни танлаб олиш. Шунинг учун бундай ҳолларда комплекс ҳисоблаш схемаси қулланиш яхши натижа беради. Яъни дастлаб тугун нукталар қуп эмас тур (сетка) олинди ($N=2, \dots, 8$) унинг бошланғиш ечими бошқа тақрибий усуллар ердамида танлаб олинди итерация усули билан ҳисобланади ва олинган ечим қийматларини интерполяция қилиб, қадам майдаланади ва иккинчи тур (сетка) ҳосил қилинади. Бу турда бошланғиш ечим сифатида интерполяция қилинган ечимни оламиз ва ҳақоза. Агар шундай ҳисоблашларни ташкил қилсак ҳар бир турда 6-8 итерациядан ортиқ ҳисоблашлар талаб қилинмайди ва Ньютон усули тез яқинлашувчи бўлади.

МАЪРУЗА 8 (2 соат)

Мавзу: Иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларга аниқ айирмалли схемалар тузиш.

Таянч сузлар: (чизикли дифференциал тенглама, аник айирмали схема, аник айирмали схема оператори, шаблон функцияси)

Олдинги маърузаларда биз иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишда дифференциал масаланинг коэффициентлари еки унинг унги томони узининг бир нечта хосилалари билан узликсиз булсин деб фаразкилган эдик. Аммо реал масалаларда бу айтилган шартлар бажарилмаслиги мумкин. Масалан, куп катламли урталикда буладиган жараенларда тенглама коэффициентлари(зичлик, иссиклик утказувчанлик ва хакоза) узилишга эга булади. Шунинг учун бундай холларда махсус айирмали схемалар тузишга тугри келади. Шундай айирмали схемалардан аник айирмали схемаларни тузишни караймиз. Куйидаги масала берилган булсин.

$$d \quad 1 \quad dy(x) \\ \text{-----(-----)} - q(x)y(x) = - f(x), \quad x \in (0, 1) \quad (1)$$

$$dx \quad p(x) \quad dx \\ y(0) = A, y(1) = B. \quad (2)$$

Таъриф. (1), (2) масала учун аник айирмали схема деб ушбу куринишдаги айирмали схемага айтамыз

$$v_i = a_i v_{i+1} + b_i v_{i-1} + w_i, \quad i=1, N-1 \quad (3) \\ v_0 = A, v_N = B,$$

бу ерда коэффициентлар $a_i = a_i(p, q)$, $b_i = b_i(p, q)$, $w_i = w_i(p, q, f)$, $x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1}$ $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ коэффициентларидан тузилган функционаллар булиб ва куйидаги шарт бажарилади.

$$v_i = y(x_i), \quad i=0, N. \quad (4)$$

Майли $\omega_h = \{x_i = ih, i=1, N-1, h=1/N\}$ тенг улчамли (a, b) оралигида киритилган тур (сетка) булсин. Аник айирмали схемани тузиш идеяси (1) масаланинг ечимин турнинг ички нукталарида куйидаги куринишда езишдан келиб чикади

$$y(x) = A_i v_1^i(x) + B_i v_2^i(x) + v_3^i(x), \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \quad i=1, N-1, \quad (5)$$

бу ерда A_i ва B_i лар дойимий сонлар, $v_3^i(x)$ - куйидаги масаланинг ечими

$$d \quad 1 \quad d v_3^i \\ L^{(p, q)} v_3^i(x) = \text{-----(-----)} - q(x) v_3^i = - f(x), \quad x \in (0, 1) \quad (6) \\ dx \quad p(x) \quad dx$$

$$v_3^i(x_{i-1}) = v_3^i(x_{i+1}) = 0, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_{i+1} \quad i=1, N-1, \quad (7)$$

Шаблон функциялари деб аталувчи $v_1^i(x)$ ва $v_2^i(x)$ лар куйидаги Коши масалаларининг ечимлари

$$L^{(p, q)} v_1^i(x) = 0, \quad v_1^i(x_{i-1}) = 0, \quad v_1^{i'}(x_{i-1}) / p_{i-1} = 1, \quad (8)$$

$$L^{(p, q)} v_2^i(x) = 0, \quad v_2^i(x_{i+1}) = 0, \quad v_2^{i'}(x_{i+1}) / p_{i+1} = -1,$$

(5) тенгламада $x = x_{i-1}$, $x = x_{i+1}$ унинг коэффициентларини топамиз

$$A_i = \frac{y(x_{i+1})}{v_1^i(x_{i+1})}, \quad B_i = \frac{y(x_{i-1})}{v_2^i(x_{i-1})} \quad (9)$$

Энди шаблон функцияларнинг хоссаларини келтирайлик :

1. $v_1^i(x) > 0$ ва (x_{i-1}, x_{i+1}) интервалда усади, $v_2^i(x) < 0$ да монотон камаяди.

2. Куйидаги тенгликлар уринли

$$v_1^i(x_{i+1}) = v_2^i(x_{i-1})$$

$$v_2^i(x_i) = v_1^{i+1}(x_{i+1}).$$

3. Куйидаги тенгликлар уринли

$$v_1^i(x_{i+1}) = v_1^i(x_i) + v_2^i(x_i) + v_2^i(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(x) q(x) dx + v_1^i(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(x) q(x) dx$$

Энди $v_3^i(x)$ топиш учун (8), (9) масаланинг (x_{i-1}, x_{i+1}) оралигида Грин функциясидан фойдаланамиз. У куйидаги курунишка эга

$$G(x, \xi) = \frac{v_1^i(\xi) v_2^i(x)}{v_1^i(x_{i+1})}, \quad x_{i-1} < \xi \leq x$$

$$G(x, \xi) = \frac{v_2^i(\xi) v_1^i(x)}{v_1^i(x_{i+1})}, \quad x \leq \xi < x_{i+1}$$

Бундан

$$v_3^i(x) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x_i, \xi) f(\xi) d\xi \quad (11)$$

Шуни ва шаблон функцияларнинг хоссаларини хисобга олган холда куйидаги аник айирмали схемага эга буламиз

$$\frac{1}{h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{v_2^i(x_i)} - \frac{y_i - y_{i-1}}{v_1^i(x_i)} \right] - d_i y_i = -\varphi_i, \quad i=1, N-1 \quad (12)$$

бу ерда

$$1 \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} \quad 1 \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}}$$

$$d_i = T^x(q(x)) = \frac{1}{h v_1^i(x_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} v_1^i(\zeta) q(\zeta) d\zeta + \frac{1}{h v_2^i(x_i)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v_2^i(\zeta) q(\zeta) d\zeta \quad (13)$$

$$\varphi_i = T^x(f(x)).$$

(13) формуладаги $T^x(\cdot)$ га аник айирмали схема оператори деб отаймиз. Энди куйидаги масала учун $T^x(\cdot)$ операторини аниклайлик

$$y''(x) = -f(x), \quad (14)$$

$$y(0) = A, y(1) = B \quad (15)$$

Унинг учун шаблон функцияларни хисоблаб топамиз

$$v_1^i(x) = (x - x_{i-1}), v_2^i(x) = (x_{i+1} - x), \quad (16)$$

ва бу ердан $x = x_i$ ва $x = x_{i+1}$ деб олиб куйидагиларни оламиз

$$v_1^i(x_i) = h, v_2^i(x_i) = h, v_1^i(x_{i+1}) = 2h. \quad (17)$$

Энди (14), (15) масала учун аник айирмали схемани куйидагича езиш мумкин

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = -T^x(f(\cdot)), i=1, N-1 \quad (18).$$

$$y_0 = A, y_N = B,$$

бу ерда

$$T^x(f(x)) = \frac{1}{h^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (\zeta - x_{i-1}) f(\zeta) d\zeta + \frac{1}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x_{i+1} - \zeta) f(\zeta) d\zeta \quad (19)$$

(19) формуладаги аник айирмали схема оператори $T^x(f(x))$ куйидаги хоссаларга эга:

- 1) $T^x(1) = 1.$
- 2) $T^x(x) = 0.$
- 3) $T^x(y'(x)) = y_{xx,i}'' = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) / h^2, i=1, N-1.$

МАЪРУЗА 9(2 соат).

Мавзу: Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар учун хос сонларни топишнинг дифференциал ва чекли айирмали масалалари.

Таянч сузлар: (оддий дифференциал тенглама, хос сонлар, чекли айирмали масала, характеристик тенглама)

Дифференциал тенгламалар учун хос сонларни топиш масаласи мухим масалалардан булиб, бир томаннан купчилик фан ва техника масалаларининг математик модели булиб хизмат киладиган булса, иккинчи томаннан чегаравий масалаларни итерацион усуллар

билан ечишда хос сонларнинг маълум булиши уларни татбик килишда катта роль уйнайди. Бундан бошка хусусий хосилали дифференциал тенгламалар учун масалалар Фурье усули билан ечилганда хос сонларни топиш масаласи кушиб ечилади. Биз куйидаги содда хос сонларни топиш масаласини курайлик

$$u''(x) = -\lambda u(x), x \in (0, 1) \quad (1)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

Бу ерда λ -хос сон деб аталади, агар унга мос келувчи (1), (2) масаланинг нол эмас ечими $U(x)$ мавжуд булса. Бу ерда $\lambda=0$ га $U(x)=0$ ечим мос келади. Шунинг учун $\lambda=0$ хос сон эмас.

(1) тенгламанинг характеристик тенгламаси куйидагича езилади

$$k^2 + \lambda = 0, k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda} i$$

бундан (1) тенгламанинг умумий ечими

$$u(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \quad (3)$$

куринишда езилиши маълум. Чегаравий шартларни хисобга олсак

$$u(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, C_1 = 0,$$

$$u(1) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0, \lambda_k = \pi^2 k^2, k=1, 2, \dots$$

Демак масаланинг ечимини куйидагича езиш мумкин

$$u_k(x) = C_2 \sin \pi k x, \lambda_k = \pi^2 k^2, k=1, 2, \dots \quad (4)$$

яъни k га боглик ечимлар системаси келиб чикди ва буечимлардан бошка ечимлар C_2 доимийга фарк килиши мумкин. C_2 доимийни аниклаш учун ечимлар системаси $u_k(x)$ ларни ортонормаллаштириш мумкин.

$$(u_k(x), u_m(x)) = \int_0^1 C_2 \sin \pi k x C_2 \sin \pi m x dx = C_2^2 \int_0^1 (-\cos(k+m)\pi x + \cos(k-m)\pi x) dx,$$

бу ердан $k=m$ булганда

$$\|u_k(x)\|^2 = C_2^2 / 2 \int_0^1 (1 - \cos(2k\pi x)) dx = C_2^2 / 2, C_2 = \sqrt{2} \|u_k(x)\|$$

$$\text{шуни (4)га олиб бориб куйиб } u_k(x) = \sqrt{2} \|u_k(x)\| \sin \pi k x$$

ёки

$$\mu_k(x) = \frac{u_k(x)}{\|u_k(x)\|} = \sqrt{2} \sin \pi k x \quad (5)$$

десак янги ортонормал булган $\mu_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x$ функцияларига эга буламиз. Бундан икки марта узликсиз дифференциалланувчи ва $f(0)=f(1)=0$ шартни каноатлантирувчи харкандай $f(x)$ функциясини куйидаги каторга ейиш мумкин.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \mu_k(x)$$

бу ерда

$$f_k = \int f(x) \mu_k(x) dx$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$$

Энди хос сонларни топишнинг чекли айирмалари масаласини қараймиз.

$$y_{xx,i} = -\lambda^h y_i, \quad i = 1, N-1 \quad (6)$$

$$y_0 = y_N = 0$$

дифференциал масаладагига ухшаш ечимни

$$y_i = \sin \alpha x_i \quad (7)$$

қурилишда қидирамиз. (7) ни (6) тенгламага қуйсак

$$\sin \alpha x_{i+1} - 2 \sin \alpha x_i + \sin \alpha x_{i-1} = -\lambda^h h^2 \sin \alpha x_i$$

$$\sin \alpha x_{i+1} + \sin \alpha x_{i-1} = (2 - \lambda^h h^2) \sin \alpha x_i$$

ёки

$$\sin \alpha(x_i + h) + \sin \alpha(x_i - h) = 2 \sin \alpha x_i \cos \alpha h = (2 - \lambda^h h^2) \sin \alpha x_i$$

у ҳолда

$$\lambda^h = 4 \sin^2(\alpha h/2) / h^2$$

α параметрнинг $y(x_i) = \sin \alpha x_i$ ечим чегаравий шартларни қаноатлантиришдан топамиз, яъни

$$y_0 = 0, y_N = \sin \alpha x_N = \sin \alpha = 0, \quad \alpha_k = \pi k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (8)$$

Демак $\alpha_k = \pi k$ бўлса $\lambda_k^h = 4 \sin^2(\pi k h/2) / h^2$. Хос ечимлар

$$y_k(x_i) = \sin \pi k x_i, \quad k = 1, N-1. \quad (9)$$

қурилишда бўлади. Энди хос сонлар λ_k^h билан хос векторлар $y_k(x_i)$ ларнинг хоссаларини қурайлик:

1. λ_k^h хос сонлари ўсиш тартибида жойлашган ва қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$0 < \lambda_1^h = 4 (\sin(\pi h/2)/h)^2 < \lambda_2^h < \dots < \lambda_{N-1}^h = 4 (\sin(\pi h(N-1)/2)/h)^2 = 4 (\cos(\pi h/2)/h)^2 < 4/h^2$$

2. Хос векторлар $y_k(x_i)$, $y_m(x_i)$, $k \neq m$ учун ортогонал системани тузади

Буни исботлаш учун Грин формуласидан ва тенгламадан фойдаланамиз

$$0 = (y_k)_{xx}, y_m - (y_m)_{xx}, y_k = (\lambda_m^h - \lambda_k^h)(y_k, y_m)$$

3. $y_k(x_i)$ хос векторининг нормаси

$$\|y_k\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} (y_k)^2 h = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

бунинг исботи ҳисоблашлар натижасида қурсатилади. Бундан ортонормаллаштирилган хос векторларни топиш мумкин.

4. Турдаги $f_0 = f_N = 0$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ихтиёрий $f(x_i)$ функциясини қуйидаги ёйилма турида қурсатиш мумкин

$$f(x_i) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu_k^h(x_i) \quad (10)$$

бу ерда

$$f_k = (f(x_i), \mu_k^h) \quad , \quad \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} (f_k)^2 \quad (11)$$

(11) ни исбот килайлик

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{N-1} (f_i)^2 h = (f^2, 1) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu_k, \sum_{k=1}^{N-1} f_k \mu_k \right) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 (\mu_k, \mu_k) = \delta_{km}.$$

МАЪРУЗА 10(2 соат).

Мавзу: Чизикли ва чизикли эмас кучириш тенгламаларини ечишнинг чекли айирмалар усули.

Таянч сузлар: (чизикли ва чизикли эмас кучириш тенгламалари, айирмали схема, югурувчи санак системалари)

Моддалардаги заррачаларнинг таркалиши буйича купгина масалалар мавжуд:реактордаги нейтронлар окимини аниклаш, газлардаги иссиқлик утказиш, атомлар ва электронлар диффузияси ва хакоза. Бундай масалалар кучириш тенгламасига олиб келинади. Умумий холда кучириш тенгламаси интегро-дифференциал курунишда булади. Унинг чизикли булгандаги дифференциал тенгламасини караймиз

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t) \quad , \quad (1)$$

бу ерда c-тезликни доимий деб караймиз. Агар c>0 булса тулкин чаптан унга таркалади. (1) тенглама учун масала куямиз.

$$u(x, 0) = \mu_1(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_2(x), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

Бу ерда (2) бошлангиш шарт (3) чегаравий шарт деб аталади ва (1)-(3) аралаш масаланинг ечими G=[0, a]x[0, T] сохада бир маънода аникланган булади.

Энди (1)-(3) масалани ечиш учун G сохада туртбурчакли тур(сетка) киритамиз

$$\omega_h = \{ x_i = ih, i=1, N-1, h=1/N \} \quad ,$$

$$\omega_\tau = \{ t_j = j\tau, j=1, M-1, \tau=T/M \} \quad ,$$

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau$$

ва куйидаги айирмали схемаларни езамиз.

$$[(y_i^{j+1} - y_i^j) + c (y_i^j - y_{i-1}^j) / h] / \tau = \varphi_i^j \quad (4)$$

$$\varphi_i^j = f(x_i - h/2, t_j + \tau/2)$$

$$[(y_{i-1}^{j+1} - y_{i-1}^j) + c (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}) / h] / \tau = \varphi_i^j \quad (5)$$

$$[(y_i^{j+1} - y_i^j) + c (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1}) / h] / \tau = \varphi_i^j \quad (6)$$

ва симметрияли булган

$$(y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1} - y_i^j - y_{i-1}^j) / 2\tau + c(y_i^{j+1} + y_i^j - y_{i-1}^{j+1} - y_{i-1}^j) / 2h = \varphi_i^j \quad (7)$$

бу айирмали схемаларни югурувчи санак схемалари деб айтилади ва (9) схема очик, колганлари епик схемалар булади. Лекин епик схемалар буйича хам хисоблашни очик схемадагидек ташкил килиш мумкин.

(4) схеманинг аппроксимация хатолигини текширайлик. Фараз килайлик бошлангиш маълумотлар икки марта узликсиз дифференциалланувчи $f(x, t)$ бир марта узликсиз дифференциалланувчи ва куйидаги шарт бажарилсин

$$\frac{d^q \mu_2(0)}{dt^q} = (-c)^q \frac{d^q \mu_1(0)}{dx^q}, \quad 0 \leq q \leq 2, \quad (8)$$

У холда $u(x, t)$ ечим икки марта узликсиз дифференциалланувчи булади ва унинг Тейлор каторига ёйилмасини оламир

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \tau (u_t')_i^j + \tau^2 (u_{tt}'')_i^j / 2$$

$$u_{i-1}^j = u_i^j - h (u_x')_i^j + h^2 (u_{xx}'')_i^j / 2$$

$$\varphi_i^j = f_i^j + \tau (f_t')_i^j / 2 - h (f_x')_i^j / 2$$

бундан (4) схеманинг невязиясини хисоблаймиз

$$\begin{aligned} \psi_i^j &= (\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x - f)_i^j - [(u_i^{j+1} - u_i^j) / h + c (u_i^j - u_{i-1}^j) / h - \varphi_i^j] = \\ &= \tau (f_t' - f_{tt}'')_i^j / 2 + h (c u_{xx}'' - f_x')_i^j / 2 = O(\tau + h) \end{aligned} \quad (9)$$

Шундай килиб (4) айирмали схема h ва τ буйича бир тартибли аппроксимацияга эга экан.

Бу (4) айирмали схеманинг тургунлигини максимум принципи ердамида аниқлаганимизда куйидаги курунишда булади.

$$1/\tau \geq c/h + |1/\tau - c/h|$$

бу тенгсизлик бажарилади агар Курант шarti бажарилса

$$c\tau \leq h \quad (10)$$

Демак айирмали схема (4) шартли тургун булади, яъни

$$||y^{j+1} - u^{j+1}||_c \leq ||y^j - u^j||_c, \quad j=0, 1, \dots, M. \quad (11)$$

бажарилади.

Колган схемаларнинг тургунлигини худди шундай усулда курсатиш мумкин. (5) схема тургунлик шarti

$$c\tau \leq h$$

булади ва $O(\tau + h)$ аниқлик билан яқинлашувчи булади.

(6) айирмали схема шартсиз тургун булиб юкаридаги фаразларда $O(\tau + h)$ тезлик билан якинлашувчи булади, яъни $y^j \rightarrow u^j$, агар $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$. (7) айирмали схема иккинчи тартибли аппроксимациягаэга, яъни $\psi_1^j = O(\tau^2 + h^2)$ булиб, шартсиз тургун схема хисобланади.

Чизикли тенгламаларнинг ечимлари узилишга эга булиши мумкин агар бошлангиш функциялар узилиш нукталарига эга булса. Аммо квазичизикли кучириш тенгламаларида узликсиз ва етарли даражада силлик бошлангиш функцияларда хам ечим узилиш нукталарига эга булиши мумкин. Шу узилиш нукталарига боглик ечимнинг характерини татбик килиш учун Квазичизикли тенгламали ва уни ечиш усуллари кайра келтирилди.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x, t, u > 0, \quad (12)$$

Квазичизикли кучириш тенгламасини $u > 0$ булган холда кайра келтирилди. Бошлангиш функцияларнинг асосий турт типига боглик квазичизикли тенглама ечими куйидаги характерларга эга булади:

1. Бошлангиш ва чегаравий функциялар узликсиз ва $u(x, 0)$ монотон камаймайди, $u(0, t)$ монотон усмайди, улар координат бошида мослашган. Ечим $u(x, t)$ биринчи квадрантта аникланган ва узликсиз. Унинг бу квадранттаги кийматлари характеристикалари буйича кучирилади. Агар чегаравий функция силлик функция булса, ечим $u(x, t)$ силлик булади.

2. Чегаравий функциялар монотон, лекин узилиш нукталарга эга булсин. Соддалик учун $u(0, t) = a, u(x, 0) = a$, агар $x < x_0, u(x, 0) = b > a$ агар $x > x_0$ булса. Узилиш нуктаси монотонлик хоссасини бузмайди. Узилиш нуктасининг чап томонида характеристикалар $1/a$ микдорга энгашган булади, унг томонида $1/b$ микдорга энгашган (1- расмни каранг). x_0 нуктадан иккита характеристика юргизганимизда уларнинг орасида ечим аникланмаганлигини кураимиз. Масалани коррект куйиш учун, ечимни аник эмас жойда аниклаймиз. Унинг учун бошлангиш функцияларнинг узилиш нукталарини текислаймиз. У холда янгидан аникланган ечим куйидагича булади

$$\begin{aligned} u(x, t) &= a && \text{агар } x - x_0 \leq at, \\ u(x, t) &= (x - x_0) / t && \text{агар } at \leq x - x_0 \leq bt \\ u(x, t) &= b && \text{агар } bt \leq x - x_0 \end{aligned} \quad (13)$$

Бу ечим $x = x_0, t = 0$ нуктадан бошка нукталарда узликсиз булади. Демак бундай холларда бошлангиш функцияларнинг узилиши вақт утиши билан текисланар (силликланар) экан. Аммо узилиш асорати қолади, узилиш нуктасидан уткан характеристикаларда ечимнинг хосиласи узилишга эга булади. Бундай ечимнинг хосиласи узилишга эга холни заиф узилиш дейилади.

3. Фараз килайлик юкарида кайд килинган монотонлик шarti бажарилмасин

$u(x, 0) = a$, агар $x < x_0$, $u(x, 0) = b$ агар $x > x_0$, лекин $a > b > 0$ булсин.

У холда характеристикалар 1-б расмдаги куринишда булади. x_0 нуктадан утувчи икки характеристика орасидаги нукталарнинг хар биридан иккита характеристика утади. Демак ечим икки характеристика ичида бир нуктада хар кил кийматга эга булади, бу мумкин эмас, шунинг учун узилиш фойда булади. Бу холда узликсиз ечим тузиб булмайди, яъни бошлангиш функцияларни силликлаш ердам бермайди ва ечим умумлашган ечимга айланади. Умумлашган ечим баъзи бир интеграл айниятни каноатлантиради, шунинг учун тенглама маънога эга эмас булиб қолади. Бу ерда физик маънога эга тенгламанинг дивергент шаклига утилади, яъни

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad x, t, u > 0, \quad (14)$$

Ечимди аниклаш учун, узилиш нуктадаги узилиш чизигининг эгилиши D тезликка баровар деб фараз килайлик, у холда ечим

$$u(x, t) = a, \quad \text{агар } x - x_0 \leq Dt, \quad (15)$$

$$u(x, t) = b, \quad \text{агар } Dt < x - x_0$$

D ни топиш учун (14) тенгламани томонлари τ ва $h=D\tau$ булган туртбурчакда интеграллаймиз

$$\int (u(x, t_{j+1}) - u(x, t_j)) dx + 1/2 \int (u_{\text{унг}}^2 - u_{\text{чап}}^2) dt = (a-b)h + (b^2 - a^2)\tau/2 = 0$$

бундан $D = (a+b)/2$ келиб чиқади. Бу ечимнинг узининг узилишини кучли узилиш деймиз (еки зарбали тулкин дейилади).

Энди квазичизикли масалаларни ечишнинг айирмали схемаларига утайлик. Узилишга эга ечимлари бор масалаларни бир жинсли айирмали схемалар ердамида каноатлантирарли даражада ечса булади. Масалан (6) схема. Лекин бир жинсли схемаларнинг аниклиги махсус схемалардан паст булади. Шунинг учун бундай тенгламаларни ечишнинг махсус схемалари тузилади. Улардан иккита холни курайлик

1. Псевдоепишкаклик усули. Квазичизикли тенгламаларни ечишда асосий кийинчилик ечимнинг кучли узилиши хисобланади. Бундай холларда тенгламага кичкина аъзо кушиш натижасида ечимни силлик ечимга айлантириш мумкин. Асосан силлик ечимлар тенгламада диссипатив аъзо сифатида епишкоккли суйкалиш кушилган тенгламаларда учрайди. Шунинг учун тенгламага кушилувчи кичкина кучимша епишкаклик ролини бажариши керак. Буни псевдоепишкаклик дейилади, еки сунъий епишкаклик. Демак берилган тенглама куйидаги тенгламага алмаштирилади

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x, t, u > 0, \quad (16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Бу тенглама иккинчи тартибли булади. ε^2 - кичик сон. Шу тенглама ечимлари орасида зарбали тулкин ечимга ухшаган ечимлар борми шуни текшираемиз, яъни

$$a \leq x \leq a + b \text{ агар } x < Dt$$

$$u(x, t) =$$

$$b \leq x \leq a + b \text{ агар } x > Dt$$

ухшаган $D = (a+b)/2$ тезлик билан ҳаракатланувчи (16) тенгламанинг автомодел ечимини куйидаги курунишда кидирамиз

$$u_\varepsilon(x, t) = f(x - Dt)$$

Буни (16) обариб куйсак

$$(\varepsilon^2 f'' + f - D)f' = 0.$$

Бундан $f_1 = \text{const}$,

$$f_2 = D + \text{const} \sin((x - Dt)/\varepsilon)$$

Шу ечимлардан умумий ечим тузиш мумкин

$$u_\varepsilon(x, t) = a \text{ агар } x - Dt \leq -\pi\varepsilon/2,$$

$$u_\varepsilon(x, t) = (a+b)/2 - (a-b)/2 \sin(x-Dt)/2, \text{ агар } -\pi\varepsilon/2 \leq x - Dt \leq \pi\varepsilon/2 \quad (17)$$

$$u_\varepsilon(x, t) = b \text{ агар } \pi\varepsilon/2 \leq x - Dt$$

Бу ечим узликсиз булиб колмасдан, булакларда узликсиз иккинчи тартибли хосилага эга булади. $\varepsilon \rightarrow 0$ да зарбали тулкин ечимга интилади. Демак (16) тенгламанинг силлик ечимларининг лимити сифатида (12) тенглама ечимларини олиш мумкин экан, ундай булса (12) тенгламани ечиш урнига (16) тенгламани биржинсли айирмали схемалар ердамида ечса булади. Шундай айирмали схемадан бирини курсатамиз

$$(y_i^{j+1} - y_i^j)/\tau + y_i^j (y_i^j - y_{i-1}^j)/h + (\varepsilon^2/(2h^3))[(y_{i+1}^j - y_i^j)^2 - (y_i^j - y_{i-1}^j)^2] = 0 \quad (18)$$

Чизикли эмас тенгламаларни чекли айирмалар усули билан ечишда унинг якинлашувчи булишини ҳамма вақтда катъий исбот қилиш мумкин була бермайди. Шунинг учун ҳисоблашларда аввал аппроксимациянинг борлиги текширилиб каdamни мойдалаш оркали кетма-кет ҳисоблашлар юргизилади, агар ечим бирорта функцияга интилса, у ҳолда ҳисоблашлар тургун деб ҳисобланиб, аппроксимация борлигидан якинлашувчилик ҳам булади деб фараз қилинади. Лекин бу айтилган фикр факат силлик ечимлар учун тугри булиб узилиши бор ечимлар учун бажарилмаслиги мумкин. Шунинг учун бундай ҳолни елган якинлашувлик дейилади. Бундай камчиликлардан холи булган консерватив айирмали схемалар тузиш мақсадга тугри булади. Консерватив айирмали схемалар деб турнинг харбир катагида физик сакланиш қонунлари бажариладиган схемаларга айтилади. Унинг учун куйидаги дивергент шаклдаги тенгламани курайлик

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad x, t, u > 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial t}{\partial x} = 2$$

Шу тенгламани турнинг катакларида интеграллаймиз

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (u^{j+1} - u^j) dx + \frac{1}{2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (u_i - u_{i-1}) dt = 0 \quad (20)$$

ва уни ҳамма катаклар буйича суммалаймиз

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{M-1} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} (u^{j+1} - u^j) dx + \frac{1}{2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (u_i^2 - u_{i-1}^2) dt \right] = 0 \quad (21)$$

Консерватив схема тузиш учун (20) даги интегралларни квадратур формулалар билан алмаштирамиз

$$(y_i^{j+1} - y_i^j) / \tau + ((y_i^2)^j - (y_{i-1}^2)^j) / 2h = 0 \quad (22)$$

Бу очик схема булади. Агар (20) тенгламадан бошқача усулда куйидаги эпик схемани олиш мумкин

$$(y_i^{j+1} - y_i^j) / \tau + ((y_i^2)^{j+1} - (y_{i-1}^2)^{j+1}) / 2h = 0 \quad (23)$$

(23) схемани ечиш учун куйидагича езиш кулай булади

$$y_i^{j+1} = -h/\tau + ((h/\tau)^2 + 2(h/\tau) y_i^j + (y_{i-1}^2)^{j+1})^{1/2} \quad (24)$$

Маъруза 11 (2-соат).

Мавзу: Чизикли параболик қуринишдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни чекли айирмалар усули билан ечинг.

Таянч сузлар: (дифференциал тенглама, параболик тенглама, айирмалар схема, эпик ва очик айирмалар схемалар)

Параболик масалаларга иссиқлик тарқалиш диффузия жараёнларини урганиш и олиб қаралади.

Куйидаги масалаларни олиб қараймиз

$$u_t(x, t) = k u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad x, t \in G \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \mu(x), \quad 0 < x < a, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(a, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$k = \text{const} > 0, \quad G = (0, a) \times (0, T)$$

G соҳада туртбурчакли турпи тузамиз

$$\omega_{ht} = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \omega_h = \{x_i = ih, i=1, N-1, h=a/N\}$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j=1, M-1, \tau=T/M\}$$

Шу турда параметрли икки катламли айирмалар схема тузамиз

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = k \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + \frac{k(1-\sigma)}{h^2} (y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \varphi_i^j \quad (4)$$

$$i=1, N-1, j=1, M-1, 0 < \sigma < 1,$$

$$y_0^{j+1} = \mu_1^{j+1}, y_N^{j+1} = \mu_2^{j+1}, j=0, M \quad (5)$$

$$y_i^0 = \mu_i, i=0, N, \quad (6)$$

σ - бу ерда бази параметри. Агар $\sigma = 0$ булса

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{k}{h^2} (y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j) + \varphi_i^j \quad (7)$$

очик схема фойда булади. $\sigma \neq 0$ булганда айирмали схема епик булади ва кувиш усли билан ечилади

$$y_{i+1}^{j+1} - (2 + h^2/k\sigma\tau)y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1} = (2(1-\sigma)/\sigma - h^2/k\sigma\tau)y_i^j - (1-\sigma)/\sigma(y_{i+1}^j + y_{i-1}^j) - h^2/k\sigma\varphi_i^j \quad (8)$$

$$y_0^{j+1} = \mu_1^{j+1}, y_N^{j+1} = \mu_2^{j+1}, j=0, M \quad (9)$$

$$y_i^0 = \mu_i, i=0, N, \quad (10)$$

булса кувиш усли шартлари шартлари бажарилади ва (8)-(10) система ягона ечимга эга булади. Тейлор котарига $u(x, t)$ - функциясининг турдаги нукталарида ейилмасини фойдаланип аппроксимация хоталигини аниқлаймиз

$$\psi_i^j = k\tau(\sigma - 1/2)u_{txx}''' + \tau^2/8(ku_{txx}'''' - u_{ttt}''')/3 + (kh^2/12)u_{xxxx}'''' + \varphi_i^j - \bar{f}_i^j + o(\tau^2 + h^2) \quad (11)$$

Бундан $\sigma = 1/2$, $\varphi_i^j = \bar{f}_i^j = f_i^{j+1/2}$ булганда $\psi_i^j = o(\tau^2 + h^2)$ булиб, колган холларда $\psi_i^j = o(\tau + h^2)$ эканлигини кураимиз. $\sigma = 1/2$ булган хол симметрияли схема еки Кранк -Никольсон схемаси деп аталади. Демак симметрияли схема икки кадам буйича хам иккинчи тартибли аппроксимацияга эга экан.

Энди бу айирмали схемаларнинг тургинлигини текширайлик. Айирмали схема тургун дейилади агар куйидаги тенгсизлик бажарилса.

$$\|y^j\|_1 \leq M_1 \|y^0\|_1 + M_2 \max \| \varphi^j \|_2, \quad (12)$$

Айирмали схема бошлангиш маълуматлар буйича бир тегис тургин дейилади агар куйидаги тенгсизлик бажарилса

$$\|y^j\|_C \leq M \|y^0\|_C, \quad M = \text{const}, \quad (13)$$

Айирмали схеманинг бошлангиш маълуматлар буйича бир тегис тургинлигидан, унинг унг томан буйича хам тургинлиги келип чиқади. Энди (4)-(6) айирмали схема тургинлигини текширайлик.

Узгарувчиларни таксимлаш усулини кулланамиз. Схеада $\varphi_i^j = 0$ деп оламиз ва

$$y_i^j = \exp(i\pi q x_i/a), y_i^j = \rho_q \exp(i\pi q x_i/a), \quad (14)$$

олмаштириш бажарсак куйидаги ифодани оламиз.

$$\rho_q = [1 - 4k\tau/h^2(1-\sigma)\sin^2(\pi q h/2a)] / [1 + 4k\tau/h^2\sigma\sin^2(\pi q h/2a)] \quad (15)$$

бу ерда $\sigma \geq 0$ булганда $\rho_q \leq 1$ эканин курамиз. Демак (4)-(6) айирмалари схема тургин булади агар $\rho_q \geq -1$ булса. Бу шарт бажарилишини осан куриш мумкин агар куйидаги тенгсизлик бажарилса

$$\sigma \geq 1/2 - h^2/4k\tau \quad (16)$$

Бундан куриш мумкин очик схема тургин булади агар

$$h^2/\tau \geq 2k \quad (17)$$

(16) тенгсизликтан куришиб турибди симметрияли ва епик схемалар абсолют тургин булади.

Хулоса қилиб айтганимизда айирмалари схемалар аниқлиги, яъни яқинлашни тезлиги аппроксимацияга боглиқ, чунки айирмалари схема тургин булгани учин яқинлашувчилик аппроксимация ва тургинликтан қилиб чиқади. Очик схема билан ҳисоблашлар унчалик юргизилмайди, сабаби h га нисбатан τ қадамни жуда майда олиш керак ва интервал охиригача куп ҳисоблашлар юритиш керак булади. Шунинг учин қушимча симметрияли схема фойдаланилади.

Маъруза 12 (2 - соат)

Мавзу : Чизикли эмас параболик масалаларни ечишнинг чекли айирмалари усуллари

Таянч сузлар : (чизикли эмас параболик тенглама, температура, квазичизикли тенглама, епик айирмалари схема, итерацион усул)

Квазичизикли параболик масалалар ҳисоблашлар учун етарли даражада қийинчилик тугдиради, сабаби

1. Бу масалаларда иссиқлик утқазгиш коэффициенти температурадан кучли боглиқ булади ва катта температураларда катта қийматларга эга булиши мумкин. Шунинг учун очик схемаларни умуман қулланиб бўлмайди.

2. Квазичизикли дифференциал тенглама ечимининг ҳосиласи айирим нукталарда шексизга айланиб кетиши мумкин. Бундай ечимлар узилишга эга ечимга яқин бўлиб, уларни ҳисоблашда ечимнинг сакраб узгаришини кузатамиз.

Шунинг учун қуйидаги квазичизикли дифференциал тенглама учун чегаравий ва бошланғиш масалани

$$u_t'(x, t) = (k(x, t, u)u_x'')' + f(x, t, u) \quad , \quad x, t \in G \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \mu(x) \quad , \quad 0 < x < a \quad , \quad (2)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t) \quad , \quad u(a, t) = \mu_2(t) \quad , \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$k = \text{const} > 0, \quad G = (0, a) \times (0, T)$$

епик айирмалари схемалар ердамида ечиш таклиф этилади. Шуларни қараймиз, биринчиси чизикли

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} [\chi_{i+1/2} (y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - \chi_{i-1/2} (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})] + \varphi_i^j \quad (4)$$

$$i=1, N-1, j=1, M-1,$$

иккинчиси чизикли эмас

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} [\chi_{i+1/2}^{j+1} (y_{i+1}^{j+1} - y_i^{j+1}) - \chi_{i-1/2}^{j+1} (y_i^{j+1} - y_{i-1}^{j+1})] + \varphi_i^{j+1} \quad (5)$$

$$i=1, N-1, j=1, M-1,$$

бу ерда

$$\chi_{i+1/2} = [k(x_i, t_j, y_i^j) + k(x_{i+1}, t_j, y_{i+1}^j)] ,$$

$$\chi_{i+1/2}^{j+1} = k(x_{i+1/2}, t_{j+1}, (y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1})/2), \quad (6)$$

шунга ухшаш

$$\varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_j, y_i^j) , \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_{j+1}, y_i^{j+1}) \quad (7)$$

(4) айирмали схема абсолют тургун булиб, аппроксимация хатолиги $O(\tau^2 + h^2)$. Ечим кувиш усули билан топилади. Иккинчи айирмали схема чизикли эмас булиб уни ечиш учун куйидаги итерацион усулни куллаш мумкин

$$\frac{(y_i^{j+1})^s - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{h^2} [(\chi_{i+1/2}^{j+1})^{(s-1)} ((y_{i+1}^{j+1})^s - (y_i^{j+1})^s) - (\chi_{i-1/2}^{j+1})^{(s-1)} ((y_i^{j+1})^s - (y_{i-1}^{j+1})^s)] + (\varphi_i^{j+1})^{(s-1)} \quad (5)$$

$$i=1, N-1, j=1, M-1,$$

$$(\chi^{j+1})^{(s-1)} = \chi^{j+1} ((y^{j+1})^{(s-1)}), (y_i^{j+1})^0 = y_i^{j+1}$$

Бу ерда $(y_i^{j+1})^s$ кийматлари кувиш усули билан топилади.

Энди куйидаги тенгламанинг

$$u_t'(x, t) = (k_0 u^{\sigma} u_x')(x, t)_{x'} , \quad k_0 > 0 , \sigma > 0, x, t > 0 \quad (9)$$

хусусий ечимларини татбик қилайлик. Фараз қилайлик $x=0$ да температура берилган булсин

$$u = u_0 t^n \quad (10)$$

ва (9) тенглама ечимини

$$u(x, 0) = 0 \quad (11)$$

да топиш керак булсин. Ечимди югирувчи тулкин куринишида излаймиз

$$u(x, t) = U(Dt - x), D = \text{const},$$

бу ерда $U(s)$ - номаълум функция. Буни (9) тенгламага куйиб ва куйидагиларни ҳисобга олган ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{dU}{ds}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{dU}{ds},$$

$$U(s) \text{ учун оддий дифференциал тенглама оламиз } DU' = (k_0 U^{\sigma} U')' .$$

Бундан куйидаги ифодани топамиз

$$k_0 U^\sigma U' = DU + \text{const.}$$

Агар $\text{const}=0$ десак, у холда

$$k_0 U^\sigma U' = DU \text{ еки } k_0 (U^\sigma)' / D\sigma = 1.$$

Буни яна интеграллаш оркали

$$k_0 / D\sigma U^\sigma = s + c_0 \text{ ни оламиз.}$$

$t=x=0$ булганда $U=0$ булганлиги учун, $c_0=0$ ва

$$u = U(s) = (D\sigma s / k_0)^{1/\sigma} = (D^2\sigma / k_0)^{1/\sigma} t^{1/\sigma} (1 - x/Dt)^{1/\sigma}.$$

$x=0$ да бунга эга буламиз

$$u(0, t) = (D^2\sigma / k_0)^{1/\sigma} t^{1/\sigma}.$$

Уни (10) билан солиштирсак, буларни топамиз

$$n = 1/\sigma, D^2\sigma / k_0 = u_0^\sigma.$$

Шундай қилиб (9) - (11) масала югирувчи тулкин курунишиндаги куйидаги ечимга эга булади

$$u(x, t) = u_0 t^{1/\sigma} (1 - x/Dt)^{1/\sigma} = u_0/D^{1/\sigma} (Dt - x)^{1/\sigma}, \quad 0 \leq x \leq Dt, \quad (12)$$

$$u(x, t) = 0 \text{ агар } x \geq Dt,$$

агар $n=1/\sigma$ бажарилса. Бу холда тулкин тезлиги чекли булиб k_0, σ, u_0 параметрлар ердамида аникланади

$$D = (k_0 u_0^\sigma / \sigma)^{1/2}$$

(12) шаклдаги ечимларга температура тулкини дейилади. Иссиклик оқимини топайлик

$$w = -k_0 u^\sigma \partial u / \partial x = k_0 u_0^{\sigma+1} / (\sigma D^{1+1/\sigma}) (Dt - x)^{1/\sigma} = k_0 u_0^\sigma / (\sigma D) u(x, t).$$

Шуннан куруниб турибдики температура тулкини фронтида $x=Dt$, $\sigma > 0$ булганда температура ва иссклик оқими нолга тенг булади, хосиласи эса

$$\partial u / \partial x = -u_0 / (\sigma D^{1/\sigma}) (1 / (Dt - x)^{1-1/\sigma})$$

$\sigma > 1$ булганда чексизга айланади, $\sigma = 1$ булганда чекли булади, $1 > \sigma > 0$ булганда нолга тенг булади. Шунинг учун $\sigma > 1$ булганда факат умумлашган ечим тугрисида айтиш мумкин.

Энди температура фронти кузгалмас булган холни $D=0$ курайлик. У холда ечим махсус чегаравий режимда мавжуд булади

$$u(0, t) = u_0 / (t_0 - t)^m \quad (13)$$

бу ерда t_0 эркин дойимий ва куйидаги бошлангиш шартнинг бажарилиши талаб этилади

$$u(x, -\infty) = 0.$$

(9) тенгламанинг ечимини узгарувчиларни булаклаш усули билан кидирамиз

$$u(x, t) = v(x)T(t).$$

Буни тенгламага обариб куйиб шунга эга буламиз

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} - (k_0 v^\sigma) = \frac{1}{T^{\sigma+1}} \frac{dT}{dt} = \lambda,$$

бу ерда λ - параметр. Бу ердан куйидагини оламиз

$$\frac{d}{dx} (k_0 v^\sigma) - \lambda = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dT}{dt} = \lambda T^{\sigma+1}. \quad (15)$$

(14) тенгламанинг ечимини куйидаги куринишда излаймиз

$$v^\sigma = \alpha (x_1 - x)^\beta,$$

бу ерда α ва β - номаълум сонлар, x_1 - хоклаган сон. Буни тенгламага куйамиз

$$k_0 \alpha^{1+1/\sigma} \beta / \sigma (\beta / \sigma + \beta - 1) (x_1 - x)^{\beta / \sigma + \beta - 2} - \lambda \alpha^{1/\sigma} (x_1 - x)^{\beta / \sigma} = 0.$$

Бундан топилади

$$\beta = 2, \alpha = \lambda \sigma^2 / (2 k_0 (2 + \sigma)).$$

Берилган тенгламани T учун интегралласак :

$$T(t) = [\lambda \sigma (c_0 - t)]^{-1/\sigma},$$

натижада шу функцияни оламиз

$$u(x, t) = v(x) T(t) = (\alpha / \lambda \sigma)^{1/\sigma} [(x_1 - x)^2 / (c_0 - t)]^{1/\sigma}.$$

Буни (13) чегаравий режим билан солиштирсак, топамиз

$$m = 1/\sigma, c_0 = t_0, u_0 = (x_1^2 \alpha / \lambda \sigma)^{1/\sigma} = (x_1^2 \sigma / (2 k_0 (\sigma + 2)))^{1/\sigma}$$

ва

$$x_1^2 = 2 k_0 (\sigma + 2) u_0^\sigma / \sigma.$$

Шундай қилиб (9) тенглама куйидаги ечимга эга булар экан

$$u(x, t) = u_0 [(1 - x/x_1) / (t_0 - t)]^{2/\sigma} \quad \text{агар } 0 < x < x_1, \quad (15)$$

$$u(x, t) = 0, \quad \text{агар } x > x_1,$$

бу ерда x_1 - киздириш сохасининг кенглиги.