

**Ташкентский автомобильно-дорожный институт**  
**Кафедра «Начертательная геометрия и графика»**

# Реферат

На тему:

**«Особенности линейчатых поверхностей»**

**Работу выполнил студент группы 436-08: Емельянов А.А**

**Научный руководитель: доцент Синдаров Р. У.**

*Ташкент 2008.*

## План:

1. Введение. Линейчатые поверхности.
2. Первоначальные сведения о поверхностях в целом.
3. Торсовые поверхности.
4. Линейчатые косые поверхности.
5. Поверхности Каталана.
6. Цилиндроподобные.
7. Коноиды.
8. Взаимное пересечение линейчатых поверхностей.
9. Взаимное пересечение конических поверхностей.
10. Взаимное пересечение конической поверхности с цилиндрической.
11. Взаимное пересечение цилиндрических поверхностей.
12. Развёртка торсовых поверхностей.
13. Заключение.

## Введение

Мир поверхностей разнообразен и безграничен Вы видите это сами каждый день в своём быту, по дороге на работу в институт и так далее. В своей работе я постараюсь Вас в этом убедить. Он простирается от элементарной, отличающейся простотой и математической строгостью плоскости до сложнейших, причудливых форм криволинейных поверхностей, не поддающихся математическому описанию.

Если смотреть с позиции геометрии- это линии и поверхности простых и сложнейших форм.

Удивительные по форме и относительной прочности поверхности встречаются и в природе. Давайте обратим внимание хотя бы на оболочку куриного яйца. Геометрическое совершенство придаёт ей высокую прочность, несмотря на малую толщину. Крыло и туловище птицы также имеет отработанные природой формы поверхностей. Совокупность этих поверхностей имеет прекрасные аэродинамические характеристики.

Корпуса самолётов, морских судов, автомобилей, оболочки надземных и подземных сооружений- это всё комплексы кусков поверхностей различных весьма сложных законов образования. А теперь, давайте рассмотрим конкретный пример поверхностей, таких как линейчатые, а также ряд поверхностей относящихся к этому семейству линейчатых. Об этом будет идти речь ниже.

## Линейчатые поверхности

Проведя ряд исследований на тему как образуются линейчатые поверхности, мы убедились в том что: Поверхность, образованную движущейся в пространстве производящей прямой, называют линейчатой.

Линейчатые поверхности по типу делят на две группы: развёртывающиеся – торсы и не развёртывающиеся (косые) поверхности.

Торсом называют линейчатую поверхность, которую можно (путём последовательных её изгибов по образующим) всеми точками совместить с плоскостью без складок и разрывов. У такой поверхности два бесконечно близких положения образующей или параллельны между собой, или пересекаются.

При разрыве поверхности на плоскость бесконечно малые плоские её отрезки, ограниченные бесконечно близкими образующими укладываются в плоскости, на которой производится развёртывание. В дифференциальной геометрии доказывается, что смежные образующие торсовой поверхности можно считать пересекающимися, если соблюдается условие что расстояние между точками соприкосновения касательных с ребром возврата торса есть бесконечно малая величина.

Формула определителя торса:

$$T((l^i, a) : l^i \cup a).$$

Рассмотрим ломанную пространственную линию. Продолжим все стороны такой ломаной линии в одном направлении получим последовательный ряд плоских отсеков, составляющих гранную поверхность, которая называется гранным торсом.

Если продолжить стороны ломаной линии в направлении, противоположном принятому, то получится другая половина (пола) гранного торса. Обе половины торса отделяются друг от друга ломаной линией. Теперь бесконечно увеличим число сторон пространственной ломаной линии. В соответствии с этим увеличится и число рёбер гранного торса.

В пределе ломаная линия превратится в кривую линию, гранный торс – в плавный торс, а рёбра торса займут положение касательных к кривой линии. (рис1) Торсовая поверхность состоит из двух полостей, линией раздела которых является ребро возврата поверхности.

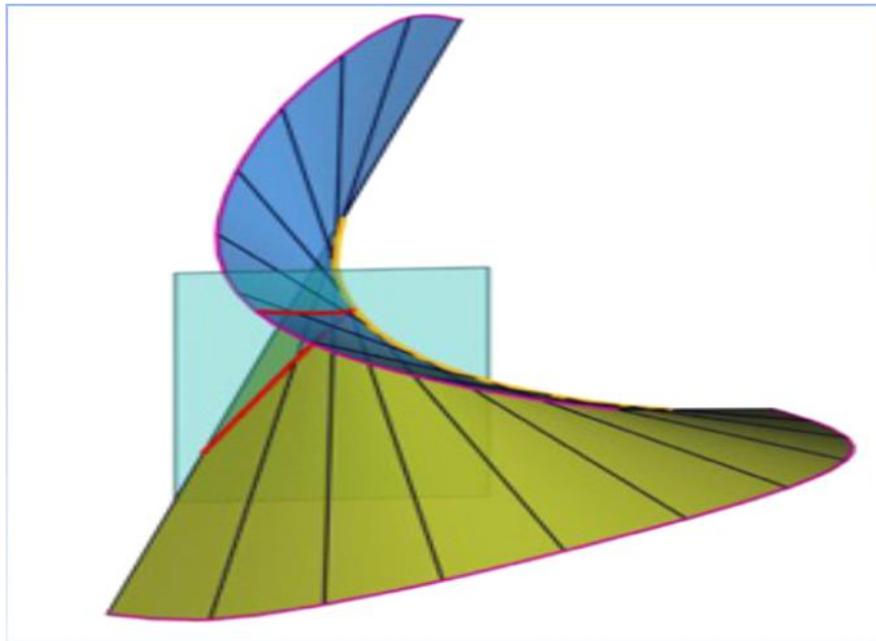


Рис.1

✓ Направляющая кривая торсовой поверхности называется ребром возврата торса.

Односторонне направленные полукасательные к кривой определяют одну полу поверхности торса .

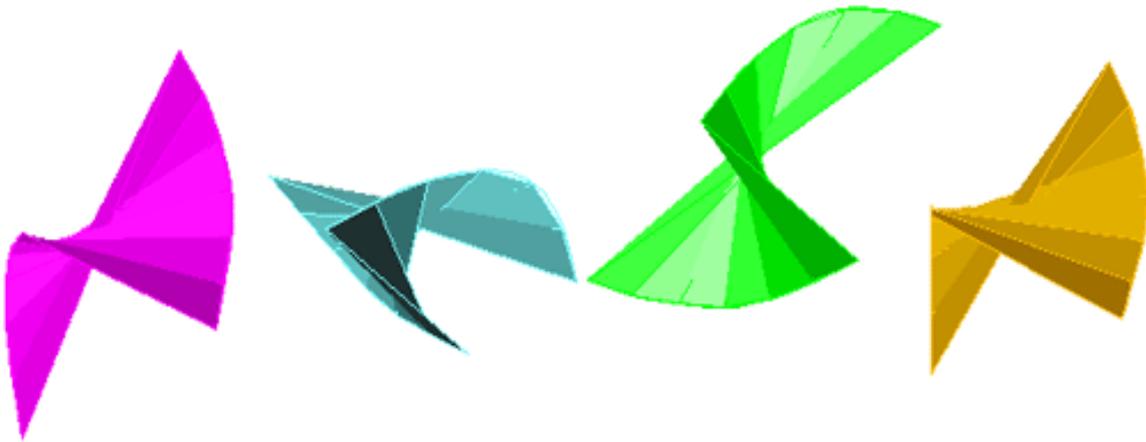
Поверхность торса образуется движением прямой линии (образующей), которая во всех положениях остаётся касательной к пространственной кривой линии- ребру возврата торса.

Касательную плоскость к поверхности торса можно определить как предельное положение плоскости , проходящей через образующие в двух бесконечно близких точках ребра возврата.

Если ребро возврата (пространственная кривая) поверхности торса преобразуется в точку , имеем коническую поверхность с вершиной в этой точке. Здесь вершина конуса не определяет задание поверхности. Если вершина конической поверхности удалена в бесконечность в заданном направлении ,имеем цилиндрическую поверхность.

Определителем поверхности с ребром возврата является пространственная кривая –ребро возврата поверхности : конической поверхности – направляющая кривая и вершина : цилиндрической поверхности – направляющая кривая и направление образующих.

## ЛИНЕЙЧАТЫЕ КОСЫЕ ПОВЕРХНОСТИ



Линейчатая неразвёртываемая (косая) поверхность может быть образована перемещением в пространстве прямой по некоторым направляющим линиям.

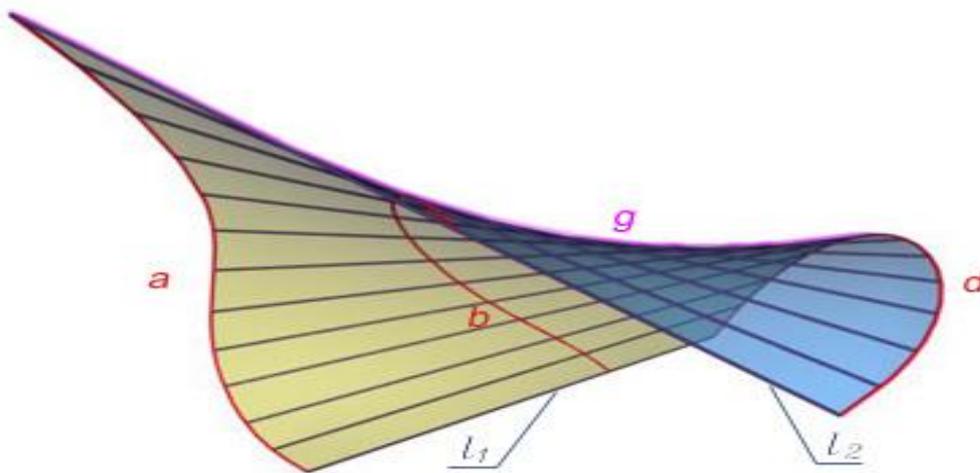


Рис.2

Для определения закона движения производящей , т.е. для определения полноты задания поверхности , необходимо иметь три направляющие линии. Ими и определяется характер движения производящей косой линейчатой поверхности

Направляющими линиями косых линейчатых поверхностей могут быть как кривые так и прямые линии.

Если же все три направляющие линии – прямые произвольного положения, то движением по ним производящей прямой линии образуется поверхность, которая получила название однополосный гиперболоид.

Если же направляющие прямые параллельны одной плоскости, то движением по этим прямым производящей прямой линии образуется поверхность – косая плоскость (гиперболический параболоид).

Одним из видов косых поверхностей являются линейчатые поверхности с направляющей плоскостью и линейчатые поверхности с плоскостью параллелизма. Введением в задание поверхности направляющей плоскости исключается одна из направляющих кривых линий косой поверхности.

Поверхностью с направляющей плоскостью называют линейчатую поверхность, у которой движущаяся производящая прямая линия не изменяет угла наклона к не подвижной плоскости, которая является направляющей плоскостью поверхности.

Производящая прямая линия, образуя поверхность, скользит по двум направляющим линиям, сохраняя постоянным угол наклона к направляющей плоскости.

Поверхности с направляющей плоскостью называют прямыми, если угол  $\alpha$  равен нулю. В этом случае производящая прямая параллельна направляющей плоскости, которую называют плоскостью параллелизма. В других случаях поверхности с направляющей плоскостью называют косыми поверхностями.

Поверхности с направляющей плоскостью называют косыми или прямыми цилиндрами, если обе направляющие являются кривыми линиями. Если одна из направляющих линий прямая, то данную поверхность называют косым или прямым коноидом. Если обе направляющие линии – прямые (или скорее очевидно, они скрещивающиеся прямые линии), то поверхность называют дважды косой плоскостью.

Прямые цилиндры, прямые коноиды и косые плоскости называют поверхностями Каталана или поверхностью с плоскостью параллелизма.

### ➤ Линейчатые поверхности Каталана

Из общего числа косых поверхностей предлагаю рассмотреть их обширную группу – поверхности с плоскостью параллелизма. Косые поверхности с

плоскостью параллелизма впервые были рассмотрены Гаспаром Монжем. Такие поверхности Монж считал образованными движением производящей прямой линии по двум направляющим или по двум поверхностям, которая во всех своих положениях параллельна некоторой плоскости.

Дальнейшее углубление исследование поверхностей с плоскостью параллелизма дано бельгийским учёным Каталаном, имя которого и носят эти поверхности.

Поверхности с плоскостью параллелизма по их образованию направляющими линиями делят на три группы: первая группа – цилиндриды, когда обе направляющие являются кривыми линиями; вторая группа – коноиды, когда одна из направляющих является прямой линией; третья группа – косые плоскости (гиперболические параболоиды), когда обе направляющие являются прямыми линиями.

**Формула определителя поверхности Каталана:**

$$B((l^i, a, b, \Delta) : l^i \cap a, b; l^i \parallel \Delta).$$

### ➤ Цилиндроида

Прежде чем говорить о цилиндроиде важно заметить что, поверхность прямого цилиндрида образуется в том случае, когда направляющие  $a$  и  $b$  гладкие кривые линии, причём одна из них должна принадлежать плоскости, перпендикулярной плоскости параллелизма.

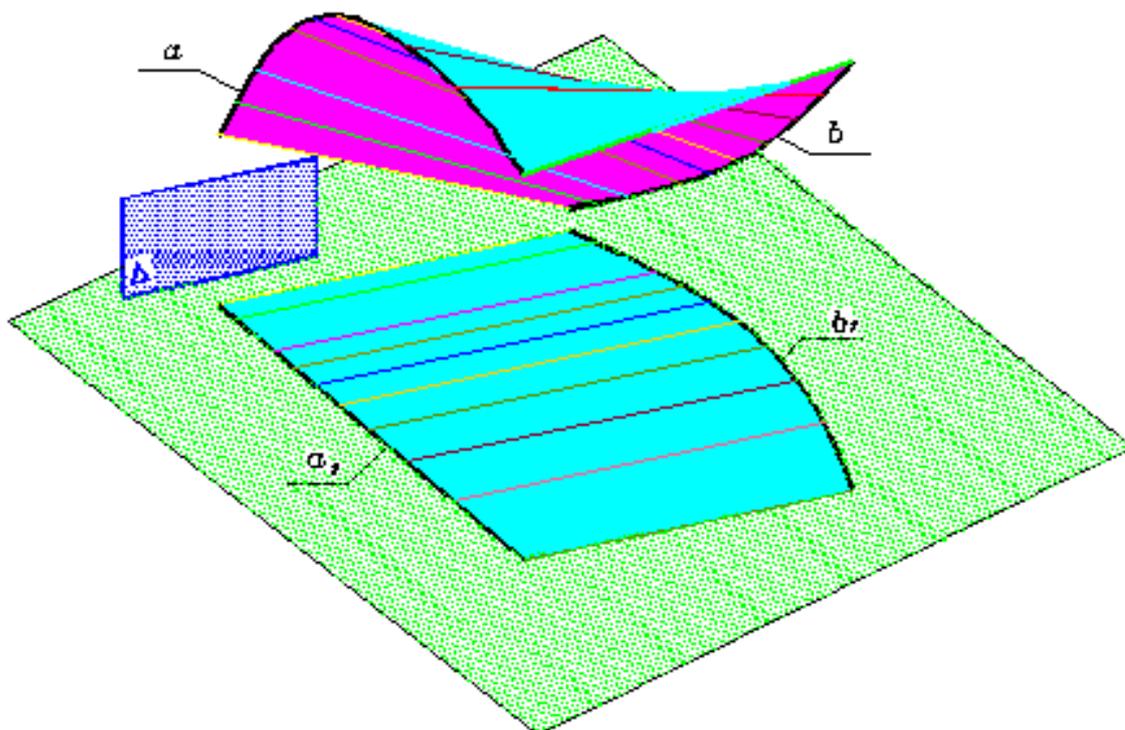


Рис.3 (поверхность прямого цилиндрида)

Рассмотрим образование цилиндрида. Возьмём цилиндр рис(4) образующими, которого являются горизонтальные прямые линии. В данном случае они взяты параллельно и плоскости V. Цилиндр пересечём горизонтально-проецирующими плоскостями N1h и N2h. Эти плоскости между собой пересекаются по вертикальной прямой линии fg,и f`g`. Сечениями цилиндра являются кривые линии a` b`и c d, c` d`. Оставляя одно из сечений неподвижным, например cd, c` d` перемещаем другое сечение ab, a` b`, в направлении проецирующих лучей плоскости N1h на величину z. Это сечение занимает новое положение a1b1, a` b`.

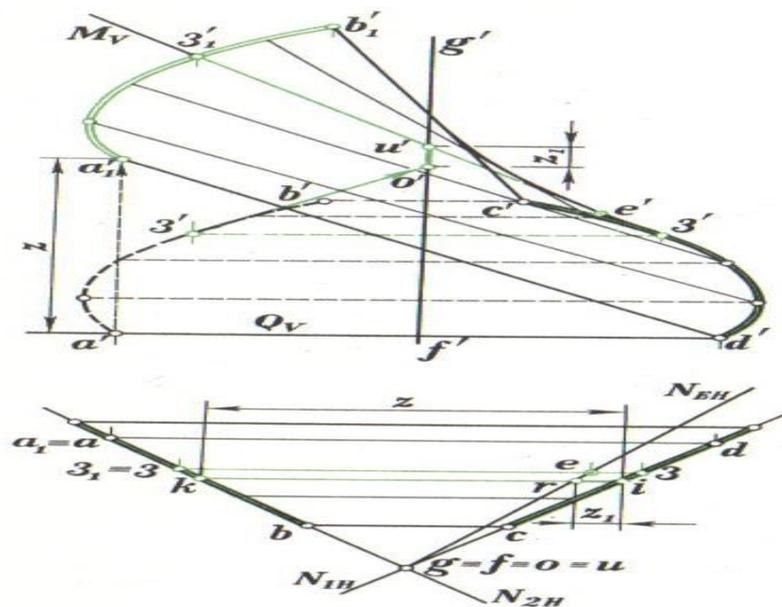


Рис.4

При таком перемещении образующие поверхности остаются параллельными фронтальной плоскости проекций, но они не параллельны между собой. Образуется новая линейчатая поверхность которая получила название – цилиндриод.

Любая из плоскостей, проходящих через линию  $fg, f'g'$ , пересекает основной цилиндр и цилиндриод по равным и параллельным кривым линиям.

Фронтальная плоскость проекций для рассматриваемой поверхности является плоскостью параллелизма. Фронтальный очерк цилиндриода представляет собой проекцию на плоскость параллелизма линии сужения.

Точки линии сужения строятся с помощью касательных плоскостей к рассматриваемой поверхности.

Покажем построение точки линии сужения, принадлежащей, например, образующей  $331, 3'3'1'$ . В точке  $33'$  кривой линии  $ab, a'b'$  проведём касательную и отметим точку  $oo'$  пересечения её с прямой линией  $fg, f'g'$ .

Отметим также точку  $uu'$  пересечения фронтально проецирующей плоскости  $Mv$  прямой линии  $331, 3'3'1'$  с прямой  $fg, f'g'$ . Отрезок  $ik$  равен величине  $z$  смещения в плоскости  $N1h$  точек кривой линии  $a, b, a'b'$ .

Отложим на прямой  $ik$  от точки  $i$  отрезок  $gi$ , равный отрезку  $z1 = oo'$ , и проведём через точку  $g$  след  $NEH$ , секущей плоскости. Образующая  $331, 3'3'1'$  пересекается с этой плоскостью в точке  $ee'$ , которая является искомой точкой линии сужения. Повторяя подобные построения для других образующих цилиндриода, можно построить линию сужения этой поверхности.

Цилиндроида находят применение непосредственно в инженерном деле: в строительстве гидроэнергетических сооружений, в машиностроении, кораблестроении, и т.п. Они используются также в сельскохозяйственном машиностроении

### ➤ Коноиды

Рассмотрим коноиды, у которых направляющая прямая перпендикулярна к плоскости параллелизма. Чертёж такого коноида строиться достаточно легко, если дана зависимость между расстоянием производящей линии от плоскости параллелизма и углом  $\beta$  поворота производящей вокруг оси. Прямой закрытый геликоид может рассматриваться как коноид, для которого между величинами  $z$  и  $\beta$  существует линейная зависимость

$$Z = p \times \beta,$$

Где  $P = \frac{z}{\beta} = \text{const}$  винтовой параметр геликоида.

На рис(5) показан коноид, поверхность которого задана направляющими линиями : кривой, вертикальной прямой (ось коноида) и плоскостью параллелизма  $Qv$  параллельна  $H$  .

Коноид пресечён соосным с ним цилиндром радиуса  $r$  . Линией их пересечения является кривая  $a1b1, a1', b1'$  . Развернём цилиндр в плоскости  $V$  . Преобразованием линии пересечения является кривая  $A1B1$  . Построим оси координат для этой линии.

На оси ординат отложены величины  $Z$  подъёма производящей прямой линии над плоскостью параллелизма  $Qv$  . На оси абсцисс отложены величины  $r, \beta$ , где  $\beta$ -угол поворота производящей линии .

Винтовой параметр коноида в любой точке поверхности может быть определён из графика  $z = f(\beta)$  В соответствующей точке кривой линии  $A1B1$  графика проводим к ней касательную. Тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс при  $r = 1$  показывает величину винтового параметра .

Определяя винтовые параметры коноида для различных положений производящей линии , можно построить кривую зависимости  $p = f(\beta)$  второго графика, выявляющую характер изменения формы поверхности в зависимости от угла поворота  $\beta$  производящей линии.

Поверхность у которой между величинами  $z$  и  $(\beta)$  имеется зависимость  $z = k \times \sin 2\beta$ , называют коноидом Плюкера.

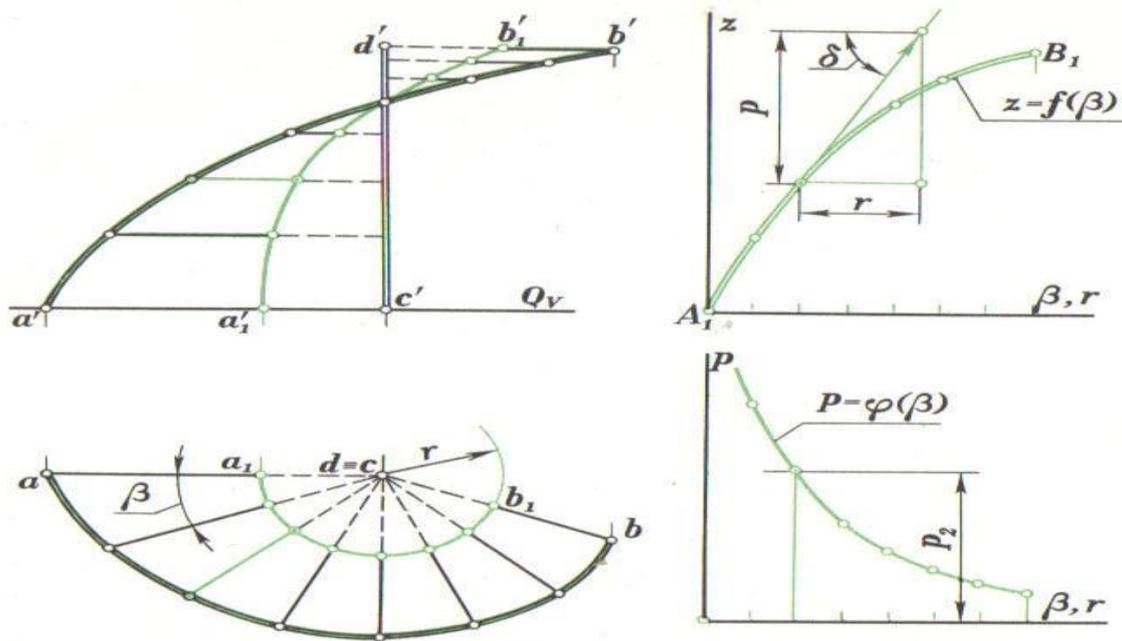


Рис.5

На рис(5) показан коноид Плюкера, ограниченный одноосным с ним цилиндром с радиусом  $r$ . Коноид с цилиндром пересекается по кривой линии, которая в развёртке представляется синусоидальной кривой линии, построенной в координатах  $k \times \sin 2\beta$  и  $r, \beta$ . Эту кривую линию легко построить по заданным величинам  $k$  и  $r$ .

Винтовой параметр коноида Плюкера определяется уравнением

$$P = \lim \Delta z / \Delta \beta = 2k \times \cos 2\beta.$$

Из этого уравнения следует, что винтовой параметр коноида равен нулю для положений  $bd, b'd'$  и  $a'c'$  производящей линии. Эти прямые линии называют линиями торса коноида.

Построив развёртку цилиндра, соосного с коноидом Плюкера, можно определить винтовой параметр в любой точке этой поверхности. На рис (6) (внизу справа) дано изображение поверхности коноида Плюкера в аксонометрии.

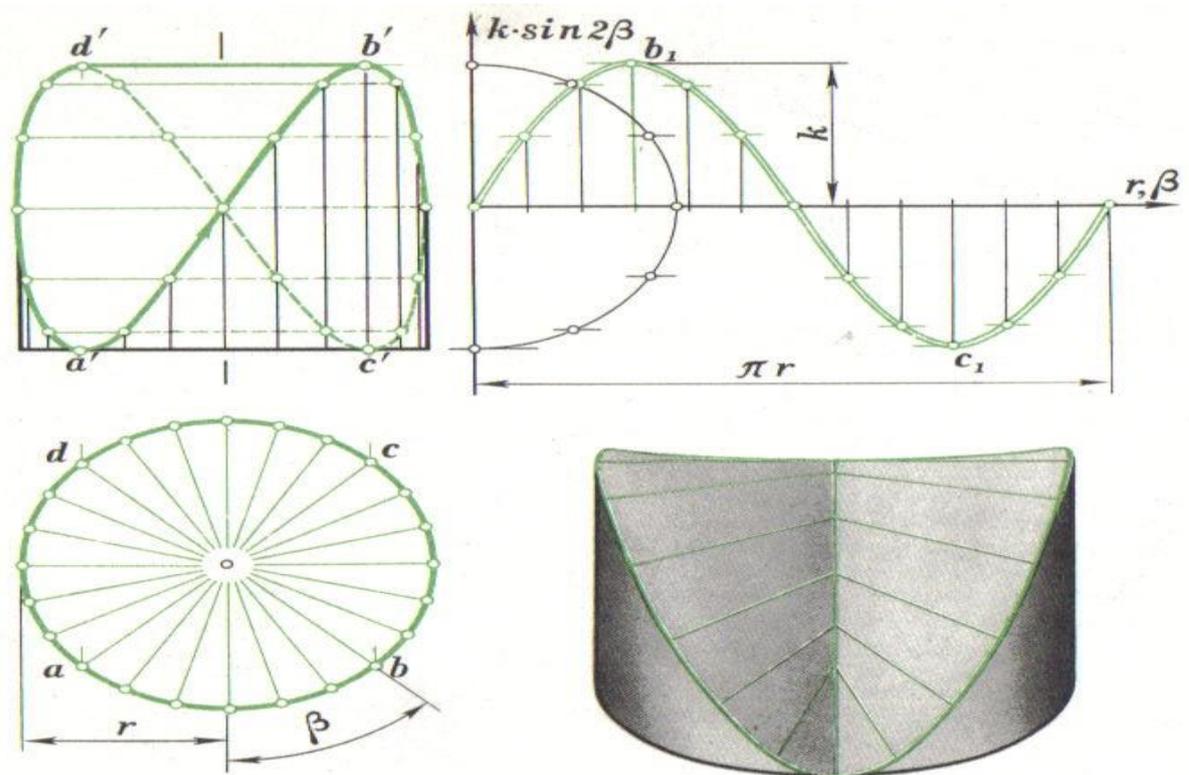


Рис.6

Частный вид коноида представлен на рисунке (7). Здесь направляющие линии поверхности ориентируются относительно пространственной прямоугольной декартовой системы координат следующим образом. Плоскость направляющей кривой (окружности) параллельна координатной плоскости  $xOz$ . Координатная плоскость  $xOy$  пересекает окружность по диаметру. Направляющая прямая находится на оси  $Ox$ . Третья координатная плоскость  $yOz$  является плоскостью параллелизма.

Такой вид поверхности используется в строительной технике при конструировании оболочек покрытий промышленных и общественных зданий. Рис(8),

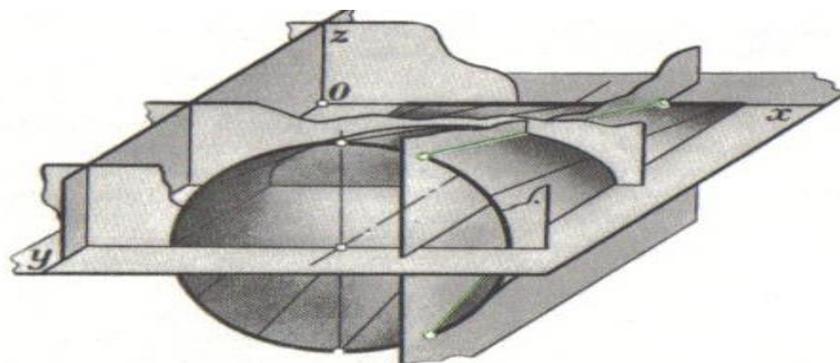


Рис.7

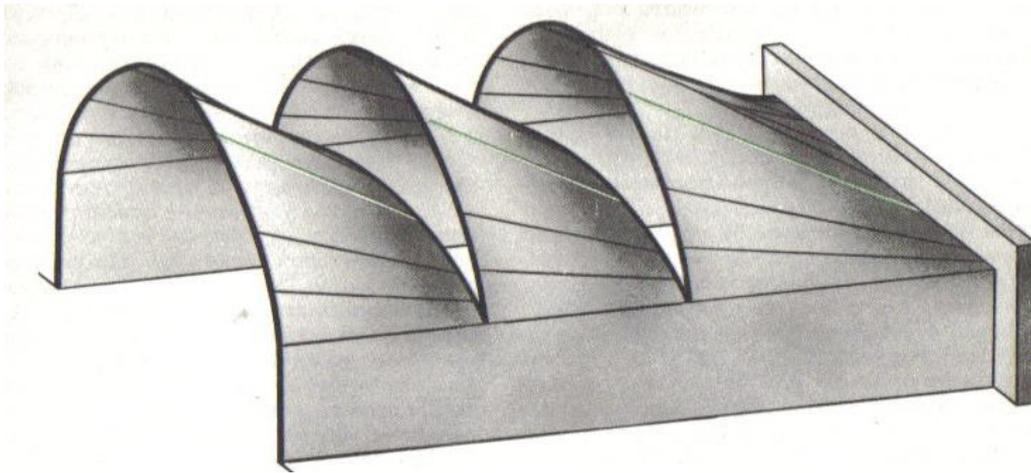


Рис.8

При конструировании устоев мостов и других гидротехнических сооружений. Поверхностями коноидов оформляются арки окон и дверей в прямых стенах зданий Рис(9) проёмы в цилиндрических башнях водозаборных сооружений Рис(10). В кораблестроении (рис11) коноиды используются для правильного конструирования носа ледореза, носа быстроходного судна. В авиационной промышленности – при конструировании летательных аппаратов. В сельскохозяйственном машиностроении коноидами представляются : отвалы плугов, шнеки конические прямоугольные пружины и т.д.

Эти примеры вы можете видеть буквально каждый день, но при этом не догадываться что именно основываясь на этих теоретических материалах были сделаны эти предметы.

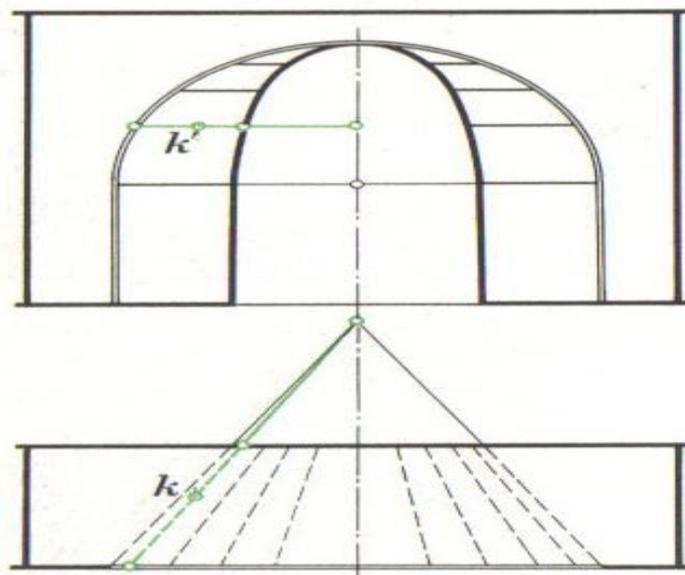
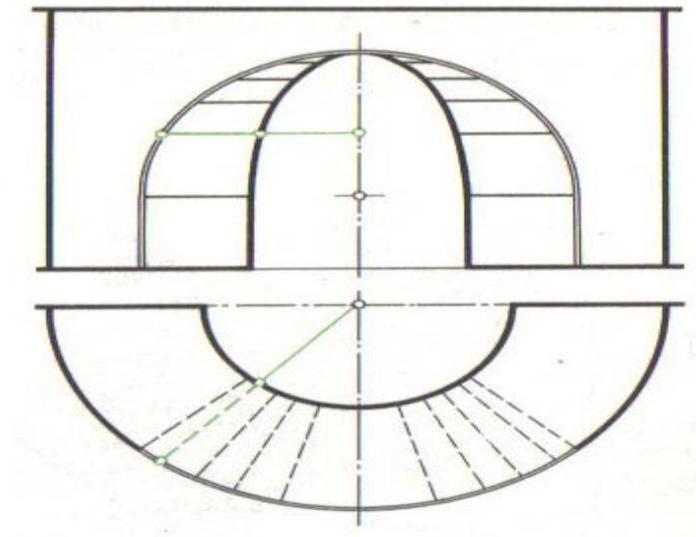


Рис 9.



**рис 10.**



**Рис .11**

**( Пример построения носа ледокола. ) основан на теории о коноидах.**

**➤ Взаимное пересечение линейчатых поверхностей.**

**Теперь бы мне хотелось дать краткую характеристику этому важному разделу в своём реферате.**

**Линии пересечения двух линейчатых поверхностей определяется по точкам пересечения прямолинейных образующих одной поверхности с другой поверхностью.**

**Чтобы определить точки ,общие для двух поверхностей , можно использовать вспомогательные секущие плоскости – посредники.**

**Любая плоскость, проходящая, например, через вершину конической поверхности, пересекает её по прямолинейным образующим.Очевидно,и любая плоскость, проходящая через прямую вершин двух пересекающихся конических поверхностей, пересекает каждую из них по прямолинейным образующим.**

**Точки пересечения таких образующих являются точками линии пересечения поверхностей.**

**Секущие плоскости , проходящие через вершину двух конических поверхностей, образуют пучок плоскостей с действительной (собственной) прямой. Это справедливо и для цилиндрических поверхностей, если рассматривать их как конические с несобственными вершинами. В этом случае мы имеем пучок плоскостей с несобственной(бесконечно удалённой) прямой.**

**Выбирая из пучка несколько вспомогательных секущих плоскостей, получаем выше описанным способом ряд точек линии пересечения данных плоскостей.**

**Бывает целесообразно переиздать чертёж, что бы представить поверхности в частном положении, и уже после этого использовать секущие плоскости –посредники.**

**Рассмотрим графические алгоритмы определения линии пересечения некоторых линейчатых поверхностей.**

**Взаимное пересечение конических поверхностей: Способ пучка плоскостей наиболее удобен для определения линии пересечения двух конических поверхностей, если поверхности имеют плоские направляющие.**

**Направляющие линии могут принадлежать как одной общей плоскости, так и разным плоскостям.**

**Если направляющими поверхностей являются пространственные кривые линии, то их можно заменить на плоские кривые, пересекая каждую из поверхностей плоскостью, и использовать как направляющие.**

**Построение линии взаимного пересечения двух конических поверхностей на эюре Монжа в значительной мере упрощается, если направляющие линии поверхностей лежат в проецирующей плоскости.**

**Рассмотрим схему построения линии пересечения двух конических поверхностей с направляющими линиями, лежащими в плоскости  $\Sigma$  (рис 12).**

**Алгоритм решения:**

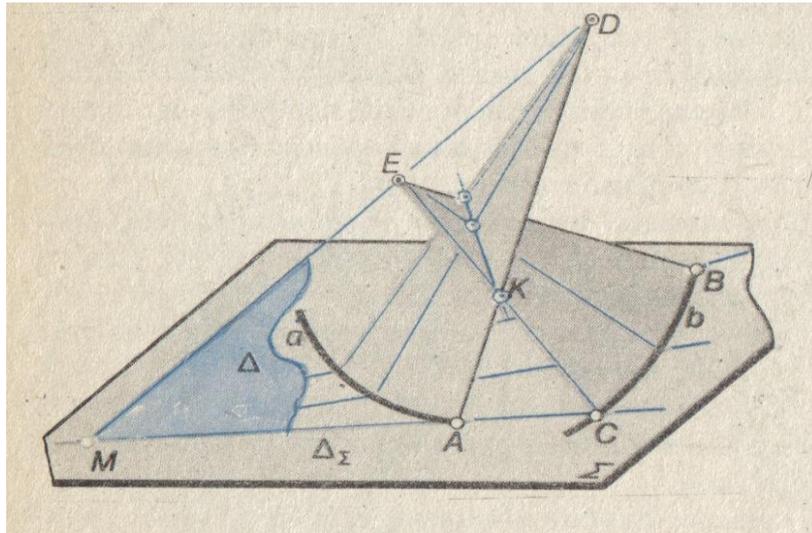


рис 12.

$\Delta \cap \Theta_1(D, a) = DA;$

$\Delta \cap \Theta_2(E, b) = EC$

$DA \cap EC = K;$

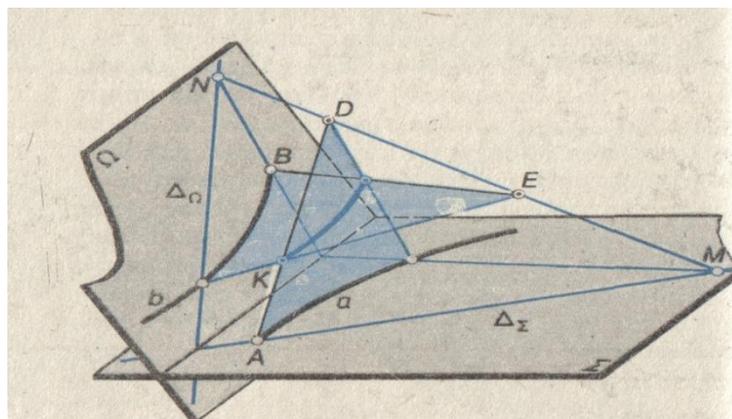
.....

$M = \Theta_1 \cap \Theta_2.$

Коническая поверхность  $\Theta_1$  с вершиной  $D$  имеет направляющую  $a$  : коническая поверхность  $\Theta_2$  с вершиной  $E$  имеет направляющую  $b$ .

Секущие вспомогательные плоскости-посредники  $\Delta$  проходят через прямую  $DE$  вершин конических поверхностей. Точка  $M$  – след этой прямой на плоскости  $\Sigma$ . Каждая из секущих плоскостей пересекает данные поверхности по прямолинейным образующим. Точки пересечения соответствующих образующих, например точка  $K$ , являются точками искомой линии пересечения.

На рисунке 13 схема построения линии пересечения двух конических поверхностей, направляющие линии которых лежат в разных плоскостях.



### Рис.13

Направляющая  $a$  конической поверхности с вершиной  $D$  лежит в плоскости  $\Sigma$ , направляющая  $b$  другой поверхности с вершиной  $E$  – в плоскости  $\Omega$ .

Прямая линия, проходящая через вершины  $D$  и  $E$  конических поверхностей, пересекается с плоскостью  $\Sigma$  в точке  $M$ , а с плоскостью  $\Omega$  – в точке  $N$ .

Следы  $\Delta\Sigma$  вспомогательных секущих плоскостей  $\Delta$  на плоскости  $\Sigma$  проходят через точку  $M$ : следы  $\Delta\Omega$  этих плоскостей на плоскости  $\Omega$  проходят через точку  $N$ . Следы пересекаются между собой в точках на прямой линии пересечения плоскостей  $\Sigma$  и  $\Omega$ .

Через прямую  $DE$  проводим ряд плоскостей- посредников и определяем линии их пересечения с заданными поверхностями – образующие поверхностей. По точкам пересечения прямолинейных образующих строим линию взаимного пересечения конических поверхностей.

Рассмотрим примеры применения указанных схем к решению задач на эюре Монжа.

На рисунке 14 показано пересечение конуса с треугольной пирамидой. Круговое основание конуса и основание конуса (треугольник) находятся в одной (горизонтальной) плоскости  $\Sigma$ .

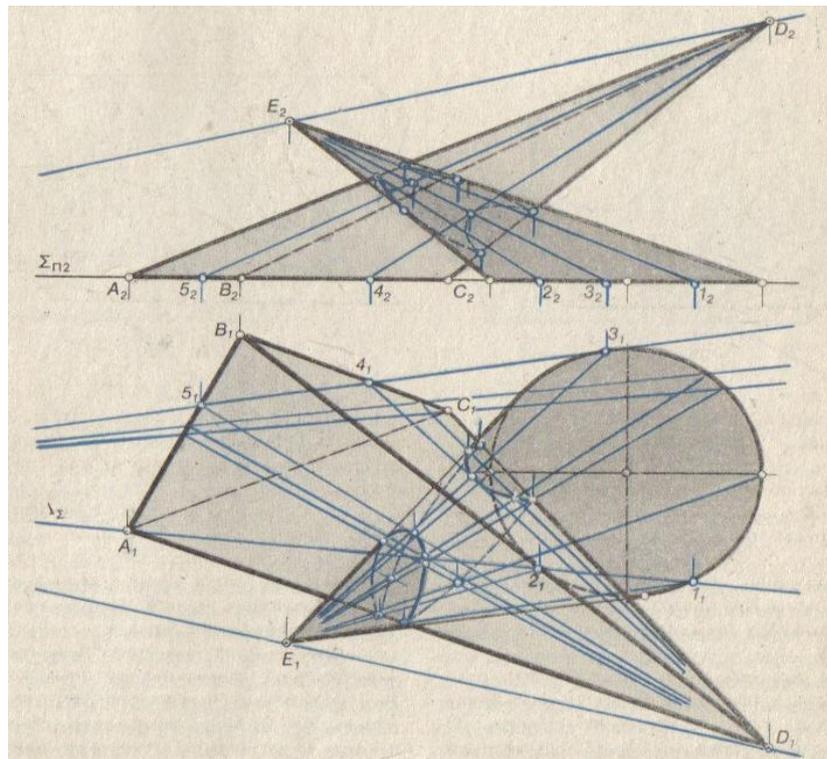


Рис.14

Прямая линия DE вершин конических поверхностей( пирамиду можно считать многогранной конической поверхностью) пересекается с плоскостью  $\Sigma$  в точке M ( на чертеже она не показана.) Прямая DE является прямой линий пучка плоскостей- посредников. Каждая из таких плоскостей пересекает заданные поверхности по прямолинейным образующим. Точки пересечения образующих принадлежат линии пересечения поверхностей.

Сначала выбирают предельные плоскости- посредники, каждая из которых касается одной поверхности и пересекает другую.

Если обе предельные секущие плоскости касаются одной поверхности и пересекают другую поверхность, то все образующие первой поверхности пересекают вторую поверхность.

В этом случае получаются две кривые линии пересечения поверхностей. Одна из них является кривой точек входа образующих одной поверхности в другую, а вторая- кривой точек их выхода. В других случаях пересечения имеет вид неполной врезки.

По следам  $\Delta \Sigma$  предельных секущих плоскостей устанавливаем, что имеет место случай неполной врезки.

Выбираем следы вспомогательных секущих плоскостей-посредников, проходящие через вершины треугольника основания пирамиды и через точки направляющей линии конуса, принадлежащие его очерковым образующим. Затем намечаем следы промежуточных вспомогательных плоскостей. По

следам секущих плоскостей определяем прямолинейные образующие поверхностей. Они пересекаются между собой в точках, принадлежащих искомой линии пересечения.

Последовательность соединения точек линии пересечения поверхностей определяем методом обхода направляющих линий. Обходя направляющую конуса, например против хода часовой стрелки от точки 1 до точки 2, плавной кривой линией соединяем точки пересечения прямолинейных образующих конуса с гранями пирамиды. При этом совершаем одновременно и обход направляющей линии пирамиды против хода часовой стрелки от точки А до точки 4.

Таким образом устанавливаем последовательность соединения точек пересечения части прямолинейных образующих поверхностей.

Остальную часть линии пересечения определяем обходом направляющей линии конуса по ходу часовой стрелки от точки 2 до точки 1. Одновременно определяем обходом и направляющую линию пирамиды по ходу часовой стрелки от точки А до точки 5.

Так устанавливаем последовательность соединения точек оставшейся части линии пересечения поверхностей.

Сначала определяем линию пересечения поверхностей в горизонтальной проекции и в проекционной связи определяем фронтальную её проекцию.

При построении фронтальных проекций точек линии пересечения более точные результаты можно получить, если их определять как точки пересечения фронтальных проекций соответствующих образующих, а затем проверить графические построения с помощью соответствующих линий связи.

Наибольшая наглядность изображения поверхностей достигается, если видимые их линии обводить сплошными линиями, а невидимые — штриховыми. В проекции видимыми точками линии пересечения поверхностей являются только те точки, которые принадлежат двум видимым в этой проекции образующим заданных поверхностей.

Если прямая DE вершин двух конических поверхностей параллельна плоскости их направляющих линий, то следы вспомогательных секущих плоскостей-посредников пересекаются в несобственной точке. В этом случае, а также если точка пересечения прямой DE с плоскостью направляющих линий конических поверхностей находится за пределами чертежа, пользуются дополнительными сечениями. Обе заданные конические поверхности пересекают плоскостью, параллельной прямой их вершин, и линии сечения принимают за направляющие линии.

На рисунке 15 указан способ определения точек линии пересечения двух конических поверхностей с направляющими линиями в разных проецирующих плоскостях.

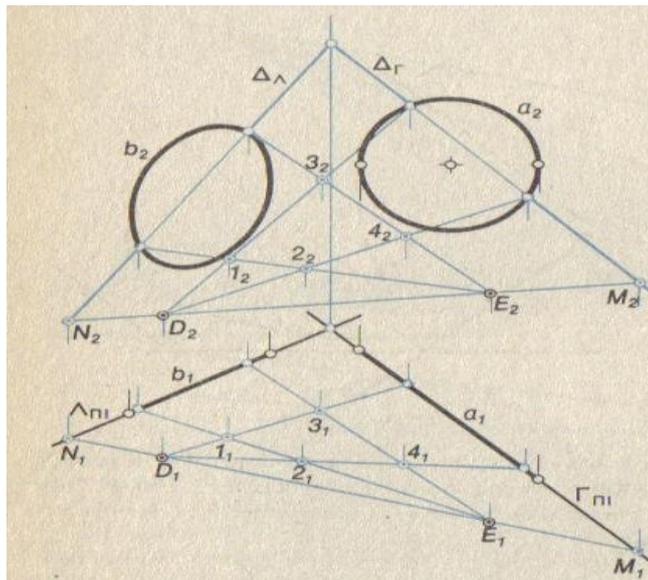


Рис.15

Коническая поверхность с вершиной  $D$  имеет направляющую  $a$  в горизонтально-проецирующей плоскости  $\Gamma$ . Коническая поверхность с вершиной  $E$  имеет направляющую  $b$  в горизонтально проецирующей плоскости  $\Delta$ .

Прямая  $DE$  проходит через вершины конических поверхностей и пересекается с плоскостью  $\Gamma$  в точке  $M$ , а с плоскостью  $\Delta$  - в точке  $N$ .

Любая вспомогательная секущая плоскость  $\Delta$ , проходящая через прямую  $DE$ , пересекает конические поверхности по прямолинейным образующим.

Следы  $\Delta\Gamma$  и  $\Delta\Delta$ , плоскости  $\Delta$  пересекают направляющие линии поверхностей в точках, через которые проходят их прямолинейные образующие. Точки 1,2,3 и 4 пересечения таких образующих являются точками линии пересечения конических поверхностей. Выбирая несколько секущих плоскостей-посредников, определяем ряд точек линии пересечения поверхностей.

Последовательность соединения точек, образующих для двух поверхностей, устанавливается одновременным обходом направляющих линий.

На рисунке 16 показан способ определения точек линии пересечения конических двух поверхностей с направляющими линиями в разноимённых проецирующих плоскостях  $\Gamma$  и  $\Phi$ . прямая  $DE$  проходит через вершины  $D$  и  $E$  конических поверхностей. Она пересекается с горизонтально проецирующей

плоскостью  $\Gamma$  в точке  $M$  ( на чертеже не показана), с фронтально проецирующей плоскостью  $\Phi$  – в точке  $N$ .

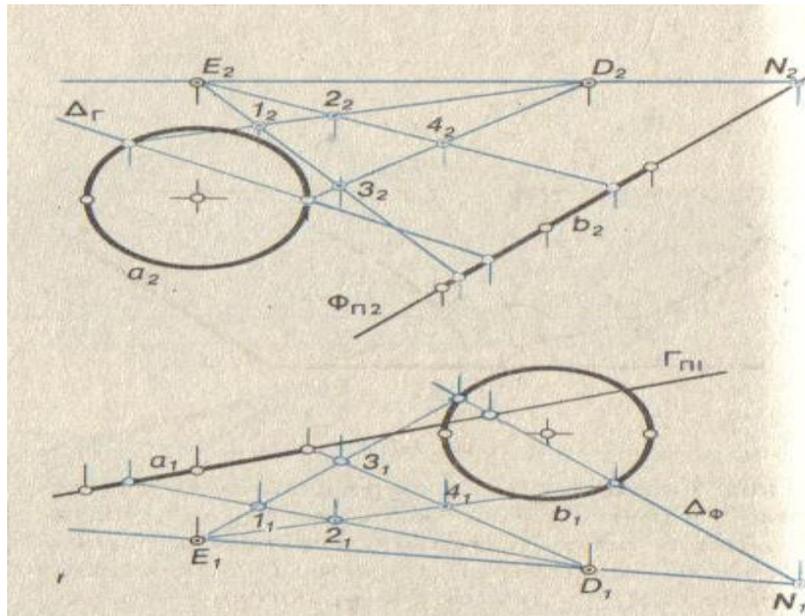


Рис.16

Следы  $\Delta\Gamma$  и  $\Delta\Phi$  любой вспомогательной секущей плоскости  $\Delta$  на плоскостях  $\Gamma$  и  $\Phi$  пересекают направляющие линии конических поверхностей в точках, через которые проходят их прямолинейные образующие. Такие образующие пересекаются в точках 1,2,3и 4. Они и являются точками линии пересечения поверхностей.

Выбирая другие секущие плоскости-посредники, определяем ряд промежуточных точек линии пересечения поверхностей.

### Пересечение конической поверхности с цилиндрической

Пусть коническая поверхность задана направляющей кривой линией  $a$ , в плоскости  $\Sigma$  и вершиной  $D$  (рис 17). Цилиндрическая поверхность задана направляющей кривой  $b$ , в этой же плоскости  $\Sigma$  и прямолинейной образующей  $g$ .

Цилиндрическую поверхность будем рассматривать как коническую с несобственной вершиной. В этом случае прямая пучка плоскостей-посредников проходит через вершину  $D$  конической поверхности параллельно образующим цилиндрической поверхности.

Секущие плоскости-посредники  $\Delta$  пересекают каждую из поверхностей по прямолинейным образующим. Точки пересечения (точка К) таких образующих являются точками линии пересечения поверхностей.

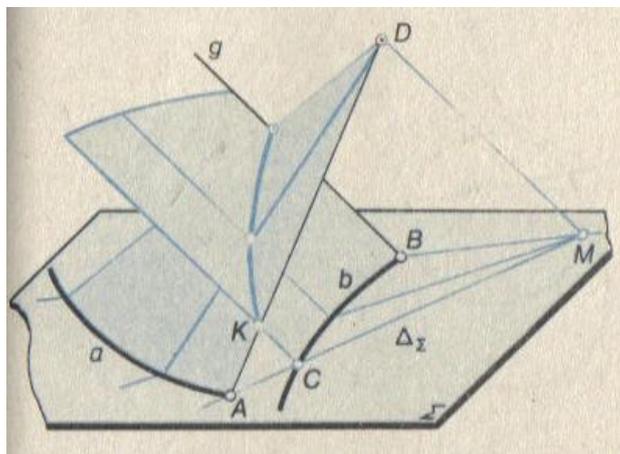


Рис 17.

На рисунке 18 показана схема построения линии поверхностей линии пересечения конической и цилиндрической поверхностей, направляющие линии которых лежат в пересекающихся между собой плоскостях  $\Sigma$  и  $\Omega$ .

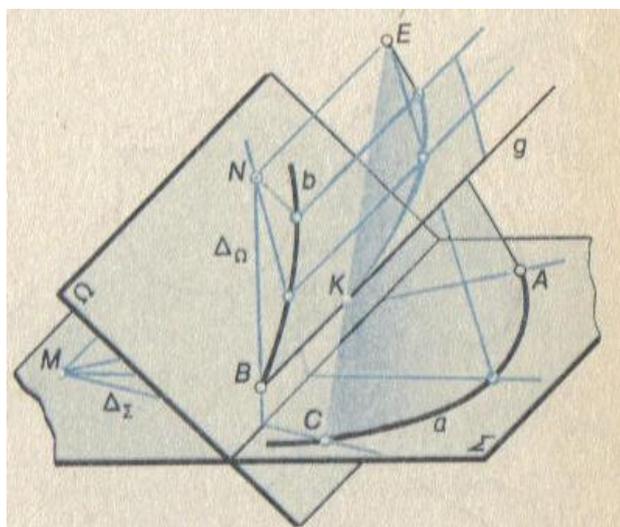


Рис 18.

Коническая поверхность задана вершиной E и направляющей кривой a в плоскости  $\Sigma$ . Цилиндрическая поверхность задана направляющей кривой b и прямолинейной образующей g в плоскости  $\Omega$ .

Прямая линия пучка плоскостей посредников проходит через вершину  $E$  конической поверхности параллельно образующим цилиндрической поверхности. Она пересекает плоскости  $\Sigma$  и  $\Omega$  соответственно в точках  $M$  и  $N$ . Через эти точки проходят парные следы  $\Delta\Sigma$  и  $\Delta\Omega$  вспомогательных плоскостей посредников  $\Delta$ . Следы этих плоскостей пересекают направляющие линии поверхностей в точках, через которые проходят прямолинейные образующие поверхностей. Точки пересечения соответствующих образующих (точка  $K$ ) являются точками линии пересечения поверхностей.

На рис 19 цилиндр пересекается с треугольной пирамидой (многогранным конусом).

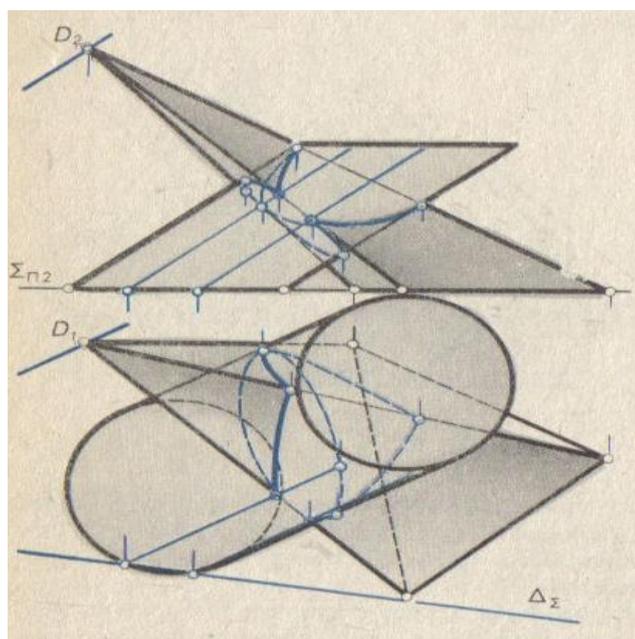


Рис 19.

Основания цилиндра и пирамиды лежат в одной плоскости  $\Sigma$ . Через вершину  $D$  пирамиды проводим прямую, параллельную образующим цилиндра, до пересечения с плоскостью  $\Sigma$  в точке  $M$  ( на чертеже не показана).

Прямая  $DM$  является прямой пучка плоскостей, пересекающих данные поверхности по прямолинейным образующим.

По предельным секущим плоскостям устанавливаем, что каждая из поверхностей полностью пересекается другой поверхностью (неполная врезка). Получается одна замкнутая линия пересечения, состоящая из отрезков эллисов.

Следы вспомогательных секущих плоскостей прежде всего проводят через вершины основания пирамиды и через точки направляющей окружности цилиндра, из которых направлены его очерковые образующие. Сами же плоскости пересекают заданные поверхности по прямолинейным образую-

щим. Точки пересечения соответствующих образующих являются точками искомой линии.

Рассмотрим случай пересечения двух поверхностей с направляющими линиями в разных одноимённых проецирующих плоскостях. Коническая поверхность с вершиной  $D$  имеет направляющую  $a$  во фронтально проецирующей плоскости  $\Phi$  (рис 20)

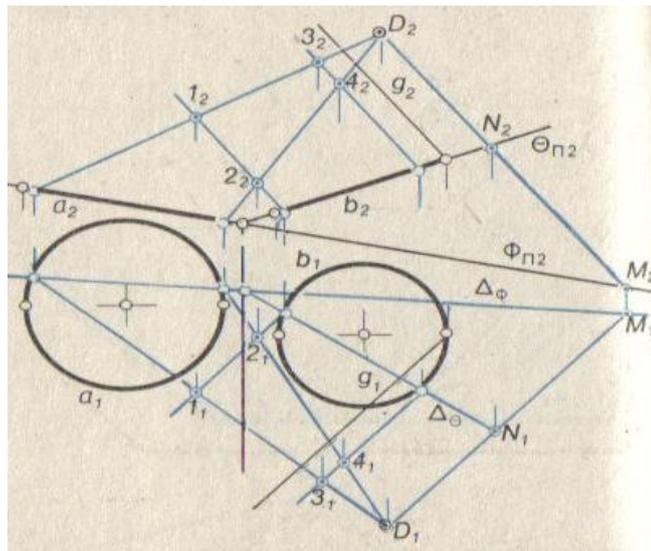


Рис 20.

Цилиндрическая поверхность задана направляющей  $b$  во фронтально проецирующей плоскости  $\Theta$  и прямолинейной образующей  $g$ . Через вершину конуса проводим прямую, параллельную образующим цилиндра, до пересечения с плоскостью  $\Phi$  в точке  $M$  и с плоскостью  $\Theta$  в точке  $N$ . следы  $\Delta \phi$  и  $\Delta \Theta$  вспомогательных секущих плоскостей  $\Delta$  на плоскостях  $\Delta$  и  $\Theta$  проходят через эти точки и пересекаются между собой на прямой линии пересечения плоскостей  $\Phi$  и  $\Theta$ .

Через точки пересечения следов  $\Delta \phi$  и  $\Delta \Theta$  с направляющими линиями поверхностей проходят прямолинейные образующие этих поверхностей. Они пересекаются в точках 1, 2, 3, 4 искомой линии пересечения.

Другой пример пересечения конической поверхности с цилиндрической с конической показан на рисунке 21.

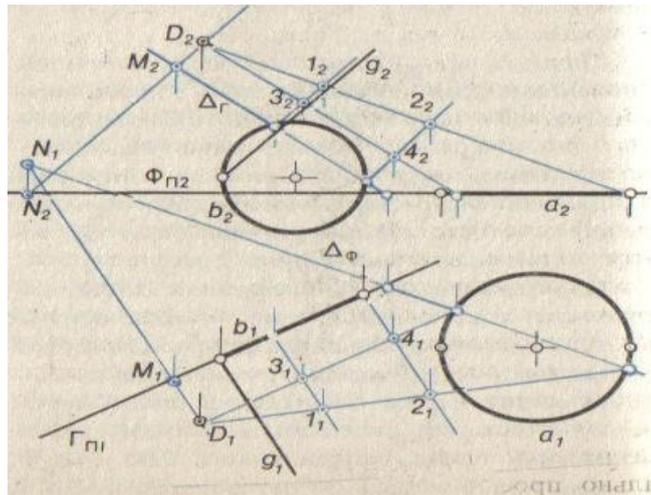


Рис21.

Направляющие линии поверхностей лежат в разноимённых проецирующих плоскостях. Направляющая, а конической поверхности принадлежит фронтально проецирующей плоскости  $\Phi$ . Цилиндрическая поверхность задана направляющей  $b$  в горизонтально проецирующей плоскости  $\Gamma$  и прямой образующей  $g$ .

Через вершину  $D$  конуса проводим прямую линию, параллельную образующим цилиндра, и определяем точки  $M$  и  $N$  её пересечения с плоскостями  $\Gamma$  и  $\Phi$  направляющих линий. Следы  $\Delta d$  на плоскости вспомогательных секущих плоскостей  $\Delta$  на плоскости  $\Gamma$  проходят через точку  $M$ , парные им следы  $\Delta \phi$  на плоскости  $\Phi$  проходят через точку  $N$ . Следы  $\Delta g$  и  $\Delta \phi$  пересекаются между собой в точках, находящихся на прямой линии пересечения плоскостей  $\Gamma$  и  $\Phi$ .

С помощью секущих плоскостей определяем прямолинейные образующие поверхностей.

Они пересекаются в точках 1,2,3 4 линии пересечения двух поверхностей.

### Взаимное пересечение цилиндрических поверхностей

Пусть одна цилиндрическая поверхность задана направляющей  $a$  и образующей  $g$ , другая - направляющей  $b$  и образующей  $u$ . Направляющие  $a$  и  $b$  лежат в одной плоскости  $\Sigma$  (рис 22).

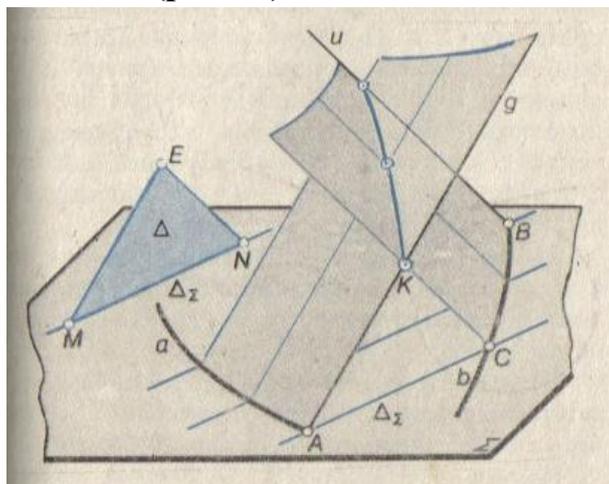


Рис 22.

В этом случае пучком секущих вспомогательных плоскостей является несобственная прямая, т.е. вспомогательные секущие плоскости параллельны образующим цилиндрических поверхностей. Через какую-либо точку  $E$  вне плоскости  $\Sigma$  проведём прямые  $EM$  и  $EN$ , параллельны образующим соответствующих цилиндрических поверхностей. Ими определяется плоскость  $\Delta$ , которая пересекается с плоскостью  $\Sigma$  по прямой линии  $MN$ .

Любая плоскость параллельна плоскости  $\Delta$  и пересекающая обе цилиндрические поверхности, пересекает их по прямолинейным образующим. Точками пересечения таких образующих (точка  $K$ ) определяется линия пересечения поверхностей.

На рисунке 23 цилиндрические поверхности имеют направляющие в пересекающихся плоскостях  $\Sigma$  и  $\Omega$ .

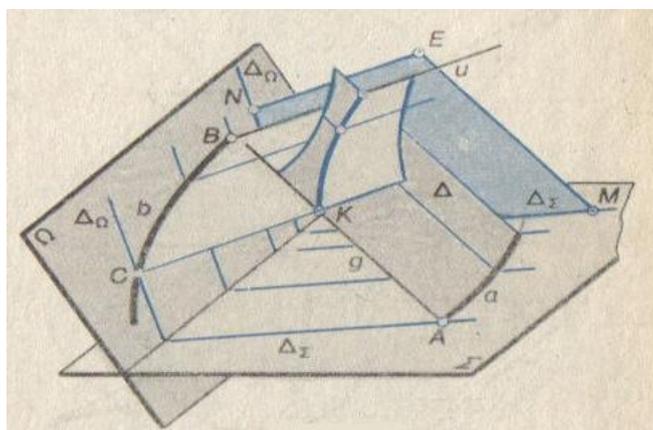


Рис.23

Одна цилиндрическая поверхность задана направляющей кривой  $a$  в плоскости  $\Sigma$  и образующей  $g$ . Вторая цилиндрическая поверхность задана направляющей кривой  $b$  в плоскости  $\Omega$  и образующей  $u$ . Плоскость  $\Delta$  задана прямыми  $EM$  и  $EN$ , параллельным образующим  $g$  и  $u$ .

Любая плоскость, параллельна плоскости  $\Delta$  и пересекающая заданные цилиндрические поверхности, пересекает их по прямолинейным образующим.

Точки пересечения (например, точка  $K$ ) соответствующих образующих определяют линию пересечения цилиндрических поверхностей.

На рисунке 24 показаны построения линии пересечения двух цилиндрических поверхностей, направляющие линии которых в одной горизонтальной плоскости  $\Sigma$ .

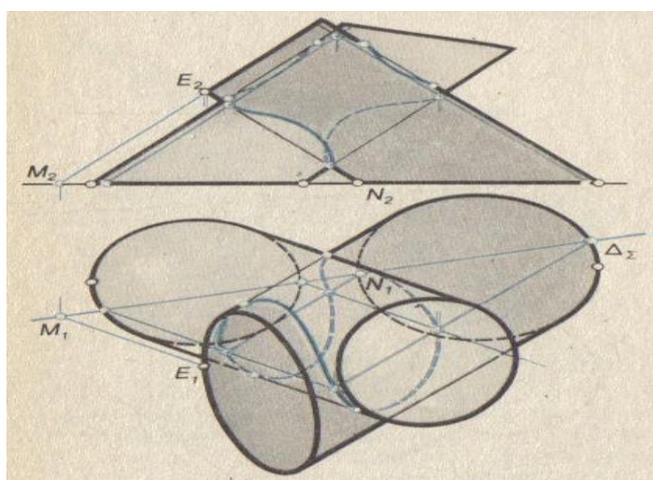


Рис.24

Цилиндры заданы проекциями их очертаний.

Проведём через произвольно выбранную точку  $E$  образующей одного цилиндра прямую линию, параллельную образующим другого. Эта прямая и образующая задают плоскость, параллельную прямолинейным образующим заданных поверхностей.

Точки пересечения  $M$  и  $N$  этих прямых линий с плоскостью  $\Sigma$  определяют прямую  $MN$ , параллельно которой проводят следы вспомогательных секущих плоскостей.

Предельные следы, касательные к направляющим линиям цилиндров, показывают, что не все образующие каждого из цилиндров пересекаются с другим цилиндром. Это соответствует неполной врезке, т.е. имеется одна замкнутая кривая линия пересечения поверхностей.

Следы вспомогательных секущих плоскостей проводим через точки направляющих линий цилиндров, принадлежащие очерковым образующим.

Через эти точки проходят прямолинейные образующие поверхностей, которые пересекаются в точках линий пересечения поверхностей.

Последовательность соединения точек линий пересечения поверхностей определяется методом одновременного обхода их направляющих. Сначала определяем линию пересечения поверхностей в горизонтальной проекции и в проекционной связи определяем её фронтальную проекцию. Устанавливаем видимость кривой в проекциях.

Рассмотрим случай пересечения двух цилиндрических поверхностей с направляющими линиями в разных одноимённых пересекающихся проецирующихся плоскостях (рисунок 25.)

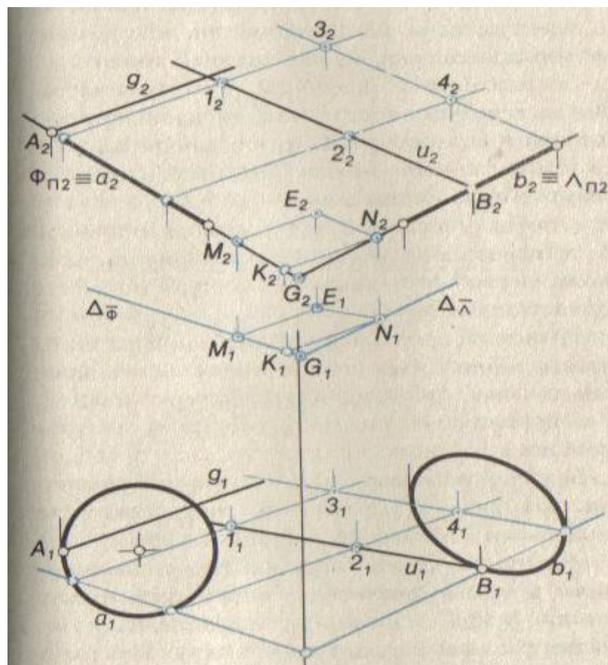


Рис.25

Одна цилиндрическая поверхность задана направляющей  $a$ , лежащей во фронтально проецирующей плоскости  $\Phi$ , и образующей  $g$ . Вторая цилиндрическая поверхность задана направляющей  $b$ , лежащей во фронтально проецирующей плоскости  $\Delta$ , и образующей  $u$ .

Определяем на плоскостях  $\Phi$  и  $\Delta$  направление следов вспомогательных секущих плоскостей. Через произвольно выбранную точку  $E$  проводим прямые линии, параллельные прямолинейным образующим соответствующих поверхностей, до пересечения в точках  $M$  и  $N$  с плоскостями  $\Phi$  и  $\Delta$ . Двумя пересекающимися прямыми  $EM$  и  $EN$  определяется плоскость  $\Delta$ . Она пересекается с плоскостью  $\Phi$  по прямой  $MK$  и с плоскостью  $\Delta$  по прямой линии  $GN$ . Эти прямые являются следами  $\Delta\Delta$  и  $\Delta\Phi$  плоскости  $\Delta$ .

Любая плоскость, взятая из пучка вспомогательных секущих плоскостей с несобственной прямой, пересекает обе цилиндрические поверхности по прямолинейным образующим.

На плоскости  $\Phi$   $\Delta$  следы вспомогательных плоскостей параллельны соответственно прямым линиям  $MG$  и  $NG$ . Прямолинейные образующие поверхностей, проходящие через точки пересечения этих следов с направляющими линиями пересекаются между собой в точках 1,2,3,4 линии пересечения заданных цилиндрических поверхностей.

Последовательность соединения точек искомой линии пересечения определяем методом одновременного обхода их направляющих.

Другой пример определения точек линии пересечения цилиндрических поверхностей с направляющими в разноимённых проецирующих плоскостях показан на рисунке 26.

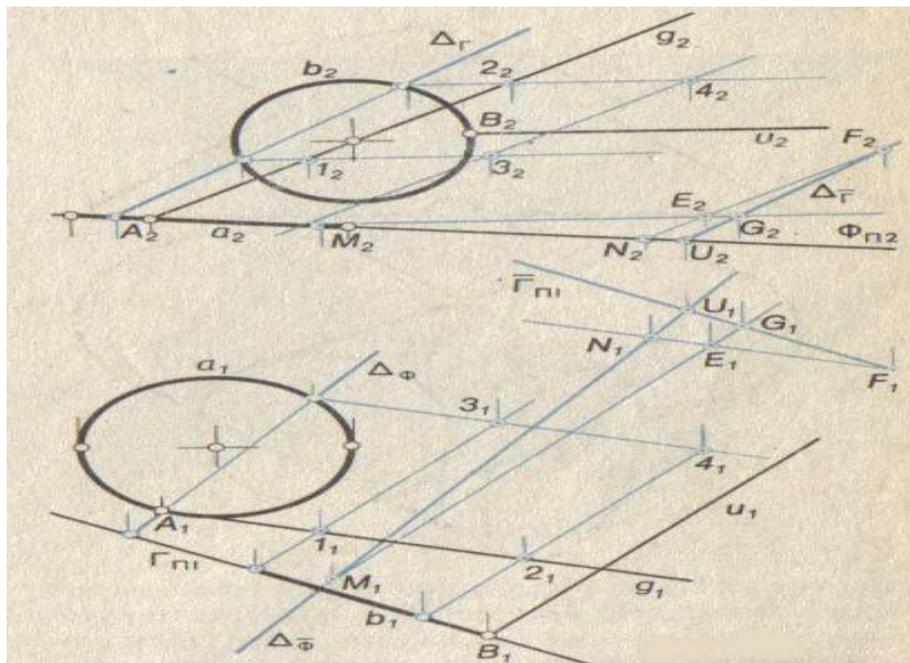


Рис 26.

Одна цилиндрическая поверхность задана направляющей  $a$ , лежащей во фронтально проецирующей плоскости  $\Phi$ , и образующей  $g$ . Вторая цилиндрическая поверхность задана направляющей  $b$ , лежащей в горизонтально проецирующей плоскости  $\Gamma$ , и образующей  $и$ .

Определим на плоскостях  $\Phi$  и  $\Gamma$  направление парных следов вспомогательных секущих плоскостей  $\Delta$ . Для удобства проводим дополнительную горизонтально проецирующую плоскость  $\Gamma'$ , параллельную плоскости  $\Gamma$ , и выбираем произвольно точку  $E$  вне этой плоскости. Прямые линии  $EM$  и  $EN$ , параллельные соответствующим образующим заданных поверхностей, пере-

секаются с плоскостью  $\Phi$  в точках  $M$  и  $N$ . Прямая  $MN$  является следом вспомогательной секущей плоскости  $\Delta$  на плоскости  $\Phi$ .

Прямые  $EM$  и  $EN$  пересекаются с плоскостью  $\Gamma$  в точках  $G$  и  $F$ . Прямая  $FG$  является следом плоскости  $\Delta$  на дополнительной плоскости  $\Gamma$ .

Любая вспомогательная секущая плоскость  $\Delta$ , пересекающая обе поверхности, на горизонтально проецирующей плоскости  $\Gamma$  имеет след  $\Delta\Gamma$ , параллельный следу  $\Delta\Gamma'$ , т.е.  $\Delta\Gamma \parallel \Delta\Gamma' \parallel FG$ . Эта же секущая плоскость на фронтально проецирующей плоскости  $\Phi$  имеет след  $\Delta\phi \parallel \Delta MN$ .

На плоскостях  $\Gamma$  и  $\Phi$  вспомогательных секущих плоскостей, проходящие через точки очерковых образующих цилиндра, а также ряд промежуточных следов. Через точки пересечения парных следов  $\Delta\Gamma$  и  $\Delta\phi$  с соответствующими направляющими линиями поверхностей проходят их прямолинейные образующие. Точки их взаимного пересечения являются точками, общими для двух поверхностей, т.е. принадлежат линии пересечения цилиндрических поверхностей.

### ➤ Развёртка торсовых поверхностей

Для построение развёртки цилиндрической поверхности используются те же способы нормального сечения и раскатки, которые применяются при развёртывании боковой поверхности призмы.

В обоих случаях цилиндрическую поверхность заменяют (аппроксимируют) призматической поверхностью, вписанной в данную цилиндрическую. Затем задачу решают также как это было показано ранее. На рисунке 27 и 28 показано построение развёртки боковой поверхности цилиндра способом нормального сечения рис 27 и способ раскатки рис 28.

При построении развёртки поверхности цилиндра вращения предпочтнее следует отдать способу нормального сечения, так как в этом случае можно не прибегать к замене цилиндрической поверхности призматической.

$\{A_0 A_0\}$  на рисунке 27 на развёртке равен длине линии нормального сечения. промежуточные точки  $B_0, C_0, \dots, K_0$ , соответствующие точкам  $B, C$  и  $K$ , поверхности  $\alpha$ , определяются путём деления отрезка на такое же число равных частей, на какое разделена окружность нормального сечения цилиндрической поверхности. В этом случае точность построения развёртки повысит-

ся, так как решение осуществлено без аппроксимации цилиндрической поверхности.

На рисунке 28 развёртка боковой поверхности цилиндрической поверхности  $\alpha$  выполнена способом раскатки.

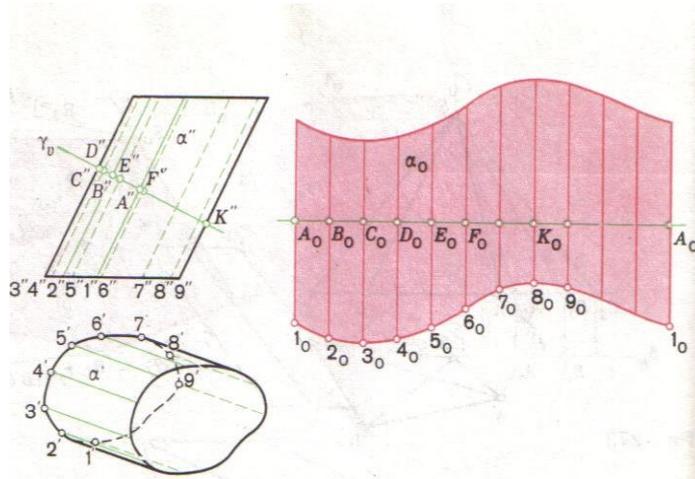


Рис 27.

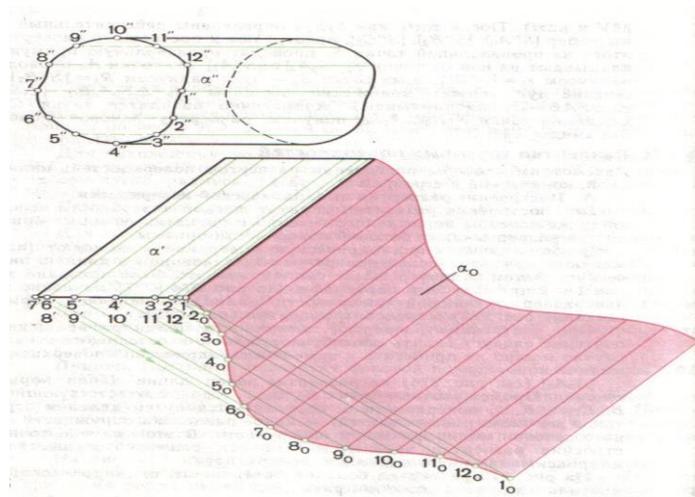


Рис 28.

### Построение развёртки конической поверхности.

Задача на построение развёртки конической поверхности так же как в построении боковой поверхности пирамиды способом треугольника. Для этого коническая поверхность аппроксимируется вписанной вписанной в неё многогранной пирамидальной поверхностью.

На рисунке 29 показана развёртка поверхности пирамиды  $SABCDEF\dots$ , вписанной в заданную коническую поверхность  $\alpha S_0A_0B_0C_0D_0E_0F_0$  принимают за развёртку конической поверхности. Чем больше число граней у вписанной пирамиды, тем меньше будет разница между действительной и приближённой развёрткой конической поверхности.

Если задана поверхность прямого кругового конуса Рис 30. то развёртка его боковой поверхности представляет круговой сектор, радиус которого равен длине образующей конической поверхности  $l=|SA|$ .

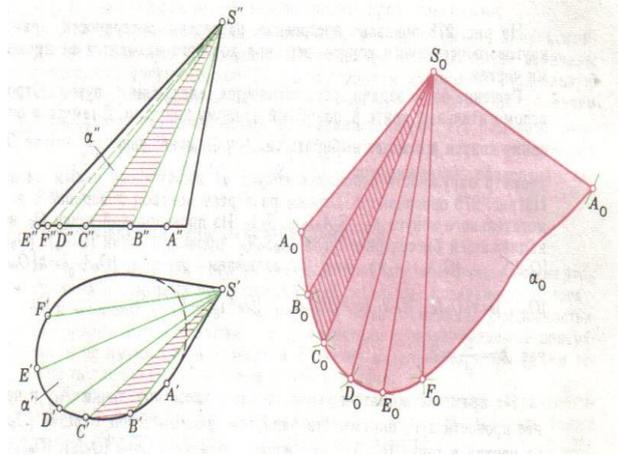


Рис.29

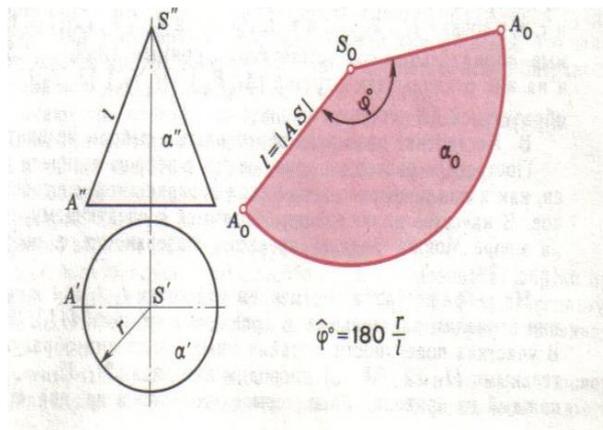


рис 30.



**Рис .40**

**Древний памятник национальной узбекской архитектуры.**

**Расположен в центре Хивы. О создателе этого памятника, к сожалению, ничего неизвестно так как сооружение воздвигнуто около двухсот лет назад. На примере этого сооружения мы видим, пример конической поверхности при построении купола, и многочисленные арки построенные вдоль стены. Узбекские архитекторы уже в то время опирались на свои знания в области начертательной геометрии.**

**Следующие рисунки представляют собой образцы европейского стиля архитектуры. В центре фотографии изображено здание национального института экономики и маркетинга в городе Милане, в правом углу пизанская башня. Опять представлен пример конической и цилиндрической поверхностей.**



**Рис .41**

**Пример построения крыши австралийского аквапарка в городе Сиднее в виде конических поверхностей. Рис .42**



**Рис.42**

## **Заключение:**

**Без преувеличения можно сказать, что по разнообразию форм и свойств, по своему значению при формировании различных геометрических фигур, по той роли, которую они играют в науке, технике, архитектуре, изобразительном искусстве, поверхности не имеют себе равных среди других геометрических фигур. Тем более линейчатые - этот тип поверхностей самый востребованный в современной архитектуре.**

**Исследование линейчатых поверхностей, а также класс тех поверхностей, непосредственно относящихся к семейству линейчатых, можно выявить характерную особенность, что линейчатые поверхности имеют широкое применение в технике, в инженерном деле, в исключительном большинстве случаев используются при проектировании зданий, промышленных и государственных архитектурных сооружений, дорожных магистралей.**

**Учитывая выше изложенное делаем вывод, что переложения, проектирования промышленных и гражданских сооружений может быть оптимизировано при разработке соответствующих программ компьютерной графики.**

**Естественно, что начертательная геометрия как наука, передающая результаты своих теоретических исследований в распоряжение инженера для их практического использования в технике, не может обойти вниманием такие важные геометрические фигуры, какими являются линейчатые поверхности.**

### Список используемой литературы.

1. С.А. Фролов. «НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.»
2. А.В. Бубенников. «Начертательная геометрия «(учебник для ВУЗОВ)
3. В.Д Засов. «Задачник по начертательной геометрии».
4. В.Д.Засов, Г.С Иконникова, Н.Н Крылов. «Учебник по начертательной геометрии».
5. О.В Локтев. «Краткий курс начертательной геометрии».
6. Н.Н Крылов, Г.С. Иконникова, В.Л.Николаев, Н.М.Лаврухина «Начертательная геометрия».
7. Н.Н Крылов. П.И Лобандиевский, С.А Мэн. «Начертательная геометрия»
8. О.В Локтев. «Краткий курс начертательной геометрии».
9. А.В. Бубенников, М.Я Громов. «Начертательная геометрия».
10. Г.Монж «Начертательная геометрия».
11. [www.madi.ru](http://www.madi.ru)
12. [www.nglib.ru](http://www.nglib.ru)
13. [www.5bal.ru](http://www.5bal.ru)

## Содержание.

1. Введение. Линейчатые поверхности.....	3стр
2. Торсовые поверхности.....	4
3. Линейчатые косые поверхности.....	6
4. Поверхности Каталана.....	7
5. Цилиндроподобные.....	8
6. Коноиды.....	10
7. Взаимное пересечение линейчатых поверхностей.....	14
8. Взаимное пересечение конических поверхностей.....	15
9. Взаимное пересечение конической поверхности с цилиндрической.....	21
10. Взаимное пересечение цилиндрических поверхностей.....	25
11. Развёртка торсовых поверхностей.....	29
12 Заключение.....	34
13 Список используемой литературы.....	34