Министерство высшего и среднего специального образования Республика Узбекистана
Ташкентский автомобильно-дорожный институт

Кафедра: Высшая математика

ПРИЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА К РЕШЕНИЮ ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

(для практических занятий)

Ташкент 2010 г.

Министерство высшего и среднего специального
образования Республики Узбекистана
Ташкентский автомобильно-дорожный институт

Кафедра: Высшая математика

Составители:
Д.Ф.М.Н. проф. Гафуров М.У.
К. ф. м. н. доцент Зокиров Ф.М.

Ташкент 2010 г.

Аннотация

Раздел «Применение определенного интеграла» завершает изучение темы «Интегрирование функций одной переменной». Основные требования, предъявляемые к студентам при условии этого раздела, - умение свободно интегрировать и применять определенный интеграл к решению конкретных задач. Практики показывает, что задачи физики и механики являются особо сложными, так как помимо свободного овладения математическим аппаратом требуют знания соответствующих физических законов. Поэтому самостоятельное решение этих задач затруднительно без предварительной отработки типичных подходов и приемов.

Концентрация основных теоретических положений, решение типичных задач в системе опорных конспектов, которые приводятся в данной работе, способствуют лучшему усвоению изучаемого материала.

Наличие решений представляется особенно полезным в настоящее время, когда в соответствии с требованиями перестройки высшей школы основной упор делается на самостоятельную работу студентов, поскольку именно самостоятельная работа дает возможность проверить правильность своих рассуждений при работе в аудитории и выполнении домашних заданий.

Рецензент: доктор физика – математических наук,
профессор Рахимов. А. М.

Методическая разработка утверждена на заседании кафедры « Высшая математика» (пр. № 38 от 24.05.2010г.) и на научно – методическом совете факультета АД (№___ от 31.05.2010г.).

1. ОБЩАЯ СХЕМА ПРИМЕНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Если всякому промежутку $[\alpha, \beta]$, содержащемуся в некотором фиксированном промежутке $[a, b]$, отвечает значение определенной физической и геометрической величины f, то f называют функцией промежутка $[\alpha, \beta]$ и обозначают $f([\alpha, \beta])$.

Функция промежутка $f([\alpha, \beta])$ называется аддитивной, если при $\alpha < \gamma < \beta$ имеем

$$f([\alpha, \beta]) = f([\alpha, \gamma]) + f([\gamma, \beta]).$$

Рассмотрим аддитивную функцию промежутка $f([\alpha, \beta])$ и допустим, что на фиксированном промежутка $[a, b]$ определена непрерывная функция $f(x)$, связанная с функцией $f([\alpha, \beta])$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, соотношением

$$f([x, x + \Delta x]) = f(x)\Delta x + \rho([x, x + \Delta x]),$$

где $\rho([x, x + \Delta x])$ - такая функция, что

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{\rho([x, x + \Delta x])}{\Delta x} = D$$

(то есть $\rho([x, x + \Delta x])$ является бесконечно малой величиной высшего порядка по сравнению с Δx.

Тогда

$$F([a, b]) = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Таким образом, если удалось с точностью до бесконечно малой высшего порядка по сравнению с ΔX установить приближенное равенство

$$f([x, x + \Delta X]) \approx f(x)\Delta X,$$

то можно вычислить интересующее значение $f([a, b])$ по формуле (1). В этом и состоит схема применения определенного интеграла.

2. ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ И КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Пусть $\{M_j\}$ - система материальных точек (с массами соответственно $m_j (j = 1,2,..., n)$, лежащих в одной плоскости, а X_j и y_i - соответственно координаты точек M_j. Величины

$$M_X = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j \qquad \text{и} \qquad M_Y = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j$$

называются статическим моментом этой системы точек относительно осей O_X и O_Y, а величины

$$Y_X = \sum_{j=1}^{n} m_j y_j^2 \qquad \text{и} \qquad Y_Y = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j^2$$

называются моментами инерции этой системы относительно осей O_X и O_Y.

Предположим, что вдоль произвольной гладкой кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, равномерно распределена масса с линейной плотностью $\mu = 1$. Тогда статическими моментами дуги кривой (при $a \le x \le b$) относительно осей координат называются величины

$$M_X = \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\cdot dx\,; \qquad M_Y = \int_a^b x\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx\,, \qquad (2)$$

а моментами инерции дуги кривой относительно осей координат называются величины

$$Y_X = \int_a^b y^2(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx \qquad \text{и}$$

$$Y_Y = \int_a^b x^2\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dy\,. \qquad (3)$$

Координаты центра тяжести дуги однородной кривой $y = f(x)$ (с равномерно распределенной массой, линейная плотность которой $\mu = 1$) вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{M_Y}{L}\,; \qquad y_C = \frac{M_X}{L}\,, \qquad (4)$$

где L -длина дуги кривой $y = f(x)$, $(a \le x \le b)$.

Если рассматриваемая дуга симметрична относительно некоторой прямой, то центр тяжести дуги лежит на этой прямой. Статическими моментами однородной криволинейной трапеции $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $(a \le x \le b)$ (с равномерно распределенной массой, поверхностная плотность которой $\mu(x, y) = 1$, относительно осей координат называют величины

$$M_X = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx\,, \qquad M_Y = \int_a^b x\cdot f(x)dx\,, \qquad (5)$$

а моментами инерции этой трапеции относительно осей координат – величины

$$y_X = \frac{1}{3}\int_a^b f^2(x)\cdot\left|f(x)\right|dx\,, \qquad y_Y = \int_a^b x^2\left|f(x)\right|dx\,, \qquad (6)$$

в предположении, что кривая не пересекает ось O_X.

Координаты центра тяжести однородной криволинейной трапеции вычисляются по формулам

$$x_C = \frac{M_Y}{S}\,, \qquad y_C = \frac{M_X}{S}\,, \qquad (7)$$

где S - площадь трапеции.

Если плоская фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести фигуры лежит на этой оси.

<u>Задача 1.</u> Найти статический момент и момент инерции однородной $(\mu = 1)$ дуги полуокружности радиуса a относительно диаметра, проходящего через концы этой дуги (рис 1).

Решение. Расположим дугу полуокружности так, чтобы диаметр совпадал с осью O_X, центр круга совпадал с началом координат, а рассматриваемая полуокружность оказалась в верхней полуплоскости. Тогда искомыми моментами будут M_X и M_Y. Разобьем дугу полуокружности на элементарные дуги ΔS_i, считаем при этом, что масса ΔS_i сосредоточена в начальной точке этой дуги P_i. Тогда масса дуги (так как $\mu = 1$)

$$\Delta S_i = a\Delta\varphi_i .$$

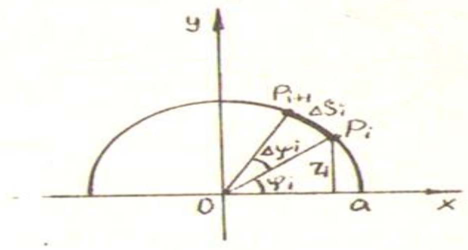


Рис. I

С точностью до бесконечно малой того же порядка, что и Δy_i, имеем

$$\Delta M_X = a\Delta\varphi_i \cdot Z_i = a^2 \cdot \sin\varphi_i \Delta\varphi_i ;$$

$$\Delta Y_X = a\Delta\varphi_i \cdot Z_i^2 = a^3 \cdot \sin^2\varphi_i \Delta\varphi_i .$$

На основании общей схемы применения определенного интеграла получим:

$$M_X = a^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 2a^2 ;$$

$$Y_X = a^3 \int_0^{\pi} \sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{2} .$$

<u>Задача 2.</u> Найти статический момент однородной $(\mu = 1)$ дуги параболы $y^2 = 2px \ \left(0 \le x \le \frac{P}{2}\right)$ относительно прямой $X = \frac{P}{2}$ (рис.2).

Решение. Аналогично предыдущей задаче, считаем, что масса дуги ΔS_i параболы сосредоточена в начальной точке $P_i(x_i, y_i)$ этой дуги. Тогда (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка малости, чем Δx_i)

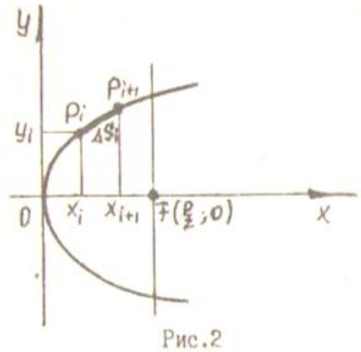


Рис.2

$$\Delta M_{\frac{P}{2}} = \left(\frac{P}{2} - x_i\right)\Delta S_i = \left(\frac{P}{2} - x_i\right)\sqrt{1 + (y'(x_i))^2} \cdot \Delta x_i .$$

Применяя общую схему, о которой говорилось ранее и, принимая во внимание симметрию кривой относительно оси O_X, получаем

$$M_{\frac{P}{2}} = 2\int_0^{P/2}\left(\frac{P}{2} - x\right)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx = 2\int_0^{P/2}\left(\frac{P}{2} - x\right)\sqrt{1+\frac{P}{2x}}\,dx = \int_0^{P/2}\left(P - (\sqrt{2x})^2\right)\cdot\sqrt{P+(\sqrt{2})^2}\cdot d(\sqrt{2x} =$$

$$\frac{\sqrt{2x}}{4}\sqrt{P+(\sqrt{2})^2}\left(\frac{5}{2}P - (P+(\sqrt{2})^2) + \frac{5}{8}P^2\ell n\left|\sqrt{2x}+\sqrt{P+(\sqrt{2x})^2}\right|\right)\Big|_0^{\frac{P}{2}} = \frac{P^2}{8}\left(\sqrt{2}+5\ell n(1+\sqrt{2})\right)$$

Интеграл $Y = \int Z^2\sqrt{P+Z^2}\,dZ$, где $Z = \sqrt{2x}$, берется по частям:

$$Y = \int Z^2\sqrt{P+Z^2}\,dZ = \left| \begin{array}{l} u = Z; \\ du = dZ; \\ dV = Z\sqrt{P^2+Z^2}\,dZ \\ V = \frac{1}{3}(P+Z^2)^{\frac{3}{2}} \end{array} \right| = \frac{Z}{3}\left(P+Z^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int (P+Z^2)^{\frac{3}{2}}\,dZ =$$

$$= \frac{Z}{3}(P+Z^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{P}{6}\int Z(P+Z^2)^{\frac{1}{2}} + P\ell n(Z+\sqrt{P+Z^2}) - \frac{Y}{3} + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Откуда

$$Y = \frac{Z(P+Z^2)^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{P}{8}\left(Z(P+Z^2)^{\frac{1}{2}} + P\ell n(Z+\sqrt{P+Z^2})\right) + C\ .$$

<u>Задача 3.</u> Найти статический момент и момент инерции однородной треугольной пластинки с основанием b и высотой h относительно основания (рис. 3).

Решение. Поскольку треугольная пластинка однородна, полагаем $\mu = 1$. Разместим пластинку так, чтобы ось O_X совпала с ее высотой h. Отрезок EF , концы которого лежат на боковых сторонах треугольника, параллельный основанию и находящийся на расстоянии $h - x_i$ $(0 < x_i < h)$ от него, имеет длину $|EF| = \frac{b}{h}x_i$,

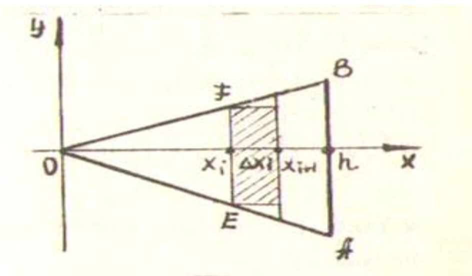


Рис.3

Рассмотрим горизонтальную полоску шириной ΔX_i, параллельную основанию треугольника, приняв ее приближенно за прямоугольник со сторонами длиной $|EF|$ и ΔX_i. С точностью до бесконечно малых более высокого порядка чем ΔX_i получим, что площадь полоски равна $\frac{b}{h}X_i \cdot \Delta X_i$, а статический момент и момент инерции полоски относительно основания в треугольнике соответственно

$$\Delta M_b = \frac{b}{h} X_i (h - X_i)\Delta X_i = bX_i\left(1 - \frac{X_i}{h}\right)\Delta X_i,$$

$$\Delta Y_b = \frac{b}{h} X_i^2 (h - X_i)\Delta X_i = bX_i^2\left(1 - \frac{X_i}{h}\right)\Delta X_i.$$

На основании общей теории применения интеграла получаем

$$M = b\int_0^h x\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx = \frac{bh^2}{6},$$

$$Y = b\int_0^h x^2\left(1 - \frac{x}{h}\right)dx = \frac{bh^3}{12}.$$

Задача 4. Найти моменты инерции Y_X и Y_Y относительно осей O_X и O_Y параболического сегмента, ограниченного кривыми $ay = 2ax - x^2$ $(a > 0)$ и $y = 0$ (рис. 4).

Решение. По формулам

$$Y_X = \frac{1}{3}\int_a^b f^2(x)\left|f(x)\right|dx, \quad Y_Y = \int_a^b x^2\left|f(x)\right|dx$$

и, учитывая, что для данного параболического сегмента $f(x) \geq 0$, получаем:

$$Y_X = \frac{1}{3}\int_0^{2a} \frac{1}{a^3}(2ax - x^2)^3 dx = \frac{32a^4}{105};$$

$$Y_Y = \int_0^{2a} x^2\left(2x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{8}{5}a^4.$$

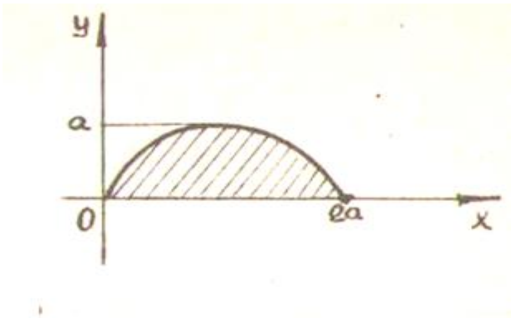


Рис.4

Задача 5. Найти моменты инерции однородной эллиптической пластины $(\mu = 1)$ с полуосями a и b относительно ее главных осей.

Решение. Возьмем за главные оси координат. Запишем параметрические уравнения эллипса в форме

$$\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t, (0 \leq t \leq 2\pi), \end{cases}$$

тогда при изменении t от O до $\frac{\pi}{2}$ переменная x возрастает от O до a. В силу симметрии пластины относительно осей достаточно вычислить моменты инерции четвертой ее части и каждый результат увеличить в четыре раза. Таким образом, по формулам (6) получаем:

$$Y_X = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^3(t)\cdot dx(t) = \frac{4}{3}ab^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t dt = \frac{\pi ab^3}{4};$$

$$Y_Y = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(t)\cdot y(t)\cdot dx(t) = a^3 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

Задача 6. Определить координаты центра тяжести круговой дуги (рис.5)

$$x = a\cos\varphi; \quad y = a\sin\varphi \quad (-\alpha \le \varphi \le \alpha, \mu = 1).$$

Решение. Дуга симметрична относительно оси O_X, поэтому центр тяжести дуги $\overline{AB}$ находится на оси O_X, то есть $y_C = 0$. Вычислим длину кривой L и ее статический момент M_Y относительно оси O_Y:

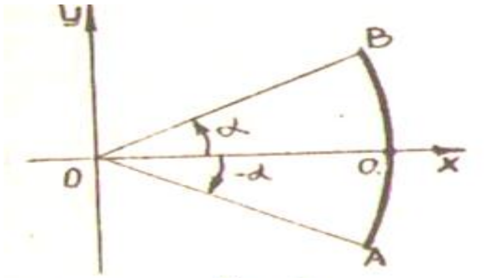


Рис.5

$$L = a\int_{-\alpha}^{\alpha} d\varphi = 2a\alpha; \qquad M_Y = a^2\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\varphi d\varphi = 2a^2\sin\alpha.$$

Найдем координату X_C центра тяжести:

$$X_C = \frac{M_Y}{L} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha},$$

таким образом, $C(x_C; y_C) = C\left(a\frac{\sin\alpha}{\alpha}; 0\right)$.

Задача 7. Определить координаты центра тяжести области, ограниченной параболами $ax = y^2$; $ay = x^2$ $(a > 0)$ (рис.6).

Решение. Точки плоской фигуры симметричны относительно биссектрисы первого координатного угла, поэтому центр тяжести находится на этой биссектрисе, $X_C = Y_C$ и $M_Y = \int_0^a x\left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{3a^3}{20}$;

$S = \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{a^2}{3}$; тогда $X_C = Y_C = \frac{M_Y}{S} = \frac{9a}{20}$.

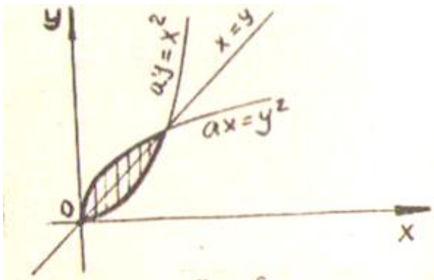


Рис.6

Задача 8. Определить координаты центра тяжести области

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \qquad (0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ \mu = 1).$$

Решение. Уравнение четвертой части эллипса запишем в виде

$$\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\cos t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, используя формулы (6) и учитывая, что для данной области $\operatorname{sgn} f(x) = 1$, получаем

$$M_X = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(t)\,dx(t) = \frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\,dt = \frac{ab^2}{3};$$

$$M_Y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\,y(t)\,dx(t) = a^2 b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\cos^2 dt = \frac{a^2 b}{3}.$$

Поскольку $S = \frac{\pi ab}{4}$, то

$$x_C = \frac{M_y}{S} = \frac{4a}{3\pi}; \qquad y_C = \frac{M_X}{S} = \frac{4b}{3\pi}.$$

<u>Задача 9.</u> Определить координаты центра тяжести области, ограниченной кривой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (рис. 7).

Решение. Область симметрична относительно полярной оси, поэтому на ней лежит центр тяжести. Рассмотрим криволинейный сектор с углом при вершине $\Delta\varphi$, образованный лучами φ и $\varphi + \Delta\varphi$ и дугой кривой. Приняв его за круговой сектор со сторонами $\rho(\varphi)$ и углом при вершине $\Delta\varphi$, можно приближенно вычислить его площадь: $\Delta S = \frac{\rho^2(\varphi)}{2}\Delta\varphi$. На основании того, что центр тяжести однородной треугольной пластинки находится в точке пересечения медиан треугольника, можно считать, что центр тяжести криволинейного сектора находится на расстоянии $\frac{2}{3}\rho(\varphi)$ от полюса, поэтому статический момент сектора относительно прямой $\rho\cos\varphi = 0$ приближенно (с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta\varphi$):

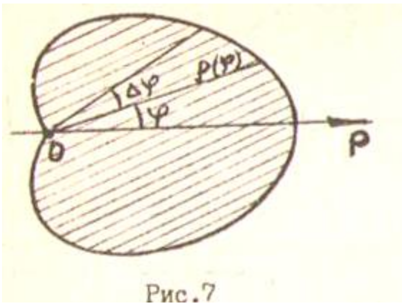


Рис.7

$$\Delta M \approx \frac{\rho^2(\varphi)}{2}\cdot\frac{2}{3}\rho(\varphi)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\Delta\varphi = \frac{\rho^3}{3}\cos\varphi\Delta\varphi,$$

$$M = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(1 + \cos\varphi)^3\,d\varphi = \frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)\,d\varphi =$$

откуда

$$= \frac{4}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos^2\varphi + \cos^4\varphi)\,d\varphi = \frac{5}{4}\pi a^3.$$

Площадь области, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $S = \frac{3}{2}\pi a^2$.

Поэтому $x_C = \frac{M}{S} = \frac{5}{6}a$. Обозначив координаты центра тяжести ρ_0 и φ_0, получим $\varphi_0 = 0$; $\rho_0 = \frac{5}{6}a$.

<u>Задача 10</u> Определить координаты центра тяжести области, ограниченной первой аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1-\cos t)$, и осью O_X (рис. 8)

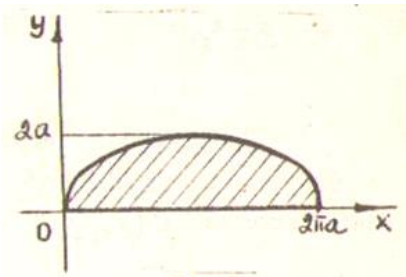


Рис.8

Решение. Так как для данной области $f(x) \geq 0$, то

$$M_X = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2(t)dx(t) = \frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3 dt = \frac{5}{2}\pi a^3.$$

Для вычисления интеграла $\int (1-\cos t)^3 dt$ использовали формулу понижения для интеграла $n > 2$, согласно которой

$$Y_n = \frac{1}{n}\left((n-1)Y_{n-2} - \cos x \cdot \sin^{n-1} x\right), \quad n = 3,4,\ldots$$

В частности

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^K x dx = \begin{cases} \frac{(k-1)(k-3)\ldots 1}{k(k-2)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2}, \\ \frac{(k-1)(k-3)\ldots 2}{k(k-2)\ldots 1}, \end{cases} \quad K \text{ - четное; } K \text{ - нечетное.}$$

Аналогично,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^K x dx = \begin{cases} \frac{(k-1)(k-3)\ldots 1}{k(k-2)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2}, \\ \frac{(k-1)(k-3)\ldots 2}{k(k-2)\ldots 3}, \end{cases} \quad K \text{ - четное; } K \text{ - нечетное.}$$

Далее,

$$M_Y = \int_0^{2\pi a} xydx = a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt = a^3\left(\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 d\cos t + \int_0^{2\pi} t\cdot\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = \right.$$
$$= 3\pi^2 a^3.$$

Площадь, ограниченная первой аркой циклоиды и осью O_X, $S = 3\pi a^2$, следовательно, координаты центра тяжести $C(x_C, y_C)$ фигуры

$$x_C = \frac{M_X}{S} = \pi a; \qquad y_C = \frac{M_X}{S} = \frac{5}{6}a.$$

3. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ РАБОТЫ

Каждая из приведенных в данном разделе задач требует применения соответствующих законов физики, но все они решаются, подчиняясь общей схеме:

1) вычисление элементарной работы ΔA_i;
2) построение интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} \Delta A_i$;
3) переход к пределу: $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \int_a^b dA$.

<u>Задача 11.</u> Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

Решение. На тело массы m действует сила притяжения Земли, обратно пропорциональная квадрату расстояния тело от центра Земли и направленная к центру Земли O_i (рис. 9):

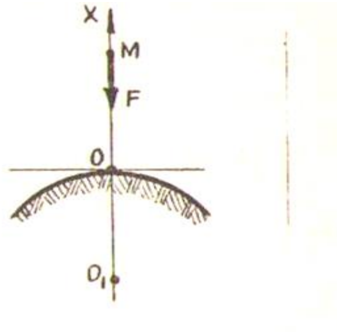


Рис. 9

$$\vec{F} = \frac{C\vec{e}(MO_i)}{(R+x)^2},$$

где C - постоянная, определяемая из условия, что на поверхности Земли $(X=0)$ сила f равна силе веса mg:

$$f = mg = \frac{C}{R^2},$$

откуда $C = mgR^2$, где R - радиус Земли; $\vec{e}(MO_i)$ - единичный вектор, направленный из точки M к центру Земли O_i.

Элементарная работа центральной силы определяется по формуле $\Delta A = f_X \Delta X$, где f_X - проекция силы $\vec{F}$ на направление O_X; ΔX - элементарное перемещение. Для выражения полной работы имеем

$$A = -mgR^2 \int_0^h \frac{dx}{(R+X)^2} = mgR^2 \frac{1}{R+X}\Big|_0^h = -\frac{mgRh}{R+h}.$$

Знак “ – “ обусловлен тем, что проекция силы $\vec{F}$ на направление O_X отрицательна. Искомая работа равна $|A|$.

Переходя к пределу при $h \to \infty$, находим

$$A_\infty = -mgR, \qquad |A_\infty| = mgR.$$

Задача 12. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую пружину на величину ℓ (рис. 10)?

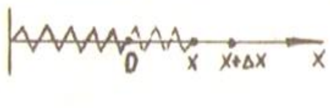


Рис. 10

Решение. Реакция F упругой пружины, один конец которой закреплен, выражается согласно закону Гука формулой $F = CX$, где C - коэффициент жесткости пружины, x - деформация.

Элементарная работа упругой силы (реакции пружины) при растяжении ее на величину ΔX_i определяется по выражению

$$\Delta A_i = -CX\,\Delta X_i\,,$$

где ΔX_i - элементарное перемещение, направленное в сторону, противоположную силе $\vec{f}$.

Полную работу найдем, проинтегрировав в пределах $[O;\ell]$ полученное выражение:

$$A = \left| -\int_0^{\ell} CX\,dx \right| = \frac{C\ell^2}{2} \qquad \text{(ед. работы).}$$

Коэффициент C можно найти, если будут заданы начальные условия,

Задача 13. Цилиндр радиуса R и длиной ℓ заполнен паром под давлением p_o. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем пара в два раза, считая, что температура пара остается постоянной?

Решение. Для изотермического процесса справедлив закон Бойля – Мариотта

$$p = \frac{C}{V}\,,$$

где p - давление; V - объем, заполненный газом; C - постоянная.

Величина изменения объема цилиндра на длину $\Delta\ell_i$

$$\Delta V_i = \pi R^2 \Delta\ell_i\,;$$

отсюда

$$\Delta\ell_i = \frac{\Delta V_i}{\pi R^2}\,.$$

Элементарная работа ΔA_i силы давления p при уменьшении длины цилиндра на $\Delta\ell_i$ выражается формулой

$$\Delta A_i = -\pi R^2 p \cdot \Delta\ell_i\,, \quad \text{т.е.}$$

$$\Delta A_i = -p \cdot \Delta V_i\,.$$

Суммируя и переходя к пределу, получаем

$$A = \int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}} dA = -\int_{V_0}^{\frac{V_0}{2}} p \cdot dV = C\int_{\frac{V_0}{2}}^{V_0} \frac{dV}{V} = C \cdot \ell n 2\,.$$

Постоянную C можно найти по формуле $C = p_0 V_0$, где p_0 и V_0 - первоначальные значения давления и объема.

Задача 14. Капля с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную m. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем).

Решение. Через t секунд от начала падения масса капли будет равна $M - mt$.

Найдем момент времени T, когда капля полностью испарится, так как к этому моменту

$$M - mT = 0, \quad \text{то}$$

$$T = \frac{M}{m}, \quad \text{т.е.} \quad t \in \left[0; \frac{M}{m}\right].$$

Элементарная работа ΔA_i, совершенная силой тяжести за время $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, приближенно

$$\Delta A_i \approx (M - mt_i) g \cdot \Delta S_i,$$

где ΔS_i - путь, пройденный каплей за время Δt_i; g - ускорение свободного падения; $(M - mt_i) g$ - сила тяжести.

Считаем при этом, что за время Δt_i масса капли остается постоянной, равной массе капли в начальный момент t_i. Величина $\Delta A_i > 0$, так как направление движения совпадает с направлением силы тяжести; учитывая, что $\Delta S_i \approx V_i \Delta t_i$ и то, что при отсутствии сопротивления $V_i = gt_i$, получаем

$$\Delta A_i = (M - mt_i) g^2 t_i \Delta t_i.$$

Тогда

$$A = \int_0^{\frac{M}{m}} (M - mt) g^2 \cdot t dt = g^2 \left(\frac{M t^2}{2} - \frac{mt^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{M}{m}} = \frac{g^2 M^3}{6m^2}.$$

Единого подхода требуют также задача на вычисление работы, которую нужно произвести при откачивании жидкости из резервуаров различной формы, засыпании песка в виде кучи определенной формы и т.д.

Для решения таких задач следует разбить тело высотой H на n элементарных слоев и найти работу ΔA_i $(i = 1, 2, ..., n)$, которую нужно затратить на поднятие i - го элементарного слоя на высоту h_i. Просуммировав ΔA_i и переходя к пределу при $n \to \infty$, найдем

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = \int_0^H dA.$$

Величину ΔA_i определяем исходя из того, что работа равна произведению силы веса ΔP_i элементарного слоя этого тела на высоту его поднятия h_i:

$$\Delta A_i = \Delta P_i \cdot h_i = S(h_i) \cdot \Delta h_i \cdot \gamma \cdot g \cdot h_i,$$

где $S(h_i)$ - площадь элементарного слоя на высоте h_i;

Δh_i - толщина этого слоя; γ - плотность материала, заполняющего слой.

Таким образом, в случае однородного материала $(\gamma = const)$

$$A = \gamma g \int_0^H S(h)h \cdot dh \,. \qquad (8)$$

<u>Задача 15.</u> Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать жидкость плотностью γ, наполняющую цилиндрический резервуар высотой H, имеющий в основании круг радиуса R (рис. 11).
Решение. Разобьем цилиндр на элементарные цилиндры плоскостями, параллельными основанию, с высотой Δy_i. Объем элементарного цилиндра

$$\Delta V_i = \pi R^2 \cdot \Delta y_i \,,$$

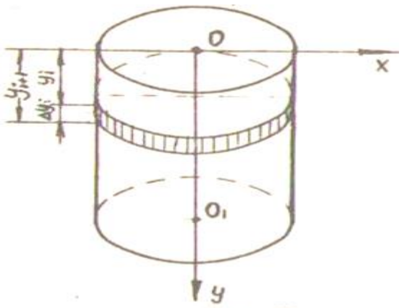


Рис. II

а его масса

$$\Delta m_i = \Delta V_i \cdot \gamma = \pi R^2 \gamma \cdot \Delta y_i \,.$$

Элементарная работа, затрачиваемая на поднятие этого слоя жидкости, находящегося на глубине y_i:

$$\Delta A_i = \pi R^2 \cdot \gamma \Delta y_i \cdot g \cdot y_i \,.$$

Просуммируем и перейдем к пределу, тогда искомая работа

$$A = \pi R^2 \gamma \cdot g \int_0^H y dy = \frac{1}{2} \pi R^2 \gamma \cdot g \cdot H^2 \,. \qquad \text{(ед. работы)}$$

Здесь g - ускорение свободного падения.

<u>Задача 16.</u> Какую работу нужно произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме усеченного конуса высоты H, имеющего радиусы оснований R и Z $(r < R)$? Плотность песка равна γ, песок поднимают с поверхности Земли, на которой покоится большее основание конуса (рис. 12).

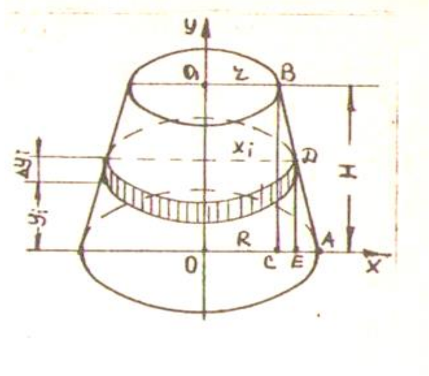


Рис. I2

Решение. Следуя общей схеме, разобьем усеченный конус на элементарные слои. Положим, что элементарный слой имеет форму кругового цилиндра высотой Δy_i и радиуса X_i. Тогда объем элементарного слоя

$$\Delta V_i = \pi X_i^2 \Delta y_i \,,$$

а масса песка, заполняющего этот слой:

$$\Delta m_i \approx \gamma \cdot g \cdot \pi X_i^2 \Delta y_i .$$

Работа, затрачиваемая на поднятие одного слоя песка на высоту y_i:

$$\Delta A_i \approx \gamma \cdot g \cdot \pi X_i^2 y_i \cdot \Delta y_i .$$

Выразим величину X_i через y_i.

Из подобия треугольников ABC и ADE имеем

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AE}{ED} \qquad \text{или}$$

$$\frac{R-r}{H} = \frac{R-X_i}{y_i}, \qquad \text{откуда}$$

$$X_i = \frac{RH-(R-r)y_i}{H}.$$

Тогда

$$\Delta A = \gamma g \pi \left(\frac{RH-(R-r)y_i}{H} \right)^2 y_i \Delta y_i ,$$

а интегральная сумма

$$A_n = \frac{\gamma \pi g}{H^2} \sum_{i=1}^{n} \int_0^H (RH-(R-r)y)^2 y dy = \frac{\gamma \pi g H^2}{12}(R^2+2Rr+3r^2).$$

Задача 17. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота $H=140$ м, ребро основания (квадрата) $a=200$ м. Плотность камня, из которого она сделана, приблизительно $\gamma = 2{,}5$ г / cm^3. Вычислить работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести (рис. 13).

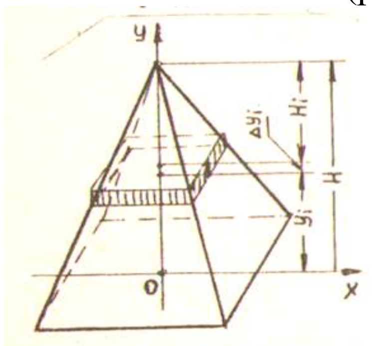


Рис. 13

Решение. Выделим элементарный слой пирамиды с высотой Δy_i, принимая этот слой за прямую призму с площадью основания S_i. Масса камня, заполняющего этот слой пирамиды, $\Delta m_i = \gamma \cdot S_i \cdot \Delta y_i$, а работа, необходимая для поднятия этого слоя на высоту y_i,

$$\Delta A_i = \gamma \cdot S_i \Delta y_i \cdot g \cdot y_i .$$

Величину S_i найдем из соотношения

$$\frac{S_i}{S_{OCH}} = \frac{H_i^2}{H^2}; \qquad S_{OCH} = a^2; \qquad H_i = H - y_i;$$

$$S_i = \frac{a^2 (H-y_i)^2}{H^2}.$$

Тогда

$$\Delta A_i = \gamma \cdot g \frac{a^2}{H^2}(H - y_i)^2 y_i \cdot \Delta y_i .$$

Суммируя и переходя к пределу, получаем работу

$$A = \gamma g \frac{a^2}{H^2}\int_0^H y(H - y)^2 dy = \frac{\gamma g a^2 H^2}{12} .$$

Учитывая, что $\gamma = 2{,}5$ г / $cm^3 = 25 \cdot 10^2$ кг / $м^3$, и подставляя значения a и H, получаем

$$A \approx \frac{1}{12} \cdot 25 \cdot 10^2 \cdot 9{,}8 \cdot 200^2 \cdot 140^2 \approx 1{,}6 \cdot 10^{12} \quad \text{(ДЖ).}$$

Задача 18. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать жидкость плотности γ из резервуара, имеющего форму конуса, обращенного вершиной вниз, высота которого равна H, а радиус основания R. Как изменится результат, если конус будет обращен вершиной вверх?

Решение. Пусть конус обращен вершиной вниз (рис. 14).

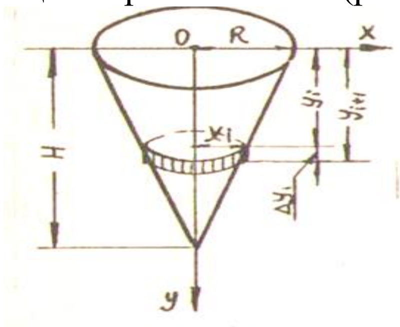


Рис. I4

Выделим элементарный слой, с высотой Δy_i, полагая приближенно, что он имеет цилиндрическую форму. Элементарная работа, затрачиваемая на поднятие жидкости, заполняющей выделенный слой,

$$\Delta A_i \approx \gamma g \pi X_i^2 y_i \Delta y_i$$

($\pi X_i^2 \Delta y_i$ - величина элементарного объема, y_i - высота поднятия).

Из геометрических соображений

$$\frac{R}{H} = \frac{X_i}{H - y_i}; \qquad X_i = \frac{R}{H}(H - y_i) .$$

Тогда

$$\Delta A_i = \gamma g \pi \frac{R^2}{H^2}(H - y_i)^2 y_i \Delta y_i ,$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma g \pi \frac{R^2}{H^2}(H - y_i)^2 y_i \Delta y_i .$$

И, наконец, $$A = \gamma g \pi \frac{R^2}{H^2}\int_0^H (H - y)^2 y dy = \frac{\gamma g \pi R^2 H^2}{12} .$$

Обратимся ко второму случаю, когда вершина конуса обращена вверх (рис. 15),

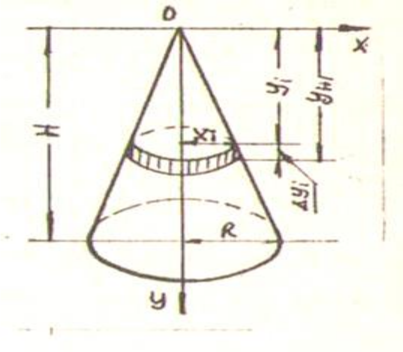


Рис. 15

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получаем приближенное выражение для элементарной работы

$$\Delta A_i \approx \gamma g \pi X_i^2 y_i \Delta y_i,$$

а из геометрических соображений имеем:

$$\frac{R}{H} = \frac{X_i}{y_i}; \qquad X_i = \frac{R}{H} y_i.$$

Тогда

$$\Delta A_i = \gamma g \pi \frac{R^2}{H^2} y_i^2 \cdot y_i \cdot \Delta y_i,$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma g \pi \frac{R^2}{H^2} y_i^3 \Delta y_i$$

и

$$A = \frac{\gamma g \pi R^2}{H^2} \int_0^H y^3 dy = \frac{\gamma g \pi R^2 H^2}{4}.$$

Задача 19. Котел имеет форму параболоида вращения. Радиус основания R, глубина котла H. Он наполнен жидкостью, плотность которой γ. Вычислить работу, которую нужно произвести, чтобы выкачать жидкость из котла (рис. 16).

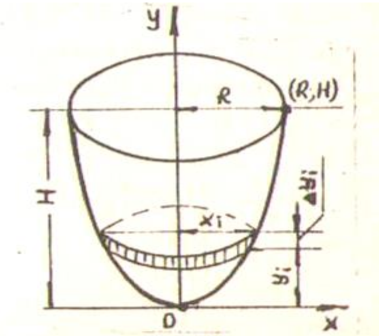


Рис.16

Решение. Следуя общей схеме, выделяем элементарный слой с высотой Δy_i, элементарная работа, затрачиваемая на поднятие жидкости, заполняющей выделенный слой, на высоту $H \cdot y_i$

$$\Delta A_i = -\gamma g \pi X_i^2 (H - y_i) \Delta y_i.$$

Зависимость x_i от y_i найдем, принимая во внимание, что уравнение кривой, которая получается в осевом вертикальном сечении данного котла:

$$x^2 = 2py,$$

а так как точка $(R; H)$ принадлежит этой кривой, то $R^2 = 2pH$, и, следовательно, $2p = \frac{R^2}{H}$ и $x_i^2 = \frac{R^2}{H} y_i$.

Поэтому

$$\Delta A_i = -\frac{\gamma g \pi R^2}{H} y_i (H - y_i) \Delta y_i$$

и $$A = -\frac{\gamma g \pi R^2}{H} \int_H^0 y(H-y)dy = \frac{\gamma g \pi R^2 H^2}{6}.$$

4. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТЕЛ.

Для вычисления силы f взаимодействия некоторого материального тела с материальной точкой при использовании общей схемы применения определенного интеграла следует разбить это тело на n элементарных частей и найти приближенное значение силы Δf взаимодействия элементарной части с данной материальной точкой, а последующим суммированием этих сил и предельным переходом в полученной сумме при $n \to \infty$ найти искомую силу.

При этом следует учесть, что сила f взаимодействия двух точечных масс определяется по формуле $f = \frac{km\mathrm{M}}{r^2}$, где m и M - массы точек; r - расстояние между ними, а k - коэффициент пропорциональности, равный $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $м^3$/(кг$\cdot c^2$) (закон Ньютона).

Задача 20.Стержень AB, длина которого ℓ, масса M, притягивает точку C массы m, которая лежит на его продолжений на расстоянии a от ближайшего конца B стержня (рис. 17). Найти силу взаимодействия стержня и точки. Какую точечную массу нужно поместить в A для того, чтобы она действовала на C с той же силой, что и стержень AB?

Решение.

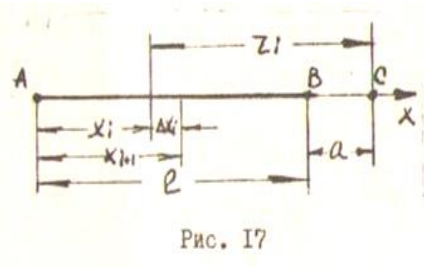


Рис. 17

1) Разделим данный стержень AB на n элементарных частей:

$$[0; X], [x_1, x_2], ..., [x_i, x_{i+1}], ..., [x_{n-1}; \ell].$$

Элементарному промежутку $[x_i; x_{i+1}]$ соответствует элементарная часть Δf_i силы взаимодействия f между элементом ΔX_i стержня и точкой C.

Составим приближенное выражение для Δf_i при условии, что вся масса промежутка Δx_i будет сосредоточена в начальной точке рассматриваемого промежутка:

$$\Delta f_i \approx K \frac{m \cdot \frac{M}{\ell} \cdot \Delta X_i}{r_i^2},$$

где $\frac{M}{\ell}$ - масса, приходящаяся на единицу длины стержня; $\frac{M}{\ell} \Delta x_i$ - масса элементарного промежутка Δx_i; r_i - расстояние между начальной точкой промежутка Δx_i и точкой C; учитывая, что $r_i = \ell + a - X_i$, имеем:

$$\Delta f_i \approx K \cdot \frac{m \frac{M}{\ell} \cdot \Delta X_i}{(\ell + a - X_i)^2}.$$

2) Поскольку элементарные частичные силы Δf_i действуют в одном и том же направлении, то результирующая сила их действия на точку C будет

$$f_h \approx \sum_{i=1}^{h} \frac{km \frac{M}{\ell} \Delta X_i}{(\ell + a - x_i)^2}.$$

3) Переходя к пределу в последнем равенстве при $n \to \infty$, найдем исходную силу взаимодействия

$$f = \frac{km\text{M}}{\ell} \int_0^{\ell} \frac{dx}{(\ell + a - x)^2} = \frac{km\text{M}}{a(a + \ell)}.$$

Для того чтобы найти массу m_0, которую нужно поместить в точку A при условии, что она будет действовать на точку C с той же силой, что и стержень A, приравниваем найденную силу

$f = \frac{km\text{M}}{a(a + \ell)}$ и силу $f_i = \frac{kmm_0}{(a + \ell)^2}$, равную силе взаимодействия двух точечных масс m и m_0:

$$\frac{km\text{M}}{a(a + \ell)} = \frac{kmm_0}{(a + \ell)^2},$$

отсюда

$$m_0 = \frac{M(a + \ell)}{a}.$$

Задача 21. По условию предыдущей задачи найти работу, которую совершит сила притяжения, когда точка, отстоявшая от стержня на расстоянии r_1, приблизится к нему на расстояние r_2, двигаясь вдоль прямой, составляющей продолжение стержня (рис.18).
Решение.

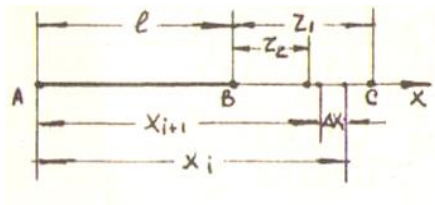


Рис. I8

Разобьем путь, пройденный точкой C, на элементарные участки:

$$[\ell + r_1; x_1], [x_1; x_2], \ldots [x_i; x_{i+1}], \ldots [x_{n-1}; \ell + r_2].$$

Тогда приближенное значение элементарной работы:

$$\Delta A_i \approx -f_i \cdot \Delta X_i$$

(знак «-», так как в данном случае $\Delta X_i < 0$); по результату предыдущей задачи

$$f_i = \frac{km\mathrm{M}}{a_i(a_i + \ell)},$$

где X_i - абсцисса точки C; $a_i = X_i - \ell$.

Следовательно,

$$\Delta A_i \approx \frac{km\mathrm{M}}{X_i(X_i - \ell)}(-\Delta X_i) \quad \text{и} \quad A_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{km\mathrm{M}}{X_i(X_i - \ell)} \Delta X_i.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta X_i \to 0)}} \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = -km\mathrm{M} \int_{\ell + r_1}^{\ell + r_2} \frac{dx}{X(X - \ell)} = km\mathrm{M} \int_{\ell + r_2}^{\ell + r_1} \frac{dx}{X(X - \ell)} = \frac{km\mathrm{M}}{\ell} \left(\int_{\ell + r_2}^{\ell + r_1} \frac{dx}{X - \ell} - \int_{\ell + r_2}^{\ell + r_1} \frac{dx}{X} \right) =$$

$$= \frac{km\mathrm{M}}{\ell} \left(\ell n \left| \frac{X - \ell}{X} \right| \Big|_{\ell + r_2}^{\ell + r_1} \right) = \frac{km\mathrm{M}}{\ell} \ell n \frac{r_1(\ell + r_2)}{r_2(\ell + r_1)}.$$

Задача 22. С какой силой проволочное кольцо массы M, радиуса R действует на материальную точку C массы m, лежащую на прямой, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости? Расстояние от точки до центра кольца равно a (рис. 19). Какую работу совершит сила притяжения при перемещении точки из бесконечности в центр кольцо?

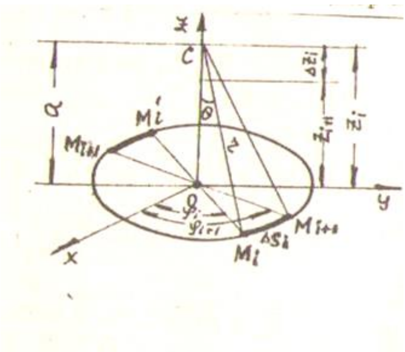


Рис. I9

Решение. Поместим начало координат в центре кольца, а восставленный в центре перпендикуляр примем за ось Oz. Считаем, что масса элементарной дуги ΔS_i сосредоточена в начальной точке этой дуги M_i. Сила Δf_i, с которой эта дуга действует на материальную точку C,

$$\Delta f_i \approx \frac{km\dfrac{\text{M}}{2\pi R}\Delta S_i}{r^2},$$

где $\dfrac{\text{M}}{2\pi R}\Delta S_i$ - масса элементарной дуги ΔS; $r = C\text{M}_i$. Составляющая этой силы по оси Oz

$$\Delta f_{iz} \approx \frac{km\,\text{M}\Delta S_i}{2\pi R\cdot r^2}\cdot\cos O,$$

где $\Delta S_i = R\Delta\varphi_i$, $(\Delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i)$;

$r = \sqrt{a^2 + R^2}$, $\cos O = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$.

Таким образом,

$$\Delta f_{iz} \approx \frac{km\,\text{M}\,a\Delta\varphi_i}{2\pi\sqrt{(a^2 + R^2)^3}}.$$

Каждой дуге $M_i\breve{M}_{i+1}$ соответствует другая элементарная дуга $M_i\breve{M}_{i+1}$, симметричная относительно центра кольца дуге $M_i\breve{M}_{i+1}$. В силу этой симметрии составляющие силы притяжения Δf_i точки C дугой $M_i\breve{M}_{i+1}$ по осям OX и OY будут равны по абсолютной величине и противоположны по знаку составляющим по осям OX и OY силы притяжения элементарной дугой $M_i\breve{M}_{i+1}$ точки C. Следовательно, составляющие по оси OX и OY силы притяжения кольцом точки C равна нулю. Поэтому

$$f_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta f_{iz}, \quad \text{или}$$

$$f_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{km\,\text{M}\,a\Delta\varphi_i}{2\pi\sqrt{(a^2 + R^2)^3}}$$

и

$$f = \frac{km\,\text{M}\,a}{2\pi\sqrt{(a^2 + R^2)^3}}\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{km\,\text{M}\,a}{\sqrt{(a^2 + R^2)^3}}.$$

Для вычисления работы силы притяжения при перемещении точка из бесконечности в центр кольца находим элементарную работу

$$\Delta\text{A}_i = f_i\cdot(-\Delta Z_i),$$

выполняемую при перемещении точки C из положения z_i в положения z_{i+1} под действием силы

$$f_i = \frac{km\,\text{M}\,Z_i}{\sqrt{\left(Z_i^2 + R^2\right)^3}}.$$

Тогда

$$A_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta\text{A}_i = -\sum_{i=1}^{n}\frac{km\,\text{M}\,Z_i}{\sqrt{\left(Z_i^2 + R^2\right)^3}}\Delta Z_i$$

и

$$A = -km\mathrm{M}\int_{\infty}^{0} Z(Z^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}dZ = km\mathrm{M}\int_{0}^{\infty} Z(Z^2 + R^2)^{-\frac{3}{2}}dZ .$$

Вычислив этот несобственный интеграл, получим

$$A = \frac{km\mathrm{M}}{R}.$$

<u>Задача 23.</u> Используя результат предыдущей задачи, вычислить, с какой силой плоский диск, радиус которого равен R, масса M, действует на материальную точку массы m, которая лежит на его оси на расстоянии a от центра (рис. 20).

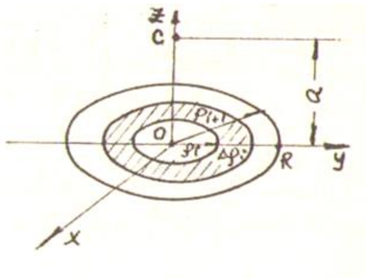


Рис. 20

Решение. Разобьем данный диск окружностями $r = p_i\ (i = 1,2,...,\ n)$ на n элементарных колец и вычислим силу взаимодействия элементарного кольца, ограниченного окружностями радиусов p_i и $p_{i+1} = p_i + \Delta p_i$ с материальной точкой C, считая, что вся масса этого элементарного кольца расположена вдоль окружности радиуса p_i. По предыдущей задаче эта сила

$$\Delta f_i = \frac{kma\dfrac{\mathrm{M}}{\pi R^2}\Delta S_i}{\sqrt{(a^2 + p_i^2)^3}},$$

где $\dfrac{\mathrm{M}}{\pi R^2}$ - масса, приходящаяся на единицу площади диска; $\dfrac{\mathrm{M}}{\pi R^2}\Delta S_i$ - масса выделенного кольца площади. ΔS_i, $\Delta S_i = \pi(p_i + \Delta p_i)^2 - \pi p_i^2 = 2\pi p_i\Delta p_i + \pi(\Delta p_i)^2$. Отбрасывая бесконечно малую второго порядка $\pi(\Delta p_i)^2$ по отношению к Δp_i, имеем $\Delta S_i \approx 2\pi p_i \Delta p_i$ и

$$\Delta f_i \approx \frac{2km\mathrm{M}ap_i\Delta p_i}{R^2\sqrt{\left(a^2 + p_i^2\right)^3}}.$$

А так все элементарные силы Δf_i направлены в одну сторону, то

$$f_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{2kmMap_i\Delta p_i}{R^2\sqrt{(a^2 + \varphi_i^2)^3}}$$

и

$$f = \frac{2km\mathrm{M}a}{R^2}\int_0^R \frac{pdp}{\sqrt{\left(a^2 + p^2\right)^3}} = -\frac{2kmMa}{R^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}}\Big|_0^R = \frac{2km\mathrm{M}}{R^2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right).$$

<u>Задача 24.</u> Радиусы оснований усеченного прямого круглого конуса равны R и r, высота h, плотность γ. С какой силой действует он на материальную точку 0 массы m, помещенную в его вершине (рис. 21)?

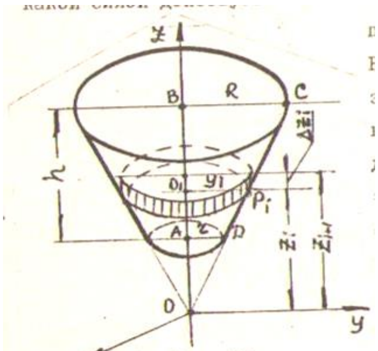


Рис. 2I

Решение. Для решения этой задачи разобьем усеченный конус плоскостями, перпендикулярными к его оси, на элементарные слои; найдем силу притяжения элементарным слоем материальной точки, помещенной в вершине конуса; просуммируем эти элементарные силы и переходя к пределу в полученной сумме, найдем искомую величину.

Для удобства расположим рассматриваемый конус так, чтобы его вершина совпала с началом координат, а высота – с осью OX . Выделим элементарный слой ΔV_i усеченного конуса, приняв его приближенно за круговой цилиндр толщиной $\Delta Z_i = Z_{i+1} - Z_i$ и основанием радиуса y_i. Запишем приближенное значение элементарной силы Δf_i притяжения этим слоем ΔV_i точки 0, положив, что вся масса этого элементарного слоя расположена вдоль диска радиуса y_i (см. предыдущую задачу):

$$\Delta f_i = \frac{2km\,\Delta M_i}{R_i^2}\left(1 - \frac{a_i}{\sqrt{a^2 + R_i^2}}\right).$$

Здесь $R_i = y_i$; $a_i = Z_i$; $\Delta M_i = \gamma \Delta V_i = \gamma \pi y_i^2 \Delta Z_i$ - масса выделенного элементарного слоя, поэтому

$$\Delta f_i \approx \frac{2km\,\gamma\pi y_i^2 \Delta Z_i}{y_i^2}\left(1 - \frac{Z_i}{\sqrt{Z_i^2 + y_i^2}}\right) = 2\pi km\,\gamma\left(1 - \frac{Z_i}{\sqrt{Z_i^2 + y_i^2}}\right)\Delta Z_i.$$

Выразим y_i через Z_i.

Так как $\Delta OBC \propto \Delta 0 O_i P_i$, то $\frac{y_i}{R} = \frac{Z_i}{OA + h}$, откуда

$$y_i = \frac{RZ_i}{OA + h}.$$

А из подобия ΔOBC и ΔOAD имеем $\frac{OA + h}{R} = \frac{OA}{r}$, т.е.

$$OA = \frac{hr}{R - r} \quad \text{и} \quad OA + h = \frac{hR}{R - r}.$$

Таким образом, $y_i = \frac{R - r}{h} Z_i$.

Следовательно, $$f_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta f_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi k\gamma m \left(1 - \frac{Z_i}{\sqrt{Z_i^2 + \left(\frac{R-r}{n} Z_i \right)^2}} \right) \Delta Z_i .$$

Откуда $$f = 2\pi k\gamma m \int_{\frac{hr}{R-r}}^{\frac{hR}{R-r}} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{(R-r)^2 + h^2}} \right) dz = 2\pi k\gamma m \left(1 - \frac{h}{\sqrt{(R-r)^2 + h^2}} \right) \int_{\frac{hr}{R-r}}^{\frac{hR}{R-r}} dz =$$

$$= 2\pi k\gamma mh \left(1 - \frac{h}{\sqrt{(R-r)^2 + h^2}} \right).$$

Задача 25. С какой силой материальная ломанная $y = |x| + 1$ притягивает материальную точку массы m, находящуюся в начале координат? (Линейная плотность равна λ).

Решение. Рассмотрим правую часть ломаной (рис. 22).

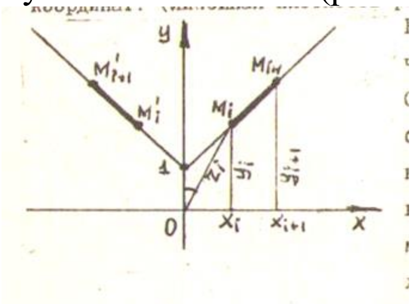


Рис. 22

Следуя общему приему, разбиваем материальную ломаную на элементарные участки $\Delta \ell_i$, считая, что вся масса этого участка расположена в его начальной точке M_i. Тогда элементарная сила Δf_i притяжения материальным участком $\Delta \ell_i$ материальный точки 0 будет приближенно равна:

$$\Delta f_i \approx \frac{km\gamma \Delta \ell_i}{r_i^2},$$

где $\gamma \Delta \ell_i$ - масса участка $\Delta \ell_i$, r_i - расстояние OM_i.

Составляющая этой силы по оси OY :

$$\Delta f_{iy} \approx \frac{km\gamma \cos O_i}{r_i^2} \Delta \ell_i ,$$

а так как $$\cos O_i = \frac{y_i}{r_i} = \frac{y_i}{\sqrt{y_i^2 + x_i^2}},$$

$$\Delta \ell_i = \sqrt{1 + \left(y_i^1 \right)^2} \cdot \Delta X_i = \sqrt{2} \Delta X_i ,$$

(здесь $y' = (x+1)' = 1$), поэтому

$$\Delta f_{iy} \approx \frac{\sqrt{2} km\gamma \cdot y_i \Delta X_i}{\sqrt{\left(x_i^2 + y_i^2 \right)^3}} = \frac{\sqrt{2} km\gamma (X_i + 1) \Delta X_i}{\sqrt{\left(2X_i^2 + 2X_i + 1 \right)^3}} .$$

Переходя к рассмотрению правой части ломаной, заметим, что равный результат получаем для участка $\overline{M}_i \overline{M}_{i+1}$, симметричного участку $M_i M_{i+1}$ относительно оси OY .

Составляющие сил притяжения материальной точки 0 участками $M_i M_{i+1}$ и $\overline{M}_i \overline{M}_{i+1}$ по оси OX будут равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, поэтому $\Delta f_{ix} = 0$.

Таким образом,

$$f_n = f_{ny} = 2\sqrt{2}km\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i + 1)\Delta X_i}{\sqrt{\left(2_i^2 + 2X_i + 1\right)^3}}$$

и

$$f = 2\sqrt{2}km\gamma \int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{(2x^2 + 2x + 1)^3}} = \gamma mk \int_0^{\infty} \frac{(x+1)dx}{\sqrt{\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right)^3}} .$$

Для вычисления полученного интеграла применим тригонометрическую подстановку: $X + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} tgt$;

$$dx = \frac{1}{2}\sec^2 tdt .$$

Изменению переменной $X \in [0;+\infty]$ соответствует промежуток $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тогда

$$f = 2\gamma km \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + \cos t)dt = 2km\gamma .$$

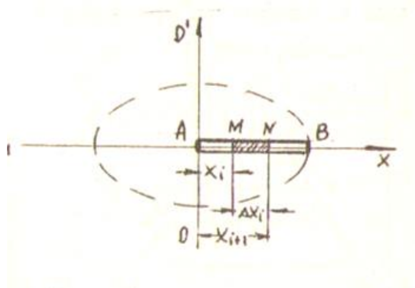
5. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ОСИ

Для отыскания кинетической энергии E тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, согласно общей схеме применения определенного интеграла необходимо выполнить следующие операции:

1) разбить вращающегося тело на n элементарных частей;
2) найти приближенное значение ΔY_i момента инерции относительно оси вращения i - й элементарной части;
3) найти момент инерции Y тела относительно оси вращения;
4) применив формулу $E = \frac{1}{2} Y\omega^2$, где ω - угловая скорость, вычислить кинетическую энергию.

<u>Задача 26.</u> Стержень AB вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси $00'$ с угловой скоростью ω . Площадь поперечного сечения стержня S ,

его длина ℓ , плотность материала, из которого он изготовлен, равна γ . Найти кинетическую энергию стержня (рис. 23).



$,\ldots,[X_{n-1};\ell].$ Рис. 23

Решение. Расположим вращающийся стержень так, чтобы ось $0 0'$ совпадала с осью OY , а начало координат – с началом стержня (рис. 23). Разобьем стержень AB длиной ℓ на n частей:

$$[0;X_1];[X_1;X_2],\ldots,\ [X_i,X_{i+1}],\ldots,\ [X_{n-1};\ell].$$

Запишем приближенное значение момента инерции ΔY_i элементарной части ΔX_1 стержня относительно оси вращения OY , считая, что вся масса элементарной части ΔX_i сосредоточена в ее начальной точке M отрезка $[X_i;X_{i+1}]$:

$$\Delta Y \approx \gamma S \Delta X_i X_i^2 ,$$

где $\gamma S \Delta X_i$ - масса элементарного участка стержня; X_i - расстояние от точки M до оси вращения:

$$Y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta Y_i = \int_0^{\ell}\gamma S x^2 dx = \gamma S \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\ell} = \frac{\gamma S \ell^3}{3}.$$

Пользуясь формулой $E = \dfrac{Y\omega^2}{2}$, получаем:

$$E = \frac{\gamma S \ell^3 \omega^2}{6}.$$

<u>Задача 27.</u> Треугольная пластинка, основание которой a , а высота h , вращается вокруг своего основания с постоянной угловой скоростью ω . Найти кинетическую энергию пластинки, если ее толщина d , а плотность материала, из которого она изготовлена, равна γ (рис. 24).

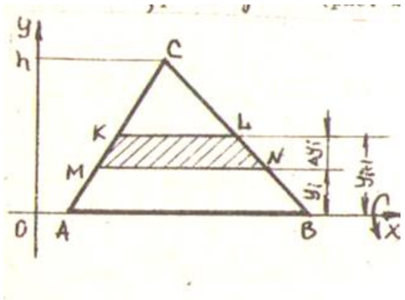


Рис. 24

Решение. Расположим пластинку так, чтобы ее основание совпадало с осью OX .

1) Разобьем $[O;h]$ на n отрезков:

$$[O;y_1],[y_1;y_2],\ldots,\ [y_i,y_{i+1}],\ldots,\ [y_{n-1};h]$$

Через точки деления проведем плоскости параллельно оси вращения. Пластинка разделиться на элементарные стержни.

2) Вычислим приближенно момент инерции ΔY_i элементарного стержня высотой Δy_i, полагая, что он имеет длину $|MN|$:

$$\Delta Y_i \approx y_i^2 \Delta m_i,$$

где y_i - ордината точки M; $\Delta m_i = \gamma d \Delta S_i$ - масса выделенного слоя на расстоянии y_i от оси вращения, ΔS_i - площадь $MNLK$.

Пренебрегаем тем, что $MNLK$ - трапеция, допуская, что в сечении элементарного стержня – прямоугольник. Тогда

$$\Delta S_i \approx \ell_i \cdot \Delta y_i,$$

где ℓ_i - длина MN.

Величину ℓ_i найдем, используя подобие ΔMNC и ΔABC:

$$\frac{\ell_i}{a} = \frac{h - y_i}{h}, \qquad \ell_i = \frac{a}{h}(h - y_i).$$

Следовательно, $\Delta m_i = \dfrac{\gamma ad}{h}(h - y_i)\Delta y_i$ и

$$\Delta Y_i \approx \frac{\gamma ad}{h} y_i^2 (h - y_i)\Delta y_i.$$

3)

$$Y = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta Y_i = \frac{\gamma ad}{h} \int_0^h y^2 (h - y) dy = \frac{\gamma ah^3 d}{12}$$

Пользуясь формулой $E = \dfrac{Y\omega^2}{2}$,

получаем для кинетической энергии

$$E = \frac{\gamma ah^3 d\omega^2}{24}.$$

Задача 28. Круглый цилиндр, радиус основания которого равен R, а высота H, вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. Плотность материала, из которого сделан цилиндр, равна γ. Найти кинетическую энергию цилиндра (рис. 25).

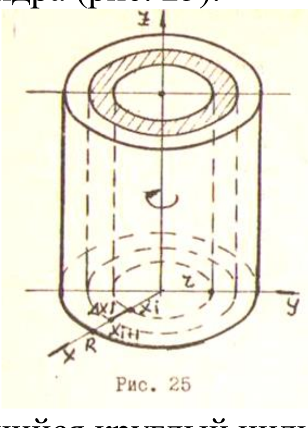


Рис. 25

Решение. Разобьем вращающийся круглый цилиндр радиуса R цилиндрическими поверхностями, направляющими которых являются концентрические окружности радиуса

$$O < r < R$$

на цилиндрические кольца толщины $\Delta X_i \quad (i = 1,2,\ldots, n)$.

Объем элементарного кольца, заключенного между цилиндрическими поверхностями радиусов X_i и X_{i+1},

$$\Delta V_i = \pi (X_i + \Delta X_i)^2 H - \pi X_i^2 H = 2\pi HX_i \Delta X_i + \pi H \Delta X_i^2 \approx 2\pi HX_i \Delta X_i .$$

Здесь отбросили слагаемое, которое является бесконечно малой второго порядка по сравнению с ΔX_i. Масса этого элементарного кольцо приближенно составляет

$$\Delta m_i = \gamma \cdot 2\pi HX_i \Delta X_i ,$$

а момент инерции

$$\Delta Y_i \approx 2\pi\gamma HX_i \cdot X_i^2 \Delta X_i = 2\pi\gamma HX_i^3 \Delta X_i ,$$

где X_i - расстояние от оси вращения точки, лежащей на цилиндрической поверхности с радиусом X_i.

Момент инерции цилиндра

$$Y = 2\pi\gamma H \int_0^R x^3 dx = \frac{\pi\gamma H x^4}{2} \Big|_0^R = \frac{\gamma\pi HR^4}{2} .$$

Пользуясь формулой $E = \dfrac{\gamma\pi HR^4 CO^2}{4}$.

<u>Задача 29.</u> Тонкая проволока массы M согнута в виде полуокружности радиуса R и вращается вокруг оси, проходящей через концы полуокружности, делая n оборотов в минуту.

а) Вычислить ее кинетическую энергию.

б) Вычислить кинетическую энергию, если осью вращения служит касательная в средней точке полуокружности.

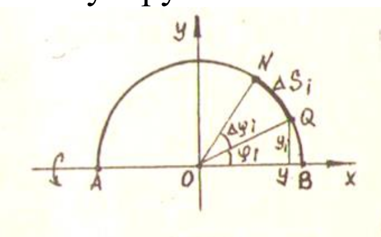


Рис.26

Решение. a) Найдем момент инерции проволоки при вращении ее вокруг диаметра AB (рис. 26). Для этого разобьем дугу $\breve{A}\breve{B}$ на элементарные дуги ΔS_i,

$$i = 1,2,\ldots, n,$$

и найдем приближенное значение момента инерции дуги ΔS_i, центральный угол которой $\Delta\varphi_i$, при условии, что вся масса Δm_i этой дуги сосредоточена в точке Q:

$$\Delta Y_i \approx y_i^2 \Delta m_i ,$$

но $\quad \Delta m_i = \dfrac{M}{\pi R}\Delta S_i = \dfrac{M}{\pi R} R \Delta\varphi = \dfrac{M}{\pi}\Delta\varphi ,$

где $\frac{M}{\pi R}$ - масса, приходящаяся на единицу длины дуги полукольца, $y_i = R\sin\varphi_i$, поэтому

$$\Delta Y_i \approx \frac{MR^2}{\pi}\sin^2\varphi_i\Delta\varphi_i$$

и

$$Y = \frac{MR^2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\varphi d\varphi = \frac{MR^2}{2}.$$

Тогда $E = \frac{Y\omega^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\cdot\frac{4\pi^2 n^2}{3600} = \frac{MR^2\pi^2 n^2}{3600}$,

Так как $\omega = n$ об/мин = $2\pi n$ 1 /мин = $\frac{2\pi n}{60}$ 1 /с.

б) Найдем момент инерции проволоки для случая, когда осью вращения будет касательная Δ, проведенная в средней точке C полуокружности, согнутой из проволоки (рис. 27).

В этом случае

$$\Delta Y_i \approx (R - y_i)^2\Delta m_i,$$

где $(R - y_i)$ - расстояние от точки Q до оси вращения,

$$\Delta m_i = \frac{M}{\pi R}\Delta S_i = \frac{M}{\pi R}\cdot R\Delta\varphi_i = \frac{M\Delta\varphi_i}{\pi},$$

$$y_i = R\sin\varphi_i.$$

Тогда $\Delta Y_i \approx \frac{M}{\pi}(R - R\sin\varphi_i)^2\Delta\varphi_i$ и $Y = \frac{MR^2}{\pi}\int_0^\pi (1-\sin\varphi)^2 x d\varphi = \frac{MR^2}{2\pi}(3\pi - 8)$.

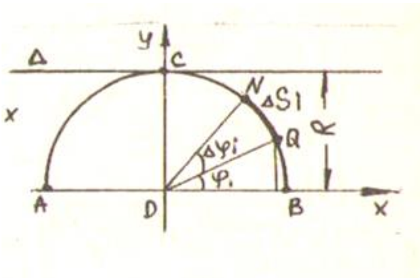


Рис. 27

Следовательно, учитывая, что $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ 1/с,

$$E = \frac{1}{2}Y\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{MR^2(3\pi - 8)}{2\pi}\cdot\frac{4\pi^2 n^2}{3600} = \frac{MR^2\pi n^2(3\pi - 8)}{3600}.$$

6. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ НА ВЕРТИКАЛЬНУЮ СТЕНКУ, ПОГРУЖЕННУЮ В ЖИДКОСТЬ.

Проиллюстрируем общий подход к решению задач этого типа.

Пусть необходимо определить силу давления жидкости плотностью γ на вертикальную стенку σ граница которой C_σ описывается кривой $y = f(x)$, погруженную на глубину h (под глубиной погружения понимаем величину абсциссы, наиболее удаленной от поверхности жидкости точки границы C_σ, полагая при этом, что ось ординат лежит на поверхности жидкости) (рис. 28).

Для решения поступаем следующим образом.

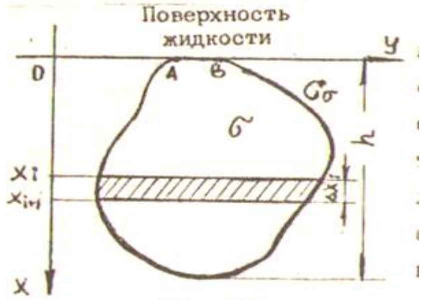


Рис. 28

1) Обозначим через $\ell(x_i)$ длину отрезка горизонтальной прямой, проведенной на стенке на расстоянии x_i от поверхности жидкости. Приняв полоску, содержащуюся между горизонтальными прямыми, отстоящими от AB на расстоянии x_i и $x_i + \Delta x_i$, за прямоугольник с основанием $\ell(x_i)$ и высотой Δx_i, можно приближенно (с точностью до бесконечно малых высшего порядка, чем Δx_i) вычислить давление ΔP_i, испытываемое этой полоской.

Для вычисления ΔP_i воспользуемся правилом гидростатики, согласно которому давление жидкости на полоску, погруженную в нее, равно площади полоски, умноженной на глубину погружения и удельный вес жидкости, то есть:

$$\Delta P_i = \gamma g x_i \ell(x_i) \Delta x_i \qquad (9)$$

Величину $\ell(x_i)$ в каждом конкретном случае определяем исходя из аналитического выражения $y = f(x)$ для границы C_σ стенки σ .

2) Определив $\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i$ и переходя в этой сумме при $n \to \infty$, приходим к выражению для вычисления всего давления P, испытываемого стенкой:

$$P = \gamma g \int_0^h x \ell(x) dx \ . \qquad (10)$$

Задача 30. Пластинка в форме треугольника погружена вертикально в воду так, что ее основание лежит на поверхности воды. Основание пластинки a, высота h (рис. 29).

а) Подсчитать силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

б) Во сколько раз увеличится давление, если перевернуть пластинку так, что на поверхности окажется вершина, а основание будет параллельно поверхности воды (рис. 30)?

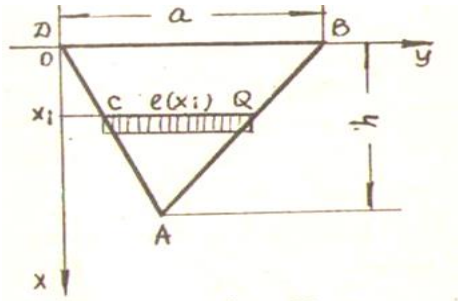


Рис. 29

Решение. а) Давление, испытываемое полоской длиной $\ell(x_i)$ и высотой ΔX_i, погруженной в воду на глубину X_i, по формуле (9)

$$\Delta P_i \approx \gamma g \ell(x_i) \Delta X_i \cdot X_i .$$

Здесь – знак приближенного равенства, так как полагаем, что полоска имеет форму прямоугольника, а не трапеции $(\gamma = 1)$. Из подобия треугольников BAD и QAC имеем:

$$\frac{\ell(x_i)}{a} = \frac{h - x_i}{h}, \qquad \ell(x_i) = \frac{a}{h}(h - x_i) .$$

Тогда $\Delta P_i \approx \frac{ag}{h}(h - x_i) x_i \Delta X_i$ и, пользуясь формулой (10), получаем

$$P_i = \frac{ag}{h}\int_0^h (h - x) x dx = \frac{agh^2}{6} .$$

б) В этом случае, учитывая подобие треугольников ABD и AQC, получаем

$$\frac{\ell(x_i)}{a} = \frac{x_i}{h}; \qquad \ell(x_i) = \frac{a}{h} X_i .$$

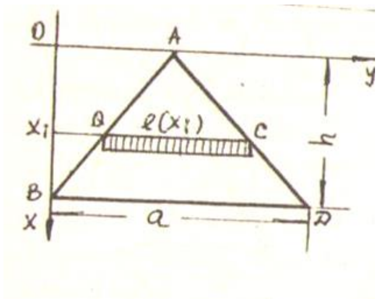


Рис. 30

Тогда $\Delta P_i \approx g \ell(x_i) X_i \Delta X_i = \frac{ag}{h} X_i^2 \Delta X_i .$

Переходя к пределу в сумме $\sum_{i=1}^{n} \Delta P_i$ при $n \to \infty$, имеем

$$P_2 = \frac{ag}{h}\int_0^h x^2 dx = \frac{agh^3}{3h} = \frac{agh^2}{3} .$$

И наконец, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{1}{3} agh^2}{\frac{1}{6} agh^2} = 2 .$

Задача 31. Квадратная пластинка погружена вертикально в воду так, что одна из диагоналей параллельна поверхности. Сторона квадрата равна a (рис. 31). С какой силой вода давит на каждую сторону пластинки?

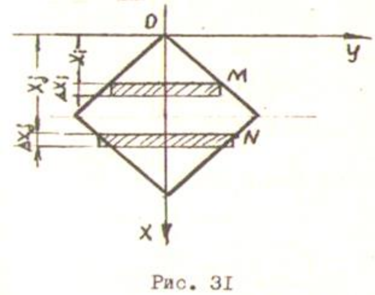


Рис. 31

Решение. Для решения этой задачи подсчитаем отдельно давления P_1 и P_2, испытываемые верхней и нижней частями квадрата; сложив P_1 и P_2, найдем искомое давление P.

Для определения P_1 находим

$$\Delta P_{1i} \approx 2gy_i x_i \Delta x_i,$$

$(\gamma = 1)$, x_i, y_i - координаты точки M, а так как для прямых OC и OA будет $|x| = |y|$, то

$$\Delta P_{1i} \approx 2gx_i^2 \Delta X_i$$

и

$$P_1 = 2g\int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} x^2 dx = \frac{a^3 g\cdot\sqrt{2}}{6}.$$

Учитывая уравнение прямой BC $y = a\sqrt{2} - x$, координаты точки $N(x_j, a\sqrt{2} - x_j)$ определяем

$$\Delta P_{2j} \approx 2g(a\sqrt{2} - x_j)\cdot x_j \Delta X_j,$$

а затем

$$P_2 = 2g\int_{\frac{a\sqrt{2}}{2}}^{a\sqrt{2}} (a\sqrt{2} - x)xdx = \frac{a^3 g\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 32. Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму полукруга радиуса a, диаметр которого находится на поверхности воды (рис. 32).

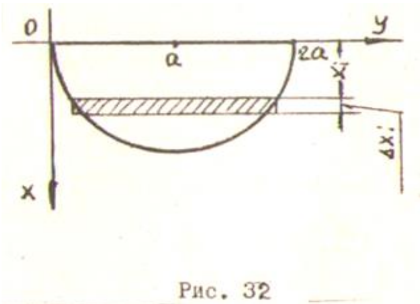


Рис. 32

Решение. Давление ΔP_i, испытываемое полоской длиной $\ell(x_i)$, высотой ΔX_i, погруженной на глубину X_i,

$$\Delta P_i = \gamma g \ell(x_i) x_i \Delta X_i.$$

Так как $\gamma = 1$, $\ell(x_i) = 2\sqrt{a^2 - x_i^2}$, то

$$\Delta P_i \approx 2gx_i\sqrt{a^2 - x_i^2}\,\Delta X_i$$

(здесь полоску принимаем за прямоугольник).
Тогда

$$P = 2g\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{2}{3}g(a^2 - x^2)^{3/2}\Big|_a^0 = \frac{2}{3}ga^3 .$$

<u>Задача 33.</u> Определить силу давления воды на вертикальную стенку, имеющую форму трапеции, нижнее основание которой a, верхнее b, а высота h, если уровень погружения нижнего основания C (рис. 33).
Решение. На расстоянии x_i от верхнего основания стенки выделим полоску длиной $\ell(x_i)$ и шириной ΔX_i. Учитывая подобие ΔQML и ΔQCD и то, что $CF = CD + DF = CD + b$, имеем

$$\ell(x_i) = b + (a-b)\frac{x_i}{h}.$$

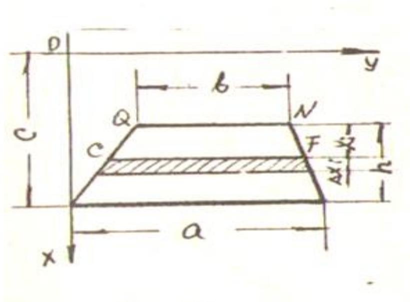


Рис. 33

Повторяя рассуждения, приводимые в предыдущих задачах, получаем, что давление, испытываемое этой полоской, приближенно

$$\Delta P_i = \gamma g\left(b + (a-b)\frac{x_i}{h}\right)(c - h + x_i)\Delta X_i$$

и

$$P = \gamma g\int_0^h\left(b + (a-b)\frac{x_i}{h}\right)(c - h + x)dx = \gamma g\int_0^h\left(b(c-h) + \left(b + \frac{(a-b)(c-h)}{h}\right)x + \frac{a-b}{n}x^2\right)dx =$$

$$= \gamma g\left(b(c-h)h + \frac{h^2}{2}\left(b + \frac{(a-b)(c-h)}{h} + \frac{h^2}{3}(a-b)\right)\right).$$

<u>Задача 34.</u> Прямоугольная пластинка со сторонами a и b $(a > b)$ погружена в жидкость под углом α к поверхности жидкости. Большая сторона параллельна поверхности и лежит на глубине h. Вычислить давление жидкости на каждую из сторон пластинки, если плотность жидкости γ (рис. 34).

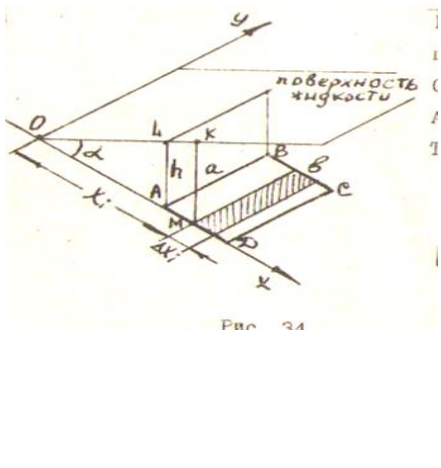


Рис. 34

Решение. Для удобства решения полагаем, что ось OX совпадает со стороной $AD = b$ пластинки $ADCB$.

Тогда из $\triangle OAL$:

$$|OA| = \frac{h}{\sin\alpha};$$

$$|OD| = \frac{h}{\sin\alpha} + b.$$

Выделим на пластинке элементарный слой длиной a и толщиной ΔX_i. Приближенное значение давления, испытываемое этим элементарным слоем,

$$\Delta P_i \approx \gamma g|MK| \cdot a\Delta X_i,$$

но $$|MK| = x_i \sin\alpha,$$

то есть $$\Delta P_i \approx \gamma a x_i \sin\alpha \Delta X_i.$$

Следуя общей схеме применения определенного интеграла, имеем:

$$P = a\gamma g \sin\alpha \int\limits_{\frac{h}{\sin\alpha}}^{\frac{h}{\sin\alpha}+b} x dx = \frac{a\gamma g \sin\alpha}{2}\left(\frac{h^2}{\sin^2\alpha} + \frac{2hb}{\sin\alpha} + b^2 - \frac{h^2}{\sin^2\alpha}\right) = ab\gamma g\left(h + \frac{b\sin\alpha}{2}\right).$$

<u>Задача 35.</u> Прямоугольный сосуд наполнен равными по объему частями воды и масла, причем масло вдвое легче воды. Показать, что давление на каждую стенку сосуда уменьшится на одну пятую, если вместо смеси будет взято одна масло учесть, что все масло находится сверху (рис. 35).

Решение. Расположим координатные оси так, как это показано на рисунке. Обозначим через γ_b плотность воды, а через $\gamma_М$ - плотность масла. По условию $\gamma_b = 2\gamma_М$. Положим $\gamma_b = 1$, тогда $\gamma_М = \frac{1}{2}$.

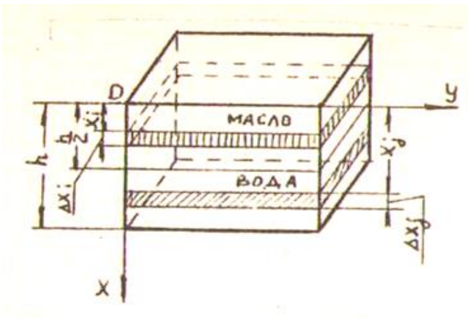


Рис. 35

1) Найдем давление $P_М$ на стенку сосуда, создаваемое маслом, учитывая, что оно находится над водой.

Для этого выделим на глубине x_i на стенке сосуда элементарную полоску высотой ΔX_i, тогда (см. (9)) приближенное значение давления $\Delta P_{iМ}$, испытываемое этой полоской,

$$\Delta P_{iM} \approx x_i \cdot a\gamma_M \cdot g \cdot \Delta X_i = \frac{a}{2} x_i \Delta X_i.$$

Следовательно,

$$P_М = \frac{ag}{2}\int\limits_0^{\frac{h}{2}} x dx = \frac{agh^2}{16}.$$

2) Для вычисления давления P_b на стенку сосуда, создаваемого водой, снова выделим элементарную полоску высотой $\Delta \overline{X}_j$ на глубине $\overline{x}_j$ и учтем при этом, что она испытывает помимо давления воды еще давление всего объема масла, находящегося над водой. Давление, испытываемое элементарной полоской, приближенно составит:

$$\Delta P_{jb} \approx \gamma_M \frac{agh}{2} \Delta \overline{X}_j + \gamma_b \left(\overline{x} - \frac{h}{2} \right) a \Delta \overline{X}_j = \frac{agh}{2} \Delta \overline{X}_j + ag \left(\overline{x}_j - \frac{h}{2} \right) \Delta \overline{X}_j = ag \left(\overline{x}_j - \frac{h}{4} \right) \Delta \overline{X}_j ,$$

то есть:

$$P_b = ag \int_{\frac{h}{2}}^{h} \left(x - \frac{h}{4} \right) dx = \frac{agh^2}{4} .$$

3) Давление, испытываемое стенкой сосуда,

$$P = P_M + P_b = \frac{agh^2}{16} + \frac{agh^2}{4} = \frac{5}{16} agh^2 .$$

4) Если бы в сосуде находилось только масло, то

$$\Delta \overline{P}_i \approx \gamma_M g x_i a \Delta X_i \qquad \text{и} \qquad \overline{P} = \frac{ag}{2} \int_0^h x dx = \frac{1}{4} agh^2 .$$

Таким образом, действительно,

$$P - \overline{P} = \frac{5}{16} agh^2 - \frac{1}{4} agh^2 = \frac{1}{16} agh^2 = \frac{1}{5} P .$$

7. РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ЯВЛЕНИЕМ ИСТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ МАЛОГО ОТВЕРСТИЯ.

Типичной для данной темы является следующая задача.

Пусть дан сосуд, ограниченный замкнутой поверхностью (рис. 36), и пусть известна площадь любого его сечения Q, произведенного плоскостью, перпендикулярной к некоторой прямой, (ее примем, например, за ось OX), то есть $Q = Q(x)$ - известная функция, где x - абсцисса точки пересечения указанной плоскости и оси OX. В дне сосуда имеется отверстие площадью S. За какое время жидкость вытечет из сосуда через это отверстие?

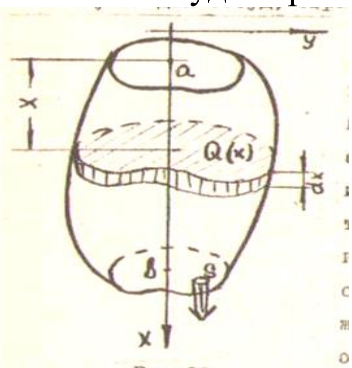


Рис. 36

Решение. По закону Торричелли скорость истечения идеальной жидкости $V = \sqrt{2gh}$, где h - высота столба жидкости над отверстием, g - ускорение свободного падения. По этому закону количество жидкости, вытекшее через отверстие площадью S за время dt, $dW = \sqrt{2gx} \cdot Sdt$, здесь $h = x$. С другой стороны это же количество $dW = \gamma g Q(x) dx$, где γ - плотность жидкости.

Сравнивая эти выражения, получаем $dt = \dfrac{\gamma g Q(x) dx}{\sqrt{2gx} \cdot S}$, откуда

$$t = \frac{\gamma g}{\sqrt{2g} \cdot S} \int_a^b \frac{Q(x) dx}{\sqrt{x}} \qquad (11).$$

Формула (11) позволяет решить большинство задач, связанных с истечением жидкости.

Задача 36. В дне цилиндрического сосуда, площадь основания которого Q, а высота h, имеется отверстие. Вычислить площадь этого отверстия, если известно, что вода, наполняющая сосуд, вытекает из него за время t (рис. 37).

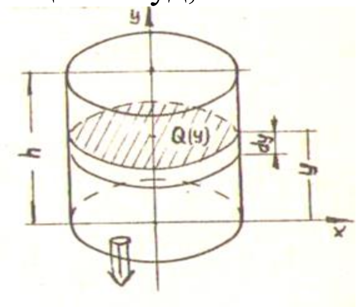


Рис. 37

Решение. С учетом другого расположения осей и того, что в данном случае $dy < 0$, формула (11) преобразуется к виду:

$$t = -\frac{\gamma g}{\sqrt{2g} \cdot S} \int_h^0 \frac{Q(y)}{\sqrt{y}} dy . \qquad (12)$$

Таким образом, по условию данной задачи

$$t = \frac{\gamma g Q}{\sqrt{2g} \cdot S} \int_h^0 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\gamma g Q}{\sqrt{2g} \cdot S} \int_0^h \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{\gamma g Q}{S\sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{h} = \frac{\gamma Q}{S} \cdot \sqrt{2gh} \quad \text{и} \quad S = \frac{\gamma Q}{t}\sqrt{2gh} .$$

Задача 37. Коническая воронка высотой H наполнена водой. Радиус верхнего отверстия R. Нижнее отверстие, через которое вода начинает вытекать из воронки, имеет радиус r. В течение какого времени уровень воды в воронке понизится на h? Когда воронке опорожнится (рис. 38).

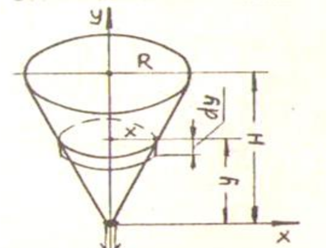


Рис. 38

Решение. Начнем с решения второй задачи. Воспользуемся формулой (12), учитывая, что $Q(y) = \pi x^2$; $S = \pi r^2$; $x = \dfrac{R}{H} y$, так как $\dfrac{R}{X} = \dfrac{H}{y}$.

Тогда время полного опорожнения воронки

$$t = -\frac{\gamma g}{\sqrt{2g}\cdot \pi r^2}\int_H^0 \frac{\pi R^2 y^2}{H^2\sqrt{y}}\,dy = \frac{2g\gamma R^2}{5H^2 r^2\sqrt{2g}}\, y^{\frac{5}{2}}\Big|_0^H = \frac{R^2}{\sigma r^2}\sqrt{2gH} \qquad (\gamma = 1).$$

Для того чтобы найти время, в течение которого уровень воды в воронке снизится на h, следует в последнем интеграле изменить пределы интегрирования: $H - h \le y \le H$,

$$t_1 = \frac{2gR^2}{\sigma H^2 r^2\sqrt{2g}}\, y^{\frac{5}{2}}\Big|_{H-h}^H = \frac{\sqrt{2g}\,R^2}{\sigma r^2 H^2}\left(H^2\sqrt{H} - (H-h)^2\sqrt{H-h}\right).$$

<u>Задача 38.</u> Котел имеет форму эллиптического цилиндра с горизонтальной осью (рис. 39). Полуоси эллиптического сечения (перпендикулярного к оси цилиндра) равны b (горизонтальная) и a (вертикальная); образующая цилиндра равна L. Котел наполнен водой до половины. За какое время воды вытечет из котла через отверстие в его дне, имеющее площадь S ? $(\gamma = 1)$.

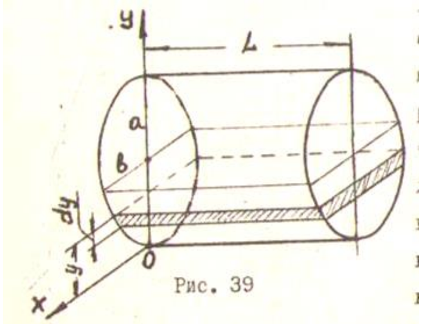


Рис. 39

Решение. По формуле (12), где $Q(y) = 2HX$, определим время t.

Из уравнения эллипса $\frac{x^2}{b^2} + \frac{(Y-b)^2}{a^2} = 1 \quad x = \frac{b}{a}\sqrt{2ay - y^2}$, следовательно,

$$t = -\frac{2\gamma gHb}{\sqrt{2g}\,aS}\int_a^0 \sqrt{2a - y}\,dy = \frac{2bH\sqrt{2ga}}{3S}(2\sqrt{2} - 1).$$

<u>Задача 39.</u> В вертикальной стенке призматического сосуда, наполненного водой, проделана прямоугольная вертикальная щель, высота которой h, ширина b (рис. 40). Верхний край щели, параллельный поверхности воды, расположен на расстоянии H от поверхности. Какое количество воды вытекает за I с, если считать, что уровень воды поддерживается все время на одной высоте? Рассмотреть случай $H = 0$ (задача о водосливе).

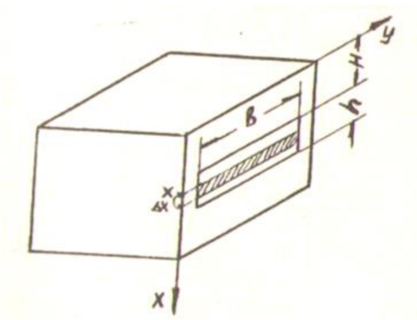


Рис. 40

Решение. Количество воды, которое вытекает через полоску щели шириной b и высотой ΔX, находящуюся на глубине X от поверхности воды, за I с,

$$\Delta W = \sqrt{2gh}\,\Delta x \cdot b \cdot \perp ,$$

где $b \cdot \Delta x$ - площадь указанной полоски. Тогда все количество воды, которое вытекает через щель шириной b и высотой h за I с, будет:

$$W = \int_{H}^{H+h} \sqrt{2g}\,b\sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\,b \cdot x^{\frac{3}{2}} \Big|_{H}^{H+h} = \frac{2}{3} b\sqrt{2g}\left((H+h)^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}} \right).$$

В случае когда $H = 0$, имеем

$$W = \frac{2}{3} b\sqrt{2g}\,h^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2gh} \cdot S,$$ где S - площадь щели.

Общая схема применения определенного интеграла

Если $\forall\ [\alpha;\beta] \subset [a;b]$ отвечает значение определенной физической или геометрической величины f, то f - функция промежутка. Обозначают:

$$F([\alpha;\beta]); \quad F([X; X+\Delta X]) = \Delta F,$$

F - аддитивна, если $F([\alpha;\beta]) = F([\alpha;\gamma]) + F([\gamma;\beta])$, где $\alpha < \gamma < \beta$.

Если точностью до бесконечно малой высшего порядка по сравнению с ΔX удалось установить $\Delta F \approx f(x)\Delta X$, где F - аддитивна, а $f(x)$ - определена и непрерывна для $X \in [a,b]$, то

$$F([a;b]) = \int_{a}^{b} f(x)dx .$$

Статический момент, момент инерции и координаты центра OK - 2 тяжести материальной кривой (приложение определенного интеграла)

Обозначим:

$M_X (M_y)$ - статический момент (соответственно) однородной материальной кривой $y = f(x)$, $a \le x \le b$, с линейной плотностью μ =1;

$Y_X (Y_Y)$ - момент инерции;

$X_C ; y_C$ - координаты центра тяжести.

РАЗОБЬЕМ кривую $y = f(x)$, $a \le x \le b$, на элементарные дуги ΔS и предположим, что вся масса дуги ΔS сосредоточена в ее начальной точке.

ВСПОМНИМ, что для материальной точки $P(x, y)$ с массой m имеем:

$$M_X = my;$$
$$M_Y = mx;$$
$$Y_x = my^2;$$
$$Y_Y = mx^2.$$

Тогда

1. $\Delta M \approx y\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $M_X = \int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

$\Delta M_y \approx X\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ $\quad M_y = \int_a^b x\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

2. $\Delta Y_X \approx y^2\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $Y_X = \int_a^b y^2(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

$\Delta Y_y \approx x^2\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ $\quad Y_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$

3. $x_C = \frac{M_Y}{L}$; $\quad y_C = \frac{M_X}{L}$

(L - длина кривой)

Вычисление работы при поднятии тела
(приложение определенного интеграла)

Пусть тело плотности γ имеет высоту H и известную площадь $S(h)$ любого сечения, перпендикулярного к высоте.

ВЫДЕЛИМ элементарной слой на высоте y толщиной Δy.

Вес этого элементарного слоя

$$\Delta P = \gamma g S(y)\Delta y .$$

ВЫЧИСЛИМ работу ΔA, которую следует затратить на поднятие этого слоя на высоту y:

$$\Delta A = \Delta P \cdot y .$$

ТОГДА согласно общей схеме применения определенного интеграла работа

$$A = \gamma g \int_0^H y\cdot S(y)dy .$$

Вычисление силы взаимодействия двух материальных тел
(приложение определенного интеграла)

Для вычисления силы f взаимодействия некоторого материального тела с материальной точкой:

1) разбиваем его на n элементарных частей;
2) находим приближенное значение Δf_i силы взаимодействия i - й элементарной части с данной материальной точкой;
3) суммируем эти силы;
4) переходим к пределу в полученной сумме при $n \to \infty$.

При вычислении Δf_i силы взаимодействия i - й элементарной части ПОЛАГАЕМ, что МАССА этой части СОСРЕДОТОЧЕНА А ОДНОЙ ТОЧКЕ, а сила взаимодействия двух точечных масс определяется по формуле

$$\Delta f_i = K\frac{mM}{r^2},$$

где m и M - масса точек;
r - расстояние между точками;

K - коэффициент пропорциональности, равный

$$6,67 \cdot 10^{-11}\ м^3/(кг \cdot c^2)$$

Вычисление силы давления на вертикальную стенку, погруженную в жидкость (приложение определенного интеграла)

Чтобы вычислить давление, которое испытывает вертикальная стенка σ (граница C_σ которой описывается кривой $y = f(x)$), погруженная в жидкость с плотностью γ на глубину h,

НЕОБХОДИМО

1) предположить, что ось OY лежит на поверхности жидкости;
2) тогда давление, испытываемое полоской стенки длиной $\ell(x)$, высотой ΔX на глубине x, согласно основному закону гидростатики $\Delta P = \gamma gxC\ (x)\Delta X$;
3) искомое давление

$$P = \gamma g \int_0^h x\ell(x)dx \ .$$

Решение задач, связанных с истечением жидкости из малого отверстия (приложение определенного интеграла)

По закону Торричелли скорость истечения идеальной жидкости высота столба жидкости над отверстием;

$$V = \sqrt{2gh}\ ,$$

где hg - ускорение силы тяжести.

Согласно этому закону количество жидкости, вытекшее из сосуда через отверстие площадью S за время Δt,

$$\Delta V = \sqrt{2gh} \cdot S \cdot \Delta t\ ,$$

здесь $h = x$.

С другой стороны, тоже количество жидкости

$$\Delta V = \gamma gQ\ (x)\Delta X\ ,$$

где $Q(x)$ - площадь сечения сосуда, перпендикулярного к оси Ox.
Приравниваем правые части этих равенств, находим

$$\Delta t = \frac{\gamma gQ\ (x)\Delta X}{\sqrt{2gx} \cdot S}\ ,$$

откуда

$$t = \frac{\gamma g}{\sqrt{2g} \cdot S} \int_a^b \frac{Q(x)dx}{\sqrt{x}}\ .$$

ОГЛАВЛЕНИЕ