Министерство Высшего и Среднего Специального образования
Ташкентский автомобильно-дорожный институт
Кафедра: «Прикладная механика»

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

(методическое пособие к выполнению расчетно-графического задания по «Сопротивлению материалов», варианты расчетных схем, примеры решения задач)

Ташкент, 2010 г.

Настоящее методическое пособие содержит требования, порядок выполнения задания по применению метода сил при расчете статически неопределимых рамных конструкций, краткие теоретические сведения, примеры решения типовых задач, а также варианты заданий с таблицей исходных данных

Данное руководство составлено в соответствии с программой курса «Сопротивление материалов» и предназначено для студентов дневного вида обучения всех направлений бакалавриатуры.

Методическое пособие обсуждено и одобрено на заседании кафедры «Прикладная механика».

28.03.06 , Протокол № 29

Утверждено Методическим Советом естественных и общетехнических наук

29.03.06 , Протокол № 7

Составитель: Подтуркина М.А.

Рецензенты: Хожиметов Г.Х. – профессор, зав.кафедрой «Прикладная механика»,
Ганихонова Ф.Ф. – доцент кафедры МиТТ

Редактор: Профессор Дустмухамедов К.

ОГЛАВЛЕНИЕ

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

Содержание задания

Для заданной плоской статически неопределимой рамы

1. Определить степень статической неопределимости;
2. Показать не менее трех вариантов основной системы, раскрыть статическую неопределимость;
3. Построить эпюры внутренних силовых факторов Q, N, M;
4. Произвести проверку решения задачи.

Данные взять из таблицы 1 (стр.23). Для всех схем считать $P = \alpha q\ell$, $m = \beta q\ell^2$, жесткость стержней при изгибе постоянной (E J = const).

Краткие методические указания к выполнению задания

Расчет стержней заданной системы рекомендуется вести в общем виде, а затем, подставляя численные значения величин, вычислить результат.

Расчетную часть задания выполнить на листах писчей бумаги (писать на одной стороне листа). Графическую часть задания со всеми рисунками можно выполнять на миллиметровой бумаге.

Оформление расчетной и графической части задания см. в приведенном ниже примере.

При решении задачи необходимо принимать стержни АВ и ВС соединенными между собой жестко и выполненными из стали с модулем продольной упругости $E = 2\cdot 10^5$ мПа и допускаемым напряжением $[\sigma] = 160$ МПа.

При построении эпюр указывать масштабы длин стержней и масштабы, в которых построены эпюры.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1. Статическая неопределимость.

Стержневая система или рама является статически неопределимой, если внутренние силовые факторы в поперечных сечениях составляющих ее стержней не могут быть найдены на основе применения только уравнений статики и возникает необходимость в составлении дополнительных уравнений – уравнений деформаций (перемещений).

Разность между числом неизвестных (реакций опор и внутренних силовых факторов) и числом независимых уравнений статики для рассматриваемой системы определяет степень ее статической неопределимости.

Если заданная система содержит замкнутые контуры и врезанные шарниры, то степень ее статической неопределимости определяется по формуле:

$$С = Н + 3К – Ш – У, \text{ где}$$

Н – количество неизвестных внешних связей (реакций опор);

К – количество замкнутых контуров;

Ш – количество врезанных одиночных шарниров (шарнир, включенный в узел, соединяющий n стержней, приравнивается к (n-1) одиночным шарниром);

У – число уравнений равновесия, которое может быть составлено для данной системы.

2. Выбор основной системы. Метод сил.

Наиболее широко применяемым в расчетах общим методом раскрытия статической неопределимости стержневых и рамных систем является метод сил. Он заключается в том, что заданная статически неопределимая система (ЗС) освобождается от дополнительных (“лишних”) связей как внешних, так и взаимных, а их действие заменяется силами и моментами (отсюда и название – метод сил).

Итак, раскрытие статической неопределимости любой рамы методом сил начинается с отбрасывания дополнительных связей. Система, освобожденная от дополнительных (“лишних”) связей, становится статически определимой. Она носит название основной системы (О.С). О.С должна быть кинематически неподвижной и геометрически неизменяемой.

Для каждой статически неопределимой системы можно подобрать множество вариантов основных систем (кинематически неизменяемых статически определимых систем). Например, для рамы, показанной на рис.1а, можно предложить основные системы (рис. 1, б, в, г, д), которые получены путем отбрасывания трех дополнительных (“лишних”) связей в различных комбинациях.

После того, как дополнительные связи отброшены и система превращена в статически определимую кинематически неизменяемую (О.С), необходимо, чтобы, как это показано на рис. 1, б, в, г, д, ввести вместо связей неизвестные силовые факторы: в тех сечениях, где запрещены линейные перемещения, вводятся силы, а там, где запрещены угловые перемещения, вводятся моменты. Те и другие силовые факторы будем обозначать X_i, где i – номер неизвестного. Заметим при этом, что для внутренних связей силы X_i, являются взаимными, т.е. попарно равными и противоположно направленными (см. рис. 1,в).

Из множества возможный вариантов О.С необходимо выбрать одну, наиболее рациональную, для которой легче решить задачу (эпюры изгибающих моментов получаются более простой формы). В нашем примере таковым можно считать вариант “б” (рис.1), где основная система представлена в виде ломаной консоли (при построении эпюр для консоли исключается необходимость в определении опорных реакций).

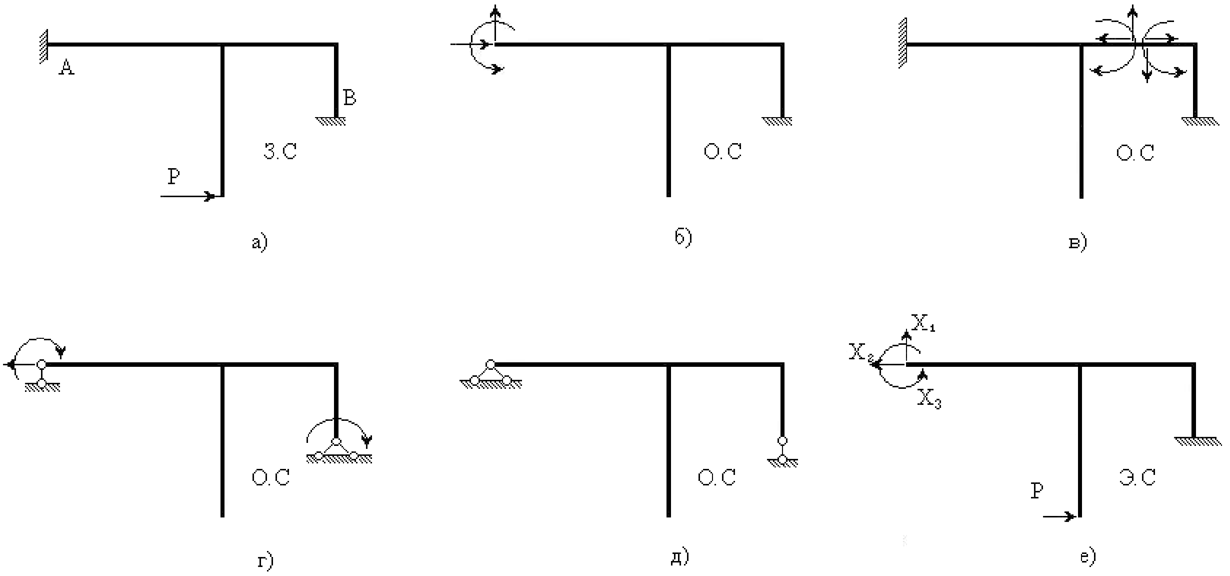


Рис.1

Основная система, нагруженная заданными силами (Р) и искомыми X_1, X_2 и X_3 (рис.1,е) должна быть эквивалентна заданной (З.С), т.е. к неизвестным X_1, X_2 и X_3 предъявляются требования, чтобы их величина соответствовала тем ограничениям, которые накладываются на перемещения сечений заданной системы. В выбранном варианте таковыми являются равенство нулю вертикального, горизонтального и углового перемещений сечения А эквивалентной системы, показанной на рис.1,е. Эти три условия записываются в виде трех канонических уравнений метода сил, которые и являются теми дополнительными уравнениями деформаций (перемещений), которые необходимы для определения "лишних" неизвестных, т.е. для раскрытия статической неопределимости заданной системы.

Канонические уравнения для трижды статически неопределимой системы имеют вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} = 0$$

$$\delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} = 0$$

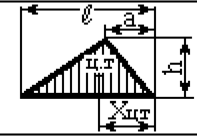
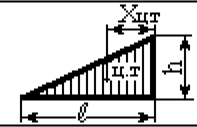
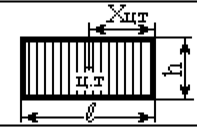
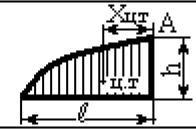
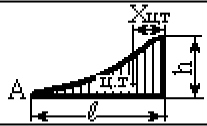
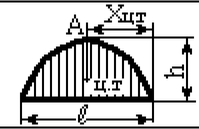
Здесь коэффициенты и свободные члены этих уравнений представляют собой перемещения. Причем, δ_{ik} – это есть перемещение по направлению i-го силового фактора (первый индекс – i) под действием единичного фактора, заменяющего k-ый фактор (k – второй индекс). Например, коэффициент δ_{23} уравнения (1) для варианта "б" основной системы (рис.1, б) означает вертикальное (в направлении силы X_2) перемещение сечения А под действием единичного момента $X_3 = 1$, заменяющего неизвестный момент X_3. Или коэффициент δ_{31}в той же схеме означает угловое перемещение сечения А (по направлению неизвестного момента X_3) под действием единичной силы $X_1 = 1$, заменяющей неизвестную силу X_1. Свободные члены Δ_{1p}, Δ_{2p} и Δ_{3p} уравнений (1) представляют собой перемещения по направлению факторов X_1, X_2 и X_3 соответственно под действием заданных сил.

По теореме о взаимности перемещений $\delta_{12} = \delta_{21}$; $\delta_{13} = \delta_{31}$; $\delta_{23} = \delta_{32}$. Эти перемещения называются побочными и могут иметь величину положительную, отрицательную, или равную нулю. Перемещения δ_{11}, δ_{22}, δ_{33} (с одинаковыми обоими индексами) называются главными перемещениями. Они всегда положительны. Перемещения Δ_{1p}, Δ_{2p}, Δ_{3p} называют грузовыми перемещениями, каждое из них может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Для определения перемещений, входящих в канонические уравнения, пользуются интегралом Мора, который для прямолинейных участков с постоянной жесткостью вычисляют по способу Верещагина. При этом приходится вычислять площади различных фигур и определять положения их центров тяжести. В связи с этим в таблице 1 приведены эти данные для простейших фигур, на которые может быть расчленена более сложная по форме эпюра.

Таблица

Площади эпюр и положения их центров тяжести

Виды эпюр изгибающих моментов		Координаты центра тяжести $X_{ц.т.}$	Величина площади ω
Треугольник		$X_{цт}=\frac{1}{3}(\ell+a)$	$\omega=\frac{1}{2}\ell h$
Треугольник		$X_{цт}=\frac{1}{3}\ell$	$\omega=\frac{1}{2}\ell h$
Прямоугольник		$X_{цт}=\frac{1}{2}\ell$	$\omega=\ell h$
Парабола (квадратная) с вершиной в т.А		$X_{цт}=\frac{3}{8}\ell$	$\omega=\frac{2}{3}\ell h$
Парабола (квадратная) с вершиной в т.А		$X_{цт}=\frac{1}{4}\ell$	$\omega=\frac{1}{3}\ell h$
Парабола (квадратная) с вершиной в т.А		$X_{цт}=\frac{1}{2}\ell$	$\omega=\frac{2}{3}\ell h$

3. Системы статически неопределимые внутренним образом.

Встречаются случаи, когда в качестве “лишних” неизвестных должны быть приняты внутренние силовые факторы, возникающие в том или ином поперечном сечении какого-либо из стержней рамы (рис.2).

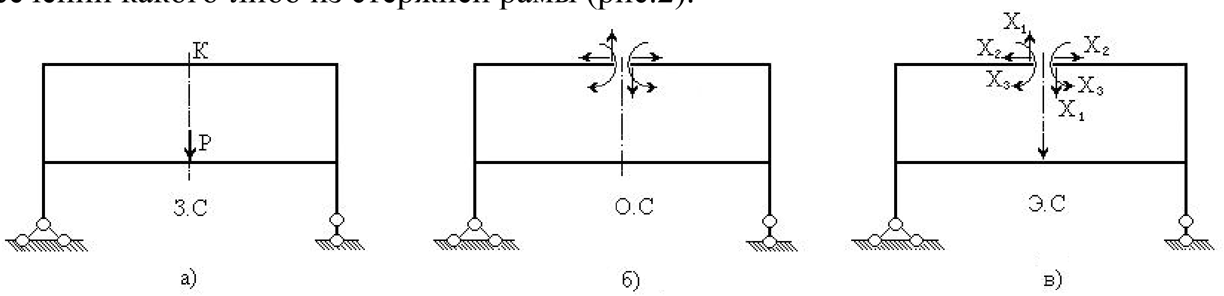


Рис.2

Такие системы принято называть внутренне статически неопределимыми. Рама, изображенная на рис.2,а, внешне статически определима – опорные реакции могут определены из уравнений статики, но внутренне она трижды статически неопределима: конструкция содержит замкнутый контур, а всякий замкнутый контур всегда трижды статически неопределим. Основную систему в подобном случае получают путем разреза одного из стержней рамы (целесообразно по оси симметрии). При этом нарушаются (отбрасываются) внутренние связи взаимодействия обеих частей рамы, и неизвестными силами X_1, X_2 и X_3 заменяются внутренние силовые факторы Q, M и N в этом сечении.

Для рассматриваемой рамы О.С с искомыми неизвестными и Э.С показаны на рис.2б, в. Форма записи канонических уравнений остается прежней, но физико-геометрический смысл их изменяется. В частности, первое уравнение в этом случае обозначает, что торцы сечения “К”, образовавшиеся в результате проведения разреза, не имеют взаимного смещения по вертикали (по направлению X_1), ибо фактически здесь одно сечение. Аналогично истолковываются и остальные два канонических уравнения.

4. Использование свойств симметрии. Врезанный шарнир.

Пусть задана некоторая симметричная в геометрическом отношении рама (рис.3,а). Там же показаны случаи нагружения рамы симметричной (рис.3,б) или кососимметричной (рис.3,в) нагрузкой.

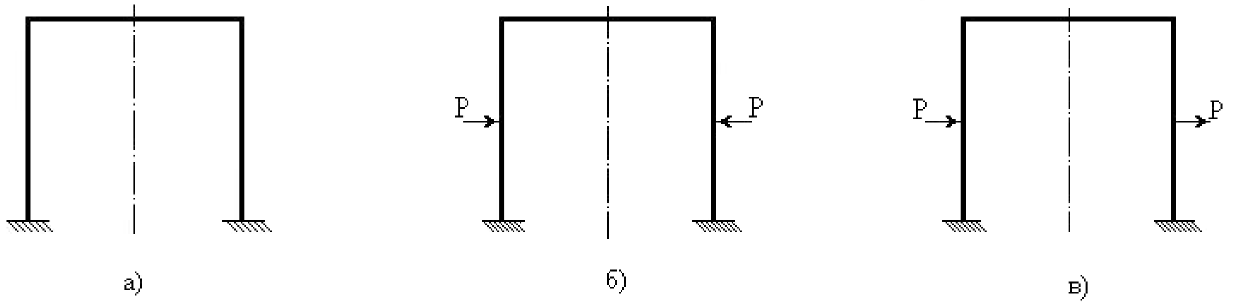


Рис.3

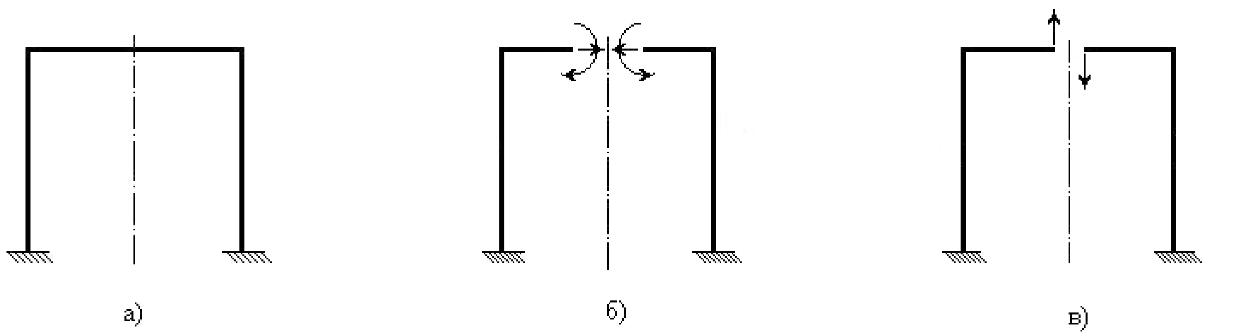


Рис.4

Аналогично классифицируем и внутренние силовые факторы: изгибающие моменты M и нормальное усилие N в сечениях считаются симметричными силовыми факторами, поперечная сила Q - кососимметричным силовым фактором (рис.4,в). Известно также свойство симметрии: у симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной нагрузке обращаются в ноль кососимметричные силовые факторы, а при кососимметричной нагрузке – симметричные силовые факторы равны нулю. Таким образом, симметричной схеме нагружения (рис.3,б) будет соответствовать основная система (рис.4,б), где отсутствуют кососимметричные силовые факторы. Аналогично кососимметричной системе нагружения (рис.3,в) будет соответствовать основная система (рис.4,в), где отсутствуют симметричные силовые факторы. Таким образом, используя свойства симметрии, можно упростить решение задачи, приняв во внимание равенство нулю некоторых внутренних силовых факторов (симметричных или кососимметричных) в зависимости от формы нагружения системы.

Врезанный шарнир понижает степень статической неопределимости, т.к. в сечении, где такой шарнир есть, один из трех внутренних силовых факторов, а именно, изгибающий момент, равен нулю, независимо от того, какая приложена к раме нагрузка.

Например, рама, представленная на рис.5,а, шесть раз статически неопределима: трижды внешним и трижды внутренним образом, если не считать шарниров, врезанных по оси симметрии.

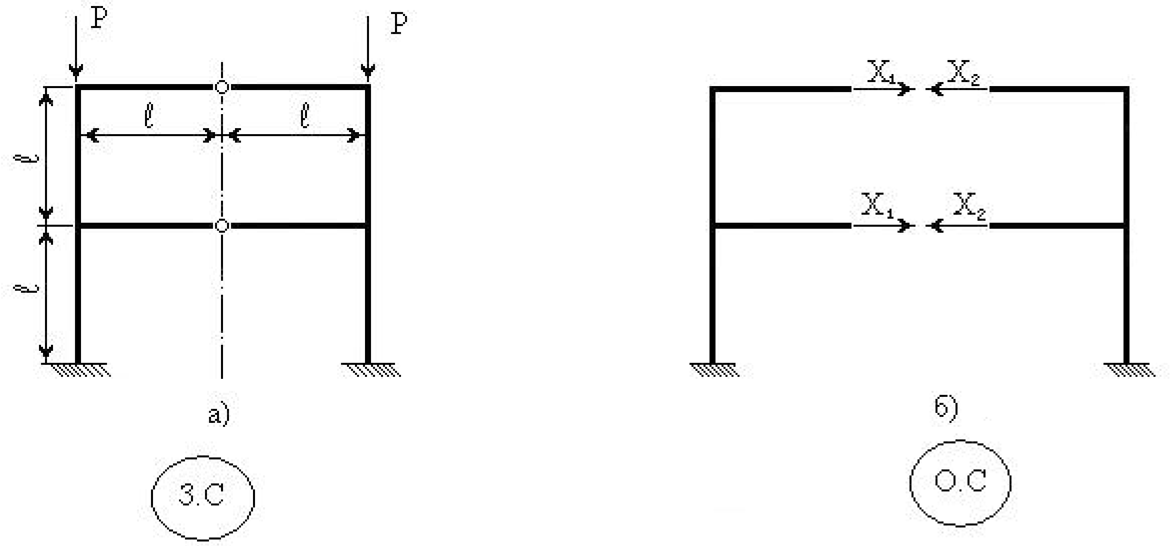


Рис.5

Но если выбрать основную систему так, как это показано на схеме (рис.5,б), а именно, разрезав раму по оси симметрии, тогда количество неизвестных понижается до двух: 2 изгибающих момента в шарнирах и 2 кососимметричных силовых фактора в обоих разрезанных стержнях равны нулю (нагрузка симметричная). Остаются неизвестными 2 продольных усилия в стержнях X_1 и X_2. Составляются 2 канонических уравнения:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0$$
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

5. Порядок расчета статически неопределимых систем методом сил.

1. Производится анализ заданной системы З.С и проставляются все неизвестные усилия.
2. Определяется степень статической неопределимости системы.
3. Выбирается основная система О.С.
4. Составляется эквивалентная система Э.С.
5. Составляются канонические уравнения метода сил.
6. Вычисляются коэффициенты канонических уравнений.
7. После подстановки значений коэффициентов определяются неизвестные X_1, X_2, X_3 … из канонических уравнений.
8. Для Э.С при найденных значениях неизвестных X_1, X_2, X_3 … строятся эпюры внутренних силовых факторов с использованием метода сечений.
9. Производится статическая проверка правильности построения эпюр Q, M и N.
10. Производится деформационная проверка правильности найденных значений неизвестных.

Пример № 1. Для заданной рамы (рис.6,а) построить эпюры Q, N, M при следующих данных: ℓ=3 м, q=0,10 кН/см.

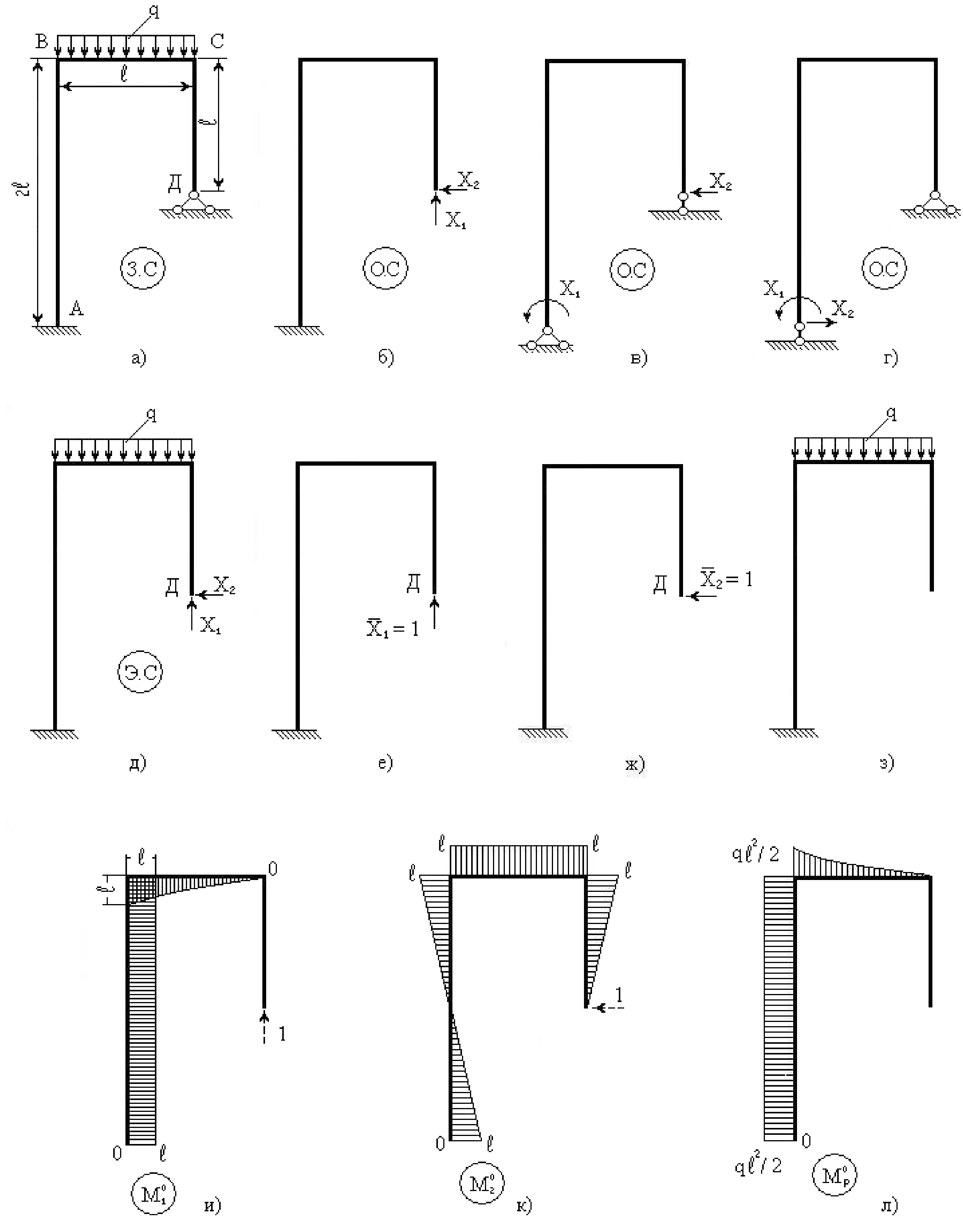


Рис.6 (к примеру 1)

Решение: 1. Выясним степень статической неопределимости. В данной раме пять реактивных усилий: три в жесткой заделке и две в шарнирно-неподвижной опоре. Уравнений статики три. Следовательно, рама дважды статически неопределима (С = Н-У=5-3=2).

2. Покажем несколько вариантов основных систем (рис.6, б, в, г).

3. Окончательно выбираем О.С. (рис.6,б) и на ее базе получаем эквивалентную систему, приложив заданные силы и искомые неизвестные X_1 и X_2 (взамен отброшенной шарнирно-неподвижной опоры) (рис.6,д).

4. Составляем канонические уравнения метода сил. Для дважды статически неопределимой системы составляется 2 канонических уравнения, которые имеют вид:

$$\delta_{11}\cdot X_1 + \delta_{12}\cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0$$

$$\delta_{21}\cdot X_1 + \delta_{22}\cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0$$

5. Определяем перемещения (коэффициенты и свободные члены канонических уравнений) способом Верещагина:

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i M^0_{ci}}{EJ}, \quad \text{где}$$

δ – искомое перемещение;

n – число участков в эпюрах;

i – порядковый номер участка;

ω_i - площадь эпюры изгибающих моментов от действия сил, вызывающих перемещение (грузовая эпюра);

M^0_{ci} – ордината единичной эпюры, взятая под центром тяжести грузовой эпюры на соответствующем участке;

EJ – жесткость бруса при изгибе

Для определения этих перемещений строим эпюры изгибающих моментов, т.к. основные перемещения в рассматриваемой раме определяются изгибом (сдвигом и сжатием стержней пренебрегаем). Нагружая основную систему последовательно силами $X_1=1$ (рис.6,е), $X_2=1$(рис.6,ж), строим единичные эпюры M^0_1(рис.6,и), M^0_2 (рис.6,к); а от заданной нагрузки – грузовую эпюру M_p (рис.6,л)

“Перемножая” грузовую эпюру M_p соответственно на единичные M^0_1 и M^0_2 эпюры, найдем грузовые коэффициенты Δ_{1p} и Δ_{2p}:

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ}\cdot\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{q\ell^2}{2}\cdot\ell\cdot\frac{3}{4}\cdot\ell - \frac{q\ell^2}{2}\cdot 2\ell\cdot\ell\right) = -\frac{9}{8}\cdot\frac{q\ell^4}{EJ}$$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{q\ell^2}{2}\cdot\ell\cdot\ell + \frac{q\ell^2}{2}\cdot 2\ell\cdot 0\right) = \frac{1}{6}\cdot\frac{q\ell^4}{EJ}$$

"Перемножением" единичных эпюр самих на себя, найдем главные перемещения δ_{11} и δ_{22}:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell\cdot + \ell\cdot 2\ell\cdot\ell = \frac{7}{3}\cdot\frac{\ell^3}{EJ}\right.$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell\cdot + \ell\cdot\ell\cdot\ell + \frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{2}\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell\right) = \frac{2\ell^3}{EJ}$$

Побочные перемещения ($\delta_{12}=\delta_{21}$ на основании теоремы о взаимности перемещений) определяем "перемножением" одной единичной эпюры(M^0_2) на другую (M^0_1):

6. Найденные значения перемещений подставляем в канонические уравнения: (при этом EJ как постоянная величина сокращается)

$$\frac{7}{3}\cdot\ell^3\cdot X_1 - \frac{1}{2}\cdot\ell^3\cdot X_2 - \frac{9}{8}q\ell^4 = 0$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\ell^3\cdot X_1+\ell^3\cdot X_2+\frac{1}{6}q\ell^4=0$$

После упрощения получим

$$56\,X_1-12\,X_2-27\,q\ell=0$$

$$-3\,X_1+12\,X_2+27\,q\ell=0$$

7.Решая уравнения, получим

$$X_1=\frac{26}{53}q\ell;\qquad\qquad X_2=\frac{25}{636}q\ell$$

Положительные значения X_1 и X_2 указывают на то, что направления этих реакций были выбраны правильно. Раскрытие статической неопределимости на этом заканчивается.

8. Теперь, рассматривая данную раму как статически определимую, можно построить суммарную эпюру изгибающих моментов (рис.7,а), а также эпюры поперечных Q (рис.7,б) и продольных N (рис.7,в) сил.

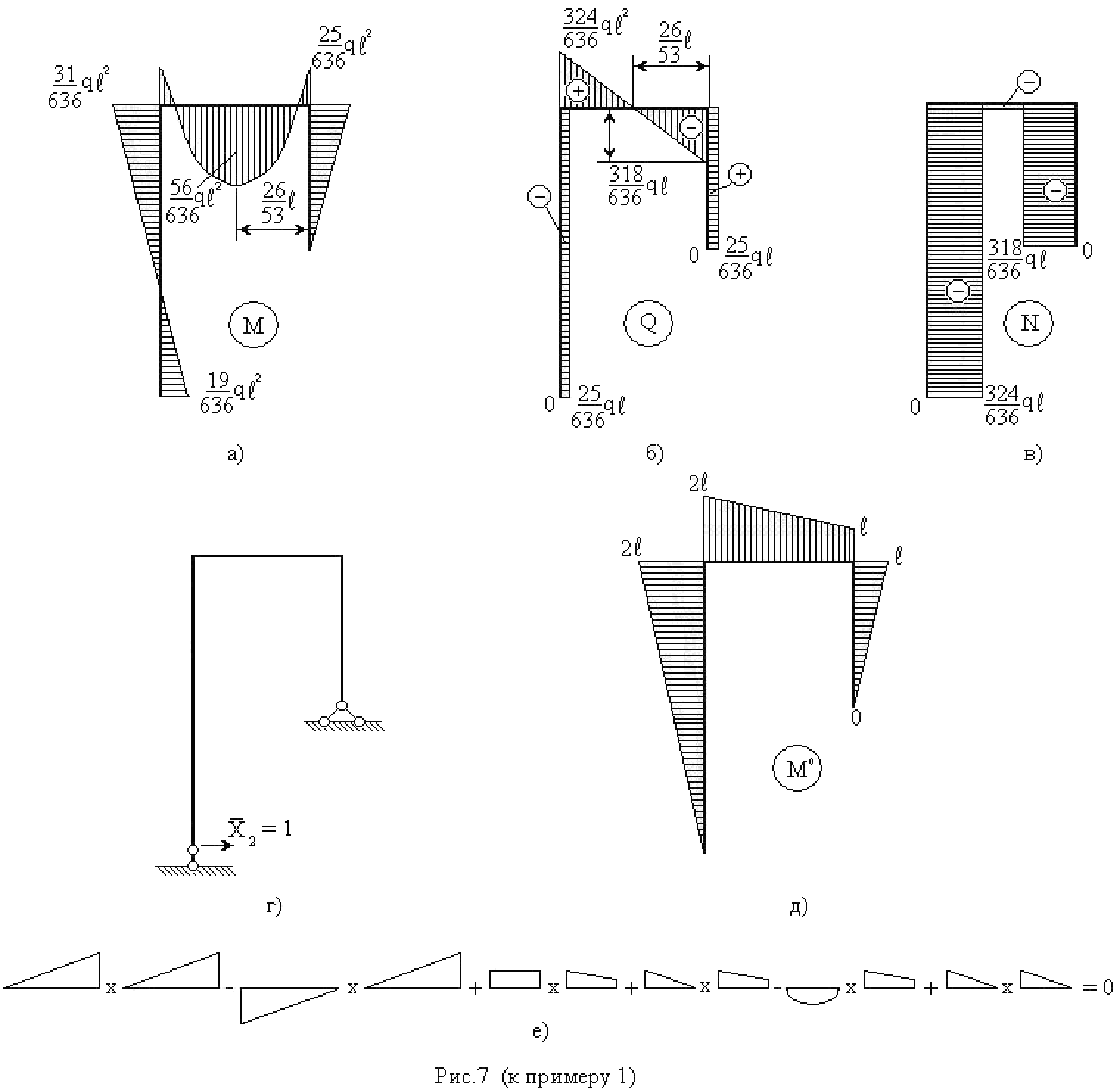


Рис.7 (к примеру 1)

Проверка правильности решения задачи.

Для проверки правильности построения эпюр Q**,** N**,** и M могут быть составлены условия статического равновесия всей рамы в целом, ее узлов и отдельных произвольно выделенных частей рамы (статическая проверка). Однако, статическая проверка не может еще гарантировать правильности решения задачи, т.к. условия статики будут удовлетворяться и при неправильно найденных значениях неизвестных.

Поэтому, кроме статической, проводится так называемая деформационная проверка, сущность которой заключается в следующем. Путем “умножения” суммарной эпюры изгибающих моментов на одну из единичных эпюр M^0, не использованных в решении задачи, вычисляем перемещение в направлении той единичной силы, от которой построена эпюра M^0. А если единичная сила приложена в точке, где перемещение известно (равно нулю), то, следовательно, результат “перемножения” эпюр M и M^0 должен подтвердить это.

Возвращаемся к примеру 1. Для проверки правильности решения задачи можно построить единичную эпюру M^0 для варианта основной системы (рис.6,г), когда заделка заменена шарнирно-подвижной опорой, приложив единичную силу $X_2 = 1$ взамен X_2 (рис.7, г, д). В результате “перемножения” суммарной эпюры M на M^0 должен получится ноль, т.к. перемещение точки А в любом направлении, в том числе в горизонтальном (по направлению X_2), отсутствует.

Эпюру M по левой стойке можно представить как сумму двух треугольных эпюр, построенных по всей длине (2ℓ) стойки: одна с максимальной ординатой в точке В, другая - в точке А.

Эпюру изгибающих моментов на ригеле представим как сочетание трапеции, лежащей над осью (ее разобьем на прямоугольник и треугольник), и симметричного параболического сегмента, лежащего под осью, со стрелкой.

Выполняя "перемножение" по схеме (рис.7,е), получим:

$$\delta_A^{гор} = \frac{1}{EJ}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{31}{636}q\ell^2\cdot 2\ell\cdot\frac{4}{3}\ell - \frac{1}{2}\cdot\frac{19}{636}q\ell^2\cdot 2\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{636}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{5}{3}\ell + \right.$$

$$\left. + \frac{25}{636\cdot}q\ell^2\cdot\ell\ \frac{2}{3}\ell - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{3}{2}\ell + \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{636}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell\right) =$$

$$= \frac{q\ell^4}{EJ}\cdot\left(\frac{124}{3\cdot 636} - \frac{38}{3\cdot 636} + \frac{15}{3\cdot 636} + \frac{75}{2\cdot 636} - \frac{1}{8} + \frac{25}{3\cdot 636}\right) =$$

$$= \frac{q\ell^4}{EJ}\cdot\left(\frac{126}{3\cdot 636} + \frac{75}{2\cdot 636} - \frac{1}{8}\right) = 0$$

Таким образом, результаты проверки свидетельствуют о том, что неизвестные усилия X_1 и X_2 определены верно, а также о правильности окончательной эпюры изгибающих моментов.

ПРИМЕР № 2. Для заданной рамы (рис.8,а) построить эпюры Q, N, M при следующих данных: P=80 кН, ℓ=2м.

Решение. Замкнутая плоская рама - трижды внутренне статически неопределимая система, т.к. в произвольном сечении любого стержня рамы в общем случае возникают три внутренних силовых фактора Q, N, M, которые невозможно определить из уравнений статики.

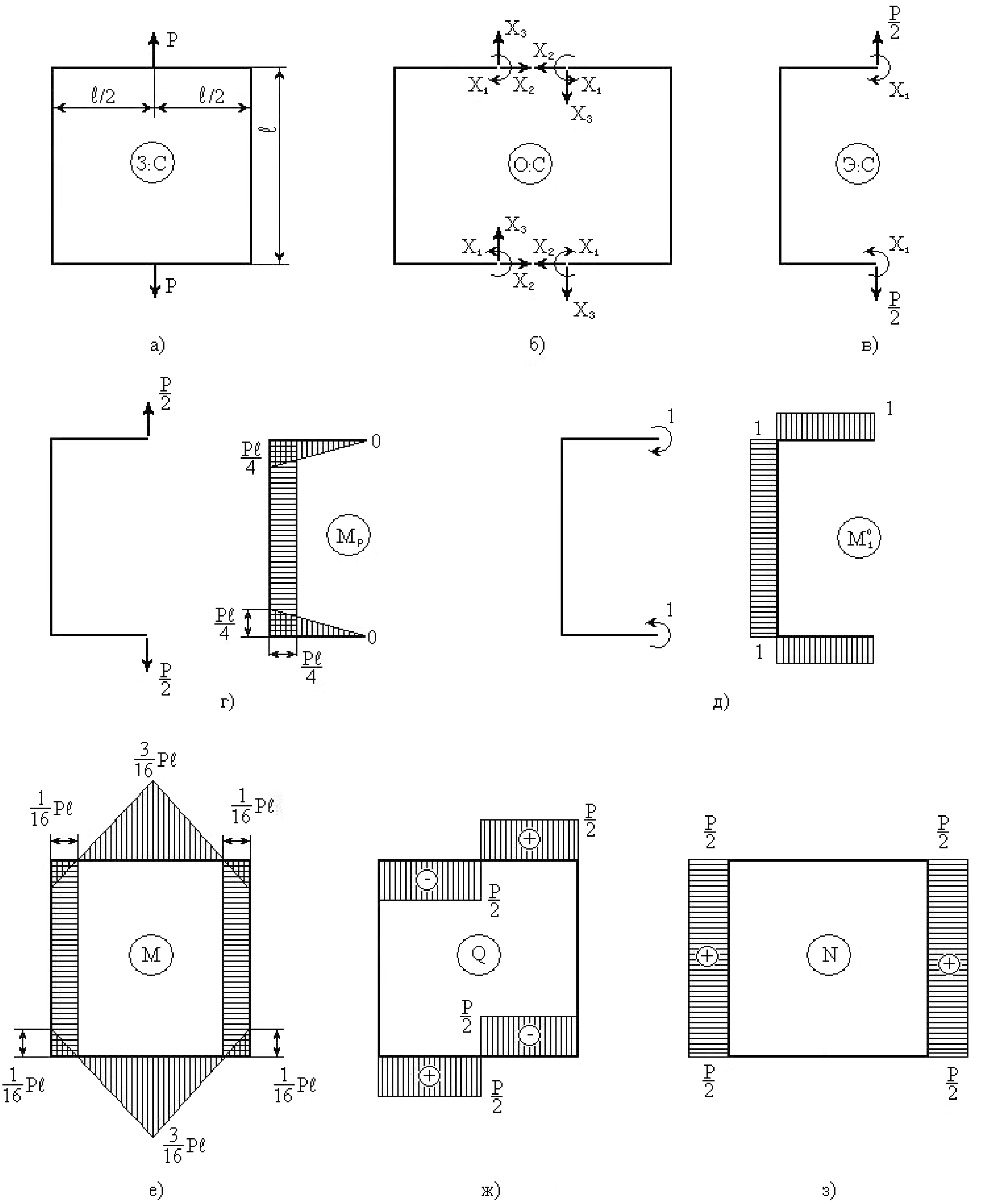


Рис.8 (к примеру 2)

Разрежем раму по вертикальной оси симметрии (рис.8,б). Тогда на каждую половину будут действовать силы X_2, X_3 и моменты X_1. Эквивалентная система (точнее ее половина), нагруженная заданными силами и искомыми лишними неизвестными, показана на рис.8, в. Очевидно, что продольных, (из-за отсутствия заданных горизонтальных сил), и поперечных (как кососимметричных) сил в разрезе быть не может; значит, хотя рама трижды статически неопределима, для раскрытия статической неопределимости нужно составить лишь одно каноническое уравнение:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0$$

Таким образом, в данном случае рациональный выбор основной системы позволяет свести решение трижды статически неопределимой системы к отысканию только одной "лишней" неизвестной.

Чтобы найти перемещение, строим эпюры изгибающих моментов M_p - от заданной нагрузки (рис.8, г) и M^0_1 - от единичного момента X_1=1 (рис.8, д) для одной половины рамы. Перемножив их по правилу Верещагина, получаем

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot\frac{P\ell}{4}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot 1 - \frac{P\ell}{4}\cdot\ell\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{P\ell}{4}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot 1) = -\frac{3}{8}\cdot\frac{P\ell^2}{EJ}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}(1\cdot\frac{\ell}{2}\cdot 1 + 1\cdot\ell\cdot 1 + 1\cdot\frac{\ell}{2}\cdot 1) = \frac{2\,\ell}{EJ}$$

После подстановки полученных значений в канонических уравнение, находим X_1 (EJ сокращается):

$2\ell \cdot X_1 - \frac{3}{8}\cdot P\ell^2 = 0$, откуда имеем

$$X_1 = \frac{3}{16}P\ell$$

Теперь, имея статически определимую раму, обычными способами строим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для каждой половины рамы (рис.8, е, ж, з).

Из эпюр видно: при симметричной нагрузке эпюры симметричных внутренних силовых факторов M и N также симметричны, а эпюры кососимметричного силового фактора Q - кососимметричная.

ПРИМЕР № 3. Для заданной рамы (рис.9, а) построить эпюры Q**,** N**,** M при следующих данных ℓ=1 м, q= 10 кН/м, P=qℓ.

Решение. 1.Выясним степень статической неопределимости: С=Н-У=5-3=2.

Рама дважды статически неопределима, внешним образом, т.к. на нее наложено 5 внешних связей (опорных реакций), две из которых (5-3) - считаются дополнительными (или "лишними")

2. Покажем несколько вариантов основных систем (О.С) (рис.9, б,в,г). Схема, представленная на рис.9, д не может быть принята за О.С, т.к.это есть геометрически изменяемая система (нет горизонтальной связи, ограничивающей перемещение системы в бок).

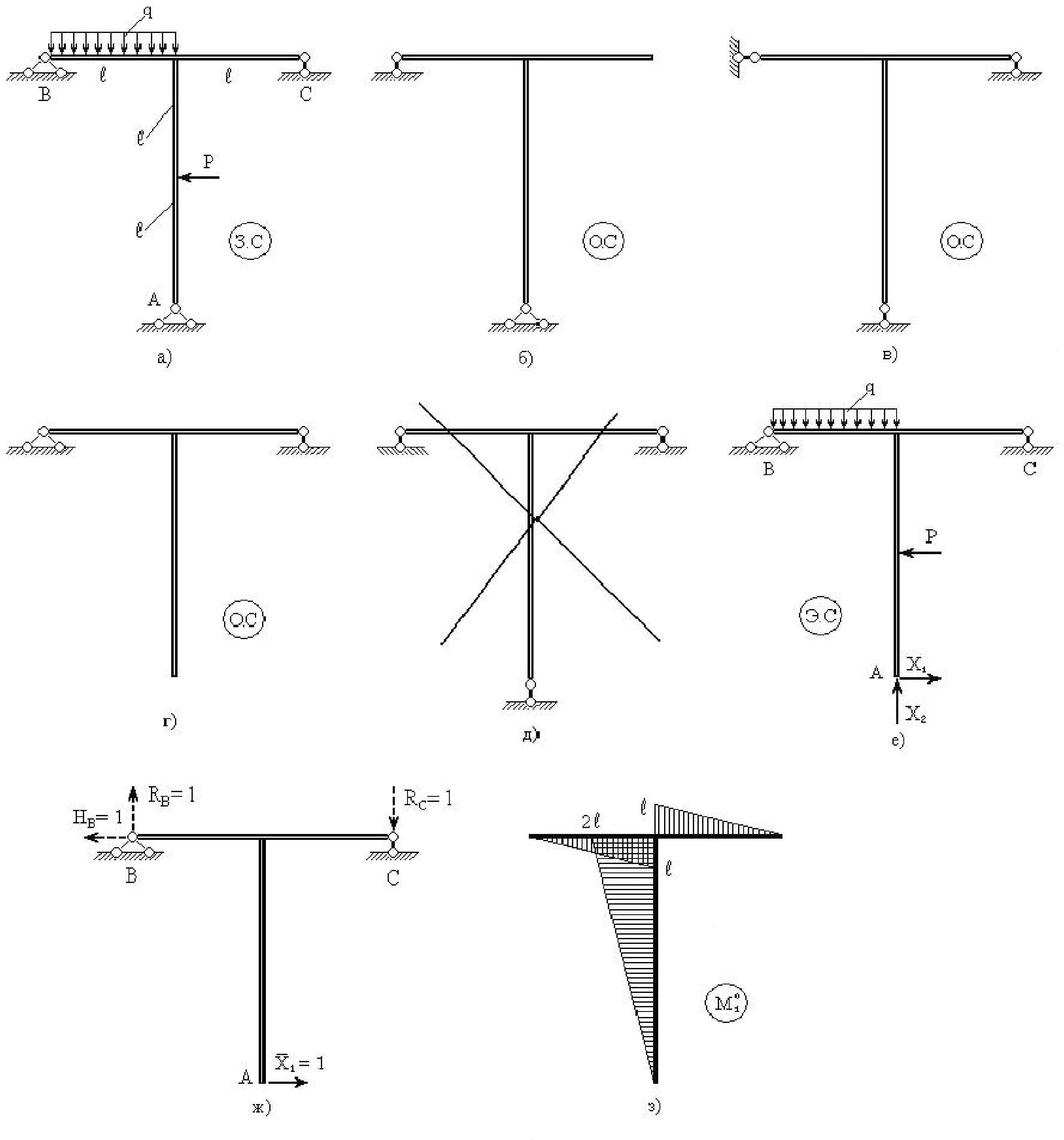


Рис.9 (к примеру 3)

3.Окончательно выбираем О.С.(рис.9,г), приложив к ней взамен отброшенных связей (шарнирно-неподвижной опоры А) искомые неизвестные X_1 и X_2, а также и заданные силы, получим эквивалентную систему Э.С. (рис.9,е).

4.Составляем систему двух канонических уравнений:

$\delta_{11}\cdot X_1 + \delta_{12}\cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0$

$\delta_{21}\cdot X_1 + \delta_{22}\cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0$

Первое уравнение выражает условие равенства нулю горизонтального перемещения точки А рамы (в направлении X_1) от действия на систему всех сил (X_1, X_2, P и распределенной нагрузки). Второе уравнение выражает условие равенства нулю вертикального (в направлении X_2) перемещения точки А рамы от действия всех сил.

5. Определяем перемещения (коэффициенты и свободные члены) канонических уравнений по правилу Верещагина. Для этого, нагружая основную систему

последовательно силами $X_1 = 1$ (рис.9, ж), $X_2 = 1$ (рис.10, а), строим единичные эпюры M^0_1 (рис.9, з) и M^0_2 (рис.10, б). Грузовую эпюру покажем расчлененной, т.е. в виде 2-х эпюр - одна от сосредоточенной силы $P=q\ell$ ($M_p^{(p)}$), (рис.10, в,г), другая- от распределенной нагрузки $M_p^{(q)}$ (рис.10,е,д).

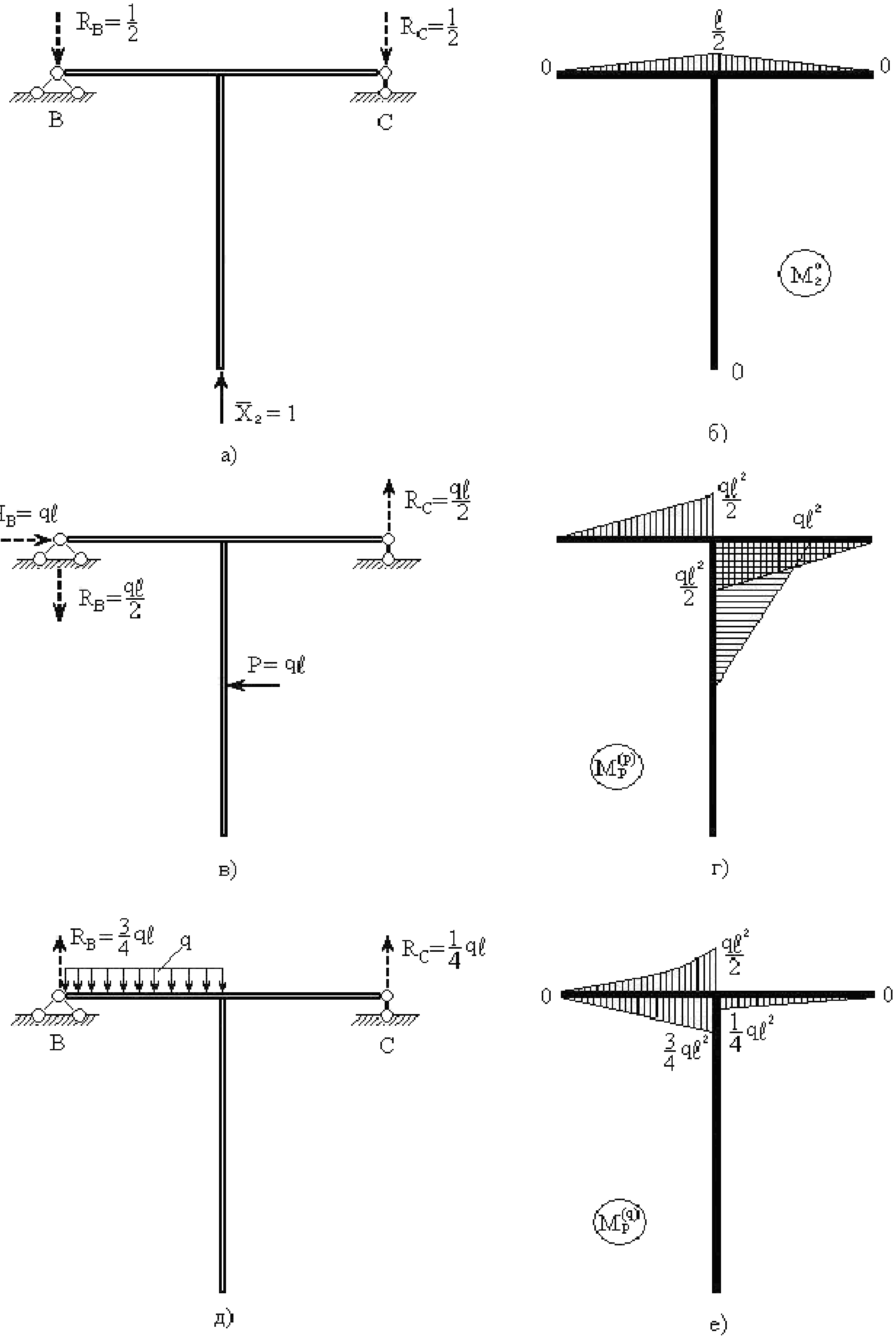


Рис.10 (к примеру 3)

Это облегчает вычисление площадей эпюр, которые имеют более простую форму. С той же целью для участка с распределенной нагрузкой эпюру $M_p^{(q)}$ строим в расслоенном виде (отдельно от q и отдельно от $R_в$).

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot\frac{q\ell^2}{2}\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell - \frac{1}{2}\cdot\frac{q\ell^2}{2}\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell - \frac{1}{2}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{5}{3}\ell -$$

$$- \frac{1}{3}\cdot\frac{q\ell^2}{2}\cdot\ell\cdot\frac{3}{4}\ell + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell) =$$

$$= \frac{q\ell^4}{EJ}\cdot(-\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{5}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}) = -\frac{27}{24}\cdot\frac{q\ell^4}{EJ}$$

Это перемещение вычислено по правилу Верещагина - путем "перемножения" эпюр по схеме:

$M_p^{(p)}\cdot M_1^0 + M_p^{(q)}\cdot M_1^0$

Для определения перемещения Δ_{2p} "перемножим" эпюры по схеме:

$M_p^{(p)}\cdot M_2^0 + M_p^{(q)}\cdot M_2^0$

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EJ}\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{q\ell^2}{2}\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{q\ell^2}{2}\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2} +$$

$$+ \frac{1}{3}\cdot\frac{q\ell^2}{2}\cdot\ell\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\ell}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2} -$$

$$- \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2} =$$

$$= \frac{q\ell^4}{EJ}\cdot(\frac{1}{12} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - \frac{1}{24}) = -\frac{5}{48}\cdot\frac{q\ell^4}{EJ}$$

"Перемножением" эпюры M^0_1 самой на себя найдем δ_{11}:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\cdot(\frac{1}{2}\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{2}\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell + \frac{1}{2}\ell\cdot 2\ell\cdot 2\ell\cdot\frac{4}{3}\ell) = \frac{10}{3}\cdot\frac{\ell^3}{EJ}$$

Аналогично перемножим M^0_2 на себя и найдем перемещение δ_{22}:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EJ}\cdot(\frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\ell}{2}\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell\cdot\ell\cdot\frac{\ell}{2}) = \frac{\ell^3}{6EJ}$$

Для определения перемещений δ_{12} и δ_{21} "перемножим" M^0_1 на M^0_2 (или наоборот)

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EJ}\cdot(-\frac{1}{2}\cdot\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell\cdot\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{2}) = 0$$

6. Подставим найденные перемещения в канонические уравнения. EJ при этом сокращается. Получим

$$\frac{10}{3}\ell^3 X_1 - \frac{27}{24}q\ell^4 = 0; \qquad X_1 = \frac{27}{80}q\ell$$

$$\frac{1}{6}\ell^3 X_2 - \frac{5}{48}q\ell^4 = 0; \qquad X_2 = \frac{50}{80}q\ell$$

Статическая неопределимость рамы раскрыта.

7. Строим эпюры Q, N, M для заданной рамы как для статически определимой (рис.11,а,б,в).

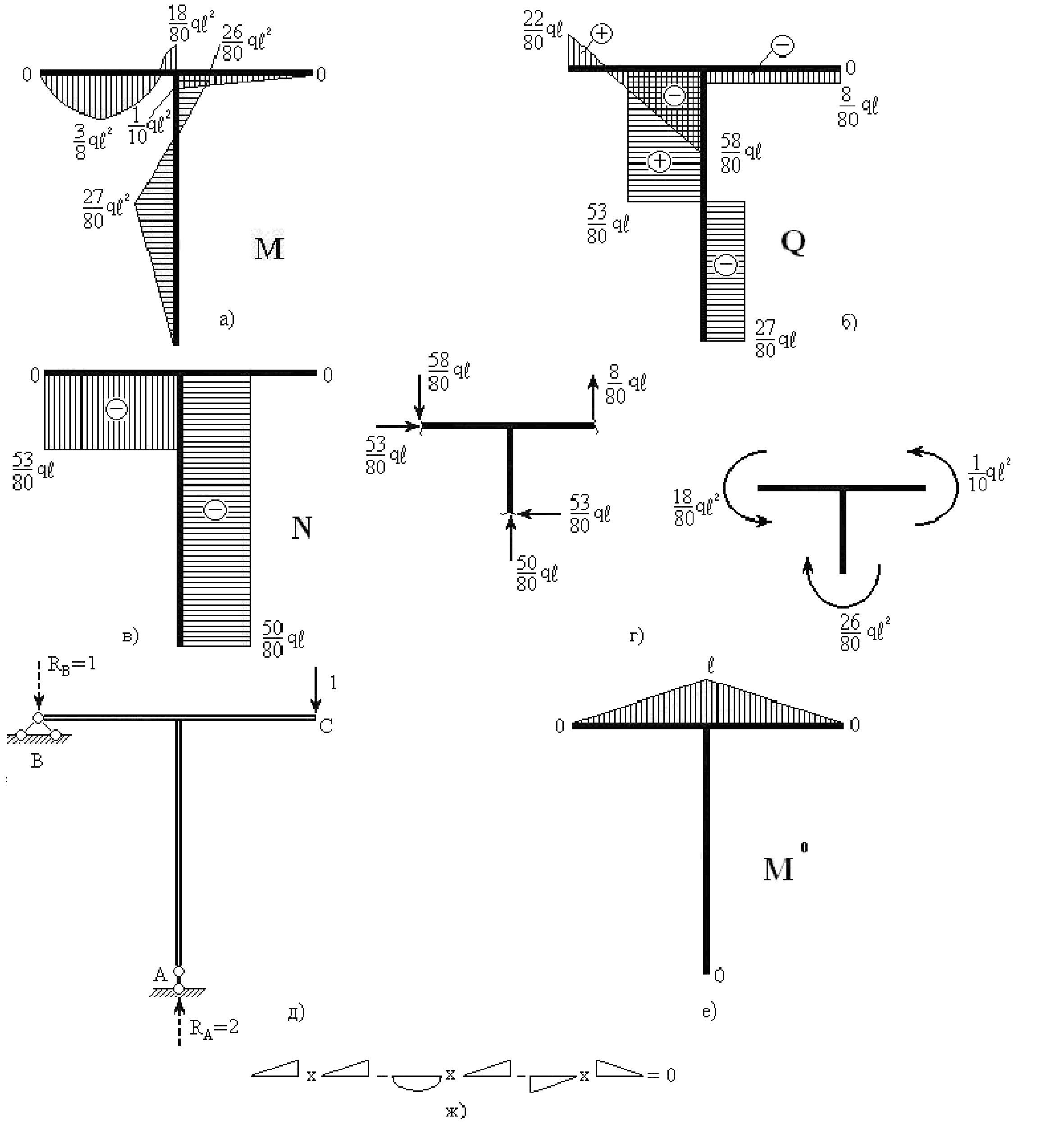


Рис.11 (к примеру 3)

8. На рис. 11, г приведена статическая проверка эпюр Q , N , M для узла, где пересекаются три стержня рамы. Деформационную проверку произведем, "перемножив" эпюру M (рис.11,а) на единичную эпюру M^0 (рис.11,е), построенную на базе ранее неиспользованной основной системы, приложив в точке С этой статически определимой рамы вертикальную силу. равную единице (рис.11,д). "Перемножение" произведем по схеме, представленной на рис.11,ж.

Получим:

$$\delta_c^{\text{верт}} = \frac{1}{EJ}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{80}q\ell\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell - \frac{2}{3}\frac{q\ell^2}{8}\cdot\ell\cdot\frac{1}{2}\ell - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}q\ell^2\cdot\ell\cdot\frac{2}{3}\ell\right) =$$

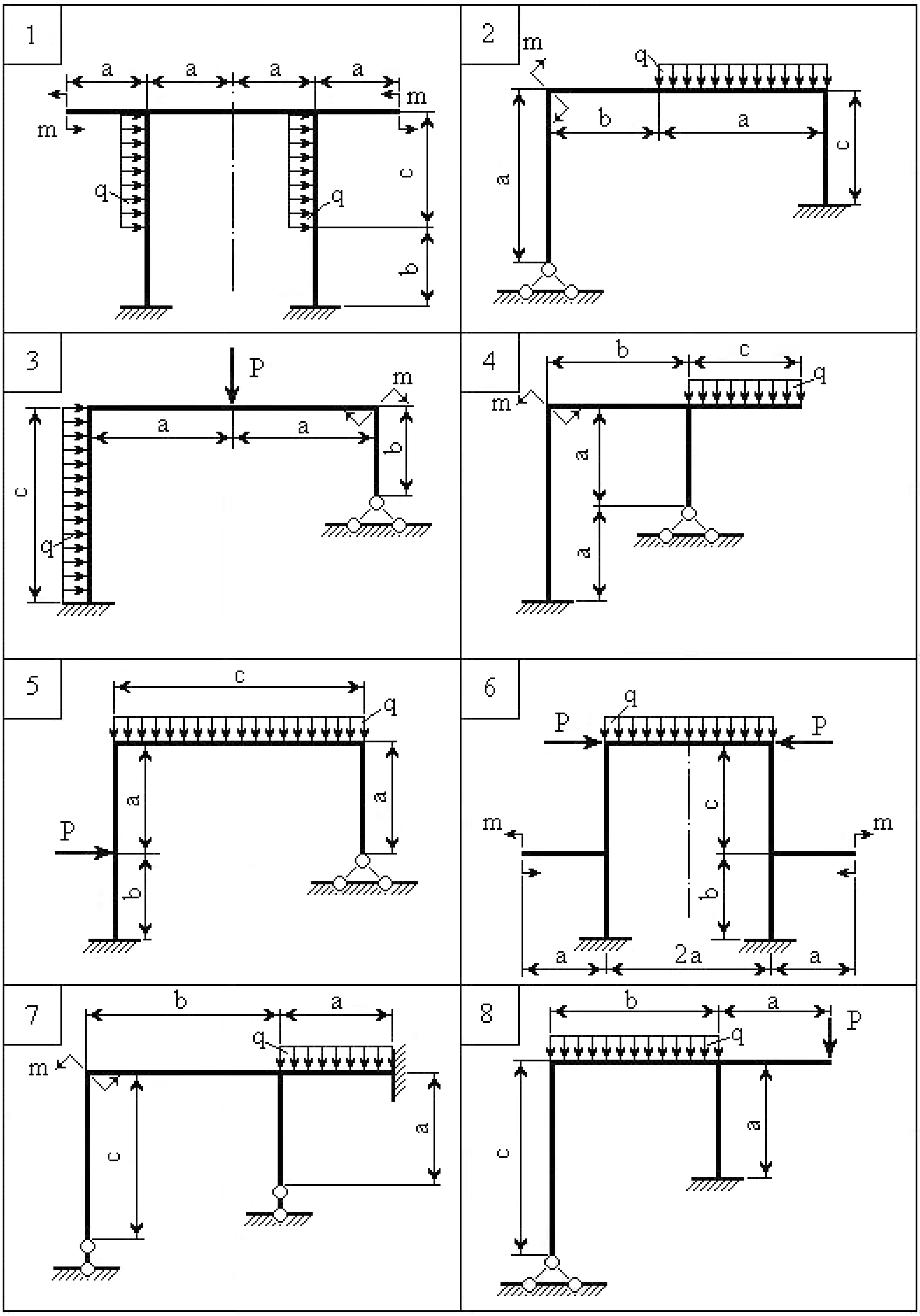
$$= \frac{q\ell^4}{EJ}\cdot\left(\frac{6}{80}-\frac{1}{24}-\frac{1}{30}\right) = \frac{q\ell^4}{EJ}\cdot\frac{18-10-8}{240} = 0$$

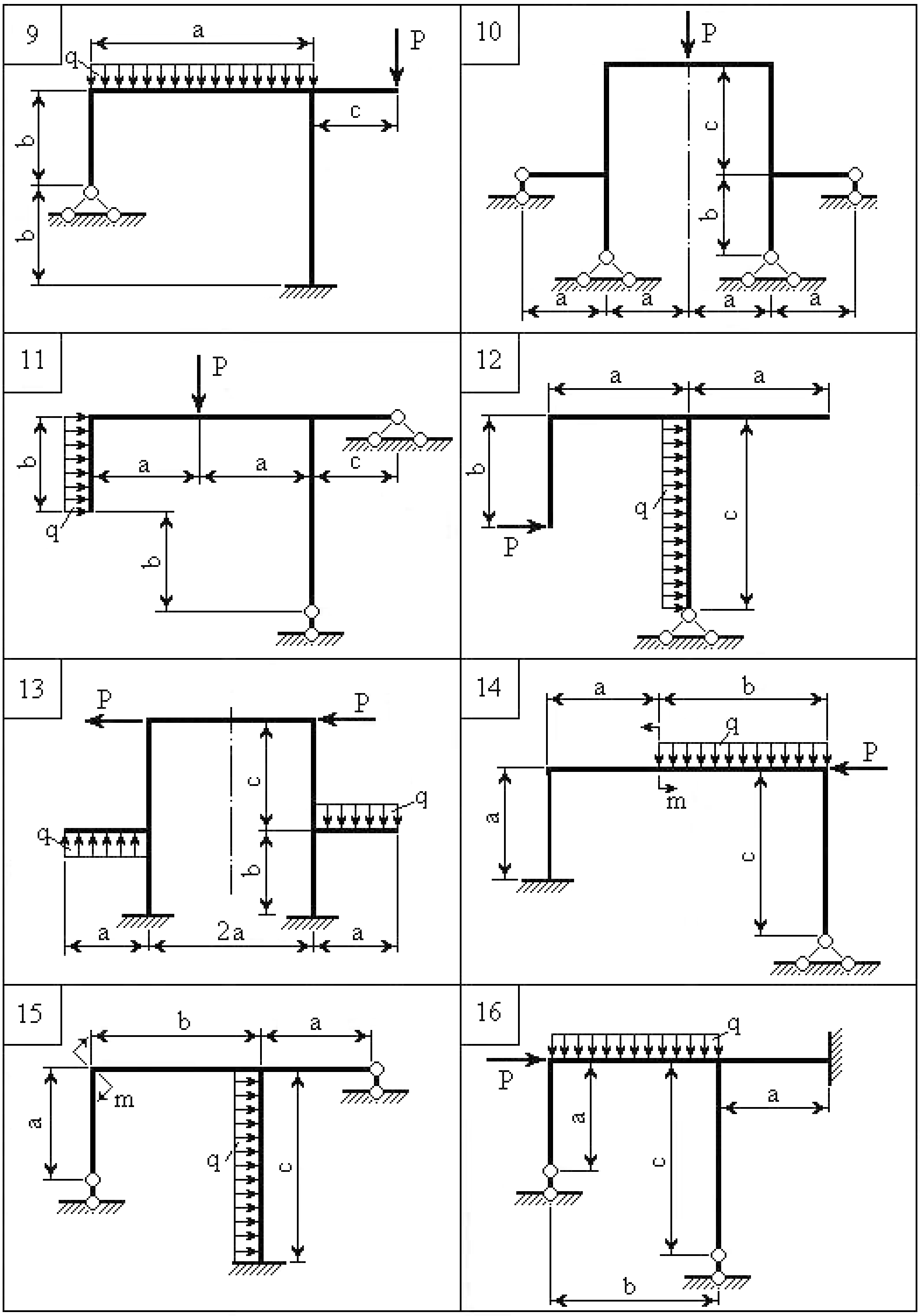
Итак, результат проверки подтверждает отсутствие вертикального перемещения точки С заданной рамы. Следовательно, решение задачи верно.

Таблица 1

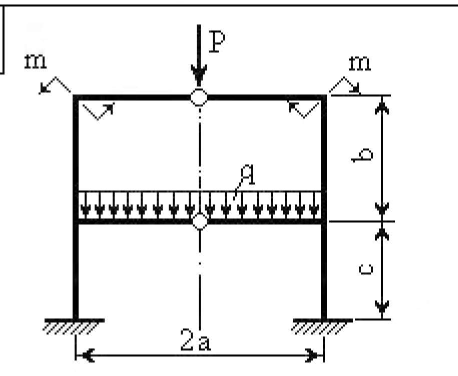
Варианты расчетных схем и данные к РТР
“Расчет статически неопределимых рам методом сил”

№ схемы, № варианта	a	b	c	P в долях $q\ell$	m в долях $q\ell^2$	№ схемы, № варианта	a	b	c	P в долях $q\ell$	m в долях $q\ell^2$
	в долях ℓ						в долях ℓ				
1	1,0	1,2	1,6	-	2	17	1,2	0,8	1,7	2	1,5
2	2,0	1,0	1,5	-	1,5	18	1,4	1,0	1,5	1,5	-
3	1,1	1,5	2,0	2	1	19	1,5	2	1,3	1,2	-
4	1,5	1,8	1,0	-	1,4	20	2,0	1,2	0,8	-	1,6
5	1,2	0,8	2,0	1,5	-	21	1,0	1,3	1,7	1,6	-
6	0,8	1,2	1,8	1,2	1,6	22	1,2	1,6	1,4	1,0	0,8
7	1,6	1,4	2,0	-	1,2	23	1,6	1,4	1,6	1,8	1,0
8	1,3	2,0	1,7	1,4	-	24	1,3	1,5	2	1,4	1,2
9	2,0	1,3	1,2	1,8	-	25	0,6	2	1,5	1,4	-
10	1,4	0,8	1,6	2	-	26	0,8	1,2	1	1,5	-
11	0,8	1,2	1,0	1,3	-	27	1,0	1,4	1,6	1,3	-
12	1,2	1,5	2,0	0,8	-	28	2,0	0,6	1,6	-	2
13	1,5	1,8	1,2	1	-	29	1,6	0,8	1,5	1,0	-
14	1,0	1,6	1,5	0,6	1,8	30	0,5	1,5	1,8	2	-
15	0,8	1,2	2,0	-	2	31	2,0	1,4	1	1,5	-
16	1,2	1,6	1,8	2	-	32	1,0	1,6	1,4	-	0,8

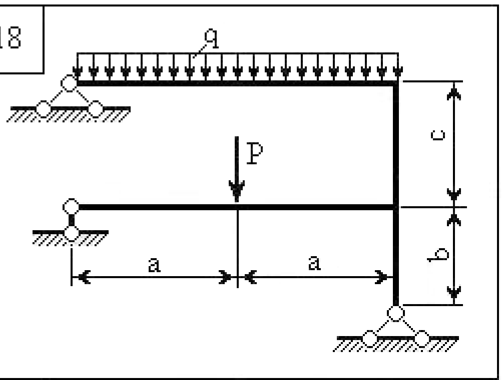

1
a a a a
m
m
q
q
c
b
2
m
q
b a
a
c
3
P
m
a a
b
c
q
4
b c
q
m
a
a
5
c
q
a
a
P
b
6
q
P
P
c
m
m
b
a 2a a
7
b a
q
m
c
a
8
b a
P
q
c
a


9
a
q
P
c
b
b
10
P
c
b
a a a a
11
P
b
a a c
q
b
12
a a
b
q
c
P
13
P P
c
q
q
b
a 2a a
14
a b
q
P
m
a
c
15
b a
m
a
q
c
16
q
P
a
a
c
b

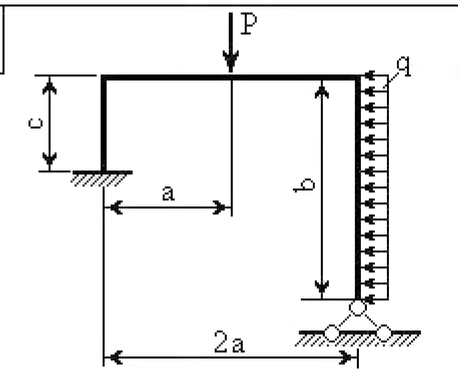
17



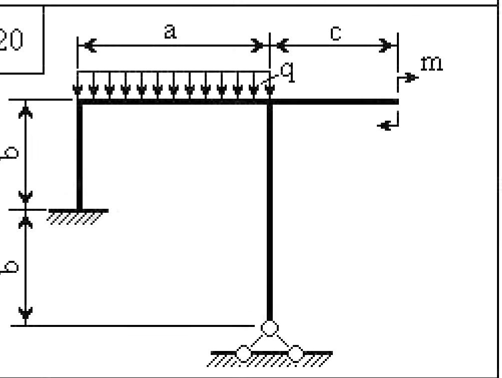
18



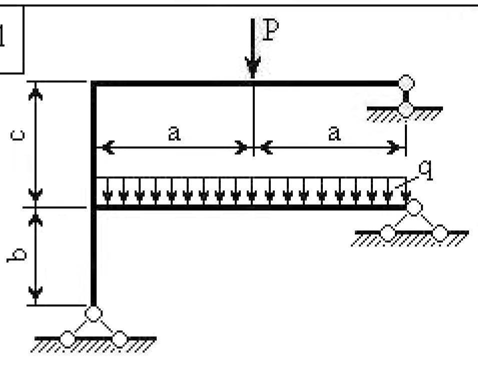
19



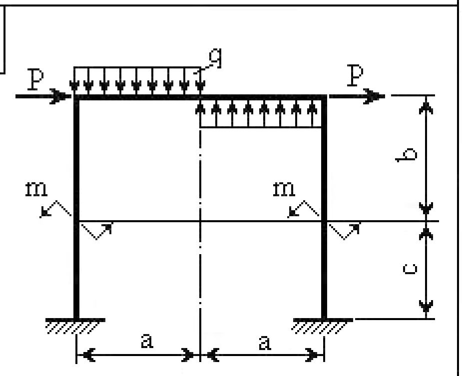
20



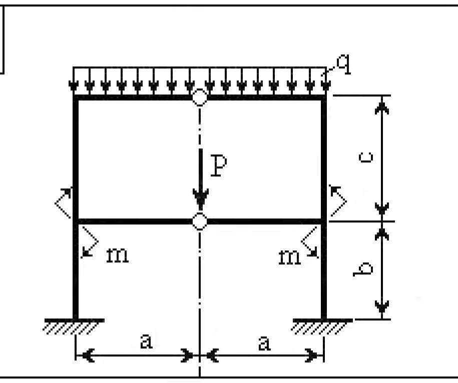
21



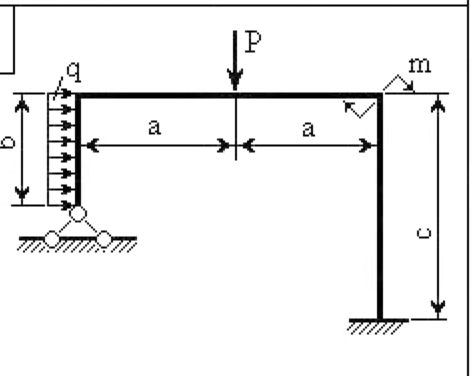
22



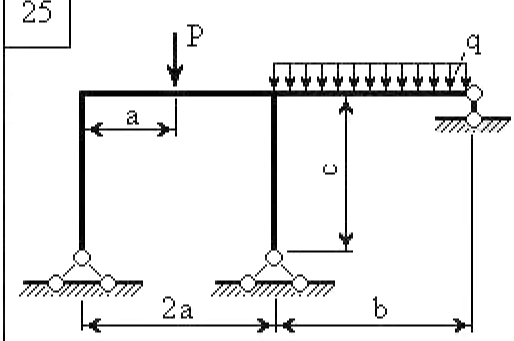
23



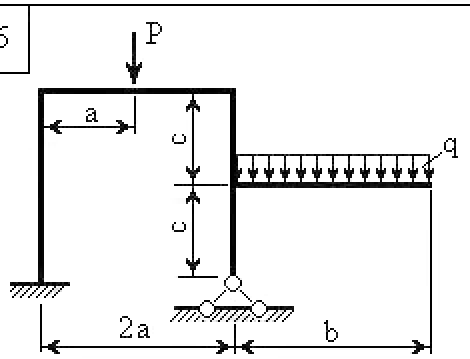
24



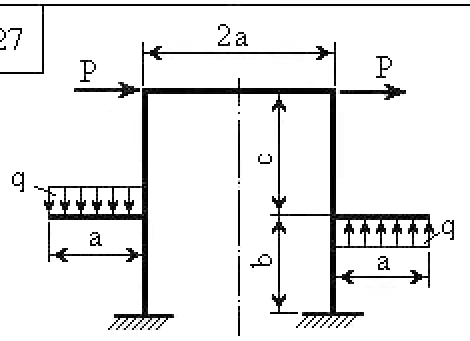
25



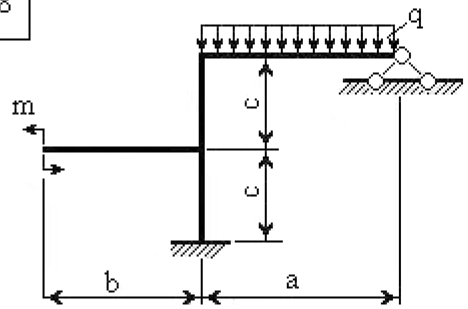
26



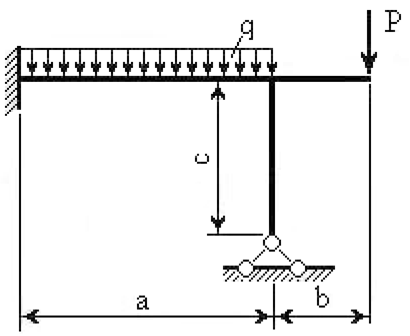
27



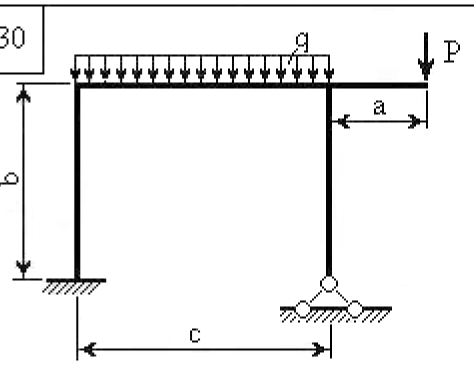
28



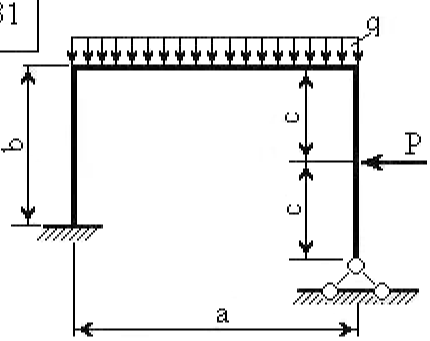
29



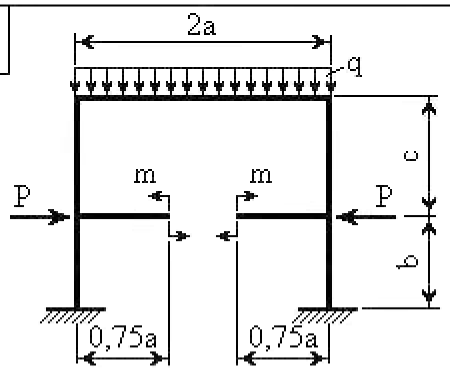
30



31



32



ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов, М.:Наука, 1984г.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов, М.:Наука, 1986г.
3. Сборник задач по сопротивлению материалов./под редакцией Вольмира А.С. М.:Наука, 1984г.
4. Сборник задач по сопротивлению материалов./под редакцией Качурина В.К. М.:Наука, 1970г.