ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 16.07.2013.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АБДУЛЛАЕВ БАХРОМ ИСМОИЛОВИЧ

m-СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАРДА ПОТЕНЦИАЛЛАР НАЗАРИЯСИ

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

УДК: 517.55

Докторлик диссертацияси автореферати мундарижаси
Оглавление автореферата докторской диссертации
Content of the Abstract of the Doctoral dissertation

ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИ ҲУЗУРИДАГИ ФАН ДОКТОРИ ИЛМИЙ ДАРАЖАСИНИ БЕРУВЧИ 16.07.2013.FM.01.01 РАҚАМЛИ ИЛМИЙ КЕНГАШ

УРГАНЧ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

АБДУЛЛАЕВ БАХРОМ ИСМОИЛОВИЧ

m-СУБГАРМОНИК ФУНКЦИЯЛАРДА ПОТЕНЦИАЛЛАР НАЗАРИЯСИ

01.01.01 – Математик анализ
(физика-математика фанлари)

ДОКТОРЛИК ДИССЕРТАЦИЯСИ АВТОРЕФЕРАТИ

Тошкент – 2016

Докторлик диссертацияси мавзуси Ўзбекистон Республикаси Вазирлар Маҳкамаси ҳузуридаги Олий аттестация комиссиясида № 30.09.2014/B2014.5.FM119 рақам билан рўйхатга олинган.

Докторлик диссертацияси Урганч давлат университетида бажарилган.

Диссертация автореферати уч тилда (ўзбек, рус, инглиз) Илмий кенгаш веб-саҳифаси (http://ik-fizmat.nuu.uz/) ва «ZIYONET» таълим ахборот тармоғида (www.ziyonet.uz) жойлаштирилган.

Илмий маслаҳатчи:	**Садуллаев Азимбай** физика-математика фанлари доктори, профессор, академик
Расмий оппонентлар:	**Кружилин Николай Георгиевич** физика-математика фанлари доктори, профессор
	Ганиходжаев Расул Набиевич физика-математика фанлари доктори, профессор
	Джалилов Ахтам Абдурахманович физика-математика фанлари доктори, профессор
Етакчи ташкилот:	**Сибирь федерал университети**

Диссертация ҳимояси Ўзбекистон Миллий университети ҳузуридаги 16.07.2013.FM.01.01 рақамли Илмий кенгашнинг «24» март 2016 йил соат 14-00 даги мажлисида бўлиб ўтади (Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998-71) 227-12-24, факс: (+998-71) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nu.uz)

Докторлик диссертацияси билан Ўзбекистон Миллий университетининг Ахборот-ресурс марказида танишиш мумкин (__________рақами билан рўйхатга олинган). Манзил: 100174, Тошкент ш., Олмазор тумани, Университет кўчаси, 4-уй. Тел.: (+998-71) 246-02-24.

Диссертация автореферати 2016 йил «18» февраль куни тарқатилди.
(2016 йил «18» февралдаги _______ рақамли реестр баённомаси).

А.А.Азамов
Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий кенгаш раиси, ф.-м.ф.д., профессор

А.Х.Худойбердиев
Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий кенгаш илмий котиби, ф.-м.ф.н.

Ю.Х.Эшкабилов
Фан доктори илмий даражасини берувчи Илмий кенгаш ҳузуридаги илмий семинар раиси, ф.-м.ф.д.

Кириш (докторлик диссертацияси аннотацияси)

Диссертация мавзусининг долзарблиги ва зарурати. Классик потенциаллар назарияси Лаплас оператори ва субгармоник функциялар синфига асосланиб, плюрипотенциаллар назарияси ночизиқли Монж-Ампер тенгламаси ва плюрисубгармоник функциялар билан боғланган. Плюрипотенциаллар назарияси ҳозирда жадал суръатларда ривожланиб келмоқда ва геометрик кўпхилликлар, Эйнштейннинг нисбийлик назариясида, жумладан, Эйнштейн метрикасининг мавжудлигини исботлашда, шунингдек, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг бир қанча масалаларида ўз татбиқини топган. Плюрисубгармоник функциялар синфининг ўзига хос кенгайтмаларини ўрганиш ва бу кенгайтмалар учун потенциаллар назариясини яратиш билан боғлиқ татқиқотлар ҳозирги пайтда комплекс анализнинг устивор йўналишларидан биридир.

Классик потенциаллар назарияси ва плюрипотенциал назариясини бирдек ўз ичига олган янги назарияни яратиш учун Лаплас ва ночизиқли Монж-Ампер операторини умумлаштирувчи гессианлардаги операторлардан фойдаланиш кутилган. Бироқ кутилаётган потенциаллар назарияси қандай функцияларга таяниши яқин-яқинларгача номаълумлигича қолмоқда эди. Гессианлардаги тенгламалар учун Дирихле масаласи асосида m-субгармоник функциялар синфи тушунчаси киритилиб, потенциаллар назариясига тўлиқ мос келиши ҳамда плюрисубгармоник функциялар Монж-Ампер тенгламаси учун қанчалик муҳим бўлса, m-субгармоник функциялар синфи ҳам гессианлардаги тенгламалар учун шунчалик муҳим бўлиши аниқланди. Шу сабабдан m-субгармоник функциялар синфини ва кучсиз m-субгармоник функцияларнинг потенциал-сиғим хоссаларини кенг тадқиқ этилиши долзарб муаммолардан ҳисобланади.

Шулар билан бир қаторда диссертация мавзусининг долзарблиги классик ва комплекс потенциаллар назариясини ўз ичига олган ва гессиан операторига асосланган потенциаллар назариясини тўлиқ асослаш, m-субгармоник ва кучсиз m-субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласини ечиш усулларини ишлаб чиқиш, m-субгармоник функциялар супремумининг m-субгармоник бўлиши ҳамда m-субгармоник функциялар комплекс гипертекисликлар устидаги қисқартмасининг (m-1)-субгармоник функция бўлиши муаммоларини ҳал этиш билан характерланади. Комплекс текисликларда субгармоник бўлган кучсиз m-субгармоник функциялар синфини киритиш, уларнинг потенциал-сиғим хоссаларини ўрганиш, m-субгармоник функцияларнинг квазиузлуксизлиги, уларнинг солиштириш принципи, стандарт аппроксимация учун оқимларнинг кучсиз яқинлашиши ва m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясининг бошқа фундаментал теоремаларини исботлаш юзасидан тегишли изланишларни олиб бориш муҳим вазифалардан ҳисобланади.

Неванлинна назариясида характеристик функцияни баҳолашда, Риман геометриясида $m-$қаварик қобиқларни содда кўринишда ифодалашда, плюрисубгармоник функциялар назариясида функцияларнинг плюригармониклиги мезонини (Лелон теоремасини аналогини) исботлашда қўлланиши ва m-субгармоник ва кучсиз m-субгармоник функциялар синфларининг кўп ўлчамли комплекс анализга қатор татбиқлари диссертация мавзуси билан боғлиқ тадқиқотларнинг заруратини ифодалайди.

Тадқиқотнинг республика фан ва технологиялари ривожланишининг устувор йўналишларига боғлиқлиги. Мазкур диссертация республика фан ва технологиялар ривожланишининг Ф4 «Математика, механика ва информатика» устувор йўналишига мувофиқ бажарилган.

Диссертация мавзуси бўйича хорижий илмий-тадқиқотлар шарҳи. Гессианлардаги комплекс тенгламалар назарияси, m-субгармоник функциялар назарияси, кучсиз m-субгармоник функциялар, плюрипотенциал назарияси ва кўп ўзгарувчили голоморф функциялар функцияларнинг геометрик масалалари бўйича етакчи хорижий давлатларнинг илмий марказлари ва олий таълим муассасаларида, жумладан, Стони Брук университети, Калифорния университети, Индиана университети (АҚШ); Ягеллон университетининг Математика институти (Польша); Пауль Сабатье университети (Франция); Готебург университети (Швеция); Любляна университети (Словения); Пиза университети (Италия); Москва давлат университети, Математика институти, Сибир федерал университетида (Россия) кенг қамровли илмий-тадқиқотлар олиб борилмоқда.

Классик потенциаллар ва плюрипотенциаллар назариялари ҳамда уларни ўз ичига олган янги назарияни яратиш юзасидан жаҳон миқёсида бир қатор долзарб масалалар ечилган бўлиб, жумладан, қуйидаги илмий натижалар олинган: p-плюрисубгармоник функциялар назариясининг калибрланган геометрияда муҳим татбиқлари келтирилган (Стони Брук университети), m-субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласи ечилган (Ягеллон университетининг Математика институти); проектив фазоларда m-субгармоник функциялар синфи ва уларнинг комплекс динамик системаларига татбиқлари топилган (Пауль Сабатье университети, Готебург университети); уч ўлчамли Евклид фазосида 2-плюрисубгармоник функциялар ва уларнинг минимал сиртлар назариясига тадбиқи услублари яратилган (Любляна университети); гессиан тенгламалари ечимларини ифодалаш услублари ишлаб чиқилган (Пиза университети).

Бугунги кунда, қулай геометрик тасвирга эга бўлган кучсиз mw-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини ривожлантириш, бу синфнинг потенциал хоссаларини ўрганиш ва амалиётга татбиқ қилиш ҳамда ихтиёрий T оқимга нисбатан T-плюрисубгармоник функцияларни таснифлаш каби устивор йўналишларда илмий-тадқиқот ишлари олиб борилмоқда.

Муаммонинг ўрганилганлик даражаси. Плюрипотенциал назария ночизиқли Монж-Ампер тенгламаси ва плюрисубгармоник функциялар билан боғлиқ бўлиб, ўтган асрнинг 80-йилларида яратилган. Бу назариянинг яратилишида, АҚШ, Польша, Швеция, Франция ва Ўзбекистон олимлари

(E.Bedford, B.A.Taylor, J.Siciak, H-J.Bremermann, Ch.O.Kiselman, А.Зерахи, А.Садуллаев) нинг фундаментал тадқиқотлари асосий омил ҳисобланади.

Польшалик математиклар (J.Siciak, S.Plesniak) нинг кўп ўзгарувчили голоморф функцияларнинг полиномиал аппроксимацияси билан боғлиқ масалаларни ўрганишлари натижасида экстремал Грин функциялари терминида классик Бернштейн-Уолш теоремасининг аналогини исбот қилишга муваффақ бўлинган. Кейинчалик ўзбекистонлик ва америкалик математиклар (А.Садуллаев, С.Имомкулов, E.Bedford, B.A.Taylor) томонидан плюрисубгармоник ўлчов, конденсатор сиғими тушунчалари киритилиб, бир қатор фундаментал натижалар исбот қилинган ва потенциаллар назариясини татбиқ этилиши принциплари ишлаб чиқилган. m-субгармоник функциялар ва гессианлардаги комплекс тенгламалар назариялари 2006 йилдан бошлаб, асосан Польшалик ва Франциялик математиклар (S.Dinev, Z.Blocki, S.Kolodziej, H-C.Lu) тадқиқотлари натижасида ривожланиб, m-субгармоник функциялар синфининг асосий функционал хоссалари ўрганилган.

Шунга қарамасдан, ихтиёрий m-субгармоник функциялар синфида гессиан операторининг аниқланмаганлиги ҳамда стандарт аппроксимация учун оқимларнинг яқинлашиши маълум бўлмагани сабаб, m-субгармоник функцияларда потенциаллар назарияси яратилмаган эди. Бундан ташқари, n-ўлчамли комплекс фазодаги кўп комплекс ўзгарувчили аналитик функциялар билан боғлиқ бўлган комплекс текисликларда субгармоник функцияларнинг потенциал-сиғим ҳусусиятлари ўрганилмаган эди.

Диссертация мавзусининг диссертация бажарилаётган олий таълим муассасасининг илмий-тадқиқот ишлари билан боғлиқлиги. Диссертация тадқиқоти Урганч давлат университети №3 рақамли «Комплекс потенциаллар назарияси» мавзусидаги илмий тадқиқот ишлари режаларига мувофиқ бажарилган.

Тадқиқотнинг мақсади m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назарияси, кучсиз m-субгармоник функцияларнинг потенциал хоссалари ва яратилган потенциаллар назариясини кўп комплекс аргументли функциялар ҳамда гармоник функцияларнинг геометрик муаммолари масалаларига татбиқ қилишдан иборат.

Тадқиқотнинг вазифалари қуйидагилардан иборат:

m-субгармоник функциялар супремумининг m-субгармониклигини ва m-субгармоник функцияларни комплекс гипертекисликлар устида қисқартмаси (m-1)-субгармоник функция бўлишини исботлаш;

конденсатор сиғими тушунчасини киритиш, квазиузлуксизлик ва m-субгармоник функциялар учун солиштириш принципини исботлаш;

стандарт аппроксимация учун оқимларнинг яқинлашишини ва m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясининг фундаментал теоремаларини исботлаш;

кучсиз m-субгармоник функциялар синфини аниқлаш ва бу синфнинг потенциал хоссаларини исботлаш;

m-субгармоник функцияларни Неванлинна назарияси, қавариқ геометрия, плюригармоник функциялар назариясига тадбиқ этиш усулларини ишлаб чиқиш.

Тадқиқотнинг объекти сифатида ночизиқли Монж-Ампер оператори, гессианлардаги оператор, m-субгармоник ва кучсиз m-субгармоник функциялар, m-поляр тўпламлар, конденсатор сиғими олинган.

Тадқиқотнинг предмети m-субгармоник ва кучсиз m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назарияси.

Тадқиқотнинг усуллари. Тадқиқот ишида потенциаллар назарияси ва кўп комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси методларидан фойдаланилган.

Тадқиқотнинг илмий янгилиги қуйидагилардан иборат:

m-субгармоник функциялар супремуми m-субгармоник бўлиши ва m-субгармоник функцияларни комплекс гипертекисликлар устидаги қисқартмаси (m-1)-субгармоник функция бўлиши исботланган;

классик ва комплекс потенциаллар назариясини ўз ичига олган гессиан операторига асосланган потенциаллар назарияси тўлиқ асосланган;

комплекс текисликларда субгармоник бўлган кучсиз m-субгармоник функцияларнинг потенциал-сиғим ҳусусиятлари киритилган ва унинг бир қатор муҳим хоссалари исбот қилинган;

m-субгармоник ва кучсиз m-субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласини ечиш усуллари ишлаб чиқилган;

m-субгармоник функцияларнинг квазузлуксизлиги ва уларнинг солиштириш принципи исбот қилинган;

стандарт аппроксимация учун оқимларнинг яқинлашиши ва m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясининг бошқа фундаментал теоремалари исботланган;

Тадқиқот натижаларининг ишончлилиги m-субгармоник функциялар синфини аниқлаш ва бу синфнинг потенциал хоссаларини исботлаш, потенциаллар назариясининг гессианлардаги тенгламалари учун Дирихле масалаларини ечишга математик анализ, функционал анализ, математик физика ва комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси усулларини қўллаш ҳамда математик мулоҳазаларнинг қатъийлиги, диссертация натижалари импакт-факторли илмий журналларда чоп қилингани ва етакчи илмий марказларда апробациядан ўтгани, шунингдек, муаллиф томонидан олинган натижаларни хорижий муаллифлар томонидан чоп қилинган ишларда муҳокама этилиши ва иқтибос келтирилганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг илмий ва амалий аҳамияти. Тадқиқот натижаларининг илмий аҳамияти диссертацияда Лелоннинг биринчи ва иккинчи муаммоси ва m-субгармоник функциялар синфида потенциалллар назариясининг бир қатор асосий теоремалари исбот қилингани ҳамда m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясини тўлиқ қурилиши акс этганлиги билан изоҳланади.

Диссертация ишининг илмий-амалий аҳамияти конденсатор сиғими тушунчасини киритилганлиги ва уни m-субгармоник функцияларнинг квазиузлуксизлигини исбот қилишга татбиқ этилгани, потенциаллар назариясини гессианлардаги тенгламалар учун Дирихле масалаларини ечишга, m-субгармоник Грин функцияларини Неванлиннанинг асосий характеристик функцияларини баҳолашга татбиқ этилганлиги билан асосланади.

Тадқиқот натижаларининг жорий қилиниши. Диссертация тадқиқоти жараёнида олинган илмий натижалар қуйидаги йўналишларда амалиётга жорий қилинган:

ночизиқли Гессиан тенгламалари учун Дирихле масаласи бўйича олинган натижалар Фольксваген (Германия) фондининг халқаро «Месоскопик физика масалаларидан келиб чиқадиган метрик графлардаги чизиқсиз эвалюцион тенгламалар ва транспортировка» лойиҳасида чегараси узлуксиз ўзгарадиган графларда ночизиқли тенгламалар учун Дирихле ечимини ўзгаришини аниқлашда қўлланилган (Олденбург университетининг 2016 йил 29 январдаги маълумотномаси). Соҳанинг Шилов чегарасида берилган Дирихле масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги чегараси чексиз нозиклашадиган графларда ечимнинг доимо узлуксиз бўлаолмаслигини исботлашга хизмат қилган;

бутун эвклид фазасида m-субгармоник функциялар синфи АҚШ илмий фондининг DMS-1401316 гранти лойиҳасида тўпламларнинг гиперқавариқ қобиқларини характерлашда фойдаланиган. (Калифорния университетининг 2016 йил 11 январдаги маълумотномаси). Фазонинг барча нуқталарида m-sh функциялар синфи берилган тўпламнинг қавариқ қобиғини содда ва аниқ кўринишда ифодалайди. m-sh функцияларнинг бу хоссаси фазога тегишли бўлган тўпламларнинг гиперқавариқ қобиқларини ўрганишга хизмат қилган;

эллиптик операторлар субечимлари бўйича олинган натижалар
ОТ-Ф1-116 «Функциялар назариясининг аналитик давом қилдириш ва геометрик масалалари» грант лойиҳасида (ЎзМУ, 2007–2011 йй.) аналитик, плюригармоник ва гармоник функцияларнинг махсус нуқталарини четлатиш, нозик ва нозик бўлмаган махсус нуқталар тўпламларини мавжудлигини исботлашда қўлланилган (Фан ва технологияларни ривожлантиришни мувофиқлаштириш қўмитасининг 2016 йил 1 февралдаги ФТК-02-13/60-сон маълумотномаси). Илмий натижаларнинг қўлланилиши голомоф ва плюригармоник функциялар учун нозик махсус нуқталар тўпламининг аналитик структурага эгалиги, уларнинг плюриполяр ёки аналитик тўплам бўлишини, голоморф функцияларнинг нозик бўлмаган махсус нуқталари тўпламлари бўйича уларнинг кесим сиғими учун аниқ баҳоланишини исботлашга хизмат қилган.

Тадқиқот натижаларининг апробацияси. Диссертациянинг асосий мазмуни қуйидаги халқаро ва Республика илмий анжуманларида муҳокама қилинган: Невада университети томонидан ўтказилган «Америка математиклар жамиятининг халқаро анжуманида» (Лас-Вегас, АҚШ, 2011 йил), «Анализ бўйича мактаб-семинар» (Калифорния, АҚШ, 2011 йил), «Анализ бўйича мактаб-семинар» (Калифорния, АҚШ, 2013 йил), «Ўзбекистон-АҚШ математикларининг халқаро анжумани» (Фуллертон, АҚШ, 2014 йил), «Аналитические функции многих комплексных переменных» мавзусидаги халқаро анжуманда (Красноярск, 2009 йил), «Функциональный анализ и его приложения» (Остона, 2012 йил), «Комплекс ва функционал анализнинг долзарб муаммолари» (Нукус, 2012 йил), «Оператор алгебралар ва уларнинг ҳар хил муаммолари» (Тошкент, 2012 йил), «Татбиқий математика ва информатиканинг долзарб муаммолари, Ал-Хоразмий−2012» (Тошкент, 2012 йил), «Комплекс анализнинг долзарб муаммолари» (Тошкент, 2013 йил), «Дифференциал тенгламалар ва уларнинг татбиқлари муаммолари» (Тошкент, 2013 йил), «Математик анализнинг долзарб муаммолари» (Урганч, 2012 йил).

Мазкур диссертация иши натижалари мунтазам равишда Урганч Давлат университетининг «Комплекс потенциаллар назарияси» илмий семинарида ва Ўзбекистон Миллий университетининг «Математик анализ» кафедраси илмий семинарида муҳокама қилиб борилган.

Тадқиқот натижаларининг эълон қилиниши. Диссертация мавзуси бўйича жами 25 та илмий иш нашр эттирилган, жумладан, миллий журналларда 8 та, халқаро журналларда 6 та мақола, илмий анжуманларда 11 та тезис нашр этилган.

Диссертациянинг ҳажми ва тузилиши. Диссертация кириш қисми, 5 та боб, хулоса, фойдаланилган адабиётлар рўйхати, 165 саҳифалик матндан иборат.

ДИССЕРТАЦИЯНИНГ АСОСИЙ МАЗМУНИ

Кириш қисмида ўтказилган тадқиқотларнинг долзарблиги ва зарурати асосланган, тадқиқотнинг мақсади ва вазифалари ҳамда объект ва предметлари тавсифланган, Ўзбекистон Республикаси фан ва технологияси тараққиётининг устувор йўналишларига мослиги кўрсатилган, тадқиқотнинг илмий янгилиги ва амалий натижалари баён қилинган, олинган натижаларнинг назарий ва амалий аҳамияти очиб берилган, тадқиқот натижаларини амалиётга жорий қилиш, нашр этилган ишлар ва диссертация тузилиши бўйича маълумотлар келтирилган.

Диссертациянинг биринчи боби «**Потенциаллар назариясининг асосий принциплари**»да классик ва комплекс потенциаллар назариясининг методлари ва бош принциплари қисқача баён этилган.

Диссертациянинг иккинчи боби **«*m* – *sh* функциялар ва уларнинг хоссалари»** деб номланиб, унда m – субгармоник функциялар таърифи ва кейинчалик m –потенциаллар назариясини қуришда зарур бўладиган бир қатор тасдиқлар келтириб ўтилган.

Иккита субгармоник ёки плюрисубгармоник функциянинг максимуми яна субгармоник ёки плюрисубгармоник функция бўлади. Ушбу факт бундай функциялар учун интеграл тенгсизликлар ёрдамида жуда осон исбот этилади. Бироқ бундай интеграл тенгсизликлар мавжуд бўлмагани сабабли юқоридаги тасдиқнинг m-субгармоник функциялар учун аналоги тривиал бўлмайди. Шундай бўлсада қуйидаги тасдиқлар ўринли бўлади:

Теорема 1. *Чекли сондаги* $m-sh$ *функциялар максимуми* $m-sh$ *функция бўлади; исталган локал текис чегараланган* $\{u_\theta\}\subset m-sh$ *функциялар оиласи учун* $u(z)=\left\{\sup_\theta u_\theta(z)\right\}$ *супремумнинг* $u^*(z)$ *юқори регуляризацияси ҳам* $m-sh$ *функция бўлади ва* $\{u(z)<u^*(z)\}$ *тўплам* $\mathbb{C}^n\approx\mathbb{R}^{2n}$ *да поляр бўлади.*

Қуйидаги теорема фақат $m-sh$ функциялар синфига хос хусусиятни ифодалайди.

Теорема 2. *Агар* $u\in m-sh$ *бўлса, у ҳолда исталган* $\mathrm{P}\subset\mathbb{C}^n$ *комплекс гипертекислик учун* $u|_{\mathrm{P}}$ *қисқартма* $(m-1)-sh$ *функция бўлади.*

Ушбу натижа интеграл баҳолашларда, $m-sh(D)\subset m-wsh(D)$ муносабатни исботлашда ва бошқа бир қатор ҳолатларда амалий татбиқларга эга.

Потенциаллар назариясини қуришда асосий қийинчилик плюрипотенциал назариядаги каби $\left(dd^cu\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ операторни $m-sh$ функциялар оиласида аниқлаш ва $u_j\downarrow u$ стандарт аппроксимация учун $\left(dd^cu_j\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ кетма-кетликни яқинлашишини исботлашдан иборат. Бу йўналишда биринча қадам З.Блоцкий томонидан қўйилди ва у

$$\left(dd^cu_j\right)^m\wedge\beta^{n-m}\mapsto\left(dd^cu\right)^m\wedge\beta^{n-m} \tag{1}$$

яқинлашишни узлуксиз $u\in m-sh(D)\cap C(D)$ функциялар учун исбот қилди. Бироқ бундай яқинлашиш исталган $u(z)$ функция учун мавжуд эмаслиги ва $\left(dd^cu\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ операторнинг ўзини аниқлаш усули йўқлиги $m-\ s$ функциялар синфида потенциаллар назариясини қуришда асосий тўсиқ бўлиб келди.

Биз бу тўсиқни А.Садуллаев томонидан плюрипотенциал назарияни қуришда таклиф этилган қуйидаги схемасидан фойдаланиб бартараф этамиз:

1) Аввало $\left(dd^cu\right)^k\wedge\beta^{n-m}$ оператор $m-sh(D)\cap C(D)$ синфда аниқлаймиз ва (1) муносабатни исботлаймиз;

2) Фақатгина $m-sh(D)\cap C(D)$ синфдан фойдаланиб, $m-$сиғим $C_m(E,D)$ ни аниқлаймиз;

3) $m-sh$ функцияларнинг потенциал-сиғим хоссаларини исботлаймиз (квазиузлуксизлик, таққослаш принциплари, ихтиёрий $m-sh$ функцияларнинг максималлиги масалалари ва бошқалар);

4) $u_j\downarrow u,\ u\in L^\infty_{loc}(D)\cap m-sh(D)$ аппроксимация учун мусбат оқимларнинг яқинлашиши $\left(dd^cu_j\right)^m\wedge\beta^{n-m}\mapsto\left(dd^cu\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ муаммосини ҳал қиламиз.

$m-sh$ функцияларнинг 3) ва 4) хоссалари потенциаллар назариясининг фундаментал қисмини ташкил этади. Улар бизга потенциаллар назариясининг асосий объектлари бўлган $m-$поляр тўпламлар, $\mathscr{P}_m$- ўлчов, максимал $m-sh$ функциялар ва бошқа тушунчаларни тадқиқ этиш имконини беради.

$\mathscr{P}_m$- ўлчов тушунчаси плюрипотенциал назариясидаги $\mathscr{P}$-ўлчов тушунчаси каби киритилади: $E \subset D$ – кучли $m-$қаварик $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳанинг бирор қисм тўплами бўлсин, $1 \le m \le n$.

Ушбу функциялар синфини қараймиз:

$$\mathscr{U}(E,D) = \{u(z) \in m-sh(D) : u\big|_D \le 0,\ u\big|_E \le -1\}$$

ва $\omega(z,E,D) = \sup\{u(z):\ u \in \mathscr{U}(E,D)\}$ деб оламиз.

Таъриф 1. У ҳолда $\omega^*(z,E,D)$ регуляризацияга E тўпламнинг D соҳага нисбатан $\mathscr{P}_m$*–ўлчови (*$m-$*субгармоник ўлчови)* дейилади.

$\mathscr{P}_m$– ўлчов $\mathscr{P}$-ўлчовнинг кўпгина хоссаларини қаноатлантиради. Ҳусусан, қуйидаги тасдиқ ўринли бўлади.

Теорема 3. *Агар* $K \subset D$ *компакт* $m-$*регуляр бўлса, у ҳолда* $\mathscr{P}_m$*–ўлчов* $\omega^*(z,K,D) \equiv \omega(z,K,D)$ *тенгликни қаноатлантиради ва* D *да узлуксиз функция бўлади. Бундан ташқари,* $D \setminus K$ *соҳада* $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ *тенглик ўринли бўлади.*

Диссертациянинг учинчи боби **«Конденсатор сиғими»**да потенциаллар назариясининг асосий тушунчаси ҳисобланган конденсатор сиғими тушунчасини ўрганишга бағишланган ва бу бобда потенциаллар назариясининг бир қатор фундаментал теоремалари исботланган.

Таъриф 2. $K - D \subset \mathbb{C}^n$ соҳадаги компакт бўлсин. У ҳолда, ушбу

$$C_m(K) = C_m(K,D) =$$

$$= \inf\left\{ \int_D \left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} : u \in m-sh\left(D\right) \cap C\left(D\right),\ u|_K \le -1,\ \varliminf_{z \to \partial D} u\left(z\right) \ge 0 \right\}$$

катталикка $\left(K,D\right)$ конденсаторнинг сиғими ($m-$сиғими) дейилади.

Конденсатор сиғими $C\left(E\right) = C_m\left(E\right)$ қуйидаги стандарт хоссаларга эга:

– сиғим монотон, яъни $C\left(E\right) \ge C\left(K\right),\ \forall E \supset K$;

– исталган $K \subset D$ компакт учун унинг сиғими қуйидагича:

$$C\left(K\right) = \inf\left\{C\left(E\right):\ E \supset K,\ E - m \text{ регуляр}\right\};$$

Одатдагидек, ташқи сиғимни қуйидагича аниқлаймиз: $C^*\left(E\right) = \inf\left\{C\left(U\right): U \supset E - \text{очик}\right\}$, бунда очиқ тўплам сиғими қуйидагича аниқланади: $C\left(U\right) = \sup\left\{C\left(K\right): K \subset U\right\} = \sup\left\{C\left(K\right):\ K \subset U,\ K\ m - \text{регуляр}\right\}$.

– ташқи сиғим $C^*(E)$ монотон, яъни агарда $E_1 \subset E_2$ бўлса, у ҳолда $C^*(E_1) \le C^*(E_2)$ бўлади; Ташқи сиғим саноқли-субаддитив, яъни

$C^*\left(\bigcup_j E_j\right) \le \sum_j C^*(E_j)$ ва чапдан ярим узлуксиз, яъни исталган ўсувчи очиқ тўпламлар кетма-кетлиги $U_j \subset U_{j+1}$ учун $C\left(\bigcup_j U_j\right) = \lim_{j\to\infty} C(U_j)$ тенглик бажарилади.

– исталган $K \subset D$ компакт учун унинг ташқи сиғими $C^*(K) = C(K)$ бўлади.

Қуйидаги формуланинг ўнг томонидаги интеграл остида чексиз силлиқ дифференциал форма турганлиги учун у амалиётда жуда муҳим ҳисобланади.

Теорема 4. *Агар* $U \subset D$ *очиқ тўплам бўлса, у ҳолда*

$$C(U) = \sup\left\{\int_U \left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} : u \in m-sh(D) \bigcap C^\infty(D),\ -1 \le u < 0\right\}$$

тенглик ўринли.

Қуйидаги теоремалар Лелоннинг биринчи муаммосини исботлашда ҳал қилувчи ҳисобланади ва ўз ҳоличa ҳам мустақил натижалардир.

Теорема 5. *Агар* $E \subset D \subset G$ *бўлса, у ҳолда* $C^*(E,D) \ge C^*(E,G)$.

Теорема 6. *Агар* $E \subset B(0,r) \subset\subset B,\ r<1$, *бунда* $B(0,r) = \{|z|<r\} -$ r *радиусли шар ва* $B = B(0,1)$ *бўлса, у ҳолда*

$$C^*(E,B) \le \frac{m!\mathscr{P}_m(E,B)}{(1-r)^m}$$

тенглик ўринли ва аксинча исталган тайин $r<1$ *учун фақат* r *га боғлиқ шундай ўзгармас* $M(r)>0$ *сон топилиб,*

$$\mathscr{P}_m(E,B) \le M(r)\cdot C^*(E,B),\ \ \forall E \subset B(0,r)$$

муносабат бажарилади.

Бу ерда $\mathscr{P}_m(E,B) = -\int_B \omega^*(z,E,B)\,dV$ *катталик* $\mathscr{P}_m$ $-$*сиғим деб аталади.*

Юқоридаги теоремадан бевосита қуйидаги муҳим натижа келиб чиқади:

Натижа. *Ихтиёрий* $E \subset\subset B(z^0,r)$ *тўплам сиғими учун* $C^*\left(E, B\left(z^0,r\right)\right) = 0$ *тенглик фақат ва фақат* $\mathscr{P}_m\left(E, B\left(z^0,r\right)\right) = 0$ *тенглик бажарилгандагина ўринли бўлиб, бу* E *тўплам* $B\left(z^0,r\right)$ *да* $m-$*поляр бўлишига эквивалентдир.*

Поляр ва плюриполяр тўпламларга ўхшаш тарзда, агар шундай $u \in m-sh(D),\ u \not\equiv -\infty$ функция топилиб, $u|_E = -\infty$ муносабат бажарилса, $E \subset D \subset \mathbb{C}^n$ тўплам $m-$поляр дейилади. Амалиётда қуйидаги локал $m-$полярлик тушунчасидан фойдаланиш қулай.

Таъриф 3. Агар ҳар бир $z^0 \in E$ нуқтасида $B(z^0, r)$ шар топилиб, $E \bigcap B(z^0, r)$ тўплам $B(z^0, r)$ шарга нисбатан $m-$поляр бўлса, $E \subset \mathbb{C}^n$ тўплам *локал* $m-$*поляр* тўплам дейилади,.

Классик ҳолатда $\mathbb{R}^n$ да локал поляр тўплам $\mathbb{R}^n$ да ҳам поляр бўлади. Йозефсон $\mathbb{C}^n$ да локал поляр тўпламларнинг алгебраик тўпламлар билан аппроксимация қилинишидан фойдаланиб, локал плюриполяр тўпламларнинг глобал плюриполяр бўлишини кўрсатди.

Юқорида киритилган конденсатор сиғими тушунчаси ушбу тасдиқни исталган $m-$поляр тўплам $(1 \leq m \leq n)$ учун осонгина исботлаш имконини беради.

Теорема 7. $\mathbb{C}^n$ *да локал* $m-$*поляр тўплам* $m-$*поляр бўлади, яъни агар* $E \subset \mathbb{C}^n$ *тўплам локал* $m-$*поляр бўлса, у ҳолда шундай* $u(z) \in m-sh(\mathbb{C}^n)$ *функция топилиб,* $u \not\equiv -\infty\ u|_E = -\infty$ *бўлади.*

Диссертацияда исбот қилинган қуйидаги асосий натижа $m-sh$ функцияларнинг сиғим бўйича квазиузлуксизлик хоссасини ифода этади. Барчага яхши маълум Н.Н.Лузиннинг С-хоссаси, ҳар қандай ўлчовли функциянинг Лебег ўлчовига нисбатан деярли узлуксиз бўлишини таъкидлайди. Ушбу натижанинг субгармоник ёки плюрисубгармоник функциялар учун сиғим бўйича аналоги ҳам маълум бўлиб, $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳадаги $m-sh$ функциялар учун $m-$сиғимга нисбатан деярли узлуксизлиги бажарилади.

Теорема 8. $m-$*субгармоник функция* $m-$*сиғим бўйича деярли узлуксиз бўлади, яъни агар* $u \in m-sh(D)$ *бўлса, у холда ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *сон учун шундай* $U \subset D$ *очиқ тўплам топилиб,* $C(U) < \varepsilon$ *ва* u *функция* $D \setminus U$ *да узлуксиз бўлади.*

Ушбу теореманинг исботи $m-sh$ функцияларнинг интеграл баҳолари, конденсатор сиғимининг хоссаларига ва 4-теоремага асосланади.

Картан теоремасининг аналогидан фойдаланиб, потенциаллар назариясининг қуйидаги фундаментал теоремасини исботлай оламиз:

Теорема 9. $1 \leq m \leq n$ *ва* $u_0, u_1, ..., u_m \in m-sh(D) \bigcap L^\infty_{loc}(D)$ *бўлсин. У ҳолда,*

1) қуйидаги рекуррент муносабат

$$\left[dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge \beta^{n-m}\right](\omega) = \int u_k dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_{k-1} \wedge \beta^{n-m} \wedge dd^c \omega,$$

$$\omega \in F^{m-k, m-k}(D), k = 1, ..., m,$$

мусбат $(n-m+k, n-m+k)$ *бидаражали оқимни аниқлайди;*

2) исталган $u_{ij} \downarrow u_i$, $i = 0,1,...,m,\ j \to \infty$ C^∞ *аппроксимация учун оқимларнинг қуйидагича яқинлашиши ўринли*

$$dd^c u_{1j} \wedge ... \wedge dd^c u_{kj} \wedge \beta^{n-m} \mapsto dd^c u_1 \wedge ... \wedge dd^c u_k \wedge \beta^{n-m}, \ (k = 1, ..., m);$$

8 ва 9-теоремалардан фойдаланиб $\omega^*(z, E, D)$ $\mathscr{P}_m$-ўлчовнинг ва $E \subset D$ тўплам учун $C(E) = C(E, D)$ сиғимнинг бир қатор хоссаларани қиламиз.

Теорема 10. *Ихтиёрий* $K \subset D$ *компакт учун унинг* $\omega^*(z,K,D)$ $\mathscr{P}_m$ - *ўлчови* $D \setminus K$ *соҳада* $\left(dd^c\omega^*\right)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ *тенгликни қаноатлантиради.*

Шуни эслатиб ўтиш жоизки, иккинчи бобда (теорема 2.11) шунга ўхшаш тасдиқ $m-$регуляр бўлган $K \subset D$ компактлар учун исбот қилинган.

Теорема 11. K *компактнинг иррегуляр бўлган нуқталари тўплами* I_K *нинг сиғими:* $C(I_K) = 0$ *бўлади, яъни* I_K $m-$*поляр тўплам бўлади.*

Юқоридаги Теорема билан $m-sh$ функциялар учун Лелоннинг иккинчи муаммосини ижобий хал этилишини акс эттирувчи қуйидаги теорема боғланган.

Теорема 12. *Фараз қилайлик* $\{u_j\}$ $m-sh$ *функцияларнинг ўсувчи кетма-кетлиги бўлиб,* $u(z) = \lim\limits_{j\to\infty} u_j(z)-$ *юқоридан локал чегараланган бўлсин. У холда* $\sigma = \{u(z) < u^*(z)\}$ *тўплам* D *да* $m-$*поляр бўлади. Бунда* u^* *и функциянинг юқори регуляризацияси.*

Натижа. *Ихтиёрий* $K \subset D$ *компакт учун унинг* $C(K)$ *сиғими*

$$C(K) = \int\limits_K (dd^c\omega(z,K,D))^m \wedge \beta^{n-m}$$

интеграл билан устма-уст тушади.

Диссертацияда Борел тўпламларининг $C(E)$ сиғим бўйича ўлчовлилиги исбот қилинган.

Теорема 13. *Ихтиёрий* $E \in \mathcal{A}$ *аналитик тўплам, ҳусусан ихтиёрий Борел тўплами* $C(E)$ *сиғим бўйича ўлчовли, яъни* $C_*(E) = C^*(E)$, *бунда*

$$C_*(E) = \sup\{C(K) : K \subset E - \text{компакт}\},$$

$$C^*(E) = \inf\{C(U) : U \supset E - \text{очик}\}$$

ички ва ташқи сиғимлар.

Диссертациянинг тўртинчи боби «$\mathbb{C}^n$ **даги комплекс текисликларда субгармоник функциялар»** да қуйидаги тенгсизлик

$$dd^c u \wedge \left(dd^c \left|z^2\right|\right)^{n-m} \geq 0 \ . \qquad (2)$$

билан аниқланувчи кучсиз субгармоник функциялар ($m-wsh$) ўрганилган. Бу синф psh функциялар синфидан кенг, лекин sh функциялар синфида қатъий ётади. Бундан ташқари, $1-wsh$ функциялар синфи sh функциялар синфи билан, $n-wsh$ функциялар синфи эса psh функциялар синфи билан устма-уст тушади. Бироқ $m-sh$ функциялар айни ҳолатда $m-wsh$ функциялар синфига қатъий тегишли бўлади, $m-sh \subset m-wsh.$ Бу ҳолат бизга $m-wsh$ функцияларнинг потенциал-сиғим хоссаларини ўрганишда $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ оператор ва $m-sh$ функцияларда потенциаллар назарияси методларидан фойдаланиш имконини бермайди. Бундан ташқари (2) шартни қаноатлантирувчи икки марта силлиқ функциялар мавжуд бўлиб, улар учун $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ оператор мусбат бўлмаслиги аниқланган.

Шунинг учун диссертацияда $m-wsh$ функцияларни ўрганишда $m-sh$ функцияларни ўрганиш усулидан тубдан фарқ қилувчи бошқа усуллардан фойдаланилган.

$m-wsh$ функциялар ажойиб геометрик талқинга эга бўлиб, исталган $\left(n-m+1\right)$ ўлчамли комплекс текислик $\prod\subset\mathbb{C}^n$ да субгармоник функция бўлиши билан характерланади. Шунинг учун $m-wsh$ функциялар кўп ўлчамли комплекс анализ ва геометрияга тадбиқ этиш учун қулай ва осон талқин этилади. Аммо бу синфда плюрисубгармоник функциялар учун Монж-Ампер типидаги ва $m-sh$ функциялар учун гессиан типидаги операторга ўхшаш мос келувчи оператор ҳали аниқланмаган. Айни шу тафовутлар сабаб, $m-wsh$ функциялар синфида тўлиқ потенциаллар назариясининг қурилиши ҳали якунига етмаган. Шундай бўлсада, бу бобда биз ушбу синфнинг бир қатор потенциал хоссаларини исбот қиламиз. $m-wsh$ функцияларнинг бошқа геометрик хоссалари билан Р.Харви ва Б.Лаусон, Д.Жойс и М.Вербитский ишларидан танишиш мумкин.

Таъриф 4. Агарда $D\subset\mathbb{C}^n$ соҳада аниқланган $u(z)\in L^1_{loc}\left(D\right)$ функция:

1) D соҳада юқоридан ярим узлуксиз, яъни

$$\overline{\lim_{z\to z^0}}u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{B(z^0,\varepsilon)}u(z)\le u(z^0);$$

2) D соҳада $dd^c u\wedge(dd^c\left|z^2\right|)^{n-m}\ge 0,\ 1\le m\le n$, яъни

$$\forall\ \omega\in F^{(m-1,m-1)}\quad \text{учун}\quad dd^c u\wedge\left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-m}\left(\omega\right)=\int u\left(dd^c\left|z\right|^2\right)^{n-m}\wedge dd^c\omega\ge 0,$$

бўлса, бу функцияга D соҳада $m-wsh$ *функция* ($\left(n-m+1\right)-$ўлчамли комплекс текисликларда субгармоник функция) дейилади.

Бундай функциялар синфини $m-wsh(D)$ орқали белгилаймиз. Бу ерда “w” харфи бу синфни $m-sh$ функциялар синфидан фарқлаш учун ишлатилган.

Қуйидаги теорема бизга $m-wsh$ функцияларни геометрик характеристикасини тушинишга имкон беради.

Теорема 14. *$D\subset\mathbb{C}^n$ соҳада аниқланган ва юқоридан яримузлуксиз и функция $m-wsh$ бўлиши учун, ихтиёрий $\left(n-m+1\right)$-ўлчамли $\prod\subset\mathbb{C}^n$ комплекс текисликда*

$$u\big|_{\prod}\in sh\left(\prod\bigcap D\right)$$

бўлиши зарур ва етарли.

Ушбу теореманинг исботида оқимлар хоссалари ва субгармоник функцияларнинг интеграл тенгсизликларидан фойдаланилади.

Натижа. *$D\subset\mathbb{C}^n$ соҳада аниқланган $m-sh$ функция $m-wsh$ функция ҳам бўлади, $m-sh\left(D\right)\subset m-wsh\left(D\right)$.*

Диссертация давомида $D \subset \mathbb{C}^n$ соҳа учун унинг $E \subset D$ қисм тўпламлари $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}$-*ўлчови* ва $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}$-*сиғими* тушунчалари киритилади:

$$\omega(w,E,D) = \sup\left\{u(w):\ u \in m - wsh\left(D\right),\ u|_D < 0,\ u|_E \le -1\right\},$$

$$\omega^*(z,E,D) = \overline{\lim_{w \to z}}\, \omega\left(w,E,D\right)$$

ва

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\ (E,D) = -\int_D \omega^*(z,E,D)dV\,.$$

У ҳолда $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\ (E,D) \ge 0$ бўлиб, $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D) = 0$ тенглик фақат ва фақат E тўплам D соҳада mw-поляр тўплам бўлгандагина ўринли бўлади. Бундан ташқари қуйида тасдиқ ўринли:

Теорема 15. $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D)$ *катталик тўплам функцияси сифатида монотон ва саноқли-субаддитив бўлади: агар* $E_1 \subset E_2$ *бўлса* $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E_1,D) \le \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E_2,D\right)$ *ва ихтиёрий* $E_j \subset D,\ j = 1,2,3,\dots$ *тўпламлар учун*

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, D\right) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E_j, D\right)$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Булардан ташқари ихтиёрий $E \subset D$ *тўплам ва ихтиёрий* $\varepsilon > 0$ *сон учун шундай очиқ* $U \supset E$ *тўплам топилиб,* $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(U,D\right) - \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E,D\right) < \varepsilon$ *ўринли бўлади.*

Натижа 1. Ихтиёрий камаювчи $K_1 \supset K_2 \supset \dots$ компактлар кетма-кетлиги учун қуйидаги ўнгдан узлуксизлик хоссаси бажарилади

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j,\ D\right) = \lim_{j \to \infty} \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(K_j,\ D\right);$$

ва агар $G_1 \subset G_2 \subset \dots$ очиқ тўпламла кетма-кетлиги бўлса, у ҳолда қуйидаги чапдан узлуксизлик хоссаси бажарилади

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j, D\right) = \lim_{j \to \infty} \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(G_j, D\right).$$

Натижа 2. $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D)$ тўплам функцияси Шокенинг ўлчовлилик хоссаларини барчасини қаноатлантиради ва натижада ихтиёрий Борел тўплами $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}$ сиғим бўйича ўлчовли бўлади. Шундай қилиб, агар $E \subset D$ Борел тўплами бўлса, у ҳолда унинг ташқи ва ички сиғимлари устма-уст тушади: $\mathscr{P}^*_{mw}\left(E,D\right) = \mathscr{P}_{\mathrm{mw}*}\left(E,D\right)$, бунда $\mathscr{P}^*_{mw}\left(E,D\right) = \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E,D\right)$ ва

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}*}\left(E,D\right) = \sup\left\{\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(K,D\right) : K \subset E - \text{компакт}\right\}.$$

Тўртинчи бобнинг учинчи параграфи максимал $m - wsh$ функцияларга ва $m - wsh$ функциялар синфида Дирихле масаласини ўрганишга бағишланади.

Таъриф 5. Агар $u(z)\in m-wsh(D)$ функция учун $D\subset\mathbb{C}^n$ соҳада $m-wsh$ функциялар синфида максимум принципи бажарилса, яъни агар $v\in m-wsh(D):\ \overline{\lim_{z\to\partial D}}(u(z)-v(z))\geq 0$ муносабат бажарилишидан $\forall z\in D$ учун $u(z)\geq v(z)$ тенгсизлик келиб чиқса, у ҳолда $u(z)$ функция D соҳада *максимал функция* дейилади.

Максимал функцияларни ўрганиш учун $mw-$субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласини қараймиз. Плюрисубгармоник функциялар синфида Дирихле масаласига ўхшаш тарзда $mw-$субгармоник функциялар синфида Дирихле масаласи қуйидагича аниқланади: фараз қилайлик $D\subset\mathbb{C}^n-$чегараланган соҳа ва $\varphi(\xi)\in C(\partial D)-$тайинланган функция бўлсин. Шундай узлуксиз $u(z)$ максимал $m-wsh$ функцияни аниқлаш керакки, $u|_{\partial D}=\varphi$. Одатдагидек, ечим Перрон усулида изланади:

$$\mathcal{U}(\varphi,D)=\left\{u\in m-wsh(D):\overline{\lim_{z\to\partial D}}u(z)\leq\varphi\right\}, \tag{3}$$

$$\omega(z)=\sup\{u(z):u\in\mathcal{U}(\varphi,D)\}.$$

Классик $m=1$ ҳолда, агар $D-$кучли $1-$қавариқ (регуляр), масалан, силлиқ ∂D чегарага эга бўлса, у ҳолда ω функция Дирихле масаласининг ечими бўлиши исботланган, яъни у D соҳада гармоник, чегарагача узлуксиз ва $\omega|_{\partial D}=\varphi$. Бироқ psh функция синфидагидек, $m>1$ бўлганда, масала анча мураккаб ва ечимнинг мавжудлиги учун D соҳанинг қавариқлигига ва чегаравий φ функцияга қўшимча шартлар қўйишга тўғри келади.

Теорема 16. *Агар $D\subset\mathbb{C}^n-$қатъий mw-қавариқ соҳа бўлса, у ҳолда бу соҳада Дирихле масаласи исталган чегаравий $\varphi\in C(\partial D)$ функция учун ечимга эга бўлади. Аниқроғи, $\omega(z)=\sup\{u(z):u\in\mathcal{U}(\varphi,D)\}$ функция максимал, узлуксиз $\omega\in m-wsh(D)\bigcap C(\overline{D})$ бўлиб, $\lim_{z\to\xi}\omega(z)=\varphi(\xi),\ \xi\in\partial D$ тенглик бажарилади.*

psh функциялар $(m=n)$ учун $\lim_{z\to\xi}\omega(z)=\varphi(\xi)\forall\xi\in\partial D$ муносабат Бремерман томонидан, узлуксизлиги, $\omega\in C(\overline{D})-$ Уолш томонидан исботланган.

Диссертациянинг бешинчи боби$-$ «**Қўлланиши**»да $m-sh$ функциялар ва потенциаллар назариясини кўп ўлчамли комплекс анализ ва гармоник анализ масалаларига, Неванлинна назариясига, $\left(dd^cu\right)^m\wedge\left(dd^c|z|^2\right)^{n-m}=0$ тенглама учун Дирихле масалаларини ўрганишга, потенциалларни махсус нуқталарини бартараф этиш масалалари татбиқларига бағишланади. Бешинчи бобнинг тўртинчи параграфи бутун $\mathbb{C}^n$ фазода аниқланган $m-sh$ функцияларга бағишланган бўлиб, бу ерда биз $K\subset\mathbb{C}^n$ компакт учун Грин функцияси $V_m(z,K)$ тушунчасини киритамиз, асосий хоссаларини исботлаймиз ва $V_m(z,K)$ функция билан K компактнинг $m-$ қавариқ қопламалари орасидаги боғланишини ўрнатамиз. Бешинчи бобнинг бешинчи параграфи $\left(dd^c u\right)^m \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m}$ операторнинг ихтиёрий (нафақат чегараланган) $m-sh$ функциялар учун аниқлаш масаласи қаралган. Бешинчи бобнинг олтинчи параграфида биз гармоник ва $m-wsh$ функциялар кесишмасини ўрганамиз.

Маълумки, кўп ўлчамли Неванлинна назариясининг асосий объекти $f=[f_0, f_1,..., f_q]: \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^q, f_j \in \mathcal{O}\left(\mathbb{C}^n\right), f \neq 0$ голоморф акслантиришлар учун $A \subset \mathbb{P}^q$, $\dim A = q-k,\ 1 \le k \le \min\{q,n\}$, комплекс текисликларнинг $f^{-1}(A)$ прообразлар тақсимотини ўрганишдан иборат бўлиб, бу ерда $\mathbb{P}^q-$проектив фазо.

Қуйидаги тартиб функцияси Неванлинна назариясининг асосий характеристик функцияси ҳисобланади

$$T_f^{(k)}(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k},$$

бунда $B_t = \{|z| \le t\} - \mathbb{C}^n$ фазодаги шар, $\omega = dd^c \ln|w|^2$, $w = [w_0, w_1,..., w_q] \in \mathbb{P}^q$, ва $|w| = \left(|w_0|^2 + |w_1|^2 + ... + |w_q|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Бу ерда интеграл остида $\omega^k(f) \wedge \beta^{n-k} = \left(dd^c \ln|f(z)|^2\right)^k \wedge \beta^{n-k}$ гессианлардаги оператор турибди. Бизнинг мақсадимиз ушбу операторни $\left(dd^c u\right)^k \wedge \beta^{n-k}$ операторнинг фундаментал ечими бўлган $G_m(z)$ функциядан фойдаланиб алмаштиришдан иборат. Бешинчи бобнинг биринчи параграфида қуйидаги функциялар киритилган

$$T_f^{(k)}(r,m) = \int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{2n}{m}-1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \omega_0^{m-k} \wedge \beta^{n-m},$$

бу ерда $\omega_0 = dd^c G_m(z),\ 1 \le k \le m \le n$.

Мазкур параграфнинг асосий натижалари қуйидаги иккита теоремаларда ўз аксини топган

Теорема 17. *$f=[f_0, f_1,..., f_q]$, $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^q$ голоморф акслантириш берилган бўлсин. У ҳолда*

$$T_f^{(k)}(r,n) = T_f^{(k)}(r) = \int_0^r \frac{dt}{t^{2(n-k)+1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k},$$

$$T_f^{(k)}(r,m) = \left(\frac{n-m}{m}\right)^{m-k} \int_0^r \frac{dt}{t^{2n(1-k/m)-1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k},\ \ 1 \le k \le m < n$$

тенгликлар ўринли.

Теорема 18. $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ голоморф акслантириш бўлсин. У ҳолда ҳар қандай $r>0,\ \alpha>1,\ 1\le k\le m<n$ сонлар учун қуйидаги баҳолаш ўринли бўлади:

$$T_f^{(k)}(r,m)\le Nr^{\frac{2(n-m)(k-1)}{m}}\left[\ln M_f(\alpha r)\right]^k,$$

Бу ерда $N=N(k,m,n,\alpha)-$ ўзгармас сон, $M_f(r)=\max\left\{\sqrt{1+|f(z)|^2}:|z|=r\right\}.$

Бешинчи бобнинг иккинчи параграфида қуйидаги Дирихле масаласи қаралади:

$$\left(dd^cu\right)^m\wedge\beta^{n-m}=0,\ u\big|_{\partial D}=\varphi(\xi),\ u\in m-sh(D)\bigcap C(D).$$

Иккинчи бобда таъкидлаб ўтилганларга асосан, Дирихле масаласининг ечими максимал $m-sh$ функция бўлишлиги келиб чиқади. Демак, қаралаётган масала чегаравий қийматлари берилган максимал $m-sh$ функцияни излашдан иборат бўлади. Бу муносабатга кўра масала бевосита максимал $m-wsh$ функцияларни ўрганишнинг давомидан иборат.

Дирихле масаласини умумий $m>1$ бўлган ҳолда ечиш учун D соҳага қўшимча табиий шартлар қўйилади. Бир қатор ишларда бу шартлар соҳа чегараси ∂D га ўтказилган уринма текисликлар билан боғлиқ. Ли, Блоцкий, Динев ва Колодзей ишларида эса бу шартлар соҳа чегарасини аниқловчи икки марта силлиқ ρ, $\partial D=\{\rho(z)=0\}$ функция учун $dd^c\rho$ дифференциал форманинг хос қийматларига қўйилади. Ушбу қаралаётган диссертацияда D соҳадан фақат $m-sh$ функциялар билан боғлиқ равишда m-*регуляр* булиши талаб этилади: исталган $\xi\in\partial D$ чегаравий нуқтада $m-sh$ функциялар синфига тегишли барьер (чўққи) мавжуд.

Таъриф 6. Агар чегараланган $D\subset\mathbb{C}^n$ соҳанинг ихтиёрий $\xi^0\in\partial D$ чегаравий нуқтасидада чўққи-функция $b(z)\in m-sh(D)\bigcap C\left(\overline{D}\right)$: $b\left(\xi^0\right)=0$, $b|_{\overline{D}\setminus\{\xi^0\}}<0$ мавжуд бўлса, у ҳолда D соҳа $m-$*регуляр* соҳа дейилади.

Мазкур параграфнинг асосий натижаси қуйидагидан иборат.

Теорема 19. *Агар $D\subset\mathbb{C}^n-$ соҳа m-регуляр бўлса, у ҳолда бу соҳада Дирихле масаласи ихтиёрий $\varphi(\xi)\in C(\partial D)$ чегаравий берилган функция учун ягона ечимга эга:* $\left(dd^cu\right)^m\wedge\beta^{n-m}=0$, $u\in m-sh(D)\bigcap C\left(\overline{D}\right)$, $u\big|_{\partial D}\equiv\varphi(\xi)$.

Диссертациянинг бешинчи боби учинчи параграфида субгармоник функцияларнинг четлатилиши мумкин бўлган махсусликларини ўрганилган. Субгармоник функциялар эллиптик бўлган Лаплас операторининг $\Delta u\ge 0$ субечими эканидан биз коэффициентлари силлиқ бўлган исталган $m\ge 2$ тартибли

$$P(D)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha D^\alpha,\quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}},\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),\ |\alpha|=|\alpha_1|+|\alpha_2|+...+|\alpha_n|,$$

эллиптик дифференциал операторнинг субечимини қараб, масалани анча умумийроқ ҳолатда ўрганамиз.

$P-sh(G)$ орқали $G\subset\mathbb{R}^n$ соҳада аниқланган юқоридан ярим узлуксиз $P(D)$ эллиптик дифференциал операторнинг умумлашган маънода субечими $P(D)u(x)\geq 0$ синфини белгилаймиз ва $u(x)\in P-sh(G)$ функцияларни $P-$*субгармоник функциялар* деб атаймиз. Шуни таъкидлаб ўтамизки, агар $P(D)=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ бўлса, у ҳолда $P-sh(G)$ синф субгармоник функциялар $sh(G)$ синфи билан устма-уст тушади.

Таъриф 7. G соҳанинг ёпиқ E қисм тўплами берилган бўлсин. Агар исталган $u(x)\in P-sh(G\setminus E)$ функция учун шундай $\tilde{u}(x)\in P-sh(G)$ функция топилиб, $\forall x\in G\setminus E$ учун $\tilde{u}(x)=u(x)$ тенглик бажарилса, E тўплам $P-sh(G\setminus E)$ синф учун *четлатиш мумкин бўлган махсус тўплам* дейилади.

Худди шу тарзда $P-sh(G\setminus E)\bigcap L_{p,loc}^k(G)$, $P-sh(G\setminus E)\bigcap L_{loc}^{\infty}(G)$ синфлар учун ҳам четлатиш мумкин бўлган махсус тўплам тушунчасини киритиш мумкин. Шуни эслатиб ўтамизки, бу ерда $L_p^k(G)-k$ марта дифференциалланувчи ва k –тартибли

$$D^{\alpha}=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}},\quad |\alpha|=|\alpha_1|+|\alpha_2|+...+|\alpha_n|=k,$$

хусусий ҳосилалар $L_p(G)$ фазога тегишли бўлган функциялар синфини билдиради.

Гармоник ва субгармоник функцияларнинг махсусликлари кўпгина муаллифлар томонидан ўрганилган. Уларга кўра, $E\subset G$ ёпиқ тўплам юқоридан чегараланган субгармоник функциялар учун четлатиш мумкин бўлган махсус тўплам бўлиши учун унинг сиғими $C(E)=0$ бўлиши зарур ва етарлидир. Хаусдорф ўлчовлари орқали Lip_{α} синфидан олинган гармоник функцияларнинг махсусликларини четлатиш мумкин бўлиш шартлари Л.Карлесон ($0<\alpha\leq 1$ бўлган ҳолда) ва Е.П.Долженко ($1<\alpha\leq 2$ бўлган холат учун) томонидан ўрганилган. А.Садуллаев ва Ж.Ярметов ишларида Lip_{α} $(0<\alpha\leq 2)$ синфдан олинган субгармоник функцияларнинг махсусликлари Хаусдорф ўлчовлари ёрдамида тадқиқ этилган. $L_p^k(G)$ синфдан олинган субгармоник функцияларнинг четлатиш мумкин бўлган махсусликлари Б.Абдуллаев, С.Имомкулов ва Р.Харви ишларида ҳам ўрганилган.

Диссертацияда биз $C_{q,s}$*-сиғим* терминида $P-sh(G\setminus E)\bigcap L_{p,loc}^k(G)$ синфнинг четлатиш мукин бўлган махсусликлари хақида бир қатор теореамларни исбот қилиб, Харви-Полкинг теоремасини умулаштиришга муваффақ бўламиз.

Теорема 20. $G \subset R^n, n \geq 2$ *соҳанинг* E *компакт қисм тўплами* $u(x) \in P - sh(G) \bigcap L^k_{p,loc}(G)$ *функция учун четлатиш мумкин бўлган махсуслик бўлиши учун* $C_{q,m-k}(E) = 0$ *тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарли, бунда* $P(D) -$*эллиптик оператор тартиби* $m \geq 2,\ 0 < m - k < n,\ \dfrac{n}{n-m+k} \leq p < +\infty,$ $q = \dfrac{p}{p-1}$.

Агар $p < \dfrac{n}{n-m+k}$ ($n = m - k$ бўлганда $p = +\infty$) бўлса, у ҳолда ҳаттоки бир нуқтали тўпламлар ҳам четлатиш мумкин бўлган махсуслик бўлолмаслиги қуйидаги мисолда кўринади: $\Phi(x, y) - P(D)$ эллитик оперторнинг фундаментал ечими бўлса, $\Phi(x, y_0)$ функция учун $y_0 \in G -$ махсус нуқта.

Теорема 20 да силлиқлик даражаси $k < m$ бўлишини талаб этади. $k = m$ бўлган ҳолат учун қуйидагига эгамиз.

Теорема 21. $G \subset R^n, n \geq 2$ *соҳанинг* E *компакт қисм тўплами* $u(x) \in P - sh(G) \bigcap L^m_{p,loc}(G)$ *функция учун четлатиш мумкин бўлган махсуслик бўлиши учун унинг Лебег ўлчови* $m_n(E) = 0$ *бўлиши зарур ва етарлидир*.

Энди силлиқлик даражаси $k > m$ бўлган холни қарайлик.

Теорема 22. $G \subset R^n, n \geq 2$ *соҳанинг* E *компакт қисм тўплами* $u(x) \in P - sh(G) \bigcap L^k_{p,loc}(G), k > m,$ *функция учун четлатиш мумкин бўлган махсуслик бўлиши учун унинг* G *соҳанинг ҳеч қаерида зич бўлмаслиги зарур ва етарлидир*.

Диссертациянинг бешинчи боби тўртинчи параграфи бутун $\mathbb{C}^n$ фазода $m-$субгармоник бўлган функциялар ва Грин функциясини $m-$қавариқ геометрияга тадбиқига бағишланади. $m - sh\left(\mathbb{C}^n\right)$ синфда Грин функцияси экстремал функцияларга ўхшаш тарзда аниқланади

$$V_m\left(z, E\right) = \sup\left\{u\left(z\right) \in m - sh(\mathbb{C}^n) : u\big|_E < -1, u(z) < 0, \forall z \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

$V_m\left(z, K\right)$ Грин функцияси геометрияда, ночизиқли дифференциал тенгламалар назариясида ва $m-$субгармоник функциялар назариясида муҳим ўрин тутган $m-$қавариқ қобиқларни ўрганишда муҳим аҳамият касб этади.

Таъриф 8. $K \subset \mathbb{C}^n$ компакт учун ушбу

$$\hat{K}_m = \left\{z \in \mathbb{C}^n : u\left(z\right) \leq \|u\|_K \ \ \forall u \in msh\left(\mathbb{C}^n\right)\right\}$$

тўпламга K компактнинг *$m-$қавариқ қобиғи* дейилади. K компакт учун $\hat{K}_m = K$ тенглик бажарилса, у ҳолда у *$m-$қавариқ компакт* дейилади.

$\hat{K}_m$ тўпламлар $\mathbb{C}^n$ фазода компакт тўплам бўлиши кўриниб турибди ва $\hat{K}_n \supset \hat{K}_{n-1} \supset ... \supset \hat{K}_1 \supset K$ муносабат бажарилади. Бундан ташқари $\hat{K}_n$ тўплам

K нинг полиномиал қавариқ қобиғи билан устма-уст тушади. $\hat{K}_1 -$ эса $\mathbb{C}^n \setminus K$ очиқ тўпламнинг чеараланмаган боғламли компонентаси билан устма-уст тушади. Ушбу параграфнинг асосий натижаси қуйидагидир.

Теорема 23. *Ихтиёрий* $K \subset \mathbb{C}^n$ *компакт учун унинг* $\hat{K}_m$ *қобиғи* $\{V_m(z,K) = -1\}$ *тўплам билан устма-уст тушади:* $\hat{K}_m = \{V_m(z,K) = -1\}$. *Бундан ташқари, Грин функцияси учун* $V_m^*(z,K) \equiv V_m^*(z,\hat{K}_m)$ *тенглик ўринли.*

Бешинчи бобнинг бешинчи параграфида биз $\left(dd^c u\right)^m \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m}$ операторни ихтиёрий (нафақат чегараланган) $m-sh$ функциялар синфида аниқлаймиз. Иккинчи ва учинчи бобларда биз $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ операторни фақат чегараланган $m-sh$ функциялар синфида аниқладик. Бу ерда биз $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ операторни аниқлашни А.Садуллаев томонидан Монж-Ампер операторини плюрисубгармоник функциялар синфида аниқланишига яқин бўлган бир усулини таклиф этамиз.

$u(z) \in m-sh(D)$ функция учун $u_a = \ln(\exp u + a), a > 0$ функцияни аниқлаб оламиз. Бу функциянинг $\left(dd^c u_a\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ гессиан оператори қуйидаги кўринишда тасвирланади

$$\left(dd^c u_a\right)^m \wedge \beta^{n-m} = \frac{1}{(v+a)^{m+1}}\omega_1 \wedge \beta^{n-m} + \frac{a}{(v+a)^{m+1}}\omega_2 \wedge \beta^{n-m},$$

Бу ерда $\nu = \exp u$ ва $\omega_1, \omega_2 - (m,m)$ бидаражали мусбат оқимлар. Ушбу

$$\left(dd^c u\right)_1^m \wedge \beta^{n-m} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{(v+a)^{m+1}}\omega_1 \wedge \beta^{n-m} = \frac{1}{v^{m+1}}\omega_1 \wedge \beta^{n-m}$$

лимит $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ ни $S = \{u = -\infty\}$ махсус тўпламидан ташқарида ифода этади ва агар $\left(dd^c u\right)_2^m \wedge \beta^{n-m} = \lim\limits_{a\to 0}\dfrac{a}{(v+a)^{m+1}}\omega_2 \wedge \beta^{n-m}$ суст лимит умумлашган функция сифатида мавжуд бўлса, у ҳолда бу лимит $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ ни S да ифода этади, $\operatorname{supp}\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} \subset S$.

Теорема 24. *Агар* $u-$*локал чегараланган функция бўлса, у ҳолда* $\left(dd^c u\right)_2^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ *бўлиб,* $\left(dd^c u\right)_1^m \wedge \beta^{n-m}$ *ифода* $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ *билан устма-уст тушади. Бундан ташқари,* u *функция фақат ва фақат* $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ *тенглик бажарилгандагина максимал бўлади.*

Бешинчи бобнинг олтинчи параграфида биз $m-wsh$ функциялар назариясини плюригармоник функцияларга баъзи татбиқларини кўрсатиб ўтамиз.

Лелон теоремаси. *Агар* $u(z)$ *функция бир вақтда гармоник, яъни.* $\Delta u = 0$ *ва плюрисубгармоник, яъни* $dd^c u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \overline{z}_j} dz_i \wedge d\,\overline{z}_j \geq 0$ *бўлса, у ҳолда у плюригармоник бўлади, яъни* $dd^c u = 0$.

Мазкур параграфда Лелон теоремасининг $m - wsh$ функциялар синфидаги аналоги исботланган.

Теорема 25. *Агар* $u(z)$ *функция бир вақтда гармоник ва кучсиз* $m-$*субгармоник,* $1 < m \leq n$*, бўлса, у ҳолда плюригармоник бўлади.*

ХУЛОСА

1. Диссертацияда классик ва комплекс потенциаллар назариясини ўз ичига олган гессиан операторига асосланган потенциаллар назариясининг тўлиқ асослари келтирилган.

2. m-субгармоник функциялар супремуми m-субгармоник бўлиши ва m-субгармоник функцияларни комплекс гипертекисликлар устидаги қисқартмаси (m-1)-субгармоник функция бўлиши исботланганлигини таъкидлаш лозим.

3. m-субгармоник функциялар синфида конденсатор сиғими тушунчаси киритилган ва унинг бир қатор муҳим хоссалари исбот қилинганлигини қайд этиш мумкин.

4. m-субгармоник функцияларнинг квазузлуксизлиги ва уларнинг солиштириш принципи исбот қилинганлигини таъкидлаш мумкин.

5. Стандарт аппроксимация учун оқимларнинг яқинлашиши ва m-субгармоник функциялар синфида потенциаллар назариясининг бошқа фундаментал теоремалари исботланган.

6. Кучсиз m-субгармоник функциялар синфи аниқланган ва бу синфнинг қатор потенциал хоссалари исботланган.

7. m-субгармоник функцияларни Неванлинна назарияси, қавариқ геометрия, плюригармоник функциялар назариясида тадбиқ этилиши усуллари ишлаб чиқилган. Хусусан, Неванлинна назариясида – характеристик функцияни баҳолашда, қавариқ геометрияда $m-$қавариқ қобиқларни ифодалашда, плюрисубгармоник функциялар назариясида функцияларнинг плюригармониклиги критерясини (Лелон теоремасини аналоги) исботлашда қўлланилганлигини таъкидлаш мумкин.

Диссертация тадқиқотида асос солинган $m - sh$ функциялар синфида потенциаллар назарияси янги илмий йўналиш бўлиб, бу назария Неванлинна назариясида, комплекс проектив фазоларда, ночизиқли эллиптик тенгламалар назарияси ва бошқа соҳаларда муҳим татбиқларга эга.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ 16.07.2013.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБДУЛЛАЕВ БАХРОМ ИСМОИЛОВИЧ

ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ НА m-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

01.01.01 – Математический анализ
(физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Ташкент – 2016

Тема докторской диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № 30.09.2014/B2014.5.FM119.

Докторская диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Садуллаев Азимбай** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Кружилин Николай Георгиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Ганиходжаев Расул Набиевич доктор физико-математических наук, профессор
	Джалилов Ахтам Абдурахманович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Сибирский федеральный университет**

Защита диссертации состоится «24» марта 2016 года в 14-00 часов на заседании Научного совета 16.07.2013.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998-71) 227-12-24, факс: (+998-71) 246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz)

С докторской диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №___________). Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+998-71) 246-02-24.

Автореферат диссертации разослан «18» февраля 2016 года.
(протокол рассылки №________ от «18» февраля 2016 года).

А.А.Азамов
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

А.Х.Худойбердиев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени доктора наук, к.ф.-м.н.

Ю.Х.Эшкабилов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н.

Введение (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Классическая теория потенциала строится на основе оператора Лапласа и класса субгармонических функций. Построенная в 80-х годах прошлого века теория плюрипотенциала связана с нелинейным оператором Монжа-Ампера и плюрисубгармоническими функциями. Теория плюрипотенциала достаточно интенсивно развивается и имеет многочисленные приложения в геометрии многообразий, в теории относительности Эйнштейна, в частности, в доказательстве существования метрики Эйнштейна и в теории дифференциальных уравнений с частными производными. Естественно, возникает потребность изучения своеобразных расширений класса плюрисубгармонических функций и построение теории потенциала для таких расширений является актуальным направлением комплексного анализа.

Для построения теории, охватыващей как классическую теорию потенциала, так и теорию плюрипотенциала, ожидалось использование оператора в гессианах, который обобщает как оператор Лапласа, так и нелинейный оператор Монжа-Ампера. Однако, до недавних пор не был известен класс функций, на который опирается ожидаемая теория потенциала. При изучении задачи Дирихле для уравнения в гессианах был введен класс m-субгармонических функций, который оказался подходящим классом построения теории потенциала в классе m-субгармонических функций, играет такую же роль в решении уравнении в гессианах, что и класс плюрисубгармонических функций для уравнения Монжа-Ампера. Поэтому, важное значения имеет дальнейшее глубокое исследование класса m-субгармонических функций, а также класса слабо m-субгармонических функций, в частности, установление потенциально-емкостных свойств этих классов.

Актуальность научного направления диссертации характеризуется еще тем, что в диссертации обосновывается теория потенциала, базирующаяся на операторах в гессианах, разрабатывается метод решения задачи Дирихле в классе m-субгармонических и слабо m-субгармонических функций, доказывается m-субгармоничность супремума m-субгармонических функций и (m-1)−субгармоничность сужения m-субгармонических функций на гиперплоскости. Определение субгармонических на комплексных плоскостях слабо m-субгармонических функций, доказательство ряд потенциально-емкостных их свойств, квазинепрерывность m-субгармонических функций, принцип сравнения, непрерывность оператора в гессианах для стандартных аппроксимаций и доказательства других фундаментальных теорем являются важными результатами диссертации.

Оценки основной характеристической функции теории Неванлинны, простое описание m-выпуклой оболочки в геометрии Римана, применение теории m-субгармонических функций в установлении критерия плюригармоничности (аналог теоремы Лелона) и в серии применений теорий m-субгармонических и слабо m-субгармонических функций в многомерном комплексном анализе указывают на актульность и востребованность темы диссертации.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Настоящая работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан № Ф4 «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации.

Комплексное уравнение в гессианах, теория m-субгармонических и слабо m-субгармонических функций, теория плюрипотенциала и геометрические вопросы многомерного комплексного анализа являются предметом исследований многих зарубежных научных центров. В частности, в университете Стони Брук, в Калифорнийском университете, в университете Индиана (США); в Математическом институте Ягеллонского университета (Польша); в университете Пауль Сабатье (Франция); в Готебургском университете (Швеция); в университете Любляна (Словения); в университете Пиза (Италия); в Московском государственном университете, в Математическом институте РАН, Сибирском федеральном университете (Россия) проводились интенсивные исследования в указанных направлениях комплексного анализа.

В создании новой теории потенциала, включающей в себе классическую теорию потенциала и плюрипотенциала, решены серии фундаментальных проблем в мировом масштабе. В частности: найдено успешное применение p-плюрисубгармонических функций к калибровочной геометрии (университет Стони Брук, США), исследовано решение задачи Дирихле в классе m-субгармонических функций (Математический институт Ягеллонского университета), m-субгармонические функции в проективном пространсте применены к Динамическим системам (университет Пауль Сабатье, Франция и Готебургский университет, Швеция), 2-плюрисубгармонические функции в трехмерном евклидовом пространстве нашли ряд приложений в теории минимальных поверхностей, исследованы решения уравнения в гессианах (университет Пиза, Италия).

На современном этапе проводится интенсивное изучение класса слабо mw-субгармонических функций, который имеет наглядную геометрическую характеристику и класса T-плюрисубгармонических функций относительно произвольного фиксированного потока T.

Степень изученности проблемы. Теория плюрипотенциала, связанная с нелинейным уравнением Монжа-Ампера и плюрисубгармоническими функциями, была построена в 80-годах прошлого века. Она была создана благодаря фундаментальным работам ученых США, Польши, Швеции, Франции и Узбекистана (E.Bedford, B.A.Taylor, J.Sicak, H-J.Bremermann, Ch.O.Kiselman, А.Зериахи, А.Садуллаев).

Польские математики (J.Sicak, S.Plesniak) в целях аппроксимации голоморфных функций полиномами ввели экстремальную функцию Грина и в ее терминах доказали многомерный аналог классической теории Бернштейна-Уолша. Далее, математиками Узбекистана и США

(А.Садуллаев, С.Имомкулов, E.Bedford, B.A.Taylor) были введены плюрисубгармоническая мера и емкости конденсатора и был доказан ряд основных теорем теории плюрипотенциала. Кроме того, были разработаны методы применения этой теории в многомерном комплексном анализе.

Теория m-субгармонических функций и комплексных уравнений в гессианах развивалась начиная с 2006 года, в основном, в работах польских и французских математиков (S.Dinev, Z.Blocki, S.Kolodziej, H-C.Lu).

Однако, в классе произвольной m-субгармонической функции оператор в гессианах не был определен. Для стандартной аппроксимации не была установлена сходимость последовательности потоков. Это сильно препятствовало созданию потенциальной теории в классе m-субгармонических функций. Кроме того, не был изучен класс слабо m-субгармонических функций, который тесно связан с голоморфными функциями многих переменных.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответсвии с планом под №3 научного исследования кафедры математики Ургенчского государственного университета по теме «Комплексная теория потенциала».

Целью исследования является построение теории потенциала на m-субгармонических функциях, доказательство потенциальных свойств слабо m-субгармонических функций и продемонстрирование приложений построенной теории потенциала к задачам многомерного комплексного и гармонического анализа.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

доказательство m-субгармоничности супремума в классе m-субгармонических функций, (m-1)-субгармоничности сужения на комплексные гиперплоскости;

введение понятия емкости конденсатора, доказательство квазинепрерывности, принципа сравнения для m-субгармонических функций;

доказательство сходимости потоков для стандартных аппроксимаций и фундаментальных теорем теории потенциала в классе m-субгармонических функций;

определение класса слабо m-субгармонических функций и доказательство потенциальных свойств этого класса;

разработка методов применения класса m-субгармонических функций в теории Неванлинны, в выпуклой геометрии, в теории плюригармонических функций.

Объект исследования. Нелинейный оператор Монжа-Ампера, оператор в гессианах, m-субгармонические и слабо m-субгармонические функции, m-полярные множества, емкость конденсатора.

Предмет исследования. Построение теории потенциала в классе m-субгармонических и слабо m-субгармонических функций.

Методы исследования. В диссертаци использовались методы теории потенциала и теории функций многих комплексных переменных.

Научная новизна исследования. Диссертационная работа является новым научным направлением. В ней:

доказаны m-субгармоничность супремума в классе m-субгармонических функций и (m-1)-субгармоничность сужения m-субгармонической функции на комплексную гиперплоскость;

дано полное построение теории потенциала, основанное на операторе гессиана, который включает в себя известную классическую и комплексную теорию потенциалов;

введены и изучены важные потенциально-емкостные свойства субгармонических на комплексных плоскостях слабо m-субгармонических функций;

разработана методика решения задачи Дирихле в классах m-субгармонических и слабо m-субгармонических функций;

доказаны квазинепрерывность и принцип сравнения для m-субгармонических функций;

в классе m-субгармонических функций доказана непрерывность операторов в гессианах и доказаны также другие фундаментальные теоремы теории потенциала.

Достоверность результатов исследования обосновывается определением класса m-субгармонических и слабо m-субгармонических функций, изучением потенциальных свойств этих классов, применением методов математического анализа, функционального анализа, математической физики и комплексного анализа к решению задачи Дирихле для уравнения в гессианах и строгими математическими доказательствами полученных результатов. Кроме того, публикации результатов диссертации в научных журналах с импакт-факторами, апробации работы в ведущих научных центрах, ссылки и обсуждения результатов автора в публикациях местных и зарубежных авторов также доказывают достоверность результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Доказательства первой и второй проблемы Лелона и ряда основных теорем теории потенциала в классе m-субгармонических функций, а также полное построение теории потенциала указывает на научную значимость исследований диссертации.

Научно-практическое значение работы характеризуется применениями емкости конденсатора к установлению квазинепрерывности m-субгармонических функций, к решению задачи Дирихле для уравнения в гессианах и к оценке основной характеристической функции Неванлинны.

Внедрение результатов исследования. Результаты исследования диссертации имеют следующие применения:

результаты, полученных по задачам Дирихле для нелинейного уравнения в гессианах применены для изучения изменения решений задачи Дирихле на изменяющихся графах в Проекте интернационального фонда Фольксвагена (Германия) «Нелинейные эвалюционные уравнения и транспортировка в метрических графах месоскопической физики» (справка

Олденбургского университета от 29 января 2016г). Существование и единственность решения задачи Дирихле позволяли установить, что в общем случае решения не является непрерывной для тонкого графа.

класс m-субгармонических функций во всем эвклидовом пространстве использовался в Проекте DMS-1401316 научного фонда США (справка Калифорнийского университета от 11 января 2016г). При помощи m-субгармонических функций во всем пространстве легко описываются выпуклые оболочки множеств. Это свойство m-субгармонических функций применено к изучению гипервыпуклых оболочек множеств.

Результаты по субрешений эллиптических операторов применены для устранения особых множеств аналитических, плюригармонических и гармонических функций, в установлении существования тонких и нетонких особых множеств на гранте ОТ-Ф1-116 «Аналитическое продолжение и геометрические вопросы в теории функций» (НУУз, 2007-2011, справка Комитета по координации развития науки и технологий от 1 февраля 2016г, № ФТК-02-13/60). Использование научных результатов позволило получить аналитическую структуру тонких особых множеств и дать оценку емкости пересечения голоморфных и плюригармонических функций.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на следующих международных и республиканских научных конференциях: «Аналитические функции многих комплексных переменных» (Красноярск, 2009 г.), международная конференция Американского математического общества, организованная университетом Невада (Лас-Вегасе, США, 2011 г.), «Школа-семинар по Анализу» (Калифорния, США, 2011г.), «Современные проблемы комплексного и функционального анализа» (Нукус 2012 г.), «Операторные алгебры и смежные проблемы» (Ташкент 2012 г.), «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий, Аль-Хорезми – 2012» (Ташкент 2012 г.), «Актуальные проблемы математического анализа» (Ургенч, 2012 г.), «Функциональный анализ и его приложения» (Астана 2012 г.), «Актуальные вопросы комплексного анализа» (Ташкент 2013 г.), «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» (Ташкент 2013 г.), «Школа-семинар по Анализу» (Калифорния, США, 2013 г.), «Международная конференция математиков США-Узбекистан» (Фуллертон, США, 2014 г.)

Настоящая работа регулярно обсуждалась на республиканских семинарах «Комплексная теория потенциала» Ургенчского государственного университета, на семинаре кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 25 научных работ, из них 6 в зарубежных, 8 в местных журналах и 11 в тезисах.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации 165 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цель и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации **(Основные принципы теории потенциала)** описываются главные принципы, методы классической и комплексной теории потенциала.

Во второй главе диссертации, названной **«*m* – *sh* функции и их свойства»**, приводится определение $m-$субгармонических функций и формулируется ряд утверждений, которые существенно используются в дальнейшем, при построении теории $m-$потенциалов.

Максимум двух субгармонических или плюрисубгармонических функций – снова субгармоническая или плюрисубгармоническая. Этот факт для таких функций доказывается очень просто, при помощи интегральных неравенств в их определении. Однако, ввиду отсутствия соответствующих интегральных неравенств, аналогичный факт для $m-$субгармонических функций не является тривиальным. Тем не менее, имеет место:

Теорема 1. *Максимум конечного числа $m-sh$ функций является $m-sh$ функцией*; *для произвольного локально равномерно ограниченного семейства $\{u_\theta\}\subset m-sh$ регуляризация $u^*(z)$ супремума $u(z)=\left\{\sup\limits_{\theta} u_\theta(z)\right\}$ тоже будет $m-sh$ функцией, причем множество $\{u(z)<u^*(z)\}-$ полярно в $\mathbb{C}^n\approx\mathbb{R}^{2n}$.*

Следующая теорема свойственна только для класса $m-sh$ функций.

Теорема 2. *Если $u\in m-sh$, то для любой комплексной гиперплоскости $\mathrm{P}\subset\mathbb{C}^n$ сужение $u|_{\mathrm{P}}$ является $(m-1)-sh$ функцией.*

Теорема имеет ряд практических приложений, в интегральных оценках, в установлении важного включения $m-sh(D)\subset m-wsh(D)$ и др.

Основной трудностью в построении теории потенциала, как и в теории плюрипотенциала, является определение оператора $\left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ в классе $m-$субгармонических функций и установлении сходимости $\left(dd^c u_j\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ для стандартных аппроксимаций $u_j\downarrow u$. Первый результат в этом направлении принадлежит З.Блоцкому, доказавшему сходимость

$$\left(dd^c u_j\right)^m\wedge\beta^{n-m}\mapsto\left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m}, \tag{1}$$

для непрерывной функции $u \in m-sh(D)\bigcap C(D)$. Однако, отсутствие такой сходимости для произвольной функции $u(z)$ и отсутствие приемлемого определения самого оператора $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$, являлись основными препятствиями в построении теории потенциала, в классе $m-$субгармонических функций.

Мы преодолеваем это препятствие, основываясь на следующую идею, предложенную А.Садуллаевым в построении теории плюрипотенциала:

1) сначала определяем оператор $\left(dd^c u\right)^k \wedge \beta^{n-m}$ и доказываем сходимость (1) в классе $m-sh(D)\bigcap C(D)$;

2) используя лишь класс $m-sh(D)\bigcap C(D)$ определяем $m-$емкость $C_m(E,D)$;

3) доказываем потенциальные свойства $m-$субгармонических функций (квазинепрерывность, принципы сравнения, вопросы максимальности произвольных $m-$субгармонических функций и др.);

4) решаем проблему сходимости положительных потоков $\left(dd^c u_j\right)^m \wedge \beta^{n-m} \mapsto \left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ для $u_j \downarrow u,\ u \in L^\infty_{loc}(D)\bigcap m-sh(D)$.

Свойства 3) и 4) $m-$субгармонических функций являются фундаментальной частью теории потенциала; они позволяют уже изучать основные объекты теории потенциала, такие как *m-полярные множества,* $\mathscr{P}_m$*- мера, максимальные* $m-$*субгармонические функции* и др.

Понятие $\mathscr{P}_m$- меры вводится аналогично понятию $\mathscr{P}$-меры в теории плюрипотенциала: пусть $E \subset D$ – некоторые подмножества усиленно $m-$выпуклой области $D \subset \mathbb{C}^n,\ 1 \le m \le n$.

Рассмотрим класс функций

$$\mathcal{U}(E,D) = \{u(z) \in m-sh(D) : u\big|_D \le 0,\ u\big|_E \le -1\}$$

и положим $\omega(z,E,D) = \sup\{u(z):\ u \in \mathcal{U}(E,D)\}$.

Определение 1. Регуляризация $\omega^*(z,E,D)$ называется $\mathscr{P}_m$*–мерой (*$m-$*субгармонической мерой)* множества E относительно области D.

$\mathscr{P}_m$–мера обладает многими свойствами, присущими $\mathscr{P}-$мерам. В частности, справедлива

Теорема 3. *Если компакт* $K \subset D$ $m-$*регулярный, то* $\mathscr{P}_m$*–мера* $\omega^*(z,K,D) \equiv \omega(z,K,D)$, *и является непрерывной функцией в* D, *причем* $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ *в* $D|K$.

Третья глава **(Емкость конденсатора)** посвящена изучению основного объекта теории потенциала, т.е. понятия емкости конденсатора и доказательству фундаментальных теорем теории.

Определение 2. Пусть K компакт в области $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда величина

$$C(K)=C_m(K,D)=$$

$$=\inf\left\{\int\limits_D \left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} : u\in m-sh\left(D\right)\bigcap C\left(D\right),\, u|_K \le -1,\, \varliminf_{z\to\partial D} u\left(z\right)\ge 0\right\}$$

называется емкостью ($m-$емкостью) конденсатора $\left(K,D\right)$. Емкость конденсатора обладает следующими стандартными свойствами:

– *емкость монотонна, т.е.* $C\left(E\right)\ge C\left(K\right)\ \forall E\supset K$;

– *для любого компакта* $K\subset D$ *имеет место равенство*

$$C\left(K\right)=\inf\left\{C\left(E\right): E\supset K, E-m \quad \textit{регулярное}\right\}.$$

Обычным образом определяется внешняя емкость, полагая $C^*\left(E\right)=\inf\left\{C\left(U\right): U\supset E-\textit{открытое}\right\}$, где емкость открытого множества $C\left(U\right)=\sup\left\{C\left(K\right): K\subset U\right\}=\sup\left\{C\left(K\right): K\subset U,\, K\ m-\textit{регулярный}\right\}$.

– *внешняя емкость* $C^*(E)$ *монотонна, т.е. если* $E_1\subset E_2$, *то* $C^*(E_1)\le C^*(E_2)$; *она счётно-субаддитивна, т.е.* $C^*\left(\bigcup_j E_j\right)\le \sum_j C^*(E_j)$, *и полунепрерывна слева, т.е.* $C\left(\bigcup_j U_j\right)=\lim_{j\to\infty} C(U_j)$ *для любой возрастающей последовательности открытых множеств* $U_j\subset U_{j+1}$.

– *для любого компакта* $K\subset D$ *его внешняя емкость* $C^*\left(K\right)=C\left(K\right)$.

Следующая формула очень важна для практического применения, ибо под интегралом ее правой части стоит бесконечно гладкая дифференциальная форма.

Теорема 4. *Если* $U\subset D$ *отрытое множество, то*

$$C(U)=\sup\left\{\int\limits_U \left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m} : u\in m-sh(D)\bigcap C^\infty(D),\, -1\le u<0\right\}.$$

Сформулируем две теоремы, которые являются ключевыми в доказательстве первой проблемы Лелона, имеют и самостоятельные значения.

Теорема 5. *Если* $E\subset D\subset G$, *то* $C^*(E,D)\ge C^*(E,G)$.

Теорема 6. *Если* $E\subset B(0,r)\subset\subset B$, $r<1$, *где* $B(0,r)=\left\{|z|<r\right\}-$ *шар радиуса* r, *а* $B=B(0,1)$, *то*

$$C^*(E,B)\le \frac{m!\mathscr{P}_m(E,B)}{(1-r)^m},$$

и наоборот, для любого фиксированного $r<1$ *существует константа* $M(r)>0$, *зависящая только от* r, *такая, что*

$$\mathscr{P}_m(E,B)\le M(r)\cdot C^*(E,B)\quad \forall E\subset B\left(0,r\right).$$

Здесь $\mathscr{P}_m(E,B)=-\int\limits_B \omega^*\left(z,E,B\right)dV$ *так называемая* $\mathscr{P}_m-$*емкость.*

Из этой теоремы очевидным образом вытекает следующее важное

Следствие. *Для любого* $E \subset\subset B(z^0,r)$ *емкость* $C^*\left(E,B\left(z^0,r\right)\right)=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathscr{P}_m\left(E,B\left(z^0,r\right)\right)=0$, *что эквивалентно тому, что* E *является* $m-$*полярным в* $B\left(z^0,r\right)$.

Аналогично полярным и плюриполярным множествам, множество $E\subset D\subset \mathbb{C}^n$ называется $m-$*полярным* в D, если существует функция $u(z)\in m-sh(D)$, $u(z)\not\equiv -\infty$, такая, что $u\big|_E=-\infty$. На практике удобно воспользоваться следующим понятием локальной $m-$полярности.

Определение 3. Множество $E\subset \mathbb{C}^n$ называется *локально* $m-$*полярным* множеством, если для каждой точки $z^0\in E$ существует шар $B\left(z^0,r\right)$ такой, что пересечение $E\bigcap B\left(z^0,r\right)$ является $m-$полярным в $B\left(z^0,r\right)$.

В классическом случае полярных множеств в $\mathbb{R}^n$ локально полярное множество будет полярным в $\mathbb{R}^n$. Йозефсон, используя аппроксимацию локально полярного множества алгебраическими множествами в $\mathbb{C}^n$, доказал глобальную плюриполярность локально плюриполярных множеств.

Введенная выше емкость конденсатора дает простое доказательство этого утверждения для любого $m-$полярного множества, $1\le m\le n$.

Теорема 7. *Локально* $m-$*полярное множество является* $m-$*полярным в* $\mathbb{C}^n$, *т.е. если* $E\subset \mathbb{C}^n$ *локально* $m-$*полярное, то существует функция* $u(z)\in m-sh(\mathbb{C}^n)$ *такая, что* $u\not\equiv -\infty$ $u\,|_E=-\infty$.

Следующая основная теорема, доказанная в диссертации, относится к квазинепрерывности $m-sh$ функций по емкости. Хорошо известное С-свойство Н.Н.Лузина утверждает, что всякая измеримая функция квазинепрерывна почти всюду по мере Лебега. Емкостные аналоги этой теоремы для субгармонических или плюрисубгармонических функций хорошо известны. Для $m-sh$ функций в области $D\subset \mathbb{C}^n$ имеет место квазинепрерывность почти всюду по $m-$емкости.

Теорема 8. $m-$*субгармоническая функция является квазинепрерывной почти всюду по* $m-$*емкости, т.е. если* $u\in m-sh\left(D\right)$, *то для любого* $\varepsilon>0$ *существует открытое множество* $U\subset D$ *такое, что* $C\left(U\right)<\varepsilon$ *и функция* u *непрерывна в* $D\setminus U$.

Доказательство этой теоремы основывается на интегральных оценках $m-sh$ функций, свойствах емкости конденсатора и теореме 8.

Используя аналог теоремы Картана, мы теперь сможем доказать следующую фундаментальную теорему теории потенциалов.

Теорема 9. *Пусть* $1\le m\le n$ *и* $u_0,u_1,\dots,u_m\in m-sh\left(D\right)\bigcap L^{\infty}_{loc}\left(D\right)$. *Тогда*

1) рекуррентное соотношение

$$\left[dd^cu_1\wedge\ldots\wedge dd^cu_k\wedge\beta^{n-m}\right](\omega)=\int u_k dd^cu_1\wedge\ldots\wedge dd^cu_{k-1}\wedge\beta^{n-m}\wedge dd^c\omega\,,$$

$$\omega \in F^{m-k,m-k}(D),\, k=1,\dots,m,$$

определяет положительный поток бистепени $(n-m+k, n-m+k)$;

2) для любых C^{∞} *- аппроксимаций* $u_{ij} \downarrow u_i$, $i=0,1,\dots,m,\ j \to \infty$ *имеет место сходимость потоков*

$$dd^c u_{1j} \wedge \dots \wedge dd^c u_{kj} \wedge \beta^{n-m} \mapsto dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_k \wedge \beta^{n-m},\ (k=1,\dots,m).$$

В параграфе 3.3 мы установим ряд важных свойств $\mathcal{P}_m$ - мер $\omega^*(z,E,D)$ и емкостей $C(E,D)$ для множеств $E \subset D$.

Теорема 10. *Для любого компакта* $K \subset D$ *его* $\mathcal{P}_m$ *- мера* $\omega^*(z,K,D)$ *удовлетворяет в* $D \setminus K$ *уравнению* $\left(dd^c \omega^*\right)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$.

Напомним, что во второй главе (теорема 2.11) аналогичный факт был доказан в случае $m-$регулярного компакта $K \subset D$.

Теорема 11. *Совокупность* $m-$ *иррегулярных точек компакта* K *имеет нулевую емкость:* $C(I_K)=0$, *т.е.* I_K *является* $m-$*полярным множеством.*

С теоремой 11 связана следующая теорема, которая дает также положительное решение *второй проблемы Лелона* для $m-sh$ функций.

Теорема 12. *Пусть* $\{u_j\}-$ *возрастающая последовательность* $m-sh$ *функций такая, что функция* $u(z)=\lim\limits_{j\to\infty} u_j(z)-$ *локально ограничена сверху. Тогда множество* $\sigma = \{u(z) < u^*(z)\}$, *где* u^*- *регуляризация* u, *является* $m-$*полярным в* D.

Следствие. *Для любого компакта* $K \subset D$ *его емкость* $C(K)$ *совпадает со следующим интегралом:*

$$C(K) = \int\limits_K (dd^c \omega(z,K,D))^m \wedge \beta^{n-m}.$$

В заключении главы 3 доказывается измеримость борелевских множеств по емкости $C(K) = C_m(K,D)$.

Теорема 13. *Произвольное аналитическое множество* $E \in \mathcal{A}$, *в частности, произвольное борелевское множество, измеримо по емкости* $C(E)$, *т.е.* $C_*(E) = C^*(E)$, *где*

$$C_*(E) = \sup\{C(K) : K \subset E - \textit{компакт}\},$$

$$C^*(E) = \inf\{C(U) : U \supset E - \textit{открытое}\}$$

внутренние и внешние емкости.

В четвертой главе диссертации, названной **«Субгармонические функции на комплексных плоскостях** $\mathbb{C}^n$», рассматривается класс слабо субгармонических функций ($m-wsh$), определяемый соотношением

$$dd^c u \wedge \left(dd^c |z^2|\right)^{n-m} \geq 0. \qquad (2)$$

Этот класс шире, чем класс psh функций, но строго содержится в классе sh функций. Класс $1-wsh$ функций совпадает с классом sh функций, и класс $n-wsh$ функций совпадает с классом psh функций. Кроме того, $m-sh$ функции являются в то время и $m-wsh$ функциями, т.е. $m-sh \subset m-wsh.$ Это обстоятельство не позволяет нам использовать оператор $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ и методы теории потенциала $m-sh$ функций для исследования потенциальных свойств $m-wsh$ функций. Более того, существуют дважды гладкие функции, удовлетворяющие условию (2), для которых оператор $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ не является положительным. Поэтому в диссертации для изучения класса $m-wsh$ функций используется другой подход, отличающийся от соответствующего метода исследования $m-sh$ функций.

$m-wsh$ функции имеют отличную геометрическую интерпретацию, что характеризуются субгармоничностью функций на любой $(n-m+1)$- мерной комплексной плоскости $\prod \subset \mathbb{C}^n$. В этом отношении $m-wsh$ функции удобны в применениях к многомерному комплексному анализу и геометрии, просты в изучении. Однако, как оказалось, для этого класса пока еще не найден подходящий оператор типа оператор Монжа-Ампера в классе плюрисубгармонических функций или оператор в гессианах в классе $m-sh$ функций. Именно из-за этого, в отличие от класса $m-sh$ функций полная теория потенциала в классе $m-wsh$ функций далека от завершения. Тем не менее, мы в этой главе доказываем ряд потенциальных свойств класса $m-wsh$. Другие геометрические свойства $m-wsh$ функций можно найти в работах Р.Харви и Б.Лаусона, Д.Жойса и М.Вербитского.

Определение 4. Функция $u(z) \in L^1_{loc}(D)$, заданная в области $D \subset \mathbb{C}^n$, называется $m-wsh$ *функцией* в D, $1 \le m \le n$, (субгармонической функцией на $(n-m+1)$- мерных комплексных плоскостях), если:

1) она полунепрерывна сверху в D, т.е.

$$\overline{\lim_{z \to z^0}} u(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{B(z^0,\varepsilon)} u(z) \le u(z^0);$$

2) поток $dd^c u \wedge (dd^c |z^2|)^{n-m} \ge 0$ в D, т.е.

$$dd^c u \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m}(\omega) = \int u\left(dd^c |z|^2\right)^{n-m} \wedge dd^c \omega \ge 0, \ \ \omega \in F^{(m-1,m-1)}, \ \omega \ge 0.$$

Класс таких функций обозначается через $m-wsh(D)$. Буква “w” в обозначении класса поставлена для того, чтобы различать этот класс от класса $m-sh$ функций. Следующая теорема дает нам геометрическую характеристику $m-wsh$ функций.

Теорема 14. *Полунепрерывная сверху функция* u, *заданная в области* $D \subset \mathbb{C}^n$ *является* $m-wsh$ *тогда и только тогда, когда для любой* $(n-m+1)$-*мерной комплексной плоскости* $\prod \subset \mathbb{C}^n$ *сужение*

$$u\big|_{\Pi} \in sh\left(\prod \cap D\right).$$

В доказательстве существенно используются свойства потоков и интегральные неравенства субгармонических функций.

Следствие. *$m-sh$ функция в области $D\subset\mathbb{C}^n$ является в то же время и $m-wsh$ функцией, $m-sh(D)\subset m-wsh(D)$.*

Далее, в диссертации вводятся $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}$ *−мера* и $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}$ −емкость подмножества $E\subset D$ области $D\subset\mathbb{C}^n$:

$$\omega(w,E,D)=\sup\left\{u(w):\ u\in m-wsh(D),\, u|_D<0,\ u|_E\le -1\right\},$$

$$\omega^*(z,E,D)=\overline{\lim_{w\to z}}\,\omega\left(w,E,D\right)$$

и

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\ (E,D)=-\int_D \omega^*(z,E,D)dV\,.$$

Тогда $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\ (E,D)\ge 0$ и $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D)=0$ тогда и только тогда, когда E является mw −полярным множеством в D. Кроме того, имеет место

Теорема 15. *Величина $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D)$ является монотонной и счетно-субаддитивной функцией множества: $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E_1,D)\le\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E_2,D\right)$ для $E_1\subset E_2$ и*

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j,D\right)\le\sum_{j=1}^{\infty}\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E_j,D\right).$$

Более того, для любого множества $E\subset D$ и любого $\varepsilon>0$ существует открытое множество $U\supset E$ такое, что $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(U,D\right)-\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E,D\right)<\varepsilon$.

Следствие 1. Для любой убывающей последовательности компактов $K_1\supset K_2\supset\ldots$ имеет место непрерывность справа

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}K_j,\ D\right)=\lim_{j\to\infty}\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(K_j,\ D\right),$$

и если $G_1\subset G_2\subset\ldots$ последовательности открытых множеств, то имеет место непрерывность слева

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}G_j,D\right)=\lim_{j\to\infty}\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(G_j,D\right).$$

Следствие 2. Функция множества $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D)$ обладает всеми свойствами измеримости Шоке и, следовательно, любые борелевские множества измеримы по емкости $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}$. Таким образом, если $E\subset D$ борелевское множество, то его внешние и внутренние емкости совпадают: $\mathscr{P}^*_{mw}\left(E,D\right)=\mathscr{P}_{\mathrm{mw}*}\left(E,D\right)$, где

$$\mathscr{P}^*_{mw}\left(E,D\right)=\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E,D\right),\ \mathscr{P}_{\mathrm{mw}*}\left(E,D\right)=\sup\left\{\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(K,D\right):K\subset E-\textit{компакт}\right\}.$$

Параграф 4.3 главы IV посвящен максимальным $m-wsh$ функциям и задаче Дирихле в классе $m-wsh$ функций.

Определение 5. Функция $u(z)\in m-wsh(D)$ называется *максимальной* в области $D\subset\mathbb{C}^n$, если для неё имеет место принцип максимума в классе

$m-wsh$ функций, т.е. если $v(z)\in m-wsh(D)$: $\lim\limits_{z\to\partial D}(u(z)-v(z))\geq 0,$ то $u(z)\geq v(z),\ \forall z\in D.$

Чтобы изучить максимальные функции, рассмотрим задачу Дирихле в классе $mw-$субгармонических функций. Аналогично задаче Дирихле в классе плюрисубгармонических функций, в классе $mw-$субгармонических функций задача Дирихле формулируется следующим образом: пусть $D\subset\mathbb{C}^n-$ограниченная область и $\varphi(\xi)\in C(\partial D)-$фиксированная функция. Найти непрерывную максимальную $m-wsh$ функцию $u(z)$: $u|_{\partial D}=\varphi$. Как обычно, решение ищется методом Перрона: положим

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}(\varphi,D)=\left\{u\in m-wsh(D):\overline{\lim_{z\to\partial D}}u(z)\leq\varphi\right\},$$

$$\omega(z)=\sup\left\{u(z):u\in\boldsymbol{\mathcal{U}}(\varphi,D)\right\}. \tag{3}$$

В классическом случае $m=1$ доказывается, что если область $D-$сильно $1-$выпуклая (регулярная), например с гладкой границей ∂D, то ω является решением задачи Дирихле, т.е. она гармонична в области D, непрерывна вплоть до границы и $\omega|_{\partial D}=\varphi$. Однако, также как в классе psh функций, для $m>1$ задача более сложная и существование решения требует дополнительных условий выпуклости на область D и на граничную функцию φ.

Теорема 16. *Если $D\subset\mathbb{C}^n-$строго mw-выпуклая область, то в ней разрешима задача Дирихле с любой граничной данной $\varphi\in C(\partial D)$. Точнее, функция $\omega(z)=\sup\left\{u(z):u\in\boldsymbol{\mathcal{U}}(\varphi,D)\right\}$ является максимальной непрерывной функцией, $\omega\in m-wsh(D)\cap C(\overline{D})$, причем $\lim\limits_{z\to\xi}\omega(z)=\varphi(\xi),\ \xi\in\partial D$.*

Для psh функций $(m=n)$ соотношение $\lim\limits_{z\to\xi}\omega(z)=\varphi(\xi)\ \ \forall\xi\in\partial D$ было доказано Бремерманом, а непрерывность $\omega\in C(\overline{D})-$ Уолшем.

Пятая глава диссетации **(Применения)** посвящена приложениям $m-sh$ функций и теории потенциала к задачам многомерного комплексного и гармонического анализа: к теории Неванлинны (§5.1), к изучению решения задачи Дирихле для уравнения $\left(dd^cu\right)^m\wedge\left(dd^c|z|^2\right)^{n-m}=0$ (§5.2), к устранению особых множеств потенциалов (§5.3). Параграф 5.4 посвящен $m-sh$ функциям во всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Здесь мы введем функцию Грина $V_m(z,K)$ компакта $K\subset\mathbb{C}^n$, изучим её основные свойства и установим связь $V_m(z,K)$ с $m-$выпуклой оболочкой компакта K. В параграфе 5.5 мы рассматриваем вопрос об определении оператора $\left(dd^cu\right)^m\wedge\left(dd^c|z|^2\right)^{n-m}$ в классе произвольных (не обязательно ограниченных) $m-sh$ функций. И наконец, в параграфе 5.6 мы изучаем пересечение гармонических и $m-wsh$ функций.

Как известно, основным объектом многомерной теории Неванлинны является изучение распределения прообразов $f^{-1}(A)$ голоморфного отображения $f=[f_0, f_1,..., f_q]:\mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^q, f_j \in \mathcal{O}\left(\mathbb{C}^n\right), f \neq 0$, комплексных плоскостей $A \subset \mathbb{P}^q$, где $\mathbb{P}^q$ – проективное пространство размерности $\dim A = q-k$, $1 \leq k \leq \min\{n, q\}$. Основной характеристической функцией теории Неванлинны является функция порядка

$$T_f^{(k)}(r)=\int_0^r \frac{dt}{t} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k},$$

где $B_t=\{|z| \leq t\}$ – шар в $\mathbb{C}^n$, $\omega = dd^c \ln|w|^2$, $w=[w_0, w_1,..., w_q] \in \mathbb{P}^q$, и $|w|=\left(|w_0|^2+|w_1|^2+...+|w_q|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Под интегралом здесь стоит оператор в гессианах $\omega^k(f) \wedge \beta^{n-k}=\left(dd^c \ln|f(z)|^2\right)^k \wedge \beta^{n-k}$. Нашей целью является преобразование этого оператора, используя фундаментальное решение $G_m(z)$ оператора $\left(dd^c u\right)^k \wedge \beta^{n-k}$: в §5.1 введены следующие функции

$$T_f^{(k)}(r,m)=\int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{2n}{m}-1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \omega_0^{m-k} \wedge \beta^{n-m},$$

где $\omega_0 = dd^c G_m(z), 1 \leq k \leq m \leq n$. Главными результатами параграфа являются

Теорема 17. *Пусть* $f=[f_0, f_1,..., f_q]$ *голоморфное отображение* $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^q$. *Тогда*

$$T_f^{(k)}(r,n)=T_f^{(k)}(r)=\int_0^r \frac{dt}{t^{2(n-k)+1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k},$$

$$T_f^{(k)}(r,m)=\left(\frac{n-m}{m}\right)^{m-k} \int_0^r \frac{dt}{t^{2n(1-k/m)-1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k}, \quad 1 \leq k \leq m < n.$$

Теорема 18. *Пусть* $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *голоморфное отображение. Тогда для всякого* $r>0$, $\alpha>1$, $1 \leq k \leq m < n$ *справедлива оценка*

$$T_f^{(k)}(r,m) \leq N r^{\frac{2(n-m)(k-1)}{m}} \left[\ln M_f(\alpha r)\right]^k,$$

где $N=N(k,m,n,\alpha)$ – *постоянная,* $M_f(r)=\max\left\{\sqrt{1+|f(z)|^2} : |z|=r\right\}$.

В параграфе 5.2 рассматривается следующая задача Дирихле:

$$\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}=0, u\big|_{\partial D}=\varphi(\xi), u \in m-sh(D) \cap C(D).$$

Из результатов главы II сразу следует, что решение задачи Дирихле будет максимальной $m-sh$ функцией, так что рассматриваемый вопрос не что иное, как нахождение максимальной $m-sh$ функции, с заданным граничным значением. В этом отношении она является непосредственным продолжением изучения максимальных $m-wsh$ функций.

Для решения задачи Дирихле в общем случае $m>1$, на область D накладываются дополнительные требования. В ряде работ эти требования относятся к касательным плоскостям к границе ∂D области D, а в работах Ли, Блоцкого, Динева и Колодзея эти требования даются в терминах собственных значений дифференциальной формы $dd^c\rho$, где ρ дважды гладкая определяющая функция границы, т.е. $\partial D=\{\rho(z)=0\}$. В нашей диссертации от области D мы требуем её m*-регулярности,* связанной с $m-sh$ функциями: в любой граничной точке $\xi\in\partial D$ существует барьер (пик) в классе $m-sh$ функций.

Определение 6. Ограниченная область $D\subset\mathbb{C}^n$ называется $m-$*регулярной* областью, если в любой граничной точке $\xi^0\in\partial D$ существует пик-функция $b(z)\in m-sh(D)\cap C(\overline{D})$: $b(\xi^0)=0$, $b|_{\overline{D}\setminus\{\xi^0\}}<0$.

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 19. *Если область* $D\subset\mathbb{C}^n$ *− является* m*-регулярной, то в ней задача Дирихле (5) имеет единственное решение с любой граничной данной* $\varphi(\xi)\in C(\partial D)$: $(dd^cu)^m\wedge\beta^{n-m}=0$, $u\in m-sh(D)\cap C(\overline{D})$, $u|_{\partial D}\equiv\varphi(\xi)$.

В параграфе § 5.3 диссертации мы изучаем устранимые особые множества субгармонических функций. Так как субгармонические функции являются субрешениями эллиптического оператора Лапласа, $\Delta u\geq 0$, то не сужая область изучения, мы рассматриваем задачу для общего случая, т.е. для субрешений произвольного эллиптического дифференциального оператора

$$P(D)=\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha D^\alpha,\quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),\ |\alpha|=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|,$$

порядка $m\geq 2$ с гладкими коэффициентами.

Обозначим через $P-sh(G)$ полунепрерывные сверху функции $u(x)$, являющиеся в то же время субрешением оператора $P(D)$: $P(D)u(x)\geq 0$. Функции $u(x)\in P-sh(G)$ назовем $P-$*субгармоническими функциями*. Заметим, что если $P(D)=\Delta-$ оператор Лапласа, то класс $P-sh(G)$ совпадает с классом субгармонических функций $sh(G)$.

Определение 7. Замкнутое подмножество E области G называется *устранимым особым множеством* для класса $P-sh(G\setminus E)$, если для любой функции $u(x)\in P-sh(G\setminus E)$ существует функция $\tilde{u}(x)\in P-sh(G)$ такая, что $\tilde{u}(x)=u(x)\ \forall x\in G\setminus E$.

Точно также можно определить устранимое особое множество относительно класса $P-sh(G\setminus E)\cap L^k_{p,loc}(G)$. Напомним, что здесь и ниже

$L_p^k(G)-$ пространство k раз дифференцируемых функций, причем частные производные $D^{\alpha}=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|=k,$ порядка k принадлежат пространству $L_p(G)$.

Особые множества гармонических и субгармонических функций изучены многими авторами. Так, замкнутое множество $E\subset G$ является устранимым для ограниченных сверху субгармонических функций тогда и только тогда, когда оно имеет нулевую емкость, $C(E)=0.$ В терминах Хаусдорфовой меры, условие устранения особого множества гармонических функций класса Lip_{α} изучены в работах Л.Карлесона (для $0<\alpha\le 1$) и Е.П.Долженко (для $1<\alpha\le 2$). В работе А.Садуллаева и Ж.Ярметова изучены особые множества субгармонических функций из класса Lip_{α} $(0<\alpha\le 2)$, также в терминах Хаусдорфовой меры. Устранимые особые множества субгармонических функций класса $L_p^k(G)$ изучены в работах Б.Абдуллаева и С.Имомкулова. В работах Р.Харви и Дж.Полкинга изучены устранимые особенности решений эллиптического уравнения $P(D)u=0$ из пространства $L_p(G)$.

В диссертации мы обобщаем теорему Харви-Полкинга, доказав несколько теорем об устранимых особых множествах класса $P-sh(G\setminus E)\bigcap L_p^k(G)$ в терминах $C_{q,s}$ *- емкости.*

Теорема 20. *Компактное подмножество Е области* $G\subset R^n$, $n\ge 2$, *является устранимым для функций* $u(x)\in P-sh(G)\bigcap L_p^k(G)$ *тогда и только тогда, когда* $C_{q,m-k}(E)=0$, *где* $P(D)-$*эллиптический оператор порядка* $m\ge 2,\ 0<m-k<n,\ \dfrac{n}{n-m+k}\le p<+\infty,\ q=\dfrac{p}{p-1}.$

Если $p<\dfrac{n}{n-m+k}$ $(p=+\infty$ *при* $n=m-k)$, то уже одноточечное множество не является устранимым, как это видно на примере функции $-\Phi(x,y_0)$, где $y_0\in G-$фиксированная точка, а $\Phi(x,y)-$фундаментальное решение эллиптического оператора $P(D)$.

В теореме 20 требуется, чтобы степень гладкости $k<m.$ Для $k=m$ имеет место

Теорема 21. *Компактное множество Е в области* $G\subset R^n$ *является устранимым для функций* $u(x)\in P-sh(G)\bigcap L_{p,loc}^m(G)$ *тогда и только тогда, когда лебегова мера* $m_n(E)=0$.

Теперь рассмотрим случай, когда степень гладкости $k>m$.

Теорема 22. *Компактное множество* E *в области* $G \subset R^n$ *является устранимым для функций* $u(x) \in P - sh(G) \bigcap L_p^k(G),\ k > m,\ p \geq 1,$ *тогда и только тогда, когда* E *нигде неплотное в* G *множество.*

Параграф 5.4 диссертации посвящен применениям $m-$субгармонических функций во всем пространстве $\mathbb{C}^n$ и функции Грина к $m-$выпуклой геометрии. *Функция Грина* в классе $m - sh(\mathbb{C}^n)$ функций определяется аналогично, как экстремальная функция

$$V_m(z,E) = \sup\left\{u(z) \in m - sh(\mathbb{C}^n) : u|_E < -1,\ u(z) < 0\ \ \forall z \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

Функция Грина $V_m(z,K)$ является удобным инструментом в исследовании $m-$выпуклых оболочек, которые играют важную роль в геометрии, в теории нелинейных дифференциальных уравнений и в теории $m-$субгармонических функций.

Определение 8. Для компакта $K \subset \mathbb{C}^n$ множество

$$\hat{K}_m = \left\{z \in \mathbb{C}^n : u(z) \leq \|u\|_K\ \ \forall u \in m - sh(\mathbb{C}^n)\right\}$$

называется $m-$*выпуклой* оболочкой компакта K. Компакт K называется $m-$*выпуклым, если* $\hat{K} = K$.

Ясно, что $\hat{K}_m$ является компактом в $\mathbb{C}^n$ и $\hat{K}_n \supset \hat{K}_{n-1} \supset ... \supset \hat{K}_1 \supset K,$ причем $\hat{K}_n$ совпадает с полиномиально выпуклой оболочкой K, а $\hat{K}_1 -$с дополнением неограниченной связной компоненты открытого множества $\mathbb{C}^n \setminus K$. Основным результатом параграфа является

Теорема 23. *Для любого компакта* $K \subset \mathbb{C}^n$ *его оболочка* $\hat{K}$ *совпадает с множеством* $\{V_m(z,K) = -1\}$: $\hat{K} = \{V_m(z,K) = -1\}$. *Более того, для функций Грина имеет место тождество* $V_m^*(z,K) \equiv V_m^*(z,\hat{K})$.

В параграфе 5.5 мы даем определение оператора $(dd^c u)^m \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m}$, в классе произвольных (не обязательно ограниченных) $m - sh$ функций. Отметим, что этот оператор во второй и третьих главах был определен только для ограниченных $m - sh$ функций. Здесь мы предлагаем один способ определения оператора $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$, который близок способу А.Садуллаева для определения оператора Монжа-Ампера, в классе плюрисубгармонических функций: для заданной произвольной функции $u(z) \in m - sh(D)$ рассматривается ограниченная функция $u_a = \ln(\exp u + a),\ a > 0.$ Её оператор гессиана $(dd^c u_a)^m \wedge \beta^{n-m}$ представляется в виде

$$(dd^c u_a)^m \wedge \beta^{n-m} = \frac{1}{(v+a)^{m+1}} \omega_1 \wedge \beta^{n-m} + \frac{a}{(v+a)^{m+1}} \omega_2 \wedge \beta^{n-m},$$

где $v = \exp u$ и $\omega_1, \omega_2 -$некоторые положительные потоки би-степени (m,m).

Предел $\left(dd^c u\right)_1^m \wedge \beta^{n-m} = \lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{(v+a)^{m+1}}\omega_1 \wedge \beta^{n-m} = \frac{1}{v^{m+1}}\omega_1 \wedge \beta^{n-m}$ характеризуют $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ вне сингулярного множества $S = \{u = -\infty\}$, и если слабый предел $\left(dd^c u\right)_2^m \wedge \beta^{n-m} = \lim\limits_{a\to 0}\frac{a}{(v+a)^{m+1}}\omega_2 \wedge \beta^{n-m}$ существует как обобщенная функция, то он характеризует $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ на S, $\operatorname{supp}\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} \subset S$.

Теорема 24. *Если функция $u -$ локально ограничена, то $\left(dd^c u\right)_2^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ и $\left(dd^c u\right)_1^m \wedge \beta^{n-m}$ совпадает с $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$. Кроме того, если $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$, то u является максимальной функцией.*

В параграфе 5.6 мы продемонстрируем некоторые приложения теории $m - wsh$ функций к плюригармоническим функциям. Известная теорема Лелона утверждает, что: *если функция $u(z)$ одновременно гармоническая, т.е. $\Delta u = 0$ и плюрисубгармоническая, т.е. $dd^c u = \sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j \geq 0$, то она является плюригармонической,* т.е. $dd^c u = 0$.

В рассматриваемом параграфе доказывается аналог теоремы Лелона в классе $m - wsh$ функций. Основным результатом является

Теорема 25. *Если функция $u(z)$ одновременно гармоническая и слабо $m -$субгармоническая, $1 < m \leq n$, то она является плюригармонической.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Дано полное построение теории потенциала, основанное на операторах в гессианах, которая включает в себе классическую и комплексную теорий потенциалов.
2. Доказаны m-субгармоничность супремума в классе m-субгармонических функций и (m-1)-субгармоничность сужения на комплексные гиперплоскости;
3. Введено понятие емкости конденсатора в классе m-субгармонических функций и доказан ряд важных свойств емкости;
4. Доказаны квазинепрерывности, принцип сравнения для m-субгармонических функций;
5. Доказаны сходимости потоков для стандартных аппроксимаций и ряд фундаментальных теорем теории потенциала в классе m-субгармонических функций;
6. Определен класс слабо m-субгармонических функций и доказаны некоторые потенциальные свойства этого класса;
7. Разработана методика применения класса m-субгармонических функций в многомерном комплексном анализе и в теории потенциала. В

частности, в теории Неванлинны – для оценки характеристической функции, в выпуклой геометрии – в описании m-выпуклых оболочек, в теории плюригармонических функций – в установлении плюригармоничности функций (аналог теоремы Лелона).

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении целей исследований диссертационной работы. Построенная в диссертации теория потенциала в классе m-субгармонических функций является новым научным направлением, которое имеет важные приложения в теории Неванлинна, в комплексном проективном пространстве, в теории нелинейных эллиптических уравнений и т.п.

SCIENTIFIC COUNCIL 16.07.2013.FM.01.01 ON AWARD OF SCIENTIFIC DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCES AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

URGENCH STATE UNIVERSITY

ABDULLAEV BAKHROM ISMAILOVICH

POTENTIAL THEORY ON m-SUBHARMONIC FUNCTIONS

01.01.01 – Mathematical Analysis

(Physical and Mathematical Sciences)

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION

Tashkent – 2016

The subject of doctoral dissertation is registered in the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan with number № 30.09.2014/B2014.5.FM119.

Doctoral dissertation is carried out at Urgench State University.

Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian and English) is placed on web page of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and information-educational portal «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Scientific consultant:	**Sadullaev Azimbay** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician
Official opponents:	**Kruzhilin Nikolay Georgievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Ganikhadjaev Rasul Nabievich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Djalilov Akhtam Abdurakhmanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Siberian Federal University**

Defense will take place «24» March 2016 year 14-00 at the meeting of Scientific Council number 16.07.2013.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871)227-12-24, fax: (99871)246-53-21, e-mail: nauka@nu.uz)

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №___________). Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24.

Abstract of dissertation sent out on «18» February 2016 year

(Mailing report № ___________on «18» February 2016 year)

A.A.Azamov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, Doctor of physical and mathematical science, professor

A.Kh.Khudoyberdiyev
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, Candidate physical and mathematical science

Y. Kh. Eshkabilov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, Doctor of physical and mathematical science

Introduction (summary of the doctoral dissertation)

Importance and relevance of the dissertation topic. Classical potential theory is based on Laplace operator and class of subharmonic functions. Built in the 80s of last century, the pluripotential theoryis related with nonlinear Monge-Ampere operator and plurisubharmonic functions. The pluripotential theory is intensively developing and has a numerous applications in the geometry of manifolds, in Einstein’s theory of relativity, in particular, to prove the existence of Einstein metrics in the theory of PDE. Naturally, there is a need to study the original extension of the class of plurisubharmonic functions and construction of potential theory for such extensions is actual direction of the complex analysis.

The class of plurisubharmonic functions is a subclass of subharmonic functions. It is naturally to study original extensions of the class of plurisubharmonic functions and construction of potential theory for such extensions.

To construct a theory which covers both classical potential theory and pluripotential theory it was expected using operators in hessians which generalize both Laplace operator and nonlinear Monge-Ampere operator. However, it was not known until recently a class of functions which expected potential theory will based on. In studying Dirichlet problem for equation in hessians was introduced a notion of class of m-subharmonic functions which was suitable class for constructing potential theory, it plays same role in the solution of equations in hessians as the class of plurisubharmonic functions for Monge-Ampere equation. Therefore, it is important deep investigation of the class of m-subharmonic functions, also the class of weakly m-subharmonic functions, in particular, establishment of potential-capacity properties of these classes.

The relevance of the scientific direction of the dissertation is also characterized by the fact that, in the dissertation justified the potential theory, which based on the operators in hessians, developed a method of solution of Dirichlet problem in the class of m-subharmonic and weakly m-subharmonic functions, proved m-subharmonicity of supremum of m-subharmonic functions and (m-1) subharmonicity of restriction of m-subharmonic functions on the hyperplane. Definition of weakly m-subharmonic functions which subharmonic in complex planes, proof of their potential-capacity properties, quasi-continuity of m-subharmonic functions, comparison principle, continuity of operators in hessian for a standard approximations and proof of other fundamental theorems are important results of the dissertation.

The estimates of main characteristic functions of Nevanlinna’s theory, a simple description of m-convex hull in Riemann geometry, an application of the theory of m-subharmonic functions in establishing criteria of pluriharmonicity (analogue of Lelong’s theorem) and in series of applications of theories of m-subharmonic and weakly m-subharmonic functions in multidimensional complex analysis indicates importance and relevance of the dissertation topic.

Connection of research with priority areas of Science and Technology of the Republic of Uzbekistan. This dissertation was accomplished in accordance with the priority areas of development of Science and Technology of the Republic of Uzbekistan № F4 "Mathematics, Mechanics and Informatics".

A review of international research on the topic of the dissertation. Complex equation in hessians, theory of m-subharmonic and weakly m-subharmonic functions, pluripotential theory and geometric problems of complex analysis are the subject of research of many foreign scientific centers. In particular, in the University of Stony Brook, California State University Fullerton, Indiana University (USA); Mathematical Institute of the Jagiellonian University (Poland); Paul Sabatier University (France); University of Gothenburg (Sweden); University of Ljubljana (Slovenia); University of Pisa (Italy); Moscow State University, Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Siberian Federal University (Russia) carried out extensive research in these areas of complex analysis.

In constructing new potential theory which include both classical potential theory and pluripotential theory was solved a series of fundamental problems on a global scale: in particular, the application of p-plurisubharmonic functions to calibrated geometry was found (Stony Brook University, USA), the solution of Dirichlet problem in the class of m-subharmonic functions was investigated (Mathematical Institute of the Jagiellonian University Poland), m-subharmonic functions in projective space was applied to dynamical systems (Paul Sabatier University, France and University of Gothenburg, Sweden), a number of applications of 2-plurisubharmonic functions in 3-dimensional Euclidean space in the theory of minimal surfaces were found, the solution of equation in hessians was studied (University of Pisa, Italy).

At the present stage, the intensive study of the class of weakly mw-subharmonic functions which has clear geometric characteristics and T-plurisubharmonic functions relatively to arbitrary fixed currents T is going on.

Level of study of the problem. The pluripotential theory which connected with nonlinear Monge-Ampere equation and plurisubharmonic functions was built in 80s of last century. This theory was constructed due to fundamental results of scientists from USA, Poland, Sweden, France and Uzbekistan (E.Bedford, B.A.Taylor, J.Siciak, H-J.Bremermann, Ch.O.Kiselman, A.Zeriahi, A.Sadullaev).

Polish mathematicians (J.Siciak and S.Plesniak) for the purpose of approximation of holomorphic functions by polynomials introduced extremal Green’s function and in term of this function they proved multidimensional analogue of classical Bernstein-Walsh theory. Further, the notions of plurisubharmonic measure, condenser capacity were introduced, a series of fundamental results were obtained and the methods of application of this theory in a multidimensional complex analysis were developed by Uzbekistan and USA mathematicians (A.Sadullaev, S.Imomkulov, E.Bedford and A.Taylor).

The theory of m-subharmonicfunctions and complex equation in hessians started developing since 2006 in works of polish and french mathematicians (S.Dinev, Z.Blocki, S.Kolodjiej, H.-C.Lu).

However, the operator in hessians was not defined in the class of m-subharmonic functions. There was not established convergence of sequence of currents for a standard approximation. This greatly hampered to construct potential theory in the class of m-subharmonic functions. Moreover, the class of weakly m-subharmonic functions which closely connected with holomorphic functions of several variables was not studied.

Relation of the title of dissertationwith scientific research plans of home university. The research work was accomplished according to research plane No 3 titled “Complex potential theory” of the department of Mathematics of the Urgench State University.

Aim of research is constructing potential theory on m-subharmonic functions, proving potential properties of weakly m-subharmonic functions and demonstrating of applications of constructed theory to problems of multidimensional complex and harmonic analysis.

Research problems to be solved in this work are following:

proof of m-subharmonicity of supreme in the class of m-subharminic functions, (m-1)-subharmonicity of restriction on complex hyperplanes;

introduction of notion of condenser capacity, proof of quasicontinuity and comparing principle for m-subharmonic functions;

proof of convergence of currents for standard approximations and fundamental theorems of potential theory in the class of m-subharmonic functions;

definition of the class of weakly m-subharmonic functions and proof of potential properties of this class;

development of methods of applications of the class of m-subharmonic functions in the theory of Nevanlinna, in the convex geometry, in the theory of pluriharmonic functions.

Object of research. Nonlinear Monge-Ampere operator, operator in hessians, m-subharmonic and weakly m-subharmonic functions, m-polar sets, condenser capacity.

Subject of research. Construction of potential theory in the class of m-subharmonic and weakly m-subharmonic functions.

Methods of research. The methods of potential theory and theory of functions of several complex variables were used in the dissertation.

Scientific novelty of the research. The dissertation work is a new scientific direction. In it:

m-subharmonicity of supremum in the class of m-subharminic functions and (m-1)-subharmonicity of restriction on complex hyperplanes were proved;

A complete construction of potential theory based on hessian operator which includes well-known classical and complex potential theory was given;

Important potential-capacity properties of subharmonic on complex planes weakly m-subharmonic functions were introduced and studied;

The methods of solution of Dirichlet problem in the class of m-subharmonic and weakly m-subharmonnic functions was developed;

Quasicontinuity and comparing principle for m-subharmonic functions were proved;

Continuity of operators in hessians and other fundamental theorems of potential theory in the class of m-subharmonic functions were proved.

Accuracy of the results of research are justified by defining of the classes m-subharmonic and weakly m-subharmonic functions, studying potential properties of these classes, applying methods of mathematical analysis, functional analysis, mathematical physics and complex analysis to solving Dirichlet problems for equation in hessians and rigorous mathematical proofs of the obtained results. In addition, publication of the results of the dissertation in scientific journals with positive impact factor, approbation in the leading scientific centers, links and discussions of the results author in the publications of local and foreign authors also prove the accuracy of the results of the dissertation.

Scientific and practical value of research results. The proof of first and second problems of Lelon and a number of fundamental theorems of potential theory in the class of m-subharmonic, as well as complete construction of potential theory points to the scientific value of results of dissertation.

The applications of condenser capacity to establishing quasicontinuity of m-subharmonic functions, to solving Dirichlet problem for equation in hessians and to estimating main characteristic function of Nevanlinna points to practical value of the results of dissertation.

Implementation of research results. The research results of the dissertation have the following applications:

The results obtained for the Dirichlet problem for nonlinear equations in hessians used to study changes in the Dirichlet problem solutions to the changing graphs in the international Volkswagen Foundation (Germany), "Nonlinear evolutional equations and transport on metric graphs arising from mesoscopical physics" (certificate of University of Oldenburg, January 29, 2016) . The existence and uniqueness of solution of the Dirichlet problem allowes to establish, in general case the solution is not continuous for the thin graph.

The class of m-subharmonic functions in the whole Euclidean space has been used in the project DMS-1401316 of National Science Foundation (certificate of California State University, 11 January 2016). Using m-subharmonic functions one can easely describe the convex hulls of the sets in a whole space. This property of m-subharmonic functions was applied to study of hyperconvex hulls of sets in this project.

The results of subsolutions of elliptic operators applied for remove of singular sets of analytic, pluriharmonic and harmonic functions, to establish the existence of thin and non-thin singular sets in the grant ОТ-Ф1-116 "Analytic continuation and geometric problems in the theory of functions" (NUU, 2007-2011, certificate of the Committee for coordination Science and Technology, February 1, 2016, № ФТК-02-13/60). Using research results allowed obtaining an analytical structure of thin singular sets and estimating capacity of intersection of pluriharmonic holomorphic functions.

Approbation of research results. The main results of the dissertation are discussed in the following local and international conferences: "Analytic functions of several complex variables" (Krasnoyarsk, 2009), International Conference of the American Mathematical Society organized by the University of Nevada (Las Vegas, USA, 2011), “School-seminar on Analysis” (California, USA, 2011), "Modern Problems of complex and functional analysis" (Nukus, 2012), "Operator algebra and related problems" (Tashkent, 2012), "Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technology, Al-Kharizmi-2012" (Tashkent, 2012), "Actual problems of mathematical analysis" (Urgench, 2012), "Functional Analysis and Its Applications" (Astana, 2012), "Actual problems of complex analysis" (Tashkent, 2013), “School-seminar on Analysis” (California, USA, 2013), First International Conference of USA-Uzbekistan Scientists “Analysis and Mathematical Physics ” (Fullerton, USA, 2014).

The results of the dissertation periodically discussed at the scientific seminar namely "complex potential theory" of the Urgench State University and at the scientific seminar of the department of mathematical analysis of the National University of Uzbekistan.

Publication of the research results. On the topic of the dissertation published 25 scientific works: 6 in foreign journals, 8 local journals and 11 in abstracts of conferences.

The volume and structure of the dissertation. The dissertation consists: introduction, five chapters, conclusion and list of references. The total volume of the dissertation is 165 pages.

ABSTRACT OF THE DISSERTATION

In the introduction the relevance and importance of the dissertation topic is justified and defined accordance of dissertation topic to the research priority areas of development of Science and Technology of the Republic of Uzbekistan. Also reviewed foreign scientific researches on the dissertation topic, level of study of the problem, formulated the goal and objectives, as well as a subject of study, outlines the scientific novelty and practical results of the study substantiates the validity of the results reveals their theoretical and practical significance, given information on published works and the structure of the dissertation.

In the Chapter I of the dissertation (basic principles of potential theory) described the main principles and methods of classical and complex potential theory.

The Chapters II and III are backgrounds of the dissertation. Complete construction of the potential theory in the class of $m-$subharmonic functions is given in these chapters.

As we mentioned above, the classical theory is based on subharmonic functions and Laplace operator, a multi-dimensional pluripotential theory is based on plurisubharmonic functions and nonlinear Monge-Ampere equation $(dd^c u)^n$. $m-$potential theory based on $m-$subharmonic functions and complex operator in hessians $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}, \; 1 \le m \le n$ are given above mentioned chapters.

In the Chapter II of the dissertation named **“$m-sh$ functions and their properties”**a definition of $m-$subharmonic functions are given and formulated a series of statements which are essentially used in further to construct $m-$potential theory.

A maximum of two subharmonic or plurisubharmonic functions is subharmonic or plurisubharmonic.

This fact for such kind of functions is proved very easily, with the help of integral inequalities in their definition. However, in the absence of the corresponding integral inequalities for $m-sh$ functions similar fact is not trivial. Nevertheless, takes place

Theorem 1. *The maximum of finite number of $m-sh$ functions is $m-sh$ function; for arbitrary, locally uniformly bounded family of $\{u_\theta\}\subset m-sh$ functions, regularization of u - $u^*(z)$, supreme $u(z)=\left\{\sup\limits_{\theta} u_\theta(z)\right\}$ is also $m-sh$ function. That is the set $\{u(z)<u^*(z)\}$ is polar in $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$.*

A following theorem is characteristic only to the class of $m-sh$ functions.

Theorem 2. *If $u\in m-sh$, then for any complex hyperplane $\mathrm{P}\subset\mathbb{C}^n$ restriction $u|_{\mathrm{P}}$ is $(m-1)-sh$ function.*

The theorem has a number of practical applications; in integral estimation, embedding of $m-sh(D)\subset m-wsh(D)$ and others.

The main difficulty of construction of $m-$potential theory, as in pluripotential theory is to determine the operator $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ in the class of $m-$subharmonic functions and the establishment of convergence of $(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m}$ for standard approximations $u_j \downarrow u$. The first result in this area belongs to Z.Blotskiy, who proved convergence of

$$(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \mapsto (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m} \qquad (1)$$

for continuous functions. However, the absence of such convergence for an arbitrary $u(z)$ function and the lack of an acceptable definition of the operator $(dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$, is a main barriers in the construction of the potential theory in the class of $m-$subharmonic functions. We overcome these barriers using following ideas suggested by A.Sadullaev in construction of pluripotential theory:

1) At first, we define the operator $(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-m}$ and prove (1) in the class of $m-sh(D)\cap C(D)$;

2) Using the class $m-sh(D)\cap C(D)$ we define $m-$capacity $C_m(E,D)$;

3) We prove the potential properties of $m-$subharmonic functions (quasicontinuity, comparing principles, the questions of maximality of arbitrary $m-$subharmonic functions, etc.)

4) We solve the problem of the convergence of the positive currents $(dd^c u_j)^m \wedge \beta^{n-m} \mapsto (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ for $u_j \downarrow u,\ u\in L^\infty_{loc}(D)\cap m-sh(D)$.

The properties 3) and 4) of $m-$subharmonic functions are fundamental part of $m-$potential theory; they allow us to study a basic objects of the $m-$ potential theory, such as $m-$polar set, $\mathscr{P}_m$- measure, maximal $m-$subharmonic functions, and others.

A notion of $\mathscr{P}_m$- measure gives as similar as the notion of $\mathscr{P}$- measurein pluripotential theory: let $E\subset D$ be a some subset of strongly $m-$convex domain $D\subset\mathbb{C}^n$, $1\le m\le n$.

We consider a class of functions

$$\mathscr{U}(E,D)=\{u(z)\in m-sh(D): u\big|_D\le 0,\ u\big|_E\le -1\}$$

and we put

$$\omega(z,E,D)=\sup\{u(z):\ u\in\mathscr{U}(E,D)\}.$$

Definition 1. Regularization $\omega^*(z,E,D)$ is called $\mathscr{P}_m-$ measure ($m-$subharmonic measure) of the set E relatively to the domain D.

$\mathscr{P}_m$- measure has several properties inherent $\mathscr{P}$- measure. In particular, we have

Theorem 3. *If a compact set* $K\subset D$ *is* $m-$*regular, then* $\mathscr{P}_m$*–measure* $\omega^*(z,K,D)\equiv\omega(z,K,D)$ *and continuous function in D, that is* $\left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m}=0$.

The Chapter III is devoted to study of main objects of potential theory, i.e. the notion of condenser capacity and proving of fundamental theorems of the theory.

Definition 2. Let K be a compact set in $D\subset\mathbb{C}^n$. Then a value

$$C(K)=C_m(K,D)=$$

$$=\inf\left\{\int_D\left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m} : u\in m-sh\left(D\right)\cap C\left(D\right),\ u\,|_K\le -1,\ \varliminf_{z\to\partial D}u\left(z\right)\ge 0\right\}$$

is called condenser capacity ($m-$capacity) of condenser $\left(K,D\right)$.

The condenser capacity has following standard properties:

1. the capacity is monotonic, i.e. $C\left(E\right)\ge C\left(K\right)\ \forall E\supset K$;
2. for any compact set $K\subset D$ we have a equality

$$C\left(K\right)=\inf\left\{C\left(E\right):\ \ E\supset K,\ E\ is\ m-regular\right\}.$$

As usual we define an exterior capacity, putting $C^*\left(E\right)=\inf\left\{C\left(U\right): U\supset E-open\right\}$, where the capacity of open set $C\left(U\right)=\sup\left\{C\left(K\right): K\subset U\right\}=\sup\left\{C\left(K\right): K\subset U,\ K\ is\ m-regular\right\}$.

The exterior capacity $C^*(E)$ is monotonic, i.e. if $E_1\subset E_2$, then $C^*(E_1)\le C^*(E_2)$; it is countable subadditive, i.e. $C^*\left(\bigcup_j E_j\right)\le\sum_j C^*(E_j)$, and left semicontinuous, i.e. $C\left(\bigcup_j U_j\right)=\lim_{j\to\infty}C(U_j)$ for any increasing sequence of open sets $U_j\subset U_{j+1}$. For any compact set $K\subset D$ its exterior capacity $C^*\left(K\right)=C\left(K\right)$.

A following formula is very important for practical application, because its integrated part is infinitely smooth differential form.

Theorem 4. *If* $U \subset D$ *is open set, then*

$$C(U) = \sup\left\{ \int_U \left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} : u \in m - sh(D) \bigcap C^\infty(D),\ -1 \le u < 0 \right\}.$$

We formulate two theorems which are playing key role in proving of first Lelon's problem and have substantive value.

Theorem 5**.** *If* $E \subset D \subset G$*, then* $C^*(E,D) \ge C^*(E,G)$.

Theorem 6. *If* $E \subset B(0,r) \subset\subset B$, $r < 1$, *where* $B(0,r) = \{|z| < r\}$ *–is a ball with radius* r, $B = B(0,1)$, *then*

$$C^*(E,B) \le \frac{m!\mathscr{P}_m(E,B)}{(1-r)^m},$$

and inversely, for any fixed $r < 1$ *there exists a constant* $M(r) > 0$ *depends only on* r*, such that*

$$\mathscr{P}_m(E,B) \le M(r) \cdot C^*(E,B) \quad \forall E \subset B\left(0,r\right).$$

Here $\mathscr{P}_m(E,B) = -\int_B \omega^*\left(z,E,B\right)dV$ *is so called* $\mathscr{P}_m$ *–capacity.*

From this theorem obviously follows an important

Corollary. For any $E \subset\subset B(z^0,r)$ the capacity $C^*\left(E,B\left(z^0,r\right)\right) = 0$ if and only if when $\mathscr{P}_m\left(E,B\left(z^0,r\right)\right) = 0$, which is equivalent of that E is $m-$polar in $B\left(z^0,r\right)$.

By analogy of polar and pluripolar sets, a set $E \subset D \subset \mathbb{C}^n$ is called $m-$*polar in* D, if there exists a function $u(z) \in m - sh(D)$, $u(z) \not\equiv -\infty$, such that $u|_E = -\infty$. The following notion of locally $m-$polarity is convenient to use in practice.

Definition 3. A set $E \subset \mathbb{C}^n$ is called locally $m-$polar set, if for each point $z^0 \in E$ there exists a ball $B\left(z^0,r\right)$ such that, the intersection $E \bigcap B\left(z^0,r\right)$ is $m-$polar in $B\left(z^0,r\right)$.

In classical case of polar sets in $\mathbb{R}^n$, locally polar set will be polar set in $\mathbb{R}^n$. Using approximation of locally polar sets with algebraic sets in $\mathbb{C}^n$ Josephson proved globally pluripolarity of locally pluripolar sets.

Above introduced condenser capacity gives simple proof of this statement for any $m-$polar set, where $1 \le m \le n$.

Theorem 7. *Locally* $m-$*polar set is* $m-$*polar in* $\mathbb{C}^n$*, i.e. if* $E \subset \mathbb{C}^n$ *is locally* $m-$*polar, then there exists a function* $u(z) \in m - sh(\mathbb{C}^n)$ *such that* $u \not\equiv -\infty$ $u|_E = -\infty$.

A following main theorem proved in the dissertation concerns quasicontinuity of $m-$subharmonic functions over the capacity. Well-known C-property of N.N.Luzin conforms that any measurable function is quasicontinuous almost everywhere by Lebesgue measure. Capacity analogue of this theorem for subharmonic and plurisubharmonic functions is well-known. For $m-$subharmonic functions in $D\subset\mathbb{C}^n$, takes place quasicontinuity almost everywhere by $m-$capacity.

Theorem 8. *$m-$subharmonic function is quasicontinuous almost everywhere by $m-$capacity, i.e. if $u\in m-sh(D)$, then for any $\varepsilon>0$ there exists open set $U\subset D$ such that $C(U)<\varepsilon$ and the function u is continuous in $D\setminus U$.*

Proof of this theorem is based on integral estimates of $m-$subharmonic functions, properties of condenser capacity and theorem 3.1.

Using analogue of Cartan's theorem we can prove a following fundamental theorem of potential theory.

Theorem 9. *Let $1\le m\le n$ and $u_0,u_1,...,u_m\in m-sh(D)\cap L^{\infty}_{loc}(D)$. Then*

1) recurrence correlation

$$\left[dd^cu_1\wedge...\wedge dd^cu_k\wedge\beta^{n-m}\right](\omega)=\int u_kdd^cu_1\wedge...\wedge dd^cu_{k-1}\wedge\beta^{n-m}\wedge dd^c\omega,$$

$$\omega\in F^{m-k,m-k}(D),k=1,...,m,$$

define positive currents of bidegree $(n-m+k,n-m+k)$;

2) for any C^{∞} approximation $u_{ij}\downarrow u_i$, $i=0,1,...,m$, $j\to\infty$ we have convergence of currents

$$dd^cu_{1j}\wedge...\wedge dd^cu_{kj}\wedge\beta^{n-m}\mapsto dd^cu_1\wedge...\wedge dd^cu_k\wedge\beta^{n-m},\ (k=1,...,m);$$

In paragraph 3.3 using theorems 3.5 and 3.6, we set a series of important properties of $\mathscr{P}_m$ - measure $\omega^*(z,E,D)$ and capacity $C(E,D)$ for the sets $E\subset D$.

Theorem 10. *For any compact set $K\subset D$ its $\mathscr{P}_m$- measure $\omega^*(z,K,D)$ satisfying of equation $\left(dd^c\omega^*\right)^m\wedge\beta^{n-m}=0$ in $D\setminus K$.*

We note that in Chapter II (theorem 2.11) analogical fact, in case $m-$regular compact set $K\subset D$ was proved.

Theorem 11**.** *A set of $m-$irregular points of compact set K has a zero capacity: $C(I_K)=0$, i.e. I_K is $m-$polar set.*

A following theorem has a connection with the theorem 3.8 which gives also a positive answer to the second problem of Lelon for $m-$subharmonic functions.

Theorem 12. *Let $\{u_j\}-$be an increasing sequence $m-$subharmonic functions such that a function $u(z)=\lim\limits_{j\to\infty}u_j(z)-$is locally bounded from above. Then a set $\sigma=\{u(z)<u^*(z)\}$, where $u^*-$is a regularization of u, is $m-$polar in D.*

Corollary. For any compact set $K\subset D$, its capacity $C(K)$ coincide with following integral:

$$C(K)=\int_K(dd^c\omega(z,K,D))^m\wedge\beta^{n-m}.$$

In the end of Chapter III we prove measurability of Borel sets by capacity $C(K)=C_m(K,D)$.

Theorem 13**.** *An arbitrary analytic set* $E\in\mathcal{A}$*, in particular, an arbitrary Borel set is measureable by capacity* $C(E)$*, i.e..* $C_*(E)=C^*(E)$*, where*

$$C_*(E)=\sup\{C(K): K\subset E \text{ is a compact set}\},$$

$$C^*(E)=\inf\{C(U): U\supset E - is\, open\}$$

are interior and exterior capacities respectively.

In **Chapter IV** we consider a class of weakly $m-$subharmonic functions ($m-wsh$), defined by the relation

$$dd^c u\wedge\left(dd^c\left|z^2\right|\right)^{n-m}\geq 0. \qquad (2)$$

This class is wider than the class of plurisubharmonic functions, but it is strongly contained in the class of subharmonic functions. In addition, the $1-wsh$ class of functions coincides with the class of subharmonic functions and the class of $n-wsh$ functions coincides with the class of plurisubharmonic functions. Moreover, the $m-$subharmonic functions are simultaneously $m-wsh$ functions, i.e. $m-sh\subset m-wsh.$ This fact does not allow us to use the operator $\left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ and methods of potential theory of the $m-$subharmonic functions to study potential properties of weakly $m-$subharmonic functions. Moreover, there exists twice smooth functions satisfying the condition (2) for which the operator $\left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ is not positive. Therefore, in the dissertation, to study of class of weakly $m-$subharmonic functions used a different approach, different from the relevant method of studying $m-$subharmonic functions. The weakly $m-$subharmonicfunctions have excellent geometric interpretation; they are characterized by subharmonic in any $(n-m+1)$- dimensional complex plane $\Pi\subset\mathbb{C}^n$. Therefore, the weakly $m-$subharmonic functions are convenient to use in multidimensional complex analysis and geometry, easy to learn. However, as it turned out, for this class has not found the appropriate operators of Monge-Ampere in the class of plurisubharmonic functions or Hessian operator in the class of weakly $m-$subharmonic functions. Because of this, in contrast to the class of $m-$subharmonic functionspotential theory in the class $m-wsh$ is far from completion. Nevertheless, in this chapter, we prove several potential properties of this class. Other geometric properties of $m-wsh$ functions can be found in the works of R.Harvey and B.Lawson, D.Joyce and M.Verbitsky.

Definition 4. A function $u(z)\in L^1_{loc}(D)$, given in a domain $D\subset\mathbb{C}^n$ is called weakly $m-$subharmonic functions in $D,\ 1\leq m\leq n,$ (subharmonic function in $(n-m+1)$- dimensional complex planes), if:

1) it upper semi-continuous in D, i.e.

$$\overline{\lim_{z\to z^0}}\,u(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{B(z^0,\varepsilon)}u(z)\leq u(z^0);$$

2) a current $dd^c u \wedge (dd^c |z^2|)^{n-m} \geq 0$ in D, i.e.

$$dd^c u \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m}(\omega) = \int u\left(dd^c |z|^2\right)^{n-m} \wedge dd^c\omega \geq 0,\ \ \omega \in F^{(m-1,m-1)},\ \omega \geq 0.$$

The class of such functions is denoted by $m-wsh(D)$. The letter "w" in the notation of the class is set in order to distinguish that class from the class of $m-sh$ functions. The following theorem gives us a geometric characteristic of $m-wsh$ functions.

Theorem 14. *An upper semi-continuous function u, given in domain $D \subset \mathbb{C}^n$ is $m-wsh$ if and only if when for any $(n-m+1)$- dimensional complex plane $\prod \subset \mathbb{C}^n$ the restriction*

$$u\big|_{\prod} \in sh\left(\prod \cap D\right).$$

The proof is essentially used the properties of flows and integral inequality of subharmonic functions.

Corollary. $m-sh$ function in $D \subset \mathbb{C}^n$ is $m-wsh$ function at same time, i.e. $m-sh(D) \subset m-wsh(D)$.

Next we introduce a notions $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}-$ measure and $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}-$ capacity of subset $E \subset D$ of $D \subset \mathbb{C}^n$:

$$\omega(w,E,D) = \sup\left\{u(w):\ u \in m-wsh(D),\ u|_D < 0,\ u|_E \leq -1\right\},$$

$$\omega^*(z,E,D) = \overline{\lim_{w\to z}}\,\omega\left(w,E,D\right)$$

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\ (E,D) = -\int_D \omega^*(z,E,D)dV.$$

The $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\ (E,D) \geq 0$ is positive and it $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D) = 0$ if and only if when E is $mw-$polar set in D. Moreover, we have

Theorem 15. *A value $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D)$ is monotonic and countable subadditive set function: $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E_1,D) \leq \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E_2,D\right)$ for $E_1 \subset E_2$ and*

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, D\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E_j, D\right).$$

Moreover, for any set $E \subset D$ and for any $\varepsilon > 0$ there exists open set $U \supset E$ such that

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(U,D\right) - \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E,D\right) < \varepsilon.$$

Corollary 1. For any decreasing sequence of compact sets $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ the right continuity

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} K_j,\ D\right) = \lim_{j\to\infty} \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(K_j,\ D\right)$$

is true, and if $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ a sequence of open sets, then the left continuity

$$\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} G_j, D\right) = \lim_{j\to\infty} \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(G_j, D\right)$$

is true.

Corollary 2. A set function $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}(E,D)$ has all properties of Shoke's measurability and consequently, any Borel set is measurable by $\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}$ capacity. Thus, if $E \subset D$ is Borel set then its outer and inner capacities are coincides:

$$\mathscr{P}_{mw}^{*}\left(E,D\right) = \mathscr{P}_{\mathrm{mw}*}\left(E,D\right),$$

where

$\mathscr{P}_{mw}^{*}\left(E,D\right) = \mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(E,D\right),\ \mathscr{P}_{\mathrm{mw}*}\left(E,D\right) = \sup\left\{\mathscr{P}_{\mathrm{mw}}\left(K,D\right) : K \subset E \text{ } is \, compact \, set\right\}.$

Paragraph 4.3 of the Chapter IV is devoted maximal $m - wsh$ functions and Dirichlet problem in the class $m - wsh$ functions.

Definition 5. A function $u(z) \in m - wsh(D)$ is called maximal in $D \subset \mathbb{C}^n$, if the maximum principle in the class of $m - wsh$ functions is true for this function, i.e. if $v(z) \in m - wsh(D)$: $\underline{\lim}_{z\to\partial D}\left(u(z) - v(z)\right) \geq 0$, then $u(z) \geq v(z),\ \forall z \in D.$

In order to study maximal functions, we consider Dirichlet problem in the class $mw-$subharmonic functions. Analogically, in the class of plurisubharmonic functions the Dirichlet problem formulated in the class of $mw-$subharmonic functions as follows: let $D \subset \mathbb{C}^n -$ be a bounded domain and $\varphi(\xi) \in C(\partial D) -$be a fixed function. The problem is how to find maximal continuous $mw-$subharmonic function $u(z)$: $u|_{\partial D} = \varphi$. As usual, we looking for a solution by Perron's methods: putting

$$\boldsymbol{\mathcal{U}}(\varphi, D) = \left\{u \in m - wsh(D) : \overline{\lim_{z\to\partial D}}\, u(z) \leq \varphi\right\},$$

$$\omega(z) = \sup\left\{u(z) : u \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(\varphi, D)\right\}. \tag{3}$$

In classical case $m = 1$ one can prove that if the domain $D-$strongly $1-$convex (regular), for example, with smooth boundary ∂D, then ω is the solution of Dirichlet problem, i.e. it is harmonic in D, continuous up to the boundary and $\omega|_{\partial D} = \varphi$. However, as well as in the class of plurisubharmonic functions, for $m > 1$ the problem is more difficult and existence of solution requests additional conditions of convexity on D and to the boundary function φ.

Theorem 16. *If $D \subset \mathbb{C}^n -$is a strongly mw-convex domain, then the Dirichlet problem is solvable on it with any boundary condition $\varphi \in C(\partial D)$. More precisely, the function $\omega(z) = \sup\left\{u(z) : u \in \boldsymbol{\mathcal{U}}(\varphi, D)\right\}$ is maximal continuous function, $\omega \in m - wsh(D) \cap C\left(\overline{D}\right)$ and $\lim_{z\to\xi} \omega(z) = \varphi(\xi),\ \xi \in \partial D.$*

For the plurisubharmonic functions $(m = n)$ the relation $\lim_{z\to\xi} \omega(z) = \varphi(\xi)\ \ \forall \xi \in \partial D$ was proved by Bremerman, and continuity $\omega \in C\left(\overline{D}\right)$ was proved by Walsh.

The Chapter V is devoted to the applications of $m-sh$ functions, the problem of multidimensional complex and harmonic analysis: Nevallina's theory (paragraph 5.1) and Dirichlet problem for the equation $\left(dd^c u\right)^m \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m} = 0$ (paragraph 5.2), removability of singular sets of potential (paragraph 5.3). The paragraph 5.4 is devoted to the $m-sh$ functions in whole $\mathbb{C}^n$. Here we introduce Green function $V_m(z,K)$ of compact set $K \subset \mathbb{C}^n$, study its main properties and setup a connection $V_m(z,K)$ with $m-$convex hull of compact set K. In paragraph 5.5 we consider the question about definition of operator $\left(dd^c u\right)^m \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m}$ in the class of arbitrary (not necessary to be bounded) $m-sh$ functions. And finally, in paragraph 5.6 we study an intersection of harmonic and $m-wsh$ functions.

As is known, main object of multidimensional Nevanlinna's theory is to study distribution of preimages $f^{-1}(A)$ of holomorphic mapping $f=[f_0, f_1, ..., f_q]: \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^q,\, f_j \in \mathcal{O}\left(\mathbb{C}^n\right),\, f \neq 0$, complex planes $A \subset \mathbb{P}^q$, where $\mathbb{P}^q-$projective space with dimension $\dim A = q-k,\, 1 \le k \le \min\{q,n\}$. The main characteristic function of Nevanlinna's theory is a function with order

$$T_f^{(k)}(r) = \int_0^r \frac{dt}{t} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k},$$

where $B_t = \{|z| \le t\}-$is a ball in $\mathbb{C}^n$, $\omega = dd^c \ln|w|^2$, $w=[w_0, w_1, ..., w_q] \in \mathbb{P}^q$, and $|w| = \left(|w_0|^2 + |w_1|^2 + ... + |w_q|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Under the integral is operator in hessians $\omega^k(f) \wedge \beta^{n-k} = \left(dd^c \ln|f(z)|^2\right)^k \wedge \beta^{n-k}$. Our purpose is transformation of this operator using fundamental solution $G_m(z)$ of the operator $\left(dd^c u\right)^k \wedge \beta^{n-k}$: in the paragraph 5.1 were introduced the following functions

$$T_f^{(k)}(r,m) = \int_0^r \frac{dt}{t^{\frac{2n}{m}-1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \omega_0^{m-k} \wedge \beta^{n-m},$$

where $\omega_0 = dd^c G_m(z), 1 \le k \le m \le n$. The main results of this paragraph are

Theorem 17. *Let* $f=[f_0, f_1, ..., f_q]$ be a holomorphic mapping $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^q$. Then

$$T_f^{(k)}(r,n) = T_f^{(k)}(r) = \int_0^r \frac{dt}{t^{2(n-k)+1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k},$$

$$T_f^{(k)}(r,m) = \left(\frac{n-m}{m}\right)^{m-k} \int_0^r \frac{dt}{t^{2n(1-k/m)-1}} \int_{B_t} \omega^k(f) \wedge \beta^{n-k}, \quad 1 \le k \le m < n.$$

Theorem 18. *Let* $f:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *be a holomorphic mapping. Then for any* $r>0,\ \alpha>1,\ 1\le k\le m<n$ *following estimation is true*

$$T_f^{(k)}(r,m)\le Nr^{\frac{2(n-m)(k-1)}{m}}\left[\ln M_f(\alpha r)\right]^k,$$

where $N=N(k,m,n,\alpha)-$*is a constant,* $M_f(r)=\max\left\{\sqrt{1+|f(z)|^2}:|z|=r\right\}.$

In paragraph 5.2 was considered a following Dirichlet problem:

$$\left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m}=0,\ u\big|_{\partial D}=\varphi(\xi),\ u\in m-sh(D)\cap C(D).$$

From the results of Chapter II follows that the solution of Dirichlet problem will be maximal $m-sh$ function, so considered question neither more nor less than finding maximal $m-sh$ function with given boundary value. In this respect it is a direct continuation of studying maximal $m-wsh$ functions.

To solve Dirichlet problem in general case, $m>1$, on D imposes additional requirements. In several works these requirements are related tangential planes to the boundary ∂D of the domain D, and in works of Li, Blocki, Dinev, Kołodziej these requirements gives in term of eigenvalues of differential form $dd^c\rho$, where ρ twice smooth boundary, i.e. $\partial D=\left\{\rho(z)=0\right\}$. In our dissertation we request from D its m-regularity, connected with $m-sh$ functions, i.e. in any boundary point $\xi\in\partial D$ there is a barrier (peak) in the class of $m-sh$ functions.

Definition 6. The bounded domain $D\subset\mathbb{C}^n$ is called $m-$regular, if there is a barrier (peak) function

$$b(z)\in m-sh(D)\cap C\left(\overline{D}\right):\ b\left(\xi^0\right)=0\ ,\ b\big|_{\overline{D}\setminus\left\{\xi^0\right\}}<0$$

in any boundary point $\xi^0\in\partial D$.

The main result of this paragraph is

Theorem 19. *If the domain* $D\subset\mathbb{C}^n$ *is* m*-regular, then the Dirichlet problem has unique solution with any boundary condition* $\varphi(\xi)\in C(\partial D)$ *in it:* $\left(dd^c u\right)^m\wedge\beta^{n-m}=0,\ u\in m-sh(D)\cap C\left(\overline{D}\right),\ u\big|_{\partial D}\equiv\varphi(\xi).$

In the paragraph 5.3 of dissertation we study removable singular set of subharmonic functions. Since, subharmonic functions are subsolutions of elliptic operator Laplace, $\Delta u\ge 0$, then without narrowing studying area, we consider a problem for general case, i.e. for a subsolution of arbitrary elliptic differential operator with order $m\ge 2$,

$$P(D)=\sum_{|\alpha|\le m}a_\alpha D^\alpha,\quad D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n),\ |\alpha|=|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_n|$$

with smooth coefficients.

We denote by $P-sh(G)$ upper semicontinuous function $u(x)$, which at same time is subsolution of operator $P(D)$: $P(D)u(x)\ge 0$. The function $u(x)\in P-sh(G)$ is called $P-$subharmonic functions. We note that if

$P(D) = \Delta -$is Laplace operator, then the class $P - sh(G)$is coincide with the class of subharmonic functions $sh(G)$.

Definition 7. A closed subset E of a domain G is called removable singular set for the class $P - sh(G \setminus E)$, if for any function $u(x) \in P - sh(G \setminus E)$ there exists a function $\tilde{u}(x) \in P - sh(G)$ such that $\tilde{u}(x) = u(x)\ \forall x \in G \setminus E.$

Similarly, one can define removable singular set relatively the class of $P - sh(G \setminus E) \cap L^k_{p,loc}(G)$. We note that, here and below $L^k_p(G) -$is a space of k differentiable function, and the partial derivatives $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + ... + |\alpha_n| = k$ of order k are belongs to the space $L_p(G)$.

Singular set of harmonic and subharmonic functions were studied by several authors. So, a closed set $E \subset G$ is removable for a bounded from above subharmonic function, if and only if, when it has zero capacity $C(E) = 0.$ In terms of Hausdorff measure, the condition of removability of singular set of harmonic functions of the class Lip_α was studied in papers L.Carleson for $0 < \alpha \le 1$ and E.P.Dolzhenko for $1 < \alpha \le 2$. In paper A.Sadullaev and J.Yarmetov was studied singular set of subharmonic functions from the class Lip_α $(0 < \alpha \le 2)$, also in terms of Hausdorff measure. Removable singular set of subharmonic functions of class $L^k_p(G)$ was studied in papers B.Abdullaev and S.Imomkulov. In papers P.Harvi and J.Polkin was studied removable singularity of solution of elliptic equation $P(D)u = 0$ from the space $L_p(G)$.

In the dissertation we generalize the theorem of Harvi-Polkin, proving several theorems on removable singular sets of the class $P - sh(G \setminus E) \cap L^k_p(G)$ in terms of $C_{q,s}$- capacity.

Theorem 20. *A compact subset* E *of a domain* $G \subset R^n$, $n \ge 2$ *is removable for a function* $u(x) \in P - sh(G) \cap L^k_p(G)$ *if and only if the capacity* $C_{q,m-k}(E) = 0,$ *where* $P(D) -$*elliptic operator with order*

$$m \ge 2,\ 0 < m - k < n,$$

if $p < \dfrac{n}{n - m + k}$ $(p = +\infty\ at\ n = m - k)$, then one-point set is not removable already, as it is shown in example, the function $-\Phi(x, y_0),$ where $y_0 \in G -$ is fixed point and $\Phi(x, y) -$is fundamental solution of elliptic operator $P(D)$.

In theorem 20, it is requested that the smoothness degree was $k < m.$ For $k = m$ we have

Theorem 21. *A compact set* E *in a domain* $G\subset R^n$ *is removable for a function* $u(x)\in P-sh(G)\bigcap L^m_{p,loc}(G)$ *if and only if the Lebesque measure* $m_n(E)=0$.

Now we consider a case when smoothness degree $k>m$.

Theorem 22. *The compact set* E *in* $G\subset R^n$ *is removable for the function* $u(x)\in P-sh(G)\bigcap L^k_p(G),\ k>m,\ p\geq 1,$ *if and only if* E *nowhere dense in* G.

The paragraph 5.4 of the dissertation is devoted to the applications of $m-$subharmonic functions in whole $\mathbb{C}^n$ and the Green functions to $m-$convex geometry. In the class of $m-sh(\mathbb{C}^n)$ functions the Green function defines analogically extremal function.

$$V_m(z,E)=\sup\left\{u(z)\in m-sh(\mathbb{C}^n): u|_E<-1,\ u(z)<0\ \ \forall z\in\mathbb{C}^n\right\}.$$

The Green function $V_m(z,K)$ is usable instrument to investigate $m-$convex hull, which plays key role in geometry, theory of nonlinear differential equations and theory of $m-$subharmonic functions.

Definition 8. For a compact set $K\subset\mathbb{C}^n$ a set

$$\hat{K}_m=\left\{z\in\mathbb{C}^n:\ u(z)\leq\|u\|_K\ \ \forall u\in m-sh(\mathbb{C}^n)\right\}$$

is called $m-$convex hull of the compact set K. The compact set K is called $m-$convex, if $\hat{K}=K$.

It is clear that $\hat{K}_m$ is compact set in $\mathbb{C}^n$ and $\hat{K}_n\supset\hat{K}_{n-1}\supset...\supset\hat{K}_1\supset K,\ \hat{K}_n$ coincides with a polynomial convex hull of K and $\hat{K}_1$ $-$with complementation of unbounded connected component of open set $\mathbb{C}^n\setminus K$. The main result of this paragraph is

Theorem 23. *For any compact set* $K\subset\mathbb{C}^n$ *its hull* $\hat{K}$ *coincides with a set* $\{V_m(z,K)=-1\}:\hat{K}=\{V_m(z,K)=-1\}$. *Moreover, for Green functions the following identity is true:*

$$V^*_m(z,K)\equiv V^*_m(z,\hat{K}).$$

In the paragraph 5.5 we give a definition of operator $\left(dd^cu\right)^m\wedge\left(dd^c|z|^2\right)^{n-m}$ in a class of arbitrary (not necessary to be bounded) $m-sh$ functions. We note that in Chapters II and III this operator was defined only for bounded $m-sh$ functions. Here we propose one method of defining of operator $\left(dd^cu\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ which is close to A. Sadullaev's method of defining Monge-Ampere operator in the class of plurisubharmonic functions: for a given arbitrary function $u(z)\in m-sh(D)$ we consider a bounded function $u_a=\ln(\exp u+a),\ a>0.$ Its hessian operator $\left(dd^cu_a\right)^m\wedge\beta^{n-m}$ represents in the form

$$\left(dd^c u_a\right)^m \wedge \beta^{n-m} = \frac{1}{(v+a)^{m+1}}\omega_1 \wedge \beta^{n-m} + \frac{a}{(v+a)^{m+1}}\omega_2 \wedge \beta^{n-m},$$

where $v = \exp u$ and ω_1, ω_2 are some positive currents of bidegree (m,m).

A limit $\left(dd^c u\right)_1^m \wedge \beta^{n-m} = \lim\limits_{a\to 0}\frac{1}{(v+a)^{m+1}}\omega_1 \wedge \beta^{n-m} = \frac{1}{v^{m+1}}\omega_1 \wedge \beta^{n-m}$ is characterize $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ out of singular set $S = \{u = -\infty\}$ and if weak limit $\left(dd^c u\right)_2^m \wedge \beta^{n-m} = \lim\limits_{a\to 0}\frac{a}{(v+a)^{m+1}}\omega_2 \wedge \beta^{n-m}$ exists as generalized function, then it characterize $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$ on S, $\operatorname{supp}\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} \subset S$.

Theorem 24. *If a function u is locally bounded, then $\left(dd^c u\right)_2^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ and $\left(dd^c u\right)_1^m \wedge \beta^{n-m}$ coincides with $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m}$. Moreover, if $\left(dd^c u\right)^m \wedge \beta^{n-m} = 0$ then the function u is a maximal function.*

In the paragraph 5.6 we demonstrate some applications of the theory of $m-wsh$ functions to the pluriharmonic functions. The well-known Lelon's theorem confirms that: *if a function $u(z)$ simultaneously harmonic, i.e. $\Delta u = 0$ and plurisubharmonic, i.e. $dd^c u = \sum\limits_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j \geq 0$, then its pluriharmonic, i.e. $dd^c u = 0$.*

In the considering paragraph we prove an analogue of Lelon's theorem in the class of $m-wsh$ functions. The main result of this paragraph is

Theorem 25. *If a function $u(z)$ simultaneously harmonic and weakly $m-$subharmonic, $1 < m \leq n$, then it is pluriharmonic.*

CONCLUSION

The main obtained results of the investigation are following:

1. The m – subharmonicity of supreme in the class of m – subharmonic functions and m – subharmonicity of restriction to the complex hyperplane were proved;
2. The notion of condenser capacity in the class of m – subharmonic functions was introduced and a series of important properties of capacity were proved;
3. Quasicontinuity and comparing principle for m – subharmonic functions were proved;
4. Convergence of currents for a standard approximations and fundamental theorems of the potential theory in the class of m – subharmonic functions were proved;
5. The class of weakly m – subharmonic functions was defined and a series of potential properties of this class were proved;

6. The method of application of the class of m – subharmonic functions in multidimensional complex analysis and potential theory was developed. In particular, in Nevanlinna’s theory − to estimate characteristic functions, in convex geometry – to describe m–convex hulls, in theory of pluriharmonic functions − to set pluriharmonicity of functions (analogue of Lelon’s theorem).

In general, the obtained results allow us to speak about achieving the goals of research of dissertation work. Constructed potential theory in the class of m – subharmonic functions is a new research direction which has an important application in Nevanlinna’s theory, in complex projective space, in theory of nonlinear elliptic equations and etc.

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ
List of published works

I бўлим (Часть I; Part I)

1. Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.С., Теория потенциалов в классе m-субгармонических функций // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова РАН, - Москва, 2012, № 279, С. 166-192. (№ 11. Springer. IF=0.302).
2. Абдуллаев Б.И. Задача Дирихле в классе $m-wsh$ функций // Узбекский математический журнал, - Ташкент, 2012, № 4, С. 3-10. (01.00.00; №6)
3. Абдуллаев Б.И., $m-wsh$ функции // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, - Ташкент, 2012, № 5, С. 15-18. (01.00.00; №7).
4. Абдуллаев Б.И., Задача Дирихле для $m-wsh$ функций в регулярных областях // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, -Ташкент, 2012, № 6, С. 9-12. (01.00.00; №7).
5. Абдуллаев Б.И., О задаче Дирихле для $m-sh$ функций // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, - Ташкент, 2013, № 4, С. 8-10. (01.00.00; №7).
6. Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.С., Емкости и гессианы в классе m-субгармонических функций // Доклады Академии Наук, - Москва, 2013, Том 448, № 5, С. 515-517. (№ 11. Springer. IF=0.375).
7. Абдуллаев Б.И., Шарипов Р.А., m- субгармонические функции во всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Функции Грина // Узбекский математический журнал, - Ташкент, 2013, № 3, С. 3-8. (01.00.00; №6).
8. Абдуллаев Б.И., Ваисова М.Д., Слабо $m-$гармонические функции // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, - Ташкент, 2014, № 3, С. 19-20. (01.00.00; №7)
9. Абдуллаев Б.И., Ваисова М.Д. Аналог теоремы Лелона для $m-$субгармонических функций // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, - Ташкент, 2015, № 1, С. 6-8. (01.00.00; №7)
10. Абдуллаев Б.И., Садуллаев А., Устранимые особенности $m-wsh$ функций класса Lip_α // Вестник Национального университета Узбекистана, 2015, № 1, С. 4-6. (01.00.00; №8).
11. Абдуллаев Б.И., Садуллаев А., Устранимые особенности ограниченных сверху $m-wsh$ функций // Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, - Ташкент, 2015, № 5, С. 12-14. (01.00.00; №7)

II бўлим (Часть II; Part II)

12. Абдуллаев Б.И., Ярметов Ж.Р., Об особых множествах субрешений эллиптических операторов // Вестник Красноярского государственного университета, - Красноярск, 2006, № 9, С. 74-80.

13. Abdullayev B.I., Subharmonic functions on complex Hyperplanes of $\mathbb{C}^n$// Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, - Krasnoyarsk, 2013, № 6(4), P. 409-416.
14. Abdullayev B.I., P-measure in the class of m-wsh functions// Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics, - Krasnoyarsk, 2014 № 7(1), P. 3-9.
15. Абдуллаев Б.И., Ярметов Ж.Р., Устранимые особенности субрешений эллиптического оператора с частными производными // Тезисы докладов международной конференции. Россия, Москва, 16-21 июня, 2003 г., С. 364.
16. Абдуллаев Б.И., Ярметов Ж.Р., Устранимые особенности субрешений эллиптического оператора // Тезисы докладов международной конференции. Россия, Волгоград, 2004 г., С. 5-6.
17. Абдуллаев Б.И., Шарипов Р., K-Harmonic functions, Program 1071 st Meeting of the AMS, University of Nevada, Las Vegas, NV, April 30 - may 1, 2011, P. 62.
18. Абдуллаев Б.И., Субгармонические функции на комплексных плоскостях $\mathbb{C}^n$ // Материалы республиканской конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа» - Нукус, 11-12 май, 2012 г., С. 11-13.
19. Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.С., Емкости и гессианы в классе m-субгармонических функций // Материалы республиканской конференции современные проблемы комплексного и функционального анализа, - Нукус, 11-12 май, 2012 г., С. 184-186.
20. Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.С., Задача Дирихле в классе $m-wsh$ функций // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. «Операторных алгебры и смежные проблемы» - Ташкент, 12-14 сентябрь, 2012 г., С. 201-202.
21. Abdullayev B.I., Sharipov R.A., Definition of the Hessian operator $\left(dd^c u\right)^m \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m}$ for arbitrary $m-sh$ functions // Materials of the international scientific conference “Modern problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khorezmiy 2012”, Tashkent, 19–22 December, 2012 г., P. 335-339.
22. Абдуллаев Б.И., Садуллаев А.С., Емкости и гессианы в классе m-субгармонических функций // Международная научная конференция «Функциональный анализ и его приложения», Астана, 2-5 октябрь, 2012 г., С. 25-26.
23. Абдуллаев Б.И., Шарипов Р.А., Определение гессиана $\left(dd^c u\right)^m \wedge \left(dd^c |z|^2\right)^{n-m}$ для произвольных $m-sh$ функций // Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы математического анализа», Ургенч, 9-10 ноябрь, 2012 г., С. 13-15.

24. Абдуллаев Б.И., Шарипов Р.А., $m-$субгармонические функции во всем пространстве $\mathbb{C}^n$ // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 21-23 ноябрь, 2013 г., С. 260-261.
25. Абдуллаев Б.И., Ваисова М.Д., Слабо $m-$гармонические функции // Тезисы докладов республиканской научной конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа», Ташкент, 19-21 сентябрь, 2013 г., С. 45-46.

Авторефератнинг ўзбек, рус ва инглиз тилларидаги нусхалари
«Ўзбекистон математика журнали» таҳририятида таҳрирдан ўтказилди.
«8» февраль 2016 йил.

Босишга рухсат этилди: «10» фераль 2016 йил.
Бичими 60х84 1/8. «Times Uz» гарнитураси. Офсет усулида босилди.
Шартли босма табоғи 5.4 нашр босма табоғи 5.5. Тиражи 100.
Буюртма № 7

«Top Image Media» босмахонасида чоп этилди.
Тошкент шаҳри, Я. Ғуломов кўчаси, 74 уй.