

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ANDIJON DAVLAT UNIVERSITETI

Qo'lyozma huquqida

UDK 517.98

NURIDDINOV OLIMJON ODILJONOVICHNING

YORDAN HALQALARI VA ULAR USTIDA
AKSLANTIRASHLAR

01.01.05 – “Matematik mantiq, algebra va sonlar nazariyasi ”

Magistr akademik darajasini olish uchun yozilgan

DISSERTATSIYA

Ilmiy raxbar: f.-m.f.n.

F.N.Arziqulov

Andijon-2012

MUNDARIJA

Kirish.....	3
I-bob. Yordan algebralari.....	10
1.1. § Asosiy tushunchalar.....	10
1.2. § Formal haqiqiy yordan algebralari	21
1.3. § JB – algebralari.....	30
BOB. AJW – algebralari va ularning qobiq C^* -algebralari.....	41
2.1. § C^* –algebralari, AW^* –algebralari va fon Neyman algebralari.....	41
2.2. § AJW – algebralari va ularning xossalari.....	53
2.3. § JC-algebralari tiplari va ularning qobiq C^* -algebralari tiplariga mosligi.....	71
Xulosa	78
Foydalanilgan adabiyotlar.....	79

KIRISH

Berilgan dissertatsiya ishi Yordan algebralari nazariyasiga, ya'ni vector fazo bo'lgan yordan halqalari nazariyasiga bag'ishlangan. Yordan algebralari birinchi marta nemis fizigi P. Yordanning ilmiy ishlarida kiritilgan. P. Yordanning bu ishlari kvant mexanikasi asoslarining aksiomalashtirilishiga bag'ishlangan edi. Bundan tashqari yordan halqalarini (algebralari) J. fon Neyman va E. Vignerlar ham to'liq tadqiq qilishdi. 1930 yillarning o'rtalaridan ular P. Yordan bilan birgalikda kvant mexanikasining aksiomatik nazariyasini ishlab chiqishdi.

Yordan halqalari assotsiativ halqalar bilan juda yaqin aloqadadir. A –harakteristikasi $\neq 2$ bo'lgan maydon ustida vector fazo va shubilan bir vaqitda assotsiativ halqa bo'lsin. A vektor fazoda yangi ko'paytirish amalini

$$ab = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a)$$

kabi kiritamiz. Hosil bo'lgan algebrani A^J orqali belgilaymiz. Bu algebra yordan xalqasi va demak yordan algebrasi bo'ladi. Agar A algebraning B qisim fazosi shu ko'paytiruv amaliga nisbatan yopiq bo'lsa, u holda B ushbu operatsiya bilan birga A^J algebraning qismalgebrasini tashkil qiladi va demak yordan algebra bo'ladi.

Har qanday maydon ustida hech qanday A assotsiativ algebra uchun A^J yordan algebraning qismalgebrasi bo'lmaydigan yordan algebralari mavjuddir. Agar biron A assotsiativ algebra uchun B yordan algebra A^J algebraning qismalgebrasi bo'lsa, u holda B maxsus yordan algebra deb ataladi. Har qanday ikkita quruvchi elementdan iborat yordan algebraning maxsus yordan algebra bo'lishi A. Shirshov tomonidan isbotlangan.

Funksional analiz nuqtai nazaridan yordan algebralarni sistematik o'rganish boshlangandan so'ng C^* - algebra va fon Neyman algebralari nazariyasi bilan uzviy bog'liq bo'lgan nazariya shakillandi. Bu nazariyaning asosiy ob'ektlari JB – va JBW – algebralari hisblanadi. Xususan, JBW –algebralari fon Neyman algebralari yordan analoglari hisoblanadi.

P. Yordan, J. fon Neyman va E. Vignerlar [JNW] maqolasi yordan algebralari nazariyasiga qo'shilgan muhim xisssa hisoblanadi. Bu maqolada hamma sodda chekli o'lchovli formal-haqiqiy yordan algebralarning klassifikatsiyasi qurilgan. I tipidagi chekli o'lchovli

JBW – faktorlar chekli o'lchovli formal haqiqiy yordan algebralar hisoblanadi ikkinchi tomondan har bir soda chekli o'lchovli formal haqiqiy yordan algebra I tipidagi JBW –faktor bo'ladi.

JB –algebralar C^* –algebralar nazariyasiga qo'llash nuqtai nazaridan muhim ro'l o'ynaydi. Bundan tashqari JB –algebralar kvant fizikasining matematik asosalariga, chekli va cheksiz sondagi o'zgaruvchili kompleks funksiyalar nazariyasiga ham qo'llaniladi.

Haqiqatdan ham C^* –algebralar nazariyasida tartib bilan bog'liq nazariy savollar to'g'ridan-to'g'ri yoradn algebralarga bog'liqdir. Xususan, R. Kadison [Kad] tomonidan olingan klassik natija bo'yicha C^* –algebraning tartibli avtomorfizmi yordan avtomorfizmidir. [Kad] monografiyada rivajlantirilgan nazariya hozirgacha C^* –algebralarning funksionallari fazosini, antigomomorfizmlarini va musbat idempotentli akslantirishlarini tadqiq qilishda qo'llanilmoqda.

Kvant fizikasining matematik nazariyasi aksiomalaridan biri tasodifiy kattaliklar (kuzatiluvchi kattaliklar deb ham ataladi) yordan algebrasini tashkil qiladi. Bundan tashqari, agar bu tasodifiy kattaliklarga spectral nazariyani qo'llamoqchi bo'lsak, u holda ushbu tasodifiy kattaliklar to'plamini JB –algebra deb olishimizga to'g'ri keladi. Bu bog'liqlik [Emch] kitobida to'liq yoritib berilgan.

Yordan algebralarining bir nechta o'zgaruvchili gomomorf funksiyalar nazariyasiga to'g'ridan-to'g'ri aloqadorligi [Koe] ilmiy asarda asoslab berilgan. Keyinroq bu asarda olingan natijalarning analoglari cheksiz sondagi o'zgaruvchili kompleks funksialar holi uchun olingan (qarang [Kaup]). Bu bog'liqlikni ko'rsatib beruvchi asosiy natija quyidagi ko'rinishga ega: ayrim simmetrik sohalar (C^n da yoki kompleks banax fazosida) JB –algebralar terminlarida to'liq tasvirlanishi mumkin.

Berilgan magisterlik disertatsiyasi gilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning yordan algebralari (bular JC – va JB –algebralardir) va ularning abstract umumlashtirilgan $-JB$ va JBW –algebralar nazariyasiga bag'ishlangandir. Ular C^* –algebralar va fon Neyman algebralarining haqiqiy assotsiativ bo'lmagan analoglaridir. JW –algebralar nazariyasi birinchi marta 1965-yilda D. Topping tomonidan sistematik yoritib berilgan. JC – va JW –algebralarni tadqiq qilish Sh. Ayupov, E. Shtermer va boshqalarning ishlarida davom ettirilgan (qarang [ES1], [ES2], [S1], [S2], [S3], [S4], [A1], [A2].)

Bu yo'nalishning jadal rivoji 1970-yillarning oxirlaridas E. Alfsen, F. Shuls va E. Shtermerlarning [SSA], va F. Shulsning [Sh] ishlari paydo bo'lgandan keyin boshlandi. Ushbu ishlarda, xususan, Gelfond-Neymark teoremasining analogi isbotlangan.

Ma'lumki, har qanday C^* -algebrani biron-bir gilbert fazoda H ustida aniqlangan chegaralangan operatorlar algebrasi $B(H)$ ga joylash mumkin. Gelfond-Neymark teoremasi yordan analogi shuni ko'rsatadiki JB -algebralar sinfi C^* -algebralar sinfidan farqli o'laroq o'ziga xos xossaga ega. Aniqrog'i har qanday JB -algebra ham biron-bir $B(H)$ algebraga joylashavermaydi. Misol 3×3 o'lchovli ermit matritsalar M_3^8 algebrasini olish mumkin. Ya'ni bu algebrani hech qanday C^* -algebraga joylash mumkin emas. Shuls [Sh] teoremasiga ko'ra JBW -algebralar uchun bu xossa yana ham aniqrog' ifodalanadi. Aniqrog' qilib aytganda har qanday JBW -algebra A quyidagi $A = A_{sp} \oplus A_{ex}$ to'g'ri yig'indiga yoyiladi, bu yerda A_{sp} - JW -algebra, A_{ex} - JBW - algebra esa $C(X, M_3^8)$ hamma X giperston kmpaktidan M_3^8 algebra uzliksiz akslantirishlar algebrasiga izomorfdir.

JB -algebralar nazariyasining rivojlanish bosqichlari [HOS] kitobida o'z aksini topgan.

Ma'lumki, involyutiv assotsiativ algebralar nazariyasida annulyatorlar uchun Ber shartining bajarilishi muhim ro'l o'ynaydi: A algebraning har bir annulyatori proektor yordamida tuziladi, ya'ni $Ann(S) = eA$ ko'rinishda bo'ladi. Ber shartiga qanoatlantiruvchi involyutiv algebralar muhim ro'l o'ynaydi. Bunday algebralar bo'yicha kata nazariya shakllangan. Xususan, AW^* -algebralar nazariyasi rivojlangan. AW^* -algebra -Ber shartiga qanoatlantiruvchi C^* -algebradir. Ma'lumki, bu nazariya yordan operatorlar algebralari nazariyasi bilan uzviy bog'langan. Hozirgi payitda yordan operatorlar algebralari nazariyasi ham yetarlicha rivojlangan. Shu bilan birga yordan operatorlar algebralari sinfida yordan algebralarning shunday kata qism mavjudki unda Ber shartining yordan analogi bajariladi. AJW -algebralar -bu shunday JB -algebralarki ularning yordan ko'paytmaga nisbatan har qanday S musbat elementlari qismto'plami annulyatori proektor yordamid tuziladi, ya'ni $Ann(S) = U_s(A)$ ko'rinishda bo'ladi. AJW -algebralar sinfi JBW -algebralart sinfidan ancha keng. Shu bilan birga har qanday AJW -algebra ham biron bir AW^* -algebraning ermit qismi bilan ustma-ust tushavermaydi. AJW -algebralar birinchi marta 1965-yilda D. Topping tomonidan o'rganilgan [Top1]. D. Topping AJW -algebra tushunchasini gilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma operatorlar yordan algebralari sinfi doirasida kiritdi va o'rgandi. Keyinchalik 1998-yilda F. Arziqulov AJW -algebra

tushinchasini umumiy holda, ya'ni JB -algebralart sinfi doirasida kiritdi [Az1]. AJW -algebralalar uchun har xil ekvivalent shartlar qurdi [Az2], hamda ularning klassifiatsiyasini o'rgandi [Az3].

AJW –algebralalar I. Kaplanskiy tomonidan [K1] maqolada kiritilgan AW^* -algebralarning (abstract fon Neyman algebralarning) haqiqiy, assotsiativ bo'lmagan analoglaridir. AJW -algebralalar sinfi JBW -algebralalar va JB -algebralalar sinflari orasidagi oraliq sinfdir:

$$JBW \subseteq AJW \subseteq JB$$

AJW -algebraga misolqilib quyidagi algebrani keltirish mumkin. Q –har qanday ochiq to'plami yopilmasi ochiq bo'lgan kompakt (ekstremal kompakt) va $C(Q)$ –aniqlanish sohasi Q va qiymatlar sohasi haqiqiy sonlar maydoni R bo'lgan barcha uzluksiz funksiyalar algebrasi bo'lsin. U holda $C(Q)AJW$ -algebraga misol bo'la oladi, lekin har doim ham JBW -algebra bo'lavermaydi. Agar Q –ekstremal kompakt bo'lishdan tashqari giperstoun kompakti (ya'ni shunday B vector fazo mavjudki $B' = C(Q)$ bo'ladi, bunda B' vektor fazo B vektor fazoning qo'shma fazosi) bo'lsa algebra $C(Q)JBW$ -algebra bo'ladi. Shuni ta'kidlash kerakki, JBW -algebralarga taalluqli ko'p natijalar AJW -algebralalar uchun ham o'rinlidir. Xususan, AJW -algebraning barcha proektorlari to'plami to'liq tartib panjarasini tashkil qiladi va bu panjara ortomodulyator. Shuls teoremasi AJW^* -algebralalar uchun ham o'rinlidir, ya'ni ixtiyoriy AJW -algebra $A = A_{sp} \oplus A_{ex}$ noto'g'ri yig'indiga yoyiladi. Bu yerda AJW -algebra A_{ex} biron bir hamma X ekstremal kompaktdan M_3^8 algebraga uzluksiz akslantirishlar algebrasiga izomorf. A_{sp} –maxsus AJW -algebra. Bundan tashqari har qanday AJW -algebra $A = A_I \oplus A_{II} \oplus A_{III}$ to'g'ri yig'indiga yoyiladi. Bu yerda A_I – I tipidagi, A_{II} – II tipidagi, A_{III} – III tipidagi AJW -algebralalar. O'z navbatida ixtiyoriy A I tipidagi AJW -algebra $A = A_\infty \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_n \oplus \dots$ to'g'ri yig'indiga yoyiladi. Bu yerda A_∞ – I_∞ tipidagi AJW -algebra yoki 0, A_n – I_n tipidagi AJW -algebra yoki 0. JBW -algebralalar holidagiga o'xshash har qanday I_n tipidagi, bundan $n > 2$ –natural son, AJW -algebra yagona usulda yana ham “soddaroq” qismalgebralalar to'g'ri yig'indisiga yoyiladi. Bunda bu soddaroq qismalgebralarning har biri $C(Q, H_n(F))$, bunda Q –ekstremal kompakt (har bir ochiq to'planning yopilmasi ochiq bo'lgan kompakt) $F = R$ (haqiqiy sonlar maydoni), C (kompleks sonlar maydoni), H (kvaternionlar tanasi), yoki O (Keli sonlar algebrasi, $n = 3$ bolgan holda). Har bir I_2 tipidagi AJW -algebra, yagona tartibda, ekstremal kompaktni spin faktorga

akslantiruvchi uzluksiz funksiyalar algebrasi ko'rinishida aniq ifodalanadigan qismalgebralarning to'g'ri yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi mumkin.

Shuni ta'kidlash kerakki, I tipidagi AJW -algebralar A. Kusraevning [Kus4] va [Kus6] ilmiy maqolalarida to'liq o'rganilgan. Bu maqolalarda I tipidagi AJW -algebralarning strukturasi atroflicha tavsifi va bu algebralarning to'liq tasnifi izomorfizmga anqlikda berilgan.

Umuman olganda, har qanday AJW -algebra

$$A = A_{I_{fin}} \oplus A_{I_{\infty}} \oplus A_{II_1} \oplus A_{II_{\infty}} \oplus A_{III}$$

Ko'rinishdagi to'g'ri yig'indiga yoyiladi. Bu yerda $A_{I_{fin}} \oplus A_{II_1}$ qismi modulyar AJW -algebra, $A_{I_{\infty}} \oplus A_{II_{\infty}} \oplus A_{III}$ qismi esa xususan cheksiz AJW -algebra bo'ladi. Berilgan magisterlik dissertatsiyasida AJW -algebralar uchun yuqorida ko'rilgan tiplar $I_2I_n, I_{\infty}, II_1, III, II_{\infty}$ tushunchalari korrekt aniqlanganligi ko'rsatilgan. Aniqrog' qilib aytganda, ixtiyoriy AJW^* -algebra A tipi uning A_{sa} o'z-o'ziga qo'shma elementlari AJW -algebrasi tipi bilan bir xilligi ushbu magisterlik dissertatsiyasida ko'rsatilgan.

Ushbu ilmiy ishda o'rganilgan tushuncha bu yana qobiq C^* -algebra tushunchasidir. Ma'lumki, agar A –teskarilanuvchi JW -algebra bo'lsa va $W^*(A), C^*(A)$ –mos ravishda A algebraning qobiq fon Neyman algebrasi va qobiq C^* -algebrasi bo'lsa, u holda $C^*(A) = W^*(A)$ tenglik o'rinli bo'ladi [ART]. Ixtiyoriy A teskarilanuvchi AJW -algebraning tipi uning qobiq fon Neyman algebrasi $W^*(A)$ tipi bilan bir xil bo'lishi Sh. Ayupov va E. Shtyormerlar [Ay], [HOS] tomonidan isbotlangan. F. Arziqulov va Sh. Ayupovlarning maqolasida [AAR] esa quyidagi natija olingan: A –haqiqiy AW^* -algebra bo'lsin. Faraz qilaylik $M = A + iA$ –kompleks AW^* -algebra bo'lsin, $A \cap iA = \{0\}$. $C^*(A_{sa}) = A_{sa}$ AJW -algebraning qobiq C^* -algebrasi bo'lsin. U holda $C^*(A_{sa})AW^*$ -algebra bo'ladi. Bundan tashqari, agar AJW -algebra $A_{sa}I_1$ tipidagi noldan farqli to'g'ri qo'shiluvchilarga ega bo'lmasa, u holda $M = C^*(A_{sa})$. Bu yerda $A + iA$ yig'indi haqiqiy AW^* -algebra A uchun har doim ham AW^* -algebra bo'lavermasligi Albeverio, Ayupov va Abduvoitovlarning [AAA], [AAA2] maqolalarida ko'rsatilgan. Bundan tashqari haqiqiy AW^* -algebra A tipi kompleks AW^* -algebra $A + iA$ tipi bilan bir xil bo'lishi isbotlangan. Shunga o'xshash berilgan magisterlik dissertatsiyasida berilgan haqiqiy AW^* -algebra A uchun

$A + iA = \{0\}$ bo'lsa va $A + iA$ yig'indi kompleks AW^* -algebra bo'lsa A/W -algebra A_{sa} tipi kompleks AW^* -algebra $A + iA$ tipi bilan bir xil bo'lishi ko'rsatilgan.

Aniqroq qilib aytganda, mazkur magisterlik dissertatsiyasida quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema. A – haqiqiy AW^* -algebra, $A_{sa} = \{x \in A: x^* = x\}$, $A + iA$ – AW^* – algebra va $A \cap iA = \{0\}$ bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinlidir.

- 1) A/W -algebra $A_{sa} I_n$ tipida $\Leftrightarrow AW^*$ -algebra $A + iA I_n$ tipida.
- 2) $A_{sa} II_1$ tipida $\Leftrightarrow A + iA II_1$ tipida.
- 3) $A_{sa} II_\infty$ tipida $\Leftrightarrow A + iA II_\infty$ tipida.
- 4) $A_{sa} III$ tipida $\Leftrightarrow A + iA III$ tipida.

I BOB. YORDAN ALGEBRALARI

1.1. § ASOSIY TUSHUNCHALAR

Hozirgi vaqtda yordan algebralari nazariyasining rivojlanishi natijasida yordan algebralari kabi matematik ob'ektlar assotsiativ algebralardan yaxshi ma'lumdir. Yordan algebralari bu $xy = yx$, $(x^2y)x = x^2(yx)$ aksiomalariga qanoatlantiruvchi algebradir. Yordan algebra klassik ob'ekt hisoblanadi. Ular nemis fizigi P. Yordanning kvant mexanikasi asoslarini aksiomalashtirishga bag'ishlangan ishlarida paydo bo'lishgan.

Asosiy ob'ektlar orasida Keli sonlari algebrasi ustida aniqlangan o'lchovli 3×3 o'lchovli (matritsalar algebrasi) ermit matritsalar yordan algebrasi ham mavjud. Bu yordan algebraning ahamiyati shundaki, yordan algebralardan nazariyasi uchun u spetsifik matematik ob'ekt sifatida e'tirof etilgan. Keli sonlari algebrasi 1845- yilda ingliz matematigi A. Keli tomonidan qurilgan. Keli sonlar algebrasi – haqiqiy sonlar maydoni ustida bo'linuvchilik sakkiz o'lchovli algebradir. Bu algebra alternativ algebraning asosiy aksiomalariga

$((aa)b = a(ab)(ab)b = a(bb))$ qanoatlantiradi. Shu bilan birga Keli sonlari algebrasi kommutativ ham emas, assotsiativ ham emas.

Asosiy antijalardan biri bu Shirshov teoremasidir. Unga ko'ra ixtiyoriy ikkita element yordamida qurilgan yordan algebrani biron –bir assotsiativ algebraga yotqizish mumkin. Yordan algebralari nazariyasi bo'yicha to'laroq ma'lumotni [ЖСШШ], [HOS] managrafiyasidan olish mumkin.

Ta'rif. A – vektor $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan vektor vazo bo'lsin va A vektor fazoda, umuman olganda, assotsiativ bo'lmagan $x \cdot y, x, y \in A$ ko'paytirish amali kiritilgan bo'lsin. U holda, A haqiqiy yordan algebrasi deb ataladi, agarda quyidagi shartlar bajarilsa.

$$(1) xy = yx;$$

$$(2)(x + y)z = xz + yz;$$

$$(3) \alpha(xy) = (\alpha x)y;$$

$$(4)(x^2y)x = x^2(yx)$$

ixtiyoriy $x, y, z \in A, \alpha \in \mathbb{R}$ uchun. A haqiqiy yordan algebrasi e elementi birlik element deb ataladi, agarda $e \neq 0$ va $ea = a, \forall a \in A$ bo'lsa.

O- Keli sonlari algebrasi bo'lsin, (bu sonlarni kvazi kvaternionlar yoki oktavlar deb ham ataladi). O_n -elementlari O algebradan olingan $n \times n$ - o'lchovli matritsalar algebrasi bo'lsin, $*$ – O_n da aniqlangan involyutsiya bo'lsin. Bu involyutsiya matritsani transporlashdan va matritsa har bir elementi o'rniga uning qo'shma elementini olishdan iborat.

$$H(O_n) = \{x \in O_n : x^* = x\}$$

ermit matritsalar to'plami O_n da $xy = y_2(xy + yx)$ amaliga nisbatan yopiqdir. $H(O_n)$ to'plam operatsiya bilan birga faqat $n \leq 3$ bo'lgandagina yordan algebra bo'ladi. Bundan buyon $(H(O_n), \cdot)$ yordan algebrani M_3^8 orqali belgilaymiz. Agar yuqorida qabul qilingan belgilashlarni $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydoniga $\mathbb{C}$ kompleks sonlar maydoniga va H kvaternionlar tanasiga qo'llasak, u holda hosil bo'lgan $(H(R_n), \cdot), (H(C_n), \cdot), (H(H_n), \cdot)$ algebralar ixtiyoriy n uchun

yordan algebralari bo'ladi. Bu algebralarni mos ravishda $H_n(C)$, $H_n(H)$, $H_n(H)$ kabi belgilaymiz.

$H - R$ haqiqiy sonlar maydoni ustida, $\langle \xi, \zeta \rangle$, $\xi, \zeta \in H$ skalyar ko'paytmaga ega bo'lgan gilbert fazo bo'lsin. (α, ξ) , $\alpha \in R$, $\xi \in H$, juftliklar A to'plamini, koordinatalari bo'yicha vektor amallari bilan birgalikda olamiz. A to'plamda ko'paytiruv amalini quyidagicha kiritamiz: $(\alpha, \xi)(\beta, \xi) = (\alpha\beta + \langle \xi, \zeta \rangle, \beta\xi + \alpha\zeta)$. Ravshanki, $A - 1 = (1, 0)$ birlik elementga ega bo'lgan, bu yerda, $0 - H$ gilbert fazosining nol vektori, komutativ algebradir. $= (\alpha, \xi)$ bo'lsin, u holda

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (\alpha^2 + \langle \xi, \zeta \rangle, \beta\xi + \alpha\zeta) = (\alpha^2 + \langle \xi, \xi \rangle)1 + 2\alpha\alpha - 2\alpha^2 \cdot 1 = \\ &= (\langle \xi, \xi \rangle - \alpha^2)1 + 2\alpha. \end{aligned}$$

Ma'lumki, ixtiyoriy kommutativ algebrada $(ab)a = a(ba)$ va $(1b)a = 1(ba)$, ixtiyoriy $(a, b \in A)$ uchun, tengliklar o'rinlidir. Yuqoridagi tenglamalardan ixtiyoriy $a_1 b \in A$ elementlar uchun $(a^2 b)a = a^2(ba)$ tenglik o'rinlilik kelib chiqadi. Demak, A yordan algebrasidir. Bunday yordan algebra spinfaktor $[Top1]$ deb ataladi. Bundan keyin $H \oplus R1$ belgisi haqida $(A, \cdot)$ yordan algebrasini tushunamiz.

$X - F$ maydon ustida, o'lchovi 1 dan katta vektor fazo bo'lsin, $f(x, y) - X$ da berilgan simmetrik "kiritilmagan" bir chiziqli forma bo'lsin. Vector fazolar to'g'ri yig'indisini $\tau(X, f) = F \oplus X$ olamiz va unda ko'paytuvchini quyidagicha inqlaymiz

$$(\alpha + x)(\beta + y) = (\alpha\beta + f(x, y)) + (\alpha y + \beta y).$$

Shunda $\tau(X, f) -$ sodda maxsus yordan algebrasidir. Agar $F = R$ va $f(x, y) -$ odatiy skalyar ko'paytma bo'lsa, $\tau(X, f)$ yuqorida kiritilgan spin factor bo'ladi. Bunday spin faktorlarni V_n kabi ham belgilanadi, bunda $n - 1 = \dim_F(X)$.

Yordan algebralari assotsiativ algebralar bilan quyidagiga bog'langan. $A -$ xarakteristikasi $\neq 2$ bo'lgan maydon ustida aniqlangan assotsiativ algebra bo'lsin. A vektor fazosida yangi ko'paytirish amalini kiritamiz

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) \text{ (yordan ko'paytma).}$$

Hosil bo'lgan algebrani A^* orqali belgilaymiz. Bu algebra yordan algebrasidir. Agar A algebraning A_0 qism fazosi $a \cdot b$ ko'paytmaga nisbatan yopiq bo'lsa, u holda u shu ko'paytiruv amali bilan A^* algebraning qism algebrasi va demak yordan algebrasi bo'ladi. Bunday A_0 yordan algebrasi maxsus yordan algebrasi deb ataladi. Maxsus bo'lmagan yordan algebralar g'ayrioddiy yordan algebralar deyiladi. $H_n(R), H_n(H)$ va $H \oplus R \cdot 1$ yordan algebralari maxsus yordan algebralari bo'ladi. G'ayrioddiy yordan algebraga M_3^8 misol bo'ladi. Ammo A^* algebra har doim ham assotsiativ algebra bo'lavermaydi. Masalan, $H_2(R)$ algebrani olamiz. Aytaylik,

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

bo'lsin, u holda bir tomondan $(a \cdot b) \cdot c = 0$ va ikkinchi tomondan

$$a \cdot (b \cdot c) = \frac{1}{4} c. \text{ Demak, } H_n(R) \text{ algebra assotsiativ emas.}$$

Shunga o'xshash bog'liqlik assotsiativ algebralar va Li algebralari orasida ham mavjud. Bu yerda Li algebralari

$$x^2 = 0, \quad (xy)z + (zx)y + (yz)x = 0$$

tengliklari orqali aniqlanadi. Agar A assotsiativ algebraga yangi ko'paytiruv amalini $[a, b] = ab - ba$ formulasi orqali kiritsak, hosil bo'lgan algebra A Li algebrasi bo'ladi. Maydonlar ustida algebralar uchun teskari tomonga ham bog'liqlik mavjud: Puankare-Birkhof Viyet teoremasi bo'yicha ixtiyoriy maydon ustida aniqlangan ixtiyoriy Li biron bir mos A assotsiativ algebra uchun A Li algebraning qism algebrasi bo'ladi. Yordan algebralar nazariyasida esa bunday emas: ixtiyoriy maydon ustida A^* xech qanday A assotsiativ algebra uchun A^* algebraning qism algebrasi bo'lmaydigan yordan algebralar mavjud.

Kvaternionlarni algebrasi quyidagicha kiritiladi: $ij = -ji = k,$

Quyidagi to'plamni olamiz:

$$H := \{\lambda_1 + i\lambda_2 + j\lambda_3 + k\lambda_4 : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}\}$$

elementlar $a, b \in H$ uchun H to'plamda ko'paytiruv amlini quyidagicha kiritamiz:

$$a = a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4, \quad b = b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4, \quad a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$$

bo'lgani uchun

$$\begin{aligned} ab &= (a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4)(b_1 + ib_2 + jb_3 + kb_4) = \\ &= a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 + i(a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3) \\ &\quad + j(a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4) + k(a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2) \end{aligned}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Elementlarni qo'shish va elementni songa ko'paytirish amallari quyidagicha kiritilgan bo'lsin:

$$a + b = a_1 + b_1 + (a_2 + b_2)i + j(a_3 + b_3) + k(a_4 + b_4),$$

$$\lambda a = \lambda a_1 + i\lambda a_2 + j\lambda a_3 + k\lambda a_4.$$

U holda bu amallarga nisbatan H to'rt o'lcholi vektor fazo bo'ladi. Uning bazisi $\{1, i, j, k\}$ bo'lishi mumkin. Elementlarni ko'paytirish ab amalga nisbatan H algebra bo'ladi. $ij = -ji = k$ bo'lgani uchun, masalan, H algebra kommutativ emas. Lekin bu algebra assosiativdir, ya'ni, $a(bc) = (ab)c$, $a, b, c \in H$ sharti bajariladi. H algebra $*$ – involyutsiyani kiritish mumkin:

$$a^* = (a_1 + ia_2 + ja_3 + ka_4)^* = a_1 - ia_2 - ja_3 - ka_4, \quad a \in H.$$

Bu involyutsiyaga nisbatan H – $*$ algebra bo'ladi. Ravshanki

$H_{sa} = \{a: a \in H, a^* = a\} = \mathbb{R}$ yuqorida ta'kidlangan $H_n(H)$ – elementlari H algebradan olingan, $n \times n$ – ermit matritsalar $ab = \frac{1}{2}(ab + ba)$ yordan ko'paytmaga nisbatan yordan algebrasi bo'ladi. Elementlar H algebradan olingan barcha $n \times n$ – o'lchovli matritsalar to'plami $M_n(H)$ esa matritsalarini ko'paytirish amaliga nisbatan haqiqiy $*$ – algebra (haqiqiy fon Neyman algebrasi) bo'ladi.

Keli sonlari algebrasiga quyidagicha kiritiladi: $O = H \otimes Hl$, bu yerda l vektor i, j va k vektorlarga ogtogonal va $l^2 = -1$. bundan tashqari l element i, j va k elementlarga anti kommutativdir. Bundan tashqari

$$H \cap Hl = \{0\}. O - 8 \text{ o'lchovli vektor fazodir.}$$

O vector fazoda ko'paytiruv amalini quyidagicha kiritamiz:

$$(a + bl)(c + dl) = ac - d^*b + (da + bc^*)l, a + bl, c + dl \in O$$

yuqorida aytib o'tilganidek bu algebra alternativ algebralarning asosiy aksiomalariga $(aa)b = a(ab)$ qanoatlantiradi. Shu bilan birga Keli sonlari algebrasi kommutativ ham, assotsiativ ham emas.

A yordan algebrasining a, b, c elementlari uchun yordan uchlik ko'paytma $\{abc\}$ mavjud.

$$U\{abc\} = (ab)c + a(bc) - (ac)b$$

kabi aniqlanadi. A yordan algebrada U_a, L_a va U_{ab} operatorlar

$$U_a c = \{aca\}, \quad L_a c = ac \quad \text{va} \quad U_{ab} c = \{acb\}$$

kabi aniqlanadi. Bunda $U_a = 2L_a^2 - L_a^2$. agar A maxsus yordan algebra bo'lsa, u formulalar quyidagi formulalarga aylanadi:

$$\{abc\} = \left(\frac{1}{2}\right)(abc + cba), \quad \{aba\} = aba, \quad L_a c = (v_2)(ac + ca),$$

bunda tengliklarning o'ng tomonida elementlarning assotsiativ ko'paytmasi olingan.

Agar A yordan algebraning a, b elementlari uchun $L_a L_b = L_b L_a$ sharti bajarilsa, u holda bu elementlar operatorli kommutativ deyiladi. Yordan algebrasi ta'rifidan va yordan aksiyomasidan quyidagi, chiziqshlashtirilgan yordan aksiyomasi deb ataluvchi ayniyat kelib chiqadi.

$$L_a L_b c + L_b L_c a + L_c L_a b + L_b c L_a + L_c a L_b = L_{ab} L_c$$

ixtiyoriy $a, b, c, d \in A$ elementlar uchun. Bundan quyidagi ayniyatlar kelib chiqadi.

$$L_a L_b L_c + L_c L_b L_a + L_{(ac)b} = L_a L_b c + L_b L_{(ac)} + L_c L_{(ab)}.$$

$$L_a L_b L_c + L_c L_b L_a + L_{(ac)b} = L_{ab} L_c + L_{ac} L_b + L_{bc} L_a.$$

Quyidagi Shirshov teoremasi o'rinalidir.

Teorema. Ikkita element yordamida qurilgan yordan algebra maxsus yordan algebradir.

Shu bilan birga quyidagi teorema ham o'rinalidir.

Teorema. (Shirshov - Makdonald). Agar x_3 bo'yicha darajasi ≤ 1 bo'lgan assotsiativ bo'lmagan $f(x_1, x_2, x_3)$ ko'pxad ixtiyoriy maxsus yordan algebrada ayniyat bo'ladi.

Ushbu (formu) teoremadan quyidagi formulalar kelib chiqadi.

$$U_{U_y x} z = U_y U_x U_y z, \quad (U_x y)^2 = U_x U_y x^2,$$

$$4(xy)^2 = 2xU_y x + U_x y^2 + U_y x^2$$

ixtiyoriy A yordan algebraning ixtiyoriy x, y va z elementlari uchun. Tengliklardan birinchisi Makdonald ayniyati deyiladi. [ЖСШШ], [СХЧ], [HOS].

Albert teoremasi. Ta'rif. A yordan algebraning B qismi algebrasi kuchli assotsiativ deb ataladi, agar har qanday $x, x' \in B, y \in A$ elementlar uchun $(xy)x' = x(yx')$ tengliklar o'rinli bo'lsa.

Yordan algebraning kuchli assotsiativ qism algebrasini quyidagi teorema yordamida ko'rish mumkin.

Teorema. Bir element yordamida qurilgan ixtiyoriy yordan algebrasi kuchli assotsiativdir.

Ta'rif. A haqiqiy yordan algebrasi elementlarining M to'plami sheriklik to'plam deb ataladi, agarda bu to'plam yordamida qurilgan $\tau(M)$ qism algebra kuchli assotsiativ bo'lsa. Agar ikkita $x, y \in A$ element sheriklik to'plam hosil qilsa, u holda bu $x \leftrightarrow y$ kabi belgilanadi. Agar A yordan algebrada ixtiyoriy chekli miqdordagi $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ elementlar uchun $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$ tenglik $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ shartga teng kuchli bo'lsa, u holda A forma haqiqiy yordan algebrasi deb ataladi.

Teorema. A – forma haqiqiy yordan algebra bo'lsin. U holda

a) To'plam M sheriklik to'plam bo'ladi shu va faqat shu holda qachonki M to'plam elementlari juft-jufti bilan sheriklik to'plam hosil qilsa.

b) $a, b \in A$ elementlar sheriklik to'plam hosil qiladi shu va faqat shu holda qachonki a, b, a^2, b^2, ab elementlar o'zaro operatorli kommutativ bo'lsa, ya'ni, agar $L_a L_b = L_b L_a, c, d \in \{a, b, a^2, b^2, ab\}$ shart bajarilsa.

Shuni ta'kidlash lozimki [AЖ] maqolada bu teoremaning a) punkti nilponent elementlarga ega bo'lmagan yordan algebralar uchun isbotlangan. Ixtiyoriy formal haqiqiy yordan algebra nilponent elementlarga ega bo'lmaydi.

A – formal haqiqiy yordan algebra bo'lsin. Ravshanki, A yordan algebraning ixtiyoriy elementi shu algebraning birlik elementi bilan sheriklik to'plam tashkil qiladi. Yuqoridagi teoreмага ko'ra A algebraning har bir elementi biror bir kuchli assotsiativ qism algebraga tegishli bo'ladi. Hamma A algebraning kuchli assotsiativ qism algebralari yuqoridagi teoreмага ko'ra Tsorn lemmasi shartlarini qanoatlantiradi. Demak, har qanday element uchun A algebraning shu elementini oz ichiga oluvchi maksimal kuchli assotsiativ qism algebralar kesishmasi markaz markaz deb ataladi va $z(A)$ orqali belgilanadi. Agar $z(A) = R1$ bo'lsa, u holda A faktor deb ataladi. Agar $e^2 = e$ shart bajarilsa $e \in A$ element idempotent (element) deb ataladi. Berilgan magistrlik disertatsiyamda biz idempotentni proyektor deb ataymiz. Agar ixtiyoriy $f_1 e \in A$ proyektorlar uchun $fe = 0$ bo'lsa, u holda bu proyektorlarni orthogonal proyektorlar deb atashadi.

Traektoriya to'plami $\{e_i\} \subset A$ ortogonal to'plam deb ataladi, agarda $\{e_i\}$ to'plam elementlari juft - jufti bilan ortogonal bo'lsa. A yordan algebraning s elementi simmetrik deb ataladi, agarda $s^2 = 1$ shart bajarilsa. Ravshanki ixtiyoriy $e \in A$ proyektor uchun $re - 1$ element simmetrik bo'ladi va agar s – simmetrik bo'lsa, u holda $\frac{(1+s)}{2}$ element proyektor bo'ladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$U_a(A) = \{U_ax: x \in A\}, \quad U_{a,b}(A) = \{U_{a,b}x: x \in A\}.$$

Har qanday haqiqiy yordan algebra uchun Albertning quyidagi teoremasi o'rinli.

Teorema. (Albert). A – haqiqiy yordan algebrasi bo'lsin, $e - A$ algebraning proyectori va algebra A birlik elementga ega bo'lsin. U holda algebra A quyidagi to'g'ri yig'indiga yoyiladi.

$$A = U_e(A) \oplus U_{e,1-e}(A) \oplus U_{1-e}(A).$$

Bu yerda to'g'ri chiziqli vector fazolarning to'g'ri yig'idisidir, bu to'g'ri yig'indi qo'shiluvchilari Pirs komponentlari deb ataladi. Bunda

$$U_{\varepsilon}(A) = \{x \in A: ex = x\}, U_{\varepsilon, 1-\varepsilon}(A) = \left\{x \in A: ex = \left(\frac{1}{2}\right)x\right\}, \quad U_{1-\varepsilon}(A) =$$

$= \{x \in A: ex = 0\}$ va $x \in A$ element uchun $x = U_{\varepsilon}x + 2U_{\varepsilon, 1-\varepsilon}x + U_{1-\varepsilon}x$. Pirs komponentlari uchun quyidagi ko'paytirish jadvali o'rinli.

$$(U_{\varepsilon}(A))^2 \subseteq U_{\varepsilon}(A), \quad U_{\varepsilon}(A)U_{1-\varepsilon}(A) = \{0\},$$

$$(U_{1-\varepsilon}(A))^2 \subseteq U_{\varepsilon}(A), \quad (U_{\varepsilon, 1-\varepsilon}(A))^2 \subseteq U_{\varepsilon}(A) + U_{1-\varepsilon}(A)$$

$$U_{1-\varepsilon}(A)U_{\varepsilon, 1-\varepsilon}(A) \subseteq U_{\varepsilon, 1-\varepsilon}(A), \quad U_{\varepsilon}(A)U_{\varepsilon, 1-\varepsilon}(A) \subseteq U_{\varepsilon, 1-\varepsilon}(A).$$

Misollar. $H_2(R)$ yordan algebrani olaylik. Bu yordan algebra forma haqiqiy bo'lib faktor xamdir. bu faktorning markazi quyidagi ko'rinishga ega.

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \lambda: \lambda \in R \right\} =: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot R$$

Yangi markaz Z bir o'lchovli vector fazo va demak, $Z \cong R$. $H_2(R)$ yordan algebraning maksimal kuchli assotsiativ qism algebra misol qilib quyidagilarni olish mumkin:

$$R \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}: \lambda, \mu \in R \right\},$$

$$R \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}: \lambda, \mu \in R \right\} \quad va \quad x.k$$

Umuman olganda, ixtiyoriy orthogonal minimal proektorlar $p, q \in H_2(R)$ uchun $p + q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bo'ladi va quyidagi qism algebra

$$Rp + Rq := \{\lambda p + \mu q: \lambda, \mu \in R\}$$

ham maksimal kuchli assotsiativ qism algebra bo'ladi. Xar qanday $H_2(R)$ algebraning maksimal kuchli assotsiativ qism algebra si yuqoridagidek ko'rinishda bo'ladi. Matritsa $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ proektordir, ya'ni $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. u holda albert teoremasiga ko'ra $H_2(R)$ algebra quyidagi to'g'ri yig'indiga yoyiladi:

$$H_2(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R$$

Haqiqatan ham ixtiyoriy $x \in H_2(R)$ uchun

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x_{11} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_{12} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_{22}$$

tenglik o'rinlidir.

Endi Albert teoremasini bir nechta ortogonal proektorlar uchun umumiyashtiramiz.

Teorema. A – birlik elementli yordan algebrasi bo'lsin. Faraz qilaylik $p_1, p_2, \dots, p_n - A$ yordan algebrasida yig'indisi 1 ga teng ortogonal proektorlar bo'lsin. $A_{ij} = U_{p_i p_j}(A)$ bo'lsin. U holda $A_{ij} = A_{ji}$ va quyidagi yoyilma o'rinli $A = \bigoplus_{1 \leq i \leq j \leq n} U A_{ij}$ bundan tashqari quyidagi ko'paytirish jadvali o'rinli

$$A_{ij} \cdot A_{ke} = \{0\}, \quad \text{agar } \{i, j\} \cap \{k, e\} = \emptyset,$$

$$A_{ij} \cdot A_{kj} \subseteq A_{ik}, \quad \text{agar } i, j, k \text{ har hil bo'lsa,}$$

$$A_{ij} \cdot A_{ij} \subseteq A_{ii} + A_{jj}, \quad A_{ii} \cdot A_{ij} \subseteq A_{ij}.$$

Ta'rif. A – yordan algebrasi (bir elementli), $p, q - A$ algebraga tegishli orthogonal proektorlar bo'lsin. Bu proektorlar kuchli bog'langan deyiladi, agarda shunday $v \in U_{p,q}(A)$ element mavjud bo'lsaki $v^2 = p + q$ shart bajarilsa. A_{ij} – Pirs komponent bo'lsin, ya'ni $A_{ij} = U_{p_i p_j}(A)$. har bir j , $2 \leq j \leq n$ uchun, lar kuchli bog'langan bo'lsin. Quyidagi

$$t_{ij} = p_i (i = 1, 2, \dots, n), \quad t_{ij} = 2t_i t_j (i \neq j).$$

Tengliklarni qabul qilamiz. Shunda t_{ij} elementlar simmetriklangan matritsali birliklar to'plamini tashkil qiladi, ya'ni quyidagi shartlarni qanoatlantiradi.

$$a) \quad a_{ij}^2 = t_{ii}, \quad \sum_{i=1}^n t_{ii} = 1,$$

$$b) \ t_{ii}t_{ij} = \left(\frac{1}{2}\right)t_{ji}, \quad \text{agar } i \neq j,$$

$$v) \ t_{ij}^2 = t_{ii} + t_{jj}, \quad \text{agar } i \neq j,$$

$$g) \ t_{ij} \cdot t_{jk} = \left(\frac{1}{2}\right)t_{ik}, \quad \text{agar } i \neq k,$$

$$d) \ t_{ij} \cdot t_{kl} = 0, \quad \text{agar } \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset.$$

Teorema, (koordinatizatsion teorema). A – birlik elementli yordan algebra bo'lsin. Faraz qilaylik A $n \geq 3$ ta o'zaro orthogonal kuchli bog'langan yig'indisi birga teng bo'lgan proektorlarni o'z ichiga olsin. U holda A biror bir R^* – algebra ustida $n \times n$ – o'lchovli ermit matritsalar $H_n(R)$ yordan algebrasiga izamorfdir.

Teorema. $A - C$ kompleks son;ar maydoni ustida aniqlangan, birli elementli assotsiativ $*$ – algebra bo'lsin. $A_{sx} - A$ algebraning hamma qo'shma elementlaridan iborat, R haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlangan maxsus yordan algebrasi bo'lsin, va $B - A_{sa}$ algebraning yordan qismi algebrasi bo'lsin. Faraz qilaylik, qism algebra B yig'indisi 1 ga teng bo'lgan n ta, bunda $n \geq 3$, o'zaro ortogonal, kuchli bog'langan proektorni o'z ichiga olgan bo'lsin. U holda A algebraning shunday $*$ – qism algebrasi A_0 va A_0 algebraning shunday $*$ – qism algebrasi R (R maydon ustida) mavjudki, bunda $H_n(R)$ algebrani A_{sa} algebrani ustiga akslantiruvchi $M_n(A_0)$ va A algebraning izamorfizmi mavjud bo'ladi.

1.2. § FORMAL HAQIQIY YORDAN ALGEBRALAR

Yuqorida kiritilgan formal haqiqiy yordan algebra tushunchasiga quyidagicha ta'rif berish mumkin: agar A yordan algebra uchun ixtiyoriy $x, y \in A$ elementlarning $x^2 + y^2 = 0$ sharni qanoatlantirishdan $x = y = 0$ kelib chiqsa, u holda A formal haqiqiy yordan algebra deb ataladi. Masalan, gilbert fazoda aniqlangan barcha o'z-o'ziga qo'shma (ya'ni $a^* = a$ bo'lgan) chegaralangan chiziqli ortogonallar yordan algebrasi formal haqiqiy yordan algebradir. Berilgan paragrafdan chekli – o'lchovli formal haqiqiy yordan algebralarning klassifikatsiyasi ko'riladi. Har qanday chekli haqiqiy formal haqiqiy yordan algebrasi R algebra ustida barcha $n \times n$ – o'lchovli o'z-o'ziga qo'shma matritsalar $H_n(R)$ algebrasi, bunda $R = R, C, H$ yoki O , komponenti bilan to'g'ri yig'indi ko'rinishda bo'ladi. Ya'ni

$$A = \sum_{i=1}^m H_n(R_i), \quad R_i \in \{R, C, H, O\}.$$

Buni isbotlash uchun bizga minimal proektorlar kerak bo'ladi. Minimal proektorlar ixtiyoriy halqa yoki algebra uchun quyidagicha aniqlanadi: noldan farqli p proektor minimal proektor deyiladi, agar ixtiyoriy noldan farqli p proektor uchun, $pq = qp = q$ shartdan $p = q$ kelib chiqsa. Bundan tashqari isbotda ma'lum shartlarga qanoatlantiruvchi abel halqalari maydonlarining to'g'ri yig'indisi ko'rinishda bo'lishi haqidagi lemmadan ham foydalanamiz.

Teorema. Faraz qilaylik $R = R, C, H$ yoki O bo'lsin, va $n \geq 2$; agar $R = O$ bo'lsa, $n \leq 3$ shartni olamiz. U holda $H_n(R)$ formal haqiqiy yordan algebra bo'lsin.

Isbot. Yuqorida aytilganidek $H_n(O)$ yordan algebradir. U yuqorida M_3^8 kabi belgilangan. Qism algebra $U_{e_n} + e_{22}(H_3(O))2 \times 2$ o'lchovli matritsalar $H_2(O)$ algebrasiga izamorf bo'lgani uchun, bunda $e_{ij} - (i, j)$ -komponentasi 1 ga va qolgan komponentalari 0 ga teng bo'lgan 3×3 o'lcholi matritsa, algebra $H_2(O)$ yordan algebra bo'ladi. Ravshanki bu yerda e_{11}, e_{22}, e_{33} - minimal proektorlar bo'ladi. Qolgan ko'rib o'tilgan misollar ham yuqorida takidlanganidek yordan algebra bo'ladi. Xususan $H_2(R)$ ko'rinishda algebralar yuqorida kiritilgan spin- faktorlarga misol bo'ladi.

$T_r - H_n(R)$ algebra aniqlangan iz (trace) akslantirish bo'lsin, ya'ni

$$T_r(a) = \sum_{i=1}^n a_{ii}, \quad a \in H_n(R).$$

U holda $a \in H_n(R)$ element uchun $T_r(a^2) = \sum_{i,j} \bar{a}_{ij} a_{ij}$. bu yerda $\bar{a}_{ij} - a_{ij}$ songa qo'shma son. Ammo, agar $a_{ij} \neq 0$ bo'lsa, $\bar{a}_{ij} a_{ij}$ bu haqiqiy musbat son. Demak, $T_r(a^2) > 0$, agar $a \neq 0$. Bundan yordan algebrasining $H_n(R)$ formal haqiqiyliki kelib chiqadi.

Lemma. R - nilpotent elementlarsiz abel halqasi bo'lsin. R halqada ideallarning ixtiyoriy ixtiyoriy kamayuvchi $I \supset I_2 \supset \dots$ zanjiri chekli bo'lsin. U holda R halqa shunday minimal proektorlar $e_1, e_2, \dots, e_n$ mavjudki, bunda $e_i + e_j = 0$, $i \neq j$, $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$ va Re_i maydon bo'ladi $i = 1, 2, \dots, n$ uchun.

Isbot. R – halqaning biron bir noldan farqli I minimal idealni olaylik. Bunday minimal ideal lemmadagi ideallarni ixtiyoriy kamayuvchi zanjiri chekli bo'lishligi shartiga ko'ra mavjuddir. Biz ta'kidlaymizki I o'z ichiga e noldan farqli proektorni oladi. Haqiqatdan ham, $x - I$ idealning noldan farqli elementi bo'lsin. R halqa nilpotent elementga ega bo'lgani uchun $x^2 \neq 0$. Ammo u holda $x^2 \in Ix$. Shuning uchun Ix to'plam I idealda noldan farqli ideal bo'ladi. I minimal ideal bo'lgani uchun $Ix = I$. Xususan, $ex = x$ biror bir $e \in I$ element uchun. Bundan $e^2x = ex$ va $(e^2 - e)x = 0$, yani $e^2 - e \in I$ idealdagi x annulyatoriga tegishli. Bu annulyator ideal bo'lgani uchun va x elementni o'z ichiga olmagan uchun, I ideal minimal bo'lgani uchun bu annulyator ideal nolga teng bo'lishi shart. Shuning uchun $e^2 - e = 0$ va e proektordir.

Aslida $e - I$ idealning birlik elementidir. Agar $x \in I$ umumiy element bo'lsa, u holda $e(x - ex) = 0$. Yuqorida keltirilgan annulyator idealga taalluqli fikrlar $x - ex = 0$ ekanligini isbotlaydi. Aslida I maydondir, yuqoridagi oldingi abzatsga ko'ra, agar $x \neq 0$ va $x \in I$ bo'lsa, u holda $e \in I = Ix$, uchun $x \in I$ idealda o'zining teskari elementiga ega.

$\tau - e$ elementning R halqadagi annulyatori bo'lsin. U holda τR halqaning idealidir va $R = I \oplus \tau$. haqiqatan ham, agar $x \in R$ bo'lsa, u holda $x = ex + (x - ex) \in I + \tau$. shu bilan birga agar $x \in I \cap \tau$ bo'lsa, $x = ex = 0$.

Agar $\tau = 0$ bo'lsa, u holda R maydon bo'ladi. Aks holda, τ ideal uchun lemmada R halqaga qo'yilgan barcha barcha shartlar bajariladi. Biz yuqoridagi fikrlarni R halqa o'rniga τ idealni olgan holda takrorlaymiz. Shu yo'l bilan minimal ideallarning $I_1, I_2, \dots, I$ ketma-ketligini olamiz. Bu yerda ideallardan har biri maydon bo'ladi, va I_k maydon e_k birlik elementga ega,

$k = 1, 2, \dots, n$. bundan tashqari, $R = I_1 \oplus I_1$, $\tau_1 = \tau_{n+1}$ shartlarga qanoatlantiruvchi $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ ideallarni ham olamiz. Ammo $\tau_1 \supset \tau_2 \supset \dots$ bu ideallarning kamayuvchi zanjiridir va u cheklidir (lemma shartiga ko'ra). $I_k = R_{e_k}$ bo'lgani uchun teorema isboti o'z yakunining topdi.

Lemma. $A - R$ ustida chekli o'lchovli, formal haqiqiy, birlik elementli yordan algebrasi bo'lsin. U holda quyidagilarga ega bo'lamiz:

(I) Anilpotent elementlarga ega emas.

(II) A algebraning ixtiyoriy p minimal yo'lda shu va faqat shu holda qachonki $\{pAp\} = Rp$.

(III) A algebraning ixtiyoriy elementi A algebraning birn bir maksimal qism algebrasiga tegishlidir, va har bir shunday qism algebra $R_{p_1} \oplus \dots \oplus R_{p_n}$ ko'rinishga ega, bunda $p_1, \dots, p_n$ – yig'indisi 1 ga teng bo'lgan o'zaro orthogonal minimal proektorlardir.

(IV) agar p va qA algebraning ortogonal minimal proektor bo'lsa, va $a \in \{pAq\}$ – element bo'lsa, u holda $a^2 = \lambda(p + q)$, bu yerda $\lambda \in R$, $\lambda \geq 0$. Xususan, yoki $\{pAq\} = 0$, yoki p va q kuchli bog'langandir.

(V) agar $a \in A$ va pA algebraning minimal proektor bo'lsa, u holda $\{pa^2p\} = \lambda p$, bu yerda $\lambda \in R$, $\lambda \geq 0$.

(VI) $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$ bo'lsin, bunda $p_1, \dots, p_n$ o'zaro orthogonal minimal proektorlar va $\alpha_i \in R$. u holda a element biror element kvadrati bo'ladi shu va faqat shu xolda agar $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

(VII) agar $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ bo'lsa, u holda $\sum_{i=1}^m a_i^2$ element kvadrat bo'ladi.

Isbot. (I) $a \in A$ nilpotent element bo'lsin, ya'ni $a^{m-1} \neq 0$, $a^m = 0$. $K - \frac{1}{2}m \leq \frac{1}{2}(m+1)$ tengsizlikka qanoatlantiruvchi butun son bo'lsin. U holda $2k \geq m$. demak, $a^{2k} = 0$. Ammo, formal haqiqiylik xossasiga ko'ra $a^k = 0$. $k < m$ bo'lgani uchun bu ziddiyatdir.

(II) Ravshaki, agar p, q – proektorlar va $pq = q$ bolsa, u holda

$q = \{pqp\} \in \{pAp\}$. bundan, agar $\{pAp\} = R_p$ bo'lsa $q = 0$ yoki $q = p$ bo'lishi shart. Shuning uchun p minimaldir. Teskarisi, endi p minimal proektor bo'lsin va $a \in \{pAp\}$. a va p elementlar yordamida qurilgan algebra yuqoridagi lemmaning shartlarini qanoatlantiradi. Shuning uchun bu algevara maydonlarning to'g'ri yig'indisi ko'rinishida bo'ladi. Xususan, bu algebraning birlik elementi p maydonlarning birlik elementlari $q_1, q_2, \dots, q_n$ yig'indisiga teng. p – minimal proektor bo'lgani uchun $n = 1$ bo'lishi shart. Demak, a va p

elementlar yordamida qurilgan algebra maydon bo'ladi. Bu maydon faqat R ustida chekli o'lchovli R yoki C maydon bo'lishi mumkin. C maydon formal haqiqiy emas. Demak, bu maydon R_p . shuning uchun $a \in R_p$ yoki $\{pAp\} = R_p$.

(III) Kuchli assotsativlik xossasiga ko'ra A algebraning har bir elementi biron bir assotsativ qism algebrada yotadi. Ravshanki, o'suvchi zanjirni hosil qiluvchi assotsativ qism elgebralar assotsativ qism algebra bo'ladi. Shuning uchun berilgan elementni o'z ichiga oluvchi maksimal qism algebra mavjuddir. (tsorn lemmasiga ko'ra bu cheksiz o'lchovli holda ham o'rilibdir). U holda $1 \in R$. Avvalgi lemmaga ko'ra R algebrap $_1, p_2, \dots, p_n$ o'zaro orthogonal bo'lgan, yig'indisi birga teng proektorlar mavjud va $i = 1, 2, \dots, n$ uchun R_{p_i} maydondir. Yana, bu maydon chekli o'lchovli va R ustida formal haqiqiy bo'lgani uchun u R_{p_i} korinishdadir. Shuning uchun $R = R_{p_1} \oplus \dots \oplus R_{p_n}$. Agar $p_1 A$ algebra minimal bo'lsa, $0 \neq p \neq q_1$ shrt bajarilganda $p_1 q = p$ shrtini qanoatlantiruvchi q proektorni olamiz u holda $q = \{p_1 q p_1\}$. Shuning uchun $i \neq 1$ bo'lganda $p_i q = 0$. bundan kelib chiqadiki $Rp \oplus R(p_1 - q_1) \oplus Rp_2 \oplus \dots \oplus R_{p_n}$ yig'indi R algebrani o'z ichiga oluvchi assotsiativ algebradir. Bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, p_1 minimaldir, va shunga o'xshash $p_2, \dots, p_n$ proektorlar ham minimaldir.

(IV) p, q – ortogonal minimal proektorlar va $a \in \{pAq\}$ bo'lsin.

(II) Punktga va Pirs komponentlarining ko'paytirish qoidalariga ko'ra $a^2 = \lambda_1 p + \lambda_2 q$ bunda $\lambda_1 \in R$. Buni $a^2 = \lambda(p + q) + \mu p$ ko'rinishda yozish ham mumkin. Ammo a element $p + q$ yig'indi bilan operatorli kommutativdir, a^2 element bilan ham. Shuning uchun $\mu \neq 0$. U holda a va p operatorli kommutativdir. $a \in \{pAq\}$ bo'lgani uchun bu $a = 0$ ekanligini bildiradi. Shuning uchun $\mu \neq 0$, va $a^2 = \lambda(p + q)$. agar $\lambda < 0$ bo'lsa $a^2 + [(-\lambda)^{1/2}(p + q)]^2 = 0$ tenglik o'rilibdir. Bu formal haqiqiylikka ziddir. Shuning uchun $\lambda \geq 0$. Agar $a \neq 0$ bo'lsa $\lambda > 0$. shuning uchun

$(\lambda^{-1/2} a)^2 = p + q$. bunda p va q kuchli bog'liqdir.

(V) $a \in A$ va p – minimal proektor bo'lsin. (III) punktga ko'ra yig'indisi 1 ga teng $p_1, p_2, \dots, p_n$ ortogonal minimal proektorlar mavjud va $p \in Rp_1 \oplus \dots \oplus Rp_n$. Ravshanki, biror bir i uchun $p = p_i$ bo'ladi. Deylik $p = p_1$ bo'lsin. Pishem $a = \sum_{i \leq j} a_{ij}$, bunda

$a_{ij} \in \{p_i A p_i\}$. Pirs komponentlarini ko'paytirish qoidalariga ko'ra $\{p_1 a^2 p_1\} = \sum_{j=1}^n \{p_1 a_{ij}^2 p_1\} a_{11} \in R p_1$ bo'lgani uchun $a_{11}^2 = \lambda_1 p_1$, $\lambda_1 \geq 0$, $j = 2, \dots, n$ uchun. Shunday qilib $\{p a^2 p\} = \sum \lambda_j p$, va $\sum \lambda_j \geq 0$.

(VI) $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$ bo'lsin, bunda $p_1, p_2, \dots, p_n$ o'zaro orthogonal minimal proektorlar va $\alpha_i \in R$. Agar $\alpha_i \geq 0$ bo'lsa u holda a element $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 p_i$ elementning kvadrati bo'ladi. Teskarisi, agar $a = b^2$ bo'lsa, u holda $\alpha_i p_i = \{p_i b^2 p_i\}$ va shuning uchun (V) punktga ko'ra $\alpha_i \geq 0$.

(VII) $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ va $a = \sum_{j=1}^m a_j^2$ bo'lsin. U holda

$\alpha_i p_i = \{p_i a p_i\} = \sum_{j=1}^m \{p_i a_j^2 p_i\}$, shuning uchun $\alpha_i \geq 0$ (V) punktga ko'ra (VI) punktga ko'ra a kvadratdir.

Lemma. A — chekli o'lchovli, birlik elementli, formal haqiqiy yordan algebra bo'lsin. $p_1, p_2, \dots, p_n$ — yig'indisi birga teng bo'lgan o'zaro orthogonal minimal proektor bo'lsin. Agar p_i va p_j kuchli bog'langan bo'lsa buni $p_i \sim p_j$ kabi yozamiz. U holda $\sim$ ekvivalentlik munosabati bo'ladi va har qanday i uchun $\sum_{p_j \sim p_i} p_j A$ algebraning markaziy proektor bo'ladi.

Isbot. Ravshanki, $\sim$ munosabati refleksiv va simmetrikdir. Ma'lumki, agar p_1 proektor ikkita q_2 va q_3 proektorlarni har biri bilan kuchli bog'langan bo'lsa, u holda q_2 va q_3 proektorlar ham o'zaro kuchli bog'langan. shuning uchun $\sim$ tranzitiv munosabat va demak ekvivalentlik munosabatidir.

$e = \sum_{p_j \sim p_i} p_j$ bo'lsin, e proektorning markazi ekanligini ko'rish uchun e ixtiyoriy k, l uchun Pirs $A_{kl} = \{p_k A p_l\}$ komponentlashning har bir elementi bilan operatorli kommutativ ekanligini ko'rsatish kifoya. Ravshanki, agar $p_k \sim p_l \sim p_i$ bo'lsa yoki agar $p_k \sim p_i$ ham $p_l \sim p_i$ ham o'rinli bo'lmasa bu o'rinlidir. Agar $a \in A_{kl}$ bo'lsa, $ae = a$ yoki $ae = 0$ bo'ladi. Bundan $[T_a, T_e] = 0$ tenglik kelib chiqadi. Boshqa tomondan, agar $p_k \sim p_i \not\sim p_l$ bo'lsa, u holda avvalgi lemmaning (VI) punktiga ko'ra $A_{kl} = 0$. bu isbotni yakunlaydi.

Teorema. Har bir chekli o'lchovli, formal haqiqiy, birlik elementga yordan algebra A sodda algebralarning to'g'ri yig'indisi ko'rinishida bo'ladi. Agar A sodda algebra bo'lsa,

u yig'indisi 1 ga teng $n \geq 1$ dona o'zaro orthogonal va kuchli bog'langan minimal proektorlarga ega bo'ladi. Agar $n = 1$ bo'lsa, u holda $A \cong R$. agar $n \geq 3$ bo'lsa, A algebra $H_n(R)$, $H_n(C)$, $H_n(H)$, yoki, $n = 3$ bo'lganda $H_3(O)$, algebralardan biriga izamorf bo'ladi.

Isbot. A — chekli o'lchovli, formal haqiqiy birlik elementli yordan algebra bo'lsin. U holda berilgan paragrafning uchunchi lemmasiga ko'ra A algebra yig'indisi 1 ga teng $n \geq 1$ ta o'zaro orthogonal $p_1, p_2, \dots, p_n$ minimal proektorlarni o'z ichiga oladi. Agar e proektor A algebra markaziy bo'lsa, eA ideal bo'ladi va $A = eA + (1 - e)A$ yig'indi to'g'ri yig'indi, ya'ni $A = eA \oplus (1 - e)A$ bo'ladi. Shuning uchun bundan avval lemmaga ko'ra ikkita narsaga ega bo'lamiz. Birinchisi, agar A sodda algebra bo'lsa, u holda bu algebrada no'ldan farqli markaziy proektorlar mavjud emas va $p_1, p_2, \dots, p_n$ proektorlar juftligi bilan kuchli bog'langandir. Ikkinchisi, A algebra, yig'indisi 1 ga teng bo'lgan o'zaro orthogonal va kuchli bog'langan minimal proektorlarni o'z ichiga olgan algebraning to'g'ri yig'indisiga teng.

Agar algebra A bu talabga javob bersa A sodda algebra bo'lishini ko'rsatamiz. $I - A$ algebraning ideali bo'lsin, $a \in I$ — no'ldan farqli element bo'lsin va quyidagi yozuv kiritamiz $a = \sum_{i \leq j} a_{ij}$, bunda $a_{ij} \in A_{ij} = \{p_i A p_j\}$. shunday i, j ideallar olamizki $a_{ij} \neq 0$ bo'lsin. Agar $i = j$ bo'lsa, u holda $a_{ii} = \{p_i a p_i\} \in I$. berilgan paragrafning (&3) uchinchi lemmasining (II) punktiga ko'ra $a_{ii} = \lambda p_i$ bunda $\lambda \neq 0$, $p_i \in I$. agar $i \neq j$ bo'lsa, u holda yana shu lemmaning (IV) punktiga ko'ra $a_{ij}^2 = \lambda(p_i + p_j)$, $a_{ij} = 2\{p_i a p_j\} \in I$, shuning uchun $\lambda^{-1} p_i \cdot a_{ij}^2$ element I idealga tegishli bo'ladi. Bu shuni bildiradiki, $b = 2p_i b$ (yoki agar $k = i$ bo'lsa $b = p_i b$) bo'lgani uchun har qanday $b \in A_{ki}$ element ixtiyoriy k uchun I idealga tegishli bo'ladi. A_{ki} komponentaning ixtiyoriy elementi uchun yuqoridagi fikrlarni takrorlaymiz. Bundan $p_k \in I$ ekanligi va $1 = \sum p_k$ ekanligi kelib chiqadi. $I = A$ va soda algebradir.

Agar $n = 1$ bo'lsa shu paragrafning uchunchi lemmasining (II) nuqtaga ko'ra $A \cong R$ bo'ladi. Agar $n \geq 3$ bo'lsa, 2 — & ning kordinatizatsion teoremasiga ko'ra $A \cong H_n(R)$, biron bir haqiqiy $*$ — algebra R uchun. $U_{e_{11}}(H_n(R)) = R_{sa} e_{11}$ bo'lgani uchun yana o'sha (II) nuqtaga ko'ra

$R_{sa} = R1$. $x \in R$ – noldan farqli element bo'lsin. $a = xe_{12} + x^*e_{21}$ bo'lsin. U holda $0 \neq a^2 = (xx^*)e_{11} + (x^*x)e_{22}$. shunday qilib yoki xx^* yoki x^*x noldan farqli.

Ammo, $x + x^* \in R_{sa} = R_1$ bo'lgani uchun, x va x^* o'zaro kommutativdir. Demak, $x^*x \neq 0$ [HOS] kitobining 2.7.8 punkitiga ko'ra R algebra R, C, H algebralardan biriga yoki, agar $n = 3$ bo'lsa O Keli sonlar algebrasiga izomorfdir. Chekliu o'lchovli formal haqiqiy yordan algebraning klassifikasiyasi to'liq bo'lishi uchun biz $n = 2$ holni ko'rib chiqishimiz kerak.

Teorama. Har qanday chekli o'lchovli, formal haqiqiy, birlik elementli yordan algebra, qaysiki bundan tashqari yana soda bo'lgan va yig'indisi 1 ga teng bo'lgan ikkita proektorga ega bo'lgan chekli o'lchovli spin faktordir.

Isbot. p va q –teorema shartiga qanoatlantiruvchi A algebraning minimal proektorlari va $p + q = 1$ bo'lsin. Ravshanki, p va q o'zaro ortoganaldir. Shu paragrifning uchinchi lemmasining (ii) punkitiga ko'ra quyidagi Pirs yoyilmasi o'rinalidir. $A = Rp \oplus Rq \oplus A_{12}$, bu yerda $A_{12} = \{pAq\}$. O'sha lemmaning (iv) punkitiga ko'ra, agar $a \in A_{12}$ bo'lsa, u holda $a^2 = \lambda 1$, bunda $\lambda \in R$, $\lambda \geq 0$. $a \cdot b = \frac{1}{2}[(a+b)^2 - a^2 - b^2]$ bop'lgani uchun, quyidagiga ega bo'lamiz: $a \cdot b \in R \cdot 1$ ixtiyoriy $a, b \in A_{12}$ elementlar uchun. Shunday qilib, A_{12} vektor fazoda shunday simmetrik, musbat aniqlangan ichki ko'paytiruv mavjudki

$$a \cdot b = (a, b)1 \quad (a, b \in A_{12})$$

shart bajariladi. Agar $a \in A_{12}$ bo'lsa, u holda $pa = \frac{1}{2}a = qa$. shuning uchun $(p - q) \cdot a = 0$. Shu bilan birga $(p - q)^2 = 1$. shuning uchun yuqorida aniqlangan ichki ko'paytiruv $H = R(p - q) \oplus A_{12}$ vektor fazoga kengaytirilishi (yoyilishi) mumkin va $a \cdot b = (a, b)1$, $(a, b \in H)$ o'rinli bo'ladi. Shuni ta'kidlash kerakki $\dim H \geq 2$. agar $A_{12} = 0$ bo'lsa, u holda $A = Rp \oplus Rq$ sodda soda algebra bo'lmaydi. Demak $A = H \oplus R \cdot 1$. Teorema isboti yakunlandi. 2×2 - o'lchovli matritsalar algebralari $H_2(R), H_2(C), H_2(H)$ va $H_2(O)$ chekli o'lchovli spin-faktorlardir. Haqiqatan ham, ichki ko'paytmali H fazo (Evkilid fazosi) uchun ortonormal bazis quyidagi matritsalaridan birinchi ikkitasidan (uchtasidan, beshtasidan yoki to'qqiztasidan mos ravishda) tashkil topadi.

1.3. § JB – ALGBRLAR

Berilgan paragraph o'z-o'ziga qo'shma operatorlar yordan algebralari (JC va JW algebralari) va ularning abetrakt analoglari $-JB$ va JBW – algebralarga bag'ishlangan. 1965-yilda D. M. Toppingning ishida [Top 1] JW – algebralari birinchi marta sistematik o'rganilgan. Keyinroq JC – va JW – algebralarni tadqiq qilish Sh. A. Ayunov, va boshqalarning ishlarida davom ettirilgan.

Bu yo'nalishning yana ham ribojlanishi 1970- yillarda E. M. Alrsen, F. V. Shults, E. A. Shtyormer [SSA] hamda F. V. Shultsning [Sh] ishlari paydo bo'lgandan keyin boshlandi. Ularning ishlarida yordan banax algebralari $-JB$ – va JBW algebralari kiritilgan va o'rganilgan edi. Bu yerda hususan Gelfand-Naymork teoremasining analogik isbotlangan. Bu teoremaning Gelfond-Naymork teoremasidan muhim farqi shundaki, operator ko'rinishga ega bo'lmagan mustasnoli IB – algebralari mavjud. Yordan-banax algebralari bo'yicha kerakli ma'lumotlar [NOS], [A1], [A2] monografiyalarda mavjud.

Operatorlar algebralari nazariyasidan ma'lumki, ixtiyoriy N kompleks Gilbert fazosi uchun barcha chegaralangan chiziqli operatorlarning $B(H)$ banax fazosi fon Neyman algebrasi bo'ladi. Bu algebraning ermit qismi $B(H)_{sa}$ yordan ko'paytirish amaliga nisbatan yopiqdir, ya'ni $\frac{1}{2}(ab + ba) \in B(H)_{sa}$ ixtiyoriy $a, b \in B(H)_{sa}$ elementlar uchun. $B(H)_{sa}$ to'plam bu amal bilan birga maxsus yordan algebra, ya'ni JC – algebra bo'ladi. Bu H kompleks gilbert fazosida aniqlangan barcha chegaralangan chiziqli o'z-o'ziga qo'shma operatorlar yordan algebrasi ham $B(H)_{sa}$ kabi belgilaymiz.

Ta'rif. JC – algebra - bu normaga va

$$ab = \left(\frac{1}{2}\right)(ab + ba),$$

bu yerda ab – operatorlarning assotsiativ kompozitsiyasi, $a, b \in B(H)_{sa}$, yordan ko'paytmaga nisbatan yopiq bo'lgan $B(H)_{sa}$ algebraning haqiqiy chiziqli qism fazosidir. Normalangan yordan algebraning ham JC – algebra deb ataymiz, agar u yuqorida kiritilgan JC – algebraga izometrik izomorf bo'lsa.

Agar §, $\eta \in H$ bo'lsa, u holda $\omega_{\xi\eta} \in B(H)^*$ funksionalni

$\omega_{\xi\eta}(x) = (x\xi, \eta)$ kabi aniqlaymiz. $B(H)_{\sim} - B(H)^*$ fazoning, $\omega_{\xi\eta}$, ko'rinishdagi funkcionallar yordamida qurilgan vector qism fazosi bo'lsin, va $B(H)_{\sim} - B(H)_{\sim}$ qism fazoning $B(H)^*$ banax fazosidagi bir tekist (norma bo'yicha) yopilmasi bo'lsin. Bu topologiyasi bilan ta'minlangan. Bu topologiya ultra-kuchsiz topologiya deb ataladi.

Ta'rif. $B(H)_{sa}$ yordan algebraning M yordan qism algebrasi JW – algebra deb ataladi, agarda M ultra kuchsiz yopiq bo'lsa. $M JW$ – algebraga izomorf bo'lgan JB –algebrani ham JW – algebra deb ataladi.

JC – algebralar C^* –algebraning yordan analoglari va JW – algebralar fon Neyman algebralarining yordan analoglari hisoblanishadi. JC – va JW – algebralar maxsus yordan algebralardir.

C^* – algebralardagiga o'xshash JC –algebralarining ixtiyoriy x, y elementlari uchun $A JC$ –algebraning $\| \cdot \|$ normasiga nisbatan quyidagi tengsizliklar o'rinlidir:

- (1) $\|xy\| \leq \|x\| \|y\| (x, y \in A),$
- (2) $\|x^2\| \leq \|x^2 + y^2\| (x, y \in A),$
- (3) $\|x^2\| = \|x\|^2 (x \in A).$

Ammo, JC –algebra bo'lmagan va o'zida mavjud normaga nisbatan yuqoridagi tengsizliklarni qanoatlantiruvchi va banax fazosi bo'lgan yordan algebra mham mavjud. Bu M_3^8 –mustasnoli yordan algebradir. Shuning uchun JC -algebradan yana ham kengroq tushuncha JB -algebra tushunchasini kiritish tabiiy holdir.

Ta'rif. Bir vaqtning o'zida yordan algebrasi bo'lgan A haqiqiy banax fazosi JB - algebra deb ataladi, agarda u qo'shimcha ravishda yuqoridagi (1), (2) va (3) tengsizliklarni qanoatlantirsa.

Har qanday JB – algebra formal haqiqiy yordan algebra bo'ladi.

Teorema. (JB -algebralar uchun Kon-Shirshov teremasi). Ikki element yordamida qurilgan ixtiyoriy JB -algebra JC -algebra bo'ladi.

Berilgan $A JB$ -algebraning o'suvchi opproksimativ birligi – bu shunday $(U_{\lambda})_{\lambda \in J} \subset A$ to'plamki, bunda $J \subset R$ va

- (i) $\|U_\lambda\| \leq 1$ ixtiyoriy $\lambda \in J$ uchun,
- (ii) $0 \leq U_\lambda \leq U_\mu$ ixtiyoriy $\lambda \leq \mu$ shertga qanoatlantiruvchi $\mu, \lambda \in J$ uchun.
- (iii) $\|U_\lambda \cdot a - a\| \rightarrow 0$ barcha $a \in A$ elementlar uchun,
shartlar o'rinli bo'ladi.

Bu to'plamning nomi shundan kelib chiqqanki bu to'plam qaysidir ma'noda birlik element xossalariga ega (bu, masalan, (iii) xossada ko'rinib turibdi).

JB -algebra A berilgan bo'lsin. U holda $A_+ = [x^2 : x \in A]$ to'plam qavariq konus bo'ladi va u A algebrada tartiblangan vector fazosi tuzilishini aniqlaydi. Bunda A JB -algebraning 1 birlik elementi tartiblangan vector fazosining kuchli tartibli birlik elementi bo'lib xizmat qiladi, $[-1, 1] := \{x \in A : -1 \leq x \leq 1\}$ tartibli interval – birlik doira, ya'ni $\{a \in A : \|a\| \leq 1\}$ to'plam bo'lib xizmat qiladi (ustma-ust tushadi). Bunda $-1 \leq x \leq 1$ va $0 \leq x^2 \leq 1$ tengsizliklar teng kuchlidir. Operator $U_x : A \rightarrow A, U_x a = 2x(xa) - x^2 a, a \in A$, munosabat operatoridir. JB -algebraning idempotent elementlarini (ya'ni $e^2 = e$ xossaga ega bo'lgan) proektorlar deb ham ataladi. JB -algebra markaziga kiruvchi barcha proektorlar to'plami bul algebrasini tashkil qiladi. A JB -algebraning 0, 1 elementlari yordamida qurilgan JB -qismalgebra $C(A)$ kabi belgilanadi. Ravshanki, bu qismalgebra assotsiativdir. JB -algebra markazi $Z(A)$ ham assotsiativ JB -algebra bo'ladi. Bir vaqtning o'zida factor bo'lgan JB -algebra JB -faktor deb ataladi. Ikkita A va B normalangan yordan algebralarining Φ izomorfizmi izometrik deb ataladi, agarda Φ ularning elementlari normasini saqlasa, ya'ni ixtiyoriy $a \in A$ element uchun $\|\Phi(a)\| = \|a\|$ shart o'rinli bo'lsa.

Teorema. $A - JB$ -algebra, $A_0 - A$ JB -algebraning yopiq assotsiativ qismalgebrasi bo'lsin va $1 \in A$ birlik elementni o'zichiga olsin, xususan, ixtiyoriy $a \in A$ element uchun $A_0 = C(a)$ bo'lsin. U holda A_0 algebra biron bir X kompaktda aniqlangan barcha uzluksizhaqiqiy funksiyalarning $C(X)$ algebrasiga izometrik izomorf bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, ixtiyoriy $a \in A_+$ musbat element uchun shunday yagona $x \in A_+$ element mavjudki $a = x^2$ shart bajariladi. Bunda x element $C(a)$ algebrada yotadi.

Lemma. Kompleks gilbert fazosida aniqlangan ixtiyoriy a va b o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun quyidagi shartlar o'zaro ekvivalentdir:

- 1) $ab = ba$;
- 2) ixtiyoriy C o'z-o'ziga qo'shma operatorlar uchun biron bir o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning yordan algebrasida yotgan va bu yordan algebra a va b elementlarni o'z ichiga olgan yordan ko'paytiruv amaliga nisbatan $(a \cdot c) \cdot b = a \cdot (c \cdot b)$ tenglik o'rinli;
- 3) $a^2 \cdot b = a \cdot b \cdot a$ tenglik yordan ko'paytmaga nisbatan o'rinli.

Xususan, berilgan o'z-o'ziga qo'shma operatorlarning yordan algebrasi p'zaro kommutativ operatorlardan (assotsiativ ko'paytmaga nisbatan) tashkil topgan bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki bu algebra yordan ko'paytmaga nisbatan assotsiativ bo'lsa.

Lemma. ([SAX4], [AJ]). $A - JB$ -algebra va $e - A$ algebraning proektori bo'lsin. U holda

- (a) Agar $x \in U_{1-e}(A)$, ya'ni $ex = 0$ bo'lsa, u holda $e \leftrightarrow x$;
- (b) Agar $x \in U_e(A)$, ya'ni $ex = x$ bo'lsa, u holda $e \leftrightarrow x$;
- (c) Agar $x \in U_{1-e}(A)$, $y \in U_e(A)$ bo'lsa, u holda $x \leftrightarrow y$;
- (d) Agar $x \in U_{1-e}(A)$, $y \in U_e(A)$ bo'lsa, u holda $x \pm y \leftrightarrow e$.

Yuqoridagi lemmadan quyidagi lemma kelib chiqadi.

Lemma. $A - JB$ -algebra, $e, x \in A$ va e -proektor bo'lsin. U holda quyidagi shartlar ekvivalentdir:

- 1) $x \leftrightarrow e$;
- 2) Ixtiyoriy $c \in A$ element uchun $(xc)e = x(ce)$, ya'ni x va e elementlar o'zaro operatorli kommutativ;
- 3) $e(ex) = ex$;
- 4) $x_{\frac{1}{2}} = 2\{ex(1-e)\} = 0$.

Shunga o'xshash JB -algebralar va ularning elementlari uchun quyidagi xossalar ham o'rinlidir.

Lemma. $A - JB$ -algebra va e -shu JB -algebraning proektori bo'lsin. U holda

(a) $U_e(A) = \{U_e a : a \in A\}$ to'plam JB -algebra, aniqrog'I, $A - JB$ -algebraning qismalgebrasi bo'ladi;

(b) ixtiyoriy $x \in A_+$ musbat element uchun $U_e x = 0$ tenglikdan $x e = 0$ tenglik kelib chiqadi.

(c) ixtiyoriy $x, y \in A_+$ elementlar uchun quyidagi shartlar o'zaro ekvivalentdirlar:

$$(1) U_x y = 0;$$

$$(2) U_y x = 0;$$

$$(3) xy = 0.$$

(d) ixtiyoriy $f \in A$ proektor uchun quyidagi shartlar o'zaro ekvivalentdirlar:

$$(1) e \leq f;$$

$$(2) ef = e.$$

A – JB -algebra bo'lsin, u holda A algebraning q proektor minimal proektor deb ataladi, agar ixtiyoriy $p \in A$ proektor uchun $p \leq q$ shartdan $p = q$ kelib chiqsa. A algebraning Φ funksionali ($T : A \rightarrow A$ operatori) normal deyiladi, agar ixtiyoriy o'suvchi tarmoqli to'plam $(x_\alpha \subseteq A)$ uchun, qaysiki, $x = \sup x_\alpha$ yuqori aniq chegaraga ega bo'lgan, $\Phi(x) = \sup \Phi(x_\alpha)$ ($T(x) = \sup T(x_\alpha)$) sharti bajarilsa. Shuni ta'kidlash kerakki A JB -algebra va uning a elementi (ixtiyoriy) uchun $U_a : A \rightarrow A$ operator normal operatoridir.

JB -algebra A normal funksionallarning ajratuvchi to'plamiga ega deyiladi, agar ixtiyoriy $x \in A$, $x \neq 0$ element uchun shunday $\rho \in A^*$ normal funksional mavjud bo'lsaki $\rho(x^2) > 0$ shart bajarilsa. A JB -algebra monoton to'liq deyiladi, agar ixtiyoriy $\{x_\alpha\} \subseteq A$ o'suvchi va yuqoridan chegaralangan tarmoqli to'plam uchun A algebrada $x = \sup x_\alpha$ aniq yuqori chegara mavjud bo'lsa.

Ta'rif. Agar A JB -algebra monoton to'liq va normal funksionallarning ajratuvchi to'plamiga ega bo'lsa, u holda bu algebra JBW -algebra deyiladi.

A JBW -algebraning barcha proektorlari to'plami tartibi bo'yicha to'liq ortomodulyar panjara bo'ladi va $P(A)$ kabi belgilanadi, barcha markaziy elementlari to'plami esa tartib bo'yicha to'liq bul algebrasi bo'ladi va $Z(A)$ kabi belgilanadi. JBW -algebraning boshqa ekvivalent ta'rifi ham mavjud.

Teorema. JB -algebra A JBW -algebra bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki bo algebra old qo'shma fazoga ega bo'lsa (ya'ni shunday banax fazosi B mavjud bo'lsaki $A = B^*$ shart bajarilsa, bu terda B^* —bu B banax fazoga qo'shma fazo). Bunda A algebraga old qo'shma fazo (ya'ni B banax fazo) yagonadir va N barcha normal funksionallar (A algebra ustida aniqlangan) vector fazosi bilan tenglashtirilishi mumkin (ya'ni $B = N$).

Lemma. M — JBW -algebra va $a \in M$ algebraning elementi bo'lsin. U holda M algebrada $r(a)a = a$ shartga qanoatlantiruvchi eng kichik $r(a)$ proektor mavjud. Bunda $r(a)$ proektor $W(a)$ qismalgebrada yotadi, qaysiki $W(a)$ —bu 1 va a elementlari yordamida qurilgan JBW -qismalgebra, $r(a)$ proektorni a elementning tashuvchisi deyiladi.

Agar berilgan kompleks gilbert fazoning o'z-o'ziga qwo'shma operatorlari JC -algebrasi kuchsiz (operatorli) topologiyada yopiq bo'lsa, u holda bu JC -algebra JW -algebra deb ataladi. JW -algebra JBW -algebraga misol bo'la oladi. Ixtiyoriy fon Neyman algebrasini ermit qismi JW -algebra va demak JBW -algebra bo'ladi.

X —kompakt, A — JB -algebra bo'lsin. X kompaktni AB -algebraga akslantiruvchi barcha uzluksiz funksiyalar to'plamini $C(X, A)$ orqali belgilaymiz. Agar $C(X, A)$ elementlari uchun nuqtalar bo'yicha ko'paytirish va qo'shish amallarini kiritsak $C(X, A)$ yordan algebrasiga aylanadi. Agar $C(X, A)$ yordan algebrasida aniqlangan norma funksiyaning qiymatlari normalarining aniq yuqori chegarasi bo'lsa, u holda $C(X, A)JB$ -algebraga aylanadi.

Agar X kompakt uchun X kompaktda aniqlangan barcha haqiqiy sonli qiymatli uzluksiz funksiyalar algebrasi $C(X)$ old qo'shma fazoga ega bo'lsa, ya'ni shunday vector fazo B mavjud bo'lsaki $B^* = C(X)$ shart bajarilsa X giperstoun kompakti deb ataladi. Kompakt X giperstoun kompakti bo'lganda $C(X)$ algebra assotsiativ JBW -algebraning klassik misoli hisoblanadi. $C(X, M_3^8) - X$ giperstoun kompakting M_3^8 istisnoli JBW -algebraga barcha uzluksiz akslantirishlari yordan algebrasi bo'lsin, bu yerda M_3^8 —Keli sonlari ustida aniqlangan barcha 3×3 o'lchovlo ermit matritsalar yordan algebrasi. U holda $C(X, M_3^8)$ assotsiativ bo'lmagan JBW -algebraga misol bo'ladi. JBW —algebraga yana bir misol quyidagi teoremada mavjud.

Teorema. A — JB -algebra bo'lsin. U holda A^{**} vector fazo JBW -algebra bo'ladi, bu yerda yordan ko'paytma A algebradagi yordan ko'paytmaning A algebradan A^{**} vector fazoga

kuchsiz $-\ast$ uzliksiz davom etishidir. Bundan tashqari, $A^\ast$ vector fazodagi har bir funksionalning kuchsiz $=\ast$ nuzluksiz davom ettirilishi $A^{\ast\ast}$ algebra ustida normal chiziqli funksional bo'ladi.

Masalan, $M_n(R) - R$ haqiqiy sonlar maydoni ustida $n \times n$ o'lchovli ermit matritsalar yordan algebrasining ikkinchi qo'shma fazosi $H_n(R)^{\ast\ast}$ shu yordan algebraning o'zi bilan ustma - ust tushadi, ya'ni $H_n(R)^{\ast\ast} = H_n(R)$. sababi $H_n(R)$ algebra chekli p'lchovli vector fazo va demak, refleksiv vector fazodir

Ta'rif. Birlik elementli tartiblangan normalangan fazo deb shunday qisman tartiblangan normalangan vector fazoga aytiladiki, bunda belgilangan 1 tartibga nisbatan birlik element mavjud, tartib arhimed tartibidir (ya'ni ixtiyoriy $n = 1, 2, \dots$ uchun $na \leq 1$ shartdan kelib chiqadi) va norma quyidagi shartga qanoatlantiradi $\|a\| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda 1 \leq a \leq \lambda 1\}$. Bu yerda tartibga nisbatan birlik element deb A tartiblangan vector fazoning shunday 1 elementiga aytiladiki, bunda ixtiyoriy $a \in A$ element uchun $\lambda \geq 0$ nomanfiy son mavjud bo'ladi va $-\lambda 1 \leq a \leq \lambda 1$ tengsizliklar bajariladi.

Teorema. Agar $A - JB$ -algebra bo'lsa $A^+ = \{a^2 : a \in A\}$ to'plam to'g'ri qavariq konus bo'ladi va bu konus A algebrani norma bo'yicha to'la tartibga nisbatan birlik elementga ega bo'lgan tartiblangan fazoga aylantiradi. Bu yerda multiplikativ birlik element 1 fazoning tartibga nisbatan birlik elementi bo'ladi va agar $-1 \leq a \leq 1$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $0 \leq a^2 \leq 1$ tengsizlik ham o'rinli bo'ladi.

Teskarisiga. Agar A -norma bo'yicha to'la tartibga nisbatan birlik elementga ega bo'lgan vector bo'lsa va unda multiplikativ birlik element dastlabki tartibga nisbatan birlik element bo'ladigan va ixtiyoriy $a \in A$ uchun $-1 \leq a \leq 1$ tengsizliklardan $0 \leq a^2 \leq 1$ tangsizliklar kelib chiqadigan yordan ko'paytma mavjud bo'lsa, u holda A

$$\|a\| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda 1 \leq a \leq \lambda 1\}$$

normaga nisbatan JB -algebra bo'ladi.

Spin faktorlarning tasnifi. JB -algebraning S -simmetriyalar to'plami spin sistema deb ataladi, agar S to'plamda hech bo'lmaganda ikkita ± 1 elementlardan farqli simmetriyalar mavjud bo'lsa va ixtiyoriy $s, t \in S, t \neq s$ simmetriyalar uchun $s \cdot t = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa. Bu

yerda JB -algebraning s elementi simmetriya deb ataladi agar $s^2 = 1$ shart bajarilsa. Masalan, $1, -1$ elementlar simmetriya bo'ladi.

$1_n - M_n(C)$ kompleks sonlar maydoni C ustida aniqlangan barcha $n \times n$ o'lchovli matritsalarining assotsiativ algebrasining birlik elementi bo'lsin. $M_n(C) \oplus M_m(C)$ –tenzor ko'paytmani quyidagicha tushinish mumkin. Bu tensor ko'paytmani $M_{nm}(C)$ kabi $M_n(M_m(C))$ ga tenglashtirilgan holda tushinish mumkin. Bunda $M_n(C)$ algebraning $M_m(C)$ algebraga yotqizilishi quyidagicha bo'ladi : agar $a \in M_n(C)$ bo'lsa, u holda

$$a \oplus 1_m = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_n(M_m(C))$$

–bu $m \times m$ o'lchovli, diaganallarida a matritsa joylashgan bosha elementlari nol bo'lgan, matritsa. Agar $b = (b_{ij}) \in M_m(C)$ bo'lsa, u holda $1_n \oplus b = (b_{ij} 1_n) \in M_m(M_n(C))$ –bu $m \times m$ o'lchovli komponentlari $b_{ij} 1_n$ ko'rinishda bo'lgan, matritsadir. Tensor ko'paytma $a \oplus b$ quyidagi ko'rinishdagi matritsadir.

$$a \oplus b = (a \oplus 1_m)(a \oplus 1_n) = (b_{ij} a) \in M_m(M_n(C)). \quad a \rightarrow a \oplus 1_m$$

akslantirish orqali aniqlangan $M_n(C)$ algebrani $M_{mn}(C)$ algebraga yotqizishni $M_n(C) \rightarrow M_{mn}(C)$ orqali belgilaymiz va $M_n(C)$ algebrani $M_{mn}(C)$ algebra qismalgebrasi sifatida ko'ramiz. Agar biz buni $M_2(C)$ algebraning o'zini – o'zigz tensor ko'paytmalariga qo'llasak, quyidagi induktiv sistemani olamiz $M_2(C) \rightarrow M_{2^2}(C) \rightarrow M_{2^3}(C) \dots$. bu induktiv sistemaning A_0 induktiv limiti $*$ - algebra bo'ladi. Har bir $M_{2^n}(C)$ algebrada C^* - norma $\| \cdot \|$ yagona bo'lishi uchun, $x \in A_0$ elementning normasini har safar $x \in M_{2^n}(C)$ algebrada o'zining qismi sifatida y elementga ega bo'lganda $\|x\|$ norma $M_{2^n}(C)$ algebrada $\|y\|$ norma bilan ustma – ust tushadigan qilib olsak A_0 algebrada aniqlangan normaga ega bo'lamiz. A_0 algebraning shu norma bo'yicha A_0 to'ldirilgani C^* –algebra bo'ladi. Bu C^* –algebra A odatda CAR –algebra deb ataladi. Ravshanki, A separable C^* - algebra bo'ladi.

Har bir $n \in N$ natural son uchun va N_0 sanoqli kordinal son uchun mos ravishda $M_{2^n}(C), M_{2^n}(C) \oplus M_{2^n}(C)$ yoki A algebradan birini quruvchi spin factor quramiz. Deylik

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$M_2(C)$ algebrada Pauli spin matritsalarini bo'lsin. σ_3^n orqali $M_{2^n}(C)$ algebrada n -o'lchovli $\sigma_3 \oplus \dots \oplus \sigma_3$ tenzor ko'paytmani belgilaymiz. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$s_1 = \sigma_1, s_2 = \sigma_2, s_3 = \sigma_3 \oplus \sigma_3, s_4 = \sigma_3 \oplus \sigma_2, \dots, s_{2n+1} = \sigma_3^n \oplus \sigma_1, s_{2n+2} = \sigma_3^n \oplus \sigma_2.$$

Yuqorida kiritilgan $M_{2^n}(C) \rightarrow M_{2^{n+1}}(C)$ yotqizishlarga nisbatan quyidagiga egamiz $S_k \in M_{2^n}(C)$, agar $k \leq 2n$. $\sigma_i \cdot \sigma_j = \delta_{ij} 1_2$ bo'lgani uchun $P_k = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ – har bir $k \in N$ natural son uchun spin sistema bo'ladi. U holda 1 birlik element va P_k spin sistema o'rami $V_k(k+1)$ -o'lchovli spin factor bo'ladi, agar $k \leq 2n$ bo'lsa. Bu V_k spin factor $M_{2^n}(C)$ algebrada yotadi. Shunga o'xshash fikirlar quyidagi teoremani isbotlashga imkon beradi.

Teorema. Har bir $K \in \{2, 3, \dots\}$ son uchun, agar $K \in (2n-1, 2n)$ bo'lsa $M_{2^n}(C)$ algebrada yotuvchi $k+1$ o'lchamga ega bo'lgan V_k spin factor mavjud. Shu bilan birga agar $k = \infty$ bo'lsa A CAR algebrada yotuvchi k o'lchamli V_k spin factor mavjud. V_k spin factor yordamida qurilgan $C^*(V_k)C^*$ – algebra quyidagi ko'rinishlardan biriga ega bo'lishi mumkin:

$$C^*(V_k) = \begin{cases} M_{2^{n-1}}(C) \oplus M_{2^{n-1}}(C), & \text{agar } K = 2n-1, \text{ bo'lsa} \\ M_{2^n}(C), & \text{agar } k = 2n \text{ bo'lsa}, \\ A, & \text{agar } k = \infty \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Teorema. A – spin factor bo'lsin. Agar A biron – bir teskarilanuvchi JC – algebraga izomorf bo'lsa, u holda A spin factor V_2, V_3, V_5 spin faktorlardan biriga biriga izomorfdir. Teskarisiga, V_2 va V_3 spin faktorlar uchun ular izomorf bo'lgan teskarilanuvchi JC – algebralar ham teskarilanuvchi bo'lmagan JC – algebralar ham mavjud.

II BOB. AJW –ALGEBRALAR VA ULARNING QOBIQ C^* -ALGEBRALARI

2.1. § C^* –ALGEBRALAR, AW^* –ALGEBRALAR VA FON NEYMAN ALGEBRALARI

C^* –algebralar nazariyasi – bu normalangan halqalar nazariyasining eng rivojlangan va ilovalarga boy qismidir. U faqat har xil mutaxassisliklardagi matematiklar uchungina emas balki nazariyotchi – fiziklar uchun ham tadqiqot uchun odatiy apparatga aylangan. C^* –algebralar nazariyasini erkin qo'llamasdan turib, kvant mexanikasini, maydonlar nazariyasini va statistic fizikani zamonaviy ko'rinishda bayon qilish mumkin emas. Oxirgi 60-65 yilda bu nazariyada kuchli natijalar olindi.

C^* –algebra tushunchasiga ta'rif berish uchun eng avvalo invalyutiv algebra tushunchasini kiritish lozim.

Ta'rif. $A - C$ kompleks sonlar maydoni ustida algebra bo'lsin. A algebrada aniqlangan invalyutsiya deb shunday A algebrani A algebraning o'ziga akslantirishga $x \rightarrow x^*$ aytiladiki, bunda ixtiyoriy $x, y \in A$ va $\lambda \in C$ uchun

$$(i)(x^*)^* = x; (ii)(x + y)^* = x^* + y^*, (iii)(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*; (iv) (xy)^* = y^*x^*$$

shartlar bajariladi. Invalyutsiyaga ega bo'lgan C ustida aniqlangan algebra invalyutiv algebra deb ataladi. Bu yerda $\bar{\lambda}$ –bu $\lambda \in C$ songa qo'shma sonni bildiradi. x^* elementni ko'pincha x elementga qo'shma element deb yuritiladi. Yuqoridagi (i) xossadan ko'rinadiki invalyutsiya A algebrani A algebraga biyektiv akslantirish bo'ladi.

Misollar. $A = C$ algebrada $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ (λ songa qo'shma kompleks son) akslantirish invalyutsiya bo'ladi. Bunda C kommutativ invalyutiv algebraga aylanadi.

$M_n(C) - C$ maydon ustida $n \times n$ –o'lchovli barcha matritsalar algebrasi bo'lsin $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ –shu matritsalar algebrasining elementi bo'lsin. Bu yerda i –qator nomerini, j –ustun nomerini va $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ –elementlari a_{ij} kompleks sonlardan iborat $n \times n$ o'lchovli matritsani bildiradi. Shunda $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n \in M_n(C)$ matritsani olaylikki, bunda $i, j = 1, 2, \dots, n$ uchun $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ bo'lsin. U holda

$$\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \rightarrow \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n, \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \in M_n(C)$$

akslantirish invalyutsiya bo'ladi va $M_n(C)$ algebra bu invalyutsiya yordamid invalyutiv algebraga aylanadi.

A –invalyutiv algebra bo'lsin. Element $x \in A$ ermit elementi deyiladi, agar $x^* = x$ bo'lsa va normal element deyiladi, agar $xx^* = x^*x$ bo'lsa. Idenpotentli (ya'ni $x^2 = x$ bo'lgan) ermit elementi proektor deb ataladi. Har bir ermit elementi normal element bo'ladi. Barcha ermit elementlar to'plami A algebraning haqiqiy vektor qismfazosidir. Agar x va y –ermit elementlari bo'lsa, u holda $(xy)^* = y^*x^* = yx$ va demak, agar x va y kommutativ (ya'ni $xy = yx$) bo'lsa xy ermit elementi bo'ladi. Har bir $x \in A$ uchun xx^* va x^*x elementlar ermit elementlaridir.

Har bir $x \in A$ element $x_1 + ix_2$ ko'rinishda, bu yerda x_1, x_2 –ermit elementlari, faqat yagona usulda yoziladi. Agar $A = C$ bo'lsa bu yoyilma kompleks sonni haqiqiy va mavhum qismlar bo'yicha yoyishdir (masalan, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ kabi). Haqiqatdan ham, agar

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*), x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*),$$

bo'lsa, u holda x_1 va x_2 ermit elementlari bo'ladi va $x = x_1 + ix_2$ tenglikka ega bo'lamiz. Teskarisi $x = x_1 + ix_2$ va x_1, x_2 –ermit elementlari bo'lsa, u holda $x^* = x_1 - ix_2$ bo'ladi, shuning uchun

$$x_1 = \frac{1}{2}(x + x^*), x_2 = \frac{1}{2i}(x - x^*)$$

va bu bizning ta'kidimizni tasdiqlaydi. Quyidagi tengliklar o'rinli

$$xx^* = x_1^2 + x_2^2 + i(x_2x_1 - x_1x_2), x^*x = x_1^2 + x_2^2 + i(x_1x_2 - x_2x_1),$$

shuning uchun, x normal bo'ladi shu va faqat shu holda qachonki x_1 va x_2 o'zaro kommutativ bo'lsa.

Agar A invalyutiv algebra 1 chap birlik elementga ega bo'lsa, u holda har bir $x \in A$ uchun $x \cdot 1^* = (1 \cdot x^*)^* = x^{**} = x$, shuning uchun 1^* –o'ng birlik element bo'ladi; demak, $1 = 1^*$ – A algebraning birlik elementidir. Agar $x \in A$ algebraning teskarilanuvchi elementi bo'lsa, u holda

$$(x^{-1})^*x^* = (xx^{-1})^* = 1^* = 1,$$

Shuning uchun x^* element ham teskarilanuvchi va $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$ bo'ladi teskarisi, agar x^* teskarilanuvchi bo'lsa, u holda $x^{**} = x$ ham teskarilanuvchi bo'ladi. element $x \in A$ unitary element deyiladi, agar $xx^* = x^*x = 1$ tengliklar o'rinli bo'lsa, boshqacha qilib aytganda, agar x teskarilanuvchi va $x = x^{*-1}$ bo'lsa. A invalyutiv algebraning barcha unitary elementlari ko'paytiruv bo'yicha gruppasi – A algebraning unitary gruppasini tashkil qiladi; haqiqatan ham, agar x va $y \in A$ algebraning unitary elementlari bo'lsa, u holda $(xy)^{*-1} = (y^*x^*)^{-1} = x^{*-1}y^{*-1} = xy$, shuning uchun xy unitary elementdir va $(x^{-1})^{*-1} = (x^{*-1})^{-1} = x^{-1}$ bo'lsa, u holda x^{-1} unitar elementdir.

A, B – ikkita invalyutiv algebra bo'lsin. A algebrani B algebraga φ akslantirishni A algebrani B algebraga morfizmi deb ataymiz, agar ixtiyoriy $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$ uchun $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, $\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$, $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ tengliklar o'rinli bo'lsa. A algebraning B algebraga biektiv morfizmi A algebraning B algebraga izomorfizmi deyiladi.

A – invalyutiv algebra bo'lsin. A algebraning invalyutsiyasi o'ziga o'tuvchi qismalgebrasi A algebraning invalyutiv qismalgebrasi deb ataladi. Invalyutiv qismalgebraning ixtiyoriy kesishmasi invalyutiv qismalgebra bo'ladi; demak, agar M – A algebraning qism to'plami bo'lsa, u holda A algebrada M to'plamni o'z ichiga oluvchi eng kichik invalyutiv qismalgebra mavjud, bu M to'plam bo'yicha qurilgan invalyutiv qismalgebra deb ataladi. Bu

$$x_1 x_2 \dots x_n, \quad x_1 x_2, \dots, x_n \in M \cup M^*$$

Ko'rinishidagi elementlarning chiziqli kombinatsiyalari to'plamidir. M to'plam faqat bir x elementdan iborat bo'lsa, u holda bu qismalgebra kommutativ bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki x normal element bo'lsa.

A – invalyutiv algebra bo'lsin, M – A algebraning o'z – o'ziga qo'shma qismi. U holda M to'plamning A algebradagi M^I kommutanti A algebraning invalyutiv qismalgebrasi bo'ladi. demak, M to'plamning A algebradagi bikommutanti M^{II} ham M to'plamni o'z ichiga olgan A algebraning invalyutiv qismalgebrasidir; bu algebra, umuman olganda, M to'plam bo'yicha qurilgan A algebraning invalyutiv qismalgebrasidan farq qiladi (masalan, agar A kommutativ bo'lsa). Agar M to'plam elementlari juft – jufti bilan kommutativ bo'lsa, u holda $M \subset M^I$, shuning

uchun $M^I \supset M^{II}$ va M^{II} – kommutativ invalyutiv qismalgebradir. $x \in A$ va $M = \{x, x^*\}$ bo'lsin, u holda M^{II} kommutativ bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki x normal element bo'lsa.

C^* –algebraga ta'rif berish uchun yana invalyutiv normalangan algebra tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif. Invalyutiv normalangan algebra deb, har bir $x \in A$ element uchun $\|x^*\| = \|x\|$ shartni qanoatlantiruvchi $x \rightarrow x^*$ invalyutsiya bilan ta'minlangan normalangan A algebraga aytiladi. Agar, bundan tashqari, A algebra berilgan normaga nisbatan to'liq bo'lsa, u holda A invalyutiv banax algebrasi deb ataladi.

Misollar. Yuqorida keltirilgan $A = C$, $M_n(C)$ algebralar invalyutiv banax algebralarga misol bo'la oladi. Bunda norma quyidagicha kiritila: $A = C$ uchun $\|\lambda\| = |\lambda|, \lambda \in C$ algebra uchun $a \in M_n(C)$ uchun $\|a\| = \sup\{\|a(v)\| : \|v\| = 1, v \in M^n\}$ deb olinadi.

$\hat{A}$ –invalyutiv normalangan algebra bo'lsin, $\tilde{A} = A$ algebradan birlik elementni biriktirish orqali hosil qilingan invalyutiv algebra bo'lsin. $\hat{A}$ algebrada A algebra normasini davom ettiruvchi va $\hat{A}$ algebrani invalyutiv normalangan algebraga aylantiruvchi norma mavjud (masalan, $\lambda \in C, x \in A$ uchun $\|(\lambda, x)\| = |\lambda| + \|x\|$ deb olish mumkin). Har bir shunday yo'l bilan hosil qilingan invalyutiv normalangan algebra A algebradan birlik elementni biriktirish yo'li bilan hosil qilingan invalyutiv normalangan algebra deb ataladi.

A va B –invalyutiv normalangan algebralar bo'lsin. A algebraning B algebraga morfizmi deb A algebrani B algebraga oddiy invalyutiv algebralarning morfizmiga aytiladi (normaga hech qanday shart qo'yilmagan holda). Aksincha A va B invalyutiv normalangan algebralarni izomorfizmi deb normani saqlovchi A algebraning B algebraga invalyutiv algebra sifatida izomorfizmiga aytiladi.

A –invalyutiv normalangan algebra bo'lsin. Invalyutiv qismalgebraning norma bo'yicha yopilmasi invalyutiv algebra bo'ladi. agar $M \subset A$ bo'lsa, u holda M to'plamni o'z ichiga oluvchi eng kichik $B \subset A$ yopiq invalyutiv qismalgebra M to'plamda qurilgan yopiq invalyutiv qismalgebra deb ataladi. Bu algebra M to'plamda qurilgan invalyutiv qismalgebraning yopilmasi bo'ladi. Agar M bir normal elementdan iborat bo'lsa, u holda B kommutativdir.

Endi C^* –algebraning ta’rifini keltiramiz.

Ta’rif. C^* –algebra deb shunday A invalyutiv banax algebraga aytiladiki, bunda $\|x\|^2 = \|x^*x\|$ ixtiyoriy $x \in A$ uchun bajariladi.

Misollar. $C, M_n(C)$ –invalyutiv normalangan fazolar C^* –algebralardir. Ixtiyoriy H kompleks gilbert fazosida aniqlangan barcha chegaralangan chiziqli operatorlari algebrasi $B(H)$ C^* –algebra bo’ladi.

Agar A – C^* -algebra bo’lsa, u holda A algebraning har bir yopiq invalyutiv qismalgebrasi C^* -algebra bo’ladi. Xususan, agar H -gilbert fazo bo’lsa, u holda $B(C)$ algebraning har bir yopiq invalyutiv qismalgebrasi C^* – algebra bo’ladi. Ma’lumki, har bir C^* -algebra shunday ko’rinishdagi C^* -algebra izomorfdir. Shuni ta’kidlash lozimki, shu misoldan C^* –algebralar nazariyasi o’sib chiqqan.

$(A_i)_{i \in I}$ – C^* -algebralar to’plami bo’lsin. A –har bir $i \in I$ uchun $x_i \in A_i$ va $\sup_{i \in I} \|x_i\| < +\infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha $(x_i)_{i \in I}$ to’plamlar to’plami bo’lsin. Ravshanki, A to’plam $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i), \lambda(x_i) = (\lambda x_i), (x_i)(y_i) = (x_i y_i), (x_i)^* = (x_i^*)$ amallarga va $\|(x_i)\| = \sup \|x_i\|$ normaga nisbatan C^* - algebra bo’ladi. A algebra A_i algebralarning ko’paytma – C^* -algebrasi deb ataladi. Shuni e’tiborga olish lozimki, A to’plam A_i to’plamning ko’paytmasi emas.

A – C^* -algebra bo’lsin. A algebrada $(x, y) \rightarrow xy$ ko’paytirish amalidan boshqa hamma amallarni o’zgarishsiz qoldiramiz. $(x, y) \rightarrow xy$ ko’paytirish amalini esa $(x, y) \rightarrow yx$ ko’paytirish amaliga almashtiramiz. Boshqacha qilib aytganda A algebrada qarama – qarshi bo’lgan A^0 invalyutiv normalangan algebrasini qraymiz. Ravshanki, $A^0 C^*$ - algebradir.

A shunday invalyutsiyaga ega bo’lgan banax algebrasi bo’lsinki, bunda $\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$ tengsizlik bajarilsin. U holda $\|x\|^2 \leq \|x^*\| \|x\|$ va $\|x\| \leq \|x^*\|$ tengsizliklar o’rinli bo’ladi; x elementni x^* elementga almashtirib $\|x^*\| = \|x\|$ tenglikni hosil qilamiz. U holda berilgan shartdan $\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x\|^2$ tengsizliklar kelib chiadi. Shuning uchun A C^* - algebra bo’ladi.

A – C^* -algebra bo'lsin. Ixtiyoriy $x \in A$ element uchun $\|x\| = \sup\|xx^I\|$ tenglik o'rinlidir. Haqiqatan ham, ravshanki, $\|x^I\| \leq 1$ tengsizlikdan $\|xx^I\| \leq \|x\|$ kelib chiqadi. $\|x\| \leq \sup\|xx^I\|$ tengsizlikni isbotlash uchun $\|x\| = 1$ deb faraz qilish mumkin; u holda $\|x^*\| = 1$ va

$$\sup\|xx^I\| \geq \|xx^*\| = \|x\|^2 = 1.$$

A – birlik elementli C^* -algebra bo'lsin. U holda $\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\|$, shuning uchun $\|1\| = 0$ yoki 1 . Agar $A \neq 0$ bo'lsa ko'rinib turibdiki $\|1\| = 1$. Shuning uchun A algebraning har qanday u unitary elementi uchun agar $A \neq \{0\}$ bo'lsa $\|u\| = \|u^*u\|^{\frac{1}{2}} = 1$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, C^* -algebralar morfizmi avtomatik ravishda uzluksizdir.

Endi, Ber invalyutiv algebrasining va AW^* –algebraning ta'riflarini kiritamiz.

A –invalyutiv algebra bo'lsin (kompleks sonlar maydoni ustida aniqlangan) va S – A algebraning bo'sh bo'lmagan qismto'plami bo'lsin. $R(S) = \{x \in E : sx = 0 \ \forall s \in S\}$ to'plam S to'plamning A algebradagi o'ng annulyatori deb ataladi. Agar A invalyutiv algebraning har bir $S \subseteq A$ qismto'plami uchun shunday $g \in A$ proektor mavjud bo'lsaki $R(S) = gA$ shart bajarilsa, bu yerda $gA = \{ga : a \in A\}$, u holda A Ber invalyutiv algebrasi deb ataladi. Berilgan holatda, g proektor S to'plamning A algebradagi o'ng annulyator proektori deb ataladi. Ixtiyoriy Ber invalyutiv algebrasi 1 halqa birlik elementiga ega. Bu yerda $R(\{0\}) = gA$ shartga qanoatlantiruvchi proektor g birlik element bo'ladi.

Ta'rif. Ber invalyutiv algebrasi bo'lgan C^* -algebra AW^* -algebra deb ataladi.

A AW^* -algebraning proektorlar to'plamini va markazini mos ravishda $P(A)$ va $Z(A)$ kabi belgilaymiz.

Misollar. C va $M_n(C)$ algebralar AW^* –algebra bo'ladi. ixtiyoriy H kompleks gilbert fazosi uchun $B(H)$ –barcha chegaralangan chiziqli operatorlar algebrasi ham AW^* –algebra bo'ladi.

Kommutativ AW^* –algebraga misol keltiramiz. X –topologik fazo bo'lsin. X ekstremal bog'lanmagan deyiladi, agarda X topologiyaning ixtiyoriy U ochiq to'plamining yopilmasi yana ochiq to'plam bo'lsa. $C^e(X)$ – X kompaktda aniqlangan barcha kompleks qiymatli, uzluksiz

funksiyalar C^* –algebrasi bo'lsin. $C^*(X)$ algebra AW^* –algebra bo'ladi shu va faqat shu holatda qwachonki X ekstremal bog'lanmagan kompakt bo'lsa. Birinchi marta AW^* –algebralar I. Kaplanskiyning [K1] ishida kiritilgan va o'rganilgan.

$A - AW^*$ –algebra bo'lsin, $e, f - A$ algebraning proektorlari, ya'ni $e, f \in P(A)$ bo'lsin. Agar $ef = e$ tenglik o'rinli bo'lsa $e \leq f$ deb qabul qilamiz. Bu kiritilgan munosabat $P(A)$ to'plamda kiritilgan qisman tartib munosabati bo'ladi. ravshanki, bu tartib AAW^* –algebraning A_{sa} ermit qismidan tushirilgan qisman tartib bilan ustma – ust tushadi. Shuni eslatish joizki, ixtiyoriy C^* –algebrada bo'lgani kabi A_{sa} to'plamda qisman tartib quyidagicha kiritilgan: $x, y \in A_{sa}$ uchun $y - x = a^*a$ tenglik biron bir $a \in A$ element uchun o'rinli bo'lsa $x \leq y$ deb qabul qilamiz. Har bir $e \in P(A)$ element uchun $e^\perp = 1 - e$ belgilashni kiritamiz.

Teorema. $A - AW^*$ –algebra bo'lsin. U holda yuqorida kiritilgan qisman tartibga va $e \rightarrow e^\perp$ ortoto'ldiruvchi akslantirishga nisbatan $P(A)$ to'plam to'liq ortomodulyar panjra bo'ladi.

$A - AW^*$ –algebra va $e, f - A$ algebraning proektorlari bo'lsin. Agar $ef = 0$ bo'lsa e va f ortogonal proektorlar deb ataladi. Agar $\{e_i\} \subset P(A)$ proektorlar to'plamining har bir juft proektorlari ortogonal bo'lishsa, u holda bu $\{e_i\}$ to'plam ortogonal to'plam deb ataladi. Ravshanki, $ef = fe$ sharti va e va f proektorlar birlik element bilan birgalikda kommutativ C^* –algebra qurishlari uchun zaruriy va yetarli shartlardir. Shuning uchun $Z(P(A))$ –barcha markaziy proektorlar bul algebrasi, $P(A)$ to'plamdan olingan, $A - AW^*$ –algebraning $Z(A)$ markazidan olingan barcha proektorlar to'plami bilan ustma –ust tushadi.

Ta'rif. $A - AW^*$ – algebraning u elementi boshlang'ich e proektorli va ohirgi f proektorli qisman izometriya deyiladi, agarda $u^*u = e, uu^* = f$ tengliklari o'rinli bo'lsa. A –algebraning e va f proektorlari ekvivalent deb ataladi, ($e \sim f$ kabi belgilanadi), agar e boshlang'ich proektorli va f ohirgi proektorli u qisman izometriya mavjud bo'lsa. Ixtiyoriy $a \in A$ element uchun $ar(a)$ ($l(a)a = a$) shartni qanoatlantiruvchi eng kichik $r(a)$ proektor (mos ravishda $l(a)$ proektor) a elementning o'ng (mosravishda chap) proektori deb ataladi. $A - AW^*$ –algebrada ixtiyoriy $a \in A$ element uchun o'ng $r(a)$ va chap $l(a)$ proektorlar mavjud, bunda $r(a) \sim l(a)$ va $r(a)Ar(a), l(a)Al(a)$ qismalgebralar o'zaro izomorfdir, ya'ni $r(a)Ar(a) \cong l(a)Al(a)$.

A AW^* –algebraning e proektori chekli deyiladi, agar $f \leq e, f \sim e$ munosabatlardan $e = f$ tenglik kelib chiqsa. Aks holda e proektor cheksiz deb ataladi. Ma'lumki, agar e chekli proektor bo'lsa va $g \leq e, g \in P(A)$ bo'lsa, u holda g ham chekli proektor bo'ladi.

Ta'rif. $A - AW^*$ –algebra bo'lsin. U holda, agar A algebraning 1 birlik elementi chekli proektor bo'lsa, A chekli AW^* – algebradeyiladi. Agar $A - AW^*$ – algebraning har biri noldan farqli markaziy proektori cheksiz proyektor bo'lsa, u holda A umuman olganda cheksiz AW^* –algebradeyiladi. Quyidagi ta'kidlar o'rinlidir:

Teorema. Ixtiyoriy AW^* –algebra chekli AW – algebraning va umuman olgand cheksiz AW^* –algebraning to'g'ri yig'indisidir.

Teorema. $\{e_i\}, \{f_i\} - AW^*$ -algebra proektorlarining ikkita ortogonal to'plami va ixtiyoriy i uchun $e_i \sim f_i$ o'rinli bo'lsin. U holda $e = \sup e_i, f = \sup f_i$ proektorlar uchun $e \sim f$ o'rinlidir.

Lemma. Ixtiyoriy umuman olganda cheksiz AW^* – algebraning birlik 1 elementi juft–jufti bilan ekvivalent va ortogonal bo'lgan sanoqli miqdordagi (chesiz) proektorlarning ortogonal to'plamining aniq yuqori chegarasi sifatida keltirish mumkin.

Lemma. Ixtiyoriy umuman olganda cheksiz AW^* – algebradashunday e proektor mavjudki $1 - e \sim 1 \sim e$ sharti bajariladi.

Ta'rif. $A - AW^*$ –algebraning e noldan farqli proektori abel proektori deb ataladi, agarda eAe qismalgebra kommutativ bo'lsa. A algebra I tipidagi AW^* –algebra deyiladi, agarda A algebraning har bir z markaziy proektori uchun zA to'g'ri qo'shiluvchi noldan farqli abel proektoriga ega bo'lsa.

$A - AW^*$ –algebra II tipidagi AW^* –algebra deyiladi, agar A algebra noldan farqli abel proektorlarini o'z ichiga olsa va har bir $z \in A$ markaziy proektor uchun zA to'g'ri qo'shiluvchi noldan farqli chekli proektorga ega bo'lsa. Agar $A - II$ tipidagi AW^* –algebra bir vaqtning o'zida chekli AW^* –algebra bo'lsa, u holda bu algebra II_1 tipidagi AW^* –algebra deb ataladi. Agar $A - II$ tipidagi AW^* –algebrada hech qaysi markaziy proektor chekli bo'lmasa, u holda $A - II_\infty$ tipidagi AW^* –algebra deb ataladi. Nihoyat, agar $A - AW^*$ –algebraning barcha proektorlaricheksiz bo'lsa, u holda $A - III$ tipidagi AW^* –algebra deb ataladi. $A - I$ tipidagi AW^* – algebra I_n tipidagi AW^* –algebra deb ataladi, agarda shunda $y \in e$ o'zaro juft – jufti bilan ortogonal va ekvivalent proektorlarning $\{e_i\} i \in \mathbb{Z}$ to'plami mavjud bo'lsaki, $\sup_i e_i = 1, |\mathbb{Z}| = n$ bo'lsa. Ma'lumki, ixtiyoriy I tipidagi AW^* – algebra I_m tipidagi AW^* – algebraning to'g'ri yig'indisi ko'rinishiga keltirish mumkin [K2].

Teorema. Har qanday AW^* – algebra yagona usulda I, II_1, II_∞, III tipidagi AW^* – algebralarning to'g'ri yig'indisi ko'rinishiga keltirish mumkin.

Misollar. $C - AW^*$ – algebrafaqat 1 va 0 proektorlardan iborat. Bunda 1- birlik element bir vaqtning o'zidaham markaziy proektor, ham abelproektoridir. $C - I_1$ tipidagi (kommutativ) AW^* - algebradir.

Natural sonlar n uchun $M_n(C)$ AW^* -algebra I_n tipidagi AW^* - algebradir. Bu algebraning markazi $1 \cdot C$ ko'rinishiga ega, bu yerda $1 \cdot C = \{1 \cdot \lambda: \lambda \in C\}$, $1 - M_n(C)$ algebraning birlikmatritsasi. Indeksar $i=1,2,3,...,n$ uchun $e_i = S_{ii}$ – i -chi komponenti 1 ga qolgan komponentalari 0 ga teng $n \times n$ o'lchovli matrisa bo'lsa, u holda $e_i \in M_n(C)$, $\forall i, e_i$ – abel proektora va har bir i ba j indeksar uchun $e_i e_j, e_i * e_j = 0$ shartlar bajariladi. Shuning uchun $M_n(C)$ - I_n tipidagi AW^* -algebradir. Bu yerda $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ elementlar barchasi proektorlardir, ya'ni $e_i^2 = e_i$.

Yuqorida misol tariqasida keltirilgan $C^C(X) - X$ ekstremal bog'liqsiz kompakt ustida aniqlangan barcha kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalar assotsiativ kommutativ invalyutiv algebrasi I_1 tipidagi AW^* – algebra bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, II_1, II_∞, III tipidagi AW^* -algebralarga misollar osonlikcha qurib bo'lmaydi. III va II tipidagi AW^* -faktorlar (markazi $1 \cdot C$ bo'lgan) qurishga bir nechta maqolalar bag'ishlangan. Demak, shuni ta'kidlash mukinki, II_1, II_∞, III tipidagi AW^* – algebralarga misollar mavjud.

H -kompleks gilbert fazo, $B(H)$ – barcha chegaralangan chiziqli operatorlarning invalyutiv algebrasi bo'lsin. (H gilbert fazoda aniqlangan). Agar $S \subseteq B(H)$ bo'lsa, u holda S^I orqali S to'plamning $B(H)$ algebradagi kommutantini belgilaymiz, ya'ni $S^I = \{x \in B(H): xs = sx, \forall s \in S^I\}$. Ravshanki, S^{II} bikommutant $S^{II} = (S^I)^I$ kabi aniqlangan, har doim S to'plamni o'zichiga oladi.

Ta'rif. $B(H)$ algebraning B invalyutiv qism algebrasifon Neyman algebrasi deb ataladi, agarda $B^{II} = B$ tenglik bajarilsa. Ko'pincha, $B \subseteq B(H)$ ekanligini ko'rsatish uchun B algebrada H ustida aniqlangan deyiladi.

Teorema. $B - B(H)$ algebraning invalyutiv qism algebrasi bo'lsin va $B(H)$ algebrani birlik elementi B algebraga tegishli bo'lsin. U holda quyidagi shartlar teng kuchlidir:

1. B – fon Neyman algebrasidir;
2. B kuchsiz operatorlar topologiyasida yopiq;
3. B kuchli operatorlar topologiyasida yopiq.

Agar $B - H$ kompleks gilbert fazoda aniqlangan fon Neyman algebrasi, $a_\alpha \in B_{sa}$, $a \in B(H)_{sa} = \{x \in B(H): x^* = x\}$ va $a_\alpha \nearrow a$, ya'ni (a_α) – o'suvchi tarmoq, $a \leq \beta$ bo'lsa, $a_\alpha \leq a_\beta$ bo'lgani uchun $a = \sup a_\alpha$ shart $B(H)_{sa}$ algebrada bajarilsa, u holda ixtiyoriy $\xi \in H$ uchun $\langle a_\alpha \xi, \xi \rangle \nearrow \langle a \xi, \xi \rangle$, $\xi \neq 0$ bo'ladi. Shuning uchun, yuqoridagi teorema ko'ra $a_\alpha \in B_{sa}$, ya'ni $\forall$

monoton to'liq involyutiv algebra bo'ladi. Fon Neyman algebralari sinfini, ularni gilbert fazolarda aniqlangan operatorlar algebralari ko'rinishida qo'llamasdan tasniflash (klassifikatsiyalash) mumkin.

Teorema. $B - S^*$ - algebra uchun quyidagi shartlar ekvivalentdir:

- 1) B algebra old qo'shma banax fazosiga ega. Ya'ni shunday N banax fazosi mavjudki $N^*=B$ tenglik bajariladi;
- 2) B algebra biron – bir gilbert fazosida aniqlangan fon Neyman algebrasiga $*$ - izamorfdir

AW^* -algebra uchun kiritilgan barcha ta'riflar, tushunchalar va terminologiya fon Neyman algebralari uchun ham o'rinlidir. Xususan, $F=I_n, II_1, II_\infty$, III tiplar uchun A fon Neyman algebrasi F tipidagi fon Neyman algebra deyiladi, agar A F tipidagi AW^* -algebra bo'lsa. Buning boisi har qanday fon Neyman algebrasi AW^* -algebra bo'ladi. Ammo teskarisi har doim to'g'ri bo'lavermaydi, ya'ni fon Neyman algebrasi bo'lmagan AW^* -algebra ham mavjud.

S^* - algebralarga o'xshash haqiqiy S^* - algebralarni ham kiritish mumkin. Faqat, bu algebralarda R haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlanadi.

Ta'rif. A – haqiqiy (ya'ni S maydon o'rniga R maydon ustida aniqlangan) involyutiv banax algebrasi bo'lsin. U holda agar $A_c = A + iA$ involyutiv algebra, bu yerda $A + iA = \{a+ia : a,b \in A\}$, shunday norma bilan ta'minlanishi mumkin bo'lsaki A_s S^* - algebra bo'lsa va uning normasi A algebrada dastlabki A algebraning normasi bilan ustma-ust tushsa, u holda A haqiqiy S^* - algebra deb ataladi.

2.2. § AJW – ALGEBRALAR VA ULARNING XOSSALARI

Berilgan magisterlik dissertatsiyasining asosiy ob'ektlaridan biri bu AJW – algebralardir. Dastavval Gilbert fazosida aniqlangan AJW – algebralarga haqida fikr yuritilgan. Bunday algebralarga birinchi marta D. Topping (Tor1) ishda ko'rilgan. Bu ishda, xususan, JW – algebralarning aksariyat xossalari Gilbert fazosida aniqlangan AJW – algebralarga (yoki maxsus AJW – algebralarga) uchun ham o'rinli bo'lashi qayd etilgan. Keyinchalik 1998 yilda F. Arziqulov JW – algebralarga sinfi doirasida AJW – algebra tushunchasini kiritdi va o'rgandi (AF2).

AJW – algebralarga tushunchasini kiritish uchun avval quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. JB – algebra uchun quyidagi shartlar teng kuchlidir:

1. A algebraning barcha proyektorlarining qisman tartiblangan to'plamida ixtiyoriy juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan proyektorlar qism to'plami o'zining aniq yuqori chegarastga ega va A

algebraning ixtiyoriy maksimal assotsiativ qism algebrasi o'zining proyektorlari yordamida quriladi,

2. Ixtiyoriy $S \subseteq A_+ = \{a^2 : a \in A\}$ qism to'plam uchun shunday $y \in A$ proyektor ($e^2 = e$) mavjudki $S^\perp = U_e(A)$ tenglik bajariladi, bu yerda $S^\perp = \{a \in A : U_e x = 0, x \in S\}$, $U_e(A) = \{U_e a : a \in A\}$.

3. Ixtiyoriy ${}^\perp S \subseteq A$ qism to'plam uchun shunday $e \in A$ proyektor mavjudki $S_+ = U_e(A_+)$ tenglik bajariladi, bu yerda $S = \{x \in A : U_a x = 0, a \in S\}$, ${}^\perp S_+ = S A_+$.

Ta'rif. Yuqoridagi teoremaning (1), (2), (3) shartlaridan biriga qanoatlantiruvchi A JB – algebra AJW – algebra deb ataladi.

Endi B - JB – algebra A AJW – algebraning JB – qism algebrasi bo'lsin. Quyidagi shartlarni ko'rib chiqamiz:

(a) B qism algebraning har bir $\{e_i\}$ ortogonal proyektorlar (ya'ni juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan) to'plamining A algebrada hisoblangan aniq yuqori chegarasi B qism algebrada yotadi;

(b) B AJW – algebra hisoblanadi;

(v) B qism algebraning har bir elementining A algebradagi tashuvchisi B qism algebrada yotadi.

Bu shartga nisbatan quyidagi lemma o'rinli:

Lemma. A AJW – algebraning B JB – qism algebrasi yuqoridagi (a) shartga qanoatlantirsin. U holda B algebra uchun (b) va (v) shartlar teng kuchlidir.

Ta'rif. A AJW – algebraning B JB – qism algebrasi AJW – algebra deb ataladi, agar B algebrada (a) va (b) (ekvivalent ravishda (a) va (b)) shartlari bajarilsa.

A AJW – algebraning proyektorlar to'plamini va markazini mos ravishda $P(A)$ va $Z(A)$ kabi belgilaymiz.

A – AJW – algebra, $r \in R(A)$ bo'lsin. u holda $U_p(A)$ to'plam A algebraning AJW – qismalgebrasidir. A AJW – algebraning barcha proyektorlari tartibga nisbatan to'la panjara tashkil qilishadi.

Misollar. R – kommutativ assotsiativ AJW – algebradir. $Hn(R) = \{x \in Mn(R) : x^* = x\}$ to'plam $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ yordan ko'paytmaga nisbatan AJW – algebra bo'ladi.

Q – ekstremal bog'liqsiz kompakt bo'lsin, $S(Q)$ – barcha haqiqiy qiymatli uzluksiz funktsiyalar algebrasi, Q kompaktda aniqlangan. U holda $S(Q)$ – assotsiativ AJW – algebradir.

Keyingi misolni kiritamiz Q – ekstremal bog'liqsiz kompakt, $S(Q)$ – yuqorida kiritilgan algebra bo'lsin. H_F F maydon ustida gilbert fazosi, bu yerda $F = R, C, H$ (kvaternionlar tanasi), $B(H_F)$ – H_F gilbert fazoda aniqlangan barcha chegaralangan chiziqli operatorlar involyutiv algebrasi bo'lsin. Quyidagi algebrani kiritamiz $S(Q, B(H_F)_{SA})$ – bu Q kompaktda aniqlangan va

qiymatlari $B(H_F)_{sa}$ algebrada yotuvchi barcha uzluksiz akslantirishlar fazosi bo'lsin. U holda $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, $x, y \in S(Q, B(H_F)_{SA})$ ko'paytiruv amaliga nisbatan $S(Q, B(H_F)_{SA})$ AJW – algebra bo'ladi, agar H_F – chekli o'lchovli bo'lsa. Agar H_F – cheksiz o'lchovli bo'lsa, $S(Q, B(H_F)_{SA})$ JB – algebra har doim ham AJW – algebra bo'lavermaydi.

Yana bir misol. A – AW^* -algebra bo'lsin. $A_{sa} = \{x \in A : x^* = x\}$ to'plam $x \bullet y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ ko'paytiruv amaliga nisbatan JC – algebra bo'ladi. Quyidagi lemmaga ko'ra, berilgan holatda A_{sa} – AJW^* -algebra bo'ladi.

Lemma. A – C^* - algebra bo'lsin. U holda A_{sa} AJW^* -algebra bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki A – AW^* -algebra bo'lsa.

Aytish joizki, haqiqiy S^* - algebra uchun ham shunday lemma o'rinlidir.

Shunday qilib, A AJW – algebraning $P(A)$ barcha proyektorlari to'plami tartib bo'yicha to'liq, ortomodulyar panjarani tashkil qiladi. Har bir $a \in A$ element uchun $r(a)$ – shu a elementning A algebrada tashuvchisi mavjud. Bu $\{a\}_+ = Ur(a)(A_+)$ tenglik orqaliniqlanadi. Har bir $p \in P(A)$ proyektor uchun $c(p) \in P(Z(A))$ markaziy positel mavjud. Oxirgi sanab o'tilgan faktorlarga va AJW^* – algebra ta'rifiga ko'ra quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. A – AJW – algebra bo'lsin. U holda A algebra $A = A_5P + A_{ex}x$ ko'rinishidagi to'g'ri yig'indiga yoyiladi, bu yerda A_5P – JC – algebra, A_{ex} AJW – algebra esa $C(X, M_3^8)$ – ekstremal bog'liqsiz kompaktdan M_3^8 istisnoli JBW – algebra bo'lgan barcha uzluksiz akslantirishlar AJW – algebrasidir.

A – AJW – algebra bo'lsin. $U_5: A \rightarrow A$ operatorni olamiz, bu yerda $S \in A$ – simmetriya (ya'ni $s^2=1$). Ravshanki U_s – chiziqli operator. $s^2=1$ bo'lgani uchun $U_s a^2 = U_s U_a s^2$. U holda 1-paragrifdagi (I-boning) $(U_x y)^2 = U_x U_y x^2$ ayniyatga ko'ra oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin. $U_5 a^2 = (U_5 a)^2$ ya'ni U_s operator gomomorfizm bo'ladi. Agar $U_{U_y x z} = U_y U_x U_y z$ Makdonald ayniyatida $x=1, y=s$ qiymatlarni olsak $U1 = U_5 U_1 U_5$, ya'ni $U_5 U_5 = I$ – birlik operator bo'ladi. Demak, U_5 operator o'ziga teng teskarisi bilan teskarlanuvchi operatoridir. Xususan U_5 -avtomorfizmdir. Bu avtomorfizm A algebraning ichki avtomorfizm deb ataladi. Bunday avtomorfizmlar $IntA$ gruppasini quradi va bu gruppaa A algebraning ichki avtomorfizmlari gruppasi deyiladi.

Lemma. Quyidagi shartlar teng kuchlidir:

- 1) $z \in Z(A)$, ya'ni zA algebraning markaziy elementi ;
- 2) ixtiyoriy $p \in P(A)$ proyektor uchun $(za)p = z(ap) \quad \forall a \in A$;
- 3) ixtiyoriy $s \in A$ simmetriya uchun $U_s z = z$.

Ta’rif. $\{A_i\}$ – JB – algebralar to’plami bo’lsin. Bu to’plam ustida quyidagi amallarni kiritamiz : avvalo $\{A_i\} = \{\{a_i\}; a_i \in A_i \forall i\}$ bo’lsin, yana

$$\{a_i\} + \{b_i\} = \{a_i + b_i\}, \lambda\{a_i\} = \{\lambda a_i\}, \{a_i\} \bullet \{b_i\} = \{a_i \bullet b_i\}, \{a_i\}, \{b_i\} \in \{A_i\}, \lambda \in \mathbb{R}$$

o’rinli bo’lsin. Bu amallarga nisbatan $\{A_i\}$ yordan algebrasi bo’ladi. Bu amallarda quyidagi norma kiritamiz: $\|\{a_i\}\| = \sup_i \|a_i\|$. Bu normaga nisbatan $\{A_i\}$ – JB – algebra bo’ladi va bu JB – algebra A_i A_i/W – algebralarining JB – yig’indisi deb ataladi. Ixtitsriy A_i A_i/W – algebralarining JB – yig’indisi $\{A_i\}$ yana A_i/W – algebra bo’lishini isbotlash qiyin emas. Teskarisi, agar A_i/W – algebralarining markazi ko’p o’lchovli bo’lsa, bu algebrada JB – yig’indi qurish mumkin. Agar A_i/W – algebra faktor bo’lsa, u holda bu algebrada faqat bir komponentali JB – yig’indi qurish mumkin. Buni quyidagi lemmada ko’rish mumkin.

Shuning uchun , yuqoridagi teorema ko’ra $a_\alpha \in B_{sa}$, ya’ni B – monoton to’liq involyutiv algebra bo’ladi. Fon Neyman algebralari sinfini, ularni gilbert fazolarda aniqlangan operatorlar algebralari ko’rinishida qo’llamasdan tasniflash (klassifikatsiyalash) mumkin.

Teorema. B – C^* - algebra uchun quyidagi shartlar ekvivalentdir:

1. B algebra old qo’shma banax fazosiga ega. Ya’ni shunday N banax fazosi mavjudki $N^*=B$ tenglik bajariladi;
2. B algebra biron – bir gilbert fazosida aniqlangan fon Neyman algebrasiga $*$ - izamorfdir

AW^* -algebra uchun kiritilgan barcha ta’riflar, tushunchalar va terminologiya fon Neyman algebralari uchun ham o’rinlidir. Xususan, $F=I_n, II_1, II_\infty, III$ tiplar uchun A fon Neyman algebrasi F tipidagi fon Neyman algebra deyiladi, agar A F tipidagi AW^* -algebra bo’lsa. Buning boisi har qanday fon Neyman algebrasi AW^* -algebra bo’ladi. Ammo teskarisi har doim to’g’ri bo’lavermaydi, ya’ni fon Neyman algebrasi bo’lmagan AW^* -algebra ham mavjud.

S^* - algebralarga o’xshash haqiqiy S^* - algebralarni ham kiritish mumkin. Faqat, bu algebralar R haqiqiy sonlar maydoni ustida aniqlanadi.

Ta’rif. A – haqiqiy (ya’ni S maydon o’rniga R maydon ustida aniqlangan) involyutiv banax algebrasi bo’lsin. U holda agar $A_c = A + iA$ involyutiv algebra, bu yerda $A + iA = \{a+ia : a,b \in A\}$, shunday norma bilan ta’minlanishi mumkin bo’lsaki A_c S^* - algebra bo’lsa va uning normasi A algebrada dastlabki A algebraning normasi bilan ustma-ust tushsa, u holda A haqiqiy S^* - algebra deb ataladi.

Ta’rif. Bir vaqtning o’zida involyutiv Ber algebrasi bo’lgan haqiqiy S^* -algebra haqiqiy AW^* -algebra deb ataladi.

Haqiqiy AW^* -algebralar bo’yicha, xususan, quyidagi teorema mavjud.

Teorema.(AAA2) A – haqiqiy AW^* - algebra bo'lsin. Faraz qilaylik $M=A+iA$ (kompleks) AW^* -algebra bo'lsin. U holda $F=I_n, I, II_1, II_\infty, III$ tiplar uchun A – haqiqiy AW^* - algebra F tipiga ega bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki M AW^* - algebra ham F tipiga ega bo'lsa.

Teoremadagi $M=A+iA$ yig'indining kompleks AW^* - algebra bo'lishligi haqidagi faraz bejiz kiritilmagan. S. Alberino, Sh. Ayupov va A. Abduvoitovlar o'zlarining (AAA) ishda yig'indisi $A + iA$ kompleks AW^* - algebra bo'lmaydigan A haqiqiy AW^* - algebra qurganlar. Shuning uchun har qanday $A + iA$ yig'indi ham AW^* - algebra bo'lavermaydi.

2.2. § AJW – ALGEBRALAR VA ULARNING XOSSALARI

Berilgan magisterlik dissertatsiyasining asosiy ob'ektlaridan biri bu AJW – algebralardir. Dastavval gilbert fazosida aniqlangan AJW – algebra haqida fikr yuritilgan. Bunday algebra birinchi marta D. Topping (Tor1) ishda ko'rilgan. Bu ishda, xususan, JW – algebraarning aksariyat xossalari gilbert fazosida aniqlangan AJW – algebra (yoki maxsus AJW – algebra) uchun ham o'rinli bo'lashi qayd etilgan. Keyinchalik 1998 yilda F. Arziqulov JW – algebra sinfi doirasida AJW – algebra tushunchasini kiritdi va o'rgandi (AF2).

AJW – algebra tushunchasini kiritish uchun avval quyidagi teoremani keltiramiz.

Teorema. A JB – algebra uchun quyidagi shartlar teng kuchlidir:

1. A algebraning barcha proyektorlarining qisman tartiblangan to'plamida ixtiyoriy juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan proyektorlar qism to'plami o'zining aniq yuqori chegarastga ega va A algebraning ixtiyoriy maksimal assotsiativ qism algebrasi o'zining proyektorlari yordamida quriladi,

2. Ixtiyoriy $S \subseteq A_+ = \{a^2 : a \in A\}$ qism to'plam uchun shunday $e \in A$ proyektor ($e^2=e$) mavjudki $S^\perp = U_e(A)$ tenglik bajariladi, bu yerda $S^\perp = \{a \in A : U_e x = 0, x \in S\}$, $U_e(A) = \{U_e a : a \in A\}$.

3. Ixtiyoriy ${}^\perp S \subseteq A$ qism to'plam uchun shunday $e \in A$ proyektor mavjudki $S_+ = U_e(A_+)$ tenglik bajariladi, bu yerda $S = \{x \in A : U_a x = 0, a \in S\}$, ${}^\perp S_+ = S A_+$.

Ta'rif. Yuqoridagi teoremaning (1), (2), (3) shartlaridan biriga qanoatlantiruvchi A JB – algebra AJW – algebra deb ataladi.

Endi B - JB – algebra A AJW – algebraning JB – qism algebrasi bo'lsin. Quyidagi shartlarni ko'rib chiqamiz:

(a) B qism algebraning har bir $\{e_i\}$ ortogonal proyektorlar (ya'ni juft-jufti bilan ortogonal bo'lgan) to'plamining A algebrada hisoblangan aniq yuqori chegarasi B qism algebrada yotadi;

(b) B AJW – algebra hisoblanadi;

(v) B qism algebraning har bir elementining A algebradagi tashuvchisi B qism algebrada yotadi.

Bu shartga nisbatan quyidagi lemma o'rinli:

Lemma. A AJW – algebraning B JB – qism algebrasi yuqoridagi (a) shartga qanoatlantirsin. U holda B algebra uchun (b) va (v) shartlar teng kuchlidir.

Ta’rif. A AJW – algebraning B JV – qism algebrasi AJW – algebra deb ataladi, agar V algebrada (a) va (b) (ekvivalent ravishda (a) va (b)) shartlari bajarilsa.

A AJW – algebraning proyektorlar to’plamini va markazini mos ravishda $P(A)$ va $Z(A)$ kabi belgilaymiz.

A – AJW – algebra, $r \in R(A)$ bo’lsin. u holda $U_p(A)$ to’plam A algebraning AJW – qismalgebrasidir. A AJW – algebraning barcha proyektorlari tartibga nisbatan to’la panjara tashkil qilishadi.

Misollar. R – kommutativ assotsiativ AJW – algebradir. $H_n(R) = \{ x \in M_n(R) : x^* = x \}$ to’plam $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ yordan ko’paytmaga nisbatan AJW – algebra bo’ladi.

Q – ekstremal bog’liqsiz kompakt bo’lsin, $S(Q)$ – barcha haqiqiy qiymatli uzluksiz funktsiyalar algebrasi, Q kompaktda aniqlangan. U holda $S(Q)$ – assotsiativ AJW – algebradir.

Keyingi misolni kiritamiz Q – ekstremal bog’liqsiz kompakt, $S(Q)$ – yuqorida kiritilgan algebra bo’lsin. H_F F maydon ustida gilbert fazosi, bu yerda $F = R, C, H$ (kvaternionlar tanasi), $B(H_F)$ – H_F gilbert fazoda aniqlangan barcha chegaralangan chiziqli operatorlar involyutiv algebrasi bo’lsin. Quyidagi algebrani kiritamiz $S(Q, B(H_F)_{SA})$ – bu Q kompaktda aniqlangan va qiymatlari $B(H_F)_{sa}$ algebrada yotuvchi barcha uzluksiz akslantirishlar fazosi bo’lsin. U holda $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$, $x, y \in S(Q, B(H_F)_{SA})$ ko’paytiruv amaliga nisbatan $S(Q, B(H_F)_{SA})$ AJW – algebra bo’ladi, agar H_F – chekli o’lchovli bo’lsa. Agar H_F – cheksiz o’lchovli bo’lsa, $S(Q, B(H_F)_{SA})$ JB – algebra har doim ham AJW – algebra bo’lavermaydi.

Yana bir misol. A – AW^* -algebra bo’lsin. $A_{sa} = \{x \in A : x^* = x\}$ to’plam $x \cdot y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ ko’paytiruv amaliga nisbatan JC – algebra bo’ladi. Quyidagi lemmaga ko’ra, berilgan holatda A_{sa} – AJW^* -algebra bo’ladi.

Lemma. A – S^* - algebra bo’lsin. U holda A_{sa} AJW^* -algebra bo’ladi shu va faqat shu holatda qachonki A – AW^* -algebra bo’lsa.

Aytish joizki, haqiqiy S^* - algebra uchun ham shunday lemma o’rinlidir.

Shunday qilib A AJW – algebraning $P(A)$ barcha proyektorlari to’plami tartib bo’yicha to’liq, ortomodulyar panjarani tashkil qiladi. Har bir $a \in A$ element uchun $r(a)$ – shu a elementning A algebrada tashuvchisi mavjud. Bu $\{a\}_+ = Ur(a)(A_+)$ tenglik orqaliniqlanadi. Har bir $p \in P(A)$ proyektor uchun $c(p) \in P(Z(A))$ markaziy positif mavjud. Oxirgi sanab o’tilgan faktorlarga va AJW^* – algebra ta’rifiga ko’ra quyidagi teorema o’rinli.

Teorema. $A - AJW$ – algebra bo'lsin. U holda A algebra $A = A_5P + A_6x$ ko'rinishidagi to'g'ri yig'indiga yoyiladi, bu yerda $A_5P - JC$ – algebra, $A_{ex} AJW$ – algebra esa $C(X, M_3^8)$ – ekstremal bog'liqsiz kompaktdan M_3^8 istisnoli JVW – algebraga bo'lgan barcha uzluksiz akslantirishlar AJW – algebrasidir.

$A - AJW$ – algebra bo'lsin. $U_5: A \rightarrow A$ operatorni olamiz, bu yerda $S \in A$ – simmetriya (ya'ni $s^2=1$). Ravshanki U_5 – chiziqli operator. $s^2=1$ bo'lgani uchun $U_5a^2=U_5U_5a^2$. U holda 1-paragrafdagi (I-boning) $(U_xy)^2=U_xU_yx^2$ ayniyatga ko'ra oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin. $U_5a^2 = (U_5a)^2$ ya'ni U_5 operator gomomorfizm bo'ladi. Agar $U_{Uyx}z=U_yU_xU_5z$ Makdonald ayniyatida $x=1, y=s$ qiymatlarni olsak $U1 = U_5U_1U_5$, ya'ni $U_5U_5=I$ – birlik operator bo'ladi. Demak, U_5 operator o'ziga teng teskarisi bilan teskarlanuvchi operatordir. Xususan U_5 – avtomorfizmdir. Bu avtomorfizm A algebraning ichki avtomorfizm deb ataladi. Bunday avtomorfizmlar $IntA$ gruppasini quradi va bu gruppaa A algebraning ichki avtomorfizmlari gruppasi deyiladi.

Lemma. Quyidagi shartlar teng kuchlidir:

- 4) $z \in Z(A)$, ya'ni zA algebraning markaziy elementi ;
- 5) ixtiyoriy $p \in P(A)$ proyektor uchun $(za)p = z(ap) \quad \forall a \in A$;
- 6) ixtiyoriy $s \in A$ simmetriya uchun $U_5z=z$.

Ta'rif. $\{A_i\} - JB$ – algebralr to'plami bo'lsin. Bu to'plam ustida quyidagi amallarni kiritamiz : avvalo $\{A_i\} = \{\{a_i\}: a_i \in A_i \quad \forall i\}$ bo'lsin, yana $\{a_i\} + \{b_i\} = \{a_i + b_i\}, \lambda\{a_i\} = \{\lambda a_i\}, \{a_i\} \bullet \{b_i\} = \{a_i \bullet b_i\}, \{a_i\}, \{b_i\} \in \{A_i\}, \lambda \in R$ o'rinli bo'lsin. Bu amallarga nisbatan $\{A_i\}$ yordan algebrasi bo'ladi. Bu amallarda quyidagi norma kiritamiz: $\|\{a_i\}\| = \sup_i \|a_i\|$. Bu normaga nisbatan $\{A_i\} - JB$ – algebra bo'ladi va bu JB – algebra $A_i - AJW$ – algebralarning JB – yig'indisi deb ataladi. Ixtitsriy $A_i - AJW$ –algebralarning JB – yig'indisi $\{A_i\}$ yana AJW – algebra bo'lishini isbotlash qiyin emas. Teskarisi, agar AJW – algebralarning markazi ko'p o'lchovli bo'lsa, bu algebrada JB – yig'indi qurish mumkin. Agar AJW – algebra faktor bo'lsa, u holda bu algebrada faqat bir komponentali JB – yig'indi qurish mumkin. Buni quyidagi lemmada ko'rish mumkin.

Lemma. $A - AJW$ – algebra va $\{e_i\} \subset A$ – aniq yuqori chegarasi 1 ga teng bo'lgan juft – jufti bilan ortogonal markaziy proektorlar to'plami bo'lsin. U holda $x \in A \rightarrow \{e_i x\}$ akslantirish, bu yerda $e_i x \in A \quad \forall i, A$ algebraning $\{e_i A\} JB$ –yig'indiga izomorfizm bo'ladi.

Endi AJW – algebraning to'g'ri yig'indisini kiritamiz.

Ta'rif. $A - AJW$ – algebra va $\{A_i\}_{i \in I} - AJW$ – algebralr to'plami bo'lsin. Agar shunday A algebraning markaziy proektorlarining $\{z_i\}_{i \in I}$ ortogonal to'plami mavjud bo'lsaki

$A_i = z_i A$ ixtiyoriy i uchun o'rinli bo'lsa, u holda A algebra A_i algebraning to'g'ri yig'indisiga yoyiladi deyiladi va bu $A = \sum_{i \in I} A_i$ kabi yoziladi. Bu yerda yuqoridagi lemmaga ko'ra A algebra $\{A_i\}_{i \in I}$ to'plamning JB -yig'indisi bo'ladi.

$A - AJW$ - algebra bo'lsin. $P(A) \cap Z(A)$ to'plam A algebraning markaziy proektorlari to'plami bo'ladi. $p^+ = 1 - p$ ixtiyoriy $p \in P(A)$ bo'lsin. Shuni ta'kidlash kerakki $p \leq q, q \in P(A)$ tengsizlikdan $p^+ \wedge q = q - p$ tenglik kelib chiqadi. Bundan $q = p \vee (q \wedge p^+)$, ya'ni $P(A)$ ortoto'ldiruvchili b panjara bo'ladi. Bu yerda $p - q^+$ akslantirish ortoto'ldiruvchili bo'ladi. $p \in P(A)$ proektorning $c(p)$ markaziy tashuvchisi – bu p dan katta yoki unga teng bo'lgan eng kichik markaziy proektordir.

$p, q \in P(A)$ proektorlar ekvivalent deb ataladi va $p \sim q$ shart bajarilsa. Agar $\alpha = U_{s_1}, U_{s_2}, U_{s_3}, \dots, U_{s_n}$, bu yerda $S_1, S_2, \dots, S_n$ – simmetriyalar, bo'lsa bu ekvivalentlik $p \sim nq$ kabi yoziladi. Agar $n = 1$ bo'lsa, u holda p va q simmetriya orqali ekvivalent deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, fon Neyman algebrasidagi ekvivalentlik munosabatidan farqli o'laroq, agar $p \sim q$ bo'lsa u holda $p^+ \sim q^+$ bo'ladi. Yana shuni ta'kidlaymizki, $\{q \in P(A): q \sim p\}$ to'plami $Int A$ gruppaga nisbatan invariantdir, demak bu to'plamning aniq yuqori chegarasi uchun ham o'rinlidir. Shuning uchun bu aniq yuqori chegara markaziy proektor bo'lishini lozim. Teskarisi, markaziy proektorlar ichki izoformizim ta'sirida o'zgarishsiz qoladi. Shuning uchun

$$c(p) = \vee \{q \in P(A): q \sim p\}$$

$A - AJW$ - algebraning p proyeksiatori abel proektor deb deyiladi, agar $U_p(A)$ assotsiativ qismalgebra bo'lsa; agar $[0, p] := \{q \in P(A) \cap U_p(A)\}$ proektorlar panjarasi modulyar bo'lsa, u holda p modulyar proektor deb ataladi. $A - AJW$ - algebraning 1 birlik elementi modulyar proektor bo'lsa, u holda A modulyar AJW -algebra deb ataladi. Abel va modulyar proektorlar to'plami $Int A$ gruppaga nisbatan invariantdir. Demak, biz A algebra l_I va l_{III} markaziy proektorlarni quyidagi formulalar yordamida kiritishimiz mumkin. $l_I = \sup\{p \in P(A): p - \text{abel proektoridir}\}$, $e_{III}^+ = \sup\{p \in P(A): p - \text{modulyar proyeksiator}\}$.

Ravshanki, $e_I \leq e_{III} = 1 - e_I - e_{III}$ bo'lsin. $A - AJW$ - algebra I tipidagi (II, III tipidagi, mos ravishda) AJW -algebra deyiladi, agar $e_I = 1$ (mos ravishda $e_{I2} = 1, e_{III} = 1$) bo'lsa. Bu borada quyidagi teorema mavjud.

Teorema. $A - AJW$ - algebra bo'lsin. U holda A yagona usulda I, II va III tipidagi AJW - algebraning to'g'ri yig'indisiga yoyiladi. Bundan tashqari quyidagi alomatlar o'rinlidir:

(a) A I tipida bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki, A algebrada $e(p) = 1$ shartga qanoatlantiruvchi noldan farqli p abel proektor mavjud bo'lsa.

(b) $A II$ tipida bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki, A algebrada $c(p) = 1$ shartga qanoatlantiruvchi noldan farqli p modulyar proektor mavjud bo'lsa va A hech qanday noldan farqli abel proektoriga ega bo'lmasa.

(v) $A III$ tipida bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki, bu algebra noldan farqli modulyar proektorga ega bo'lmasa.

Ta'rif. Ixtiyoriy AJW –algebra eng katta markaziy modulyar proektor mavjud. Agar bu 0 bo'lsa, u holda $A AJW$ –algebra umuman olganda modulyar bo'lmagan AJW – algebra deb yuritiladi; agar u 1 ga teng bo'lsa, u holda A modulyar AJW –algebra deyiladi. $A - AJW$ – algebra umuman modulya rmodulyar bo'lmagan algebra deb ataladi, agar bu algebra noldan farqli modulyar proektorlarga ega bo'lmasa. AJW –lgebra $A II_1$ tipiga ega deyiladi, agar bu algebra modulyar bo'lsa va II tipiga ega bo'lsa. AJW –algebra $A II_\infty$ tipiga ega deyiladi, agar bu algebra II tipiga ega bo'lsa va umuman olganda modulyar bo'lsa. AJW –algebra $A III$ tipiga ega bo'lganda, ravshanki, bu algebra ummuman modulyar bo'lmagan AJW –algebra bo'ladi.

Deylik, n –kordinal son bo'lsin. $A AJW$ – algebra I_n tipidagi AJW –algebra deyiladi, agar A algebraning abel proektorlarining ixtiyoriy α uchun $c(p_\alpha \alpha) = 1$ va $\sup p_{\alpha_n} = 1$, $|J| = n$ shartlarini qanoatlantiruvchi $(p_{\alpha_n})_{\alpha \in J}$ – ortogonal to'plami mavjud bo'lsa. Shu bilanbirga $A I_\infty$ tipidagi AJW – algebra deb ataladi, agar A algebra I_n , n – cheksiz kordinal son, tipidagi AJW –algebraning to'g'ri yig'indisi bo'lsa. Ravshanki, agar $A - I_n$ tipidagi AJW –algebra va $e - A$ algebraning markaziy proyeksi bo'lsa, u holda eA ham I_n tipidagi algebra bo'ladi.

Lemma. $A - I_n$, $n < \infty$, tipidagi AJW – algebra bo'lsin. U holda n A abel algebradagi bitta markaziy tashuvchiga ega bo'lgan noldan farqli proyektorlarning ortogonal to'plamining quvvatiga teng maksimal kordinal songa teng.

Teorema. Har bir I tipidagi AJW –algebra $A = A_\infty \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots \oplus A_k \oplus$ bu yerda har bir A_n bu 0 yoki I_n tipidagi AJW –algebra ko'rinishdagi yagona yoyilmaga ega.

Teorema. Deylik $A - I_2$ va I_3 tipidagi to'g'ri qo'shiluvchilarga ega bo'lmagan AJW –algebra bo'lsin. U holda $A JC$ –algebra bo'ladi.

Teorema. Deylik, $M - AW^*$ – algebra va $A - M_{s\alpha} AJW$ –qismalgebra, I_2 tipidagi to'g'ri qo'shiluvchiga ega bo'lmagan bo'lsin. U holda A teskarilanuvchi AJW –algebradir.

Teorema. Bir vaqtning o'zida factor bo'lgan AJW –algebrani AJW –faktor deyiladi. AJW –faktorni I tipiga ega deb aytiladi, agar bu faktor minimal proektorga ega bo'lsa. I tipidagi AJW –faktorning ta'rifi I tipidagi AJW –algebraning ta'rifiga faktor uchun ekvivalentdir.

Teorema. I tipidagi AJW –faktor JBW –algebradir.

Teorema. Deylik, $n - 3$ dan kata kordinal son, $A - I_n$ tipidagi AJW –faktor bo'lsin. U holda bu faktor quyidagi faktorlardan biriga izomorfdir. 1) M_3^8 ; 2) $B(H_R)_{sa}$; 3) $B(H_C)_{sa}$; 4) $B(H_H)_{sa}$ bunda $B(F_H)_{sa} - H_F$ gilbert fazosida aniqlangan barcha chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operatorlar yordan algebrasi va $F = R, C, H$.

Teorema. $A - I_2$ tipidagi AJW –faktor bo'ladi shu va faqat shu holat qachonki, A spin-faktor bo'lsa, ya'ni shunday H gilbert fazo mavzud bo'lsaki $A \cong H \oplus R_1$. Bu yerda $H \oplus R_1$ spin-faktor $|a + \lambda 1| = \|a4 + 1\lambda\|$ normaga nisbatan JB –algebra bo'ladi. Bu yerda yordan ko'paytirish amali quyidagi ko'rinishga ega $(a + \lambda 1)(b + \mu 1) = (\mu a + \lambda b) + (< a, b > + \lambda \mu), a, b \in H, \lambda, \mu \in R$.

I_n tipidagi AJW –algebralar klassifikatsiyasi quyidagi teoremda $3 \leq n < \infty$ holat uchun to'la yoritilgan.

Teorema. Deylik $A - I_n$ tipidagi AJW –algebra, bu yerda $3 \leq n < \infty$ bo'lsin. U holda (a) $n = 3$ ga teng bo'lsa A algebra $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4$ to'g'ri yig'indi ko'rinishga ega; (b) agar $n > 3$ bo'lsa, u holda A algebra $A = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ to'g'ri yig'indi ko'rinishga ega. Bu yerda har bir $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ uchun shunday X_i ekstremal bog'liqsiz kompakt mavjudki $A_i \cong C(X_i, H_n(F_i))$ izomorfizm o'rinli bo'ladi, $H_n(F_i) - F_i$ ustidagi $n \times n$ o'lchovli matritsalar algebrasining ermit qismi, buyerda $F_1 = R, F_2 = C, F_3 = H, F_4 = O$ –Keli sonlari algebrasi, ya'ni $H_3(F_4) = M_3^8$.

Misollar. Yuqoridagi teoremda I tipidagi AJW –algebralar keltirilgan. $R - I_1$ tipidagi AJW –agebradir. Bu yerda abel proektori $e = 1$ va $c(e) = 1$ bo'ladi. Q – ekstremal bog'liqsiz kompakt bo'lsin, $C(Q)$ – haqiqiy qiymatli va aniqlanish sohasi Q bo'lgan uzluksiz finksiyalar algebrasi I_n tipidagi AJW – algebradir. Huddi AW^* – algebralar uchun bo'lgani kabi II, II_∞, III tipidagi AJW – algebralarga misollar ko'rish murakkab hisoblanadi. Bir misolni keltirishimiz mumkin H cheksiz o'lchavli komoleks gil'bert fazosi uchun $B(H)$ algebrani va K –barcha H gil'bert fazodagi kompakt operatorlar idealini olamiz. U holda $B(H)/K$ factor algebra mana shunday algebralarga misol bo'la oladi. Aniqrog'i $B(H)/KII_\infty$ tipidagi AW^* –faktor va $B(H)_{sa}/K_{sa}II_\infty$ tipidagi AJW – faktor bo'ladi.

$A - AJW$ –algebra bo'lsin. U holda yuqoridagi teoremda ko'ra shunday A_I I tipidagi, A_{II} II tipidagi va A_{III} III tipidagi AJW – algebralar mavjudki $A = A_I \oplus A_{II} \oplus A_{III}$ tenglik o'rinli bo'ladi. O'z navbatida A_I AJW – algebra quyidagi ko'rinishdagi to'g'ri yig'indiga yoyiladi. $A_I = A_\infty \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$, bu yerda ixtiyoriy n uchun $A_n = 0$ yoki I_n tipidagi AJW – algebra, A_∞ esa m –cheksiz kordinal son bo'lganda I_m tipidagi AJW – algebralarning to'g'ri yig'indisi. Bu yerda $A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$ to'g'ri yig'indi I_{fin} tipidagi AJW – algebra deb ataladi va $A_{I_{fin}}$ kabi belgilanadi. A_∞ algebra esa cheksiz kordinal son m uchun I_m tipidagi AJW – algebra

ko'rinishidagi algebralarining to'g'ri yig'indisi bo'lgani uchun bu algebrani A_{I_∞} kabi belgilaymiz. Agar A_{JW} – algebra noldan farqli markaziy modulyar proyektorlarga ega bo'lmasa bu algebrani umuman olganda cheksiz A_{JW} – algebra deb ataymiz. Ma'lumki, $A_{II} A_{JW}$ – algebra $A_{II} = A_{II_1} \oplus A_{II_\infty}$ ko'rinishga ega, bu yerda A_{II_1} – II tipidagi modulyar A_{JW} – algebra, A_{II_∞} – II tipidagi umuman olganda cheksiz bo'lgan A_{JW} – algebra. Demak, quyidagi yoyilma o'rinalidir. $A = A_{I_{fin}} \oplus A_{I_\infty} \oplus A_{II_1} \oplus A_{II_\infty} \oplus A_{III}$. Ravshanki, $A_{I_{fin}} \oplus A_{II_1}$ qismimodulyar A_{JW} – algebra va $A_{I_\infty} \oplus A_{II_\infty} \oplus A_{III}$ qismi esa umuman olganda cheksiz A_{JW} – algebradir.

P. A. J. Steysining [Stac] ishida, agar A kompleks tipidagi JBW – algebra bo'lsa, u holda A algebraning qobiq C^* –fon Neyman algebrasi bo'lishi isbotlangan, boshqacha qilib aytganda A algebraning qobiq C^* – algebrasi shu algebraning qobiq fon Neyman algebrasi bilan ustma-ust tushishi isbotlangan. O'shaishda, yana, cheksiz spin sistemaga ega bo'lgan, to'g'ri qo'shiluvchiga ega bo'lmagan ixtiyoriy JW –algebraning qobiq C^* –algebrasi fon Neyman algebrasi bo'lishi yuqoridagi natijaning isbotiga o'xshash isbotlanishi mumkinligi ta'kidlangan. F. Arziqulov o'zining [ART], [ART2] ishlarida (ikkinchi [ART2] ishi Sh. Ayupov bilan hammualliflikda yozilgan) oxirgi yuqoridagi umumiy holdagi natijaning yetarlicha soddalashtirilgan isbotini berdi.

Ta'rif. Deylik, H –kompleks gil'bert fazosi bo'lsin, $A - H$ gilbert fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma chegaralangan chiziqli operatorlarning JC –algebrasi bo'lsin. A algebraning $B(H)$ algebradagi qobiq C^* – algebrasi deb $B(H)$ – algebrada A algebra yordamida qurilgan C^* –algebraga aytiladi. A algebraning qobiq haqiqiy C^* –algebrasi deb $B(H)$ algebrada A algebra yordamida qurilgan haqiqiy C^* –algebraga aytiladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, agar $C^*(A) - AJC$ –algebraning qobiq C^* –algebrasi $R^*(A)$ –esa qobiq haqiqiy C^* –algebrasi bo'lsa, u holda $C^*(A) = R^*(A) + iR^*(A)$.

$B - B(H)$ – algebraning qism to'plami bo'lsin, u holda B to'planning $B(H)$ algebradagi ultrakuchsiz yopilmasini $W(B)$ orqali belgilaymiz. $B(H)$ algebrada AJC –algebra yordamida qurilgan fon Nuyman algebrasi AJC –algebrani qobiq fon Nuyman algebrasi deb ataladi.

Teorema. Deylik, A – teskarilanuvchi JW –algebra bo'lsin va I tipidagi to'g'ri qo'shiluvchiga ega bo'lmasin, $W^*(A) - A$ algebraning qobiq fon Neyman algebrasi, $R^W(A) - A$ algebraning qobiq haqiqiy fon Neyman algebrasi va $R^W(A) \cap iR^W(A) = \{0\}$. Deylik, $p - W^*(A)$ algebraning proyektori, $p = x + iy, x, y \in R^W(A)$ va $R^C(xy) - x, y$ elementlar bo'yicha qurilgan haqiqiy C^* –algebra, $W(R^C(x, y)_{sa}) - CR^C(xy)_{sa} JC$ – algebraning A_{JW} –algebradagi kuchsiz yopilmasi bo'lsin. U holda shunday X giperstoun kompakt mavjudki quyidagi shartlar bajariladi:

1) agar $y \neq 0$, $l(x) = l(y) (l(a) - a)$ elementning fon Neyman agebrasidagi chap tashuvchisi, $l(a)a = a$, $y \in C^*(w(R^c(x, y)_{sa}))$ bo'lsa, u holda $R^c(w(R^c(x, y)_{sa})) \cong C(X, M_2(R))$, bu yerda $R^c(w(R^c(x, y)_{sa})) - w(R^c(x, y)_{sa})$ algebra bo'yicha qurilgan haqiqiy C^* -algebra.

2) agar $y \neq 0$, $l(x) = l(y)$ va $xy = yx$ bo'lsa, u holda

$$R^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y) \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot R + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} R,$$

buyurda $R^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y) - w(R^c(x, y)_{sa})$ algebra va y element bo'yicha qurilgan haqiqiy C^* -algebra. Bundan tashqari, $z \in R^w(A)$ element mavjudki, $R^c(x, y, z) \cong M_2(R)$ bo'ladi.

3) Agar $y = 0$ bo'lsa, u holda $R^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y) \cong R \cdot p$,

4) Umumiy holda shunday $e \in R^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y)$ proyektor mavjudki, $e, r(x), r(y)$ elementlar $R^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y)$ algebra markaziy bo'lishadi va

$$A_1 \cong C(X, M_2(R)), A_2 \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} R, A_3 \cong R \cdot 1, R^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y) = A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$$

, bu yerda

$$A_1 = (r(y) - e)R^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y), A_2 = eR^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y), A_3 = (r(x) - r(y)) \cdot R^c(w(R^c(x, y)_{sa}), y).$$

Bundan tashqari $R^w(A)$ algebra shunday z element mavjudki,

$$R^c(ex, ey, z) \cong M_2(R).$$

Ushbu teoremdan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema. Deylik, A -teskarilanuvchi JC -algebra $W^*(A) - A$ algebraning qobiq fon Neyman algebrasi va $C^*(A) - A$ algebraning qobiq C^* -algebrasi bo'lsin. U holda AJC -algebra va JW -algebra bo'ladi shu va faqat shu holatda qachonki $W^*(A) = C^*(A)$ tenglik bajarilsa.

Yuqoridagi teorema teskarilanuvchi bo'lmagan, ya'ni cheksiz spin sistemaga ega bo'lgan to'g'ri qo'shiluvchisi bor JW -algebra uchun bajarilmaydi. Haqiqitdan ham, agar JW -algebra A cheksiz spin sistemaga ega bo'lgan spin faktor bo'lsa, u holda A algebraning $C^*(A)$ qobiq C^* -algebrasi CAR -algebra bo'ladi. Bu algebra esa fon Neyman algebrasi emas.

Endi yuqoridagi teoremani AJW -algebra uchun ko'rib chiqamiz. Buning uchun haqiqiy AW^* -algebra tushunchasidan foydalanamiz. Haqiqiy AW^* -algebra S. Alberio, Sh. Ayupov va A. X. Abduvoitovlarning ishlarida [AAA], [AAA2] kiritilgan va o'rganilgan. Xususan, ular tomonidan $M = A + iA$ yig'indisi (kompleksifikatsiyasi) kompleks AW^* -algebra bo'lmaydigan haqiqiy AW^* -algebra misol qurilgan. Shuning uchun quyidagi teoremlarda zarurat

tug'ilganda $M = A + iA$ yig'indi (kompleks) AW^* –algebra bo'lsin va $A \cap iA = \{0\}$ shart bajarilsin. $C^*(A_{sa}) - A_{sa}AJW$ –algebraning qobiq C^* –algebrasi bo'lsin. U holda $C^*(A_{sa})AW^*$ –algebra bo'ladi. Bundan tashqari, $A_{sa}AJW^*$ –algebra I tipidagi to'g'ri qo'shiluvchiga ega bo'lmasa, u holda $M = C^*(A_{sa})$.

Misol. H –kvaternionlar haqiqiy algebrasi bo'lsin. $A = H$ deb olaylik, ya'ni H –haqiqiy AW^* –algebradir. U holda $M = A + iA = H + iH$ yig'indi AW^* –algebra bo'ladi. Bunda $A_{sa}AW^*$ –algebra I_1 tipidagi to'g'ri qo'shiluvchiga ega bo'lganda yuqoridagi teorema har doim ham to'g'ri bo'lavermaydi.

Yuqoridagi teoremlarni qo'llanishiga misol tariqasida AW^* –algebra ustida aniqlangan o'lchovni ko'rib chiqamiz.

Ta'rif. Deylik, $M - AW^*$ –algebra yoki AJW^* –algebra bo'lsin. $P(M) - M$ algebraning barcha proektorlari panjarasi (to'plami) bo'lsin. $P(A)$ to'plamda aniqlangan o'lchov –bu μ haqiqiy qiymatli musbat funksiya ($P(M)$ to'plamda aniqlangan) shundayki, $\mu(0) = 0, \mu(1) = 1$ va ixtiyoriy ortogonal p va q proektorlar uchun $\mu(p + q) = \mu(p) + \mu(q)$ tenglik bajariladi.

Glison teoremsining umumiy natijalariga ko'ra teskarilanuvchi MJW –algebraning $P(M)$ algebralari to'plamida aniqlangan har bir mera yagona ravishda M algebraning chiziqli holat-funksionaligacha davom etadi, agar M noldan farqli I_2 tipidagi to'g'ri qo'shiluvchilarga ega bo'lmasa. Ammo bu natija I_2 tipidagi JW –algebra uchun o'rinli emas.

M –teskarilanuvchi AW^* –algebra, $R^*(M) - M$ algebraning qobiq haqiqiy C^* –algebrasi haqiqiy AW^* –algebra va $R^*(M) + iR^*(M)$ yig'indi kompleks AW^* –algebra bo'lsin, hamda $R^*(M) \cap iR^*(M) = \{0\}$ shart bajarilsin. Quyidagi belgilashni kiritamiz: $R(M)^* = \{iy: y \in R^*(M), y^* = -y\}$. U holda $R(M)$ banax fazosi bo'ladi. $R^*(M)^* - R(M)$ banax fazosidagi haqiqiy qiymatli chiziqli funksionallarning qo'shma fazosi bo'lsin. U holda quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema. Deylik, $\mu - M$ teskarilanuvchi AJW –algebraning $P(M)$ proektorlari panjarasida aniqlangan o'lchov bo'lsin. Faraz qilaylik, $M -$ algebra I_2 tipidagi to'g'ri qo'shiluvchilarga ega bo'lmasin. $\rho - \mu$ o'lchovning M algebradagi davomi bo'lgan holat – funksionali bo'lsin, $\sigma \in R(M)^* (\sigma \equiv 0$ holatni ham hisobga olgan holda), $U = v(p) = \rho(x) + \sigma(iy)$, bu yerda $p - C^*(M) = R^*(M) + iR^*(M)$ qobiq C^* –algebraning proektor, $p = x + iy, x, y \in R^*(M), C^*(M) = R^*(M) + iR^*(M)$ shartlari bilan aniqlangan $C^*(M)AW^*$ –algebra proektorlaridagi akslantirish bo'lsin. Faraz qilaylik, har bir $p \in C^*(M)$ proektor uchun $\rho(x) \geq |\sigma(iy)|$ shart bajarilsin. U holda v akslantirish o'lchov bo'ladi va μ o'lchov v o'lchovga $C^*(M)$ algebra proektorlarida davom etadi.

Teskarisi, agar μ o'lchov $C^*(A)AW^*$ – algebra proektorlarida aniqlangan ϑ o'lchovga davom etsa, u holda shunday $\sigma \in R(M)^*$ funksional mavjudki, $\vartheta(p) = \rho(x) + \sigma(iy)$ shart bajariladi, bu yerda $p \in C^*(M)$ – proektor, $p = x + iy$, $x, y \in R^*(M)$. Bundan tashqari ixtiyoriy $p \in C^*(M)$ proektor uchun $\rho(x) \geq |\sigma(iy)|$ tengsizlik bajariladi.

Misol. n – natural son, $n \geq 3$, $M_n(R)_{sa} - R$ haqiqiy sonlar maydoni ustida $n \times n$ o'lchovli o'z-o'ziga qo'shma matritsalar yordan algebrasi bo'lsin. Deylik, $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n - M_n(R)$ algebraning birlik matritsalar to'plami bo'lsin, ya'ni $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^n -$ minimal priektorlarning maksimal ortogonal to'plami va barcha i, j indekslar uchun $e_{ij}e_{ji} = e_{ii}$, $e_{ji}e_{ij} = e_{jj}$ bo'lsin. U holda $R(M_n(R)_{sa})$ banax fazo chekli o'lchovlidir va $\{e_{ij} - e_{ji}, \forall i \neq j\}$ ba'zis orqali quriladi.

Deylik, $\mu - M_n(R)_{sa}$ algebraning proektorlarida aniqlangan, $\rho - \mu$ o'lchovning davomi bo'lgan $M_n(R)_{sa}$ algebra ustida holat- funksional bo'lsin, $\sigma \in K(M_n(R)_{sa})^*$ – shunday funksionalki, barcha $p \in C^*(M_n(R)_{sa})$ proektorlar uchun $|\sigma(iy)| \leq \rho(x)$, bu yerda

$$p = x + iy, \quad x, y \in R^*(M_n(R)_{sa}).$$

Ravshanki $C^*(M_n(R)_{sa}) = M_n(C)$, $R^*(M_n(R)_{sa}) = M_n(R)$. U holda barcha $iy \in R(M_n(R)_{sa})$ uchun $y = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}(e_{ij} - e_{ji})$ va $\sigma(iy) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}\sigma(i(e_{ij} - e_{ji}))$. Shuni ta'kidlash kerakki, $\{e_{ii}\} \cup \{e_{ij} - e_{ji}\}$ to'plam $M_n(R)_{sa}$ yordan algebrasining birlik matritsalar to'plamidir. $\{e_{ii}\} - C^*(M_n(R)_{sa}) = M_n(C)$ algebraning bazisi. $M_n(C)$ algebrada φ akslantirishni quyidagicha kiritamiz:

$$1) \quad \varphi(e_{ij}) = \frac{1}{2}\rho(e_{ij} + e_{ji}) + \frac{1}{2i}\sigma(i(e_{ij} - e_{ji})) \text{ barcha } i, j \text{ uchun};$$

$$2) \quad \text{Har bir } a = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}e_{ij} \in M_n(C) \text{ uchun } \varphi(a) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}\varphi(e_{ij})$$

Ravshanki, bu φ akslantirishni $M_n(C)$ algebrada holat funksional bo'lsadi. Bundan tashqari, har bir $p \in M_n(C)$ proektor uchun $\varphi(p) = \rho(x) + \sigma(iy)$, bu yerda

$$p = x + iy, \quad x, y \in R^*(M_n(R)_{sa}) = M_n(R).$$

Shu bilan birga, agar $\vartheta - M_n(C)$ fon Neyman algebrasi proektorlari ustidagi o'lchov bo'lsa, $\vartheta(p) = \rho(x) + \sigma(iy)$ kabi aniqlangan, bu yerda $p \in M_n(C)$ proektor $p = x + iy$, $x, y \in R^*(M_n(R)_{sa}) = M_n(R)$, u holda ϑ o'lchov bo'ladi va μ o'lchov

ϑ o'lchovgacha davom etadi. Bundan tashqari, $\vartheta = \varphi|_{P(M_n(C))}$, bu yerda $P(M_n(C)) - M_n(C)$ algebraning barcha proektorlari to'plami.

Teskarisi, faraz qilaylik, μ o'lchov biron bir ϑ o'lchovga davom etsin, $M_n(C)$ fon Neyman algebrasining proektorlarida aniqlangan. U holda ϑ μ holat funksionaliga davom etadi, bunda $\varphi: M_n(C) \rightarrow M_n(C)$, va bu φ holat funksional yuqorida keltirilgan barcha shartlarni qoniqtiradi.

2.3. § JC-ALGEBRALAR TIPLARI VA ULARNING QOBIQ C*-ALGEBRALARI TIPLARI MOSLIGI

Lemma. A -kompleks yoki haqiqiy AW^* -algebra, $e, f \in A_{sa}$ AJW -algebra proyektorlari bo'lsin. U holda e va f proyektorlarining A AW^* -algebrada ekvivalent bo'lishi shu e va f proyektorlarning A_{sa} AJW -algebrada ekvivalent bo'lishiga teng kuchlidir.

Isbot. Proyektorlar e va $f \in A$ AW^* -algebrada o'zaro ekvivalent bo'lishsin, ya'ni $e = xx^*$, $x \in A$ u holda $w = exf + fx^*e$ yelement $w = w^*$ va $w^2 = e + f$ shartlariga qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham

$$w^2 = exffx^*e + fx^*eexf = exx^*xxe^* + fx^*xx^*xf = e + f$$

Bundan tashqari

$$U_w f = wf w = (exf + fx^*e)f(exf + fx^*e) = exffx^*e = e \text{ va } U_w e = we w = f.$$

Ravshanki $w \in A_{sa}$. U holda element $s = 1 - (e + f) + w$ simmetriya (ya'ni $S^2 = 1$) bo'ladi va $U_s e = f$ bo'lsin. U holda $x = es$ uchun uchun $e = xx^*$, $f = x^*x$ tengliklar o'rinaldir.

Teorema. A -kompleks yoki haqiqiy AW^* -algebra bo'lsin. U holda A AW^* -algebraning chekli bo'lishi $P(A_{sa})$ panjaraning modulyar bo'lishiga teng kuchlidir.

Isbot. Panjara $P(A_{sa})$ modulyar. U holda maqolaga ko'ra A_{sa} AJW -algebrada shunday o'zaro ortogonal proyektorlarning $\{g_i\}$ cheksiz ketma-ketligi mavjudki, undagi har bir juft proyektorlar o'zaro simmetriyaga nisbatan ekvivalentdir. U holda 1 lemmaga ko'ra $\{g_i\}$ to'plamdagi har ikkita proyektor A AW^* -algebrada ekvivalentdir. $\{g_i\}$ to'plamni ikkita teng kuchli (ya'ni bir xil miqdorda elementlarga ega bo'lgan) $\{f_i\}$ va $\{e_i\}$ qism to'plamlarga bo'lamiz. Deylik

$$g = \sup g_i, f = \sup f_i, e = \sup e_i$$

bo'lsin. U holda AW^* -algebralar nazariyasidan ma'lumki, $e \sim g \sim f$. e va f proyektorlarning aniqlanishiga ko'ra $g = e + f$, ya'ni $g > f, e$. Demak AW^* -algebra A chekli emas.

Faraz qilaylik endi AW^* -algebra A chekli bo'lmasin. U holda AW^* -algebralar nazariyasidan ma'lumki A AW^* -algebrada noldan farkli cheksiz z markaziy proyektor mavjuddir. Bundan A AW^* -algebrada shunday o'zaro ortogonal proyektorlarning $\{g_i\}$ cheksiz to'plami mavjudki, undagi har bir juft proyektorlar A AW^* -algebrada o'zaro ekvivalent bo'ladi. U holda 1 lemmaga ko'ra $\{g_i\}$ to'plamning har ikkita proyektori simmetriyaga nisbatan ekvivalentdir. Ma'lumki proyektorlar panjarasi $P(A)$ modulyar bo'lgan A AJW -algebrada har qanday simmetriyaga

nisbatan o'zaro ekvivalent proyektorlar to'plami cheklidir. Demak, A_{sa} AJW-algebrada proyektorlar panjarasi $P(A_{sa})$ modulyar emas. 2-teorema isbotlandi.

Lemma. A-kompleks AW^* -algebra, A_{sa} -uning AJW-algebrasi u holda quyidagi teng kuchlilar o'rinli.

- 1) AJW- algebra A_{sa} proyectori p Abel proyectori bo'ladi $\Leftrightarrow p$ proyektor A AW^* - algebraning abel proyectori bo'ladi .
- 2) AJW- algebra A_{sa} proyectori p markaziy element $\Leftrightarrow p$ A AW^* - algebraning markaziy elementi.

Isbot. 1) $a \in pA_{sa}$ bo'lsin. Lemma shartiga ko'ra Yordan ko'paytmasiga nisbatan $\forall b \in pA_{sa}p$ $(ac)b = a(cb) \quad \forall c \in pA_{sa}p$ sharti bajariladi. Yordan va assotsiativ ko'paytmalar $x \bullet y = 1/2(xy + yx)$ tenglik orqali bir-biri bilan bog'lik. Shuning uchun $a \in pA_{sa}p$ qismalgebraning har bir elementi bilan kommutativ munosabatdadir.

$pAp = pA_{sa}p + ipA_{sa}p$ tenglikka ko'ra ixtiyoriy $x \in rAr$ element uchun shunday $c, d \in pA_{sa}p$ elementlar mavjudki $x = s + id$ tenglik o'rinlidir. Bundan $ax = a(s + id) = as + iad = xa$. Demak element $a \in rAr$ qismalgebraning har bir elementi bilan kommutativ munosabatdadir. Element a ixtiyoriy element bo'lgani sababli ixtiyoriy $y = a + ib \in pAp$ element uchun quyidagiga egamiz. $yx = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ca + ida + icb + i^2bd = (c + id)(a + ib)$.

Bundan $u \in rAr$ element ixtiyoriy bo'lgani uchun rAr qismalgebra kommutativdir. Shuning uchun r -A algebrada abel proyektoridir. Ravshanki, agar r proyektor A algebrada abel proyectori bo'lsa, u holda $r A_{sa}$ algebrada abel proyektoridir.

- 2) ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Teorema. A-kompleks AW^* -algebra , A_{sa} -AJW* -algebra va $A_{sa} = \{x \in A: x^* = x\}$ bo'lsin. U holda quyidagi teng kuchlilar o'rinlidir

- 1) AJW* -algebra $A_{sa} I_n$ tipida $\Leftrightarrow AW^*$ -algebra A I_n tipida.
- 2) $A_{sa} II_1$ tipida $\Leftrightarrow A II_1$ tipida.
- 3) $A_{sa} II_\infty$ tipida $\Leftrightarrow A II_\infty$ tipida
- 4) $A_{sa} III$ tipida $\Leftrightarrow A III$ tipida.

Isbot. Ravshanki A_{sa} AJW –algebra va A AW^* -algebra proyektorlari panjaralari $P(A_{sa})$ va $P(A)$ o'zaro tengdir. Ya'ni $R(A_{sa}) = R(A)$. U holda teoremadan va lemmadan kelib chiqadi.

Shunga o'xshash quyidagi teorema ham o'rinlidir:

Teorema. A -haqiqiy AW^* -algebra, $A_{sa} = \{x \in A: x^* = x\}$, $A \cap iA = \{0\}$ bo'lsin. Faraz qilaylik A I_1 tipidagi to'g'ri qo'shiluvchiga ega emas va $A + iA$ AW^* -algebra bo'lsin. U holda $r \in A_{sa}$ proyektor uchun quyidagi o'rinli rA_{sa} AJW -algebrada abel proyektori $\Leftrightarrow rA + iA$ AW^* -algebrada abel proyektori.

Isbot. $\Rightarrow$ Ravshanki $rAr + irAr$ kompleks AW^* -algebrada bo'ladi. Ixtiyoriy

$q_1, q_2 \in pAp + ipAp$ proyektorlar uchun

$$q_i = a_i e_i + b_i f_i + i((z_i + iy_i)e_i s_i - (z_i - iy_i)f_i s_i) + t_i, \quad i=1,2$$

$a_i, b_i, e_i, f_i, z_i, y_i, s_i, t_i \in A_{sa}$ o'rinli. Ravshanki $a_i, b_i, e_i, f_i, z_i, y_i, s_i, t_i \in pA_{sa}p$ $i=1,2$ bo'ladi va ushbu elementlar o'zaro kommutativ munosabatdadir (ya'ni $ab=ba$) (lemmning isbotiga qarang). Bundan q_1 va q_2 proyektorlar o'zaro kommutativ munosabatda, ya'ni

$$q_1 \bullet q_2 = q_2 \bullet q_1$$

Bundan q_1 va q_2 ixtiyoriy olingan va $pAp + ipAp$ AW^* -algebra bo'lgani uchun $rAr + irAr$ komutativ AW^* -algebra bo'ladi. Bundan $pA + iA$ AW^* -algebrada abel proyektoridir.

$\Leftarrow$ Ravshanki, agar $rA + iA$ AW^* -algebrada abel proyektori bo'lsa, u holda $pA_{sa}p$ elementlari o'zaro kommutativdirlar. Ma'lumki operator algebralari uchun to'plamning elementlari assotsiativ ko'paytmada kommutativ bo'lishi ushbu barcha to'plam elementlari Yordan ko'paytmaga nisbatan assotsiativ bo'lishga teng kuchlidir. Demak $rA_{sa}r$ A_{sa} AJW -algebrada assotsiativ qismalgebra va r abel proyektori bo'ladi.

Teorema. A -haqiqiy AW^* -algebra, $A_{sa} = \{x \in A: x^* = x\}$, $A + iA$ - AW^* -algebra $A \cap iA = \{0\}$ bo'lsin. U holda quyidagilar o'rinlidir.

- 1) AJW -algebra A_{sa} I_n tipida $\Leftrightarrow AW^*$ -algebra $A + iA$ I_n tipida
- 2) A_{sa} II_1 tipida $\Leftrightarrow A + iA$ II_1 tipida.
- 3) A_{sa} II_∞ tipida $\Leftrightarrow A + iA$ II_∞ tipida.
- 4) A_{sa} III tipida $\Leftrightarrow A + iA$ III_∞ tipida.

Mazkur ilmiy ishda JB-algebralari uchun ularning tiplarining ta'riflari kiritilgan. Ma'lumki C^* -algebralarning I, II_1, II_∞, III tiplari mavjud [1]. JB-algebralari uchun tiplar C^* -algebralari uchun aniqlangani kabi annulyatorlar yordamida kiritilgan. Berilgan ishda JC-algebralari va ularning qobiq C^* -algebralari tiplarining mosligi o'rganilgan. Bunga o'xshash

masalalar JW-algebralar va ularning qobiq fon Neyman algebralari uchun Sh.Ayupovning [2] va Ye.Shtyormerning [3] ishlarida ko‘rilgan. Bundan tashqari, AJW-algebralar va ularning qobiq C^* -algebralari uchun mualliflardan birining [4] ilmiy ishida bu masala o‘rganilgan. Berilgan maqolada ayrim xali tekshirilmagan xollar uchun JC-algebra va uning qobiq C^* -algebrasi tiplari mos kelishi, bir xil bo‘lishi ko‘rsatilgan.

Ilmiy ishda foydalanilgan asosiy tushunchalarni eslatib o‘tamiz. A —JB-algebra bo‘lsin, $\wp(A)$ —uning annulyatorlari to‘plami bo‘lsin, ya’ni $\wp(A) = \{Ann(S) : S \subseteq A_+\}$, bu yerda $A_+ = \{a^2 : a \in A\}$, $Ann(S) = \{a \in A : as = 0 \ \forall s \in S\}$. U holda $\wp(A)$ tartib bo‘yicha to‘liq, ortomodulyar panjara bo‘ladi. Bu yerda ortoqo‘shimcha $\perp$ amali quyidagicha aniqlanadi $X^\perp = Ann(X)$, $X \in \wp(A)$. Shuni takidlash kerakki X —JC-qismalgebra va $Ann(X_+) = Ann(X)$. Agar X —assotsiativ algebra bo‘lsa, X —abel annulyatori deb ataladi. Agar $\wp(X) = \{Y \in \wp(A) : Y \subseteq X\}$ qismto‘plam modulyar panjara bo‘lsa, u holda X modulyar annulyator deb ataladi. Ixtiyoriy $V \subseteq A$ uchun ${}^dV = \{a \in A : xay + yax = 0, \ \forall x, y \in V\}$ bo‘lsin. U holda agar ${}^dX \cap {}^dAnn(X) = \{0\}$ bo‘lsa X markaziy annulyator deb ataladi. Barcha markaziy annulyatorlar to‘plamini $Z(\wp(A))$ kabi belgilaymiz. $Z(\wp(A))$ to‘plam $\wp(A)$ panjaraning tartib bo‘yicha to‘la qismpanjarasidir.

Ta’rif. Agar A JB-algebrada X abel annulyatori mavjud bo‘lsa va

$$\inf \{Y \in Z(\wp(A)) : Y \subseteq X\} = A \in \wp(A)$$

bo‘lsa, u holda A I tipidagi JB-algebra deb ataladi. Agar A JB-algebraning $\wp(A)$ panjarasi modulyar bo‘lib, A algebrada noldan farqli abel annulyatori mavjud bo‘lmasa, u holda A II_1 tipidagi JB-algebra deyiladi. Agar A JB-algebraning hech qanday markaziy annulyatori modulyar bo‘lmasa va ixtiyoriy markaziy $X \in Z(\wp(A))$ annulyator o‘zida yotuvchi, noldan farqli $X \supseteq Y \in \wp(A)$ —modulyar annulyatorga ega bo‘lsa, u holda A II_∞ tipidagi JB-algebra deyiladi. Agar A JB-algebrada nodan farqli modulyar annulyator mavjud bo‘lmasa, u holda A III tipidagi JB-algebra deb ataladi.

Shuni takidlash kerakki I , II_1 , II_∞ , III tipidagi C^* -algebralar [1] maqolada kiritilgan va o‘rganilgan.

Ma’lumki JBW-algebralarining I , II_1 , II_∞ , III tiplari proektorlar orqali aniqlanadi. Ammo, JBW-algebralar uchun berilgan maqolada kiritilgan I , II_1 , II_∞ , III tiplarning ta’riflari JBW-algebralarining proektorlar orqali aniqlangan I , II_1 , II_∞ , III tiplari ta’riflariga teng kuchlidir.

Teorema 1. A — C^* -algebra, $A_{sa}=\{a \in A: a^*=a\}$ bo'lsin. U holda A_{sa} JC -algebra F tipga ega bo'ladi shu va faqat shu holda qachonki A C^* -algebra F tipga ega bo'lsa, bu yerda $F=I, II_1, II_\infty, III$.

Isbot. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz $Ann(S)=\{a \in A: as+sa=0 \quad \forall s \in S\}$, $\wp(A)=\{Ann(S): S \subseteq A_+\}$, $A_+=\{aa^*: a \in A\}$. Ravshanki $Ann(S) \in \wp(A)$ uchun $Ann(S)_+=\{a \in Ann(S): a^*=a\}$ to'plam A_{sa} JC -algebraning annulyatori bo'ladi. Demak $\varphi: X \rightarrow X_{sa}$, $X \in \wp(A)$ akslantirish $\wp(A)$ va $\wp(A_{sa})$ orasidagi panjaralar izomorfizmidir. Buning uchun φ —sur'ektiv akslantirish ekanini ko'rsatish yetarli. $X \in \wp(A_{sa})$ uchun $X+iX$ C^* -algebra bo'ladi. Ta'rif bo'yicha shunday $S \subseteq A_+$ mavjudki $X=Ann_{A_{sa}}(S)=\{a \in A_{sa}: as+sa=0 \quad \forall s \in S\}$. $Ann_A(S)=X+iX$ ekanini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $a+ib \in Ann_A(S)$, $a, b \in A_{sa}$ uchun $s(a+ib)+(a+ib)s=0 \quad \forall s \in S$ bo'lgani uchun $(sa+as)+i(sb+bs)=0$ va $A_{sa} \cap iA_{sa}=\{0\}$ shartga ko'ra $sa+as=0$, $sb+bs=0$. Bundan $a, b \in Ann_{A_{sa}}(S)$. Demak, $a, b \in X$ va $Ann_A(S)=X+iX$. Demak, φ —izomorfizmdir.

Agar X —abel annulyatori bo'lsa $X_{sa} \in \wp(A_{sa})$ ham abel annulyatori bo'ladi. Bundan X annulyator $\wp(A)$ panjarada modulyar (abel annulyatori) bo'ladi shu va faqat shu xolatda qachonki X_{sa} annulyator $\wp(A_{sa})$ panjarada modulyar (abel annulyatori) bo'lsa.

Lemma. A — AJW -algebra, $C^*(A)$ —uning qobiq C^* -algebrasi, $R^*(A)$ —qobiq xaqiqiy C^* -algebrasi va $R^*(A) \cap iR^*(A)=\{0\}$ bo'lsin. U holda $\wp(A)$ panjarani $\wp(C^*(A))$ panjaraga tartib bo'yicha to'la qismpanjara sifatida yotqizish mumkin.

Isbot. $P(A)$ — A algebraning proektorlari to'plami va $p \in P(A)$ bo'sin. U holda $\varphi: U_p(A) \rightarrow pC^*(A)p$ akslantirish lemma shartiga qanoatlantiruvchi yotqizishni bajaradi. Xaqiqatan ham, $\{X_i\} \subseteq \wp(A)$ to'plamni olamiz. Shunday $\{p_i\} \subseteq P(A)$ mavjudki $X_i=U_{p_i}(A) \quad \forall i$. Unga mos keluvchi (φ bo'yicha) $\{p_i C^*(A) p_i\}$ to'plamni olamiz. $X \in \wp(C^*(A))$ uchun $p_i C^*(A) p_i \subseteq X \quad \forall i$ bo'lsin. U holda $S \subseteq C^*(A)_+$, $X=Ann(S)$ uchun $sa+as=0 \quad \forall s \in S$, $\forall a \in p_i C^*(A) p_i$, $\forall i$ o'rinli. Xususan, $sp_i+p_i s=0$ va bundan $sp_i=p_i s=0 \quad \forall s \in S$, $\forall i$. Berilgan A algebraning $\{p_i\}$ to'plamining yuqori aniq chegarasini p deb olaylik, ya'ni $p=\sup_A p_i$ bo'lsin. U holda $C^*(A)=R^*(A)+iR^*(A)$, $s=s_1+is_2$, $s_1, s_2 \in R^*(A)$, $s_1 \in A$, $s_2 s_2^* \in A$ bo'lgani uchun, lemma shartiga ko'ra, $p_i s_1=s_1 p_i=0$, $s_2 p_i=p_i s_2=0$ va bundan $ps_1=s_1 p=0$, $ps_2=s_2 p=0$. Demak, $ps+sp=sp=ps=0 \quad \forall s \in S$. Shu bilan birga, $spap+paps=0$ shartdan ixtiyoriy $pap \in pC^*(A)p$ uchun $spap+paps=0$ kelib chiqadi. Demak, $pC^*(A)p \subseteq X$ va $\{\varphi(X_i)\}$ to'plamning $\wp(C^*(A))$ panjaradagi supremumi $pC^*(A)p=\varphi(pAp)$ bo'ladi. Ravshanki, bundan φ lemmaga qanoatlantiradi.

Yuqoridagi lemma asosida quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

Теорема. Agar lemma shartlari bajarilsa A algebra F tipida bo‘ladi shu va faqat shu holda qachonki $C^*(A)$ algebra F tipida bo‘lsa, bu yerda $F=I, II_1, II_\infty, III$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. [AAA2] *С.Альбеверио, Ш.А.Аюпов, А.Х.Абдуваитов.* О совпадении типов вещественной AW^* -алгебры и ее комплексификации. Известия РАН. Серия математическая. -2004. -Том 68. -№ 5.
2. [A1] *Аюпов Ш.А.* Йордановы операторные алгебры. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Мат. анализ.-1985.-Т.27.-С.67-97.
3. [A2] *Аюпов Ш.А.* Классификация и представления упорядоченных йордановых алгебр.-Ташкент: Фан. 1986.
4. [A3] *Аюпов Ш.А.* Локально измеримые операторы для JW-алгебр и представление упорядоченных йордановых алгебр. Изв. АН СССР. Сер. мат.-1984.-Т.48.-N 2.-С.211-236.
5. [ААд] *Аюпов Ш.А., Адизов А.* Вероятностные меры на проекторах JBW-алгебр. Деп. ВИНТИ. - № 7822-84..
6. [AAA3] *Аюпов Ш.А., Рахимов А.А., Абдуваитов А.Х.* Вещественные W^* -алгебры с абелевой эрмитовой частью. Мат. Заметки, -2002. -Т. 71. -№ 3. –С. 473-476.
7. [Дик] *Диксьме Ж.* C^* -алгебры и их представления, Москва: Наука. -1974. -400 с.
8. [Кус1] *Кусраев А.Г.* Булевозначный анализ и JB-алгебры. Сиб. мат. журн.-1994.-Т.35.- N 1.-С.124-134.
9. [М] *Матвейчук М.С.* Одна теорема о состояниях на квантовых логиках.Состояния в алгебрах Йордана. Теор. и мат. физ.-1983.-Т.57.-N 3.-С.465-468.
10. [МС] *Матвейчук М.С. Нессонов Н.И.* Описание мер в факторах Неймана типа III. Изв. вузов. Мат.-1984.-N 2. С.68-71.

11. [Aar] *Aarnes J.F.* Quasi-states on C^* -algebras. Trans. Am. Math. Soc. -1970.-Vol.149.-N2.-P.601-625.
12. [Ay] *Ayupov S.A.* Extension of traces and type criterions for Jordan algebras of self-adjoint operators. Math. Z.-1982.-Vol.181.-P.253-268.
13. [Ay2] *Ayupov, Sh. A. Yadgorov, N.J.* Geometry of the state spaces in quantum probability. Probability theory and mathematical statistics. (Vilnius, 1993). TEV, Vilnius. -1994. -P. 43-52.
14. [Ay5] *Ayupov, Sh. A.* Commutators in real von Neumann algebras and tracial properties of states. Uzbek. Mat. Zh. -1994. - No 1. -P. 3-7.
15. [Ay3] *Ayupov Sh. A. Ferleger S.V. Sukochev F.A.* Isomorphism between the associative and non-associative L_p -spaces of type II_1 hyper finite factors.. Math. Scand., -1996. -Vol. 78. - no 2. -P. 271-285.
16. [AAA] *Albeverio S., Ayupov Sh.A., Abduvaitov A.H.* On Real AW^* -algebras. Preprint N37, SFB 611. Bonn. -2002. -18 p.
17. [AH-Osh] *Alfsen E.M., Hanhce--Olsen H., Shultz F.W.* State spaces of C^* -algebras. Acta Math.-1980.-Vol.144.-P.267-305.
18. [SSA] *Alfsen E.M., Shultz F.W., Størmer E.A.* Gelfand-Neumark theorem for Jordan algebras. Adv. in Math.-1978.-Vol.28.-N1.-P.11-56.
19. [Ber3] *Berberian S.K.* A note on the algebra of measurable operators of an AW^* -algebra. Tohoku Math. J.-1970.-Vol.22.-P.613-618.
20. [Bra] *Bratteli O.* Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras, Trans. Amer. Math. Soc. -1972. -Vol. 171. -P. 195-234.
21. [Emch] *Emch G.G.* Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory.- New York:Wiley-Interscience. -1972.
22. [ES] *Effros E., Størmer E.* Jordan algebras of self-adjoint operators. Trans. Amer. Math. Soc.-1967.-Vol.127.-N2.-P.313-316.
23. [ES2] *Effros E., Størmer E.* Positive projections and Jordan structure in operator algebras. Math. scand.-1979.-Vol.45.-N1.-P.127-138.
24. [Glea] *Gleason A.M.* Measures on closed subspaces of a Hilbert space. J. Math. Mech.-1957.-N6.-P.885-893.
25. [JNW] *Jordan P., von Neumann J. and Wigner E.* On an algebraic generalisation of the quantum mechanical formalism. Annals Math.-1934. Vol.35.-P.29-64.

26. [Kad] *Kadison R.V.* A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras. *Annals Math.*-1952.-Vol.56.-P.494-503.
27. [K1] *Kaplansky I.* Projections in Banach algebras. *Ann. Math.*-1951.-Vol.53.-N2.-P.235-249.
28. [K2] *Kaplansky I.* Algebras of type I. *Ann. Math.*-1952.-Vol.56.-N2.-P.460-472.
29. [Kaup] *Kaup W.* Algebraic characterisation of symmetric complex Banach manifolds. *Math. Ann.*-1977.-Vol.228.-P.39-64.
30. [Koe] *Koecher M.* Positivitätsbereiche in **Rm**. *Am. J. Math.*-1957.-Vol.79.-P.595-600
31. [Mac] *Mackey G.W.* Quantum mechanics and Hilbert space. *Am. Math. Month.*-1957.-Vol.64.-P.45-57.
32. [vNJ] *von Neumann J.* On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism I. *Math. Sbornic.*-1936.-N1.-P.415-84.
33. [Pdr] *Pedersen G.K.* On weak and monotone σ -closure of C^* -algebras. *Commun. Math. Phys.* -1968. –Vol. 11. –P. 221-226.
34. [Sak] *Sakai S.* C^* -algebras and W^* -algebras. Springer Verlag. -1971.
35. [Sas] *Sasaki U.* Lattices of projections in AW^* -algebras. *J. Sci. Hiroshima Univ. A19.*-1955.-N1.-P.1-30.
36. [Sh] *Shultz F.W.* On normed Jordan algebras which are Banach dual spaces. *J. Func. Anal.* -1979.-Vol.31.-N3.-P.360-376.
37. [S1] *Størmer E.* On The Jordan structure of C^* -algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*-1965.-Vol.120.-N12.-P.438-447.
38. [S2] *Størmer E.* Jordan algebras of type I. *Acta. Math.*-1966.-Vol.115.-NN3-4.-P.165-184.
39. [S3] *Størmer E.* On antiautomorphisms of von Neumann algebras. *Pacific J. Math.*-1967.-Vol.21.-N2.-P.349-370.
40. [S4] *Størmer E.* Irreducible Jordan algebras of self-adjoint operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*-1960.-Vol.130.-N1.-P.153-166.
41. [Top1] *Topping D.M.* Jordan algebras of self-adjoint operators. *Mem. Am. Math. Soc.*-1965.-Vol.53.
42. [Yead2] *Yeadon F.J.* Measures on projections in W^* -algebras of type II_1 . *Bull. Lond. Math. Soc.*-1983.-Vol.15.-P.139-145.
43. [AF2] *Арзикулов Ф.Н.* Об абстрактных JW-алгебрах. *Сиб. мат. журн.* -1998.-N 1.-С.20-27.
44. [IM2] *Arzikulov F.N.* AJW-алгебры и приложения к теории измеримых операторов. Дисс. соиск. степ. канд. наук. Новосибирск: Институт математики им. С.Л. Соболева. -1998. -114 с.

45. [AF1] *Arzikulov F.N.* AJW-algebras of type I and their classification. Sib. Adv. Math.-1998.- Vol.8.-N2.-C.30-48.
46. [AF3] *Арзикулов Ф.Н.* Об одном аналоге пирсовского разложения. Сиб. мат. журн. - 1999. -№3. –Р. 485-492.
47. [AF7] *Арзикулов Ф.Н.* О C^* - и JB-алгебрах типа I. Владикавказский Математический журнал. -2003. –Т. 5. -No 3. –С. 9-13. (www.vmj.ru)
48. [VMJ] *Арзикулов Ф.Н.* Об обертывающих C^* -алгебрах JB-алгебр. Владикавказский математический журнал. -2006. -№3. –С. 3-15. (www.vmj.ru)
49. [ARX] *Arzikulov F.N.* On the classification problem for C^* -algebras. arXiv: 1002.4711v2 [math.OA]. -2010. 22 p.
50. [ART] *Arzikulov F.N.* On two problems concerning enveloping von Neumann Algebras of JW-Algebras. Algebr Represent Theor. -2011. –Vol. 14. –No 4. –P. 703-710.
51. [AAR] *Ayupov Sh.A., Arzikulov F.N.* AW^* -algebras which are enveloping C^* -algebras of JC-algebras. Algebr Represent Theor. (first online publication) 2011.
www.springerlink.com/content/U2375529361465p4/