

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ВАЗИРЛАР
МАҲКАМАСИ ҲУЗУРИДАГИ ТОШКЕНТ ИСЛОМ
УНИВЕРСИТЕТИ

АЛИМОВ А.А.

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ

I-қисм

*Олий математика курсидан
ТИУ талабалари учун
ўқув қўлланма*

ТОШКЕНТ "УНИВЕРСИТЕТ"
2009

Ушбу кўлланмада комбинаторика элементлари, урин алмаштиришлар ва ўринлаштиришлар, эхтимоллик тушунчалари, уларнинг айрим содда хоссалари, дискрет тасодифии микдорлар ҳақида тушунчалар келтирилган. Барча мавзулар намунавий мисоллар билан баён этилади.

Ўқув кўлланманинг биринчи қисми информатика ва ахборот технологиялари йўналиши бўйича таҳсил олаётган талабаларга мўлжалланган бўлиб, ундан бошқа олий ўқув юрти талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Такризчилар:

Физика-математика фанлари номзоди Ю. Х. Эшқобилов,
физика-математика фанлари номзоди, доцент А. Абдуикуров

Тошкент ислом университети ўқув-услубий кенгаши
мажлисининг 05.01.2004 йилдаги 1-баённомаси билан нашргатавсия
қилинган.

АКРОМ АКБАРОВИЧ АЛИМОВ

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ

(ўқув кўлланма)

Муҳарир Зикиров О. С.

Босишга рухсат этилди 16.04.04. Бичими 60x84'/i6. Офсет
босма усулида босилди. Нашриёт ҳисоб табоғи 1,9. Шартли босма
табоғи 3,7. Адади 100 нусха. Бахоси келишилган нархда.
Буюртма № $z"s^{3/4}/$

"Университет" нашриёти. Тошкент - 700174, Талабалар
ша, \арчаси. ЎзМУ маъмурий биDиоси, 2-қават.

ЎзМУ босмахонасвда босилди.

КИРИШ

Фаннинг айрим тармоғи ҳақида реал тушунчага эга бўлиш учун унинг тарихий ривожланишини ўрганиш катта аҳамиятга эгадир.

Ҳозирги замон техника соҳасидаги китобларда ечилган ҳолда берилаётган муаммолар ўтган замонлардаги олимлар олдига қўйилган, ечилиши қийин ҳисобланган масалалардан иборат эди. Келгуси авлодлар шу қийинчиликларни бартараф қилиш учун олиб борган курашлари натижасида бизнинг давримизда шу муаммолар фан сифатида вужудга келди. Фаннинг айрим тармоғи ҳисобланган эҳтимоллар назарияси ҳам умумий қоидадан мус-тасно эмас.

Шу кириш қисмида эҳтимоллар назарияси тараққиётининг асосий босқичлари ҳақида қисқача гапирамиз. Ҳозирги кунда математиканинг асосий тармоғи бўлган эҳтимоллар назарияси жуда содда муқаддимага эга Унинг асосида тахминан 300 йил аввал ташкил қилинган тасодифлар ўйини назарияси ётади.

1650 йилларда Францияда табақалар ўртасида қимор ўйинлари кенг тарқалган одат (урф) лардан бирига айланади ва қонун томонидан қаттиқ назоратга олинмайди. Табиий карта, ўйин то-ши ва ҳоказолар билан ўйналадиган қимор ўйинларида катта миқдордаги пуллар ўртага қўйилади. Ҳар бир ўйновчи иложи бо-рича ютишга ҳаракат қилади ва бу ҳақда куп ўйлайди. Ашаддий қиморбоз кавалер Мерета қандай қилиб ютиш мумкин деган са-вол билан ўша даврнинг машҳур математиги ва философи Бланс Паскалга хат орқали мурожаат қилиш фикри туғилади. Кавалер Меренинг саволи Паскал билан унинг математик дўстлари ораси-да мунозаралар келиб чиқишига туртки бўлди.

Ана шу мулоҳазалар ҳозирги замон эҳтимоллар назарияси-нинг асосини ташкил қилди. XVII аср охирларига келиб Мере томонидан қўйилган саволлар математиклар ўртасида муҳокама қилинди ва ривожлантирилди. Эҳтимоллар назарияси ўзининг шу бошланғич фазасида турли ўйинларга тааллуқли бўлган бир-биридан ажратилган муаммолар тўпламидан (коллекциясидан) иборат эди.

Эҳтимоллар назариясининг кейинги ривожланиш даври (1654-1705) Якоб Бернулли номи билан боғлиқ. Унинг "Катта сонлар

қонуни" деб ном олган теоремаси аввалги тўпланган фактларнинг назарий асосланишидан иборат бўлади.

Кейинчалик эҳтимоллар назариясининг ривожланишида Му-авр, Лаплас, Гаусс, Пуассон ва ҳоказо математиклар катта роль ўйнашди. XX асрга келиб эҳтимоллар назариясининг ривожланишига рус математикларидан П.А.Чебишев, А.А.Марков ва совет математикларидан С.Н.Бернштейн, В.И.Романовский, А.Н.Колмогоров, А.Я.Хинчин, Б.В.Гнеденко ва узбек математикларидан Т.А.Саримсаков, С.Х.Сирожиддиновлар катта ҳисса қўшдилар. Ҳозирги даврда эҳтимоллар назариясининг янги тармоқларини ривожланишида ҳам узбек математиклари етакчи роль ўйнамоқдалар.

ЭХТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ ПРЕДМЕТИ

Ҳар қандай $<J$ шартлар тўплами (комплекси) бажарилганда бирор ҳодиса A рўй беради. Масалан, нормал атмосфера босими-да сув 100" дан юқори температурада қиздирилса (сг шартлар тўплами), у ҳолда сув бугга айланади (A ҳодиса).

Таъриф. $<J$ шартлар тўплами бажарилганда, келиб чиқиши мумкин бўлган ёки мумкин бўлмаган ҳодисага тасодифий ҳодиса дейилади.

Мисол. Тангани ташлаганда рақам ёки герб томони билан тушиши мумкин, бу тасодифий ҳодисадир. Ҳар бир тасодифий ҳодиса сабабларга боғлиқ. Масалан, танганинг герб томони билан тушиши қандай куч билан ташлашга, танганинг формасига ва бошқа сабабларга боғлиқ.

Бу сабабларнинг ҳодиса келиб чиқишига таъсирини ҳисобга олиш мумкин эмас, чунки уларнинг сони жуда куп ва таъсир қо-нунлари номаълум. Яна бир мисол кўрайлик. Станокда деталлар ишлаб чиқарилаётган бўлсин. Деталларнинг ўлчами қабул қилин-ган катталиқ атрофида тебраниб туради. Бу тебранишлар ҳам тасодифий характерга эга бўлиб, ишлаб чиқарилган деталларга қараб кейинги ишлаб чиқариладиган деталнинг размери ҳақида аниқ гап айтиш мумкин эмас. Лекин ишлаб чиқарилган деталлар партиялари олинса, бунда аниқ қонуниятларни сезиш мумкин, яъни деталлар ўлчамларининг ўртача арифметик қиймати ҳамма партиялар учун тахминан бир хил бўлар экан.

Шунга ўхшаш ҳолни жисм оғирлигини аналитик тарозида кўп марта ўлчаш натижасида ҳам сезиш мумкин. Бу ерда ҳам кўплаб ўтказилган ўлчовларнинг ўрта арифметик қиймати ўзгармас экан.

Бундай қонуниятларнинг сезилиши айрим ўлчашларнинг натижасини олдиндан айтиб беришга имкон бермайди, лекин омма-вий ўлчашлар билан шуғулланишга имкон беради.

Умуман эҳтимоллар назарияси биргина ҳодисанинг келиб чиқиши ёки қелиб чиқмаслигини олдиндан айтиш масаласини қўймайди, уни қилолмайди ҳам.

Шундай қилиб, оммавий бир жинсли тасодифий ҳодисалар-нинг қонунларини ўрганиш эҳтимоллар назариясининг предмети ҳисобланади.

Эҳтимоллар назариясининг методлари техника, иқтисодиёт ва табиатшуносликнинг ҳар хил тармоқларида кенг қўлланилади: автоматик бошқариш, алоқа назарияси, ишонч назарияси, омма-вий хизмат кўрсатиш назарияси, астрономия, отиш техникаси, на-зарий физика, суғурталаш назарияси, молия математикаси ва ҳоказо.

Эҳтимоллар назарияси ишлаб чиқаришни режалаштириш ва ташкил қилиш, технологик жараёнларни таҳлил қилиш, маҳсулот сифатини текширишда ишлатиладиган статистикани асослашда хизмат қилади. Кейинги йилларда эҳтимоллар назариясининг усуллари бошқа фанларга ҳам тадбиқ қилинмоқда.

I. ТАСОДИФИЙ ҲОДИСАЛАР ВА ЭҲТИМОЛЛАР

1. ТАСОДИФИЙ ҲОДИСАЛАР ВА УЛАР УСТИДА АМАЛЛАР

Виз қоридида шартлар тўплами берилганда, келиб чиқиши мумкин бўлган ёки мумкин бўлмаган ҳодисага тасодифий ҳодиса деган эдик. Бундан кейин (J шарт ўрнига, тажриба ўтказилганда деймиз. Шундай қилиб, ҳодисани тажриба натижаси деб қараймиз.

Мисол. 1) Мерган тўртта бўлакка бўлинган нишонга ўқ узади. Отиш - тажриба. Мўлжалнинг аниқ соҳасига ўқнинг тегиши ҳодисадир.

2)Тажриба - ўйин тошини ташлаш; тасодифий ҳодиса - жуфт рақамларнинг тушиши.

3)Тажриба - аналитик тарозида бирор жисмнинг оғирлигини ўлчаш; тасодифий ҳодиса - оғирлик ўлчанаётганда йўл қўйиладиган хатоликни аввалдан маълум сондан катта бўлмаслиги.

Ҳодисаларни катта A, B, C , ҳарфлар билан белгиланади, Ҳодисалар устида қуйидаги муносабатларни ўрнатиш мумкин.

1. Тажриба натижасида A ҳодиса келиб чиқиши билан B ҳодиса келиб чиқади, A B нинг қисми, ёки A ҳодиса B ҳодисани келтириб (эргаштириб) чиқаради дейилади $ва A \subset B$ каби белгиланади.

Мисол. A ҳодиса сифатида ўйин тоши ташланганда 4 рақами тушишини олсак, B ҳодиса сифатида жуфт рақамларнинг тушишини олсак, у ҳолда A нинг келиб чиқиши B ни ҳам келтириб чиқаради.

2. $A \cap B \neq \emptyset$ бўлиб, $B \subset A$ бўлса. у ҳолда $A \supset B$ бўлади.

3.Тажриба натижасида A ҳодиса B ҳодисани келтириб чиқарса, ўз навбатида B ҳодиса A ҳодисани келтириб чиқарса, ёки тажриба натижасида иккала ҳодиса келиб чиқса ёки келиб чиқмаса, уларни тенг кучли ҳодисалар дейилади $ва A=B$ каби ёзилади.

4.Тажриба натижасида ҳам A , ҳам B ҳодисаларнинг келиб чиқишига тенг кучли бўлган ҳодисага A ва B ҳодисаларнинг қўш пайтмаси дейилади ва

$A \cup B$ каби белгиланади.

Мисол. Иккита ўйин тоши ташланганда уларнинг бирида / рақами тушса, A ҳодиса, иккинчисидан 2 рақами тушса, B ҳодиса келиб чиқди дейлик. U ҳолда/ИПБ ҳодиса иккала ўйин тошидаги рақамларнинг йиғиндиси 3 га тенг бўлишидан иборат бўлади.

5. A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси деб, шундай ҳодисага айтиладики, у ҳодиса A , ёки B , ёки A ва B ҳодисаларга тенг кучли бўлади ва

$A + B$ ёки $A \cup B$ каби ёзилади.

Мисол. A ҳодиса сифатида ўйин тоши ташланганда 3 рақами-нинг тушишини, B ҳодиса сифатида 6 рақамининг тушишини ол-сак, у ҳолда $A + B$ ҳодиса 3 га қаррали рақамнинг тушишидан иборат бўлади.

6. Тажриба натижасида A ҳодиса келиб чиқиб, B ҳодиса келиб чиқмаса, бундай ҳодисага A ва B ҳодисаларнинг айирмаси дейилади ва

$A - B$ ёки $A \setminus B$ каби ёзилади.

1.1.Таъриф. Тажриба натижасида албатта рўй берадиган ҳодисага муқаррар ҳодиса дейилади ва U билан белгиланади. **Мисол.** 2 та ўйин тоши ташланганда рақамларнинг йиғиндиси 2 дан кичик бўлмаслиги муқаррар ҳодисадир.

1.2.Таъриф. Тажриба натижасида келиб чиқиши мумкин бўлмаган ҳодисага мумкин бўлмаган ҳодиса дейилади ва U билан белгиланади. **Мисол.** 2 та ўйин тоши ташланганда рақамларнинг йиғиндиси 13 га тенг бўлиши мумкин бўлмаган ҳодисадир.

1.3.Таъриф. Тажриба натижасида A ҳодисанинг келиб чиқмаслигига A ҳодисага қарама-қарши ҳодиса дейилади ва A каби ёзилади. **Мисол.** Ўйин тоши ташланганда 5 рақами тушишини A ҳодиса десак, 1, 2, 3, 4, 6 рақамларининг тушиши A ҳодиса бўлади.

A на A ҳодисалар учун қуйидаги тенгликлар бажарилади: $A + A = U, A \cap A = A$

Юқорида киритилган ҳодисалар ҳақидаги тушунчаларни геометрик тасвирини кўриб чиқамиз. Бунинг учун Вьен диаграмма-сидан фойдаланамиз:

Тажриба сифатида 1-расмда кўрсатилган квадрат ичига их-тиёрий нуқта ташланади. A ҳодиса деб "Танланган нуқта чап дойра ичида ётиши", B ҳодиса деб "Танланган нуқтани ўнг дойра ичида ётиши" олинади.

У ҳолда $A, A, B, B, A + B, A \cap B$ ҳодисалар деб танланган нуқ-танинг штрихланган соҳага тушиши тушунилади.

1.4.Таъриф. Агар A ва B ҳодисалар бир вақтда келиб чиқиши мумкин бўлмаса, яъни $A \cap B = \emptyset$ бўлса, у ҳолда A ва B ҳодисаларга биргаликда бўлмаган ҳодисалар дейилади.

1.5.Таъриф. Агар $L = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_k$ бўлса, $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ пар жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган бўлса, у ҳолда бу ҳодисаларга L ҳодисанинг хусусий ҳоллари дейилади. Агар $L = V$ бўлса, у ҳолда $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ ҳодисаларга ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил қилади дейилади.

Мисол. $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ҳодисалар ўйин тоши ташланганда мое равишда 1, 2, 3, 4, 5, 6 рақамларининг тушишидан иборат бўлсин.

У ҳолда $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = U$ бўлади. Демак, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ҳодисалар, ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил қилар экан.

1.6. Таъриф. Агар $A_1, A_2, \dots, A_n$, ҳодисалардан ихтиёрийсини қолганларига нисбатан олдин ёки кейин келиб чиқади дейишга ҳеч қандай асос бўлмаса, у ҳолда $A_1, A_2, \dots, A_n$, ҳодисаларга тенг имкониятли ҳодисалар дейилади.

2. КОМБИНАТОРИКА (БИРЛАШМАЛАР) НАЗАРИЯСИДАН АЙРИМ ТУШУНЧАЛАР

Эҳтимоллар назариясидаги ҳодиса эҳтимолини ҳисоблашда комбинаторика назариясидаги айрим тушунчалардан фойдаланилади, шунинг учун бу тушунчаларни беришни лозим топдик.

Бир-биридан элементларининг тартиби ёки элементларининг таркиби билан фарқ қиладиган турли, чекли тўпламларга бирлашмалар дейилади.

Бирлашмаларни ташкил этувчи предметларга унинг элементлари дейилади ва a, b, c орқали белгиланади.

Бирлашмалар 3 хил бўлади:

- а) Ўринлаштиришлар;
- в) Урин алмаштиришлар;
- с) Группалар.

а) ЎРИНЛАШТИРИШЛАР

я та элементдан m тадан тузилган ўринлаштиришлар деб шундай бирлашмаларга айтиладики, улар бир-бирларидан элементларининг тартиби ёки элементлари билан фарқ қиладилар.

я та элементдан m тадан тузилган ўринлаштиришлар сонини A_m^j билан белгилаймиз ва бу сонни нимага тенглигини топамиз.

и та $a, b, c, d, \dots, h, k, l$ элементдан биттадан ўринлаштиришлар тузамиз, у ҳолда $A_m^j \sim n$ бўлади. Энди я та элементдан 2 тадан ўринлаштиришлар тузамиз. Бунинг учун аввал тузилган ўринлаштиришларни биттадан қолган я - / та элементлар билан бирга оламиз. У ҳолда қуйидагига эга бўламиз.

$ab, ac, ad, \dots, ak, al \text{ } n-1 \text{ та } ba, bc, bd, \dots, bk,$
 $bl \text{ } n-1 \text{ та } ca, cb, cd, \dots, ck, cl \text{ } n-1 \text{ та}$
 $n \text{ - та}$

$L /a, /A, U, \dots, \text{Ш}, \text{Ш} \text{ } n-1 \text{ та}$

Демак, $D_n = n(n-1)$ бўлади.

Энди и та элементдан 3 тадан ўринлаштиришлар тузамиз. Бу-нинг учун ҳосил қилинган $n(n-1)$ та ўринлаштиришларни ҳар би-рини қолган $(n-2)$ та элементлар билан бирга оламиз. У ҳолда

$n(n-1) \text{ та "}"$	$abc, \quad , abk, abl$		
	$abd, \dots \text{ } n-2 \text{ та } , ack,$		
	Ika	Ike	Ikh

эга бўламиз ва $D_n = n(n-1) \cdot (n-2)$ бўлади. Умуман

$$A^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) = (n-m)! \cdot n!$$

бўлади.

Демак, я та элементдан m тадан тузилган ўринлаштиришлар сони m та кетма-кет бутун сонлар кўпайтмасига тенг бўлиб, улардан энг каттаси n га тенг экан.

Мисол. Аудиториядаги 5 та талабадан 2 тасини неча хил усул билан сардор ва навбатчи вазифасига сайлаш мумкин.

Ечиш: Изланган сон 5 та элементдан 2 тадан тузилган ўринлаштиришлар сонига тенг, яъни

в) УРИН АЛМАШТИРИШЛАР

Бир-биридан фақат элементларини тартиби билан фарқ қила-диган ўринлаштиришларга урин алмаштиришлар дейилади.

N та элементдан n тадан тузилган урин алмаштиришлар сони-ни P_n , билан белгиланади ва

$P_n = A''_{n-1} = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)! \cdot n = n!$ бўлади.

Демак, я та элементдан я тадан тузилган урин алмашти-ришлар сони / дан я гача бўлган сонлар кўпайтмасига тенг экан.

Мисол. Боғчадаги 4 та тарелка қўйилган стол атрофига 4 та болани неча хил усулда ўтказиш мумкин?

с) ГРУППАЛАШ (КОМБИНАЦИЯ)

я та элементдан m тадан тузилган группалаш деб шундай бир-лашмаларга айтиладики, улар бир-бирларидан фақат элементлари билан фарқ қилади.

Масалан, a, b, c, d элементлардан 3 тадан тузилган группалаш-лар abc, abd, acd, bcd бўлади.

Ҳар бир группалашдаги элементларда мумкин бўлган урин алмаштиришларни бажарсак, $P_3 = 6$ бўлади. Ҳамма ўринлашти-ришлар $soni A_l = P_3 \cdot 4$ бўлади. Умуман, $A'' = P_m \cdot C^m$ бўлади. Де-

мак, $C^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

m $m!(n-m)!$

Мисол. Бир хил 3 та ўринга кўрсатилган 10 та номзоддан неча хил усул билан сайлаш мумкин?

$$C^3_{10} = \frac{10!}{3!7!} = 120$$

Группалашнинг хоссалари:

$C^m_n = C^{n-m}_n$

$C^0_n = C^n_n = 1$

НЬЮТОН БИНОМИ

Ньютон биноми деб,

$$(a+b)^n = C^0_n a^n + C^1_n a^{n-1}b + C^2_n a^{n-2}b^2 + \dots + C^{n-1}_n a b^{n-1} + C^n_n b^n$$

ифодага айтилади, бу ерда я бутун, мусбат сон. **Мисол.**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(1+x)^6 = 1 + 6x + \dots$$

Ньютон биномидаги C_n^p коэффициентларга биноминал коэф-фициентлар дейилади ва бу коэффициентларни қуйидаги Паскал учбурчагидан топит қулай.

<u>О</u>	<u>КОЭФФИЦИЕНТЛАР</u>
1	
2	1
3	1 1
4	1 2 1
5	1 3 3 1
6	1 4 6 4 1
	1 5 10 10 5 1
	1 6 15 20 15 6 1

$n: 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ қийматларни қабул қилади, у ҳолда биноминал коэффициентлар Паскал учбурчагининг мое йўлларидаги сонларга тенг бўлади.

Ньютон биноми коэффициентларининг хоссалари:

1) Ёйилманинг учларидан бир хил масофадаги ҳадларнинг ко-
эффициентлари бир хил бўлади.

2) " $a + b$ " нинг ёйилмасидаги коэффициентлар йиғиндиси 2^n га тенг бўлади.

Мисол. $(1+x)^6$ ёйилмасидаги коэффициентлар йиғиндиси $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6$ бўлади.

3) Тоқ ўриндаги ҳадлар коэффициентларнинг йиғиндиси жуфт ўриндаги ҳадлар коэффициентларининг йиғиндисига тенг. Бу йиғиндиларнинг ҳар бири 2^{n-1} га тенг бўлади.

Масалан, $1 + 15 + 15 + 1 = 6 + 20 + 6 = 32 = 2^5$ n та элементдан m таси, k таси ва ниҳоят / таси айнан бир хил бўлса, у ҳолда n та элементдан тузилган урин алмаштиришлар

сони $P_{n,m,h,l} = \frac{n!}{m!h!l!}$ формула орқали топилади.

Жуда катта сонларнинг факториалларини ҳисоблаш анча қи-йин, шунинг учун бундай сонларни факториалларини ҳисоблаш учун қуйидаги Стирлинг формуласидан фойдаланилади.

$$n! = n^n e^{-n}$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Касаба уюшмасида сайланган 3 та кишига 3 та ҳар хил вазифани тақсимлаш керак. Неча хил усул билан бу вазифани тақсимлаш мумкин?

Жавоб: 6

2. 30 кишидан иборат талабалар гуруҳи конференцияга 3 та делегат сайлаши керак. Неча хил усул билан бу сайловни ўтказиш мумкин?

Жавоб: 4060

3. 30 кишидан иборат талабалар гуруҳи ўзига сардор ва унинг икки ёрдамчисини сайлаши керак. Неча хил усул билан бу сайловни ўтказиш мумкин?

Жавоб: 24360

3. ҲОДИСА ЭҲТИМОЛИНИНГ ТАЪРИФЛАРИ

а) ЭҲТИМОЛНИНГ КЛАССИК ТАЪРИФИ

Ҳодиса эҳтимоли эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан бўлиб, унинг бир неча таърифлари бор. Виз эҳтимолнинг классик статистик ва геометрик таърифларини келтирамиз.

1.7.Таъриф. Тажриба натижасида рўй берадиган тенг имкониятли ҳодисаларнинг тўлиқ группасига мумкин бўлган тажриба натижалари дейилади. Ҳодисаларнинг тўлиқ группасига кирган A ҳодисанинг хусусий ҳолларига A га қулайлик яратувчи тажриба натижалари дейилади.

1.8.Таъриф. A ҳодисанинг эҳтимоли деб, тажрибанинг A га қулайлик яратувчи натижалари сони m ни тажрибанинг мумкин бўлган натижалари сони n га нисбатига айтилади ва $P(A)$ каби ёзилади.

Демак:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.1)$$

n

Мисол:

1-мисол. 2 та танга ташланганда, иккаласида ҳам герб туши-ши эҳтимоли топилсин.

Ечиш: Тажриба натижасида мумкин бўлган ҳоллар: 22 ,
 $2p, p2, pp$

Демак, $n = 4, m = \frac{1}{4} P(A) = 1$ бўлади.

2-мисол. Ўйин тоши ташланганда жуфт рақамларнинг тушиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш: Ўйин тоши ташланганда жуфт рақамлар тушса, A ҳодиса рўй берди дейлик, у ҳолда $A = A_2 + A_4 + A_6$ бўлади, яъни

$m = 3$ бўлади. n эса 6 га тенг. Демак $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ бўлади.

3-мисол. Электрон қурилма 5 та элементдан иборат бўлиб, ҳамма элементлари бузуқ бўлмаса, яхши ишлайди. Қурилмани йиғишда унинг элементлари 1000 та ҳажмли партиядан саралаб олинади. Исталган мумкин бўлган (f_{lim} танлаш бир хил эҳтимолга эга. Партиядан 950 та тузук ва 50 та бузуқ элемент бор.

A ҳодиса қурилманинг бузилмасдан ишлашидан иборат. $P(A) = ?$

Ечиш: Элементар ҳодисалар сони $n < m$ и •

Ҳамма элементлари тузук элементлардан иборат бўлган элементар ҳодисалар A га қулайлик беради. Демак, A га қулайлик

берадиган элементар ҳодисалар сони $n = 5$ $P(A) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 0,25$

в) НИСБИЙ ЧАСТОТА ВА ЭХТИМОЛНИНГ СТАТИСТИК ТАЪРИФИ

1.9. Таъриф. N та боглиқ булмаган тажриба ўтказилганда A ҳодисанинг рўй бериш сони M бўлсин.

$$W(A) = \frac{M}{N} \quad (1.2)$$

нисбатга A ҳодисанинг нисбий частотаси (такрорланиши) дейилади.

Мисол. Техник текшириш бўлими 40 та тасодифий танланган деталлар партиядан 5 тасини стандарт булмаган детал бўлиши-ни аниқлади. Стандарт булмаган детал келиб чиқишининг нисбий

частотаси $W(A) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$ бўлади.

Тажрибалар шуни кўрсатадики, ҳодисанинг нисбий частотаси жуда кўп тажриба ўтказилганда турғунлик хоссасига эга экан,

яъни масалан N марта ўтказилган тажрибада нисбий частота $\text{---} = 0,3$

бўлса, у ҳолда UV марта ўтказилган тажрибада ҳам нисбий частота $\text{---}_t = 0,3$ бўлади.

Демак, нисбий частота бирор ўзгармас сон атрофида тебранади. Шу ўзгармас сон ҳодисанинг эҳтимоли сифатида олинади ва эҳтимолнинг статистик таърифи сифатида қабул қилинади.

Мисол. Швеция давлати статистларининг **1985** йилда берган маълумотиға кура қиз бола туғилишининг нисбий частотаси қуйидагича:

0,486; 0,489; 0,490; 0,471; 0,478; 0,482 0,462; 0,484; 0,485; 0,491; 0,482; 0,478 (сонлар ойлар тартиби бўйича жойлашган)

Бундан кўринадики, нисбий частота **0,482** атрофида тебранади, уни қиз бола туғилиши эҳтимолининг тақрибий қиймати деб олиш мумкин. Эҳтимолнинг классик таърифида тажрибанинг мумкин булган натижалари сони чекли деб олинади, лекин ҳаётда шундай тажрибаларни учратиш мумкинки, уларда тажрибанинг мумкин булган натижалари сони чексиз бўлиши мумкин. Бундай ҳолларда эҳтимолнинг классик таърифидан фойдаланиб бўлмай-ди. Бу эса классик таърифнинг чегараланганлигини кўрсатади. Бундан ташқари классик таърифда ҳодиса тенг имкониятли хусусий ҳолларга ажралади дейилади. Амалиётда эса ҳар доим ҳам тажриба натижасини тенг имкониятли, ҳодисанинг хусусий ҳоллари йиғиндиси деб қараб бўлмайди.

Шу сабабларға кура эҳтимолнинг классик таърифидан ташқари статистик таърифидан ҳам фойдаланилади.

с) ЭХТИМОЛНИНГ ГЕОМЕТРИК ТАЪРИФИ

1.10. Таъриф. Q соҳаға ихтиёрий равишда бир нуқта ташланганда, нуқтанинг Q дағи q соҳаға тушиш эҳтимоли деб,

нисбатға айтилади.

Бунда $mesQ$, $mesS_q$ лар мое равишда Q ва q соҳаларнинг ўлчовлари.

Мисол. Доиранинг ичига квадрат чизилган. Доирага таваккал ташланган нуқтанинг квадрат ичига тушиш эҳтимоли қанча?

$$S_{\text{доира}} \sim \pi R^2, \quad S_{\text{кв}} = 2R^2$$

Демак,

$$P = \frac{S_{\text{кв}}}{S_{\text{доира}}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0.64$$

4. ХОДИСА ЭҲТИМОЛИНИНГ ХОССАЛАРИ

1. Ҳар қандай A ҳодиса учун $P(A) \geq 0$ чунки, $0 \leq P \leq 1$.
Агар $A \subset B$ бўлса, $P(A) \leq P(B)$ бўлади. Исботи: $A \subset B$ бўлгани учун $B = A \cup (B \setminus A)$ бўлади. У ҳолда $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$

3. Агар $A = B$ бўлса, $P(A) = P(B)$ бўлади.

4. Агар $C = A \cup B$ бўлиб, A ва B ҳодисалар биргаликда бўлма-са, у ҳолда $P(C) = P(A) + P(B)$ бўлади.

Исботи: Тажрибанинг мумкин бўлган натижалари сони n бўлиб, тажрибанинг A га қулайлик берадиган натижалари сони n_A ва тажрибанинг B га қулайлик берувчи натижалари сони n_B бўлсин.

У ҳолда $P(C) = \frac{n_C}{n} = \frac{n_A + n_B}{n} = P(A) + P(B)$ бўлади.

И И И

5. $P(U) = 1$, чунки U ҳодиса учун $0 \leq P \leq 1$

6. $P(V) = 0$, чунки V учун $0 \leq P \leq 1$

7. $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

Ҳақиқатан $A \cup \bar{A} = U$. Бундан $P(U) = P(A) + P(\bar{A})$

чунки $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Демак $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Бундан $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ бўлади.

Юқоридаги хоссаларга асосан $0 \leq P(A) \leq 1$ деб ёза оламиз.

5. ШАРТЛИ ЭҲТИМОЛЛАР

1. Кўпайтма эҳтимолининг умумий формуласи.

1.11. Таъриф. A ҳодиса рўй беради деган фаразда B ҳодиса-нинг рўй бериш эҳтимолига A ҳодисанинг B ҳодиса рўй берган-даги шартли эҳтимоли дейилади ва $P(B|A)$ ёки $P(B/A)$ каби ёзилади.

Мисол. Ўйин тоши ташланганда жуфт рақамлар тушса, A ҳодиса рўй берди дейлик. A ҳодиса сифатида 2 рақами тушишини олайлик. У ҳолда A ҳодиса рўй бергандаги B ҳодисанинг рўй бе-

риш эҳтимоли $P_A(B)$ - бўлади, чунки $n=3, m=1$ дир.

Теорема: A ва B ҳодисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоли улардан бирининг эҳтимоли билан, иккинчисининг бирин-чиси рўй берди деган фаразидаги шартли эҳтимоли кўпайтмасига тенг, яъни

$$P(A \cap B) = P(A) P_B(A) \quad (1.3)$$

ёки

$$P(A \cap B) = P(B) P_A(B) \quad (1.4)$$

Исботи: Мумкин бўлган тажриба натижалари сони n бўлиб, улардан A ҳодисага қулайлик берувчи тажриба натижалари сони m бўлсин. A ҳодиса келиб чиққанда B ҳодисага қулайлик берувчи тажриба натижалари сони k бўлсин. У ҳолда $A \cap B$ га қулайлик берадиган тажриба натижалари сони k бўлади.

$$P(A \cap B) = \frac{k}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{m} = P(A) P_B(A)$$

m

(1.3), (1.4) ларга ҳодисалар эҳтимолларини кўпайтиришнинг умумий формуласи дейилади.

Мисол. Вир шаҳарда аҳолининг сони N бўлиб, улардан N_1 аёллар, N_2 таси эркеклар бўлсин. Аёллар орасида m_1 таси, эркеклар орасида m_2 таси зиёли бўлсин.

Ихтиёрий танланган эркекнинг зиёли бўлиш эҳтимоли қанча?

Ихтиёрий танланган одамнинг зиёли бўлиш эҳтимоли қанча?

Ечиш: Ихтиёрий танланган одам эркек бўлса A ҳодиса келиб чиқди, зиёли бўлса, B ҳодиса келиб чиқди дейлик.

У ҳолда $P(A \cap B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{N} = \frac{m_2}{N} = \frac{m_2}{N}$ бўлади, чунки

$$P(B) = \frac{m_2}{N_2} \quad \text{Демак, } P(B) \neq P_A(B)$$

P

6. ТҮЛИҚ ЭХТИМОЛ ФОРМУЛАСИ

$A_1, A_2, \dots, A_n$, ҳодисалар ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этсин. Яъни $P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$ бўлсин.

B ҳодиса, $A_1, A_2, \dots, A_n$, ҳодисаларнинг биронтаси билан бирга-ликда бўй берсин, яъни B ёки A_1 билан, ёки A_2 билан, ёки A_3 билан ва ҳоказо биргаликда бўй берсин. У ҳолда $B = BA_1 + BA_2 + \dots + BA_n$, деб ёза оламиз.

Бундан $P(B) = P(BA_1) + P(BA_2) + \dots + P(BA_n)$ бўлади, кўпайтириш формуласига асосан

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

ёки

$$i=1$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P_{A_i}(B) \quad (1.5)$$

ҳосил бўлади.

(1.5) га тўлиқ эҳтимол формуласи дейилади.

Мисол. Экиш учун ажратилган 1 нав буғдойга озгина 2 ва 3 навлар ҳам аралашган. Ихтиёрий равишда 1 донга буғдой оламиз.

Олинган буғдой 1 нав бўлса, A_1 ҳодиса, 2 нав бўлса, A_2 ҳодиса, 3 нав бўлса, A_3 ҳодиса келиб чиқди деймиз.

Тасодифан олинган доннинг у ёки бу навдан бўлиш эҳтимол-лари қуйидагича:

$$P(A_1) = 0,96; P(A_2) = 0,03; P(A_3) = 0,01.$$

Экилгандан кейин бир донга дондан 50 тадан кам бўлмаган донга эга бўлган бошоқнинг ўсиб чиқиш эҳтимоли қанча?

Ечиш: A_1, A_2, A_3 ҳодисаларнинг тўлиқ группасини ташкил этади, яъни $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$

1 сорт дондан 50 дан кам бўлмаган донга эга бошоқнинг ўсиб чиқиш эҳтимоли, яъни $P_{A_i} = 0,5$ бўлсин. Шунга ўхшаш $P_t = 0,5$

ва $P_{A_i}(B) = 0,2$ бўлса, у ҳолда

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B) = 0,96 \cdot 0,5 + 0,03 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 0,2 = 0,48 + 0,0045 + 0,002 = 0,49.$$

7. БЕЙЕС ФОРМУЛАСИ

B ҳодиса, ҳодисаларнинг тўлиқ группасидаги $A_1, A_2, \dots, A_n$, ҳодисаларнинг биронтаси билан биргаликда рўй берсин, яъни B ҳодиса $BA_1, BA_2, \dots, BA_n$, хусусий ҳолларга ажралсин.

У ҳолда $P(BA_i) = P(B) \cdot P(A_i/B) = P(A_i) \cdot P(B/A_i)$ бўлади.

Бунда $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Бундан

ёки

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(B)}$$

бўлади.

(1.6) га Бейес формуласи дейилади.

Мисол. Бир корхона учун керакли маҳсулотларнинг 20% ни I станок, 30% ни II станок, 50% ни III станок тайёрлаб беради.

Биринчи станок ўртача ҳисоб билан 0,002%, иккинчи станок 0,003%, учинчи станок 0,001% яроқсиз детал ишлаб чиқаради.

Тасодифий олинган детал биринчи станокда тайёрланган бўлишлик эҳтимоли қанча?

Ечиш: Тасодифий олинган детал биринчи станокда ишланган бўлса, A_1 ҳодиса рўй берди дейлик. Шунга ўхшаш иккинчи станокда ишланган бўлса A_2 ҳодиса, учинчи станокда ишланган бўлса, A_3 ҳодиса рўй берди дейлик. У ҳолда

$P(A_1) = 0,2; P(A_2) = 0,3; P(A_3) = 0,5$; у ҳолда
 $P(B) = 0,002; P(B|A_1) = 0,002; P(B|A_2) = 0,003; P(B|A_3) = 0,001$; бўлади.

(1.6) формулага асосан:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$$

- «0.32

$$P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = 0,2 \cdot 0,002 + 0,3 \cdot 0,003 + 0,5 \cdot 0,001$$

$$= 0,0004 + 0,0009 + 0,0005 = 0,0018$$

8. ЎЗАРО БОҒЛИҚ БЎЛМАГАН ҲОДИСАЛАР

$A_1, A_2, \dots, A_n$ ҳодисалардан ҳар бирининг рўй бериш эҳтимоли бошқасининг рўй бериш эҳтимолига таъсир этмаса, у ҳолда бу ҳодисаларга ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар дейилади.

Агар улардан биронтасининг рўй бериш эҳтимоли бошқалари-нинг рўй бериш эҳтимолига таъсир этса, у ҳолда бундай ҳодисаларга ўзаро боғлиқ бўлган ҳодисалар дейилади.

Масалан. Идишда 6 та оқ, 7 та қора шар бор.

A - биринчи олинган шарнинг оқ бўлиш ҳодисаси.

B - иккинчи марта олинган шарнинг оқ бўлиш ҳодисаси.

1-ҳол. Биринчи олинган шар яна идишга қайтариб қўйилса, у ҳолда $P(A) = \frac{6}{13}$, $P(B) = \frac{6}{12}$ бўлади. Бу ҳолда A ва B лар ўзаро боғлиқ эмас.

2-ҳол. Агар олинган шар идишга қайтариб солинмаса, у ҳолда биринчи марта оқ шар чиққан бўлса,

$$P(A) = \frac{6}{13}, P(B) = \frac{5}{12}$$

ва биринчи марта оқ шар чиқмаган бўлса, $P(B) = \frac{6}{12}$ бўлади. Бу ҳолда A ва B лар ўзаро боғлиқ. Демак, бу мисолда/1 ва B лар боғлиқ бўлмаган бўлса, $P(B/A) = \frac{5}{11}$ ва агар A ва B лар боғлиқ бўлса,

$P(B/A) = \frac{5}{11}$ бўлади.

Демак, ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар учун $P(B/A) = P(B)$ бўлар экан.

Эҳтимолларни умумий кўпайтириш формуласини ёзамиз.

$P(AB) = P(A) P(B/A)$ Агар A ва B лар ўзаро боғлиқ бўлмаса, $P(AB) = P(A) P(B)$ бўлади.

Демак, ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисаларга қуйидагича таъриф бериш мумкин:

1.12. Таъриф. Агарда A ва B ҳодисаларнинг биргаликда бўлиш эҳтимоли ҳар бир ҳодиса эҳтимолининг кўпайтмасига тенг бўлса, яъни

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

бўлса, у ҳолда A ва B ҳодисаларга ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар дейилади.

Мисол. Вир вақтда 3 та станок ишляпти. Вир соат давомида 1 станокнинг бузилмаслик (A_1) эҳтимоли 0,9 , II станокнинг бузилмаслик (A_2) эҳтимоли 0,8 , III станокнинг бузилмаслик (A_3) эҳтимоли 0,85 бўлсин.

Вир соат давомида битта ҳам станокнинг бузилмаслик эҳтимоли қанча?

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,612 \text{ бўлади.}$$

9. ҲОДИСАЛАР ЙИГИНДИСИ ЭҲТИМОЛИНИНГ УМУМИЙ ФОРМУЛАСИ

A ва B ихтиёрий ҳодисалар бўлсин. У ҳолда $A + B = A \cup (B - AB)$ ва $B = AB \cup (B - AB)$ ва бўлади. Йигиндилардаги қўшилувчилар биргаликда бўлмаган ҳодисалар бўлгани учун ҳодиса эҳтимоли-нинг 4-хоссасига асосан куйидагини ёза оламиз:

$$P(A + B) = P(B - AB) + P(A) \quad (1.7)$$

$$P(B) = P(AB) + P(B - AB) \quad (1.8)$$

(1.7) ва (1.8) дан

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) \quad (1.9)$$

формула келиб чиқади.

Агар A ва B ҳодисалар ўзаро боғлиқ бўлмаса, у ҳолда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) \text{ ҳосил бўлади.}$$

Агар A ва B ҳодисалар биргаликда бўлмаган бўлса, у ҳолда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \text{ келиб чиқади.}$$

Мисол. Иккита мерган нишонга ўқ узди. i-мерганнинг нишонга тегиш эҳтимоли 0,8 , 2-мерганники 0,9 бўлсин. Иккаласи бир вақтда отганда камида биттасининг нишонга тегиш эҳтимоли қанча?

Ечиш: 7-мерган нишонга тегса, A ҳодиса, 2-тегса B ҳодиса рўй беради дейлик, у ҳолда $P(A) = 0,8$ $P(B) = 0,9$ бўлади.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0,8 + 0,9 - 0,8 \cdot 0,9 = 0,96$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

1. Нишонга қараб 100 та ўқ узилди. Шулардан 88 таси нишонга тегди. Нишонга тегиш (ҳодиса)нинг нисбий сони ҳисоблансин,

Жавоб: $W = \frac{88}{100} = 0,88$

2. 1 дан 75 гача сонлар билан белгиланган чипталардан бири ихтиёрий олинади. Олинган билетнинг номери 2 га ва 3 га бўлинмайдиган бўлиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: $\frac{1}{3}$

3. Телефонда номер тираётган абонент номернинг охириги 2 рақамини ёдидан чиқарди. Лекин бу сонларни тўғри эканини билар эди. Абонент тасодифий терган рақамларнинг керакли бўлиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: $\frac{1}{10}$

-

4. *a, б, а, г, к, п, о, и* ҳарфлар алоҳида карточкаларга ёзилган ва карточкалар яхшилаб аралаштирилган. Кетма-кет тартиб билан олинган 6 ҳарфнинг "**оптика**" сўзини ташкил қилиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: $\frac{1}{1000000}$

5. 50 та дазмолдан 3 таси бузилган. Вир вақтда олинган иккита дазмолнинг бузилган бўлиш эҳтимоли топилсин.

Жавоб: 0,0024

6. Учта заводда бир соат давомида 1000 та электр лампочкаси ишлаб чиқарилади. Шундан 400 таси I заводда, 320 таси II да, 280 таси III да ишланади. I заводда ишланган лампочканинг аъло сифатли бўлиш эҳтимоли 0,92, II сида 0,7, III сида 0,86. Тасодифан олинган лампочканинг аъло сифатли бўлиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: 0,8328

7. Ҳисоблаш лабораториясида 7 та эски компьютер ва 5 та янги компьютер бор. Қандайдир ҳисоблаш ишини бажаргунча янги компьютернинг ишдан чиқмаслик эҳтимоли 0,98 ва эски компьютерники 0,87 га тенг. Ўқувчи тасодифан дуч келган компьютерда ҳисоблаш ишларини бажаради. Ҳисоблаш тугагунча компьютернинг ишдан чиқмаслик эҳтимоли қанча?

Жавоб: **0,9158**

8. Ишлаб чиқарилаётган маҳсулотнинг 96% стандарт шартни қаноатлантиради. Содда текшириш схемаси 0,05 эҳтимол билан стандарт бўлмаган, 0,98 эҳтимол билан стандарт маҳсулотни ўтказди. Текширишдан ўтган маҳсулотни стандарт бўлиш эҳтимоли топилсин.

Жавоб:

9. Беморни текширишда 3 ҳил - A_1, A_2, A_3 касалликлардан бирига шубҳа қилишди. Уларнинг эҳтимоллари қуйидагича:

$$P(A_1) = 1/2, P(A_2) = 1/3, P(A_3) = 1/6;$$

Касалликка ташхис қўйиш учун A_1 касаллик борлигини 0,1 эҳтимол билан, A_2 касаллик борлигини 0,2 ва A_3 касаллик борлигини 0,9 эҳтимол билан аниқлаб бера оладиган текширув белги-ланди. Текширув 5 марта ўтказилди. Шулардан 4 таси касал борлигини, биттаси касал йўқлигини кўрсатди. Анализ ўтказилгандан кейин ҳар бир касал билан оғриш эҳтимоли топилсин.

Жавоб: **0,002; 0,01; 0,988;**

10. 4 марта танга ташланади. Шулардан 3 марта герб ва 1 марта рақамли томон тушиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: 0,25

11. Ўйин тоши 2 марта ташланганда тушган рақамлар йиғиндиси 9 га тенг бўлиш эҳтимоли ҳисоблансин.

Жавоб: -9

12. А, Б, В, Г, К, М, О, С ҳарфлар ёзилган. 6 та карточкадан ихтиёрий 6 таси танланади. Шу ҳарф чиқиш тартиби билан "**Мо сква**" сўзини ташкил қилиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: —

Al

13. **36** та талабалардан **4** таси қизлар. Талабаларга берилган **3** та билетнинг **1** тасини қизлардан бирига тушиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: *0,2778*

14. Талаба имтиҳон билетларига киритилган **60** та саволдан **50** тасига тайёрланган. Иккита савол ёзилган билетлардан бирини студент тасодифан олади. Олинган саволларни тайёрланган бўлиш эҳтимоли қанча?

Жавоб: **0,692**

II. ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР

1. ДИСКРЕТ ТАСОДИФИЙ МИҚДОР ВА УНИНГ ТАҚСИМОТ ҚОНУНИ

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан бири тасодифий миқдор тушунчасидир.

1-мисол. Такси тўхташ жойига бир соат давомида келиб тўхтайдиган таксилар сони тасодифий характерна эга.

2-мисол. Газ молекуласи бошқа молекулаларга уриниши би-лан унинг тезлиги ўзгаради. Қисқа вақт ичида ҳам бу уринишлар куп бўлади. Верилган моментдаги тезликни билган ҳолда унинг кейинги секунддаги қийматини аниқ айтиш мумкин эмас. Молекула тезлигининг ўзгариши тасодифий характерга эга.

Юқоридаги мисоллардан кўринадики, тасодифий миқдорлар фан ва техниканинг турли соҳаларида учрайди, шунинг учун бу миқдорларни ўрганиш методларини яратиш масаласининг қўйи-лиши табиийдир. Ҳар бир мисолдаги миқдорлар тасодифий ҳо-латлар таъсирида ҳар хил қийматларни қабул қилади. Бу миқдор тажрибадан тажрибага ўзгаргани учун олдиндан унинг қабул қи-ладиган қийматларини айтиб бўлмайди.

Шундай қилиб, тасодифий миқдорни билиш учун унинг қабул қиладиган қийматларини билиш керак. Қабул қиладиган қийматларига қараб бирор муҳим хулоса чиқариш учун бу қийматларни-гина билиш етарли эмас, уларни қандай эҳтимол билан қабул қилишни билиш керак.

2.1.Таъриф. Агар ўзгарувчи миқдор шартига қараб у ёки бу қийматларни аниқ эҳтимоллар билан қабул қилса, унга тасодифий миқдор дейилади ва $\frac{3}{4}, ij, \dots$ каби белгиланади. Тасодифий миқдорлар дискрет ва узлуксиз бўлади.

2.2.Таъриф. Агарда тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари чекли ёки санокли бўлса, $\backslash$ га дискрет тасодифий миқдор дейилади.

2.3.Таъриф. Тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари билан уларнинг эҳтимоллари орасидаги муносабатга тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни дейилади.

Масалан ўйин тоши ташланганда $\backslash$ тасодифий миқдор сифа-тида қийматлари тушадиган рақамларга тенг бўлган ўзгарувчи

миқдорни олиш мумкин. Бунда $\frac{3}{4}$ ҳар бир қийматини аниқ эҳти-

моллар билан, яъни эҳтимол билан қабул қилади. 6

\ тасодифий миқдорнинг қабул қиладиган қийматлари $x_1, x_2, \dots, x_l$, бўлсин.

Тажриба натижасида $\frac{3}{4}$ бу қийматлардан бирини қабул қилади, яъни $\frac{3}{4} = x_1, \frac{3}{4} = x_2, \dots, \frac{3}{4} = x_l$, ҳодисалардан биронтаси келиб чиқади.

Бу ҳодисаларнинг эҳтимоллари $P(K = x_i) = P_i, P(t = X_j) = P_j, \dots, P(K = x_l) = P_l$, бўлсин. У ҳолда

и

$i=1$

бўлади, яъни тасодифий миқдорнинг ҳамма қийматларини қабул қилиш эҳтимолларининг йиғиндиси 1 га тенг.

2.4. Таъриф. Дискрет тасодифий миқдор \ нинг қабул қиладиган қийматлари ва шу қийматларни қабул қилиш эҳтимоллари берилган бўлса, унинг тақсимот қонуни берилган дейилади, яъни унинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

	$x_1, x_2, \dots, x_l$
	$p_1, p_2, \dots, p_l$

$i=1$

ва уни тақсимот қатори дейилади.

Бундай тақсимот қонунига мое чизилган текисликдаги чи- зикқа тақсимот кўпбурчаги(полигони) дейилади.

P_3

P_l

$P,$

$\{ x_1, x_2, \dots, x_l \}$

2. ТАСОДИФИЙ МИҚДОРЛАР УСТИДА ЧИЗИҚЛИ АМАЛЛАР

Тасодифий миқдорларни сонга кўпайтириш ва тасодифий миқдорларни қўшишни кўрамиз:

$$1) \quad \begin{matrix} X_j, \\ P_1 P_2 \dots \end{matrix}$$

Тасодифий миқдорни C сонга кўпайтмаси деб

$$!, CX_2 \dots$$

тасодифий миқдорга айтилади. Демак, тасодифий миқдорни сон-га кўпайтириш учун шу қийматлар қабул қилиш эҳтимолларини ўзгартирмасдан тасодифий миқдорнинг қийматларини сонга кўпайтириб чиқиш кифоя экан.

$$2) \quad \begin{matrix} \xi \\ P \end{matrix} \quad X \dots X_2 \dots \quad YhY2 \quad \backslash P, P_2 \dots \quad q$$

тасодифий миқдорларнинг йиғиндисини топамиз.

Бунинг учун P_{y_i} билан ($\% = x_k$) ва ($y_i = y_i$) билан ва ҳодисалар-нинг биргаликда эҳтимолини оламиз. Агар бу ҳодисалар биргаликда бўлса, у ҳолда $<f+j/$ тасодифий миқдор $x_k + y_i$ қийматни қабул қилади. Лекин ($\% + rj = Xj + y_i$) ҳодисанинг эҳтимоли $P/$ дан катта бўлиши мумкин, чунки $Xj + y_i$ йиғиндилар орасида $Xj + y/$ га тенг бўлган сонлар бўлади. У ҳолда эҳтимолларни қўшиш теорема-сига асосан $\Gamma/\wedge + t; = X! + y; / x, o d, u c a$ эҳтимоли сифатида қиймати $Xj + y_i$ тенг бўлган $x_k + y$, ларнинг эҳтимолларини йиғиндисига $D/$ тенг бўлиши керак.

Мисол. Иккита ўйин тоши ташланади.

f - биринчи ўйин тошида тушадиган рақамлар сони

$i/$ - иккинчи ўйин тошида тушадиган рақамлар сони

$g + q$ - икки ўйин тошида тушадиган рақамлар сонининг йиғиндис.

<*` ва 2; тасодифий миқдорларни тақсимот қонуни бир хил:

1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1		

учун тақсимот қонунини тузамиз. Аввал қуйидаги жадвални тузамиз.

$$1+1 \quad 1+2 \quad 2+1 \quad 3+1 \quad \dots \quad 6+6$$

$$1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36$$

Кейин биринчи қатордан тенг сонларни бирлаштириб уларни эҳтимолларини қўшамиз. Натижада <f+j/ учун тақсимот қонунини тузган бўламиз.

$$2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12$$

$$36 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36 \quad 36$$

Қуйидаги муносабатларни ўринли эканлигини осон текшириш мумкин.

$$I^+ \quad c = m, + \{. (\$+m,) + \$+(m,+S)$$

$CK+m,)=Cl;+Cm,$ 3. **БЕРНУЛЛИ СХЕМАСИ ВА БИНОМИАЛ ТАҚСИМОТ**

Агар ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш, бошқа тажриба натижаларига боғлиқ бўлмаса, тажрибалар кетма-кетлиги ҳодисага нисбатан боғлиқ эмас дейилади.

1-мисол. Қутида шарлар бор, ундан битта шар оламиз ва шар-ни рангини аниқлаганимиздан кейин қутига қайтариб соламиз.

Бундай тажрибани бир неча марта такрорлаймиз, натижада такрорий боғлиқ бўлмаган тажрибаларни ҳосил қиламиз.

2-мисол. Ҳар бир отишда ўқнинг нишонга тушиш эҳтимоли бир хил бўлганда, мерганнинг битта ва фақат битта нишонга такрорий отиши ҳам такрорий боғлиқ бўлмаган тажрибани ташкил этади.

n та такрорий боғлиқ бўлмаган тажрибалар ўтказамиз, ҳар бир тажрибада A ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли $P(A) = p$ бўлсин, A ҳодисага қарама-қарши A ҳодисанинг эҳтимоли $P(A) = 1 - p = q$ бўлсин. Виз n та такрорий боғлиқ бўлмаган тажрибада A ҳодисанинг m марта рўй бериш эҳтимолини топамиз. Бунинг учун ху-сусий ҳолни кўрамиз. $n = 3, m = 2$, бўлсин, у ҳолда қуйидаги схемалардан биттаси рўй беради, ёки AAA , ёки $A A A$, ёки $AA A$.

Бу учта натижалардан ихтиёрий 2 таси биргаликда бўлмаган ҳодисалардир, шунинг учун эҳтимолни қўшиш теоремасига асо-сан 3 та такрорий тажрибада A ҳодисанинг 2 марта рўй бериш эҳтимоли

$$P_{2,3} = P(JAA A) + P(A A A) + P(A AL) \text{ лекин } P(AA A) =$$

$$P(A A A) = P(A AA) = p^2 q$$

Шуи дай қилиб, $P_{2,3} = p^2 q$

Энди $n = 4, m = 2$ бўлсин, унда қуйидаги ҳоллар рўй беради:

$AAA A AAAAA A AAA AAAAA AAAAA AAAAA$

у ҳолда $P_{2,4} = 6p^2 q^2$ бўлади.

Бирлашмалар назариясидан маълумки, 3 элементдан 2 тадан комбинация 3 га, 4 элементдан 2 тадан комбинация 6 га тенг. Математик индукция методини қўллаб қуйидагига эга бўламиз.

*****,-,ctff****

Умуман n та тажрибада A ҳодисанинг m марта келиб чиқиш эҳтимоли учун

$$P = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$$

бўлади.

$$C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

бўлгани учун
бўлади.

$$f(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x)$$

(/) формулага Бернулли формуласи дейилади ва унинг тақсимо-мотори қуйидагича ёзилади:

$${}^1 C_l p^2 f^2$$

m, n сонлар жуда катта бўлганда $m!, n!, (n-m)!$ ларни ҳисоб-лаш қийин, шунинг учун факториал таблициясидан фойдаланилади ёки P_{mn} нинг тақрибий қиймати ҳисобланади.

$(q+px)^n$ ни бином бўйича ёзамиз.

$(q+px)^n = \sum P_{mi} x^m$ бўлади. Бундан кўринадикки, $P_{0,0}, P_{1,0}, \dots, P_{n,0}$ эҳтимол

• $P_{n,0}$

бином ёйилмасидаги x^m ҳадни олдидаги коэффициентга тенг, шунинг учун (1) формулага эҳтимолнинг биномиал тақсимо-мотори ҳам дейилади.

1-мисол. Берилган навдаги ўсимлик уруғининг униб чиқиш эҳтимоли $P = 0,8$ га тенг. Экилган 5 та уруғдан 4 дан кам бўлмаган уруғни униб чиқиш эҳтимоли аниқлансин.

$$P(m > 4) = P_{4,5} + P_{5,5} - 5\phi'(s) + ({}^4 f = 0,73728$$

$J \quad \Theta$

2-мисол. Ҳар бир отишда нишонга тегиш эҳтимоли $P = 0,8$. Отилган 6 та ўқдан 5 тасининг нишонга тегиш эҳтимоли топилсин:
 $P_{St6} = 6(0,8)^5 (0,2)^1 = 0,3922$.

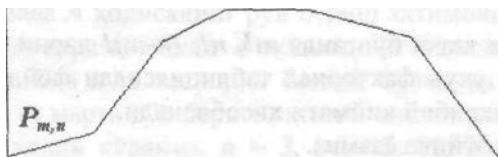
4. БЕРНУЛЛИ ТАҚСИМОТИНИНГ КЎПБУРЧАГИ (ПОЛИГОНИ)

Бернулли тақсимо-моторидаги m сони қуйидаги қийматларни $m = 0, 1, \dots, n$ мое равишда $P^{\wedge}_{0,n} = P_{0,n}, P_{0,i}, \dots, P_{n,n}$ эҳтимол билан қабул қилади ва $j^{\wedge} / V_i^{\wedge} -^{\wedge}$ ўринли бўлади.

m, l

Декарт координат системасида абцисса ўқи бўйича m соннинг қийматларини жойлаштириб, бу нуқталардан узунлиги $P_{m,n}$ эҳтимолга тенг булган перпендикуляр чиқарамиз, кейин перпендикулярни учларини кесмалар билан бирлаштирсак, кўпбурчак ҳосил

бўлади. Бу кўпбурчакка Бернулли тақсимотининг кўпбурчаги дейилади.



O

$*$

w^*

m_t

Мисол. Боғлиқ булмаган 3 та тажриба ўтказилган ва ҳар бир тажрибада A ҳодисасининг келиб чиқиш эҳтимоли P + - бўлсин. Мумкин бўлган ҳолларнинг эҳтимоли топилсин.

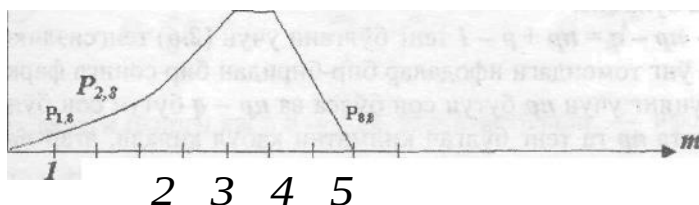
$mP_{,,}$

$O P_{0,3} = 0,0002$

$1P_{1,3} = 0,002$

$\sim 4P_{2,3} \sim 9,171$

$8 P_{3,3} = 0,038$



0, 6 7 8

30,2

0

Д

Келтирилган мисолни эҳтимол тақсимотидан кўринадик, A ҳодисанинг 5 ёки 6 марта келиб чиқиши энг катта эҳтимолга эга, A ҳодисанинг бир марта ҳам келиб чиқмаслиги практикада мумкин бўлмаган ҳолдир.

5. ҲОДИСА КЕЛИБ ЧИҚИШИНИНГ ЭНГ КАТТА ЭҲТИМОЛИ СОНИ

Биномиал тақсимотидан кўринадик, A ҳодисанинг келиб чиқиш сонлари ичида қайси бири энг катта эҳтимолга эга эканлигини аниқлаш мумкин. Юқорида келтирилган мисолда 5 ва 6 сонлари энг катта эҳтимолга эга. Шу сонларни топиш масаласи билан шуғулланамиз. Бунинг учун энг катта эҳтимолли сонни n_{to} билан белгилаймиз, у ҳолда куйидаги тенгсизликлар бажарилади.

$$p > q \quad (2.2) \quad p > q$$

$$p > q \quad (2)$$

$$p > q \quad (3)$$

(2.2) тенгсизликдан

қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$p > q \quad (2)$$

бундан

$$p > q, \quad m < n$$

ҳосил қиламиз.

(2.3) тенгсизликдан

$$m_0 > np \sim q \quad (2.5)$$

бўлади.

(2.4) ва (2.5) тенгсизликларни бирлаштирсак,

$$np - q < m_0 < np + q \quad (2.6)$$

эга бўламиз.

$np - q - np + q - 1$ тенг бўлгани учун (2.6) тенгсизликнинг чап ва ўнг томондаги ифодалар бир-биридан бир сонига фарқ қилади, шунинг учун np бутун сон бўлса ва $np - q$ бутун сон бўлмаса, m_0 битта np га тенг бўлган қийматни қабул қилади, агар $np - q$ бутун сон бўлса, «10 2 та қийматни қабул қилади».

Мисол. Ишлаб чиқарилган стандарт маҳсулотларни узоқ текширишлар шуни кўрсатадики, ўртача яроқсизлик 7,5% ни ташкил этади. 39 доналик партия ичида энг катта эҳтимолли тузатилган маҳсулотлар сони аниқлансин.

Тузатилган маҳсулотларнинг чиқиш эҳтимолини P десак, у ҳолда

$$p = Z^{\wedge} = 0,075 \text{ } 100$$

бўлгани учун

$$P = 1 - g = 1 - 0,075 = 0,925 \text{ бўлади. } n = 39$$

$$39 \cdot 0,925 - 0,075 < m_0 < 39 \cdot 0,925 + 0,075$$

$$36 < m_0 < 37 \text{ } m_0 \text{ 2 қийматни 36 ва 37 ни қабул қилади.}$$

6. ПУАССОН ҚОНУНИ

Пуассон қонуни биноминал тақсимот қонунининг хусусий ҳоли бўлиб, уни кичик сонлар қонуни ҳам дейилади.

$P(A) \rightarrow 0$ интилиб, тажрибалар сони $n \rightarrow \infty$ интилсин ва $np \rightarrow \lambda$ $\lambda = const > 0$ шартли бажарилсин. У ҳолда

$$m_0'$$

бўлади.

И
сбот
и.

$atl(u -$
 $tu). ' n$

$l \quad |^m **m$
-) »

Бу ифодадаги охирги қаср я-я» да, бирга интилади, — ифода
 $tn!$
 n га боғлиқ эмас.

Шундай қилиб,

$\lim P_{m,n} =$.—(2-7)

»-»« ml

(2.7) ифодага Пуассон тақсимот қонуни дейилади.

Айрим қитобларда (2.7) ифодани қуйидаги кўринишда ёзилади:

-Я - m

$m \quad P_m =$

.5) дан қуйидагига эга бўламиз:

-Я

$o \quad O)$

$=<r'E$

$m-fl \quad m=v \quad " * . ' \quad m=y \quad /Я/$

Демак, $|; jP_m =$ /бўлади.

акт

Пуассон қонуни практикада, айниқса оммавий хизмат қилиш системасида қўлланилади.

Мисол. Ихтиёрий абонентнинг коммутатор орқали бир соат ичида қўнғироқ қилиш эҳтимоли $P = 0,001$ га тенг. Телефон станцияси 800 та абонентга хизмат қилади. Бир соат ичида 4 та абонентнинг қўнғироқ қилиш эҳтимоли топилсин.

Ечиш:

$L = np = 800 \cdot 0,001 = 3$

$P_4 = \sim = \sim = 0,168 = 0,17$

Фойдаланган адабиётлар

1. В.Е. Гмурман. «Эхтимоллар назарияси ва математик статистика». Тошкент. 1977 йил.
2. В.Е. Гмурман. «Эхтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга дойр қўлланма». Тошкент. 1980 йил.
3. Ё. Соатов. «Олий математика». II том. Тошкент. 1992 йил.

МУНДАРИЖА

Кириш	3
Эхтимоллар назарияси предмета	5
I. Тасодифий ҳодисалар ва Эхтимоллар	
1. Тасодифий ҳодисалар ва улар устида амаллар	7
2. Комбинаторика назариясидан айрим тушунчалар	10
3. Ҳодиса эхтимолининг таърифлари	14
4. Ҳодиса эхтимолининг ҳоссалари	17
5. Шартли эхтимоллар	17
6. Тўлиқ эхтимол формуласи	19
7. Бейес формуласи	20
8. Ўзаро боғлиқ бўлмаган ҳодисалар	21
9. Ҳодисалар йиғиндиси эхтимолининг умумий формуласи	22
II. Дискрет тасодифий миқдорлар	
1. Дискрет тасодифий миқдорлар ва унинг тақсимот қонуни	26
2. Тасодифий миқдорлар устида чизиқли амаллар	28
3. Бернулли схемаси ва биноминал тақсимот	29
4. Бернулли тақсимотининг кўпбурчаги .	31
5. Ҳодиса келиб чиқишининг энг катта эхтимоли сони	33
6. Пуассон қонуни	34