

«Ўзбекистон темир йўллари» ДАТК
Тошкент темир йўл муҳандислари институти

«Нашрга рухсат этаман»
Ўқув ишлари бўйича проректор
_____ доцент Ф.Ф. Каримова
«_____» _____ 2010й.

А. Абдусаттаров , А. Хайдаров, А. Маткаримов

МАТЕРИАЛЛАР ҚАРШИЛИГИ

- 5580200 – Бино ва иншоотлар қурилиши
- 5580600 – Транспорт иншоотларидан фойдаланиш
- 5521200 – Транспорт воситаларини ишлатиш ва таъмирлаш
- 5521100 – Ер усти транспорт тизимлари
таълим йўналишларидаги 2-курс бакалаврият
талабаларининг лойиҳа-ҳисоблаш ишларини
бажаришга доир ўқув-услубий қўлланма

ТОШКЕНТ – 2010

«Ўзбекистон темир йўллари» ДАТК
Тошкент темир йўл муҳандислари институти

МАТЕРИАЛЛАР ҚАРШИЛИГИ

- 5580200 – Бино ва иншоотлар қурилиши
- 5580600 – Транспорт иншоотларидан фойдаланиш
- 5521200 – Транспорт воситаларини ишлатиш ва таъмирлаш
- 5521100 – Ер усти транспорт тизимлари
таълим йўналишларидаги 2-курс бакалавриат
талабаларининг лойиҳа-ҳисоблаш ишларини
бажаришга доир ўқув-услубий қўлланма

ТОШКЕНТ – 2010

Ушбу ўқув-услугий қўлланма олий ўқув юртлирининг “Биолаар ва иншоотлар қурилиши”, “Транспорт иншоотларидан фойдаланиш, транспорт воситаларини ишлатиш ва таъмирлаш”, “Ер усти транспорт тизимлари” таълим йўналишларининг бакалавриат талабалари учун мўлжалланган.

Қўлланмада “Материаллар қаршилиги” фанининг чўзилиш-сиқилиш, эгилиш, мураккаб қаршилиқ ва устуворлиқ бўлимларига оид қисқача маълумотлар бериш билан бирга амалий машғулотлар бўйича характерли масалаларни ечиш услубиёти баён этилган. Бундан ташқари, лойиха-ҳисоблаш ишларини бажариш намуналари ва мустақил иш вариантлари келтирилган.

Институт Ўқув-услугий кенгаши томонидан нашрга тавсия этилган.

Тузувчилар: А. Абдусаттаров – т.ф.д., проф.
 А. Хайдаров – т.ф.н., доц.
 А. Маткаримов – т.ф.н., доц.

Такризчилар: М.М. Мирсаидов – т.ф.д., проф. (ТИМИ)
 Б.Э. Хусанов – ф.-м.ф.д., проф. (ТошТЙМИ)

Сўз боши

Республикамизда янги таълим тизимлари, яъни икки поғонали бакалавр-магистр тизими жорий этилиши билан барча умумтехника фанлари қаторида “Материаллар қаршилиги” фанининг ҳам аудитория соатлари ҳажми қисман ўзгартирилиб, мустақил ўқув соатлари кўпайтирилди. Шу боис, ўқув дастурларига мос келадиган содда ва рағон тилда ёзилган ўқув-услугий қўлланмаларини яратиш долзарб масала бўлиб қолмоқда.

Мазкур қўлланма саккиз бобдан иборат бўлиб, унда материаллар қаршилиги фанининг чўзилиш-сиқилиш, эгилиш, мураккаб қаршилиқ ва устуворлиқ бўлимларига оид қисқача назарий маълумотлар билан бирга масалаларнинг қўйилиши ва ечиш услуби баён қилинган.

Қўлланмада стерженларнинг чўзилиш-сиқилишга ҳисоблаш масалалари ёритилган бўлиб, статик аниқ ва ноаниқ стерженлар учун ички зўриқиш кучи ва кучланишларини аниқлаш, эпюраларини қуриш, деформацияларини топиш ва мустаҳкамликка текширишга доир қатор мисоллар ечими келтирилган. Балка деформацияларини аниқлашда бошланғич параметрлар, графоаналитик, Мор интеграллари ва Верещагин усуллари кенг қўлланилган. Статик ноаниқ балкаларни ҳисоблашда деформацияларни солиштириш усулидан фойдаланилган. Текис синиқ стерженларнинг кесимларида пайдо бўладиган ички зўриқиш кучлари эпюраларини текшириш тугунларни текшириш усулида бажарилган. Қўрилаётган кесимда чизикли ва бурчакли кўчишлар Верещагин усули орқали аниқланаган.

Номарказий сиқилган колоннанинг ихтиёрий кесимидаги кучланишлар ва нол чизик ҳолатини аниқлашга доир масала қўрилган. Сиқилган стерженнинг устуворлигини таъминловчи кўндаланг кесимни топиш масаласи кетма-кет яқинлашиш усули орқали кўрсатилган.

Қўлланманинг қўлёзмасини ўқиб чиқиб, унинг сифатини ошириш мақсадида берган фойдали маслаҳатлари учун техника фанлари доктори, профессор М.М. Мирсаидовга, физика-математика фанлари доктори Б.Э. Хусановга муаллифлар самимий минатдор-чиликларини билдирадilar.

Қўлланма ҳақидаги фикр ва мулоҳазаларингизни қуйидаги манзилга юборишингизни сўраймиз: 100106, Тошкент, Одилхўжаев кўчаси 1-уй. ТошТЙМИ, “Қурилиш механикаси” кафедраси.

1. Кириш

1.1 Материаллар қаршилиги фанининг мақсади, моҳияти ва ривожланиш тарихи

Маълумки, бирор иншоот ёки машиналарни қуришдан аввал, ундан қандай мақсадда фойдаланишига қараб, керакли қисмлар ва материаллар танланади. Материалларни танлашда конструкция ёки иншоотларнинг ўлчамлари, қандай шароитда ишлаши ва улар қандай юкланишларга, яъни қандай ташқи кучларга бардош бера олиши, қисмларда қандай зўриқишлар ҳосил бўлиши ва бу зўриқишларга қандай материал бардош бериши ҳамда кесим ўлчамларининг қандай танланиши ҳақидаги масалалар олдиндан ҳал қилиниши лозим.

Турли материаллар ташқи кучлар таъсирига турлича қаршилик кўрсатади. Конструкция қисмларида ташқи куч таъсиридан ҳосил бўладиган зўриқишларни ҳамма вақт ҳам статика тенгламалари ёрдамида аниқлаш мумкин бўлавермайди. Бундай пайтларда зўриқишларни қабул қилувчи қисмларнинг деформацияларини, яъни геометрик ўзгаришлар билан зўриқишлар орасидаги муносабатларни олдиндан билмасдан туриб, қўйилган масалани охиригача ечиб бўлмайди. Демак, материалларнинг баъзи физик, механик хоссаларини ифодаловчи параметрларини олдиндан билиш керак.

Материаллар қаршилиги фанида машина ва иншоотларнинг асосий элементлари сифатида қараладиган конструкция қисмларининг мустаҳкамлиги, устуворлиги ва бикрлиги масалаларига кенг эътибор берилади.

Ҳар қандай машина ва иншоотга нисбатан турлича конструктив талаблар қўйилади. Улар қўйилган юклар таъсирида ҳамма вақт хавф-хатарсиз ишлаши керак.

Иншоот ва машиналар мустаҳкам, бикр бўлиши ҳам зарур, яъни конструкциялар ёки уларнинг айрим қисмлари ташқи кучлар таъсирида катта деформациялар ҳосил қилмаслиги ва ўз устуворлигини йўқотмаслиги керак.

Материаллар қаршилигида аналитик усуллар билан бирга лаборатория ва табиий шароитда олинган тажриба натижалари ҳам ўрганилади.

Юқорида баён қилинганларга асосланиб, Материаллар қаршилиги фани — машина ва иншоот қисмларининг мустаҳкам, бикр ва устувор бўлишини ҳисоблашда зарур бўладиган зўриқиш кучлари, кучланиш ва деформацияларни аниқлаш усуллари ўргатади.

Материаллар қаршилиги математика, физика, назарий механика фанлари билан узвий боғлиқ бўлиб, шу фанларга таянади.

Материаллар қаршилиги фанида назарий механикадан фарқли жисмлар куч таъсирида деформацияланади деб қаралади. Жисмларнинг ўз шаклини ўзгартириши *деформация* деб аталади.

Агар жисмларда ташқи куч таъсиридан ҳосил бўлган деформация жисмдан куч олингач, йўқолиб кетса, бу *эластик деформация* деб аталади.

Деформацияларнинг характери таъсир этувчи куч миқдorigа боғлиқ. Бирор деформацияни юзага келтираётган кучнинг миқдори маълум чегарадан ортиб кетмаса, жисмда фақат *эластик* деформация вужудга келади, акс ҳолда қолдиқ ёки пластик деформация ҳосил бўлади. Жисмларнинг ўзгармас куч таъсирида вақт бўйича деформацияланиши ёйилувчанлик дейилади.

Материаллар қаршилиги фани ўз ривожланиш тарихига эга. Бу соҳада дастлабки тадқиқотларни Галилей ўтказган. У ташқи кучлар таъсирига стерженларнинг қаршилиқ кўрсатишини аниқлаган. Инглиз олими Роберт Гук чўзилишда куч билан узайиш орасидаги пропорционал боғланишни топган. Бу боғланиш Гук қонуни номи билан маълум бўлиб, материаллар қаршилигида жуда муҳим аҳамиятга эга.

Материаллар қаршилиги масалаларини аналитик усулларни қўллаб текширишга Д. Бернулли ва Л. Эйлер катта ҳисса қўшган. Бу соҳада П.В. Гадолин, Д.И. Журавский, Ф. Ясинский, А.Н. Верещагин, С.П. Тимошенко ва бошқаларнинг ишлари ҳам катта аҳамиятга эга.

Мактаб яратган олимлар: А.В. Александров, Н.М. Беляев, В.М. Феодосьев, А.А. Ильющин, Ю.Н. Работнов, В.З. Власов, Х.А. Рахматулин, М.Т. Уразбоев, В.К. Қобулов, Т.Ш. Ширинкулов, Т.Р. Рашидов, Ш.М. Гофман, Э.А. Одилхўжаев ва бошқалар материаллар қаршилигининг айрим бўлимларидан мустақил фанлар яратдилар.

Шундай қилиб, «Материаллар қаршилиги» фанининг янада такомиллашуви ва ривожланиши натижасида «Деформацияланувчи қаттиқ жисм механикаси», «Қурилиш механикаси», «Иншоотлар динамикаси ва устуворлиги», «Эластиклик ва пластиклик назарияси», «Ер ости иншоотлари сейсמודинамикаси» каби фанларнинг бутун бир комплекси юзага келди.

1.2 Конструкция элементлари ва уларнинг тузилиши

Амалиётда учрайдиган конструкция элементлари хилма-хил бўлиб, анча мураккаб тузилган. Уларнинг элементлари геометрик ўлчами ва шаклига кўра қуйидаги гуруҳларга ажратилади: брус, пластинка ёки плита, қобик, массив жисм ва рамалар.

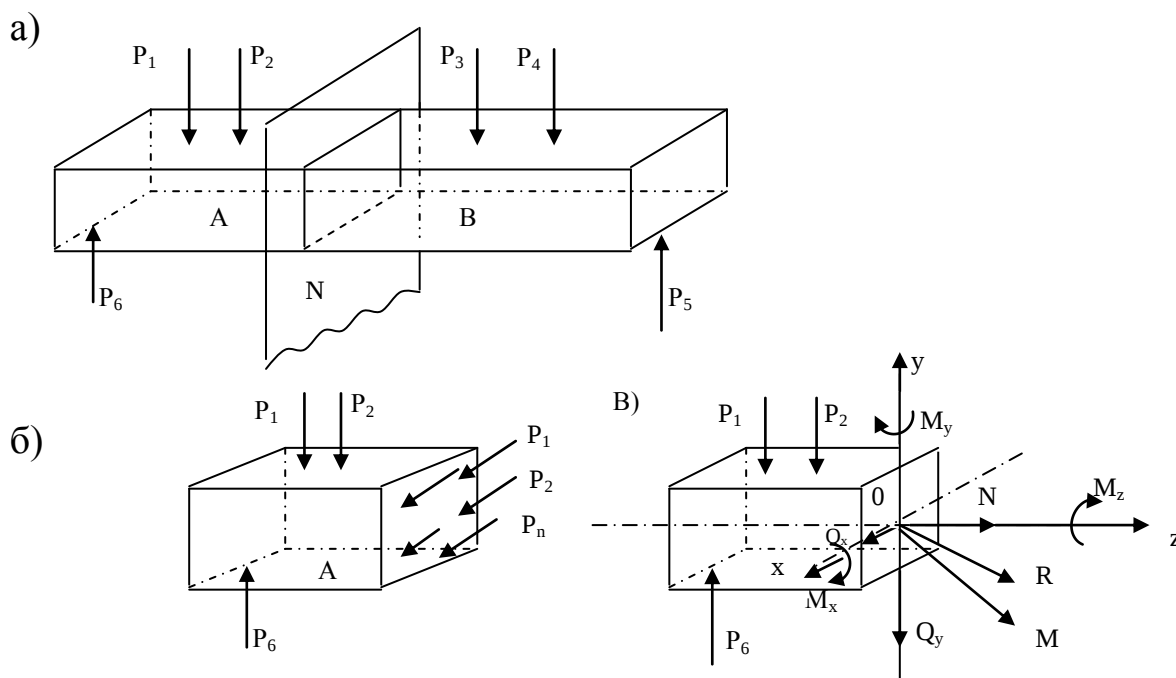
- кўндаланг кесим ўлчамлари узунлик ўлчамига нисбатан жуда кичик бўлган жисмлар — брус;
- агар брус чўзилиш ёки сиқилишга қаршилик кўрсатса — стержен буралишга қаршилик кўрсатса — вал, эгилишга қаршилик кўрсатса — балка;
- бир қанча брусларнинг ўзаро бикр қилиб туташтирилиши натижасида ҳосил бўлган тузилмага рама;
- қалинлигига нисбатан қолган иккита ўлчами катта бўлган ва текис параллел сиртлар билан ўралган жисмга пластинка ёки плита;
- қалинлигига нисбатан қолган иккита ўлчамлари катта бўлган ва эгри сиртлар билан чегараланган жисмга қобик;
- уч ўлчами ҳам бир хил тартибда бўлган жисм массив жисм дейилади.

1.3 Ташқи ва ички кучлар. Кесиш усули

Конструкция элементларига таъсир этувчи ташқи кучлар, асосан сиртқи ва ҳажмий кучларга бўлинади. Жисмга қўшни иккинчи жисмдан ўтадиган кучлар *сиртқи кучлар* дейилади. Жисмнинг барча ички нуқталарига таъсир қилувчи кучлар *ҳажмий кучлар* дейилади. Бунга ҳаракатланаётган жисмда ҳосил бўладиган *инерция кучи* мисол бўлади.

Ташқи кучлар бир нуқтага қўйилган (тўпланган) ёки текис тақсимланган бўлади. Кучлар бундан ташқари статик ва динамик кучларга бўлинади.

Ташқи кучлар таъсирида брус деформацияланади ва унинг кўндаланг кесимларида ички кучлар (кесилган бўлак заррачаларининг ўзаро таъсир кучлари) ҳосил бўлади. Заррачалар мувозанатини сақловчи реакция кучлари ички кучлар ёки *зўриқиш кучлари* дейилади. Брус кесимларида ҳосил бўладиган зўриқиш кучларининг тенг таъсир этувчисини топиш учун кесиш методидан фойдаланилади(1.1-расм).



1.1-расм

Масалан, брусга қўйилган P_1, P_2, P_3, P_4 кучлар системаси таъсиридан унинг таянчларида P_5, P_6 реакция кучлари ҳосил бўлсин (таянч чизмада кўрсатилмаган).

Бруснинг бирор кесимидаги ички кучларни аниқлаш учун қуйидаги ишлар кетма-кет бажарилиши лозим:

1) Бруснинг бирор нуқтасидаги зўриқиш кучини аниқлаш учун, брус шу нуқтадан ўтувчи текислик билан фикран кесилиб, иккита – А ва В қисмларга ажратилади;

2) ажратилган қисмларнинг бири, масалан, ўнг томони ташлаб юборилиб, чап томони қолдирилади. Бунда қолган қисмнинг мувозанати бузилади;

3) ташланган қисмнинг қолган қисмга илғари кўрсатган таъсири $P_1, P_2 \dots P_n$ кучлар билан алмаштирилади, бу кучлар кесим юзаси бўйича ихтиёрий тақсимланиб, яъни улар кесимнинг ҳар бир нуқтасига қўйилган бўлиши керак. Бу билан бруснинг қолдирилган қисми мувозанати тикланади;

4) қолдирилган чап қисмининг мувозанат шарти ёзилади. Улар статиканинг мувозанат тенгламасидан иборат:

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 & \sum M_x &= 0 \\ \sum Y &= 0 & \sum M_y &= 0 \\ \sum Z &= 0 & \sum M_z &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Агар бруснинг қолдирилган қисмига таъсир қилган кучлар бир текисликда бўлса, юқоридаги мувозанат тенгламаларидан уchtаси қолади:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0; \quad (1.2)$$

Номаълум ички кучларнинг сони ниҳоятда кўп бўлгани сабабли уларни (1.1) ёки (1.2) тенгламалар воситасида топиб бўлмайди. Шу сабабли, ташқи кучлар таъсиридан брусда ҳосил бўладиган деформацияни текширишга тўғри келади. Деформацияга қараб, бруснинг кўндаланг кесим юзасида ички кучларнинг тақсимланиш қонунини билиб, шундан сўнг брусга қўйилган кучларни бир бош вектор $\bar{R}$ ва бир бош момент $\bar{M}$ га келтириб, масала (1.1) ёки (1.2) тенгламалар ёрдамида ечилади.

Шундай қилиб, ички кучларни тўла-тўқис аниқлаш учун масаланинг қуйидаги томонларига эътибор бериш керак:

а) статик томони, яъни бруснинг текширилаётган қисми учун мувозанат тенгламалари тузилади;

б) геометрик томони, яъни бруснинг деформацияси текширилади;

в) физик томони, яъни брус деформацияси бўйича ички кучларнинг тақсимланиш қонуни аниқланади.

Юқорида баён этилган ишлар бажарилгандан сўнг зўриқиш кучларини аниқлаш мумкин.

Бруснинг кўндаланг кесимида қандай ички куч факторлари ҳосил бўлишини билиш учун бош вектор ва бош моменти координата ўқларига нисбатан проекцияларини олинади. Бу ҳолда учта куч ва учта момент ҳосил бўлади. Булар: N_x – бўйлама куч, Q_x , Q_y – кўндаланг кучлар, M_x , M_y – эгувчи моментлар, M_z – буровчи момент дейилади(1.1.в- расм).

1.4 Кучланишларни аниқлаш

Ички кучларни кесим юзасига текис тақсимланган ва бу юзанинг ҳар бир нуктасига қўйилган деб фараз қилайлик. Бирор кесимнинг маълум нуктасидаги ички куч интенсивлигининг миқдорини аниқлаш учун кучланиш тушунчаси киритилади.

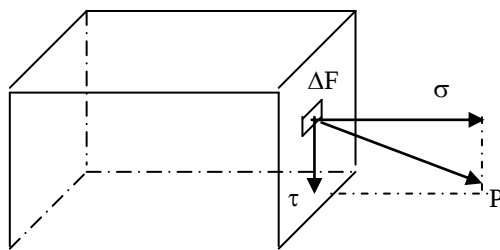
Кесимнинг бирор нуктаси атрофида олинган ΔF элементар юзачага таъсир этаётган ички кучларнинг тенг таъсир этувчиси ΔR бўлсин. Бу ички кучнинг элементар юзачага нисбати ўртача кучланиш дейилиб, қуйидагича ифодаланилади:

$$P_{\text{ўр}} = \Delta R / \Delta F, \quad (1.3)$$

ҳақиқий кучланиш қуйидагича аниқланади:

$$P = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta F}, \quad (1.4)$$

Демак, кучланиш кесим юзаси бирлигига тўғри келган ички кучдир. Унинг ўлчов бирлиги Па, МПа.

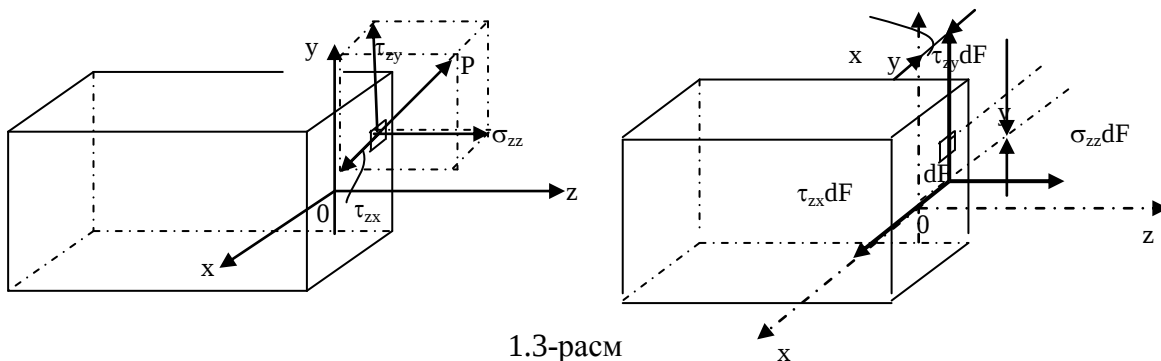


1.2-расм

Кесимнинг бирор нуқтасига таъсир этаётган P кучланиш кесим юзасига перпендикуляр ва параллел йўналган иккита ташкил этувчига ажратилади (1.2-расм). Бу ташкил этувчилар: σ – нормал кучланиш, τ — уринма кучланиш дейилади. Бу кучланишлар орасида қуйидагича муносабат ўринли бўлади:

$$P = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \quad (1.5)$$

Баъзи ҳолларда P векторни учта координата ўқларига параллел ташкил этувчиларга ажратиш қулай бўлади. Масалан, булар σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} .



1.3-расм

Энди бруснинг кўндаланг кесимдаги куч факторлари билан кучланишлар орасидаги муносабатлар тузилади: σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} кучланишларни ΔF элементар юзачага кўпайтириб, элементар ички кучлар аниқланади:

$$dN_z = \sigma_z \cdot dF ; \quad dQ_y = \tau_{zy} \cdot dF ; \quad dQ_x = \tau_{zx} \cdot dF .$$

Бу элементар ички кучларни брус кўндаланг кесим юзаси бўйича

йиғиб, бош векторнинг ташкил этувчилари учун қуйидаги ифодалар ҳосил қилинади:

$$N_z = \int_F \sigma_z dF ; \quad Q_y = \int_F \tau_{zy} dF ; \quad Q_x = \int_F \tau_{zx} dF$$

Худди шунингдек, ҳар қандай элементар ички кучни тегишли ўқкача бўлган масофага кўпайтириб, уларнинг элементар моментлари аниқланади. Бу элементар моментларни кўндаланг кесим юзи бўйича йиғиб, бош момент ташкил этувчилари аниқланади:

$$M_x = \int_F \sigma_z y dF ; \quad M_y = \int_F \sigma_z x dF ; \quad M_z = \int_F (y \tau_{zx} + x \tau_{zy}) dF$$

Бу формулалар ёрдамида ички куч факторлари маълум бўлганда кучланишларни аниқлаш мумкин.

1.5 Асосий чекланишлар

Деформацияланувчи жисм модели асосида конструкция элементларининг ҳисоблаш ишларини қулайлаштириш учун қуйидаги чекланишлар қабул қилинади:

- жисм материали яхлит (ғоваксиз) деб ҳисобланади; Бу чекланиш реал материаллар учун математик анализнинг узлуксиз функция формулаларидан фойдаланишга асос бўлади;
- жисм материали бир жинсли ва изотроп деб олинади, яъни материал ҳар бир нуқтасида турли томонга қараб бир хил хусусиятга эга деб ҳисобланади;
- жисм юкланишдан олдин унда бошланғич зўриқиш кучлари бўлмайдиган деб фарз қилинади;
- кучлар таъсирининг мустақиллилик принципи; Бу принципга кўра кучлар системаси таъсирининг натижасида бу кучларни кетма-кет ёки тартибсиз қўйилишидан ҳосил бўладиган таъсирлар натижаси тенг деб фарз қилинади;
- Сен-Венан принципи – жисмга қўйилган кучнинг таъсир нуқтасидан етарлича узоқда жойлашган нуқталарда ҳосил бўладиган ички кучлар характери ташқи кучнинг таъсир характерига боғлиқ эмас.

Назорат саволлари

1. Материаллар қаршилиги фани нимани ўргатади?
2. Материаллар қаршилиги ва Назарий механика фанларининг ўхшашлиги ва фарқи нимадан иборат?

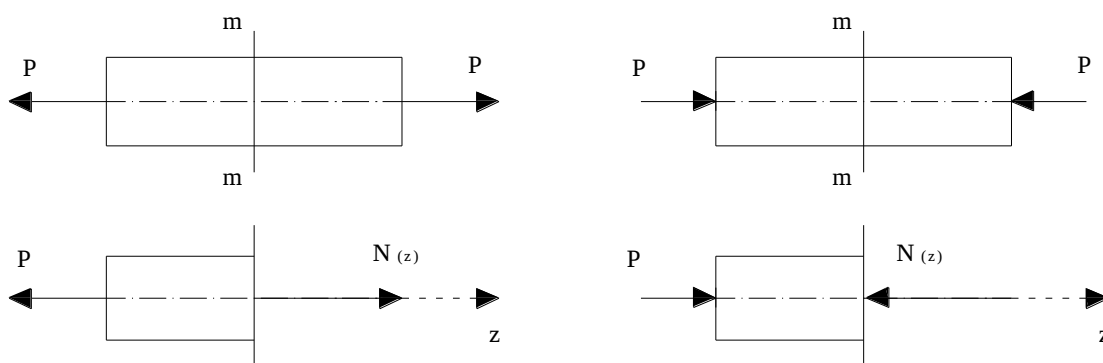
3. Қандай деформация эластик (пластик) деформация деб аталади?
4. Конструкция элементлари деганда нимани тушунаси?
5. Кесимнинг маълум нуқтасидаги кучланиш қандай ҳисобланади?
6. Кесиш методи нимадан иборат?
7. Қандай чекланишларни биласиз? Мазмунини изоҳланг.
8. Қандай юклар статик юклар деб аталади?
9. Ташқи кучлар қандай гуруҳларга ажратилади?
10. Материаллар қаршилиги фани ривожига ҳисса қўшган таниқли олимлардан кимларни биласиз?

2. Брусларни чўзилиш ва сиқилишга ҳисоблаш

Бирор ўлчами қолган икки ўлчамадан анча катта геометрик жисм брус деб айталади. Бруслар бўйлама ўқ бўйлаб йўналган ташқи кучлар таъсирида деформацияланиб чўзилади ёки сиқилади. Умуман, чўзилиш ёки сиқилишга ишлайдиган бруслар стерженлар ҳам дейилади. Брус чўзилганда (сиқилганда) унинг кўндаланг кесим юзасида ички куч — бўйлама куч $N(z)$ пайдо бўлади.

2.1. Чўзилиш ва сиқилишда кесиш усули

Бўйлама кучни аниқлаш учун кесиш усулидан фойдаланилади. Бунинг учун брусни ихтиёрий кўндаланг кесимда фикран кесиб, икки бўлакка ажратилади, бу бўлақлардан бирини ташлаб юбориб, қолган иккинчи бўлакка таъсирни ички куч $N(z)$ билан алмаштирилади ва шу қолган бўлакка таъсир қилаётган кучлар мувозанатланади (2.1-расм).



2.1-расм

Кесиш усулини қуйидагича эслаб қолиш фойдали:

1) қирқилади; 2) ташлаб юборилади; 3) алмаштирилади; 4) мувозанатланади. Бунда бўйлама ўқ z ва ички куч $N(z)$ векторини кўрилатган кесимдан ташқари томонга йўналтирилади, шунинг учун

кўрилатган бўлак мувозанат шартидан ички куч $N(z)$ аниқланади. Бўйлама куч чўзилишда мусбат, сиқилишда манфий олинади.

Брусга бир қанча ташқи кучлар P_i , бўйлама ўқ бўйлаб текис тарқалган юклар q_i таъсир қилганда ва брус бир қанча кўндаланг кесими ҳар хил бўлаклардан иборат бўлса, ички куч $N(z)$, бу бўлакларда турлича, шунинг учун бундай поғонали брусни участкаларга ажратиб ўрганилади. Участкаларнинг чегаралари сифатида ташқи кучлар P_i қўйилган, текис тарқалган юклар q_i бошланган ва тугаган кесимлар ҳамда брус кўндаланг кесим юзалари ўзгарган кесимлар олинади. Ҳосил бўлган участкаларнинг ҳар бирида ички куч $N_i(z)$ ни аниқлаш учун фикран кесиш бажарилади. Маълумки, кучнинг кўндаланг кесим юзасига нисбати кучланишни беради: $\sigma_i(z) = N_i(z) / F_i$.

2.2 Ички куч ва кучланишлар эпюраси

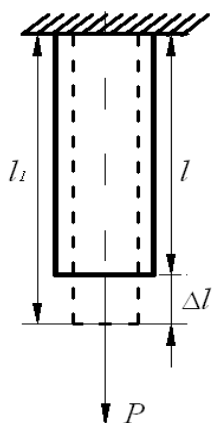
Ички куч $N_i(z)$ ва кучланиш $\sigma_i(z)$ ларнинг брус бўйлама ўқи бўйлаб ўзгаришини кўрсатадиган графиклар эпюралар дейилади. Эпюра қуриш учун брус бўйлама ўқига параллел ўқ ўтказиб, шу ўқнинг брус кесимларига мос нуқталарига шу кесимлардаги ички куч ёки кучланиш қийматини маълум масштаб билан бўйлама ўққа перпендикуляр йўналишда қўйиб чиқилади, бунда мусбат ва манфий қийматлар ўқнинг қарама-қарши томонларига қўйилади ва «плюс» ёки «минус» ишоралари эпюра ичида кўрсатилади. Эпюра брус ўқига перпендикуляр штрихланади, ҳар бир штрих узунлиги берилган (танланган) масштабда шу нуқтага мос кўндаланг кесимдаги ички куч ёки кучланиш катталигини беради. Бир нуқтага қўйилган P_i кучлар таъсир қилаётган кесимларда эпюрада шу кучлар қийматига мос «сакрашлар» тўғри келади.

2.3. Абсолют ва нисбий деформациялар. Гук қонуни

Стерженнинг деформациягача бўлган узунлиги l билан, деформациядан кейинги узунлиги l_1 билан белгиланади (2.2-расм). Стержен узунлигининг ортиши мутлақ (абсолют) чўзилиш, камайиши эса мутлақ қисқариш деб аталади. Умуман олганда, уларнинг ҳар иккаласи абсолют деформация дейилади.

Абсолют деформациянинг қиймати қуйидагича аниқланади: $\Delta l = l_1 - l$. Абсолют деформациянинг стерженнинг узунлигига нисбати нисбий бўйлама деформация дейилади ва ε билан белгиланади. $\varepsilon = \Delta l / l$ – исмсиз (ўлчов бирлигисиз) сон. Инглиз физиги Роберт Гук (1635-

1705) томонидан 1660 йили тажрибалар асосида қуйидаги муносабат $\Delta l = P \cdot l / E \cdot F$ аниқланган бўлиб, Гук қонуни деб юритилади.



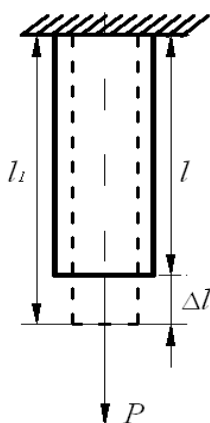
2.2-расм

Яъни, эластиклик чегарасида абсолют деформация (чўзилиш ёки қисқариш) бўйлама (чўзувчи ёки сиқувчи) кучга тўғри пропорционал ва стерженнинг бикрлигига тескари пропорционал бўлади. C - стерженнинг чўзилиш ёки сиқилишдаги бикрлиги: $C = EF / l$. Агар Гук қонунига кучланиш ва нисбий деформациялар киритилса, қуйидаги формула олинади: $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Бу формула Гук қонунининг иккинчи кўриниши бўлиб, у амалда жуда кўп ишлатилади ва қуйидагича таърифланади: чўзилган (сиқилган) стерженларда нормал кучланиш нисбий чўзилишга (қисқаришга) тўғри пропорционал.

2.4 Масалалар ечиш

Кесиш усулидан фойдаланиб, брус (стержен) кесимларидаги ички куч, кучланиш ва бруснинг абсолют деформацияси қуйидаги мисолларда топилади.

1-масала. Бир учи маҳкамланган пўлат бруснинг узунлиги 4 м, кўндаланг кесим юзаси 100 см^2 бўлиб, иккинчи учига 10 кН куч қўйилган (2.3-расм). Брус кесимларидаги ички куч, кучланиш ва бруснинг абсолют деформацияси топилсин. Берилган: $E = 2 \times 10^8 \text{ кН/м}^2$, $P = 10 \text{ кН}$, $F = 100 \text{ см}^2$, $l = 4 \text{ м}$; Аниқлансин: N , σ , Δl - ?



2.3-расм

Ечиш: ҳар хил ўлчов бирликларида берилган катта-ликлар ўлчов бирликларини бир хил тизим (система)га келтириб олиш керак. $F = 10^{-2} \text{ м}^2$

$$E = 2 \times 10^6 \text{ кГ/см}^2 = 2 \times 10^8 \text{ кН/м}^2 = 2 \times 10^4 \text{ кГ/мм}^2;$$

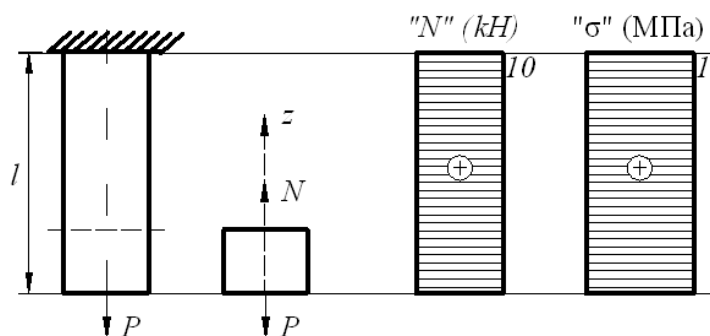
Ички куч N ни аниқлаш учун кесиш усулидан фойдаланиб, қуйидаги мувозанат тенгламаси ҳосил қилинади: $N - P = 0$; бу тенгламадан $N = P = 10 \text{ кН}$.

Маълумки, кучланиш $\sigma = N/F = 10 \text{ кН} : 10^{-2} \text{ м}^2 = 1 \text{ МПа}$ Булардан фойдаланиб, N ва σ учун эпюралар қурилади (2.4-расм). Бруснинг абсолют деформа-

цияси (чўзилиши) Гук қонунидан аниқланади:

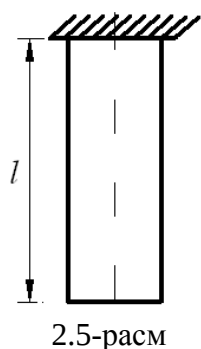
$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F} = \frac{10 \text{ кН} \cdot 4 \text{ м}}{2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм} = 0,02 \text{ мм}.$$

Демак, бруснинг куч қўйилган учи 0,02 мм пастга кўчди.



2.4-расм

2-масала. Бир учи маҳкамланган пўлат бруснинг узунлиги 4 м, кўндаланг кесим юзаси 100 см^2 (2.5-расм). Шу бруснинг ўз оғирлиги ҳисобига кесимларида ҳосил бўладиган ички куч, кучланиш ва абсолют деформацияси аниқлансин. Берилган: $E = 2 \times 10^8 \text{ кН/м}^2$, $l = 4 \text{ м}$; $F = 10^{-2} \text{ м}^2$, $\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$. Аниқлансин: N , σ , Δl ?



2.5-расм

Ечиш:

Маълумки, бруснинг оғирлиги бутун ҳажм бўйлаб тарқалган, солиштирма оғирлик қиймати кўндаланг кесим юзасига кўпайтирилса, брус оғирлиги бўйлама ўқ бўйлаб текис тарқалган юкка келтириб олинади:

$$q = \gamma \cdot F = 78 \cdot 10^{-2} = 0,78 \text{ кН / м}.$$

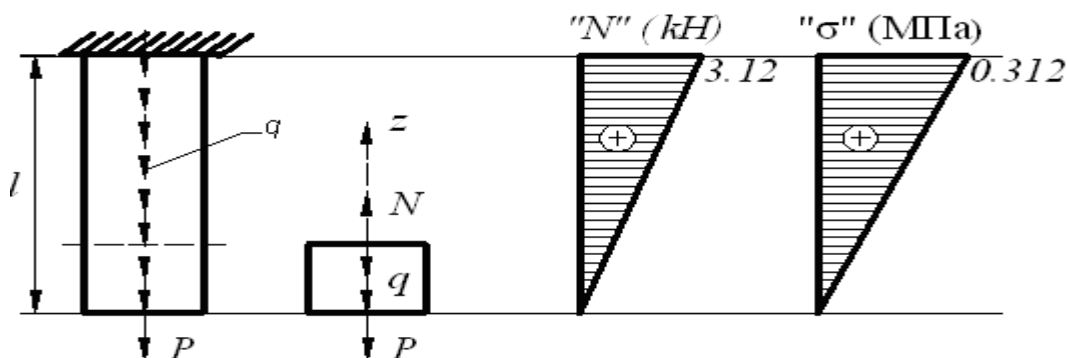
Ички кучни аниқлаш учун кесиш усулидан фойдаланилади: $N - q \cdot z = 0$; $0 \leq z \leq l$; $N(z) = 0,78 \cdot z$;

$$z = 0; N(0) = 0; z = l; N(4) = 0,78 \cdot 4 = 3,12 \text{ кН}.$$

Бруснинг кесимларидаги кучланишлар ҳисобланади:

$$\sigma(z) = N(z) / F = 78 \cdot z; \sigma(0) = 0; \sigma(4) = 78 \cdot 4 = 312 \text{ кН / м}^2 = 0,312 \text{ МПа}.$$

Бу қийматлардан фойдаланиб, N, σ эпюралари қурилади (2.6-расм).

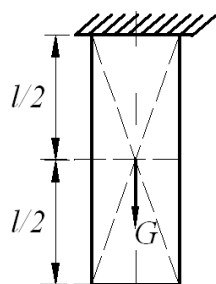


2.6-расм

Бруснинг ўз оғирлиги ҳисобига чўзилишини $N(z)/E$ - ни бутун брус узунлиги бўйлаб интеграллаб ҳисобланади:

$$\Delta \ell = \int_0^{\ell} \frac{N(z)}{E \cdot F} dz = \int_0^{\ell} \frac{q \cdot z}{E \cdot F} dz = \frac{q \ell^2}{2 E F} = \frac{0,78 \cdot 4^2}{4 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2}} = 3,12 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,00312 \text{ мм}.$$

Умуман, бруснинг ўз оғирлиги таъсирида чўзилишини (сиқилишини) ҳисоблаш учун брус оғирлигини ҳисоблаб, уни бруснинг оғирлик марказига қўйиб, шу марказ ётган кўндаланг кесимга таъсир қилаётган ташқи куч сифатида қараб, бруснинг абсолют деформациясини аниқлаш ҳам мумкин:



2.7-расм

$$G = \gamma F l = 78 \cdot 0,01 \cdot 4 = 3,12 \text{ кН}; \quad l = 4 \text{ м}; \quad F = 0,01 \text{ м}^2$$

$$\Delta \ell = \frac{G \cdot \ell}{2 \cdot E \cdot F} = \frac{3,12 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 10^{-2}} = 3,12 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,00312 \text{ мм},$$

3-масала. Поғонали стерженларга оид мисол кўрамыз.

Берилган: $P_1 = 10 \text{ кН}$,

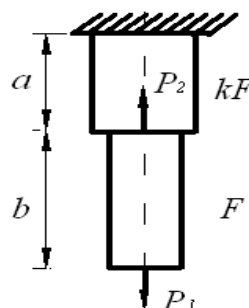
$$P = 15 \text{ кН},$$

$$F = 100 \text{ см}^2,$$

$$\kappa = 1,2,$$

$$a = 2 \text{ м}, \quad b = 3 \text{ м},$$

$$E = 2 \times 10^8 \text{ кН/м}^2.$$



2.8-расм

Аниқлансин: N , σ -?

Ечиш:

1.8-чизмадан кўриниб турибдики, стержен икки поғонадан иборат, шунинг учун стержен икки участкага ажратиб кўрилади.

I участка: z_1 0 дан b гача ўзгаради.

$$(0 \leq z_1 \leq b); \quad N_1 - P_1 = 0; \quad N_1 = P_1 = 10 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F} = \frac{10 \text{ кН}}{0,01 \text{ м}^2} = 1000 \text{ кН/м}^2 = 1 \text{ МПа}.$$

II участка: z_2 b дан $a+b$ гача ўзгаради.

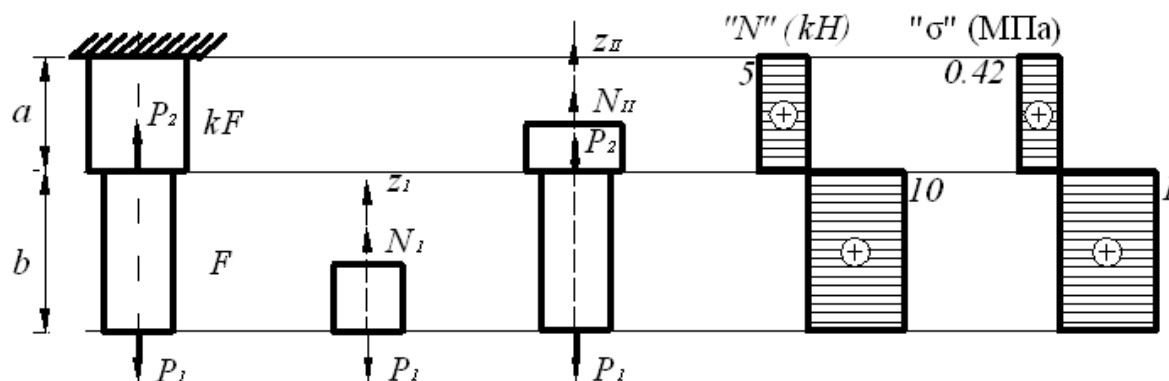
$$(b \leq z_2 \leq a+b); \quad N_{II} + P_2 - P_1 = 0; \quad N_{II} = P_1 - P_2 = -5 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_{II}}{kF} = \frac{-5 \text{ кН}}{1,2 \cdot 0,01 \text{ м}^2} = 4,17 \cdot 10^{-2} \text{ кН/м}^2 = -0,42 \text{ МПа}.$$

Топилган N_i ва σ_i қийматларидан фойдаланиб, стержен участкаларида эпюралар қурилади (2.9-расм).

Ҳар бир участка учун Гук қонунидан фойдаланиб, абсолют деформация топилади:

$$\Delta l_I = \frac{N_I b}{EF} = \frac{10 \cdot 3}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,01} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ см} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ мм} = 0,015 \text{ мм},$$



2.9-расм

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II} a}{EkF} = -\frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 10^8 \cdot 1,2 \cdot 0,01} = -4,17 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -4,2 \cdot 10^{-3} \text{ мм} = -0,0042 \text{ мм},$$

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} = 0,015 \text{ мм} - 0,0042 \text{ мм} = 0,0108 \text{ мм}.$$

3-мисолда Δl ни кучлар таъсирини қўшишнинг суперпозиция усулидан фойдаланиб ҳисобласа ҳам бўлади. Бу усул, айниқса, статик ноаниқ мисолларда қўл келади.

$$\Delta l_{P1} = \frac{P_I b}{EF} + \frac{P_I a}{EkF} = \frac{P_I}{EF} \left(b + \frac{a}{k} \right) = \frac{10}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,01} = \left(3 + \frac{2}{1,2} \right) = 23,3 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,233 \cdot 10^{-2} \text{ см} = 0,0233 \text{ мм},$$

$$\Delta l_{P2} = \frac{P_2 a}{EkF} = -\frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 10^8 \cdot 1,2 \cdot 0,01} = -12,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -0,125 \cdot 10^{-2} \text{ см} = 0,0125 \text{ мм},$$

$$\Delta l = \Delta l_{P1} + \Delta l_{P2} = 0,0233 - 0,0125 = 0,0108 \text{ мм}.$$

2.5 Чўзилиш ва сиқилишда брусни мустаҳкамликка ҳисоблаш

Стерженнинг ташқи кучлар таъсирида бузилмай ишлашини таъминлаш учун стержен кесимларида ҳосил бўладиган ички кучланиш катталиги стержен материалига мос рухсат этилган кучланиш қийматига таққосланади:

$$\sigma = N/F, \quad \sigma \leq [\sigma];$$

бунда, $[\sigma]$ – рухсат этилган кучланиш бўлиб, ҳар хил материаллар учун тажрибадан аниқланади.

Мустаҳкамликка ҳисоблаш шартидан қуйидаги масалалар келиб чиқади:

1. Кўндаланг кесим юзасини танлаш: $F \geq N / [\sigma]$.
2. Мустаҳкамликка текшириш: $\sigma = N/F \leq [\sigma]$.
3. Ташқи кучни танлаш: $N \leq [\sigma] \cdot F$.

4-масала. Пўлат стержен бўйлама ўқи бўйлаб 10 кН юк осилган, 3-нав пўлат учун рухсат этилган кучланиш $[\sigma]=1600\text{кг/см}^2$ бўлса, стержен кўндаланг кесим юзасини топинг.

Ечиш:

Кучланиш бирлигини СИ тизим (система)сига келтириб олиш мумкин.

$$[\sigma] = 1600\text{кг/см}^2 = 1.6 \cdot 10^5\text{кг/м}^2 = 160\text{Мпа}.$$

Мустаҳкамликка ҳисоблаш шартидан фойдаланиб, кўндаланг кесим юзаси танланади:

$$\sigma \leq [\sigma] \rightarrow \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad F \geq \frac{N}{[\sigma]} = \frac{10\text{кН}}{1.6 \cdot 10^5\text{кг/м}^2} = 0.625 \cdot 10^{-4}\text{м}^2 = 0.625\text{см}^2.$$

Стержен кўндаланг кесим юзаси учун топилган қиймат яхлитланади:

$$F = 0.7\text{см}^2.$$

5-масала. Трос 7.5 т куч билан чўзилган. У 2 мм диаметрли симлар (тола)дан иборат. Трос учун рухсат этилган кучланиш толаларининг ўрилганини ҳисобига $[\sigma] = 3000\text{кг/см}^2$. Тросдаги толалар сони n ни аниқланг.

Ечиш:

$$F_{\text{тола}} = \pi \times r^2 = 3.14 \times 1\text{мм}^2 = 3.14\text{мм}^2;$$

$$F_{\text{трос}} = n \times F_{\text{тола}} = 3.14 \times n\text{мм}^2 = 3.14 \times 10^{-2} \times n\text{см}^2;$$

$$F \geq N / [\sigma] = 7500\text{кг} / 3000\text{кг/см}^2 = 2.5\text{см}^2;$$

$$3.14 \times 10^{-2} \times n\text{см}^2 \geq 2.5\text{см}^2;$$

$$n \geq \frac{2.5}{3.14 \cdot 10^{-2}} = \frac{250}{3.14} = 79.58$$

Толалар сони бутун бўлиши керак, у ҳолда 79,58 дан катта ва унга энг яқин бутун сон 80. Демак, толалар 80 та бўлиши керак.

6-масала. Бир учидан осилган ўзгармас кўндаланг кесимли пўлат стержен қандай узунликда ўз оғирлиги таъсирида узилади? Пўлат учун мустаҳкамлик чегараси $\sigma_{\text{мч}}=50\text{кг/мм}^2$ олинсин.

Ечиш:

$$\sigma_{\text{мч}} = 50\text{кг/мм}^2 = 5000\text{кг/см}^2 = 5 \times 10^4\text{Н} \times 10^{-4}/\text{м}^2 = 500\text{Мпа}.$$

Стерженнинг маҳкамланган (осилган) кесимидаги ички куч ва кучланиш топилади:

$$N = G = \gamma F \cdot l, \quad \sigma = N/F = \gamma.$$

Стержен узилиши учун ундаги кучланиш мустаҳкамлик чегарасига тенг бўлиши керак:

$$\sigma = \sigma_{мч} \rightarrow 78 \text{ кН/м}^3 \cdot l = 500 \times 10^3 \text{ кН/м}^2.$$

Бу шартдан стержен узунлиги аниқланади:

$$l = \frac{5 \cdot 10^5}{78} = 6410 \text{ м} = 6,41 \text{ км}$$

Бундан кўриниб турибдики, ўзгармас кўндаланг кесимли стерженнинг ўз оғирлигидан узилиши унинг кўндаланг кесимига боғлиқ эмас.

7-масала. Думалоқ кўндаланг кесимли пўлат стержень 10 т куч билан чўзилган. Агар нисбий чўзилиш $\frac{1}{2000}$ дан ошиб кетмаслиги керак бўлса, стерженнинг мумкин бўлган энг кичик диаметрини топинг. Пўлат учун $[\sigma] = 1200 \text{ кг/см}^2$ олинсин.

Ечиш:

А) мустаҳкамликка ҳисоблаш. Бунинг учун кўндаланг кесим юзасини танлаш шартидан фойдаланади:

$$\frac{\pi}{4} d^2 \geq N [\sigma], \quad d \geq \sqrt{\frac{4N}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 1200}} = \sqrt{10 \cdot 61} = 3,257 \text{ см}$$

Б) бу масалада стерженни мустаҳкамликдан ташқари бикрликка ҳам ҳисоблаш керак, бунда берилган рухсат этилган нисбий чўзилиш қиймати $[\varepsilon] = \frac{1}{2000} = 0,5 \cdot 10^{-3}$ ҳисобга олиниши керак:

$$\Delta l \leq [\Delta l] \text{ ёки } \varepsilon \leq [\varepsilon];$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} \rightarrow \frac{l}{F} \leq \frac{E}{N} [\Delta l]; \quad \varepsilon = \frac{N}{EF} \rightarrow F \geq \frac{N}{E} [\varepsilon]^{-1} = \frac{N}{E[\varepsilon]}.$$

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2000} = 0,5 \cdot 10^{-3}; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad N = 10 \text{ т} = 10000 \text{ кг}.$$

$$F \geq \frac{1 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^6} 2,0 \cdot 10^3 = 10 \text{ см}^2; \quad F = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2 = 10; \quad d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot 10}{3,14}} = 3,57 \text{ см}.$$

Демак, бикрликни таъминлайдиган диаметр мустаҳкамликни таъминлайдиган диаметрдан катта, шунинг учун $d \geq 3,57 > 3,257$. Бундан мумкин бўлган энг кичик диаметр $d=3,57 \text{ см}$ келиб чиқади.

8-масала. Кўндаланг кесими 15 см х 20 см бўлган ёғоч устунга қўйиш мумкин бўлган юкни аниқланг. Ёғоч учун сиқилишда рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 40 \text{ кг/см}^2$ олинсин.

Ечиш:

Устуннинг кўндаланг кесим юзаси ҳисобланади:

$$F = 15 \text{ см} \times 20 \text{ см} = 300 \text{ см}^2.$$

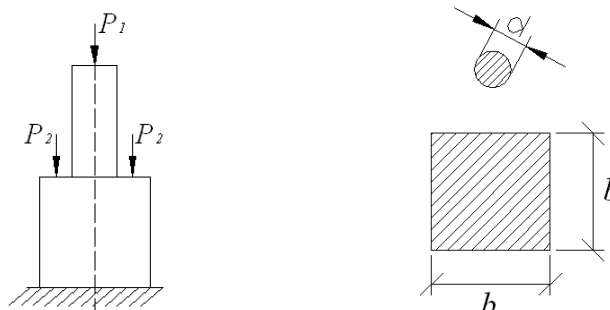
Қўйиш мумкин бўлган юк аниқланади:

$N \leq [\sigma] \times F = 40 \times 300 = 12000 \text{ кг} = 12 \text{ т}$. Демак, $N = 12 \text{ т}$.

9-масала. Чўян колонна мустаҳкамлигини текширинг. Чўян учун сиқилишда мустаҳкамлик чегараси $\sigma_{\text{мчс}} = 600 \text{ Н/мм}^2$, захира коэффиценти $[n] = 5$ олинсин (2.10-расм).

Берилган: $P_1 = 900 \text{ кН}$,
 $P_2 = 1500 \text{ кН}$,
 $d = 100 \text{ мм}$,
 $b = 200 \text{ мм}$,

Аниқлансин: N , σ -?



2.10-расм

Ечиш:

Чўян учун сиқилишда рухсат этилган кучланиш топилади:

$$[\sigma]_c = \sigma_{\text{мчс}} / [n] = 120 \text{ Н/мм}^2.$$

Ҳар бир участкадаги ички куч ва кучланишлар аниқланади:

$$F_I = \pi \times r^2 = 3,14 \times 2500 = 7854 \text{ мм}^2; N_I = -900 \text{ кН};$$

$$\sigma_I = -0,115 \text{ кН/мм}^2 = -115 \text{ Н/мм}^2;$$

$$F_{II} = b^2 = 40000 \text{ мм}^2;$$

$$N_{II} = -900 - 300 = -3900 \text{ кН};$$

$$\sigma_{II} = -3900 / 40000 = 0,0975 \text{ кН/мм}^2 = -97 \text{ Н/мм}^2.$$

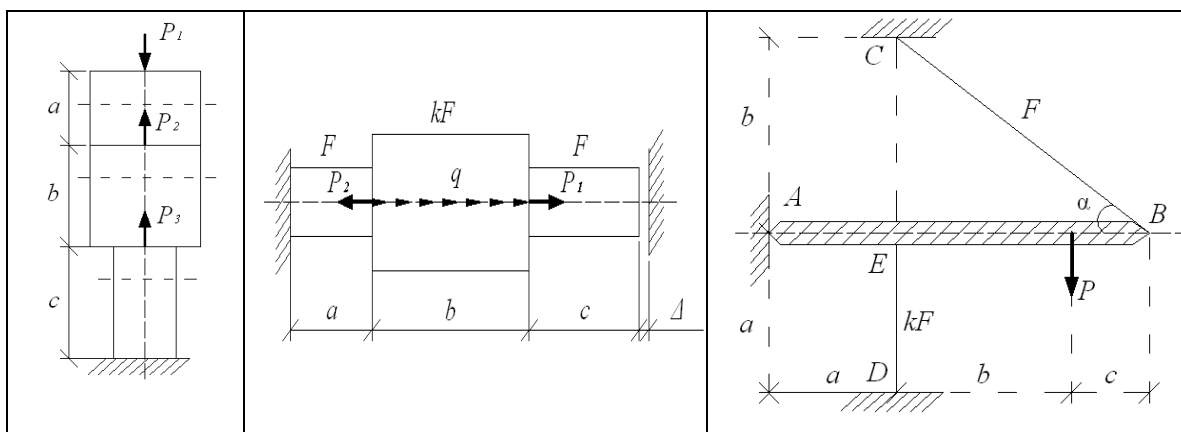
Ҳар бир участка учун топилган кучланишлар рухсат этилган кучланишдан кичик: $\sigma_I, \sigma_{II} < [\sigma]_c$.

Демак, чўян колоннанинг мустаҳкамлиги таъминланган.

2.6. Лойиҳа-ҳисоблаш иши бўйича мисоллар

1-лойиҳа-ҳисоблаш иши стерженларнинг чўзилиш ва сиқилишига доир бўлиб, ҳар бир талаба ўзига берилган шифр бўйича чизмалар ва сон қийматларини олади. Бу ЛХИ да учта масала берилган. Қуйида мисол тариқасида ЛХИ-1 учун бу сон қийматлар ва чизмалар баъзи ўзгартиришларини ҳисобга олмаганда 0 – чизма ва 25 – сон қийматлар вариантларига, яъни 025 – шифрга мос келади.

№	a	b	C	F	k	P ₁	P ₂	P ₃	P	q ₁	q ₂	Δ	Г
	м	м	м	см ²	-	кН	кН	кН	кН	кН/м	кН/м	мм	кН/м ³
25	1.4	1.6	2.0	30	1.8	0.5	1.0	0.4	100	5	15	0.02	78



2.11-расм

2.7 Статик аниқ поғонали стерженларга доир мисол

Бу 1-ЛХИ нинг 1-масаласига тегишли мисол бўлиб, унда 2.11-расмда берилган поғонали пўлат стержен учун қуйидаги шартлар бажарилиши сўралади:

1. Бўйлама куч N ва нормал кучланиш σ эпюралари стерженнинг ўз оғирлигини ҳисобга олиб қурилсин ($\gamma = 78 \text{ кН/м}^3$);
2. Берилган стерженнинг тўла деформацияси, ҳар бир чегара кесимларининг кўчишлари аниқлансин.

Ечиш:

Берилган поғонали стержен уч участкадан иборат, участкалар оғирлиги бўйлама ўқ бўйлаб текис тарқалган q_i юк ларга келтириб олинади. F_i — ҳар бир участканинг қўндаланг кесим юзаси, G_i — ҳар бир участканинг оғирлиги. 1-участкада z_1 0 дан $a = 1,4 \text{ м}$ гача ўзгаради, шу ораликда ихтиёрий I-I кесим ўтказилиб, стерженнинг кесимдан юқори қисмини мувозанат шартини тузиб ички куч $N_I(z_1)$ топилади:

I участка ($0 \leq z_1 \leq a$);

$$F_I = kF = 1,8 \times 0,3 \times 10^{-2} \text{ м}^2 = 0,54 \times 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$q_I = \gamma F_I = 78 \times 0,54 \times 10^{-2} = 0,4212 \text{ кН/м} \approx 0,42 \text{ кН/м};$$

$$G_I = q_I \times a = 0,4212 \times 1,4 = 0,58968 \approx 0,59 \text{ кН};$$

$$N_I(z_1) + P_1 + q_I z_1 = 0; \quad N_I(z_1) = -P_1 - q_I z_1 = -0,5 - 0,42 \times z_1;$$

$$z_1 = 0; \quad N_I(0) = -0,5 \text{ кН};$$

$$z_1 = a = 1,4 \text{ м}; \quad N_I(a) = -0,5 - 0,42 \times 1,4 = -0,5 - 0,59 = -1,09 \text{ кН}.$$

Ички кучни қўндаланг кесим юзасига бўлиб кучланиш топилади:

$$\sigma_I(z) = N_I(z)/F_I = -\frac{0,5}{0,54 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,42}{0,54 \cdot 10^{-2}} z = -92,6 - 78 z;$$

$$z_1 = 0; \quad \sigma_I(0) = -92,6 \text{ кН/м}^2; \quad z_1 = a = 1,4 \text{ м}; \quad \sigma_I(1,4 \text{ м}) = -201,8 \text{ кН/м}^2.$$

II участкада z_2 $a = 1.4$ м дан $a + b = 3$ м гача ўзгаради, шу ораликда ихтиёрий II-II кесим ўтказиб, стерженнинг кесимдан юқори қисмининг мувозанат шартини тузиб, ички куч $N_{II}(z_2)$ топилади:

II участка ($a \leq z_2 \leq a + b$);

$$F_{II} = kF = 0,54 \times 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$q_{II} = \gamma F_{II} = 0,42 \text{ кН/м};$$

$$G_{II} = q_{II} \times b = 0,42 \times 1,6 \approx 0,67 \text{ кН};$$

$$N_{II}(z_2) + P_1 + G_I - P_2 + q_{II} \times (z_2 - a) = 0;$$

$$N_{II}(z_2) = -P_1 - G_I + P_2 - q_{II} \times (z_2 - a) = -0,5 - 0,59 + 1,0 - 0,42(z_2 - 1,4) = -0,09 - 0,42(z_2 - a);$$

$$z_2 = a = 1.4 \text{ м}; N_{II}(1,4 \text{ м}) = -0,09 \text{ кН};$$

$$z_2 = a + b = 3 \text{ м}; N_{II}(3 \text{ м}) = -0,09 - 0,42 \times 1,6 = -0,09 - 0,672 = -0,762 \approx -0,76 \text{ кН}.$$

Ички кучни кўндаланг кесим юзасига бўлиб, кучланиш топилади:

$$\sigma_{II}(z_2) = N_{II}(z)/F_{II} = -\frac{0,09}{0,54 \cdot 10^{-2}} - \frac{0,42}{0,54 \cdot 10^{-2}}(z_2 - a) = -16,67 - 78(z_2 - a);$$

$$z_2 = a = 1.4 \text{ м}; \sigma_{II}(1,4 \text{ м}) = -16,67 \text{ кН/м}^2;$$

$$z_2 = a + b = 3 \text{ м}; \sigma_{II}(3 \text{ м}) = -16,67 - 78 \times 1,6 = -16,67 - 124,8 = -141,47 \text{ кН/м}^2.$$

III участкада z_3 $a + b = 3$ м дан $a + b + c = 5$ м гача ўзгаради, шу ораликда ихтиёрий III-III кесим ўтказиб, стерженнинг кесимдан юқори қисмининг мувозанат шартини тузиб, ички $N_{III}(z_3)$ куч топилади:

III участка ($a + b \leq z_3 \leq a + b + c$);

$$F_{III} = F = 0,3 \times 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$q_{III} = \gamma F_I = 78 \times 3 \times 10^{-3} = 0,234 \text{ кН/м};$$

$$G_{III} = q_{III} \times c = 0,234 \times 2,0 = 0,468 \text{ кН} \approx 0,47 \text{ кН};$$

$$N_{III}(z_3) + P_1 + G_I - P_2 + G_{II} - P_3 + q_{III} \times (z_3 - a - b) = 0;$$

$$N_{III}(z_3) = -P_1 - G_I + P_2 - G_{II} + P_3 - q_{III} \times (z_3 - a - b) = -0,36 - 0,234(z_3 - 3);$$

$$z_3 = a + b = 3 \text{ м}; N_{III}(3 \text{ м}) = -0,36 \text{ кН};$$

$$z_3 = a + b + c = 5 \text{ м}; N_{III}(5 \text{ м}) = -0,36 - 0,234 \times 2 = -0,828 \text{ кН} \approx -0,83 \text{ кН}.$$

Ички кучни кўндаланг кесим юзасига бўлиб, кучланиш топилади:

$$\sigma_{III}(z_3) = N_{III}(z_3)/F_{III} = -\frac{0,36}{0,003} - \frac{0,234}{0,003}(z_3 - 3) = -120 - 78(z_3 - 3)$$

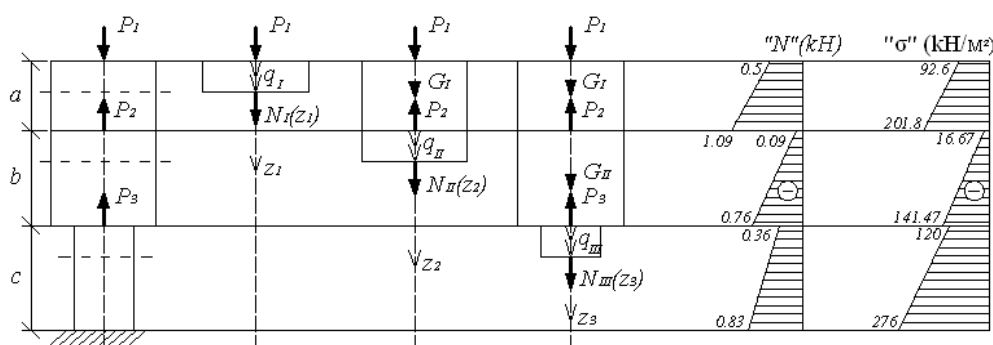
$$z_3 = a + b = 3 \text{ м}; \sigma_{III}(3 \text{ м}) = -120 \text{ кН/м}^2;$$

$$z_3 = a + b + c = 5 \text{ м}; \sigma_{III}(5 \text{ м}) = -120 - 78,2 = -276 \text{ кН/м}^2.$$

Топилган N_i ва σ_i қийматларидан фойдаланиб, стержен участкаларида эпюралар қурилади (2.12-расм).

Берилган стерженнинг тўла деформациясини ва ҳар бир чегара кесимларининг кўчишларини аниқлашга ўтилади.

I. Ҳар бир участка чегара кесимларининг кўчишларини шу участкадаги ички куч $N_i(z_i)$ ифодасини Гук қонунига қўйиб, участка чегаралари оралиғида интеграллаб топиш мумкин.



2.12-расм

$$\Delta \ell_I = \int_0^a \frac{N_I(z_1) dz_1}{E_I F_I} = \frac{1}{E_I F_I} \int_0^a (-P_1 - q_I z_I) dz_I = -\frac{P_1 a}{E F_I} - \frac{q_I a^2}{2 E F_I} = -\frac{P_1 a}{E F_I} - \frac{G_I a}{2 E F_I} = -1,03 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

$$\Delta \ell_{II} = \int_a^{a+b} \frac{N_{II}(z_2) dz_2}{E_{II} F_{II}} = \frac{1}{E_{II} F_{II}} \int_a^{a+b} [-P_{II} - q_{II} (z_2 - a)] dz_2 = -\frac{P_{II} b}{E_{II} F_{II}} - \frac{q_{II} b^2}{2 E_{II} F_{II}} =$$

$$= -\frac{P_{II} b}{E_{II} F_{II}} - \frac{G_{II} b}{2 E_{II} F_{II}} = -0,63 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -0,63 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Бу ерда $P_{II} = P_1 + G_I - P_2$.

$$\Delta \ell_{III} = \int_{a+b}^{a+b+c} \frac{N_{III}(z_3) dz_3}{E_{III} F_{III}} = \frac{1}{E_{III} F_{III}} \int_{a+b}^{a+b+c} [-P_{III} - q_{III} (z_3 - a - b)] dz_3 = -\frac{P_{III} c}{E_{III} F_{III}} - \frac{q_{III} c^2}{2 E_{III} F_{III}} =$$

$$= -\frac{P_{III} c}{E_{III} F_{III}} - \frac{G_{III} c}{2 E_{III} F_{III}} = -1,98 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -1,98 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Бу ерда $P_{III} = P_1 + G_I - P_2 + G_{II} - P_3$

Чегара кесимлари кўчишларининг алгебраик йиғиндиси стерженнинг тўла абсолют деформациясини беради:

$$\Delta \ell = \Delta \ell_I + \Delta \ell_{II} + \Delta \ell_{III} = -3,64 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

II. Юқоридаги натижани поғонали стержен участкалари (тўғри) ўзгармас кўндаланг кесимли бўлгани учун, оғирлик кучларининг тенг таъсир этувчилари G_i ни ҳар участка ўртасига қўйилган деб фараз қилиб, қуйидагича ҳосил қилиш ҳам мумкин:

$$\Delta \ell_I = -\frac{P_1 a}{E k F} - \frac{G_I a}{2 E k F} = -1,03 \cdot 10^{-3} \text{ мм},$$

$$\Delta \ell_{II} = -(P_1 + G_I - P_2) \frac{b}{E k F} - \frac{G_{II} b}{2 E k F} = -0,63 \cdot 10^{-3} \text{ мм},$$

$$\Delta \ell_{III} = -(P_1 + G_I - P_2 + G_{II} - P_3) \frac{c}{E F} - \frac{G_{III} c}{2 E F} = -1,98 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Чегара кесимлари кўчишларининг алгебраик йиғиндиси стерженнинг тўла абсолют деформациясини беради:

$$\Delta \ell = \Delta \ell_I + \Delta \ell_{II} + \Delta \ell_{III} = -3,64 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

III. Кучлар таъсирининг мустақиллик тамойил(принцип)ига кўра поғонали стерженнинг тўла деформациясини ҳар бир ташқи куч P_i ва ҳар бир участка оғирлик кучи G_i таъсиридаги деформацияларини алоҳида-алоҳида ҳисоблаб, тўла деформацияни уларнинг алгебраик йиғиндиси сифатида топиш ҳам мумкин:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i.$$

Ташқи P_i кучлар таъсирида ҳосил бўладиган абсолют деформациялар топилади:

$$\Delta l_{P_1} = -\frac{P_1(a+b)}{EkF} - \frac{P_1c}{EF} = -\frac{P_1}{EF} \left(\frac{a+b}{k} + c \right) = -\frac{0,5}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,3 \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1,4+1,6}{1,8} + 2 \right) = -3,06 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -3,06 \cdot 10^{-3} \text{ мм},$$

$$\Delta l_{P_2} = \frac{P_2 \cdot b}{EkF} + \frac{P_2c}{EF} = \frac{P_2}{EF} \left(\frac{b}{k} + c \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,3 \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1,6}{1,8} + 2 \right) = 4,82 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 4,82 \cdot 10^{-3} \text{ мм},$$

$$\Delta l_{P_3} = \frac{P_3c}{EF} = \frac{0,4}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,3 \cdot 10^{-2}} \cdot 2 = 1,34 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Энди ҳар бир участка оғирлиги G_i дан бутун стерженнинг абсолют деформацияси топилади:

$$\Delta l_{G_1} = -\frac{G_1a}{2EkF} - \frac{G_1b}{EkF} - \frac{G_1c}{EF} = -\frac{G_1}{EF} \left(\frac{a}{2k} + \frac{b}{k} + c \right) = -\frac{0,59}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,3 \cdot 10^{-2}} \left(\frac{1,4}{2 \cdot 1,8} + \frac{1,6}{1,8} + 2 \right) = -3,22 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -3,22 \cdot 10^{-3} \text{ мм},$$

$$\Delta l_{G_{III}} = -\frac{G_{III}c}{2EF} = -\frac{0,47 \cdot 2}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,3 \cdot 10^{-2} \cdot 2} = -0,783 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -0,78 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Топилган абсолют деформацияларнинг алгебраик йиғиндиси поғонали стерженнинг умумий абсолют деформациясини беради:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \Delta l_{P_1} + \Delta l_{P_2} + \Delta l_{P_3} + \Delta l_{G_1} + \Delta l_{G_{II}} + \Delta l_{G_{III}} = -3,64 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

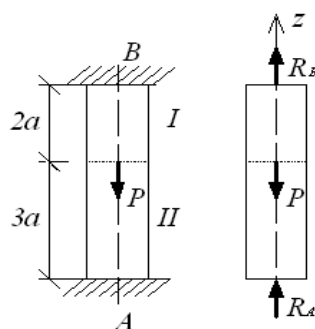
Топилган қийматлар ҳамма усулларда бир хил, талабалар II усулни қўллашлари мумкин.

2.8. Статик аниқмас стерженлар

1-лойиха-ҳисоблаш ишининг иккинчи масаласи статик аниқмас стерженларга оиддир. Ички кучларни, хусусан бўйлама ички кучларни фақат кесиш усули билангина аниқлаш мумкин бўлмаган тизимлар (системалар) статик ноаниқ тизимлар дейилади. Бундай тизимлар ҳисоби билан боғлиқ масалаларда статик аниқмасликни очиш (ички куч омилларини аниқлаш) учун мувозанат тенгламалари билан бирга кўчишлар тенгламаси тузилиши ва ечилиши зарур.

Кўчишлар тенгламаси системанинг деформацияланиш шартларини кўришдан келиб чиқади. 1-ЛХИ ни иккинчи масаласига ўтишдан олдин қуйидаги масала кўриб чиқилади.

10-масала. Икки учи мутлақ бикр маҳкамланган стержен кесимларидаги зўриқишлар аниқлансин (2.13-расм).



2.13-расм

Ечиш.

Таянчларни ташлаб юбориб, уларнинг стерженга таъсири R_A ва R_B реакциялар билан алмаштирилади. Бу ҳолда статика битта мувозанат тенгламасини беради:

$$\sum Z = 0; \quad R_A - P + R_B = 0; \quad R_A + R_B = P. \quad (2.1)$$

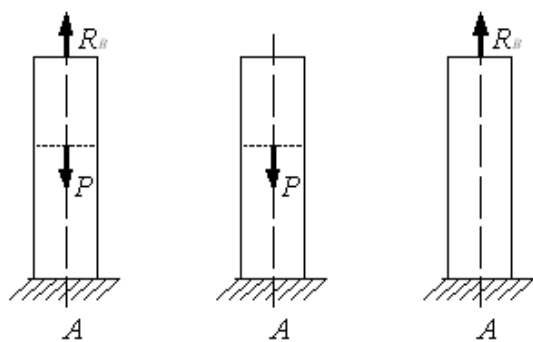
Икки номаълумли битта тенглама ҳосил бўлди, демак, масала бир марта статик аниқмас.

Кўчишлар тенгламасини тузиш учун A ва B кесимлар маҳкамлангани натижасида шу кесимларда кўчишлар нолга тенглигини ҳисобга олиб, ёки A кесим кўчиши $\lambda_A = 0$, ёки B кесим $\lambda_B = 0$, яъни бу шартларнинг биридан фойдаланиш мумкин. Масалан, $\lambda_B = 0$ шартдан фойдаланиб, B таянчни ташлаб юбориб, таъсири R_B билан алмаштирилади (2.14-расм). Натижада бир учи билан маҳкамланган (статик аниқ) стержень олинади. Бу стержень берилган P кучдан ташқари ҳозирча номаълум R_B куч таъсирида деформацияланади. Кучлар таъсирини мустақиллик принциpidан фойдаланиб, кўчишлар тенгламаси қуйидагича тузилади:

$$\lambda_B = \lambda_B(P) + \lambda_B(R_B) = 0, \quad (2.2)$$

яъни ҳамма кучларнинг биргаликдаги таъсиридаги кўчиш ҳар бир кучнинг алоҳида таъсиридаги кўчишларнинг алгебраик йиғиндисига тенг бўлади.

$$\lambda_B(P) = -\frac{P \cdot 3a}{EF}; \quad \lambda_B(R_B) = \frac{R_B \cdot 5a}{EF}; \quad -\frac{P \cdot 3a}{EF} + \frac{R_B \cdot 5a}{EF} = 0; \quad R_B = \frac{3}{5}P.$$



2.14-расм

Олинган бу муносабат (2.1) га қўйилса,

$$R_A = P - R_B = P - \frac{3}{5}P = \frac{2}{5}P$$

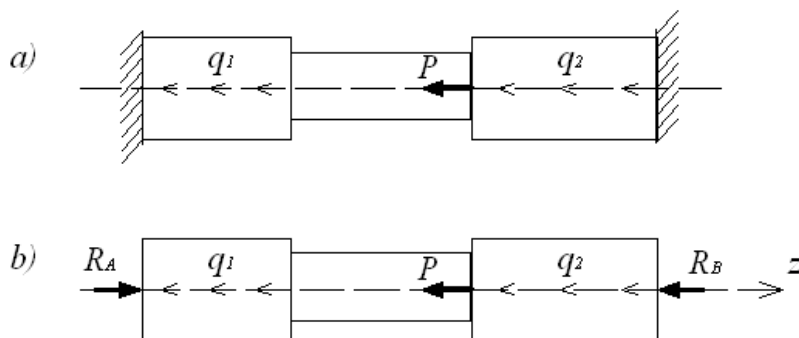
келиб чиқади. Реакция кучларининг қиймати мусбат чикди, бу танланган реакция кучларининг йўналишлари аслига мувофиқлигини кўрсатади.

Реакция кучлари аниқланганидан сўнг бу стержен статик аниқ стерженга айланиб қолди, энди кесиш усулидан фойдаланиб, ички

куч ва кучланишларни юқорида кўрилган мисоллардаги каби топиш мумкин.

А) 1-ЛҲИ нинг 2-масаласи ($\Delta = 0$ бўлган ҳол). Баъзи вариантлар шу ҳолга тўғри келади. Бу масалада қуйидаги 2.15-расмдаги статик ноаниқ стержен учун бўйлама куч N ва нормал кучланиш σ эпюралари қурилиши керак:

Берилган: $a=1.4$ м;
 $b=1.6$ м, $c=2.0$ м;
 $P_2=1.0$ кН;
 $F=0.3 \times 10^{-2}$ м²;
 $q_1=5$ кН/м;
 $q_2=15$ кН/м;
 $k=1.8$; $\Delta=0$;
 $E=2 \times 10^8$ кН/м².



2.15-расм

Аниқлансин: N , σ -?

Ечиш:

Стержен таянчларининг таъсири реакция кучлари билан алмаштирилади (1.15,б-чизма), мувозанат тенгламаси тузилади:

$$R_A - q_1 \times a - P - q_2 \times c - R_B = 0; \quad R_A - R_B = 5 \times 1.4 + 1.0 + 15 \times 2 = 38 \text{ кН};$$

$$R_A - R_B = 38 \text{ кН}. \quad (*)$$

Номалум реакция кучлари иккита, тенглама эса битта, демак бу стержен бир марта статик ноаниқ. У ҳолда қўшимча яна битта тенглама керак бўлиб, бу тенглама стерженнинг деформацияланиш шартидан олинади.

Шаклдан кўриниб турибдики, стержен икки қўзғалмас таянчлар орасида бўлгани учун унинг узунлиги ўзгармайди, яъни унинг тўла деформацияси ҳамма вақт нолга тенг бўлиши керак: $\Delta l = 0$; бу шарт ортиқча реакция кучининг қийматини топиш учун ишлатилади. Стерженнинг тўла деформацияси кучлар таъсирининг суперпозиция усулига кўра топилади, яъни ҳар бир кучдан алоҳида-алоҳида ҳисоблаб топилган абсолют деформацияларнинг алгебраик йиғиндиси нолга тенглаштирилади:

$$\Delta l = \Delta l_{q_2} + \Delta l_P + \Delta l_{q_1} + \Delta l_{R_A} = 0;$$

$$\Delta l_{q_2} = \frac{q_2 c^2}{2EkF} = \frac{1}{EF} \cdot \frac{q_2 c^2}{2k} = \frac{1}{EF} \cdot 16.67;$$

$$\Delta l_P = \frac{P \cdot c}{EkF} = \frac{1}{EF} \cdot \frac{P \cdot c}{k} = \frac{1}{EF} \cdot 1.11;$$

$$\Delta l_{q_1} = \frac{q_1 a}{EF} \left(\frac{a}{2\kappa} + b + \frac{c}{\kappa} \right) = \frac{1}{EF} \cdot q_1 a \left(\frac{a}{2\kappa} + b + \frac{c}{\kappa} \right) = \frac{1}{EF} \cdot 21,7;$$

$$\Delta l_{R_A} = \frac{R_A a}{EkF} - \frac{R_A b}{EF} - \frac{R_A c}{EkF} = -\frac{R_A}{EF} \left(\frac{a}{\kappa} + b + \frac{c}{\kappa} \right) = -\frac{R_A}{EF} \cdot 3,49;$$

$$16,67 + 1,11 + 21,7 - 3,49 R_A = 0,$$

$$39,48 - 3,49 R_A = 0, R_A = 11,313 \text{ кН} = 11,3 \text{ кН}.$$

Бу қиймат (*) га қўйилади: $R_B = R_A - 38 = 11,3 - 38 = -26,7 \text{ кН}.$

Таянч реакция кучлари аниқлангандан сўнг, стержен участкаларидаги ички куч ва кучланишларни аниқлаш учун ихтиёрий таянч топилган реакция кучи билан алмаштирилади ва бу реакция кучи ташқи куч сифатида қаралиб, 1-ЛХИ нинг 1-масаласидаги каби ишлар бажарилади. Бу мисолда чап таянчнинг таъсирини реакция кучи билан алмаштирилди.

I участка ($0 \leq z_1 \leq a$):

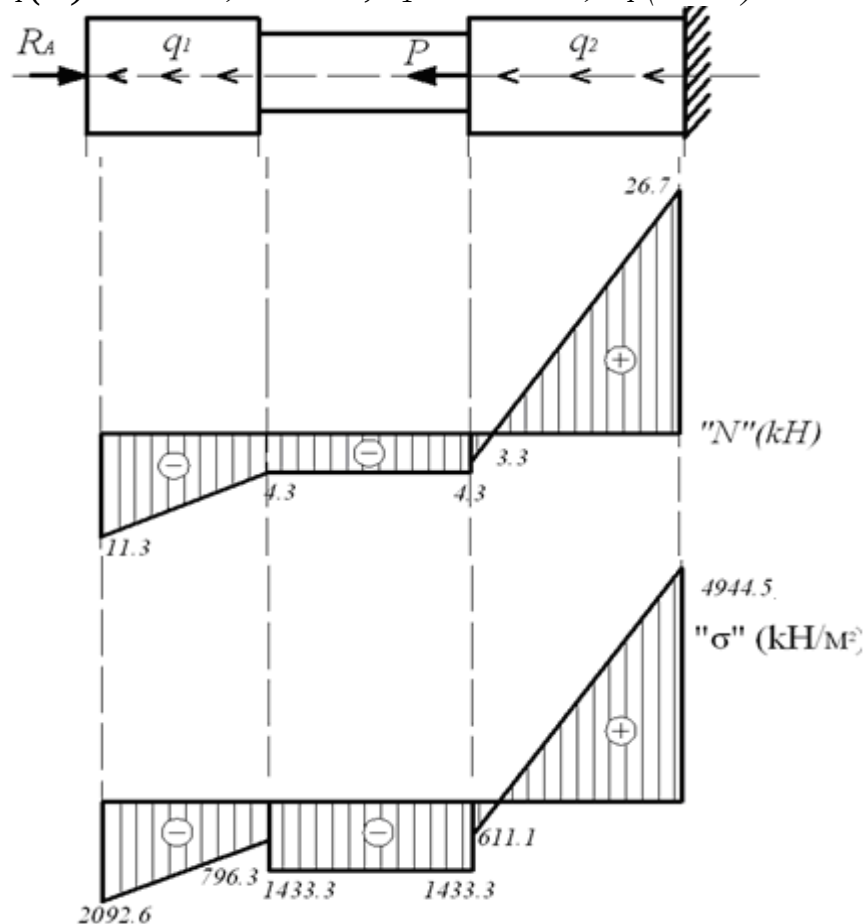
$$F_I = kF = 1,8 \times 0,3 \times 10^{-2} \text{ м}^2 = 0,54 \times 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$N_I(z_1) = -R_A + q_1 \times z_1 = -11,3 + 5 z_1; z_1 = 0; N_{II}(0) = -11,3 \text{ кН};$$

$$z_1 = a = 1,4 \text{ м}; N_{II}(1,4 \text{ м}) = -11,3 + 5 \times 1,4 = -4,3 \text{ кН};$$

$$\sigma_I(z_1) = N_I(z_1) / F_I = -2092,6 + 925,9 z_1; (\text{расм 2.16})$$

$$z_1 = 0; \sigma_I(0) = -2092,6 \text{ кН/м}^2; z_1 = a = 1,4 \text{ м}; \sigma_I(1,4 \text{ м}) = -796,3 \text{ кН/м}^2.$$



2.16-расм

II участка ($a \leq z_2 \leq a+b$):

$$N_{II}(z_2) = -R_A + q_1 \times a = -11,3 + 5 \times 1,4 = -4,3 \text{ кН};$$

$$F_{II} = F = 0,3 \times 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$\sigma_{II}(z_2) = N_{II}(z_2)/F_{II} = -1433,3 \text{ кН/м}^2.$$

III участка ($a+b \leq z_3 \leq a+b+c$):

$$F_{III} = kF = 1,8 \times 0,3 \times 10^{-2} \text{ м}^2 = 0,54 \times 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$N_{III}(z_3) = -R_A + q_1 \times a + P_2 + q_2 \times (z_3 - a - b) = -3,3 + 15(z_3 - 3);$$

$$z_3 = a + b = 3 \text{ м}; N_{III}(3 \text{ м}) = -3,3 \text{ кН};$$

$$z_3 = a + b + c = 5 \text{ м}; N_{III}(5 \text{ м}) = 26,7 \text{ кН};$$

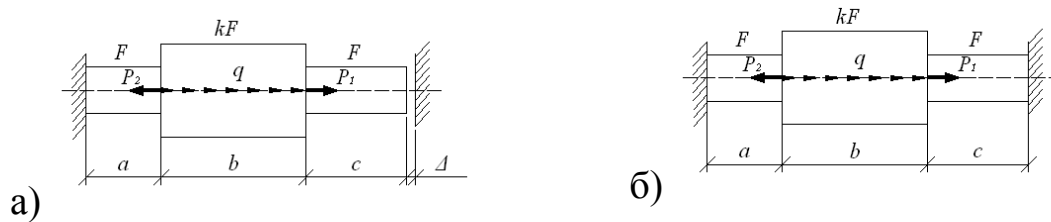
$$\sigma_{III}(z_3) = N_{III}(z_3)/F_{III} = -611,1 + 2777,8(z_3 - 3);$$

$$z_3 = a + b = 3 \text{ м}; \sigma_{III}(3 \text{ м}) = -611,1 \text{ кН/м}^2;$$

$$z_3 = a + b + c = 5 \text{ м}; \sigma_{III}(5 \text{ м}) = 4944,5 \text{ кН/м}^2.$$

Топилган қийматлардан фойдаланиб, стержен участкалари бўйлаб N ва σ лар учун эпюралар курилади (2.16-расм).

В) 1-ЛХИ нинг 2-масаласи ($\Delta > 0$ бўлган ҳол). Берилган $a=2$ м, $c=3$ м; $P_1=10$ кН, $P_2=15$ кН, $F=0,25 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$; $q=2,5$ кН/м; $k=2$; $\Delta=0,02$ мм; $E=2 \cdot 10^8$ кН/м²; $G=q \cdot b=2,5 \cdot 4=10$ кН; (2,17-расм)



2.17-расм

Ечиш. Бу тур масалаларини ечишда ташқи кучлар таъсирида брус учининг кўчиши зазорга тенг ёки кичик ($\Delta l \leq \Delta$) бўлса, зазордан кейин таянч борлиги ҳеч қандай роль ўйнамайди, натижада масала статик аниқ бўлади. Фақатгина кўчиш зазордан катта ($\Delta l > \Delta$) бўлгандагина, брус учи ва таянч орасида ўзаро таъсир кучи ҳосил бўлади, демак, масала статик ноаниқ бўлиб қолади (2.17-расм). Шунинг учун биринчи галда ташқи кучлар таъсирида бруснинг эркин учи кўчиши топилади, бунинг учун суперпозиция принципи ёрдамида ҳар бир ташқи куч таъсирида ҳосил бўлган кўчишни ҳисоблаб, уларнинг алгебраик йиғиндиси олинади.

$$\Delta l(P_1) = \frac{P_1 a}{EF} + \frac{P_1 b}{EkF} + \frac{P_1}{EF} \left(a + \frac{b}{k} \right) = \frac{10 \cdot 4}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,25 \cdot 10^{-2}} = 80 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,08 \text{ мм},$$

$$\Delta l(P_2) = \frac{P_2 a}{EF} = -\frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 10^8 \cdot 0,25 \cdot 10^{-2}} = -60 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -0,06 \text{ мм},$$

$$\Delta l(q) = \frac{G \cdot b}{2EkF} + \frac{G \cdot a}{EF} = \frac{G}{EF} \left(\frac{b}{2k} + a \right) = \frac{10 \cdot 3}{0,5 \cdot 10^6} = 60 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,06 \text{ мм},$$

$$\Delta l = \sum \Delta l(P_i) = 0,08 \text{ мм}, \text{ демак; } \Delta l > \Delta l.$$

Бундан кўринадики, масала статик ноаниқ. Статиканинг мувозанат тенгламаси 2.17,б-расм учун тузилади:

$$-R_A - P_2 + G + P_1 - R_B = 0; R_A + R_B = 5.$$

Стержен B учининг кўчиши λ_B зазор Δ га тенг бўлиши керак, бу кўчиш эса ташки кучлар P_1 , P_2 , G ва таянч реакция кучи R_B таъсирида ҳосил бўлади:

$$\lambda_B = \Delta; \Delta l + \Delta l(R_B) = \Delta;$$

$$\Delta l(R_B) = -\frac{R_B}{EF} \left(a + \frac{b}{k} + c \right) = -14 R_B \cdot 10^{-3} \text{ мм} = -0,014 R_B \text{ мм},$$

$$0,08 - 0,014 R_B = 0,02, \quad R_B = \frac{0,06}{0,014} = 4,286 \text{ кН}; \quad R_A = 5 - R_B = 5 - 4,286 = 0,714 \text{ кН}.$$

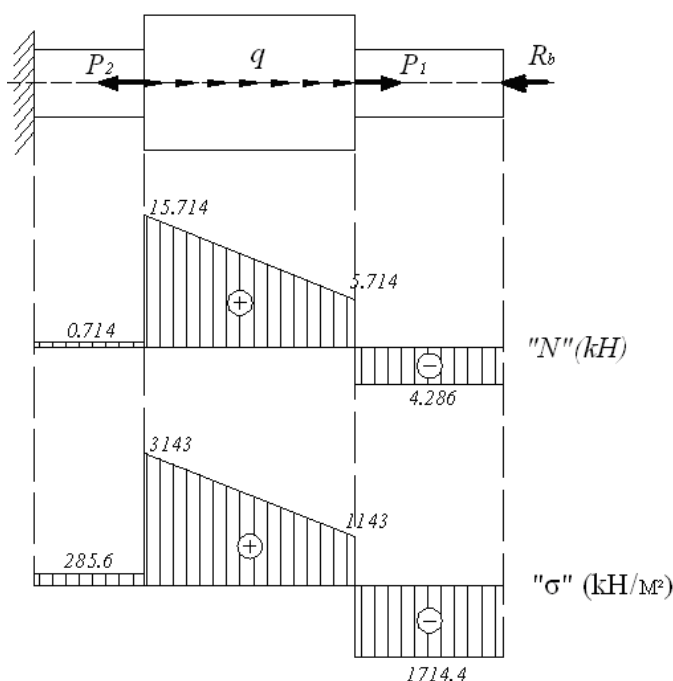
$$\text{Текшириш: } \Delta l(R_B) = -0,014 \times R_B = -0,014 \times 4,286 = -0,06 \text{ мм};$$

$$\Delta l + \Delta l(R_B) = \Delta, \quad 0,08 - 0,06 = 0,02; \quad 0,02 = 0,02.$$

I участка ($0 \leq z_1 \leq c$):

$$N_I = -R_B = -4,286 \text{ кН};$$

$$\sigma_I = N_I / F_I = -4,286 / 0,25 \times 10^2 = -1714,4 \text{ кН/м}^2;$$



2.18-расм

II участка ($c \leq z_2 \leq b+c$):

$$N_{II} = -R_B + P_1 + q(z_2 - c) = 4,286 + 10 + 2,5(z_2 - 3) = 5,714 + 2,5(z_2 - 3);$$

$$F_{II} = kF = 2 \times 0,25 \times 10^{-2} \text{ м}^2 = 0,5 \times 10^{-2} \text{ м}^2;$$

$$z_2 = 3 \text{ м}; \quad N_{II}(3 \text{ м}) = 5,714 \text{ кН};$$

$$z_2 = 7 \text{ м}; \quad N_{II}(7 \text{ м}) = 5,714 + 2,5 \times 4 = 15,714 \text{ кН};$$

$$\sigma_{II} = N_{II} / F_{II} =$$

$$= \frac{5,714}{0,5 \cdot 10^{-2}} + \frac{2,5}{0,5 \cdot 10^{-2}} (z_2 - 3) =$$

$$= 1143 + 500(z_2 - 3);$$

$$z_2 = 3 \text{ м}; \quad \sigma_{II}(3 \text{ м}) = 1143 \text{ кН/м}^2;$$

$$z_2 = 7 \text{ м}; \quad \sigma_{II}(7 \text{ м}) = 3143 \text{ кН/м}^2.$$

III участка ($b+c \leq z_3 \leq a+b+c$):

$$N_{III} = -R_B + P_1 + q \times b - P_2 = -4,286 + 10 + 10 - 15 = 0,714 \text{ кН};$$

$$\sigma_{III} = N_{III} / F_{III} = 0,714 / 0,25 \times 10^2 = 285,6 \text{ кН/м}^2.$$

Топилган қийматлардан фойдаланиб, стержен участкалари бўйлаб N ва σ лар учун эпюралар қурамыз (2.18-расм).

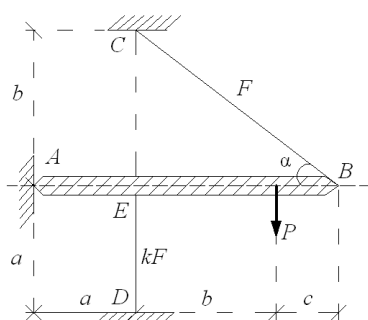
2.9 Статик ноаниқ тизимлар

Ушбу масалада берилган статик ноаниқ стерженлар системаси учун қуйидаги ишлар бажарилиши керак (2.19-расм):

1. Стерженлардаги зўриқиш кучлари аниқлансин.
2. Стерженларнинг кўндаланг кесими иккита тенг ёнли бурчакликдан иборат ва бу бурчаклик рақами $R=210$ МПа ($[\sigma]=160$ МПа) бўлганида аниқлансин. Берилган: $a=2$ м, $b=3$ м, $c=1$ м, $k=2$, $P=100$ кН, $[\sigma]=160$ МПа $= 1600 \text{ кг/см}^2 = 16 \times 10^3 \text{ Н/см}^2$.

Ечиш.

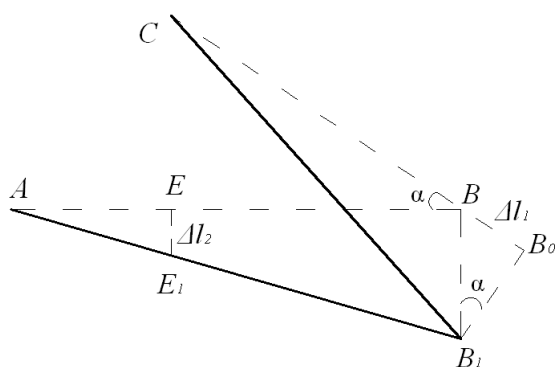
А нуқтада шарнир билан маҳкамланган абсолют қаттиқ АВ брусга $P=100$ кН куч таъсир қилади, брус ВС ва ЕД пўлат стерженлар билан осилган. Стерженлар кўндаланг кесимини аниқлаш учун уларда ҳосил бўладиган N_1 ва N_2 ва ички кучларни топиш зарур. Бунинг учун А таянч ва ВС, ЕД стерженлар таъсири R_{Ax} , R_{Ay} , N_1 , N_2 кучлар билан алмаштирилади (2.19-расм). АВ брус учун статиканинг мувозанат тенгламалари тузилади:



2.19-расм

$$\begin{cases} \sum X = 0; & R_{Ax} - N_1 \cos \alpha = 0; \\ \sum Y = 0; & R_{Ay} + N_2 - P + N_1 \sin \alpha = 0; \\ \sum m_A(P_i) = 0; & N_2 a - P(a+b) + N_1 \sin \alpha (a+b+c) = 0. \end{cases}$$

Тузилган учта мувозанат тенгламаларида тўртта номаълум кучлар қатнашганлиги учун бу масала бир марта статик ноаниқ, қўшимча тўртинчи тенглама бруснинг P куч таъсирида кўчишидан олинади. P куч таъсирида ВС стержен чўзилиб, ЕД стержен сиқилиб,



2.20-расм

АВ брус А шарнир атрофида айланади, бунда брус абсолют қаттиқ деб қаралаётгани учун тўғрилигича қолади (2.20-расм). Учбурчаклар $\triangle AEE_1 \sim \triangle ABB_1$ дан куйидаги муносабат олинади:

$$\frac{AE}{EE_1} = \frac{AB}{BB_1} \rightarrow BB_1 \cdot AE = EE_1 \cdot AB$$

Иккинчи томондан

$$EE_1 = \Delta l_2; \quad BB_1 = \frac{\Delta l_1}{\sin \alpha}.$$

Бу ерда:

$$BC = \sqrt{b^2 + (b+c)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{ м}; \quad \sin \alpha = CE / BC = b / BC = 3 / 5 = 0,6; \cos \alpha = 0,8,$$

У ҳолда ВС ва ЕД стерженларнинг абсолют деформациялари орасидаги қуйидаги муносабат топилади:

$$\Delta l_1 \cdot \alpha = \Delta l_2 (\alpha + b + c) \sin \alpha; \quad \Delta l_1 = 3 \cdot 0,6 \Delta l_2; \quad \Delta l_1 = 1,8 \Delta l_2;$$

Гук қонуни

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot BC}{E \cdot F} = \frac{5}{EF} N_1, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot \alpha}{EkF} = \frac{1}{EF} N_2$$

дан фойдаланиб, қуйидаги тенглик олинади:

$$\frac{5}{EF} N_1 = 1,8 \frac{1}{EF} N_2 \rightarrow 5N_1 = 1,8N_2, \quad N_1 = 0,36N_2;$$

Мувозанат тенгламаларининг учинчисидан фойдаланиб, N_1 ва N_2 кучлар орасидаги қуйидаги тенглик олинади:

$$2 \cdot N_2 \alpha - 100 \cdot 5 + N_1 \cdot 0,6 \cdot 6 = 0; \quad N_2 = 250 - 1,8N_1.$$

Бу тенгламалар бирлаштирилиб, қуйидаги тенгламалар системаси ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} N_1 = 0,36N_2; \\ N_2 = 250 - 1,8N_1 = 250 - 1,8 \cdot 0,36N_2. \end{cases}$$

Бу системадан N_1 ва N_2 кучлар топилади:

$$1,648N_2 = 250;$$

$$N_2 = 250 : 1,648 = 151,7 \text{ кН};$$

$$N_1 = 0,36N_2 = 0,36 \cdot 151,7 = 54,6 \text{ кН}.$$

Кучланишлар аниқланади:

$$\sigma_1 = N_1 / F, \quad \sigma_2 = N_2 / \kappa F.$$

Бу топилган қийматлар мустаҳкамлик шартига қўйилади:

$$\sigma_1 \leq [\sigma]; \quad \sigma_2 \leq [\sigma];$$

$$F \geq \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{54600 \text{ Н}}{16 \cdot 10^3 \text{ Н/см}^2} = 3,42 \text{ см}^2,$$

$$F \geq \frac{N_2}{\kappa[\sigma]} = \frac{151700 \text{ Н}}{2 \cdot 16 \cdot 10^3 \text{ Н/см}^2} = 4,74 \text{ см}^2.$$

Топилган қийматлардан каттаси олинади, яъни, $F = 4,74 \text{ см}^2$.

ГОСТ 8509-89 дан пўлат прокат бурчаклик рақами қидирилади: Масала шартда ҳар бир стержен учун бурчакликлар бир жуфт берилгани сабабли СВ стержен учун $4,74:2=2,37 \text{ см}^2$ танланади, бу

учун № 3,2 дан қалинлиги $d=4$ мм ва кесим юзаси $F=2,34$ см² бўлган бурчаклик мос. ЕД стержен учун $kF = 2 \times 4,74 = 9,48$ бўлгани сабабли № 5 бурчакликлардан қалинлиги $d=5$ мм бурчакликнинг кесим юзаси 4,8 см² бўлгани танланади. Демак, № 32х32х4 дан 1 жуфт олинади (BC учун), № 50х50х5 дан 1 жуфт олинади (ED учун).

3. Брусларни эгилишга ҳисоблаш

Бруслар бўйлама симметрия текислигида ётган ташқи юклар таъсиридан деформацияланиб, уларнинг толачалари чизикли ҳолатдан эгри чизик ҳолатига ўтади. Брусларнинг бундай деформацияси текис эгилиш дейилади. Бу эгилишга қаршилик кўрсатувчи бруслар балка деб аталади. Текис эгилишдаги балкаларнинг ҳар бир кўндаланг кесимларида ҳосил бўладиган ички зўриқиш кучлари (кўндаланг куч ва эгувчи момент), ҳамда уларнинг деформацияларини (кесимнинг оғиш бурчаги ва салқилиги) аниқлаш талаб қилинади. Бу миқдорларни аниқлаш балкаларни ҳисоблаш масаласига киради.

3.1 Таянч турлари ва уларнинг кинематик ҳамда статик характеристикаси

Балкалар учун уч турдаги таянчлар ишлатилади. Улар балкаларни ҳисоблашда схематик равишда кўрсатилади.

1. Цилиндрик шарнирли кўзғалувчи таянч (3.1 а ва б-расм). Бундай таянч балканинг боғланган фақат вертикал кўчишига қаршилик кўрсатади ва шу йўналиш бўйича яқка реакция кучи ҳосил бўлади.

2. Цилиндрик шарнирли кўзғалмас таянч (3.1 в ва г-расм). Бундай таянч балканинг боғланган кесими горизонтал ва вертикал йўналиш бўйича кўчишга қаршилик кўрсатади. Шарнирли кўзғалмас таянчда реакция кучи ҳамма вақт вертикал ва горизонтал тузувчиларга ажратилиб, миқдори аниқланади.

3. Қистириб маҳкамланган таянч (3.1 д ва е-расм). Бундай таянч билан маҳкамланган балканинг учи чизикли ва бурчакли кўчишлардан чекланган бўлади. Шу сабабли қистириб маҳкамланган таянчда доимо уч хил реакция кучи ҳосил бўлади, яъни реакция кучининг вертикал, горизонтал тузувчилари билан реактив момент.

3.2 Балкаларнинг турлари

Балкалар таянчлар ёрдамида асосга боғланиш усули ва уларнинг жойлашишига кўра қуйидаги турларга бўлинади:

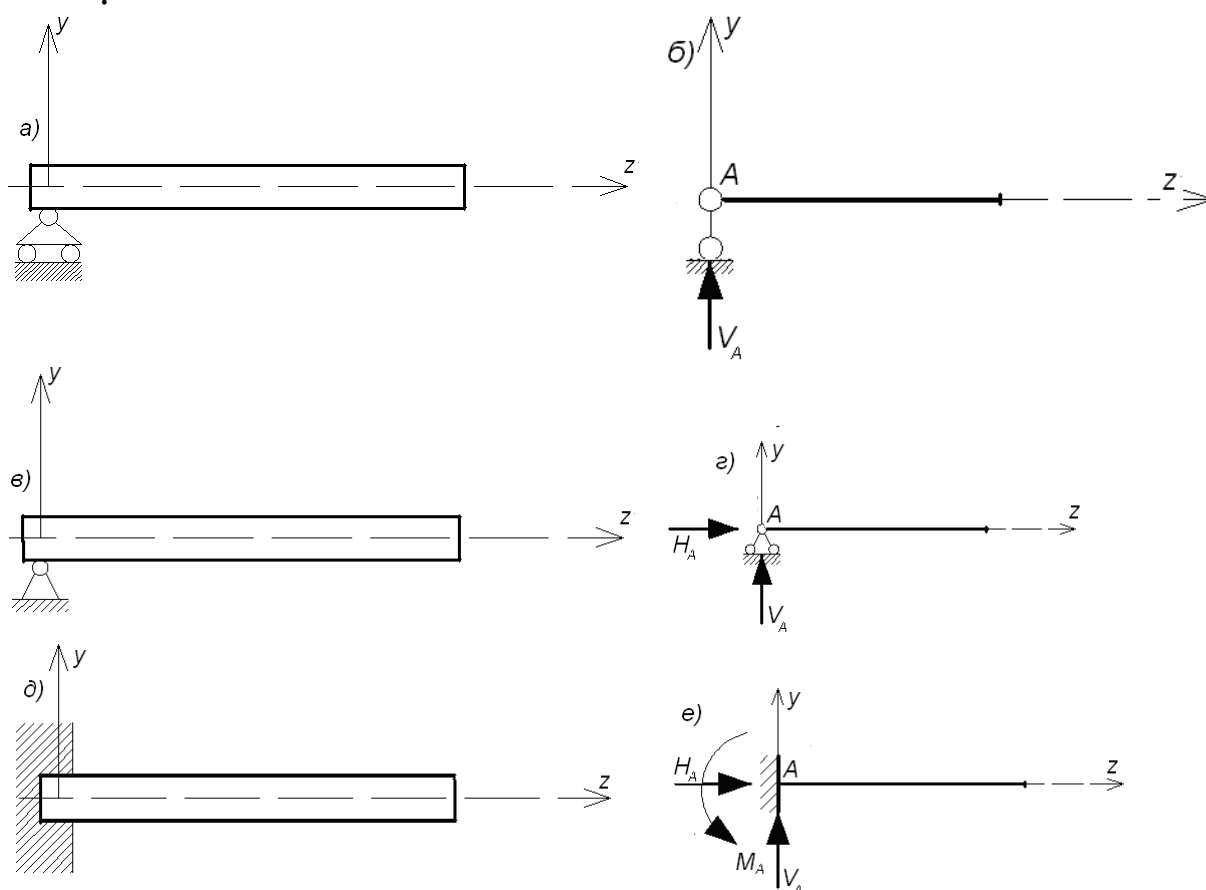
1. Оддий балка. Агар балканинг бир учи қўзғалмас шарнирли таянч, иккинчи учи эса қўзғалувчи шарнирли таянч ёрдамида асосга боғланган бўлса, бундай балка оддий балка дейилади (3.2 а-расм).

2. Консол балка. Агар балканинг бир учи қистириб маҳкамланган, иккинчи учи эса эркин бўлса, бундай балка консол балка дейилади (3.2 б-расм).

3. Консолли балка. Агар шарнирли таянч балканинг бирор учига нисбатан ичкари жойлашган бўлса, яъни унинг таянчларидан ташқарига чиққан қисми бўлса, у ҳолда бир ёки икки консолли балка дейилади (3.2 в, г-расм).

4. Шарнирли балка. Агар бир неча оддий, консолли балкалар бири-бирига шарнирлар ёрдамида туташтирилган бўлса, бундай балкалар шарнирли балкалар деб номланади (3.2 д-расм).

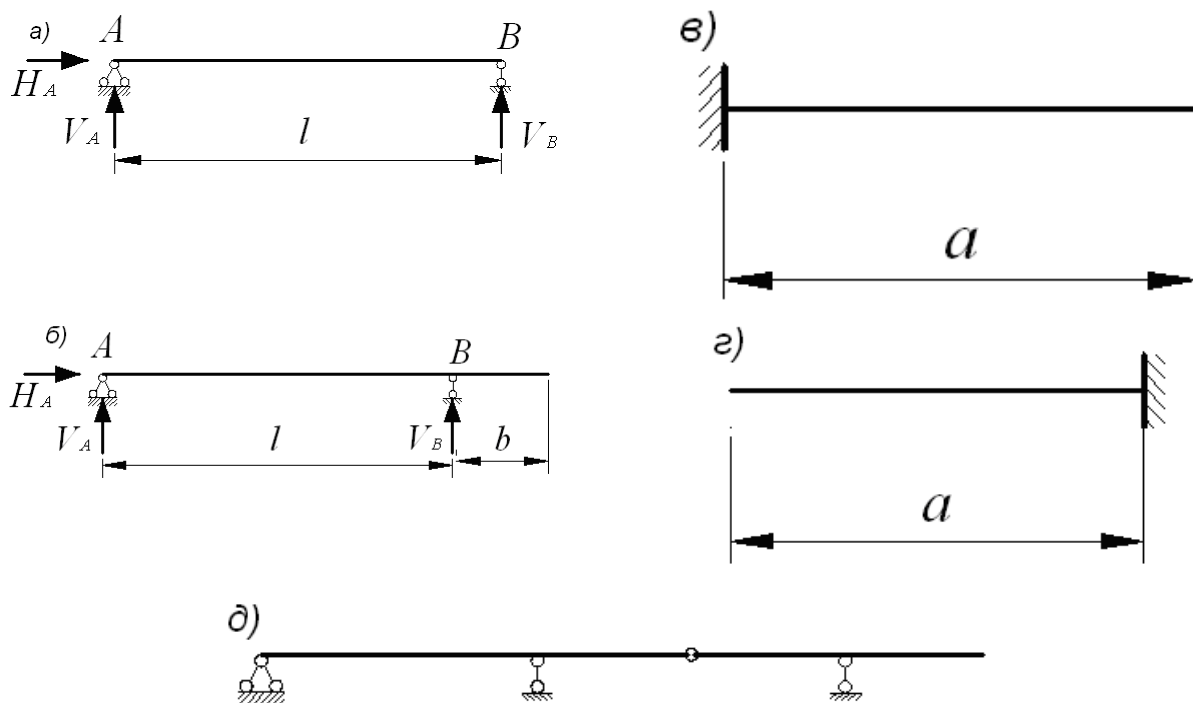
Таянчларнинг номаълум реакцияларини аниқлаш усули бўйича балкалар статик аниқ ва ноаниқ балкаларга бўлинади.



3.1-расм

Балканинг номаълум таянч реакциялар сони статиканинг мувозанат тенгламалар сонига тенг бўлса, бундай балка статик

аниқ балкадир. Балканинг номаълум таянч реакциялар сони статиканинг мувозанат тенгламалар сонидан кўп бўлса, статик ноаниқ балка бўлади.



3.2-расм

3.3 Балканинг таянч реакцияларини аниқлаш

Статик аниқ балканинг номаълум таянч реакцияларини аниқлашда статиканинг қуйидаги мувозанат тенгламаларидан фойдаланилади:

$$\sum Z = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0. \quad (3.1)$$

Балкага таъсир қилувчи ташқи кучлар вертикал йўналган бўлса (3.1 а, в-расмларда кўрсатилган), балкаларнинг таянч реакцияларини аниқлаш статиканинг қуйидаги тенгламаларига асосланган:

$$\sum M_A = 0; \sum M_B = 0. \quad (3.2)$$

Статиканинг $\sum Y = 0$ мувозанат тенгламаси эса, таянч реакциялар тўғри аниқланганини текшириш учун ишлатилади.

Шарнирли балкаларнинг (3.1, г-расм) номаълум таянч реакцияларини аниқлашда статиканинг мувозанат тенгламаларини татбиқ қилиш билан бир қаторда балкаларнинг боғловчи шарнирдан чап ёки ўнг томонда таъсир қилаётган кучларнинг шарнирнинг марказ нуқтасига нисбатан олинган моментларнинг алгебраик йиғиндиси

нолга тенглик шартидан фойдаланилади, яъни $\sum M_c^{чан} = 0$ ёки $\sum M_c^{унг} = 0$.

Таянч реакцияларни аниқлашга тест масалалари.

№	Балка схемаси	b	l	P	q	M	Жавоблар варианти	
							V _A	V _B
1		3	6	3	2	0	3	5.5
2		3	6	0	2	6	14.5	9
3		2	8	2	3	0	22	13
4		2	8	0	3	9	17	19
5		4	9	0	4	9	11	17
6		3	9	3	4	0	14.5	11.5
7		2	5	5	3	0	10.5	4.5
8		3	4	0	3	12	5	7

3.4 Балка кўндаланг кесимларида ҳосил бўладиган ички зўриқиш кучлари

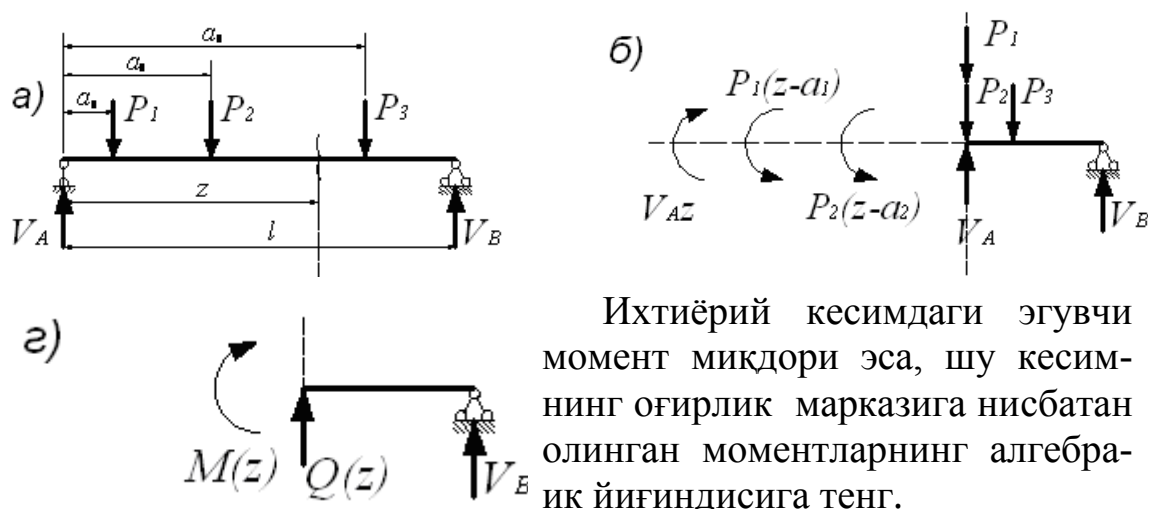
Балканинг ички зўриқиш кучларини аниқлаш учун кесил усулидан фойдаланиб, уни чап учидан ихтиёрий z масофада фикран кесилади (3.3-расм). Кўндаланг кесимда ҳосил бўладиган ички зўриқишларни аниқлаш учун балканинг чап ёки ўнг томонини олиб, унинг мувозанат ҳолати текширилади. Масалан, балканинг с-с кесимидан ўнг томонидаги бўлагини олиб, чап томонига қўйилган ташқи юклар шу с-с кесимга кўчирилади (3.3 б-расм). Мазкур кесимга кўчирилган вертикал кучларнинг алгебраик йиғиндиси кўндаланг кучни ифодалайди ва у Q ҳарфи билан белгиланади.

$$Q(z) = V_A - P_1 - P_2 \quad (3.3)$$

Кўчирилган юклардан ҳосил бўлган моментларнинг алгебраик йиғиндиси с-с кесимдаги эгувчи моментни ташкил қилади ва у M ҳарфи билан кўрсатилади (3.3 б ва в-расм).

$$M(z) = V_A z - P_1 (z - a_1) - P_2 (z - a_2) \quad (3.4)$$

Демак, балканинг ҳар бир кўндаланг кесимида эгувчи момент ва кўндаланг куч ҳосил бўлади. Балканинг ихтиёрий кесимидаги кўндаланг куч шу кесимдан бир томонда таъсир қилаётган ташқи юкларнинг вертикал ўққа нисбатан олинган проекцияларининг алгебраик йиғиндисиغا тенг.



3.3-расм

Ички зўриқиш кучлар Q ва M учун қуйидаги ишора қондаси қабул қилинган:

1) агар таъсир қилаётган куч кўрилатган кўндаланг кесимга нисбатан балканинг мувозанати текширилатган қисмини соат стрелкасининг ҳаракат йўналиши бўйича айлантиришга интилса, у ҳолда тегишли кучдан мусбат ишорали кўндаланг куч ҳосил бўлади, аксинча бўлса, ҳолда манфий ишорали кўндаланг куч мавжуд.

2) агар балканинг мувозанати текширилатган қисмига қўйилган ҳар қандай ташқи куч ёки момент остки толачаларда чўзилиш деформациясини ҳосил қилса, у ҳолда мазкур таъсирдан мавжуд бўлган кўрилатган кесимдаги эгувчи момент мусбат ишорали деб қабул қилинади, акс ҳолда манфий ишора билан олиш лозим.

3.5 Кўндаланг куч ва эгувчи момент эпюраларини қуриш

Балканинг ҳар бир кўндаланг кесимида кўндаланг куч – Q ва эгувчи момент – M ҳосил бўлади, уларнинг миқдори (3.3) ва (3.4) ифодаларга асосан абсцисса z га боғлиқ.

$$Q(z)=f(z); \quad M(z)=\psi(z). \quad (3.5)$$

Балкаларни ҳисоблашда эгувчи момент ва кўндаланг кучларнинг максимал миқдорлари зарур бўлади. Бу миқдорларни аниқлаш учун (3.5) тенгламаларга асосан балканинг узунлиги бўйича уларнинг графиги чизилади. Мазкур графиклар материаллар қаршилиги курсида эпюра дейилади.

Балканинг узунлиги бўйича кўндаланг куч миқдори ўзгаришини ифодаловчи графикни кўндаланг куч эпюраси дейилади.

Балканинг узунлиги бўйича эгувчи момент қийматининг ўзгаришини кўрсатувчи график чизиғи эгувчи момент эпюраси дейилади.

Кўндаланг куч – Q ва эгувчи момент – M ларнинг эпюраларини қуришда қуйидаги тартибдаги ишлар бажариш тавсия қилинади:

1. Балканинг номаълум таянч реакцияларини аниқлаш;
2. Балканинг участкаларини белгилаш;
3. Ҳар бир участка учун кўндаланг куч ва эгувчи момент тенгламаларини тузиш;
4. Кўндаланг куч ва эгувчи момент тенгламаларига асосан, балканинг ҳар бир участкаси учун тегишли график-эпюралар чизилади;
5. Қурилган эпюраларни текшириш.

Юқорида берилган тартиб бўйича бир неча балкалар учун Q ва M эпюралари курилади.

1-мисол. Оддий балканинг кўндаланг куч « Q » ва эгувчи момент « M » эпюралари курилсин (3.4 а-расм)

Ечиш. 1. Номаълум таянч реакциялари аниқланади.

Балка схемасида таянч реакция кучларнинг векторларини чап таянчда вертикал ва горизонтал тузувчилари, ўнг таянчда эса фақат вертикал тузувчиси мусбат йўналишда кўрсатилади. Ташқи юклар фақат вертикал кучлардан иборат бўлгани учун, балканинг горизонтал реакцияси нолга тенг (чизмада кўрсатилмаган). Вертикал реакцияларни аниқлаш учун статиканинг иккита мувозанат тенгламаларидан фойдаланилади: $\sum M_A = 0$ ва $\sum M_B = 0$. Бу тенгламаларда A ва B нуқталар таянчларнинг цилиндрик шарнир ўқи билан балканинг геометрик ўқи туташган нуқталардир (3.4 а-расм).

$$\sum M_A = 0; M - P \cdot 3 + q \cdot 6 \cdot 6 - V_B \cdot 9 = 0; \quad V_B = \frac{3 - 9 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \cdot 6}{9} = \frac{84}{9} = 9.33 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad M + P \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 6 - V_A \cdot 9 = 0; \\ V_A = \frac{-3 - 9 \cdot 6 + 3 \cdot 6 \cdot 3}{9} = -0.33 \text{ кН}.$$

Аниқланган таянч реакция кучлари миқдорини балканинг схемасига кўчириб ёзиб, текшириш ўтказилади:

$$\sum Y = 0; \quad V_A + P - q \cdot 6 + V_B = 0; \\ -0.33 + 9 - 3 \cdot 6 + 9.33 = 0; \quad 0 = 0.$$

2. Балка участкалари унинг схемасида белгилаб қўйилади (3.4-расмда участкалар I ва II рақамлар билан белгиланган).

3. Балканинг ҳар бир участкаси учун $Q(z)$ ва $M(z)$ тенгламалари тузилади.

I участка, I-I кесим, $0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м}$.

$$Q_I(z_1) = -V_A; \quad M_I(z_1) = M - V_A z_1.$$

Кўндаланг куч $Q_I(z_1)$ тенгламаси абсцисса ўқига параллел бўлган чизик тенгламасидир, яъни участка боши ва охирида кўндаланг куч миқдори бир хил:

$$z_1 = 0; \quad Q_I(0) = -V_A = -0.33 \text{ кН}; \quad z_1 = 3 \text{ м}; \quad Q_I(3 \text{ м}) = -V_A = -0.33 \text{ кН}.$$

Эгувчи момент тенгламаси $M_I(z_1)$ — тўғри чизик тенгламасидир, шу сабабли кўрилатган участканинг иккита кесими учун миқдор аниқланади:

$$\text{Участканинг бошида, } z_1 = 0; \quad M_I(0) = M = 3 \text{ кНм};$$

$$\text{Участканинг охирида, } z_1 = 3 \text{ м}; \quad M_I(3 \text{ м}) = 3 - 0.33 \cdot 3 = 2 \text{ кНм}.$$

II участка, II-II кесим, $0 \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$;

$$Q_{II}(z_2) = q z_2 - V_B; \quad M_{II}(z_2) = V_B z_2 - q \frac{z_2^2}{2}.$$

Кўндаланг кучнинг тегишли кесимдаги миқдори аниқланади:

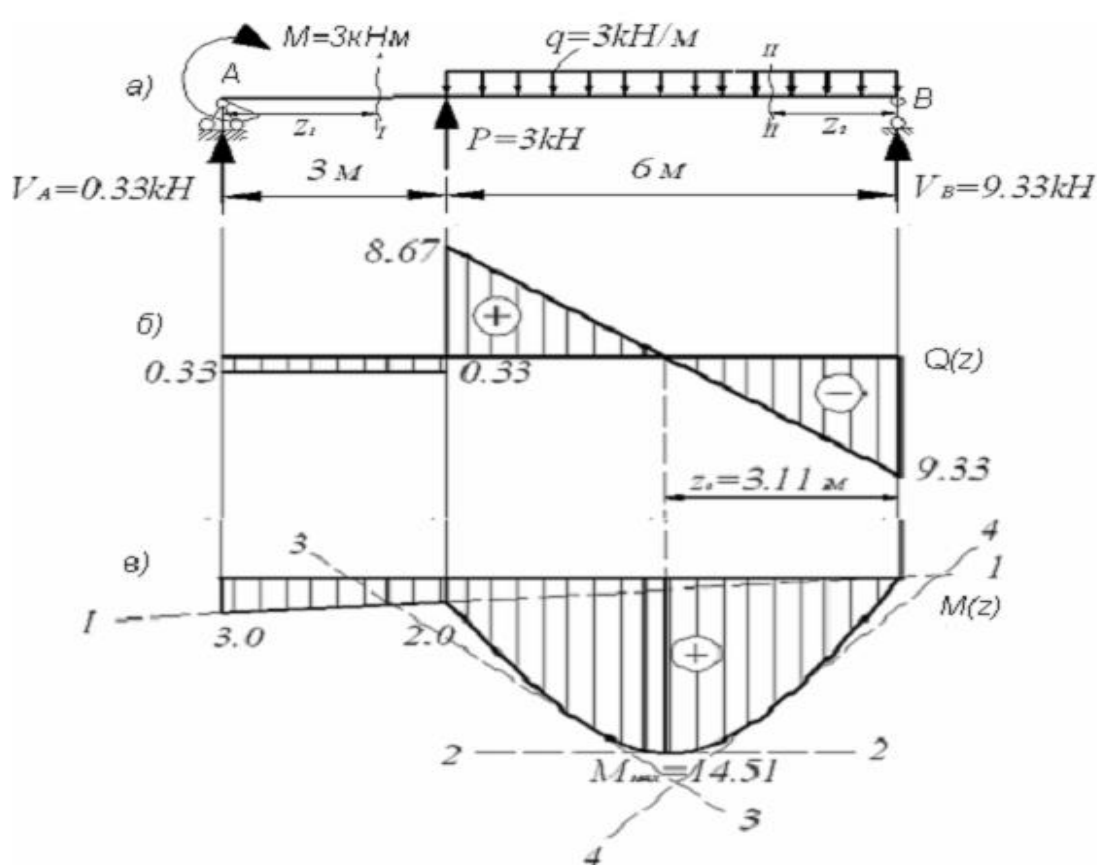
Участканинг бошида, $z_2 = 0 \text{ м}$; $Q_{II}(0) = -V_B = -9.33 \text{ кН}$;

Участканинг охирида, $z_2 = 3 \text{ м}$; $Q_{II}(3 \text{ м}) = 3 \cdot 6 - 9.33 = 8.67 \text{ кН}$.

Эгувчи момент тенгламаси $M_{II}(z_2)$ — квадрат парабола тенгламасидир, шу сабабли унинг миқдорини учта кесимда аниқланади: участканинг бошида $z_2 = 0$; $M_{II}(0) = 0$;

Участканинг охирида, $z_2 = 6 \text{ м}$; $M_{II}(6 \text{ м}) = 9.33 \cdot 6 - 3 \frac{6^2}{2} = 0$.

Учинчи кесим сифатида кўндаланг куч нолга тенг бўлган кесим олинади. Мазкур кесим абсциссаси z_0 аниқланади. Бунинг учун шу участканинг кўндаланг куч тенгламаси нолга тенглаштирилиб, z_0 масофа топилади.



$$Q_{II}(z_0) = q z_0 - V_B = 0, \text{ бундан } z_0 = V_B / q = 9.33 / 3 = 3.11 \text{ м.}$$

Аниқланган z_0 миқдorigа асосан, участкада максимал эгувчи момент қиймати топилади

$$M_{\max} = M_{II}(3.11 \text{ м}) = 9.33 \cdot 3.11 - 3 \frac{3.11^2}{2} = 14.51 \text{ кНм}.$$

4. $Q(z)$ ва $M(z)$ эпюраларни чизамиз.

Балканинг I ва II участкалари учун аниқланган кўндаланг куч Q эпюралар масштаб билан чизилади (3.4 б ва в-расм). Мазкур эпюралар балканинг схемаси остида чизилади.

2-мисол. Бир учи қистириб маҳкамланган балка-консолни эгувчи момент ва кўндаланг куч эпюралари қурилсин (3.5 а-расм).

Берилган консол балкада таянч реакцияларини аниқлашнинг зарурияти йўқ. Балканинг эркин учидан участкаларга ажратиб, кўндаланг куч ва эгувчи момент тенгламалари тузилади.

I участка, I-I кесими, $0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$ (расм 3.5, а).

Кўндаланг куч тенграмаси: $Q_I(z_1) = -P + qz_1$;

Эгувчи момент тенграмаси: $M_I(z_1) = Pz_1 - q \frac{z_1^2}{2}$.

Участканинг бошидаги кўндаланг куч ва эгувчи момент миқдорлари ҳисобланади:

$$z_1 = 0; Q_I(0) = -P = 9 \text{ кН}; M_I(0) = 0.$$

Участканинг охиридаги кесим учун кўндаланг куч ва эгувчи момент қийматлари аниқланади:

$$z_1 = 4 \text{ м}; Q_I(4 \text{ м}) = -9 + 3 \cdot 4 = 3 \text{ кН}; M_I(4 \text{ м}) = 9 \cdot 4 - 3 \frac{4^2}{2} = 12 \text{ кНм}.$$

Кўндаланг куч нолга тенг бўлган кесим абсциссаси топилади:

$$Q_I(z_0) = -P + qz_0 = 0; z_0 = P/q = 9/3 = 3 \text{ м}.$$

Аниқланган z_0 миқдорига асосан участкада максимал эгувчи момент қиймати топилади:

$$M_{\max} = M_{II}(3 \text{ м}) = 9 \cdot 3 - 3 \frac{3^2}{2} = 13.5 \text{ кНм}.$$

II участка, II-II кесими, $4 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$.

Қўрилаётган участка учун кўндаланг куч ва эгувчи момент тенгламалари тузилади.

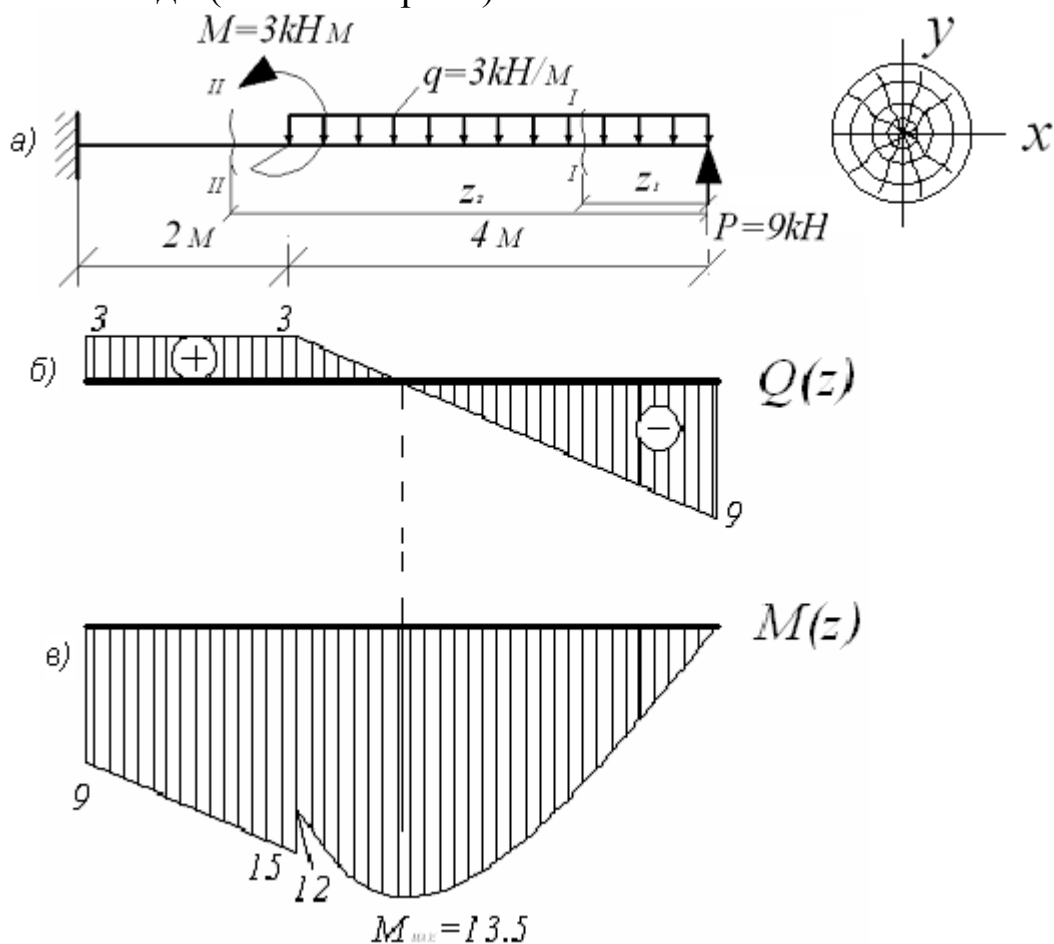
$$Q_{II}(z_2) = -P + q \cdot 4; M_{II}(z_2) = Pz_2 - q \cdot 4 \cdot (z_2 - 2) + M.$$

Участканинг тегишли кесимларида кўндаланг куч ва эгувчи момент миқдорлари уларнинг тенгламаларига асосан ҳисоблаб топилади.

$$z_2 = 4 \text{ м}; Q_{II}(4 \text{ м}) = -9 + 3 \cdot 4 = 3 \text{ кН}; M_{II}(4 \text{ м}) = 9 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot (4 - 2) + 3 = 15 \text{ кНм}.$$

$$z_2 = 6 \text{ м}; Q_{II}(6 \text{ м}) = -9 + 3 \cdot 4 = 3 \text{ кН}; M_{II}(6 \text{ м}) = 9 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot (6 - 2) + 3 = 9 \text{ кНм}.$$

Ҳар бир участка учун аниқланган Q ва M миқдорларга асосан, уларнинг тегишли эпюралари балканинг схемаси остида масштаб бўйича чизилади (3.5 б ва в-расм).



3.5-расм

3-мисол. Консолли балка учун (3.6 а-расм) эгувчи момент ва кўндаланг куч эпюралари қурилсин.

1. Балканинг схемасида таянч реакция векторларининг йўналишини белгиланиб, миқдорлари аниқланади.

Ўнг тарафдаги таянч реакцияни аниқлаш учун статиканинг мувозанат тенгламаси тузилади

$$\sum M_A = 0; -M - P_1 \cdot 4 + q \cdot 8 \cdot 8 - V_6 \cdot 12 + P_2 \cdot 14 = 0;$$

$$V_b = \frac{-M - P_1 \cdot 4 + q \cdot 8 \cdot 8 + P_2 \cdot 14}{12} = \frac{-4 - 24 \cdot 4 + 4 \cdot 8 \cdot 8 + 6 \cdot 14}{12} = \frac{240}{12} = 20 \text{ кН}.$$

Чап тарафдаги таянчнинг реакция кучи аниқланади

$$\sum M_B = 0; -M + P_1 \cdot 8 - q \cdot 8 \cdot 4 + P_2 \cdot 2 - V_A \cdot 12 = 0;$$

$$V_a = \frac{M - P_1 \cdot 8 + q \cdot 8 \cdot 4 - P_2 \cdot 2}{12} = \frac{4 - 24 \cdot 8 + 4 \cdot 8 \cdot 4 - 6 \cdot 2}{12} = \frac{-72}{12} = -6 \text{ кН}.$$

Берилган балка учта участкадан иборат, уларни I, II ва III рақамлар билан белгиланади (3.6 а-рasm).

2. Балканинг участкаси учун кўндаланг куч ва эгувчи момент тенгламаларини тузиб, эпюралар чизиш учун мазкур участкаларда характерли ординаталар топилади:

I участка, I-I кесими, $0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$.

$$Q_I(z_1) = -V_A; \quad M_I(z_1) = -V_A z_1 - M.$$

$$z_1 = 0; \quad Q_I(0) = -V_A = -6 \text{ кН}; \quad M_I(0) = -M = -4 \text{ кНм};$$

$$z_1 = 4 \text{ м}; \quad Q_I(4 \text{ м}) = -V_A = -4 \text{ кН}; \quad M_I(4 \text{ м}) = -6 \cdot 4 - 4 = -28 \text{ кНм}.$$

II участка, II-II кесими, $2 \text{ м} \leq z_2 \leq 10 \text{ м}$.

$$Q(z) \text{ ва } M(z) \text{ тенгламалари: } Q_{II}(z_2) = P_2 - V_B + q(z_2 - 2);$$

$$M_{II}(z_2) = -P_2 \cdot z_2 + V_B(z_2 - 2) - q \frac{(z_2 - 2)^2}{2}.$$

Участканинг бошида ва охиридаги микдорларни аниқлаш:

$$z_2 = 2 \text{ м}; \quad Q_{II}(2 \text{ м}) = -6 - 20 + 4(2 - 2) = -14 \text{ кН};$$

$$M_{II}(2 \text{ м}) = -6 \cdot 2 + 20(2 - 2) - 4 \frac{(2 - 2)^2}{2} = -12 \text{ кНм};$$

$$z_2 = 10 \text{ м}; \quad Q_{II}(10 \text{ м}) = -6 - 20 + 4(10 - 2) = 18 \text{ кН};$$

$$M_{II}(10 \text{ м}) = -6 \cdot 10 + 20(10 - 2) - 4 \frac{(10 - 2)^2}{2} = -28 \text{ кНм}.$$

Участканинг максимал эгувчи момент микдорини топиш:

$$Q_{II}(z_0) = P_2 - V_B + q(z_0 - 2) = 0; \quad z_0 = \frac{V_B + 2q - P_2}{q} = \frac{20 + 2 \cdot 4 - 6}{4} = 5.5 \text{ м};$$

$$M_{II}(5.5 \text{ м}) = -6 \cdot 5.5 + 20(5.5 - 2) - 4 \frac{(5.5 - 2)^2}{2} = 12.5 \text{ кНм}.$$

III участка, III-III кесими, $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$.

Мазкур участканинг кесимдан ўнг қисмини кўриб, қуйидаги тенгламалар тузилади:

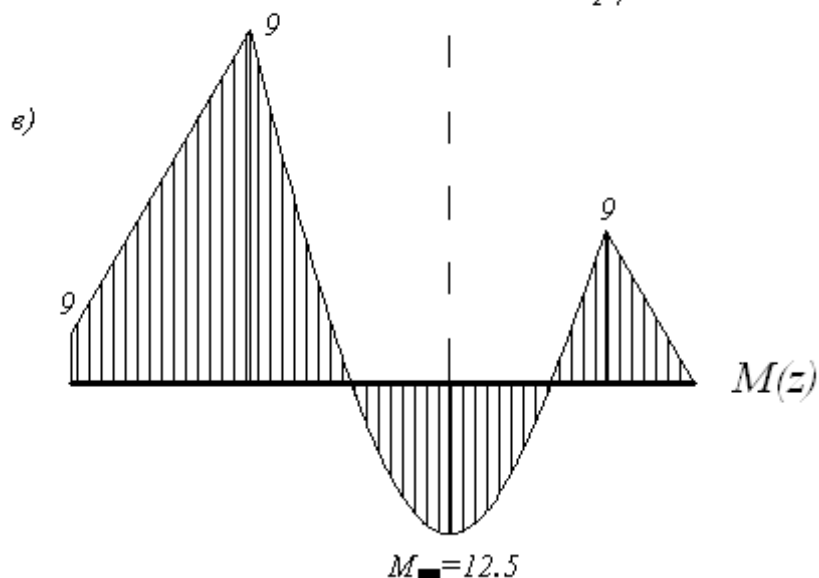
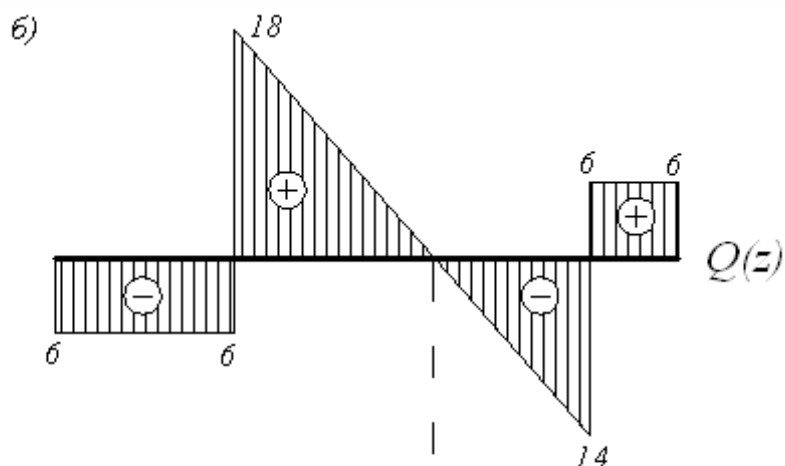
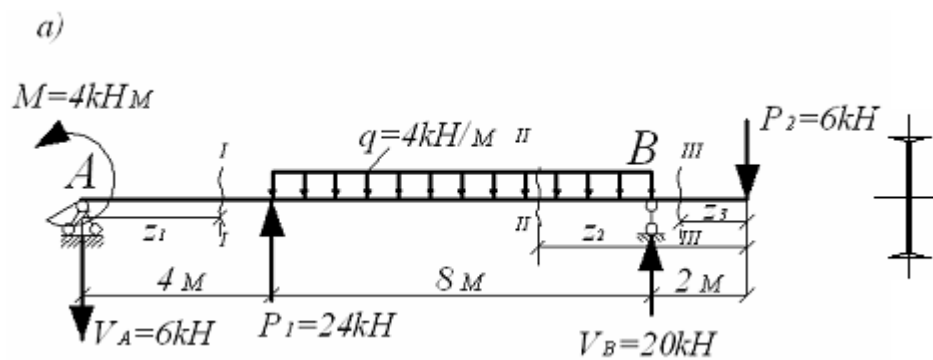
$$Q_{III}(z_3) = P_2; \quad M_{III}(z_3) = P_2 z_3.$$

Участканинг боши ва охирида кўндаланг куч ва эгувчи момент микдорлари топилади:

$$z_3 = 0; \quad Q_{III}(0) = P_2 = 6 \text{ кН}; \quad M_{III}(0) = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м}; \quad Q_{III}(2 \text{ м}) = P_2 = 6 \text{ кН}; \quad M_{III}(2 \text{ м}) = 6 \cdot 2 = 12 \text{ кНм} \text{ ва тегишли эпюралар чизилади (3.6 б ва в-рasm).}$$

4-мисол. Бир шарнирли балка учун кўндаланг куч ва эгувчи момент эпюралари қурилсин (3.7, а-рasm).



3.6-расм

1. Таянч реакциялар аниқлансин. Бу балкада учта номаълум таянч реакция кучлари бор (реакция кучнинг горизонтал тузувчиси нолга тенгдир). Уларнинг йўналиши балка схемасида кўрсатилиб, миқдорини аниқлаш учун учта тенглама тузилади:

$$\sum M_c^{\text{унг}} = 0; P \cdot 4 + M - V_o \cdot 8 = 0; \quad V_o = \frac{P \cdot 4 + M}{8} = \frac{36 \cdot 4 + 16}{8} = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 8 \cdot 4 + P \cdot 14 + M - V_o \cdot 18 - V_B \cdot 8 = 0,$$

$$V_B = \frac{q \cdot 8 \cdot 4 + P \cdot 14 + M - V_D \cdot 18}{8} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 4 + 36 \cdot 14 + 16 - 20 \cdot 18}{8} = 68 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; -q \cdot 8 \cdot 4 + P \cdot 6 + M - V_D \cdot 10 - V_A \cdot 8 = 0,$$

$$V_A = \frac{q \cdot 8 \cdot 4 - P \cdot 6 - M + V_D \cdot 10}{8} = \frac{12 \cdot 8 \cdot 4 - 36 \cdot 6 - 16 + 20 \cdot 10}{8} = 44 \text{ кН}.$$

Аниқланган таянч реакция миқдорларини балка схемасига кўчириб ёзиб, қуйидаги текшириш иши бажарилади:

$$\sum Y = 0; V_A + V_B + V_D - q \cdot 8 - P = 0;$$

$$44 + 68 + 20 - 12 \cdot 8 - 36 = 0; 132 - 132 = 0; 0 = 0.$$

2. Балкани участкаларга ажратиб, уларнинг ҳар бирига $Q(z)$ ва $M(z)$ тенгламалар ёзилади

I участка, I-I кесими, $0 \leq z_1 \leq 8 \text{ м}$.

$$Q_I(z_1) = V_A - qz_1; Q_I(0) = V_A = 44 \text{ кН}; Q_I(8 \text{ м}) = 44 - 12 \cdot 8 = -52 \text{ кН}.$$

$$M_I(z_1) = V_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2}; M_I(0) = 0; M_I(8 \text{ м}) = 44 \cdot 8 - 12 \frac{8^2}{2} = -32 \text{ кНм}.$$

Қўшимча биринчи участкада қўндаланг куч нолга тенг бўлган кесимдаги максимал эгувчи момент миқдори аниқланади.

$$Q_I(z_0) = V_A - qz_0 = 0; z_0 = \frac{V_A}{q} = \frac{44}{12} = 3.67 \text{ м};$$

$$M_{\max} = M_I(3.67 \text{ м}) = 44 \cdot 3.67 - 12 \frac{3.67^2}{2} = 80.68 \text{ кНм}.$$

Балка схемаси остида чизиладиган (3.7 б ва в-расм) эпюраларни чизиш учун қолган участкаларнинг қўндаланг куч ва эгувчи момент тенгламалари тузилади:

II участка, II-II кесими, $8 \text{ м} \leq z_1 \leq 10 \text{ м}$.

$$\text{Қўндаланг куч тенгламаси: } Q_{II}(z_1) = V_A - q8 + V_B;$$

$$\text{Эгувчи момент тенгламаси: } M_{II}(z_1) = V_A z_1 - q8(z_1 - 4) + V_B(z_1 - 8).$$

III участка, III-III кесими, $4 \text{ м} \leq z_2 \leq 8 \text{ м}$.

$$\text{Қўндаланг куч тенгламаси: } Q_{III}(z_2) = -V_D + P.$$

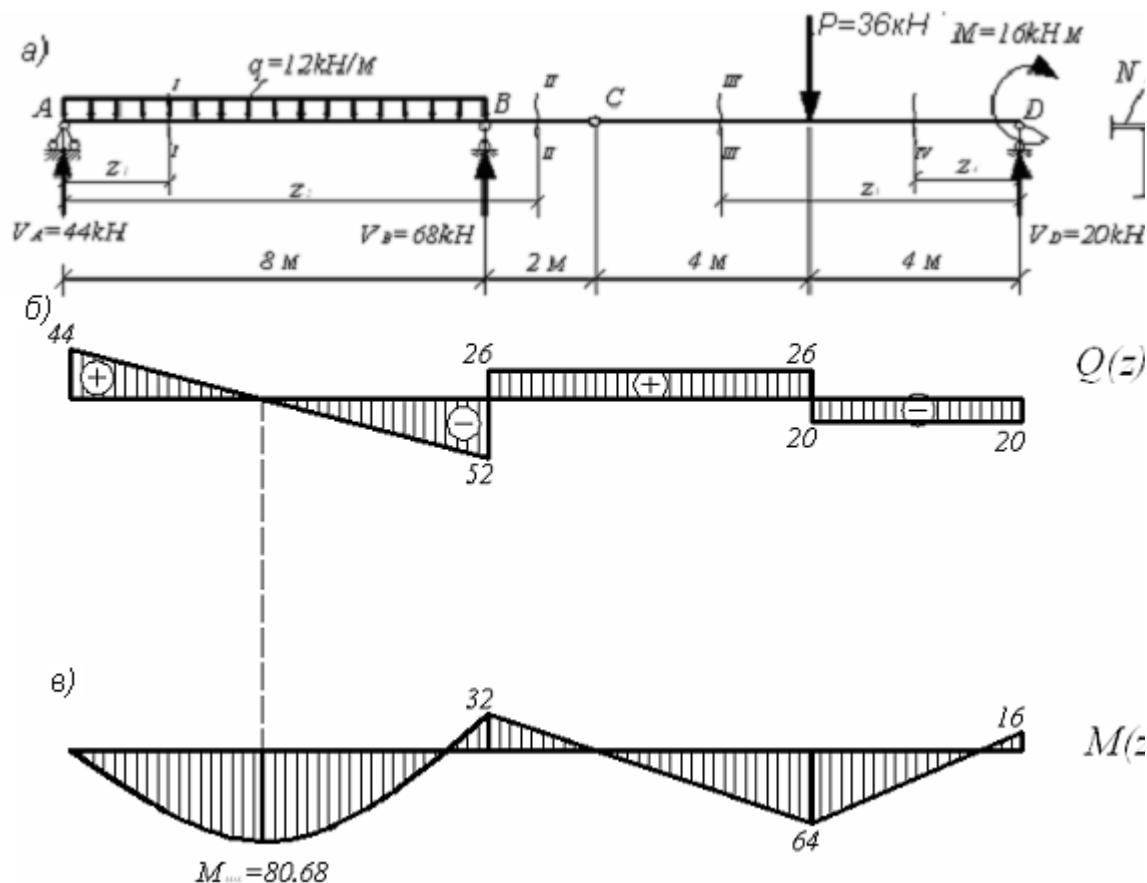
$$\text{Эгувчи момент тенгламаси: } M_{III}(z_2) = -M + V_D z_2 - P(z_2 - 4).$$

IV участка, IV-IV кесими, $0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$.

$$\text{Қўндаланг куч тенгламаси: } Q_{IV}(z_2) = -V_D.$$

$$\text{Эгувчи момент тенгламаси: } M_{IV}(z_2) = -M + V_D z_2.$$

Тузилган тенгламаларга асосан, ҳар бир участканинг характерли кесимлари учун тегишли миқдорлари аниқланиб, эпюралар курилади. Мазкур қўлланманинг ҳажми чекланганлиги сабабли эпюралар ординаталарининг ҳамма участкадаги ҳисобини келтириш имкони бўлмади. Бу ишни талабалар мустақил бажариб кўриши тавсия этилади.



3.7-расм

3.6 Кўндаланг куч ва эгувчи момент эпюраларини текшириш

Эпюралар қурилгандан кейин улар албатта текширилиши лозим. Текшириш Д.И. Журавскийнинг I ва II теоремаларига асосланган, яъни:

$$\frac{dM(z)}{dz} = Q(z), \quad \frac{dQ(z)}{dz} = -q(z)$$

Маълумки, эгувчи момент — $M(z)$ эпюрасининг бирор нуқтасига ўтказилган уринма чизиғининг оғиш бурчагини тангенс қиймати шу нуқтадаги кўндаланг куч миқдорини беради, яъни $tg(\alpha) = Q(z)$.

Иккинчи теоремага асосан кўндаланг куч эпюрасининг бирор нуқтасига ўтказилган уринма чизиқнинг оғиш бурчаги тангенс таралган юкнинг тескари ишора билан олинган миқдорига тенгдир, яъни: $tg(\beta) = -q(z)$.

Юқорида берилган қоидаларга биноан, биринчи мисолда (3.4-расм) қурилган балка эпюралари текширилади. Биринчи

участканинг $M(z)$ эпюрасига ўтказилган уринма I-I чизиғининг оғиш бурчагининг тангенс миқдори ўзгармас ($\alpha = \text{const}$). Шу сабабли кўндаланг куч эпюрасининг чизиғи ҳисоб чизиғига параллел ўтказилган. Энди иккинчи участкани кўрайлик. Эгувчи момент $M(z)$ эпюрасида максимум қийматга эга бўлган кесимнинг нуқтасида 2-2 уринма чизиғи ўтказилади. У ҳисоб чизиғига параллел ўтади ($\text{tg } \alpha_2 = 0$; $Q(z) = 0$). Эгувчи момент миқдори максимум қийматга эга бўлган кесимдан чап томонда 3-3 уринма чизиғи ўтказилади. Унинг оғиш бурчаги тангенс мусбат бўлгани учун шу ораликда кўндаланг куч ҳам мусбат бўлади ($\text{tg } \alpha_3 > 0$; $Q(z) > 0$).

Энди уринма чизиғи мазкур кесимдан ўнг томонда ўтказилади (4-4 чизиғи) ва ҳосил бўлган α_4 бурчакнинг ишораси билан кўндаланг куч ишорасининг боғланиши текширилади ($\text{tg } \alpha_4 < 0$; $Q(z) < 0$).

Демак, агар текшириляётган участкада кўндаланг куч мусбат бўлса, эгувчи момент миқдори ортиб боради, акс ҳолда камаяди.

Агар участкаларнинг чегарасида тўпланган R кучлар таъсир қилаётган бўлса, у ҳолда кўндаланг куч эпюрасининг тегишли кесимларида узилиш (сакраш) пайдо бўлади. Сакраш миқдори тегишли R кучнинг қийматига тенг. Эгувчи момент эпюрасида тўпланган R кучлар синиш ҳосил қилади.

Балкага қўйилган тўпланган моментлар – M эгувчи момент эпюрасининг тегишли кесимларида шу моментларнинг миқдorigа тенг сакраш ҳосил қилади.

3.7 Балканинг кўндаланг кесимида нормал ва уринма кучланишларни аниқлаш

Кўндаланг эгилишда балкада нормал ва уринма кучланишлар ҳосил бўлади. Балка кўндаланг кесимининг ихтиёрий нуқтасида нормал кучланиш қуйидаги ифода орқали аниқланади:

$$\sigma = \frac{M}{I_x} \cdot y \quad (3.6)$$

Бу формулада: M – кўриляётган кўндаланг кесимдаги эгувчи момент миқдори. Мазкур миқдор эгувчи момент эпюрасининг тегишли кесимидан олинади.

I_x – кўндаланг кесим юзининг нейтрал ўқиға нисбатан олинган инерция моменти.

y – нейтрал ўқдан нормал кучланиш аниқланаётган нуқтагача бўлган масофа.

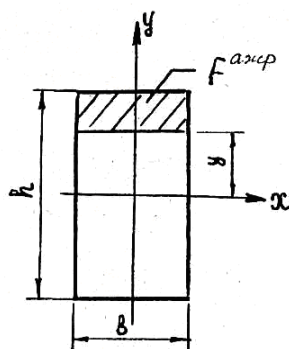
Балка кўндаланг кесимининг нейтрал ўқидан энг узок масофада жойлашган нуқталарида энг катта мусбат ва энг катта манфий нормал кучланишлар ҳосил бўлади. Уларнинг миқдорини қуйидаги ифодадан фойдаланиб аниқлаш мумкин:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} \quad (3.7)$$

Бунда, $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$ — кўндаланг кесим юзининг нейтрал ўқиға нисбатан олинган қаршилик моменти.

Кўндаланг кесим нуқталарида уринма кучланишни Д.И. Журавский формуласидан фойдаланиб аниқлаш мумкин (3.8-расм).

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{ажр}}}{I_x \cdot b_y} \quad (3.8)$$



3.8-расм

Юқоридаги (3.6) ва (3.8) ларға асосан, балканинг нейтрал қатламида нормал кучланиш нолға тенг, уринма кучланиш эса максимал қийматға эришади. Балканинг сиртки нуқталарида уринма кучланиш нолға тенг бўлиб, нормал кучланиш максимал ёки минимал қийматларға тенг.

3.8. Кўндаланг кесим юзаларининг қаршилик моментлари

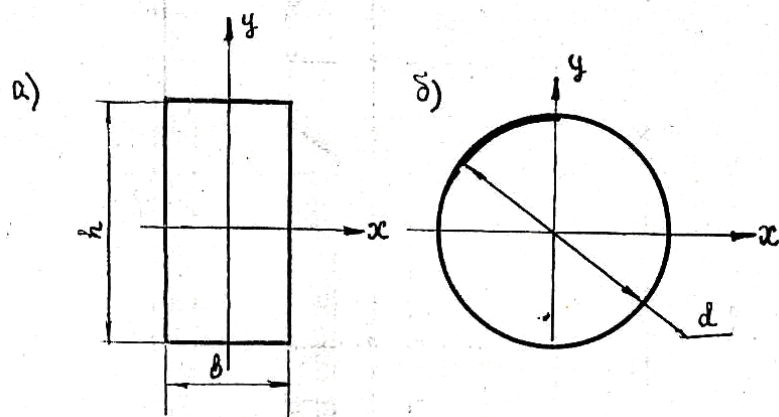
Балкаларнинг кўндаланг кесимлари оддий ва мураккаб шакллардан ташкил топади. Оддий шаклларға тўғри тўртбурчак ва доира кўпроқ ишлатилади. Ўлчамлари b ва h тенг тўғри тўртбурчакли юзанинг (3.9 а-расм) қаршилик моменти қуйидаги формула ёрдамида аниқланади:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \quad (3.9)$$

Диаметри d тенг доиравий кўндаланг кесим юзанинг (3.9 б-расм) қаршилик моментини аниқлаш формуласи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \quad (3.10)$$

Агар балканинг кўндаланг кесими бурчакликлар, қўштавр ва швеллерлардан ташкил қилинган бўлса, у ҳолда уларнинг қаршилик моментлари тегишли сортаментлардан олиниши лозим.



3.9-расм

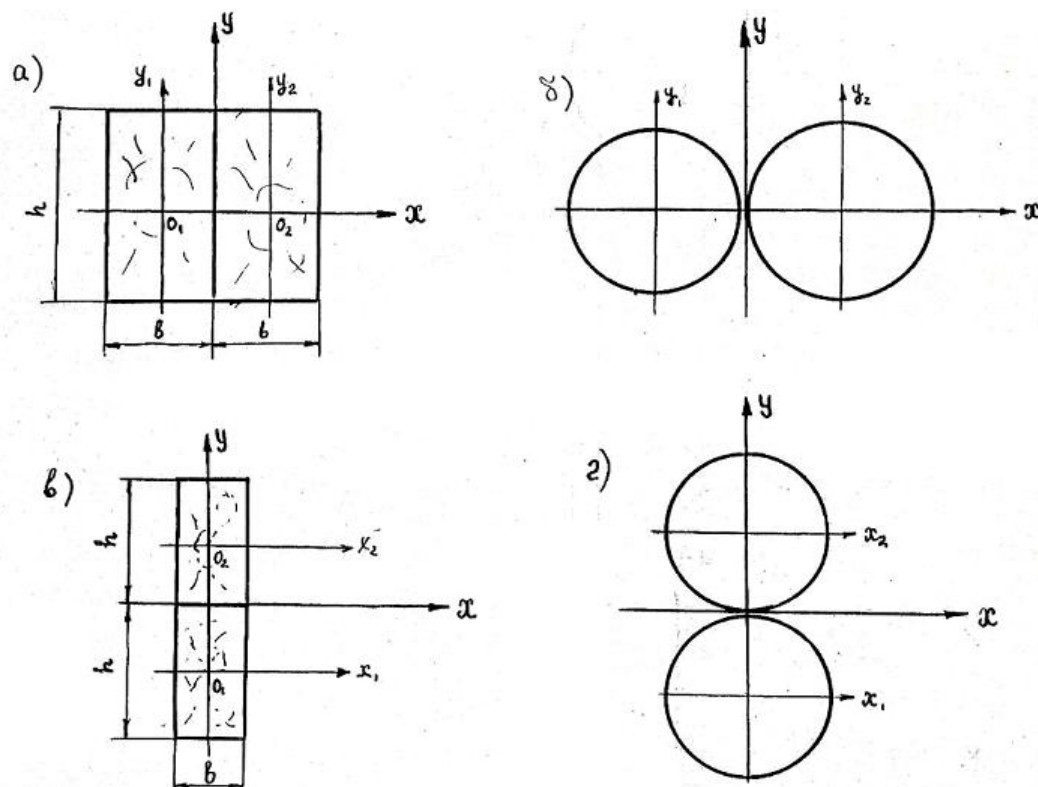
Айрим пайтда балканинг кўтариш қобилиятини кучайтириш мақсадида, кўндаланг кесим оддий шакллардан ёки прокат буюмлардан бўлган балкалар махсус бирикмалар ёрдамида бирлаштирилади. Бундай балкаларни йиғма кўндаланг кесимли балкалар дейилади. Йиғма кўндаланг кесимли балкаларда улар ташкил этувчиси юк текислигига нисбатан икки вариантда жойлашган бўлиши мумкин. Биринчи вариантда (3.10 а ва б-расм) ташкил этувчиларнинг нейтрал ўқлари балканинг нейтрал ўқига устма-уст тушади ва бундай ҳолда қаршилик моменти миқдори ташкил этувчиларнинг қаршилик моментлари йиғиндисига тенг.

Иккинчи вариант бўйича йиғма балкаларни тузишда уларни ташкил этувчи балкалар ташқи юк текислигида устма-уст жойлаштирилади (3.10 в ва г-расм). Бундай йиғма балка нейтрал ўқи ҳолатини аниқлаш учун кўндаланг кесим юзининг оғирлик маркази маълум бўлиши керак. Агар мазкур балканинг кўндаланг кесими иккита симметрия ўқларига эга бўлса, у ҳолда уларнинг биттаси (юк текислигига тик бўлган) нейтрал ўққа тўғри келади. Симметрия ўқи битта бўлган кўндаланг кесим юзаларининг оғирлик марказини аниқлаш учун материаллар қаршилиги курсининг махсус бобида берилган формулалардан фойдаланиш лозим топилади. Иккинчи вариант бўйича ташкил қилинган йиғма балканинг қаршилик моментини унинг нейтрал ўқига нисбатан олинган инерция моменти орқали аниқлаш лозим:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad (3.11)$$

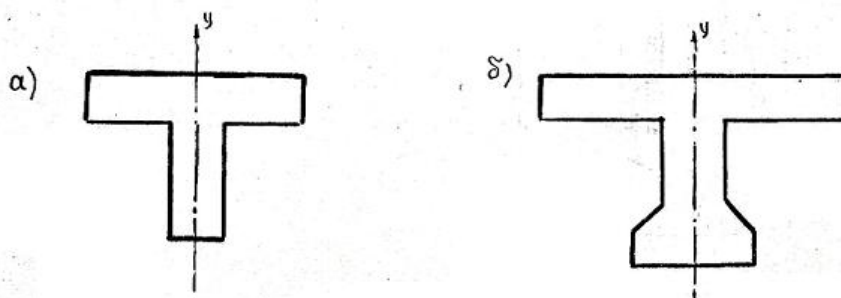
Бу формулада I_x — йиғма балканинг кўндаланг кесим юзининг нейтрал ўқига нисбатан олинган инерция моменти; $y_{\max}$ —балканинг

нейтрал қатламидан энг узоқ жойлашган сиртқи қатламигача бўлган масофа.



3.10-расм

Йиғма балкалардан ташқари кўндаланг кесими мураккаб шаклли яхлит балкалар ҳам учрайди (3.11-расм, а ва б). Бундай балкалар кўпинча бетон конструкцияси сифатида ишлатилади. Мазкур балкаларнинг кўндаланг кесим юзининг қаршилик момент миқдорини аниқлаш учун дастлаб унинг оғирлик марказини аниқлаб, кейин (3.11) да келтирилган формула орқали топилади



3.11-расм

3.9 Балкаларни мустаҳкамликка ҳисоблаш

Балкаларни мустаҳкамликка ҳисоблаш деганда олдимизга қўйилган мақсад ва вазиятга қараб, материаллар қаршилиги

курсининг уч хил масалаларидан бирини хал қилишни тушунилади. Мазкур масалалар балкалар учун қуйидагича қуйилади:

1. Кўндаланг кесимнинг ўлчамларини аниқлаш, яъни кўндаланг кесимнинг шакли берилган, материалнинг мустаҳкамлик характеристикалари эса маълум, кўндаланг кесим ўлчамларини аниқлаш лозим. Агар балка прокат буюмларлардан тайёрланган бўлса, у ҳолда сортаментдан унинг рақами аниқланади.

2. Балканинг мустаҳкамлигини текшириш. Бу масалада балканинг кўндаланг кесим ўлчамлари олдиндан белгиланган, материалнинг мустаҳкамлик характеристикалари маълум деб олинади, балкада ҳосил бўладиган максимал кучланишни эса аниқлаш керак.

3. Балканинг мустаҳкамлик шартига асосланиб, унинг юк кўтариш қобилиятини топиш.

Амалда кўпинча биринчи ва иккинчи масалалар учрайди. Улар балканинг мустаҳкамлик шартидан ечилади. Мазкур шарт шундай ёзилади:

$$\sigma_{\max} = [\sigma] \quad (3.12)$$

бунда, $\sigma_{\max}$ — балканинг хавфли кесимидаги максимал нормал кучланиши; $[\sigma]$ — балка materiali учун рухсат этилган нормал кучланиш.

Хавфли кесим сифатида балкада абсолют қиймат бўйича энг катта эгувчи момент миқдорига эга кўндаланг кесим олинади. Уни эгувчи момент эпюрасидан аниқлаш мумкин. Хавфли кесимдаги максимал нормал кучланишни аниқлаш учун юқорида келтирилган (3.7) ифодадан фойдаланиш лозим.

1. Балкаларнинг кўндаланг кесим ўлчамларини аниқлаш учун (3.12) шартидан қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$W_{\text{зар}} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} \quad (3.13)$$

$W_{\text{зар}}$ — балканинг мустаҳкамлигини таъминловчи кўндаланг кесим учун зарур бўлган қаршилик моменти;

$M_{\max}$ — балканинг хавфли кесимдаги абсолют қиймати бўйича олинган максимал эгувчи момент миқдори. У эгувчи момент эпюрасидан олинади.

2. Балкалар мустаҳкамлигини текшириш.

Балкаларнинг мустаҳкамлигини текшириш, кўндаланг кесимнинг ўлчамлари маълум балкалар учун бажарилади. Бу текшириш масаласи (3.12) шартнинг бажарилишига асосланган. Балканинг хавфли кесимдаги максимал нормал кучланиш рухсат этилган кучланишдан ± 5 фоизгина фарқ қилиши мумкин, акс ҳолда балканинг мустаҳкамлиги ёки материал тежалиши таъминланманган бўлади. Балкадаги нормал кучланиш (3.7) ифодага асосан аниқланади.

Балкаларни мустаҳкамликка ҳисоблаш 1-4 мисолларда кўрилган балкалар учун ўтказилади.

5-мисол. 3.4-рasm, а да тасвирланган тўғри тўртбурчакли кўринишдаги кўндаланг кесимли оддий балканинг кесим ўлчамларини ҳисоблаш керак.

Эгувчи момент эпюрасидан (3.4 в-рasm) хавфли кесимдаги эгувчи момент миқдори олинади: $M_{\max} = 14.51 \text{ кНм} = 1451 \text{ кНсм}$

Балканинг материали қарағай, рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 1.2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$. Юқорида берилган ифода бўйича балканинг мустаҳкамлигини таъминловчи қаршилик момент миқдори аниқланади:

$$W_{\text{зар}} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{1451}{1.2} = 1209 \text{ см}^3.$$

Тўғри тўртбурчакнинг қаршилик моменти (3.9) ифода орқали аниқланади:

$W_x = \frac{bh^2}{6} = 1209 \text{ см}^3$, $b = 0.5h$. Бундан кўндаланг кесим ўлчамлари аниқланади:

$$h = \sqrt[3]{\frac{1209 \cdot 6}{0.5}} = 24.4 \text{ см} \approx 25 \text{ см}; \quad b = 0.5h = 0.5 \cdot 25 = 12.5 \text{ см}.$$

Балканинг тўртбурчакли кесим ўлчамлари $b = 12.5 \text{ см}$; $h = 25 \text{ см}$ деб қабул қилинади.

Балканинг мустаҳкамлиги (3.12) шарт бўйича текширилади. Кўндаланг кесимнинг қаршилик моменти аниқланади, кейин балкадаги ҳақиқий кучланишни топиб, рухсат этилган кучланиш билан солиштирилади:

$$\sigma_{\text{хак}} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{1451 \cdot 6}{12.5 \cdot 25^2} \approx 0.9 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Балкадаги ҳақиқий кучланиш $\sigma_{\text{хак}} \approx 0.9 \text{ кН/см}^2$ тахминан рухсат этилган кучланишга тенг, демак балка мустаҳкамлиги таъминланган.

6-мисол. 2-мисолда кўрилган доира шаклидаги кўндаланг кесимли консол балканинг кесим ўлчамлари аниқлансин.

Эгувчи момент эпюрасидан (3.5 в-рasm) хавфли кесимдаги ордината миқдори олинади: $M_{\text{max}} = 15 \text{ кНм} = 1500 \text{ кНсм}$.

Балка материалининг рухсат этилган кучланиши $[\sigma] = 1.2 \text{ кН/см}^2$ олиб, мустаҳкамликни таъминловчи қаршилик момент миқдори ҳисобланади: $W_{\text{зар}} = \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{1500}{1.2} = 1250 \text{ см}^3$.

Доира шаклидаги кесим юзасининг қаршилик моменти геометрик ифодасини юқорида ҳисобланган зарур қаршилик момент миқдорига тенглаштириб, кўндаланг кесим диаметри топилади ва қабул қилинган ўлчамлари бўйича балканинг мустаҳкамлиги текширилади:

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = 1250 ; d = \sqrt[3]{\frac{1250 \cdot 32}{3.14}} = \sqrt[3]{12739} = 23.4 \text{ см.}$$

Доиравий кесим диаметри $d=24 \text{ см}$ деб қабул қилинади.

$$\sigma_{\text{хак}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{1500 \cdot 32}{3.14 \cdot 24^3} = 1.106 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < 1.2 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}.$$

Демак балканинг мустаҳкамлиги таъминланган.

7-мисол. 3-мисолда кўрилган балка учун қўштаврли кўндаланг кесим танлансин (3.6 а-рasm); $[\sigma] = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$. Мазкур балка учун чизилган эгувчи момент эпюрасидан (3.6 в-рasm) абсолют қиймати бўйича унинг энг катта миқдори олинади $M_{\text{max}} = 28 \text{ кНм} = 2800 \text{ кНсм}$ ва (13) асосан зарур бўлган қаршилик момент аниқланади.

$$W_{\text{зар}} = \frac{M_{\text{max}}}{[\sigma]} = \frac{2800}{16} = 175 \text{ см}^3$$

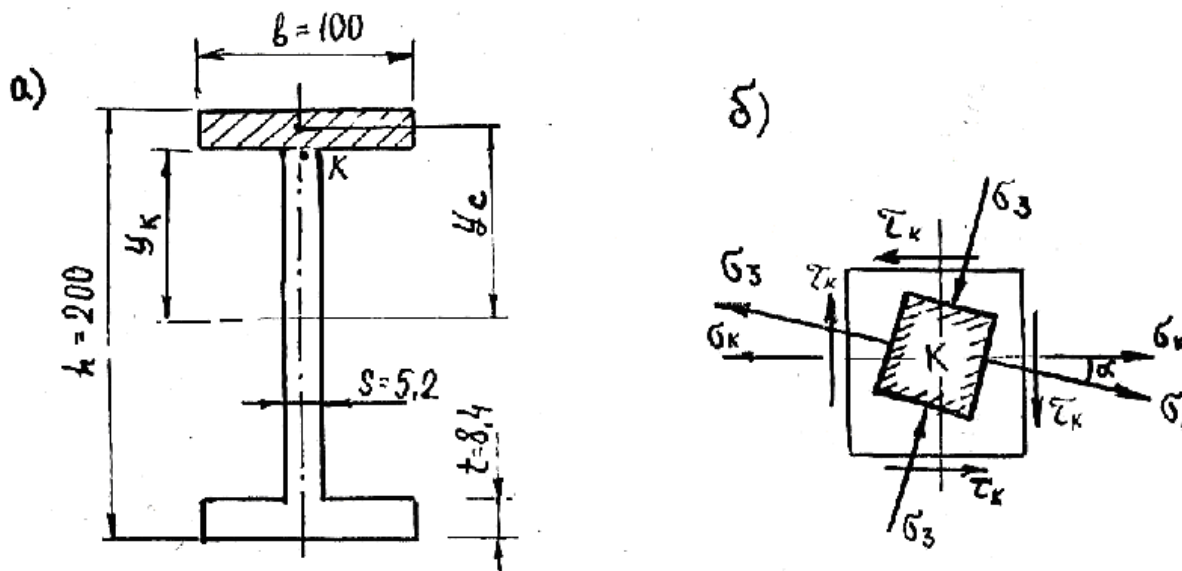
Бу миқдорга асосан сортаментдан (ГОСТ-8239-89) қўштаврнинг рақами тайинланиб, қаршилик момент миқдори кўчириб ёзилади: **I № 20** $W_x = 184 \text{ см}^3$.

Балка мустаҳкамлиги текширилади:

$$\sigma_{\text{хак}} = \frac{M_{\text{max}}}{W_x} = \frac{2800}{184} = 15.22 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} < 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \text{демак, унинг}$$

мустаҳкамлиги таъминланган.

8-мисол. 4-мисолда кўрилган йиғма балка мустаҳкамлиги текшириб кўрилсин. Балка материали – пўлат, рухсат этилган кучланиш $[\sigma] = 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ га тенг (3.12-расм).



3.12-расм

Мазкур балканинг мустаҳкамлиги (3.12) да берилган шартга асосан текширилади. Максимал нормал кучланиш $\sigma_{\max}$ ни (3.7) га асосан топилади. Формулада ишлатиладиган эгувчи момент миқдори тегишли эпюрадан хавфли кесимдаги унинг ордината миқдорига тенг бўлган сон олинади, яъни $M_{\max} = 80.68 \text{ кНм} = 8068 \text{ кНсм}$ га тенг.

Балканинг мураккаб кўндаланг кесимининг қаршилиқ моментини (3.11) га асосан аниқлашдан олдин, унинг нейтрал ўқини ўтказиш керак. Маълумки, нейтрал ўқ кўндаланг кесимнинг оғирлик марказ нуқтасидан ўтади. Мазкур нуқта координаталарини аниқлашга киришилади.

Балканинг кўндаланг кесими иккита оддий фигуралар – қўштавр ва швеллердан ташкил топган. Ҳисобга зарур бўладиган геометрик характеристикалари тегишли сортаментдан кўчириб ёзилади:

1. Швеллер [№ 20, ГОСТ 8240-89, $F_1 = 23.4 \text{ см}^2$; $z_o^I = 2.07 \text{ см}$;
 $b_1 = b^I = 7.6 \text{ см}$, $I_{x_1}^I = I_{y_1}^I = 113 \text{ см}^4$; $I_{x_1}^I = I_{y_1}^I = 1520 \text{ см}^4$;
2. Қўштавр I № 24, ГОСТ 8239-72, $F_2 = 34.8 \text{ см}^2$; $b_2 = b^I = 11.5 \text{ см}$;
3. $I_{x_{II}}^{II} = I_{y_{II}}^I = 3460 \text{ см}^4$; $I_{y_1}^{II} = I_{y_1}^I = 1520 \text{ см}^4$;

Бу ўлчамларга асосан масштабда йиғма балканинг кўндаланг кесими чизиб олинади (3.13 а-рasm).

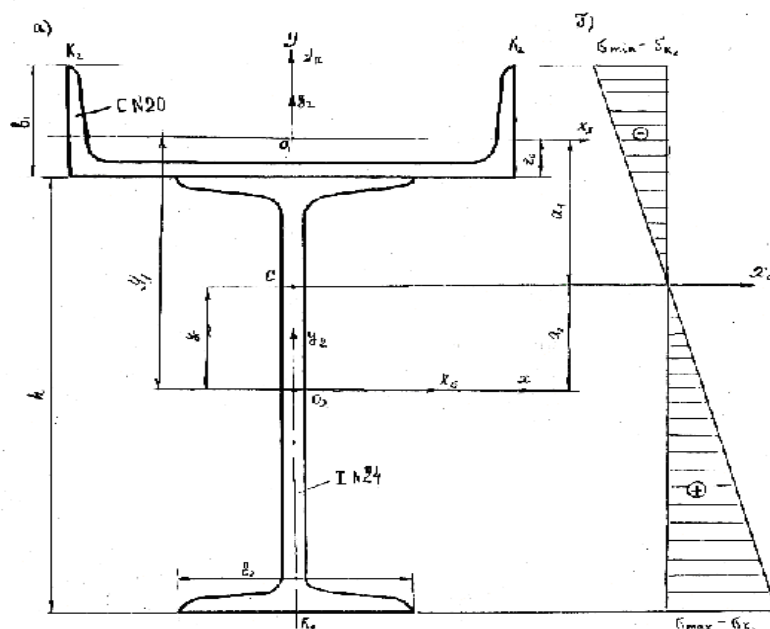
Кўндаланг кесимнинг оғирлик маркази нуқтаси (С) иккинчи фигуранинг оғирлик марказидан (O_2) ўтказилган ихтиёрий координата ўқларига нисбатан топилади.

Балканинг кўндаланг кесими вертикал симметрия ўқиға эға, шу сабабли унинг оғирлик марказининг x_c координатаси нолға тенг, иккинчи y_c координата материаллар қаршилиги курсининг махсус бобида берилган фигураларнинг оғирлик марказини аниқлаш формуласи ёрдамида аниқланади: $y_c = \sum S_x / \sum F$.

Бу формуланинг махражи кўндаланг кесимни ташкил қилувчи оддий фигуралар юзасининг йиғиндисига тенг бўлиб, улар бизға маълум. Мазкур формуланинг сурати оддий фигураларнинг ихтиёрий ўтказилган XOY координата ўқиға нисбатан статик моментлари йиғиндисига тенгдир. Ҳар бир фигуранинг статик моментлари алоҳида ҳисобланади ва номаълум y_c координата топилади

$$S_x^I = F_1 \cdot y_1 = 23.4 \cdot 14.07 = 329.24 \text{ см}^3; \quad S_x^{II} = F_2 \cdot y_2 = 34.8 \cdot 0 = 0 \text{ см}^3;$$

$$y_c = \frac{S_x^I + S_x^{II}}{F_1 + F_2} = \frac{329.24 + 0}{23.4 + 34.8} = \frac{329.24}{58.2} = 5.65 \text{ см}.$$



3.13-расм

Кўндаланг кесимнинг оғирлик маркази ҳолати аниқлангандан сўнг, уни 3.13, а - расмда белгилаб, x_c нейтрал ўқи ўтказилади.

Кейинги навбатда нейтрал ўққа нисбатан кўндаланг кесимнинг инерция моментини аниқлаш керак. Оддий фигураларнинг ўз ўқларига нисбатан инерция моментлари берилган, нейтрал ўққа нисбатан аниқлаш учун эса материаллар курсидан маълум бўлган формула ёрдамида унинг миқдорлари топилади:

$$I_{x_c}^I = I_{x_1}^I + a_1^2 \cdot F_1 = 113 + 8.42^2 \cdot 23.4 = 1772 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c}^{II} = I_{x_{II}}^{II} + a_2^2 \cdot F_2 = 3460 + (-5.65)^2 \cdot 34.8 = 4570 \text{ см}^4.$$

Юқоридаги ҳисобда ишлатилган a_1 ва a_2 ларнинг миқдори қуйидаги ифодалар орқали топишган:

$$a_1 = y_1 - y_c = 14.07 - 5.65 = 8.42 \text{ см}; \quad a_2 = y_2 - y_c = 0 - 5.65 = -5.65 \text{ см}.$$

Энди аниқланган инерция моментларини қўшиб, балканинг кўндаланг кесимининг инерция моменти аниқланади:

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} = 1772 + 4570 = 6342 \text{ см}^4.$$

Балканинг қаршилик моментини (3.11) да келтирилган формула орқали аниқлаш учун нейтрал ўқдан энг узок масофадаги нуқтанинг ординатаси маълум бўлиши керак. Нейтрал ўқдан юқорида K_2 кўндаланг кесим нуқтаси, пастда эса K_1 энг узок жойлашган. Мазкур нуқталарнинг нейтрал ўққа нисбатан ординатаси аниқланади:

$$y_{k_1} = \frac{h}{2} + y_c = \frac{24}{2} + 5.65 = 17.65 \text{ см}; \quad y_{k_2} = \frac{h}{2} + b - y_c = \frac{24}{2} + 7.6 - 5.65 = 13.95 \text{ см}.$$

Яъни, $y_{\max} = 17.65$ см, уни (3.11) га қўйиб, кўндаланг кесимнинг қаршилик моменти аниқланади:

$$W_{x_c} = \frac{I_{x_c}}{y_{\max}} = \frac{6342}{17.65} = 359.32 \text{ см}^3.$$

Максимал нормал кучланишни (3.7) га асосан аниқлаб, рухсат этилган кучланиш билан солиштирилади:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{x_c}} = \frac{8068}{359.32} = 22.45 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} > 16 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \quad \text{демак, (3.12) да берилган шарт}$$

бажаралаётгани йўқ, яъни балка мустаҳкам эмас.

3.10 Балканинг бош кучланиш бўйича мустаҳкамлигини текшириш

Айрим пайтда, балкалар мустаҳкамлигини текшириш учун максимал нормал кучланиш ўрнига абсолют қиймати бўйича энг катта бош кучланишлар ишлатилади. Бундай текшириш балканинг бош кучланиш бўйича мустаҳкамлигини текшириш

дейилади. Бош кучланишлар миқдори қуйидаги формула орқали аниқланади:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_k}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_k^2 + 4 \cdot \tau_k^2} \quad . \quad (3.14)$$

Бу формулада σ_k — кўндаланг кесимнинг К нуқтасидаги нормал кучланиш миқдори, τ_k — шу нуқтанинг уринма кучланиши.

Бош кучланишнинг энг катта миқдори кўндаланг кесимнинг эни кескин равишда ўзгараётган жойидаги нуқталарда пайдо бўлади, масалан, қўштавр ёки швеллернинг токчаси билан деворининг туташган жойида. Мазкур нуқталардаги нормал ва уринма кучланишлар (3.7), (3.8) формулалар орқали аниқланади. Эгувчи момент ва кўндаланг куч миқдорлари тегишли эпюраларнинг хавфли кесимдаги қиймати олинади. Айрим балкаларда хавфли кесимни аниқлаш учун унинг бир неча кесимларида бош кучланишларни ҳисоблаб кўриш керак ва уларнинг ичидан абсолют қиймати бўйича энг каттаси рухсат этилган кучланиш билан солиштирилади. Бош нормал кучланишларнинг йўналиши, яъни бош юзачанинг ҳолатини аниқловчи бурчак миқдорини қуйидаги формула ёрдамида топиш мумкин:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{2 \tau_k}{\sigma_k} \quad . \quad (3.15)$$

9-мисол. 7-мисолда танланган №20 қўштаврнинг бош нормал кучланиш бўйича мустаҳкамлиги текширилсин.

Сортаментдан № 20 қўштавр учун ҳисобга зарур бўладиган геометрик миқдорлар кўчириб ёзилади:

$W_x = 184 \text{ см}^3$; $I_x = 1840 \text{ см}^4$; $h = 200 \text{ мм}$; $b = 100 \text{ мм}$; $\delta = 5.2 \text{ мм}$; $t = 8.4 \text{ мм}$ ва қўштаврнинг схематик шакли чизилади (3.12 а-расм).

Хавфли кўндаланг кесим 3.9, б ва в-расмларда кўрсатилган эпюраларга асосан аниқланади. Мисолда хавфли кўндаланг кесим $z=4 \text{ м}$ да, чунки бу кесимда эгувчи момент ва кўндаланг куч ҳам катта миқдорга эга, яъни $Q(4 \text{ м}) = 18 \text{ кН}$; $M(4 \text{ м}) = 28 \text{ кНм}$.

Қўштаврни девор ва токча чегарасидаги К нуқтаси учун нормал ва уринма кучланишлар аниқланади. Нормал кучланишлар

(3.7) формулага асосан $\sigma_k = \frac{M \cdot y_k}{I_x} = \frac{28 \cdot 10^2 \cdot 9.16}{1840} = 13.94 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$ ва (3.8)

ифодага асосан уринма кучланиш аниқланади:

$$\tau = \frac{Q(y) \cdot S^*}{I \cdot b} = \frac{18 \cdot 80.472}{1840 \cdot 0.52} = 1.514 \text{ МПа}; \quad b_y = \delta = 0.52 \text{ см};$$

$$S^* = b \cdot t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 10 \cdot 0.84 \left(\frac{20}{2} - \frac{0.84}{2} \right) = 80.472 \text{ см}^3.$$

Бош кучланишлар (3.14) формулага асосан топилсин:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_k}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_k^2 + 4 \cdot \tau_k^2} = \frac{13.94}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{13.94^2 + 4 \cdot 1.514^2} = 6.97 \pm 7.13.$$

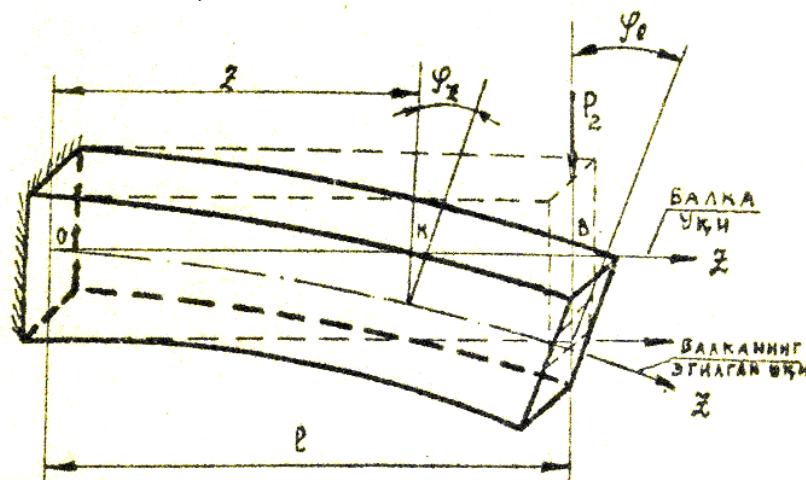
$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 6.97 + 7.13 = 14.1 \text{ МПа} / \text{см}^2, \quad \sigma_{\min} = \sigma_3 = 6.97 - 7.13 = -0.16 \text{ МПа} / \text{см}^2.$$

$$\tan 2\alpha_o = -\frac{2\tau_k}{\sigma_k} = -\frac{2 \cdot 1.514}{13.94} = -0.2172; \quad \alpha_o = -6^\circ 09', \quad \text{ва улар 3.12 б-расмда}$$

кўрсатилади.

4. Балка деформацияларини аниқлаш усуллари

Балка инерция бош текисликларидан бирида жойлашган ва унинг ўқиға ўтказилган кесим нормали бўйича йўналган ташқи кучлар таъсирида тўғри эгилади (4.1-расм). Деформацияланган балка ўқи эластик чизиқ дейилади.

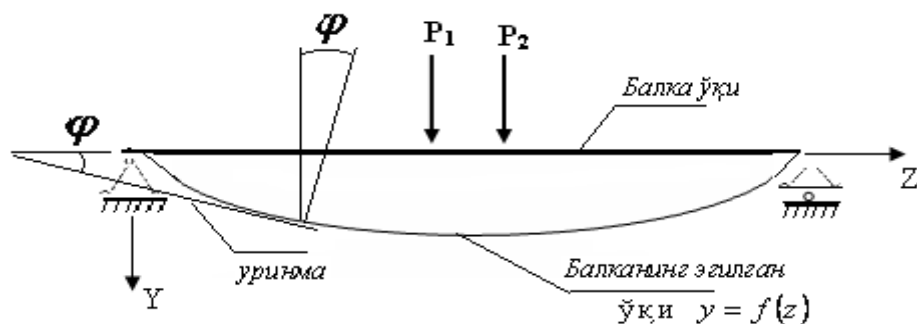


4.1-расм

Балканинг деформацияси икки миқдор билан характерланади:

1. Салқилик – балка ўқи нуқталари балканинг деформацияланмаган ўқиға перпендикуляр йўналишдаги кўчиши;
2. Оғиш бурчаги – ҳар бир кўндаланг кесимнинг нейтрал ўқ атрофида ўзининг бошланғич ҳолатига нисбатан оғиш бурчаги.

Салқилик y ҳарфи билан, оғиш бурчаги эса φ ҳарфи билан белгиланади (4.2-расм).



4.2-расм

Шуни таъкидлаш керакки, кесим оғиш бурчаги φ эластик чизиққа ўтказилган уринманинг z ўқи билан ташкил қилган бурчакка тенг бўлади (томонлари ўзаро перпендикуляр бўлгани сабабли).

Берилган юкланишдан y салқилик билан координата z орасидаги мунособатни ифодаловчи $y = f(z)$ тенглама эластик чизиқ тенгламаси дейилади.

Ҳосиланинг геометрик маъноси ҳақидаги маълум қоидага асосан

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} \quad (4.1)$$

Амалда кўндаланг кесим оғиш бурчаги кўпинча $\varphi \leq 1^\circ$ бўлади, шунинг учун $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ деб қабул қилиш мумкин. У ҳолда қуйидаги тенглик ҳосил қилинади:

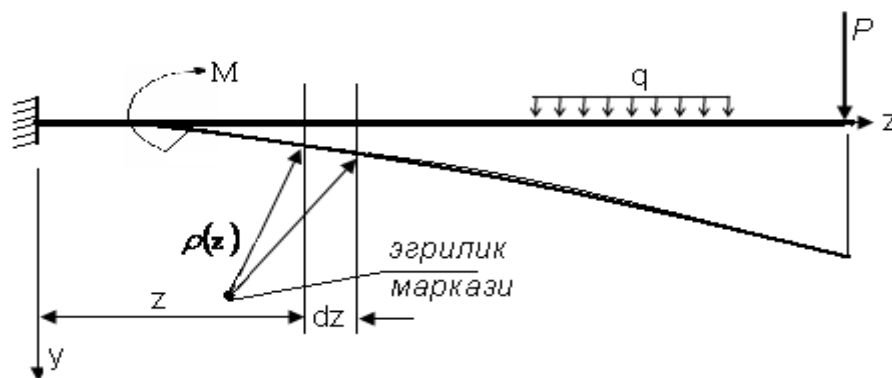
$$\varphi = \frac{dy}{dz} \quad (4.2)$$

Тўғри эгилишда эластик чизиқнинг эгрилиги, эгувчи момент ва балканинг кўндаланг кесими бикрлиги орасида қуйидаги муносабат мавжуд:

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{M(z)}{EI_x}, \quad (4.3)$$

Бу ерда, $\rho(z)$ — балка эластик чизиғининг координата бошидан z масофада турган нуқтадаги эгрилик радиуси (4.3-расм); $M(z)$ – балканинг шу кесимдаги эгувчи моменти; EI_x – балка кўндаланг кесимининг бикрлиги.

(4.3) да келтирилган муносабатдан балка эластик чизиғининг тақрибий дифференциал тенгламаси келиб чиқади:



4.3-расм

$$y'' = - \frac{M(z)}{EI_x} \quad (4.4)$$

Юқоридаги (4.4) ифоданинг чап томонида манфий ишора олинишининг сабаби, y координата ўқи пастрга қараб йўналтирилган (4.3-расм).

Балкалар деформациясини аниқлаш катта амалий аҳамиятга эга. Балкалар иши ҳақида фикр юритиш учун берилган юк таъсирида кесим юзаларида пайдо бўладиган кучланишларни билишнинг ўзи кифоя эмас.

Ҳисобланган кучланишлар тизимнинг мустаҳкамлигини текшириш имконини беради. Бирок, мустаҳкамлиги етарли бўлиб, балкалар бикрлиги етарли даражадамаслиги туфайли, фойдаланишга яроқсиз бўлиши мумкин. Балканинг бикрлигини текшириш учун унинг геометрик ўқида ётувчи айрим нуқталарнинг кўчишларини топиш ўрганилади. Статик ноаниқ балкаларни ҳисоблашда ҳам унинг деформациясини аниқлашга тўғри келади.

Деформацияни балкаларда аниқлашда қуйидаги усуллар мавжуд:

- 1) график;
- 2) аналитик;
- 3) графо-аналитик;
- 4) энергетик.

График усул материаллар қаршилиги курсида таништирилмайди. Аналитик усуллар кенг қўлланилиб, уларга эластик чизиқнинг дифференциал тенгламасини бевосита интеграллаш ва бошланғич параметрлар усуллари киради.

4.1 Бевосита интеграллаш усули билан деформацияни аниқлаш

Бу усулда эластик чизиқнинг тақрибий дифференциал тенгламасини интеграллаш йўли билан балка кесимининг оғиш бурчаги $\varphi(z)$ ва салқилиги $y(z)$ учун ифодалар ҳосил қилинади.

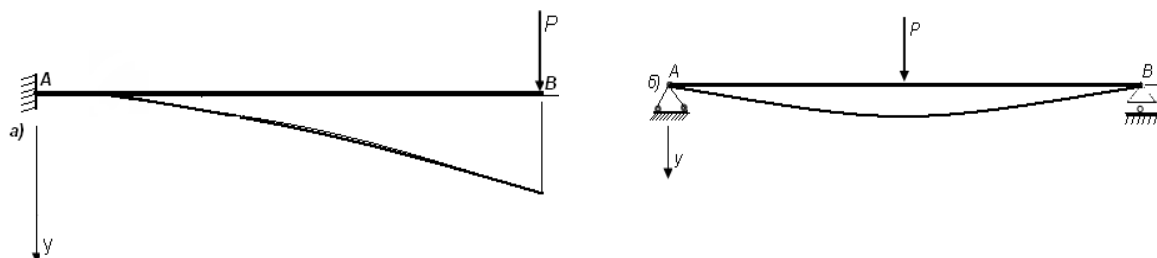
(4.4) да берилган дифференциал тенглама бир марта интегралланиб, қуйидаги оғиш бурчагини аниқловчи тенглама ҳосил қилинади:

$$\varphi(z) = \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{EI_x} \int M(z) dz + C \quad (4.5)$$

Агар эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаси икки маротаба интегралланса, салқилик тенгламаси ҳосил бўлади:

$$y(z) = \frac{1}{EI_x} \int dz \int M(z) dz + Cz + D \quad (4.6)$$

Дифференциал тенгламани интеграллашдан ҳосил бўладиган ихтиёрий сонларнинг қийматини балканинг таянч кесимларида кинематик шартларни ишлатиш билан аниқланади. Масалан, консол балка учун шартлар (4.3,а-расм) қуйидаги тенгликлар билан ифодаланади:



4.4-расм

$$1) \ z = 0; \quad \varphi_a = y'(0) = 0 \quad 2) \ z = 0; \quad y_a = y(0) = 0,$$

яъни қистириб маҳкамланган кесимда оғиш бурчаги ва салқилик нолга тенг шarti.

Бир участкали оддий балка учун ёзиладиган шартлар (4.4,б-расм) унинг таянч кесимларида салқиликлар y_a ва y_b нолга тенглигидан фойдаланиб тузилади, яъни:

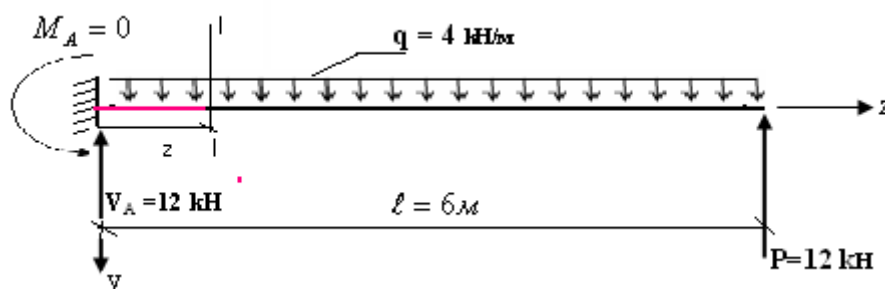
$$1) \ z = 0; \quad y_a = y(0) = 0 \quad 2) \ z = l; \quad y_b = y(l) = 0$$

Агар балка бир неча юкланиш участкасидан иборат бўлса, бу ҳолда унинг ҳар бир участкаси учун тегишли дифференциал тенгламасини тузиш керак. Бундай ҳолларда интеграллаш натижасида ҳосил бўладиган C ва D ўзгармасларни аниқлаш

учун юқорида кўрилган шартлардан ташқари қўшимча шартлар тузиш лозим. Бунда эластик чизиқнинг участкалар чегараларида текис ва узлуксизлик хоссаларидан фойдаланиш мумкин.

Шуни эслатиш керакки, балканинг эгилган ўқи (эластик чизиғи) текис ва узлуксизлик шартидан балканинг ҳар бир кўндаланг кесимида салқилик қиймати ва оғиш бурчаги қиймати ягона бўлиши келиб чиқади. Шундай қилиб, агар кўрилатган балка n та участкага эга бўлса, $2n$ марта интеграллаш натижасида ҳосил бўладиган ихтиёрий C ва D сонларнинг миқдорини аниқлаш учун шунча алгебраик тенгламалар тузишга ҳар доим имконият бўлади. Фақат участкалар сони ошиши билан ҳисоб ишлари ҳам кескин ортади.

1-мисол. Бир учи билан маҳкамланган консолнинг узунлигига q , эркин учига эса P куч қўйилган (3.5-расм). Шу балка эркин учининг салқилиги ва кесимнинг оғиш бурчаги аниқлансин.



4.5-расм

Ечиш. 1. Балканинг реакция кучлари топилсин:

$$\sum y = 0 \quad \text{дан} \quad V_A = q \cdot 6 - P = 4 \cdot 6 - 12 = 12 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0 \quad \text{дан} \quad M_A = q \cdot 6 \cdot 3 - P \cdot 6 = 4 \cdot 6 \cdot 3 - 12 \cdot 6 = 0.$$

1. Балка эластик чизиғининг дифференциал тенгламаси тузилади:

$$y'' = - \frac{M(z)}{EI_x}$$

Эгувчи момент тенгламасини тузиш учун I-I кесимга нисбатан (3.5-расм) балканинг чап қисмидаги юклардан момент олинади:

$$M(z) = V_A \cdot z - M_A - q \frac{z^2}{2} \quad \text{ва} \quad \text{эластик чизиқнинг дифференциал}$$

$$\text{тенгламаси ёзилади:} \quad y''(z) = - \frac{1}{EI_x} \left(V_A \cdot z - M_A - q \frac{z^2}{2} \right)$$

3. Эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаси бир марта интегралланиб, оғиш бурчагини аниқлаш учун тенглама ҳосил қилинади:

$$\varphi(z) = y'(z) = -\frac{1}{EI_x} \left(V_A \frac{z^2}{2} - M_A z - q \frac{z^3}{6} \right) + C \quad (a)$$

4. Эластик чизиқнинг дифференциал тенгламасини икки маротаба интеграллаб, салқиликни аниқлаш тенгламаси ҳосил қилинади:

$$y(z) = -\frac{1}{EI_x} \left(V_A \frac{z^3}{6} - M_A \frac{z^2}{2} - q \frac{z^4}{24} \right) + C \cdot z + D \quad (б)$$

5. Интеграллаш ўзгармаслари C ва D ларнинг миқдорини аниқлаш учун чегара шarti татбиқ қилинади, яъни:

$$1) \quad z = 0; \quad \varphi_a = y'(0) = 0 \quad 2) \quad z = 0; \quad y_a = y(0) = 0,$$

Бу шартлар (a) ва (б) тенгламаларга қўйилиб, қуйидаларга эга бўлинади:

$$\varphi_a = C = 0; \quad y_a = D = 0.$$

6. Энди (a) ва (б) тенгламаларда z абсциссага маълум қийматлар бериб, балка маълум кесимларининг салқилиги ва оғиш бурчакларининг сон қийматлари топилади. Бу мисол шартига кўра балканинг эркин учида ($z=6$ м) олинган кесим учун деформациялар аниқланади.

Кўндаланг кесимнинг оғиш бурчаги:

$$\varphi_6 = y'(6) = -\frac{1}{EI_x} \left(12 \frac{6^2}{2} - 0 - 4 \frac{6^3}{6} \right) = -\frac{216}{EI_x} + \frac{144}{EI_x} = -\frac{72}{EI_x}$$

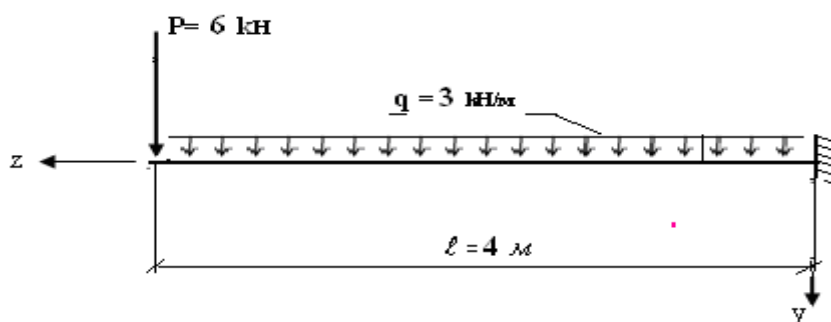
Кўндаланг кесимнинг салқилиги

$$y_6 = y(6) = -\frac{1}{EI_x} \left(12 \frac{6^3}{6} - 0 - 4 \frac{6^4}{24} \right) = -\frac{432}{EI_x} + \frac{216}{EI_x} = -\frac{216}{EI_x}$$

Агар балканинг бикрлиги EI_x берилган бўлганда, у ҳолда оғиш бурчак радианда, салқилик эса сантиметр ёки миллиметр ҳисобида олинадди.

Шундай қилиб, агар консол-балканинг чап учи маҳкамланган бўлса, у ҳолда интеграллаш ўзгармаслари C ва D лар ҳар доим нолга тенг бўлади. Ўнг учи маҳкамланган балкалар учун C ва D миқдорларини аниқлашда $z = \ell$; $\varphi(\ell) = 0$; ва $z = \ell$; $y(\ell) = 0$ шартлардан фойдаланиш лозим.

Бундай мисолни мустақил ечишга тавсия қиламиз (4.6-расм).



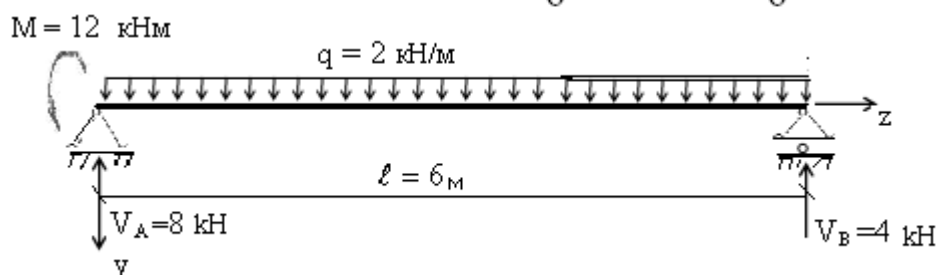
4.6-расм

2-мисол. 4.7-расмда кўрсатилган оддий балканинг таянчлари оралиғи $\ell = 6$ м. Шу балканинг таянч кесимлари учун оғиш бурчаклари ва балка оралиғи ўртасига мос келувчи кесимнинг салқилиги аниқлансин.

Бу мисолни 1-мисолдаги сингари тартибда ишланади.

Номаялум таянч реакцияларини аниқлаш:

$$\Sigma M_A = 0; q \cdot 6 \cdot 3 - M - V_B \cdot 6 = 0; \quad V_B = \frac{q \cdot 6 \cdot 3 - M}{6} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 3 - 12}{6} = 4 \text{ кН.}$$



4.7-расм

$$\Sigma M_B = 0; -q \cdot 6 \cdot 3 - M + V_A \cdot 6 = 0; \quad V_A = \frac{q \cdot 6 \cdot 3 + M}{6} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 3 + 12}{6} = 8 \text{ кН.}$$

Аниқланган таянч реакция кучларининг миқдори текширилади:

$$\Sigma y = 0; \quad q \cdot 6 - V_A - V_B = 0; \quad 2 \cdot 6 - 8 - 4 = 0; \quad 12 - 12 = 0; \quad 0 = 0.$$

Эгувчи момент тенгламасини тузиб, эластик чизик учун дифференциал тенглама ёзилади:

$$M(z) = V_A \cdot z - M - q \frac{z^2}{2}; \quad y''(z) = -\frac{1}{EI_x} \left(V_A \cdot z - M - q \frac{z^2}{2} \right).$$

Эластик чизикнинг дифференциал тенгламасини бир марта, оғиш бурчак тенгламасини икки мартаба интеграллаб, салқилликни аниқлаш учун балканинг эгилган ўқи тенгламаси тузилади:

$$\varphi(z) = y'(z) = -\frac{1}{EI_x} \left(V_A \cdot \frac{z^2}{2} - M \cdot z - q \frac{z^3}{6} \right) + C;$$

$$y(z) = -\frac{1}{EI_x} \left(V_A \cdot \frac{z^3}{6} - M \frac{z^2}{2} - q \frac{z^4}{24} \right) + C \cdot z + D;$$

Интеграллаш ўзгармасларини аниқлаш учун чегара шартлари ёзилади:

$$1) \quad z = 0; \quad y(0) = 0; \quad 2) \quad z = 6; \quad y(6) = 0,$$

Шу шартлардан фойдаланиб, $y(0)$ ва $y(6)$ ларни сон қийматлари аниқланади:

биринчи шартдан ($z=0; y(0)=0$):

$$y(0) = -\frac{1}{EI_x} (8 \cdot 0 - 12 \cdot 0 - 2 \cdot 0) + C \cdot 0 + D; \rightarrow D = 0;$$

иккинчи шартдан ($z=6 \text{ м}; y(6)=0$):

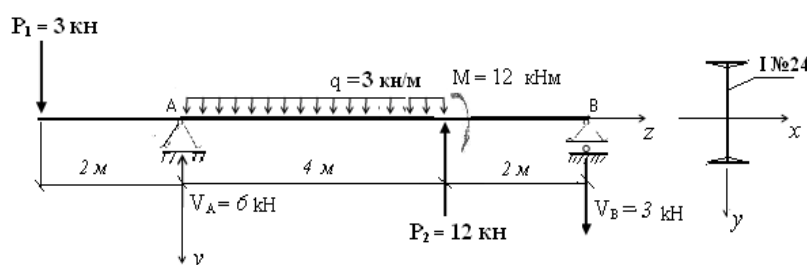
$$y(6) = -\frac{1}{EI_x} \left(8 \frac{6^3}{6} - 12 \frac{6^2}{2} - 2 \frac{6^4}{24} \right) + C \cdot 6 + 0; \rightarrow C = -\frac{6}{EI_x}.$$

Интеграллаш ўзгармаслари маълум, энди мисолнинг шарида сўралган деформациялар аниқланади:

$$\varphi_0 = C = -\frac{6}{EI_x}; \quad \varphi_6 = y'(6) = -\left(8 \frac{6^2}{2} - 12 \cdot 6 - 2 \frac{6^3}{6} \right) - \frac{6}{EI_x} = -\frac{6}{EI_x};$$

$$y_3 = y(3) = -\frac{1}{EI_x} \left(8 \frac{3^3}{6} - 12 \frac{3^2}{2} - 2 \frac{3^4}{24} \right) - \frac{6 \cdot 3}{EI_x} = \frac{6,75}{EI_x}.$$

3-мисол. Кўндаланг кесими № 24 профили қўштавр балка учун (4.8-расм) қуйидаги кесимлардаги деформациялар аниқлансин: $\varphi_0, \varphi_2, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_8, y_0, y_5, y_6$.



4.8-расм

Қўштаврнинг инерция моменти $I_x = 3460 \text{ см}^4$; материалнинг эластик модули $E = 2 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$; балканинг бикрлиги $EI_x = 2 \cdot 10^4 \cdot 3460 = 6920 \cdot 10^4 \text{ кНсм}^2 = 6920 \text{ кНм}^2$.

Номаълум таянч реакцияларини аниқлаб, улар текширилади:

$$\sum M_A = 0 \text{ дан } V_B = \frac{-P_1 \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 - P_2 \cdot 4 + M}{6} = \frac{-3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 2 - 12 \cdot 4 + 12}{6} = -3 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0 \text{ дан } V_A = \frac{P_1 \cdot 8 + q \cdot 4 \cdot 4 - P_2 \cdot 2 - M}{6} = \frac{3 \cdot 8 + 3 \cdot 4 \cdot 4 - 12 \cdot 2 - 12}{6} = 6 \text{ кН.}$$

Текширамиз: $\sum Y = 0$; $P_1 + q \cdot 4 + V_B - V_A - P_2 = 0$; $3 + 3 \cdot 4 + 3 - 6 - 12 = 0$; $0=0$.

Балка учта юк участкасидан иборат. Ҳар бир участка учун эгувчи момент тенгламалари тузилади.

I участка: $0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}$ оралиғида

$$M_I(z) = -P \cdot z_1;$$

II участка: $2 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$ оралиғида

$$M_{II}(z_2) = -P_1 \cdot z_2 + V_A(z_2 - 2) - q \frac{(z_2 - 2)^2}{2};$$

III участка: $6 \text{ м} \leq z_3 \leq 8 \text{ м}$ оралиғида

$$M_{III}(z_3) = -V_B(8 - z_3).$$

Ҳар бир участка учун эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаси ёзилиб (дифференциал тенгламаларни ёзаётганда эгувчи момент ифодасидаги қавслар очиб юборилади) ва у интеграллаб, оғиш бурчаклари ва салқиликлар тенгламалари ҳосил қилинади:

$$\text{I участка: } 0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м оралиғида } y_I''(z_1) = \frac{1}{EI_x} P_1 \cdot z_1;$$

$$\varphi_I(z_1) = y_I'(z_1) = \frac{1}{EI_x} P_1 \frac{z_1^2}{2} + C_1; \quad y_I(z_1) = \frac{1}{EI_x} P_1 \frac{z_1^3}{6} + C_1 \cdot z_1 + D_1;$$

II участка: $2 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$ оралиғида

$$y_{II}''(z_2) = \frac{1}{EI_x} (P_1 \cdot z_1 - V_A \cdot z + V_A \cdot 2 + q \frac{z^2}{2} - 4 \cdot q \frac{z}{2} + 2 \cdot q);$$

$$\varphi_{II}(z_2) = \frac{1}{EI_x} (P_1 \frac{z_2^2}{2} - V_A \frac{z_2^2}{2} + V_A \cdot 2 \cdot z_2 + q \frac{z_2^3}{6} - q \cdot z_2^2 + 2 \cdot q \cdot z_2) + C_2;$$

$$y_{II}(z_2) = \frac{1}{EI_x} (P_1 \frac{z_2^3}{6} - V_A \frac{z_2^3}{6} + V_A \cdot z_2^2 + q \frac{z_2^4}{24} - q \frac{z_2^3}{3} + q \cdot z_2^2) + C_2 \cdot z_2 + D_2;$$

$$\text{III участка: } 6 \text{ м} \leq z_3 \leq 8 \text{ м оралиғида } y_{III}''(z_3) = \frac{1}{EI_x} (V_B \cdot 8 - V_B \cdot z_3).$$

$$\varphi_{III}(z_3) = y_{III}'(z_3) = \frac{1}{EI_x} (V_B \cdot 8 \cdot z_3 - V_B \frac{z_3^2}{2}) + C_3;$$

$$y_{III}(z_3) = \frac{1}{EI_x} (V_B \cdot 4 \cdot z_3^2 - V_B \frac{z_3^3}{6}) + C_3 \cdot z_3 + D_3;$$

Эластик чизиқнинг дифференциал тенгламаларини интеграллаш натижасида ҳосил бўлган $C_1, D_1, C_2, D_2, C_3, D_3$ ларни аниқлаш учун олти шарт тузиш керак. Уларнинг иккитаси таянч кесимларида салқилик нолга тенг бўлиши шартидан олинади.

$$1) z = 2 \text{ м; } y_I(2) = 0; \quad 2) z = 8 \text{ м; } y_{III}(8) = 0;$$

Қолган тўртта шарт эластик чизиқнинг участка чегараларида текис ва узлуксизлик хоссаларидан фойдаланиб тузилади, яъни:

$$3) z = 2 \text{ м; } \varphi_I(2) = \varphi_{II}(2); \quad 4) z = 2 \text{ м; } y_I(2) = y_{II}(2);$$

$$5) z = 6 \text{ м; } \varphi_{II}(6) = \varphi_{III}(6); \quad 6) z = 2 \text{ м; } y_{II}(6) = y_{III}(6);$$

Тузилган шартлар навбати билан тегишли тенгламаларга қўйиб, олти алгебраик тенглама ҳосил қилинади:

$$1. 2C_1 + D_1 + \frac{4}{EI_x} = 0; \quad 2. 8C_3 + D_3 + \frac{512}{EI_x} = 0;$$

$$3. C_1 - C_2 - \frac{16}{EI_x} = 0; \quad 4. 2C_1 - 2C_2 + D_1 - D_2 - \frac{22}{EI_x} = 0;$$

$$5. C_2 - C_3 - \frac{36}{EI_x} = 0; \quad 6. 6C_2 + D_2 - 6C_3 - D_3 - \frac{162}{EI_x} = 0.$$

Шартлар тенгламалар системаси шаклига келтирилади:

4.1-жадвал

1	2	3	1	2	3	Озод ҳади (ўнг томонда)
						$-\frac{4}{EI_x}$
1						$-\frac{16}{EI_x}$
	1					$-\frac{36}{EI_x}$
	2			1		$\frac{22}{EI_x}$
		6			1	$\frac{162}{EI_x}$
						$-\frac{512}{EI_x}$

Тенгламалар системаси компьютер дастури ёрдамида ҳисоблаб, натижа олинади:

$$C_1 = -\frac{26}{EI_x}; \quad C_2 = -\frac{42}{EI_x}; \quad C_3 = -\frac{78}{EI_x}; \quad D_1 = \frac{48}{EI_x}; \quad D_2 = \frac{58}{EI_x}; \quad D_3 = \frac{112}{EI_x}.$$

Энди мисол шартида сўралган деформациялар аниқланади. Кўндаланг кесимнинг оғиш бурчаклари $z=0$; $z=2m$; $z=5m$; $z=6m$ ва $z=8m$ да аниқланади. Биринчи участканинг оғиш бурчак тенгламасидан $C_1 = -\frac{26}{EI_x}$ тенгликни ҳисобга олиб, φ_0 , φ_2 миқдорлари аниқланади:

$$\varphi_I(z_1) = y'_I(z_1) = \frac{1}{EI_x} P_1 \frac{z_1^2}{2} + C_1; \quad \varphi_I(0) = y'_I(0) = \frac{1}{EI_x} 3 \frac{0^2}{2} - \frac{26}{EI_{x1}};$$

$$\varphi_0 = -\frac{26}{EI_x}; \quad \varphi_I(2) = y'_I(2) = \frac{1}{EI_x} 3 \frac{2^2}{2} - \frac{26}{EI_{x1}}; \quad \varphi_2 = -\frac{20}{EI_x};$$

Иккинчи участка учун ёзилган оғиш бурчак тенгламасидан φ_5 , φ_6 лар аниқланади. Интеграллашда ўзгармас $C_2 = -\frac{42}{EI_x}$ эканлиги эътиборга олинади.

$$\varphi_{II}(z_2) = \frac{1}{EI_x} (P_1 \frac{z_2^2}{2} - V_A \frac{z_2^2}{2} + V_A \cdot 2 \cdot z_2 + q \frac{z_2^3}{6} - q \cdot z_2^2 + 2 \cdot q \cdot z_2) + C_2;$$

$$\varphi_{II}(5) = \frac{1}{EI_x} (3 \frac{5^2}{2} - 6 \frac{5^2}{2} + 6 \cdot 2 \cdot 5 + 3 \frac{5^3}{6} - 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5) - \frac{42}{EI_x};$$

$$\varphi_5 = -\frac{2}{EI_x};$$

$$\varphi_{II}(6) = \frac{1}{EI_x} (3 \frac{6^2}{2} - 6 \frac{6^2}{2} + 6 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \frac{6^3}{6} - 3 \cdot 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6) - \frac{42}{EI_x};$$

$$\varphi_6 = \frac{12}{EI_x};$$

Учинчи участка тенгламасидан

$$\varphi_{III}(z_3) = y'_{III}(z_3) = \frac{1}{EI_x} (V_B \cdot 8 \cdot z_3 - V_B \frac{z_3^2}{2}) + C_3,$$

$C_3 = -\frac{78}{EI_x}$ тенглигини ҳисобга олиб, φ_8 аниқланади:

$$\varphi_{III}(z_3) = y'_{III}(z_3) = \frac{1}{EI_x} (V_B \cdot 8 \cdot z_3 - V_B \frac{z_3^2}{2}) + C_3;$$

$$\varphi_{III}(8) = y'_{III}(8) = \frac{1}{EI_x} (3 \cdot 8 \cdot 8 - 3 \frac{8^2}{2}) - \frac{78}{EI_x}; \quad \varphi_8 = \frac{18}{EI_x};$$

Биринчи участканинг салқилик тенгламасига $C_1 = -\frac{26}{EI_x}$ ва $D_1 = \frac{48}{EI_x}$ миқдорларни қўйиб, балканинг чап эркин учидаги салқилик

аниқланади: $y_I(z_1) = \frac{1}{EI_x} P_1 \frac{z_1^3}{6} + C_1 \cdot z_1 + D_1;$

$$y_0 = y_I(0) = \frac{1}{EI_x} \cdot 3 \cdot \frac{0}{6} - \frac{26}{EI_x} \cdot 0 + \frac{48}{EI_x} = \frac{48}{EI_x}; \quad y_0 = \frac{48}{EI_x}.$$

Қолган y_5 ва y_6 салқиликларни аниқлаш учун иккинчи участкага тузилган салқилик тенгламасига $C_2 = -42/EI_x$ ва $D_2 = 58/EI_x$ миқдорлар қўйиб топилади:

$$y_{II}(z_2) = \frac{1}{EI_x} \left(P_1 \frac{z_2^3}{6} - V_A \frac{z_2^3}{6} + V_A \cdot z_2^2 + q \frac{z_2^4}{24} - q \frac{z_2^3}{3} + q \cdot z_2^2 \right) + C_2 \cdot z_2 + D_2;$$

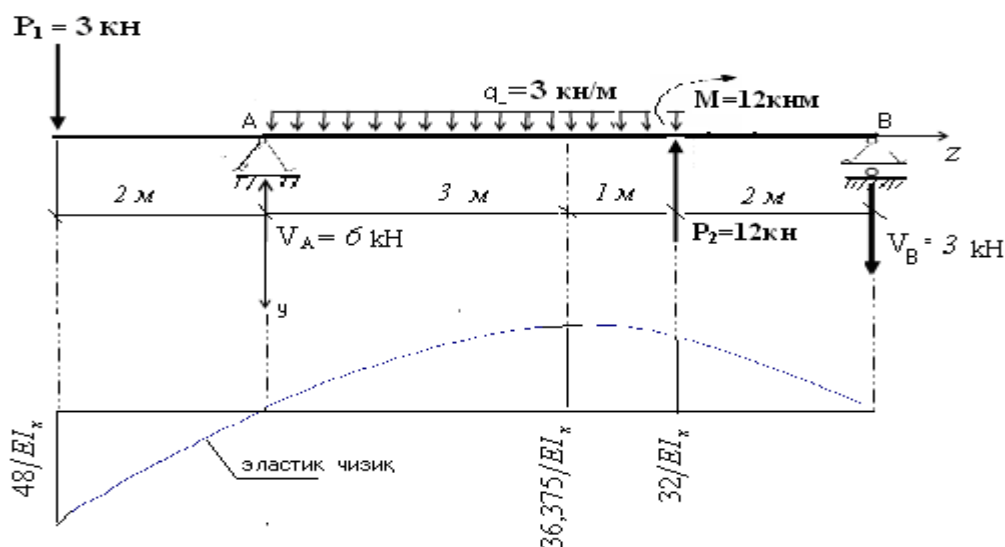
$$y_5 = \frac{1}{EI_x} \left(3 \frac{5^3}{6} - 6 \frac{5^3}{6} + 6 \cdot 5^2 + 3 \frac{5^4}{24} - 3 \frac{5^3}{3} + 6 \frac{5^2}{2} \right) - \frac{42}{EI_x} \cdot 5 + \frac{58}{EI_x} = -\frac{36,375}{EI_x};$$

$$y_6 = \frac{1}{EI_x} \left(3 \frac{6^3}{6} - 6 \frac{6^3}{6} + 6 \cdot 6^2 + 3 \frac{6^4}{24} - 3 \frac{6^3}{3} + 6 \frac{6^2}{2} \right) - \frac{42}{EI_x} \cdot 6 + \frac{58}{EI_x} = -\frac{32}{EI_x};$$

Балканинг эластик чизиғини тахминан чизиш учун аниқланган оғиш бурчаги ва салқилигининг радиан ва сантиметрларда миқдори топилиб, уларни масштабда балка ўқиға қўйиб, эластик чизиқнинг ҳолати кўрсатилади (4.8 а-расм). Деформациялар жуда кичик бўлгани сабабли унинг қийматини EI_x баравар катталаштириб, эластик чизиқни кўрсатиш маъқул. Эластик чизиқнинг ҳолатини кўрсатишда компьютер имкониятларидан фойдаланиш ўринли.

4.2-жадвал

Ке сим	Салқилик ($EI_x y$)	Салқилик (см)	Бурчак кўчиши($EI_x \varphi$)	Бурчак кўчиши ($\text{рад} \times 10^4$)
$z=0$	48	0,6936	-26	-37,5723
$z=2m$	0	0	-20	-28,9017
$z=5m$	-36,4	-0,5260	-2	-2,89017
$z=6m$	-32	-0,4624	12	-2,89017
$z=8m$	0	0	18	26,01156



4.8 а-рasm

Ечилган мисолдан кўриниб турибдики, эластик чизикнинг дифференциал тенгламасини бевосита интеграллаш иш ҳажмини кўпайтириб юборади. Аммо, эластик чизикнинг дифференциал тенгламасини интеграллашда махсус йўллارни татбиқ этиб, участкаларда ўзгармаслар тенглигига эришиш мумкин ва участкалар сони исталганча бўлганда ҳам масалани фақат иккита ўзгармасларни аниқлашга келтириш мумкин. Бунинг учун қуйидагиларга амал қилиш керак:

1. Барча участкаларнинг эгувчи момент тенгламаларини кесимнинг бир томонидан, координата боши билан тегишли кесим орасида жойлашган ташқи юклардан тузиш керак;

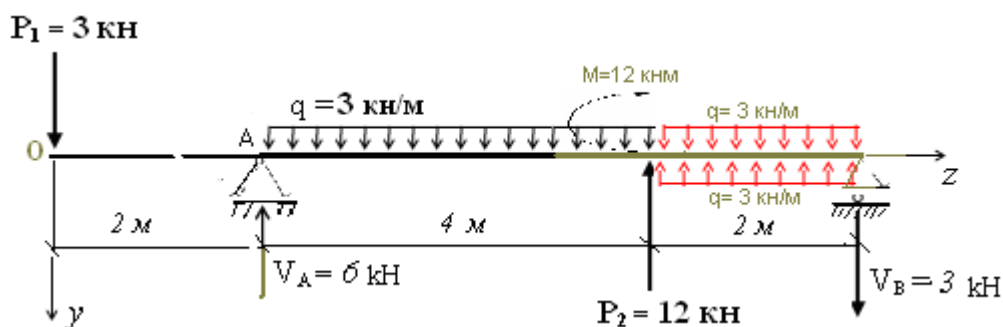
2. Эгувчи момент тенгламасига кирган қавслар ичидаги ҳадларни интеграллашда қавсларни очмаслик керак, яъни:

$$\int P(z-a)dz = P \frac{(z-a)^2}{2} + C$$

3. Агар балкага жуфт куч таъсир этган бўлса, эгувчи момент тенгламасига кирган бу жуфт куч ҳадини $(z-a)$ биномига кўпайтириш лозим.

Бу ерда, a — жуфт куч қўйилган кесимнинг абсциссаси; координата боши балканинг чап учида олинади.

4. Агар текис ёйилган юк — q балканинг ўнг учигача етмаган бўлса, уни балканинг охиригача давом эттириш керак (4.9-рasm). Балканинг мувозанатини бузмаслик учун балкага давом эттирилган ёйилган юк интенсивлиги q га тенг ва унга тескари йўналган q юкни тегишли масофага қўйиш керак.



4.9-расм

Шу шартларни 3-мисолда кўрилган балка учун татбиқ қилганда, интеграллаш натижасида ҳосил бўлган ўзгармаслар бири-бирига тенг бўлади, яъни:

$$C_1 = C_2 = C_3 = -26/EI_x; \quad D_1 = D_2 = D_3 = 48/EI_x.$$

Буни мустақил ишлаб, текшириб кўринг.

4.2 Бошланғич параметрлар усули. Балка эгилган ўқининг универсал тенгламаси

Бошланғич параметрлар усули балканинг барча участкалари учун ўринли бўлган битта салқилик (ёки кесимнинг оғиш бурчаги) тенгламасини ёзиш имконини беради, шунинг учун бу тенглама универсал ёки умумлашган тенглама дейилади. Тавсия қилинаётган универсал тенглама кўп участкали балка учун қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$y(z) = y_0 + \varphi_0 z - \frac{1}{EI_x} \left[\sum \frac{M_i (z - a_i)^2}{2} + \sum \frac{P_i (z - b_i)^3}{6} + \sum \frac{q_i (z - c_i)^4}{24} \right]. \quad (4.7)$$

Бу формулада z — координата бошидан (балканинг чап учидан) деформация аниқланаётган кесимгача бўлган масофа;

a_i — координата бошидан тегишли жуфт куч- M_i қўйилган кесимгача масофа;

b_i — координата бошидан тегишли куч- P_i қўйилган кесимгача масофа;

c_i — координата бошидан тегишли таралган юк q_i участка бошигача бўлган масофа.

Шу ерда, агар кўрилатган таралган юк балкани ўнг учигача таъсир қилмаётган бўлса, уни балканинг охиригача давом эттириб, мувозанатни тиклаш учун давом эттирилган узунликда интенсивлиги бир хил, йўналиши эса тескари таралган юк қўйиш керак ва уни ҳам универсал тенглама тузаётганда ҳисобга олиш лозимлигини эслатиш керак;

φ_0, y_0 – бошланғич параметрлар, яъни координата боши жойлашган кесимнинг салқилиги ва оғиш бурчаги. Улар (φ_0 ва y_0) балка таянч кесимларига қўйилган чегаравий шартларга асосан аниқланади.

Универсал тенгламани тузаётганда балкага таъсир қилаётган юклар ишораси қуйидаги ишора қондасига асосан олинади:

Агар таъсир қилаётган кучлар (P_i ва q_i) йўналиши вертикал координата ўқининг мусбат йўналишига тескари, яъни юқорига йўналган бўлса, у ҳолда уларнинг миқдори мусбат ишора билан, акс ҳолда манфий ишора универсал тенгламани катта қавс ичида ишлатилади. Балкага қўйилган ташқи момент йўналиши соат стрелкаси ҳаракати бўйича бўлса – мусбат, акс ҳолда манфий ишоралари билан миқдори қўйилади.

Балка кўндаланг кесим оғиш бурчагининг тенгламасининг салқиллик тенгламаси (4.7) дан z координата бўйича ҳосилани ҳисоблаш йўли билан ҳосил қилиш мумкин, яъни:

$$\varphi(z) = \frac{dy(z)}{dz} = \varphi_0 - \frac{1}{EI_x} \left[\sum M_i(z - a_i) + \sum \frac{P_i(z - b_i)^2}{2} + \sum \frac{q_i(z - c_i)^3}{6} \right].$$

4-мисол. 1-мисолда кўрилган балка учун аниқланган деформациялар бошланғич параметрлар усули билан ҳисоблаб, текшириб кўрилсин.

Ечиш. Аввалгидек (4.5-рasm) координата бошини балканинг чап учиди олиб, z ўқ ўнг тарафга, y ўқи эса пастга йўналтирилади ва салқилик учун универсал тенглама ёзилади.

$$y(z) = y_0 + \varphi_0 \cdot z - \frac{1}{EI_x} \left[\frac{M \cdot z^2}{2} + V_A \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} \right].$$

Бошланғич параметрлар (φ_0 ва y_0) ни аниқлаш учун консол чап учининг маҳкамланиш шартидан фойдаланилади, яъни:

$z = 0; y(0) = 0$ шартидан $y_0 = 0$ тенг бўлади ва

$z = 0; \varphi(0) = 0$ шартидан $\varphi_0 = 0$ тенг бўлади.

Юқоридаги универсал тенгламага $y_0 = 0$ ва $\varphi_0 = 0$ миқдорларни қўйиб, консолнинг эркин учиди кесим салқилиги топилади:

$$y(6) = - \frac{1}{EI_x} \left[0 + 12 \frac{6^3}{6} - 4 \frac{6^4}{24} \right] = - \frac{432}{EI_x} + \frac{216}{EI_x} = - \frac{216}{EI_x}.$$

Шу кесимнинг оғиш бурчагини аниқлаш учун салқилик тенгламасидан z координата бўйича ҳосила олиб ҳисобланади:

$$\varphi(6) = -\frac{1}{EI_x} \left[M \cdot z + V_A \frac{z^2}{2} - q \frac{z^3}{6} \right] = -\frac{1}{EI_x} \left[0 + 12 \frac{6^2}{6} - 4 \frac{6^3}{6} \right] = -\frac{72}{EI_x}.$$

Шундай қилиб, консолнинг чап учи маҳкамланган бўлса, бошланғич φ_0, y_0 параметрлар миқдори ҳам нолга тенг бўлар экан.

5-мисол. 3-мисолда кўрилган балка деформацияларини бошланғич параметрлар усулидан фойдаланиб аниқлаш керак (4.8-расм).

z координата ўқи ўнг тарафга, y координата ўқи пастга йўналтирилади. Таралган юк балканинг охиригача таъсир қилмаётгани учун y балканинг ўнг учигача давом эттирилади ва мувозанатни сақлаш учун учинчи участка узунлигида юқорига йўналган ва интенсивлиги $q = 3 \text{ кН/м}$ тенг бўлган таралган куч билан юкланади (4.9-расм).

1. Ҳар бир участка учун салқилик универсал тенгламаси тузилади:

I участка $0 \leq z \leq 2 \text{ м}$ оралиғида

$$y_I(z) = y_0 + \varphi_0 \cdot z - \frac{1}{EI_x} \left[-P_1 \frac{z^3}{6} \right]; \quad (\text{а})$$

II участка $2 \text{ м} \leq z \leq 6 \text{ м}$ оралиғида

$$y_{II}(z) = y_0 + \varphi_0 \cdot z - \frac{1}{EI_x} \left[-P_1 \frac{z^3}{6} + V_A \frac{(z-2)^3}{6} - q \frac{(z-2)^4}{24} \right]; \quad (\text{б})$$

III участка $6 \text{ м} \leq z \leq 8 \text{ м}$ оралиғида

$$y_{III}(z) = y_0 + \varphi_0 z - \frac{1}{EI_x} \left[-P_1 \frac{z^3}{6} + V_A \frac{(z-2)^3}{6} - q \frac{(z-2)^4}{24} + M \frac{(z-6)^2}{2} + P_2 \frac{(z-6)^3}{6} + \frac{q(z-6)^4}{24} \right]; \quad (\text{в})$$

2. Тузилган универсал тенгламалардаги номаълум бошланғич параметрлар (φ_0 ва y_0) ни аниқлаш учун иккита чегаравий шарт тузилади: 1) $z=2 \text{ м}$; $y_I(2)=0$; 2) $z=8 \text{ м}$; $y_{III}(8)=0$.

3. Биринчи шартга асосан (а) универсал тенгламага $z=2 \text{ м}$ тенг миқдорини қўйиб, тенглама ҳосил қиланади:

$$y_I(z) = y_0 + \varphi_0 \cdot 2 - \frac{1}{EI_x} \left[-P_1 \frac{2^3}{6} \right] = 0; \quad (\text{г})$$

4. Иккинчи шартга асосан (в) универсал тенгламага $z=8$ м тенг миқдорини қўйиб, иккинчи тенгламани ёзилади:

$$y_{III}(z) = y_0 + \varphi_0 \cdot 8 - \frac{1}{EI_x} \left[-P_1 \frac{8^3}{6} + V_A \frac{(8-2)^3}{6} - q \frac{(8-2)^4}{24} + M \frac{(8-6)^2}{2} + P_2 \frac{(8-6)^3}{6} + \frac{q(8-6)^4}{24} \right] = 0; \quad (д)$$

5. Юқоридаги (г) ва (д) тенгламаларга кучларнинг сон қиймати қўйиб, алгебраик тенгламалар системаси ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} y_0 + 2 \cdot \varphi_0 + \frac{4}{EI_x} = 0, \\ y_0 + 8 \cdot \varphi_0 + \frac{160}{EI_x} = 0. \end{cases} \quad (е)$$

6. Алгебраик тенгламалар системасини ечиб, номаълум бошланғич параметрлар миқдори топилади:

$$\varphi_0 = -\frac{26}{EI_x}; \quad y_0 = \frac{48}{EI_x}.$$

7. Керакли кесимдаги салқилик аниқланади:

Балканинг чап эркин учидаги салқилик маълум бўлди, яъни $z=2$ м да $y_I(0) = 48/EI_x$ экан.

Иккинчи (б) универсал тенгламага бошланғич параметрлар миқдори қўйилиб, абсцисса қийматларини $z=5$ м ва $z=6$ м тенгликдаги кесимларнинг салқилиги аниқланади:

$$y(5) = \frac{48}{EI_x} - \frac{26}{EI_x} \cdot 5 - \frac{1}{EI_x} \left[-3 \frac{5^3}{6} + 6 \frac{(5-2)^3}{6} - 3 \frac{(5-2)^4}{24} \right] = -\frac{36,375}{EI_x};$$

$$y(6) = \frac{48}{EI_x} - \frac{26}{EI_x} \cdot 6 - \frac{1}{EI_x} \left[-3 \frac{6^3}{6} + 6 \frac{(6-2)^3}{6} - 3 \frac{(6-2)^4}{24} \right] = -\frac{32}{EI_x}.$$

8. Кесимларнинг оғиш бурчагини аниқлаш учун деформацияси топилиши керак бўлган кесимнинг жойлашган участкадаги универсал тенгламасидан z координата бўйича ҳосила олиб ҳисобланади. Масалан, биринчи участка учун оғиш бурчагининг универсал тенгламаси (а) тенгламадан ҳосил қилинади:

$$\varphi_I(z) = \varphi_0 - \frac{1}{EI_x} \left[-P_1 \frac{z^2}{2} \right]. \quad \text{Бу тенгламадан балка чап учидаги}$$

кесимнинг ($z=0$) оғиш бурчаги аниқланади

$$\varphi_0 = \varphi_I(0) = -\frac{26}{EI_x}.$$

Балканинг ўнг тарафдаги таянч кесимининг оғиш бурчагини топиш учун (в) тенгламадан z абсцисса бўйича ҳосила олиб ҳисобланади:

$$\varphi_{III}(z) = \varphi_0 - \frac{1}{EI_x} \left[-P_1 \frac{z^2}{2} + V_A \frac{(z-2)^2}{2} - q \frac{(z-2)^3}{6} + M(z-6) + P_2 \frac{(z-6)^2}{2} + q \frac{(z-6)^3}{6} \right],$$

$$\varphi_{III}(8) = -\frac{26}{EI_x} - \frac{1}{EI_x} \left[-3 \frac{8^2}{2} + 6 \frac{(8-2)^2}{2} - 3 \frac{(8-2)^3}{6} + 12(8-6) + 12 \frac{(8-6)^2}{2} + 3 \frac{(8-6)^3}{6} \right] = \frac{18}{EI_x}.$$

Иккинчи участкада сўралган кесимларнинг оғиш бурчакларини мустақил аниқлаб кўришни тавсия қиламиз.

4.3 Графоаналитик усул билан балка деформацияларини аниқлаш

Графоаналитик усул (сохта юк усули) иккита дифференциал тенгламанинг ўхшашлигига асосланган. Бу тенгламадан бири эгилган балка ўқининг тенгламаси

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{M}{EI_x} \quad (4.9)$$

Иккинчиси эса, эгувчи момент ва таралган юкнинг интенсивлиги орасидаги дифференциал боғланишни ифодаловчи тенгламадир, яъни:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q \quad (4.10)$$

Бу тенгламалар бир-бирига тўла ўхшашлиги учун, улар қайтадан қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\frac{d^2}{dz^2} (EI_x \cdot y) = -M, \quad (4.11)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} (M) = -q. \quad (4.12)$$

Юқоридаги (4.11) тенгламада қавсга олинган $EI_x \cdot y$ миқдори сохта эгувчи момент деб қабул қилинади, яъни:

$$EI_x \cdot y = M_{сохта} \quad (4.13)$$

Шу сохта эгувчи моментдан олинган иккинчи даражали ҳосила бирор сохта юкнинг интенсивлигини беради:

$$\frac{d^2 M_{сохта}}{dz^2} = -q_{сохта} \quad (4.14)$$

Охирги (4.14) ифодани (4.11) ифода билан солиштириб, қуйидаги боғланиш ёзилади:

$$q_{\text{сохта}} = M \quad (4.15)$$

Энди, (4.11) га $EI_x \cdot y$ ўрнига унга тенг $M_{\text{сохта}}$ қўйилса ва ўнг тарафдаги M ни $q_{\text{сохта}}$ билан алмаштирилса, (4.12) га тўла ўхшаш дифференциал тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{d^2 M_{\text{сохта}}}{dz^2} = -q_{\text{сохта}} \quad (4.16)$$

Мазкур ўхшашлик балкаларни ҳисоблашда эгувчи момент ва кўндаланг куч эпюрасини куриш учун қўлланган услубий ишланма деформацияларини ҳам аниқлашда фойдаланиш мумкинлигини келтириб чиқаради.

Демак, (4.13) га асосан, берилган балканинг маълум кесимдаги салқилик сохта эгувчи моментнинг балка бикрлиги нисбатига тенг экан:

$$y(z) = \frac{M_{\text{cox}}(z)}{EI_x} \quad (4.17)$$

Салқиликни аниқловчи (3.17) тенгламанинг чап ва ўнг қисмларини абсцисса бўйича дифференциалланса, оғиш бурчаги учун тенглама ҳосил бўлади:

$$\varphi(z) = \frac{Q_{\text{сохта}}}{EI_x} \quad (4.18)$$

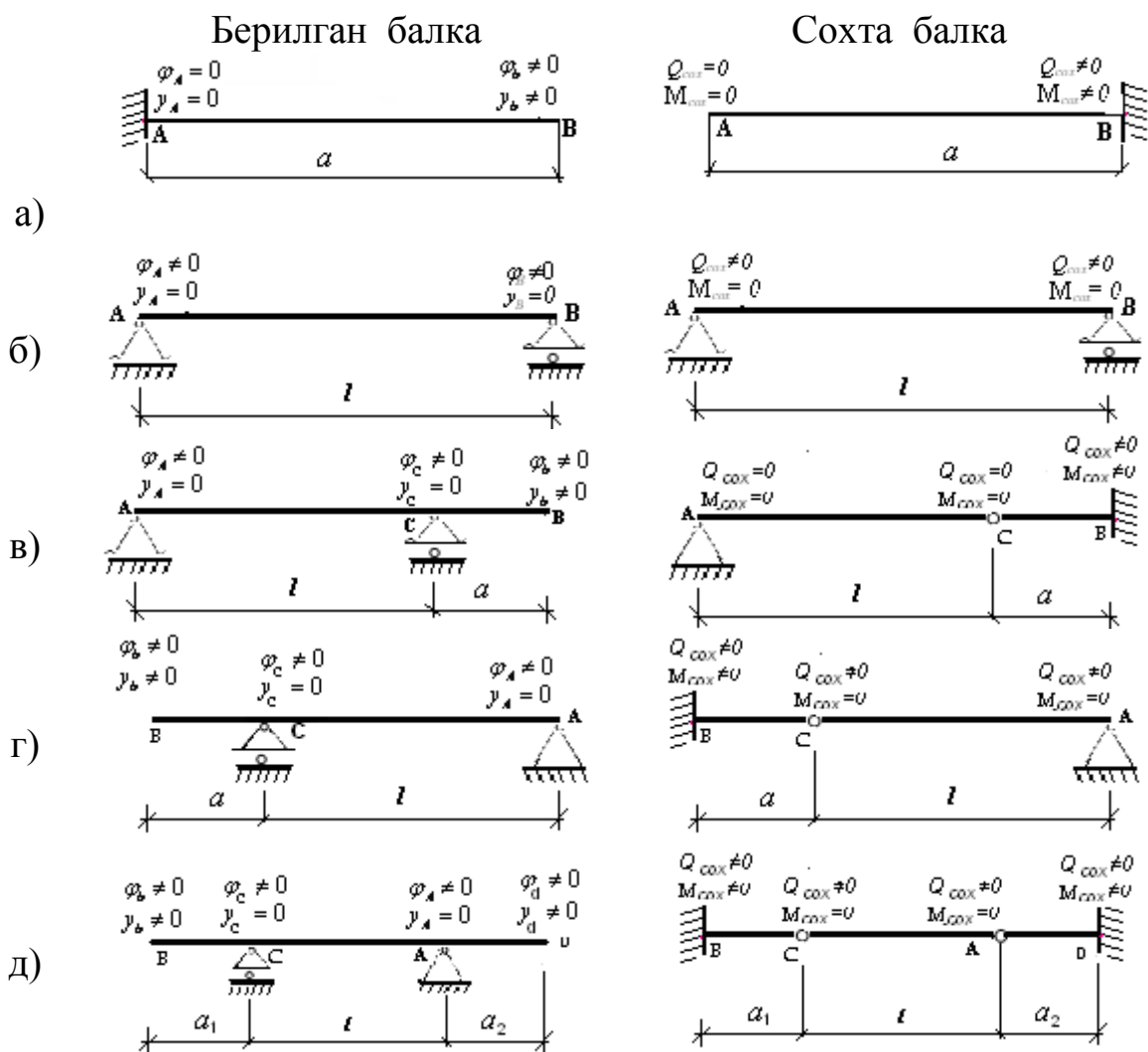
Демак, берилган балканинг ихтиёрий кесимдаги оғиш бурчаги сохта кўндаланг кучнинг балка бикрлиги нисбатига тенг экан.

Балка деформацияларини (4.17) ва (4.18) формулалардан аниқлашда берилган балканинг чегара кинематик шартлари билан сохта балканинг чегара статик шартлари бир-бирига мос келиши керак. Мазкур шартларни таъминлаш асосида сохта балкалар танланади. Айрим балкалар учун сохта балканинг схематик кўриниши 3.10-расмда келтирилган.

Графоаналитик усул билан балка деформацияларини аниқлаш тартиби қуйидагилардан иборат:

1. Ташқи юklar таъсиридан балка учун эгувчи момент $M(z)$ эпюраси курилади;
2. Берилган балканинг чегара кинематик шартларига асосан сохта балка танланади;
3. Сохта балканинг интенсивлиги эгувчи момент миқдorigа тенг бўлган таралган куч билан юкланади;
4. Статиканинг мувозанат тенгламаларидан фойдаланиб, сохта балканинг таянч реакциялари аниқланади;

5. Тегишли (4.17) ва (4.18) формулалардан фойдаланиб, балканинг сўралган кесимдаги деформациялари аниқланади.



4.10-расм

6-мисол. Иккинчи мисолда кўрилган балканинг деформацияси графоаналитик усул билан аниқлансин (4.11 а-расм).

Ечиш. Ташқи юклардан балканинг схемаси остида эгувчи момент эпюраси курилади. Эгувчи момент тенгламаси ёзилади:

$$M(z) = V_A \cdot z - M - q \frac{z^2}{2}.$$

1. Таянч реакция микдорини иккинчи мисолдан кўчириб олиб, эгувчи момент эпюраси чизилади (4.11,б-расм).

1. Берилган балка учун чегаранинг кинематик шартлари ёзилиб, (4.17), (4.18) формулаларга асосан сохта балканинг статик шартлари тузилади:

Берилган балкада

$$z = 0; y_0 = 0; \varphi_0 \neq 0;$$

$$z = 6 \text{ м}; y_6 = 0; \varphi_6 \neq 0;$$

Сохта балкада

$$z = 0; M_{\text{cox}} = 0; Q_{\text{cox}} \neq 0;$$

$$z = 6 \text{ м}; M_{\text{cox}} = 0; Q_{\text{cox}} \neq 0$$

2. Сохта балка учун ёзилган шартларни қаноатлантирувчи балканинг схемасини 4.10 б-расмдан кўчириб олиб, интенсивлиги эгувчи момент миқдorigа тенг таралган сохта куч билан юкланади (4.11, в-расм).

3. Сохта балкада таъсир қилаётган таралган кучларнинг тенг таъсир қилувчи куч векторларини топиш учун уни оддий юзаларга (учбурчак ва квадрат парабола) га ажратиб, ҳар бирининг юзи тегишли формулалар ёрдамида ҳисобланади (4.11, г-расм):

$$\omega_1 = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_2 = \frac{q \ell^3}{12} = \frac{2 \cdot 6^3}{12} = 36 \text{ кНм}^2.$$

Ҳисобланган вектор миқдорлари юзаларини оғирлик маркази нуқтасига қўйиб, статиканинг мувозанат тенгламаларидан сохта балканинг таянч реакциялари аниқланади:

$$\sum M_A = 0; \omega_2 \cdot 3 - \omega_1 \cdot 2 - B_{\text{cox}} \cdot 6 = 0;$$

$$B_{\text{cox}} = \frac{\omega_2 \cdot 3 - \omega_1 \cdot 2}{6} = \frac{36 \cdot 3 - 36 \cdot 2}{6} = 6 \text{ кНм}^2$$

$$\sum M_B = 0;$$

$$\omega_1 \cdot 4 - \omega_2 \cdot 3 + A_{\text{cox}} \cdot 6 = 0;$$

$$A_{\text{cox}} = \frac{\omega_2 \cdot 3 - \omega_1 \cdot 4}{6} = \frac{36 \cdot 3 - 36 \cdot 4}{6} = -6 \text{ кНм}^2$$

4. Таянч кесимларнинг оғиш бурчаги ва балка оралиғи ўртасидаги кесим салқилиги аниқлансин.

Оғиш бурчаклари (4.18) формулага асосан аниқланади:

$$\varphi_0 = \frac{Q_{\text{cox}}(0)}{EI_x} = \frac{A_{\text{cox}}}{EI_x} = -\frac{6}{EI_x}; \quad \varphi_6 = \frac{Q_{\text{cox}}(6)}{EI_x} = \frac{-B_{\text{cox}}}{EI_x} = -\frac{6}{EI_x};$$

Сўралган салқиликни аниқлаш учун сохта балканинг шу кесимдаги эгувчи момент миқдори керак (графоаналитик усул билан фақат участка чегараларидаги деформацияни аниқлаш мумкин). Бунинг учун берилган балкада тегишли кесимдаги эгувчи момент миқдори ҳисобланади:

$$M(3) = V_A \cdot 3 - M - q \frac{z^2}{2} = 8 \cdot 3 - 12 - 2 \frac{3^2}{2} = 3 \text{ кНм}.$$

Ҳисобланган ордината миқдорини сохта балкада кўрсатиб, (4.11,д-расм) кесимдан бир тарафдаги сохта кучларнинг тенг таъсир қилувчилари қайта топилади (4.11,е-расм):

$$\omega_1 = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18 \text{ кНм}^2; \omega_3 = \frac{2 \cdot 3^3}{12} = 4,5 \text{ кНм}^2; \omega_2 = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 \text{ кНм}^2;$$

Энди сохта балкада $z=3$ м бўлган кесимда эгувчи момент ҳисобланиб, (4.17) формулага асосан салқилик топилади:

$$M_{\text{cox}}(3) = -A_{\text{cox}} \cdot 3 + \omega_1 \cdot 2 - \omega_2 \cdot 1 - \omega_3 \cdot 1,5 = -6 \cdot 3 + 18 \cdot 2 - 4,5 \cdot 1 - 4,5 \cdot 1,5 = 6,75 \text{ кНм}^3; y_3 = \frac{M_{\text{cox}}(3)}{EI_x} = \frac{6,75}{EI_x}.$$

7-мисол. Графоаналитик усулдан фойдаланиб, 3-мисолда аниқланган деформациялар текшириб кўрилсин (4.12 а-расм).

1. Эгувчи момент эпюраси балканинг схемаси остида чизилади (4.12, б-расм).

2. Берилган балканинг чегара кинематик шартларига асосан сохта балканинг чегара статик шартлари ёзилади:

Берилган балкада	Сохта балкада
$z = 0; y_0 \neq 0; \varphi_0 \neq 0;$	$z = 0; M_{\text{cox}}(0) \neq 0; Q_{\text{cox}} \neq 0;$
$z = 2 \text{ м}; y(2) = 0; \varphi_2 \neq$	$z = 2 \text{ м}; M_{\text{cox}}(2) = 0; Q_{\text{cox}}(2) \neq$
$z = 8 \text{ м}; y(8) = 0; \varphi_8 \neq$	$z = 6 \text{ м}; M_{\text{cox}}(8) = 0; Q_{\text{cox}}(8) \neq$

3. Шу шартларни қаноатлантирувчи сохта балка схемаси 4.10,г-расмда берилган схемага тўғри келади. Мазкур сохта балкани олиб, у эгувчи момент функцияси бўйича ўзгарадиган таралган сохта куч билан юкланади (4.12, в-расм).

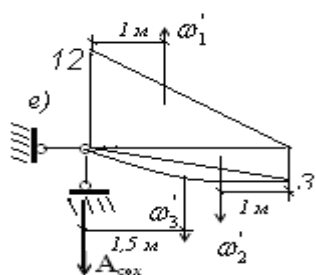
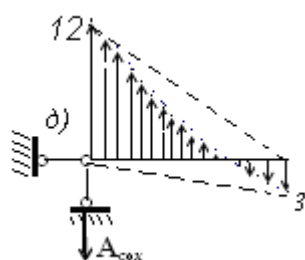
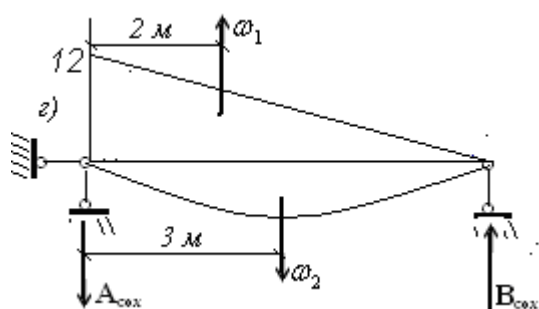
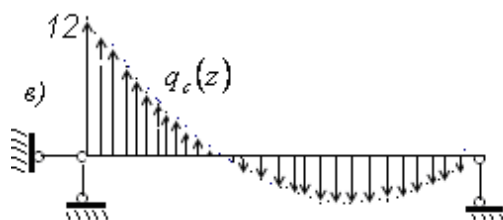
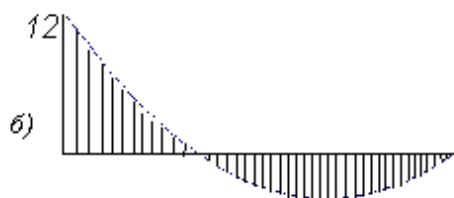
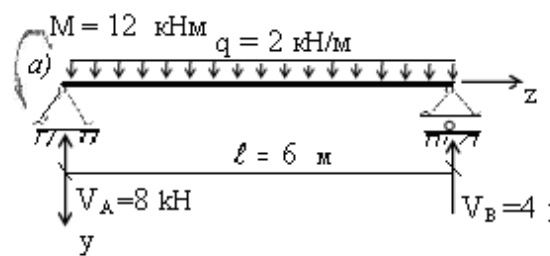
4. Таралган сохта кучларнинг тенг таъсир қилувчи куч векторларини аниқлаш учун эгувчи момент эпюраси оддий шаклларга ажратилади (4.12,д-расм) ва уларнинг юзи ҳисобланади:

$$\omega_1 = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ кНм}^2; \omega_2 = q \frac{\ell^3}{12} = 3 \frac{4^3}{12} = 16 \text{ кНм}^2; \omega_3 = \frac{18 \cdot 4}{2} = 36 \text{ кНм}^2;$$

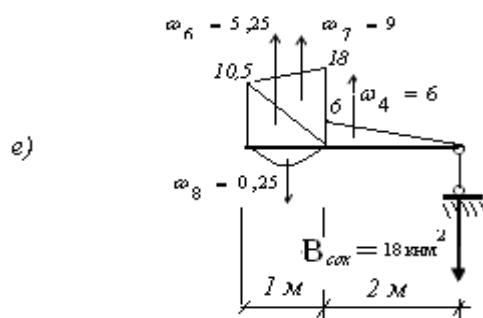
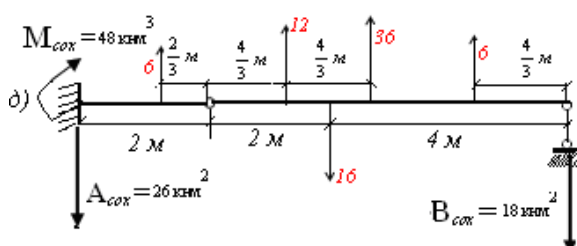
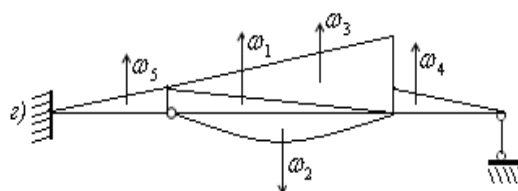
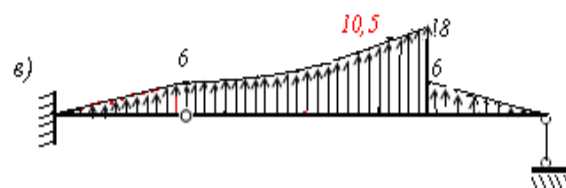
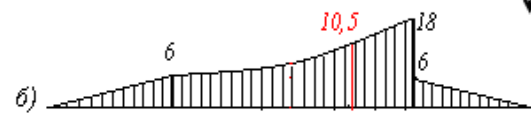
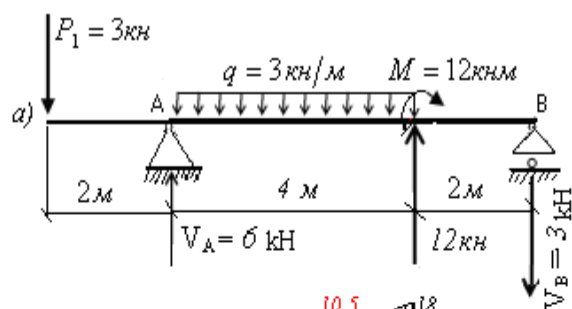
$$\omega_4 = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ кНм}^2; \omega_5 = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ кНм}^2.$$

Ҳисобланган шакллар юзаларининг оғирлик марказларига сохта тўпланган куч тарзида қўйилади (4.12, д-расм).

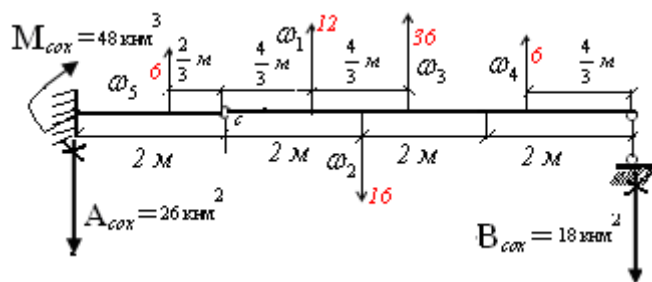
Энди сохта балка статик аниқ шарнирли балка сингари ҳисобланади. Биринчи навбатда номаълум таянч реакциялар аниқланади:



4.11-расм



4.12-расм



$$\sum M_c^{yuz} = 0; \quad \omega_2 \cdot 2 - \omega_1 \cdot \frac{4}{3} - \omega_3 \cdot \frac{8}{3} - \omega_4 \cdot \left(6 - \frac{4}{3}\right) - B_{cox} \cdot 6 = 0;$$

$$B_{cox} = \frac{\omega_2 \cdot 2 - \omega_1 \cdot \frac{4}{3} - \omega_3 \cdot \frac{8}{3} - \omega_4 \cdot \frac{14}{3}}{6} = \frac{16 \cdot 2 - 12 \cdot \frac{4}{3} - 36 \cdot \frac{8}{3} - 6 \cdot \frac{14}{3}}{6} = -18 \text{ кНм}^2;$$

$$\sum M_A = 0;$$

$$M_{cox} - \omega_5 \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \omega_1 \cdot \left(2 + \frac{4}{3}\right) + \omega_2 \cdot 4 - \omega_3 \cdot \left(2 + \frac{8}{3}\right) - \omega_4 \cdot \left(8 - \frac{4}{3}\right) + B_{cox} \cdot 8 = 0;$$

$$M_{cox} = 6 \cdot \frac{4}{3} + 12 \cdot \frac{10}{3} - 16 \cdot 4 + 36 \cdot \frac{14}{3} + 6 \cdot \frac{20}{3} - 18 \cdot 8 = 48 \text{ кНм}^3;$$

$$\sum M_c^{чан} = 0;$$

$$A_{cox} \cdot 2 + M_{cox} + \omega_5 \cdot \frac{2}{3} = 0; \quad A_{cox} = \frac{-M_{cox} - \omega_5 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \frac{-48 - 6 \cdot \frac{2}{3}}{2} = -26 \text{ кНм}^2;$$

Текшириш: $\sum Y = 0;$

$$\omega_5 + \omega_1 + \omega_3 + \omega_4 - A_{cox} - \omega_2 - B_{cox} = 0; \quad 6 + 12 + 36 + 6 - 26 - 16 - 18 = 0;$$

$$0 = 0.$$

5. Балканинг чап учидаги кесим салқилиги ва оғиш бурчаги аниқланади:

$$\varphi_0 = \frac{Q_{cox}(0)}{EI_x} = \frac{-A_{cox}}{EI_x} = \frac{-26}{EI_x}; \quad y_0 = \frac{M_{cox}(0)}{EI_x} = \frac{M_{cox}}{EI_x} = \frac{48}{EI_x}.$$

Берилган балка таянч кесимларидаги оғиш бурчаклари топилади:

$$\varphi_2 = \frac{Q_{cox}(2)}{EI_x} = \frac{-A_{cox} + \omega_5}{EI_x} = \frac{-26 + 6}{EI_x} = \frac{-20}{EI_x}; \quad \varphi_8 = \frac{Q_{cox}(8)}{EI_x} = \frac{B_{cox}}{EI_x} = \frac{18}{EI_x}.$$

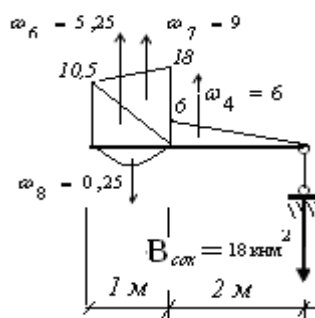
Берилган балканинг чап учидан $z=6$ м масофада жойлашган кесимнинг оғиш бурчаги ва салқилик ҳисобланади:

$$\varphi_6 = \frac{Q_{cox}(6)}{EI_x} = \frac{B_{cox} - \omega_4}{EI_x} = -\frac{12}{EI_x}; \quad y_6 = \frac{M_{cox}(6)}{EI_x} = \frac{\omega_4 \cdot \frac{2}{3} - B_{cox} \cdot 2}{EI_x} = \frac{6 \cdot \frac{2}{3} - 18 \cdot 2}{EI_x} = \frac{-32}{EI_x}.$$

6. Берилган балка оралиғи ўртасидаги ($z=5$ м) кесимнинг салқилиғи ва оғиш бурчагини аниқлаш учун аввал қайд қилинганидек, шу кесимдаги сохта таралган куч миқдорини аниқлаш керак. Мазкур миқдор эғувчи момент эпюрасининг шу кесимдаги ординатасига тенглиги маълум:

$$q_{cox} = M(5) = -P_1 \cdot 5 + V_A \cdot 3 - q \frac{3^2}{2} = -3 \cdot 5 + 6 \cdot 3 - 3 \frac{3^2}{2} = -10,5 \text{ кНм};$$

Кўрилатган кесимдан сохта балканинг чап ёки ўнг қисмидаги сохта таралган юк қайтадан оддий шаклларга ажратилади. Масалан, балканинг ўнг қисмидаги (4.12,г-расм) таралган юкларни учта учбурчак ва квадрат параболага ажратиб, юзалар ҳисобланади:



$$\omega_4 = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_6 = \frac{10,5 \cdot 1}{2} = 5,25 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_7 = \frac{18 \cdot 1}{2} = 9 \text{ кНм}^2;$$

$$\omega_8 = \frac{3 \cdot 1^3}{12} = 0,25 \text{ кНм}^2;$$

Энди кесимнинг оғиш бурчаги ва салқилиғи топилади:

$$\varphi_5 = \frac{Q_{cox}(5)}{EI_x} = \frac{B_{cox} + \omega_8 - \omega_6 - \omega_7 - \omega_4}{EI_x} = \frac{18 + 0,25 - 5,25 - 9 - 6}{EI_x} = -\frac{2}{EI_x};$$

$$y_5 = \frac{M_{cox}(5)}{EI_x} = \frac{\omega_6 \frac{1}{3} + \omega_7 \frac{2}{3} + \omega_4 \frac{5}{3} - \omega_8 \frac{1}{2} - B_{cox} \cdot 3}{EI_x} =$$

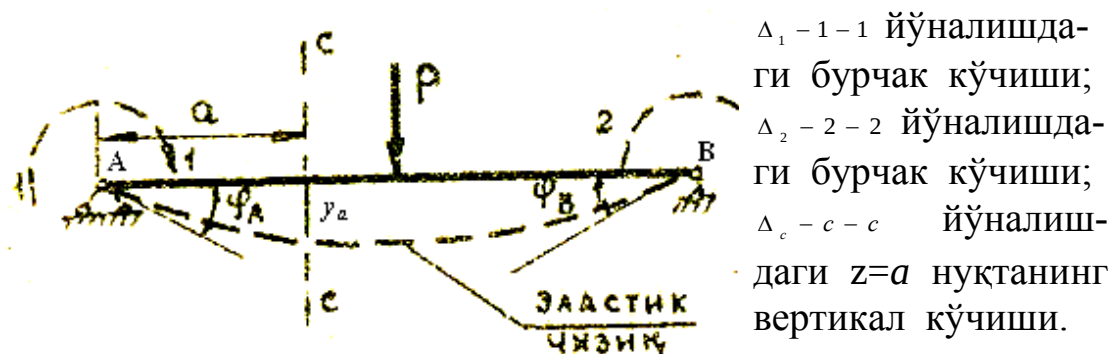
$$= \frac{5,25 \cdot \frac{1}{3} + 9 \cdot \frac{2}{3} + 6 \cdot \frac{5}{3} - 0,25 \cdot \frac{1}{2} - 18 \cdot 3}{EI_x} = \frac{-36,375}{EI_x}.$$

Кўрилган балканинг консол қисми чап тарафида, агар консол қисми ўнг тарафида бўлганида, мисолни ечиш тартиби ўзгармай, фақат сохта балка кўриниши ўзгаради (4.10, в-расм).

4.4 Балка деформацияларини Мор интегралли ёрдамида аниқлаш

Мор интегралли ёрдамида балкада (умуман ихтиёрий эластик тизимларда) деформацияларни аниқлаш йўлини кўрсатишдан олдин кўшимча тушунча ва деформацияларни умумий белгилаш қоидалари тўғрисида қисқача ахборот бериб ўтиш лозим. Балкадаги ҳар қандай деформация (кесимнинг оғиш бурчаги ва салқиллиги) кўчиш, яъни кесимнинг оғиш бурчагини – бурчак кўчиши, салқиллиги эса – эластик чизик нуқталари вертикал йўналишда кўчиши дейилади. Бу икки хил кўчиш бир юнонча ҳарф- Δ (дельта) билан белгиланади. Кўчишларни бир биридан ажратиш учун уларни белгилашда тартиб рақамлар ёки кўчиш йўналишини кўрсатувчи кўшимча кичкина ҳарф ёки рақамлардан фойдаланилади. Кўчишнинг кўшимча белгилари (улар индекслар деб ҳам номланади) Δ ҳарфининг пастки қисмига қўйилади ва улар балка кесимдаги деформация тури (кесимнинг оғиш бурчагими ёки салқиллигими) тўғрисида маълумот беради. Албатта, бу маълумотга эга бўлиш учун балканинг схемасида ҳам тегишли жойларда кўчишлар йўналиши ва тартиб рақамлари кўрсатилиши керак.

Масалан, 4.13-расмдаги балканинг деформацияларини белгилаш қоидаси:



4.13-расм

Айрим ҳолда кўчишларни белгилашда уларнинг йўналишини кўрсатишдан ташқари, шу кўчишлар пайдо бўлишига сабабчи омиллар ҳам кўрсатилади. Агар кўчиш сабабчиси ташқи юк бўлса, у ҳолда Δ индексга p ҳарфи қўйилади. Масалан, юқоридаги кўчишларни Δ_{1p} , Δ_{2p} ва Δ_{cp} деб белгилаш ҳам мумкин.

Юқоридаги кўчишлар устида фикр юритишда давом этиб, ҳар қандай кўчишларга мос тегишли кучлар борлиги таъкидланади. Агар кўндаланг кесимнинг оғиш бурчаги тўғрисида гап борса, у ҳолда мазкур деформацияга мос куч деб шу кесимга қўйилган

тўпланган моментга айтилади, балка кесимининг салқилигига мос куч деб тўпланган куч деформацияси кўрилатган кесимга қўйилганига айтилади.

Мор интегралли аслида бир неча ҳадли ифода бўлиб, лекин балка ва рамаларда кўчишларни аниқлашда унинг фақат бир ҳади олинади, яъни кўндаланг ва бўйлама кучлардан мавжуд кўчиш миқдори эгувчи моментдан ҳосил бўлган миқдорга нисбатан жуда кичик; шу сабабли балкаларда кўчишлар фақат эгувчи момент таъсиридан аниқланади:

$$\Delta_{ip} = \sum_i \int_l \overline{M}_i \frac{M_p}{EI_x} dz \quad (4.19)$$

Бу ерда, Δ_{ip} – изланаётган кўчиш (бурчакли ёки чизикли);

$\overline{M}_i$ – балканинг ихтиёрий кўндаланг кесимда изланаётган кўчишга бўлган бирлик юкдан ($P=1$ ёки $M=1$) ҳосил бўлган эгувчи момент ифодаси;

M_p – балка ихтиёрий кесимида берилган юк таъсиридан ҳосил бўладиган эгувчи момент ифодаси;

EI_x – балканинг эгилишга бўлган бикрлиги.

Мор интегралли ёрдамида кўчишларни аниқлаш қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Берилган балканинг номаълум таянч реакция кучлари аниқланади;

2. Ҳар бир участка учун эгувчи момент тенгламаси тузилади;

3. Берилган балка ташқи юкдан озод қилиниб, изланаётган кўчиш йўналишида бирлик куч ёки бирлик момент қўйилади ва шу кучлар таъсиридан ҳар бир участканинг эгувчи момент ифодалари тузилади;

4. Ташқи юкдан ва бирлик юкдан тегишли участка учун тузилган эгувчи момент ифодалари (4.19) формулага биноан интегралланади ва участкалар бўйича уларнинг алгебраик йиғиндиси изланаётган кўчишни беради.

8-мисол. 2-мисолда аниқланган деформациялар (4.7-расмдаги оддий балка учун) Мор интегралли ёрдамида аниқланиб, натижалари солиштириб кўрилсин.

Ечиш. 1. Таянч реакция миқдорлари аниқланмасдан, 2 - мисолдан кўчириб олинади: $V_A = 8 \text{ кН}$; $V_B = 4 \text{ кН}$.

2. Балка бир участкали, шу участкага ташқи юк таъсиридан ҳосил бўладиган эгувчи момент тенгламаси тузилади:

$$M_p = V_B \cdot z - q \frac{z^2}{2} = 4 \cdot z - 2 \frac{z^2}{2} = 4 \cdot z - z^2.$$

3. Балкани берилган ташқи юкдан озод қилиб, изланаётган кўчиш йўналиши бўйича бирлик куч билан таъсир қилинади (масалан, ўнг таянч кесимининг оғиш бурчагини топиш учун $M=1$ тенг тўпланган момент балканинг ўнг учига кесимга қўйилади) ва шу кучдан унинг таянч реакциялари аниқланади (4.14, б-расм):

$$\overline{A_i} = -\frac{M}{\ell} = -\frac{1}{6} \text{ м}^1; \quad \overline{B_i} = \frac{M}{\ell} = \frac{1}{6} \text{ м}^1;$$

Энди бирлик куч таъсиридан ҳосил бўлган эгувчи момент тенгламаси тузилади:

$$\overline{M_i} = \overline{B_i} \cdot z - M = \frac{1}{6} \cdot z - 1$$

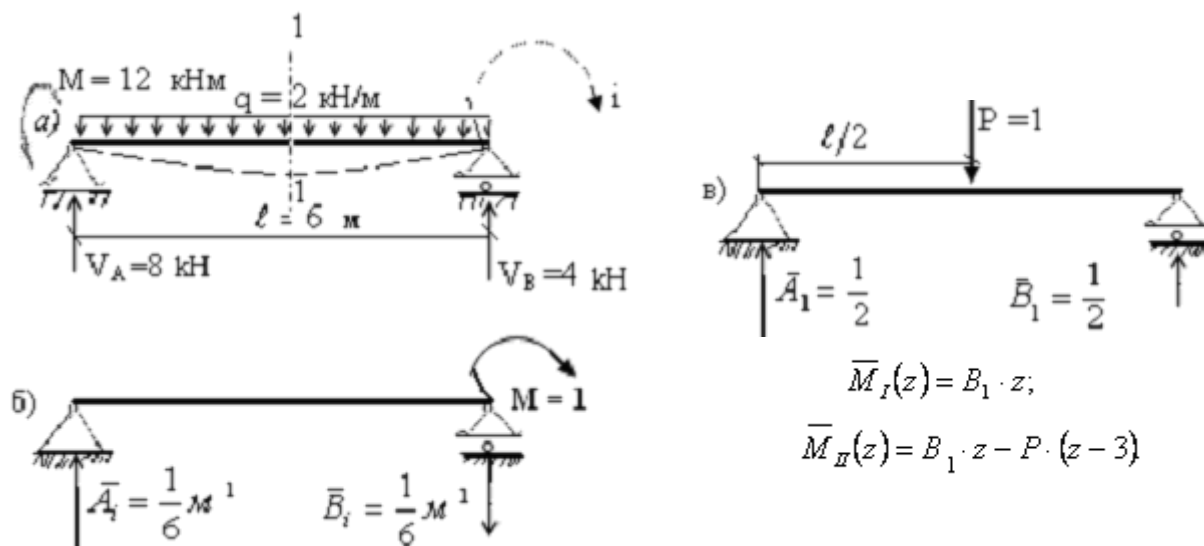
4. Берилган ташқи ва бирлик кучлардан тузилган эгувчи момент ифодаларини бирини бирига кўпайтириб, (4.19) формулага асосан улар интеграл остига олинади ва шу интеграл балка узунлиги бўлган 0 дан 6 гача оралиқда ечилади. Интеграллаш натижасида чиқарилган миқдор изланаётган деформация миқдорини беради:

$$\begin{aligned} \Delta_{\varphi} &= \varphi_B \int_{\ell} \overline{M_i} \frac{M_p}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^6 \left(\frac{1}{6} z - 1 \right) \cdot (4 \cdot z - z^2) dz = \\ &= \frac{1}{EI_x} \int_0^6 \left(\frac{2}{3} z^2 - 4 \cdot z - \frac{z^3}{6} + z^2 \right) dz = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2 \cdot z^3}{9} - 2 \cdot z^2 - \frac{z^4}{24} + \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^6 = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2 \cdot 6^3}{9} - 2 \cdot 6^2 - \frac{6^4}{24} + \frac{6^3}{3} \right) = -\frac{6}{EI_x} \end{aligned}$$

Берилган балканинг таянчлар оралиғи ўртасидаги кесимининг салқилигини топиш учун бирлик куч ($P=1$) ни шу кесимга қўйиб (4.14, в-расм), таянч реакциялар аниқланади:

$$\overline{A_1} = \overline{B_1} = \frac{P}{2} = \frac{1}{2}.$$

Бирлик куч билан юкланганда балка энди икки участкали бўлди. Ҳар бир участканинг эгувчи момент тенгламалари тузилади:



4.14-расм

Изланаётган кўчиш миқдори (4.19) га асосан икки аниқ интеграл алгебраик йиғиндига тенг бўлади. Интегралнинг биринчисини 0 дан 3 гача, иккинчисини эса 3 дан 6 гача бўлган ораликда ечиб, изланаётган деформация миқдори аниқланади:

$$\begin{aligned} \Delta_{1p} = y_3 &= \int_0^3 M_1(z) \frac{M_p}{EI_x} dz + \int_3^6 M_{II}(z) \frac{M_p}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^3 \frac{1}{2} z \cdot (4 \cdot z - z^2) \cdot dz + \\ &+ \frac{1}{EI_x} \int_3^6 \left(\frac{1}{2} z - z + 3 \right) \cdot (4 \cdot z - z^2) \cdot dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^3 \left(2 \cdot z^2 - \frac{z^3}{2} \right) \cdot dz + \frac{1}{EI_x} \int_3^6 \left(12 \cdot z - 5 \cdot z^2 + \frac{z^3}{2} \right) \cdot dz \\ &= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2 \cdot z^3}{3} - \frac{z^4}{8} \right) \Big|_0^3 + \frac{1}{EI_x} \left(6 \cdot z^2 - \frac{5 \cdot z^3}{3} + \frac{z^4}{8} \right) \Big|_3^6 = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{2 \cdot 3^3}{3} - \frac{3^4}{8} \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_x} \left(6 \cdot 6^2 - \frac{5 \cdot 6^3}{3} + \frac{6^4}{8} - 6 \cdot 3^2 + \frac{5 \cdot 3^3}{3} - \frac{3^4}{8} \right) = \frac{1}{EI_x} (7,875) + \frac{1}{EI_x} (-1,125) = \frac{6,75}{EI_x}. \end{aligned}$$

Ишланган мисолдан кўриниб турибдики, Мор интегралли ёрдамида кўчишларни (балка деформацияларини) фақат олдиндан мўлжалланган кесимдагина аниқлаш мумкин, аммо мазкур мақсадга аналитик усулларга нисбатан қисқароқ йўл билан эришилади.

4.5 Балкада деформацияларни Верещагин усули ёрдамида аниқлаш

А.Н. Верещагин 1924 йилда Мор интегралини бевосита ҳисоблаш ўрнига, уни графоаналитик усулда ҳисоблаш

мумкинлигини топиб, мазкур йўл билан эластик тизимларда кўчишларни аниқлаш учун тавсия қилган. Верешчагин усулини қўллаш учун Мор интегралига киритилган ташқи ва бирлик кучлардан тузилган эгувчи момент тенгламаларини график равишда ифодалаш лозим, яъни берилган ташқи кучлардан эгувчи момент эпюраси қуришдан ташқари бирлик куч ҳолати учун ҳам эгувчи момент эпюрасини қуриш керак бўлади. Изланаётган кўчиш миқдори қуйидаги ифодага асосан аниқланади:

$$\Delta_{ip} = \frac{\omega_p \cdot y_i}{EI_x} \quad (4.20)$$

бу ерда, ω_p – ташқи юкдан ҳосил бўлган эгувчи момент (юк) эпюраси юзаси. Агар эпюранинг расми мураккаб фигура бўлса, у ҳолда уни оддий фигураларга (тўғри тўртбурчак, учбурчак ва квадрат парабола) га ажратиш лозим ва ҳар бири учун юза миқдорини аниқлаш керак бўлади.

Учбурчаклар горизонтал катети учбурчак баландлиги дейилади, вертикал катети эса асос деб аталади. Юк эпюраси учбурчакни ташкил қилган, унинг юзи аниқланади:

$$\omega_p = \frac{72 \cdot 6}{2} = 216 \text{ кНм}^2 \quad y_i = \frac{2}{3} \cdot (6) = 4\text{м.} \quad \Delta_{ip} = \frac{216 \cdot 4}{EI_x} = \frac{864}{EI_x}$$

$y_i - \omega_p$ юзанинг оғирлик маркази остидаги бирлик эгувчи момент эпюрасининг ординатаси;

EI_x – эгилишда қаралаётган участка кесимининг бикрлиги.

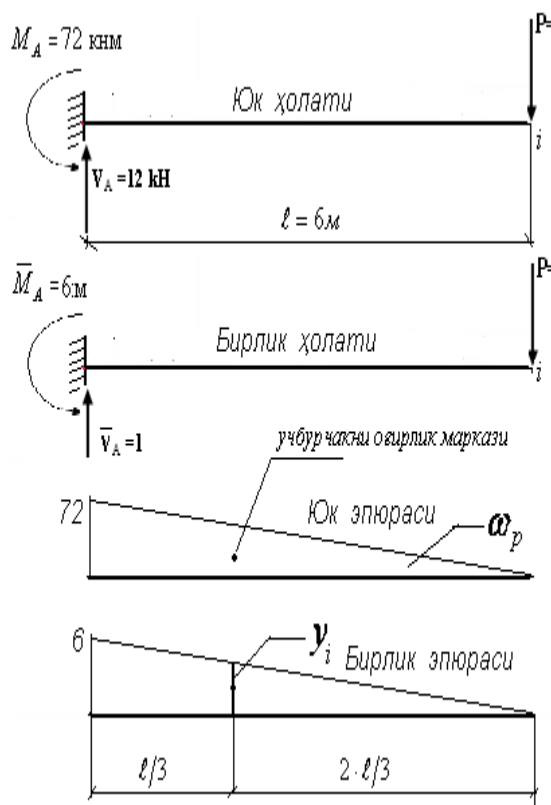
Юкоридагиларни консол балка мисолида тушунтириб кетамиз (4.15-расм): Консол балканинг эркин учига $P=6$ кН куч қўйилган. Шу таъсирдан балканинг эркин учига кесимнинг салқилигини аниқлаш керак бўлса, у ҳолда бирлик ҳолатига мазкур кесимга $P=1$ куч таъсир қилади. Агар салқилик ўрнига шу кесимнинг оғиш бурчаги талаб қилинса, $P=1$ кучнинг ўрнига $M=1$ момент таъсир қилади. Энди 4.15-расмдаги балка узунлигининг ўртасида салқилик аниқланади. Юк эпюраси ўзгармайди, бирлик эпюрани эса қайтадан қуриш керак (4.16-расм).

Энди бирлик ҳолатдаги балка икки участкали бўлиб қолди, шунинг учун юк эпюраси бирлик эпюрага мос икки қисмга ажратилиб, ҳар бир қисмдаги оддий фигураларнинг юзалари аниқланади:

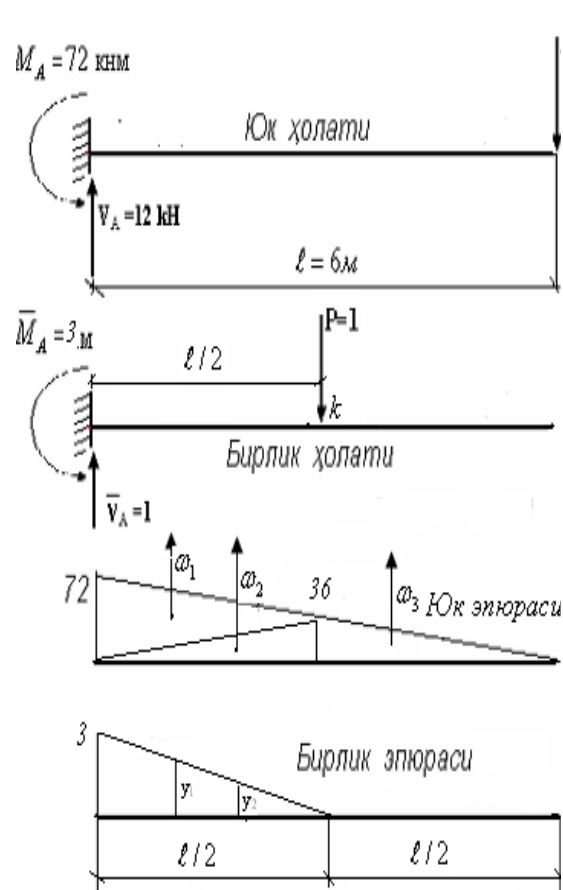
$$\omega_1 = \frac{72 \cdot 3}{2} = 108 \text{ кНм}^2; \quad \omega_2 = \frac{36 \cdot 3}{2} = 54 \text{ кНм}^2; \quad \omega_3 = \frac{36 \cdot 3}{2} = 54 \text{ кНм}^2$$

Бирлик эпюрада юк эпюрасида аниқланган юзаларнинг оғирлик маркази остидаги ординатаси аниқланади:

$$y_1 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \text{ м}; \quad y_2 = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1 \text{ м}. \quad y_3 = 0.$$



4.15-расм



4.16-расм

Бирлик эпюрадан олинadиган ордината учбурчак асосига яқинроқ бўлса, у ҳолда унинг қийматини $\frac{2}{3} \cdot (\text{асосдан})$ ва агар ордината учбурчак учига яқин бўлса, $-\frac{1}{3} \cdot (\text{асосдан})$ олиш керак. Энди “к” кесимдаги салқиликни аниқлаш мумкин:

$$\Delta_{kp} = \frac{1}{EI_x} (\omega_1 \cdot y_1 + \omega_2 \cdot y_2 + \omega_3 \cdot y_3) = \frac{1}{EI_x} (108 \cdot 2 + 54 \cdot 1 + 54 \cdot 0) = \frac{270}{EI_x}$$

Юқоридаги кўпайтмалар ишораси олинаётганда қуйидаги қоидага риоя қилинган: агар эгувчи момент эпюралари (M_p ва $\overline{M}_i$) ҳисоб олиб борилаётган ўқдан бир томонда бўлса, мусбат ишора билан, акс ҳолда манфий ишора билан олинishi лозим.

Демак, бир участкадаги эгувчи момент эпюраси бир нечта оддий фигураларга ажралиши мумкин экан. Бундай ҳолда (4.20) формула олдиға йиғинди белгиси қўйилса тўғри бўлади:

$$\sum_{k=1}^n \Delta_{ip} = \frac{\omega_k \cdot y_k}{EI_x} \quad (4.20')$$

n — эгувчи момент эпюрасининг оддий фигураларга ажратилган сони.

Агар балка бир неча участкадан иборат бўлса, у ҳолда ҳар бир участка учун (4.20') га асосан топилган миқдорларнинг алгебраик йиғиндиси олинади. Участкаларнинг эгилишга бикрлиги (EI_x) бир хил бўлмаслиги ҳам мумкин ва уни албатта ҳисобға олиш керак.

Шундай қилиб, Верешчагин усули билан кўчишни аниқлаш учун қуйидаги ишлар бажарилиши керак:

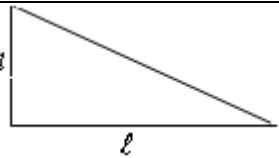
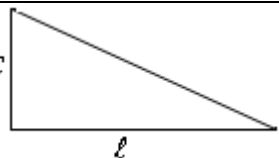
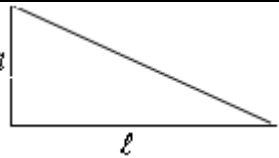
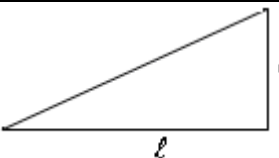
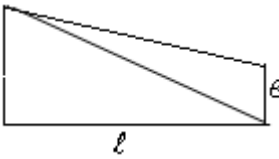
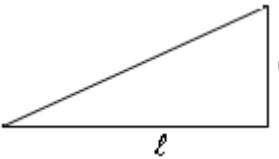
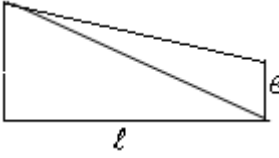
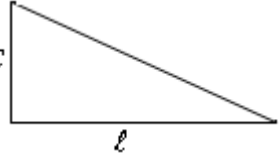
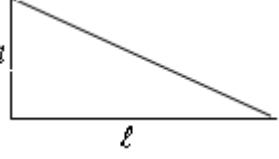
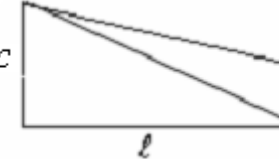
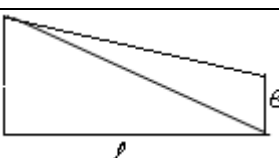
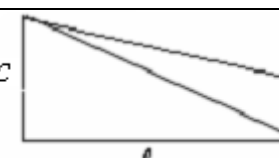
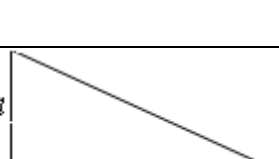
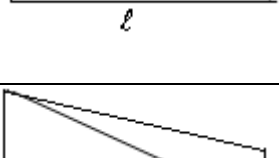
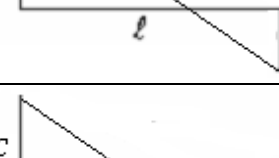
1. Берилган юк таъсиридан эгувчи момент эпюрасини қуриш;
2. Ташқи юк таъсиридан қурилган эгувчи момент эпюрасини оддий расмларга ажратиб, улардан ҳар бирининг юзасини аниқлаш;
3. Балкани берилган юкдан озод этиб, унга изланаётган кўчиш йўналиши бўйича бирга тенг куч (чизикли кўчиш аниқланаётганда $P=1$, бурчакли кўчиш аниқланаётганда $M=1$) билан таъсир қилиш керак ва мазкур таъсирдан бирлик эгувчи момент $\overline{M_i}$ эпюрасини қуриш лозим.
4. Илгари иккинчи бандда айтилган, ташқи юк таъсиридан ҳосил бўлган эгувчи момент эпюрасини ташкил қилувчи оддий расмларнинг оғирлик маркази тўғри келган кесимларда бирлик эгувчи момент $\overline{M_i}$ эпюрасидан ординаталар миқдорини аниқлаш керак;
5. Изланаётган кўчиш миқдори иккинчи пункт бўйича аниқланган эгувчи моментнинг юзалари ва тўртинчи банд бўйича мазкур юзаларнинг оғирлик маркази остида бирлик эпюрадан олинган ординаталар миқдорлари билан кўпайтмалар йиғиндисига тенг.

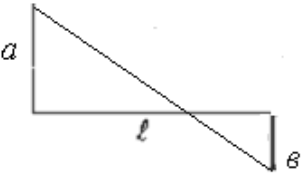
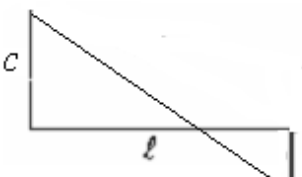
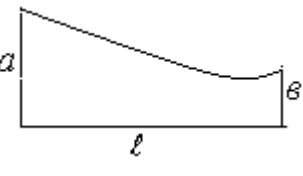
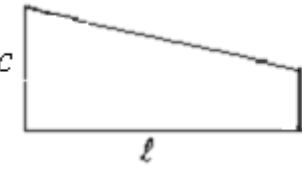
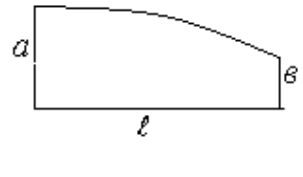
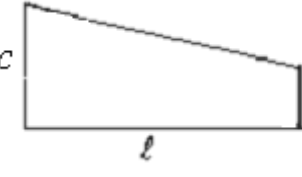
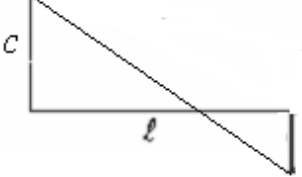
Демак, Верешчагин усули аналитик усулларга нисбатан қисқароқ ҳисоблаш иши билан, Мор интегралли ёрдамида эса кўчишни аниқлашга нисбатан ҳисоблаш ишларининг яққол кўриниши билан ажралиб туради.

Кўпинча Верешчагин усули эпюраларнинг кўпайтириш усули деб аталиб, албатта кўпайтириш амалини математик маънода англаш керак эмас, чунки аслида бир эпюра юзи иккинчи эпюранинг шу юза оғирлик маркази остидаги ординатасига кўпайтирилади. Ордината ҳар доим тўғри чизикли эпюрадан олиниши керак. Агар иккала эпюра ҳам (юк ва бирлик эпюраси) тўғри чизикли бўлса, у

ҳолда - қай биридан юза, қай биридан ордината олинишининг фарқи йўқ. Айрим эпюраларни кўпайтириш ҳоллари қуйидаги жадвалда келтириб ўтилган.

4.2-жадвал

Юк эпюраси	Бирлик эпюраси	Кўпайтириш формуласи
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{a \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot c \right)$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{a \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot c \right)$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{a \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot c + \frac{b \cdot l}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot c \right)$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{a \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot c + \frac{b \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot c \right)$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{a \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d \right) \right]$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{a \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d \right) + \frac{b \cdot l}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot c + \frac{2}{3} \cdot d \right) \right]$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{a \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot c - \frac{1}{3} \cdot d \right) \right]$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{a \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d \right) + \frac{b \cdot l}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot c - \frac{2}{3} \cdot d \right) \right]$

Юк эпюраси	Бирлик эпюраси	Кўпайтириш формуласи
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{a \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d \right) + \frac{b \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot d - \frac{1}{3} \cdot c \right) \right]$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{a \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d \right) + \frac{b \cdot l}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot c + \frac{2}{3} \cdot d \right) - \frac{q \cdot l^3}{12} \left(\frac{c+d}{2} \right) \right]$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{a \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d \right) + \frac{b \cdot l}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot c + \frac{2}{3} \cdot d \right) + \frac{q \cdot l^3}{12} \left(\frac{c+d}{2} \right) \right]$
		$\Delta_{ip} = \frac{1}{EI_x} \left[\frac{a \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot c + \frac{1}{3} \cdot d \right) + \frac{b \cdot l}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot d - \frac{1}{3} \cdot c \right) - \frac{q \cdot l^3}{12} \left(\frac{c-d}{2} \right) \right]$

Юқоридаги жадвал ёрдамида Верешчагин усули билан балка деформациясини аниқлаш анча енгиллашади. Умуман юк таъсиридан қурилган эгувчи момент эпюрасини оддий расмларга ажратиш шарт эмас. Юк ва бирлик эпюралар кўринишига қараб, жадвалдан тегишли формула танлаб олинади.

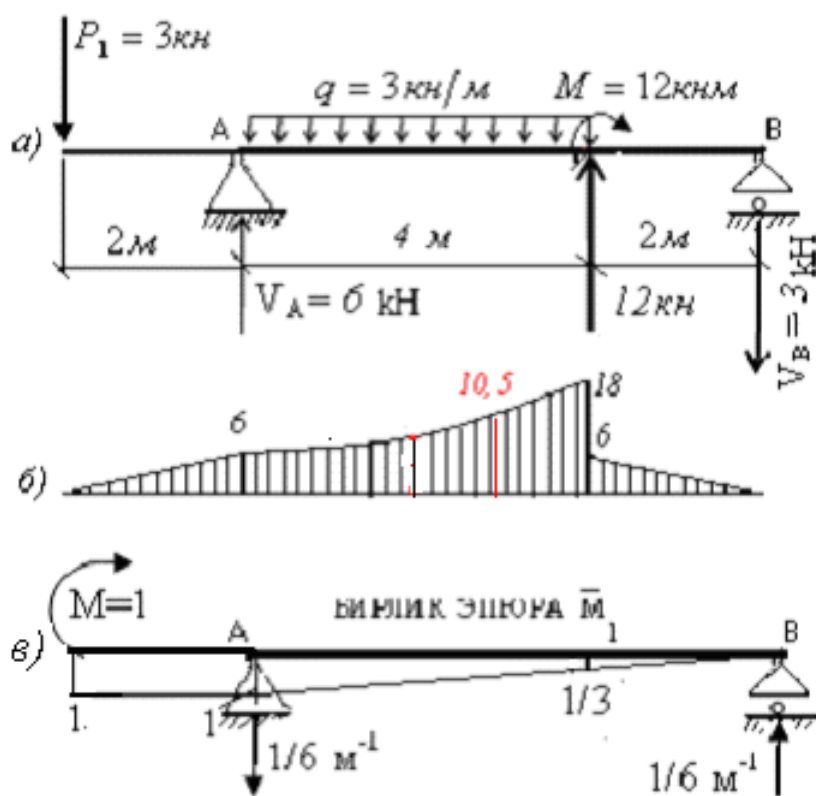
9-мисол. 3-мисолдаги аналитик усул билан аниқланган балканинг деформацияларини Верешчагин усули билан ҳам аниқлаб кўринг (4.17, а-расм).

Ечиш. 1. Кўрилатган балка учун 7-мисолда ташқи юк таъсиридан эгувчи момент эпюраси қурилган эди (4.12, б-расм).

2. Балкани берилган юкдан озод қилиб, изланаётган кўчиш йўналишида бирга тенг куч билан таъсир қилинади, масалан, биринчи навбатда мазкур балканинг чап эркин учидаги бурчакли кўчишни аниқлаш учун шу учига $M=1$ тенг момент қўйиб, бирлик эпюра қурилади (4.17, в-расм).

Балка уч участкали, шунинг учун бирлик эпюрани ҳам мос равишда учта участкага ажратамиз. Ҳар бир участкадаги эпюраларни

Верешчагин усули билан кўпайтирамиз. Бунинг учун юқоридаги жадвалдаги формулалардан фойдаланилади.

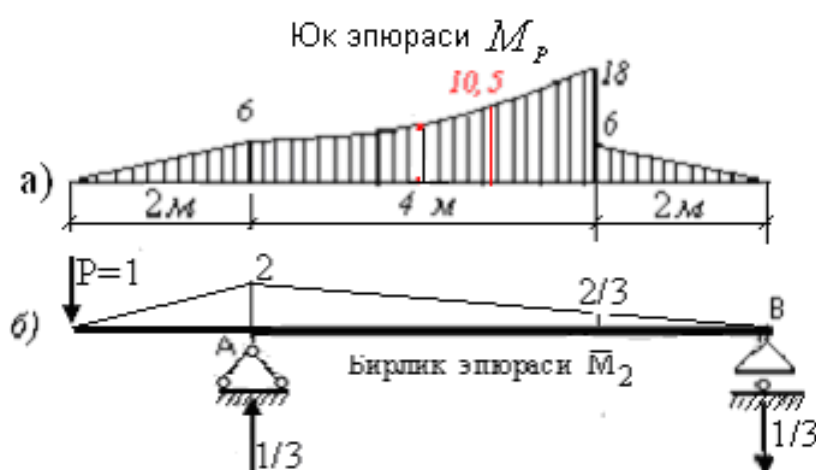


4.17-расм

$$\Delta_{1p} = \Delta'_1 + \Delta''_1 + \Delta'''_1 = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot 1 \right) - \frac{1}{EI_x} \left[\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{18 \cdot 4}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{3 \cdot 4}{12} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1}{3}}{2} \right) \right] - \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{6}{EI_x} - \frac{1}{EI_x} \left(12 \cdot \frac{7}{9} + 36 \cdot \frac{5}{9} - 16 \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{1}{EI_x} \left(\frac{4}{3} \right) = -\frac{26}{EI_x}.$$

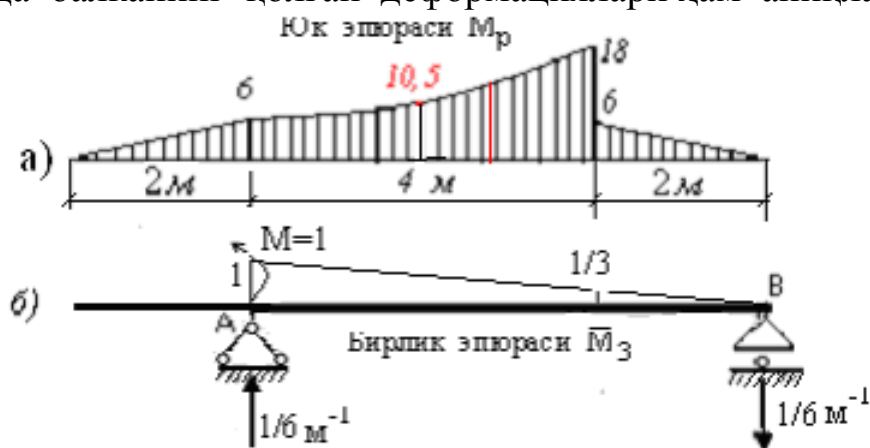
Шундай қилиб, юк эпюрасидан юзаларни ва бирлик эпюрадан тегишли ординаталарни алоҳида ҳисобламай, уларни аниқлаш ифодалари бир йўла ёзиб кетилди. Агар участкалар сони кўп бўлса, шундай қилиш тавсия қилинади. Энди оғиш бурчаги аниқланган кесим учун салқилик ҳам аниқланади. Бунинг учун тегишли бирлик эпюра қурилиб (4.18 б-расм), салқиликни аниқловчи ифода тузилади.

$$\Delta_{2p} = y_0 = \bar{M}_2 \times M_p = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right) + \frac{1}{EI_x} \left[\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{18 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot \left(\frac{2 + \frac{2}{3}}{2} \right) \right] + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(8 + 12 \cdot \frac{14}{9} + 36 \cdot \frac{10}{9} - 16 \cdot \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{48}{EI_x}$$



4.18-расм

Шу тарзда балканинг қолган деформациялари ҳам аниқланади.

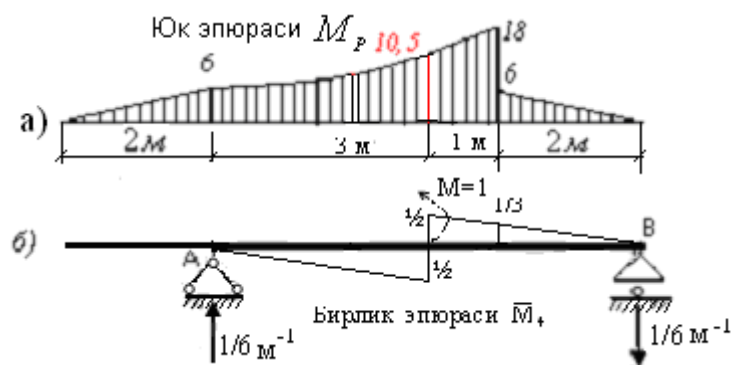


4.19-расм

$$\Delta_{3p} = \bar{M}_3 \times M_p =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{18 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) - \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{EI_x} \left[\left(12 \cdot \frac{7}{9} + 36 \cdot \frac{5}{9} - 16 \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{4}{3} \right] = \frac{20}{EI_x}.$$



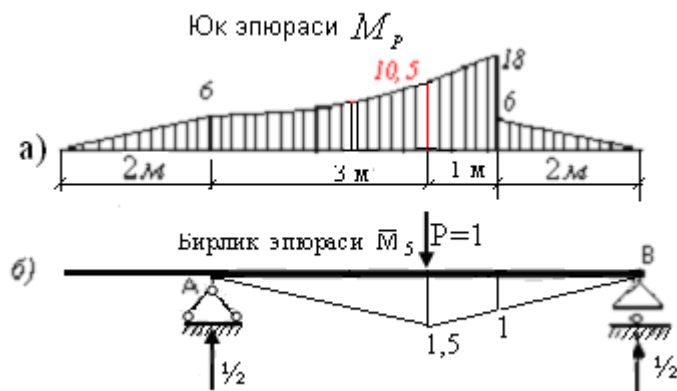
4.20-расм

Аввал бу деформация манфий ишора билан чиққан бўлиб, лекин биз 4.19,б-расмда бирлик моменти соат стрелкаси ҳаракатига тескари йўналтирилди, демак оғиш бурчаги шу йўналишда бўлиб, бу манфий бурчакни беради.

$$\Delta_{4p} = \overline{M}_4 \times M_p = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10,5 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) +$$

$$+ \frac{1}{EI_x} \left[\frac{10,5 \cdot 1}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{18 \cdot 1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) - \frac{3 \cdot 1^3}{12} \cdot 0,5 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(-5,0625 + \frac{275}{48} + \frac{4}{3} \right) = \frac{2}{EI_x}.$$



4.21-расм

$$\Delta_{5p} = \overline{M}_5 \times M_p = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 + \frac{10,5 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 - \frac{3 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 \right) -$$

$$- \frac{1}{EI_x} \left[\frac{10,5 \cdot 1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{18 \cdot 1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 1,5 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) - \frac{3 \cdot 1^3}{12} \cdot \left(\frac{1+1,5}{2} \right) \right] - \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \right) =$$

$$= -\frac{1}{EI_x} (4,5 + 15,75 - 5,0625) - \frac{1}{EI_x} (7 + 10,5 - 0,3125) - \frac{4}{EI_x} = -\frac{36,375}{EI_x}.$$

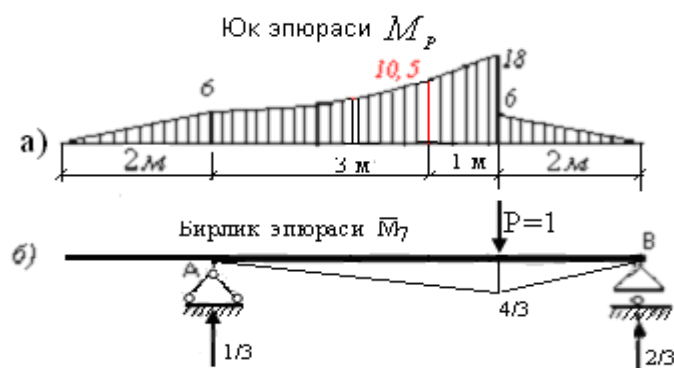


4.22-расм

$$\Delta_{6p} = \bar{M}_6 \times M_p = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{10,5 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) -$$

$$- \frac{1}{EI_x} \left[\frac{10,5 \cdot 1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{18 \cdot 1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) - \frac{3 \cdot 1^2}{12} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) \right] + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) =$$

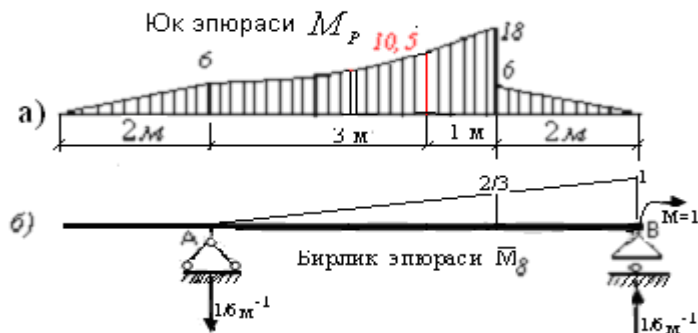
$$= -\frac{1}{EI_x} (1,5 + 5,25 - 1,6875) - \frac{1}{EI_x} \left(\frac{8,75}{3} + 5,5 - \frac{7}{48} \right) + \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{EI_x} \left(-5,0625 - \frac{397}{48} + \frac{4}{3} \right) = -\frac{12}{EI_x}$$



4.23-расм

$$\Delta_{7p} = \bar{M}_7 \times M_p = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{18 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right) - \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \right) =$$

$$= -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{16}{3} + 32 - \frac{32}{3} \right) - \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{16}{3} = -\frac{32}{EI_x}$$



4.24-расм

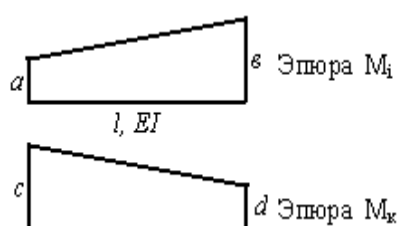
$$\Delta_{8p} = \bar{M}_8 \times M_p = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 4}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{18 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} - \frac{3 \cdot 4^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{EI_x} \left[\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{8}{3} + 16 - \frac{16}{3} \right) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{14}{3} \right) = \frac{18}{EI_x}.$$

Юқорида ечилган мисолдан балка деформациясини Верешчагин усули билан аниқлаш қулайлиги яққол кўриниб турибди. Трапеция шаклдаги эпюраларни кўпайтириш бироз мураккаблик туғдиради, лекин уни енгиллаштириш мумкин. Бунинг учун эпюраларни трапеция усули билан кўпайтириш қўлланади.

4.6 Эпюраларни трапеция усули билан кўпайтириш

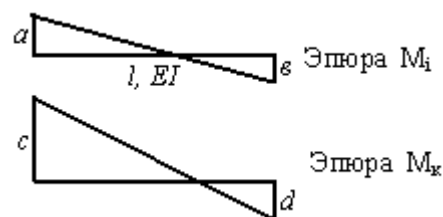
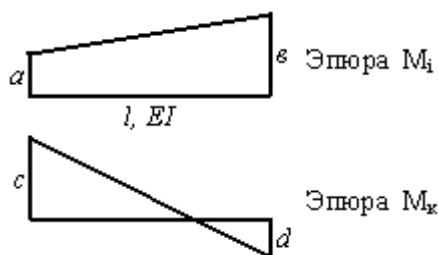
Агар балка деформациясини аниқлашда юк ва бирлик ҳолатидаги эпюралар трапеция шаклида бўлса, Верешчагин усули билан кўпайтириш учун уларни оддий расмларга ажратиш ва юзаларини аниқлашнинг ҳожати йўқ. Бундай ҳолда трапеция усули билан эпюраларни кўпайтириш керак. Бу усулни қуйидаги эпюра қисмида кўрсатилади:



Агар эпюралар тўғри чизиқли бўлса, уларни кўпайтиришда қайси бири ташқи юк таъсиридан, қайси бири эса изланаётган кўчиш йўналиши бўйича таъсир қилган бирга тенг кучдан эканлигининг фарқи йўқ.

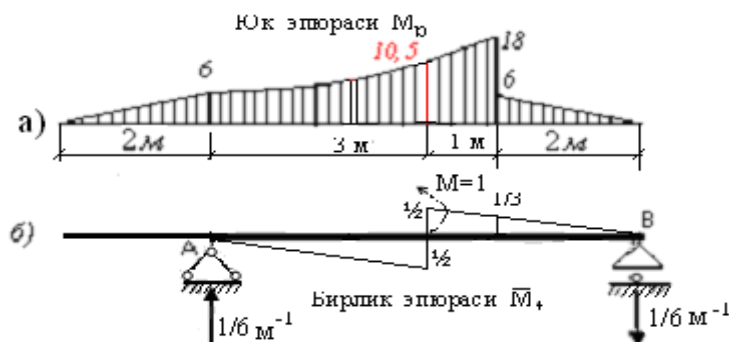
$$\Delta_{ik} = \frac{\ell}{6 \cdot EI} \cdot (2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + a \cdot d + b \cdot c) \quad (4.21)$$

(4.21) формуладаги кўпайтмалар улардаги ординаталар ҳисоб чизиғидан бир томонда бўлса, мусбат, акс ҳолда манфий ишора ишлатилади. Демак, (4.21) формулани ихтиёрий тўғри чизиқли эпюраларга, масалан “буралган трапеция” шаклларга ишлатиш мумкин экан.



Агар ҳисобланаётган участкада таралган юк бўлса, у ҳолда ундан ҳосил бўладиган кўчишнинг алоҳида Верешчагин усули учун ёзилган (20) формуласи ишлатилади. Буни мисолда кўриб чиқамиз.

10-мисол. 9-мисолда аниқланган Δ_{4p} ни трапеция усули билан ҳисоблаб кўринг (4.25 а ва б-расмлар).



3.25-расм

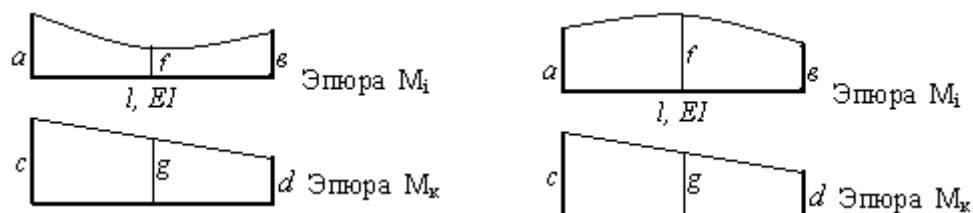
$$\begin{aligned} \Delta_{4p} &= \frac{3}{6EI_x} \left(-2 \cdot 6 \cdot 0 - 2 \cdot 10,5 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2} - 10,5 \cdot 0 \right) + \frac{1}{6EI_x} \left(2 \cdot 10,5 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 18 \cdot \frac{1}{3} + 10,5 \cdot \frac{1}{3} + 18 \cdot \frac{1}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{EI_x} \left(\frac{6 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{3 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{EI_x} \left[\frac{3 \cdot 1^3}{12} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{2EI_x} (-13,5) + \frac{1}{6EI_x} (35) + \\ &+ \frac{1}{EI_x} \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{1}{EI_x} \left(\frac{81}{48} \right) - \frac{1}{EI_x} \left(\frac{5}{48} \right) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{324}{48} + \frac{280}{48} + \frac{64}{48} + \frac{81}{48} - \frac{5}{48} \right) = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{96}{48} = \frac{2}{EI_x}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, аввал топилган натижа трапеция усули ёрдамида ихчамроқ ифодадан фойдаланиб ҳисоблаб чиқилди. Агарда эпюраларни кўпайтириш Симпсон усули билан олиб борилса, деформацияни аниқловчи ифодани янада ихчамлаштириш имконияти бор.

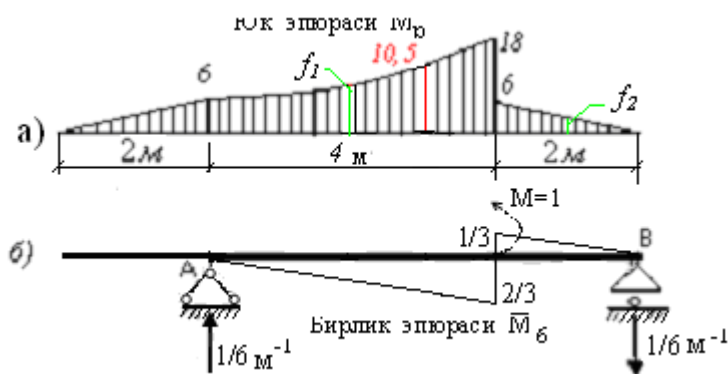
4.7 Балка деформациясини Симпсон усулида ҳисоблаш

Симпсон усулида ҳар қандай қонун билан ўзгарувчи эпюраларни кўпайтириш орқали, ҳаттоки юпқа деворли балкаларда ҳам деформацияни аниқлаш мумкин. Агар юк эпюраси квадрат парабола қонуни бўйича ўзгараётган бўлса, Симпсон усули аниқ натижа беради. Симпсон усулини қўллаш учун юк ва бирлик эпюраларининг участка чегарасидаги қийматларидан ташқари, шу участка ўртасидаги кесимдаги ординатани ҳам аниқлаш лозим.

$$\Delta_{ik} = \frac{\ell}{6 \cdot EI} \cdot (a \cdot c + 4 \cdot f \cdot g + b \cdot d) \quad (4.22)$$



Энди (4.22) формула ёрдамида 10-мисолда аниқланган деформациялардан бири топилади.



$f_1 = 6$ $f_2 = 3$. Бирлик эпюрадаги ўртадаги ординатани бир йўла формула ичида аниқлаб кетилади.

$$\Delta_{6p} = -\frac{4}{6EI_x} \left(6 \cdot 0 + 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{6EI_x} \left(6 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot 0 \right) =$$

$$= -\frac{40}{3EI_x} + \frac{4}{3EI_x} = -\frac{12}{EI_x}.$$

Қолган деформацияларни мустақил равишда ишлаб кўришни тавсия этиб, услубий кўрсатмада келтирилган мустақил иш учун мисолларни кўриб чиқиш маслаҳат берилди.

4.8 Мустақил иш топшириқлари

Балка схемаси	Жавоблар
	$\varphi_0 = -16,0833$; $\varphi_2 = -10,75$ $\varphi_5 = 2,75$; $\varphi_8 = 4,25$ $y_0 = 29,5$; $y_5 = -11,25$
	$\varphi_0 = -15,833$; $\varphi_2 = -10,5$ $\varphi_5 = 0$; $\varphi_8 = 10,5$ $y_0 = 29$; $y_5 = -9$

Балка схемаси	Жавоблар
	$\varphi_0 = -25,25 ; \varphi_2 = -9,25$ $\varphi_5 = 0,25 ; \varphi_8 = 5,75$ $y_0 = 34,5 ; y_5 = -11,25$
	$\varphi_0 = 67,75 ; \varphi_2 = 55,75$ $\varphi_5 = -2,75 ; \varphi_8 = -40,25$ $y_0 = -127,5 ; y_5 = 78,75$
	$\varphi_0 = 53,75 ; \varphi_2 = 41,75$ $\varphi_5 = -4,75 ; \varphi_8 = -30,25$ $y_0 = -99,5 ; y_5 = 60,75$
	$\varphi_0 = 16,25 ; \varphi_3 = -3,25$ $\varphi_6 = -7,75 ; \varphi_8 = 4,25$ $y_3 = 24,75 ; y_8 = 0,5$
	$\varphi_0 = -10,5 ; \varphi_3 = 0$ $\varphi_6 = 10,5 ; \varphi_8 = 15,8333$ $y_3 = -9 ; y_8 = 29$

Назорат саволлари.

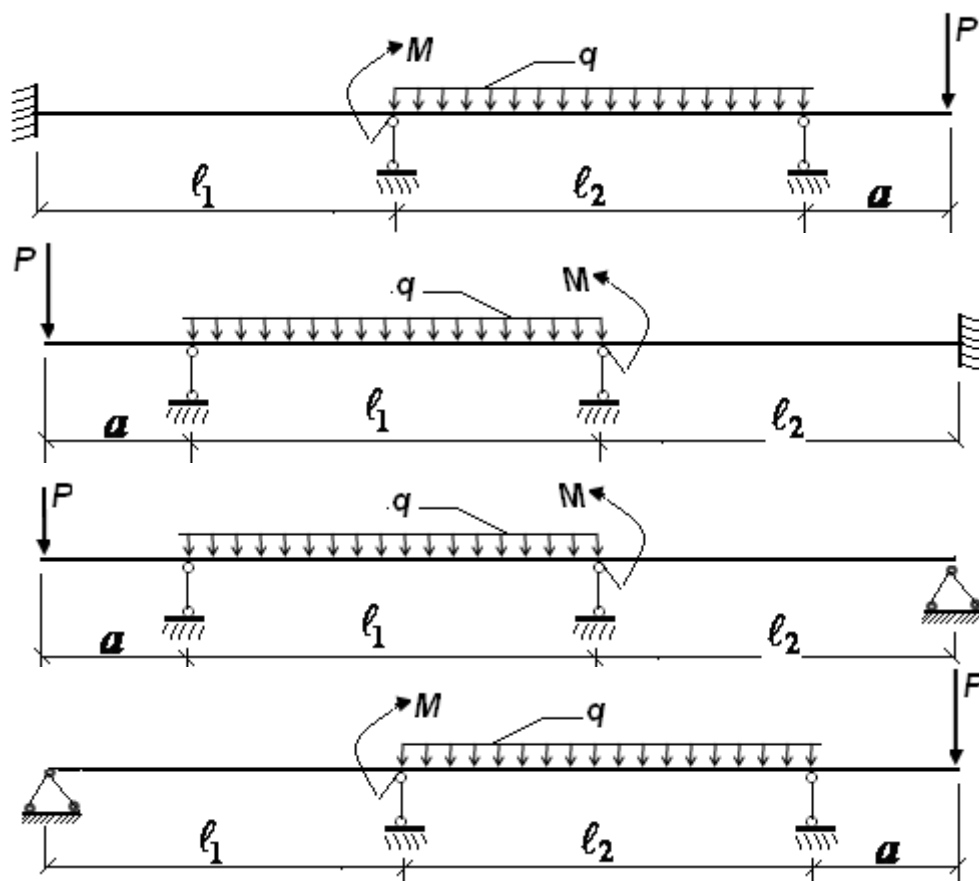
1. Балка эгилган ўқининг дифференциал тенгламаси қандай ёзилади?
2. Дифференциал тенгламани интеграллашда ҳосил бўладиган ихтиёрий ўзгармаслар қандай топилади?
3. Балкалар учун асосан неча хил чегара шarti бор?
4. Балка участкаларини ажратувчи кесимларда чегара шarti қандай ёзилади?
5. Универсал формула қандай ёзилади?
6. Универсал формулани чиқаришда қандай шартлар ишлатилган?
7. Универсал формуланинг бошланғич параметрлари қандай аниқланади?
8. Балка кесимининг оғиш бурчаги φ билан унинг салқилиги орасида қандай дифференциал боғланиш бор?

9. Графоаналитик усул билан салқилик ва кесимнинг оғиш бурчаги қандай аниқланади?
10. Кўчишлар умумий ҳолда қандай ишораланади?
11. Мор формуласи қандай ёзилади?
12. Верешчагин усулида кўчиш қандай формула билан топилади?
13. Эпюраларни трапеция усули билан кўпайтириш формуласи қандай ёзилади?
14. Симпсон формуласи қандай ёзилади?

5. Статик аниқмас балкаларни ҳисоблаш

5.1 Статик аниқмас балкалар

Зўриқиш ёки реакция кучларини фақат статиканинг мувозанат тенгламалари ёрдамигина аниқлаб бўлмайдиган балкалар статик аниқмас балкалар дейилади. Статик аниқмас балкаларда зўриқиш ёки реакция кучларининг сони статиканинг мувозант тенгламалар сонидан ортиқ бўлади.



5.1-расм.

5.1-расмда кўрсатилган балкалар статик аниқмас балкаларга мисол бўлади. Статик аниқмас балкаларни ҳисоблаш учун бир қатор усуллар мавжуд. Уларнинг айримлари билан “Қурилиш механикаси” фани

таништиради. Материаллар қаршилиги фанида фақат деформацияларни солиштириш усули кўриб чиқилади.

5.2 Деформацияни солиштириш усули

Статик аниқмас балкаларни деформацияларни солиштириш усули билан ҳисоблашда қуйидаги тартибда бажарилади:

1. Берилган балкада барча реакцияларни кўрсатиб, улардан статиканинг мувозанат тенгламалари ёрдамида топилиши мумкин бўлганларини аниқлаш.

2. Балканинг статик аниқмаслик даражасини топиш:

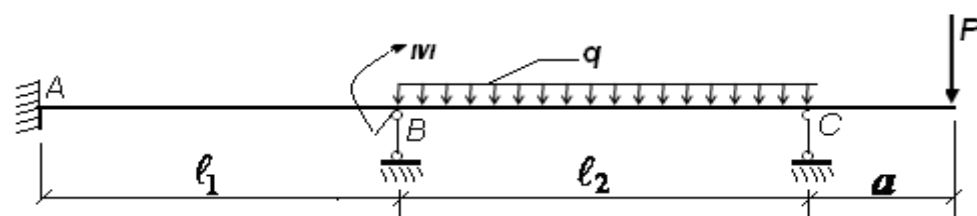
$$n = n_R - 3$$

n – статик аниқмаслик даражаси; n_R – реакция кучлари сони.

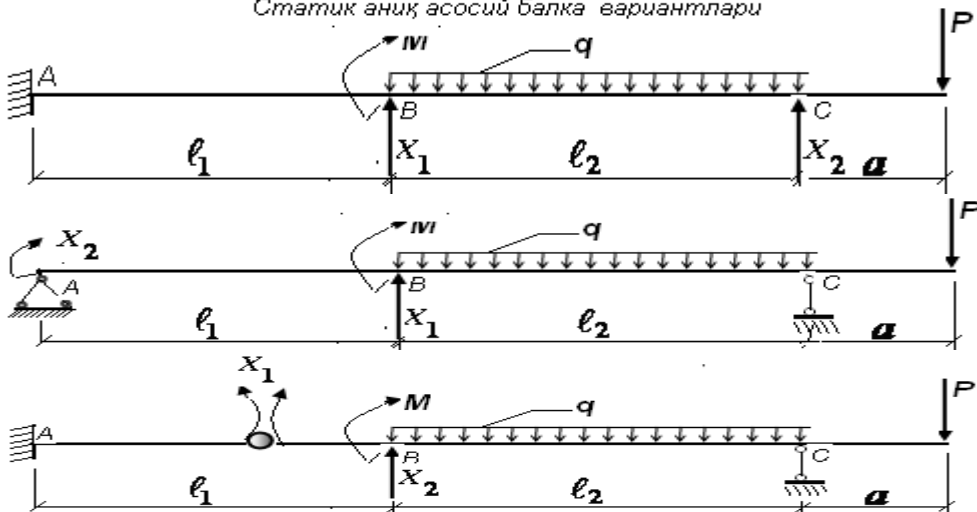
3. Асосий балка вариантларини кўриб чиқиш ва улардан бирини танлаш.

Асосий балка бу берилган балкадан “ортиқча” боғланишларни олиб ташлаш йўли билан ҳосил қилинган статик аниқ балка. “Ортиқча” боғланишлар сони балканинг статик аниқмаслик даражасига тенг. “Ортиқча” боғланиш сифатида балканинг таянч боғланишлари ёки ички зўриқишлари (эгувчи момент) олинади. Ҳар бир статик аниқмас балка учун чексиз кўп бўлган асосий балкалар вариантларини кўрсатиш мумкин. Амалда асосий балканинг 3 ёки 4 вариантини кўрсатиш билан чекланилади.

Берилган статик аниқмас балка



Статик аниқ асосий балка вариантлари



иккинчи вариант учун: $V(P, M, q, X_1, X_2) = 0$

$$\varphi_a(P, M, q, X_1, X_2) = 0$$

Статик аниқмас балкани ҳисоблаш масаласининг маъноси шундан иборатки, бирор асосий балка учун деформация тенгламалари тузилади ва улардан номаълум X кучларнинг миқдори аниқланиб, асосий балкага қўйилади ва натижада статик аниқ балка ҳосил бўлади. Бу балка учун ички кучлар – кўндаланг куч ва эгувчи момент эпюралари қурилади ва керак бўлса, кўндаланг кесим ўлчамлари топилади ёки улар берилган ҳолида балканинг мустаҳкамлиги текшириб кўрилади. Деформация тенгламасига кирган кўчишларни аниқлаш учун ихтиёрий усулни қўллаш мумкин, лекин бу масалада Верешчагин усули қулайроқ. Бундан ташқари, ташқи юклардан кўчишларни аниқлаш учун ҳар бир кучдан алоҳида кўчишни аниқлаб, кейин уларнинг алгебраик йиғиндисини топган маъкул, яъни:

$$\Delta_i(p) = \Delta_i(p_1, p_2, \dots) + \Delta_i(q_1, q_2, \dots) + \Delta_i(M_1, M_2, \dots)$$

$$V_a(P, M, q, X_1, X_2) = 0$$

$$\Phi_a(P, M, q, X_1, X_2) = 0$$

Мисол учун тенгламалар қуйидагича ёйиб ёзилади:

$$V_a(P) + V_a(M) + V_a(q) + V_a(X_1) + V_a(X_2) = 0 \quad \text{ва}$$

$$\Phi_a(P) + \Phi_a(M) + \Phi_a(q) + \Phi_a(X_1) + \Phi_a(X_2) = 0$$

Шунинг учун кейинги статик аниқмас балкани ҳисоблаш тартиби қуйидаги ишлардан иборат:

1. Ҳар бир куч таъсиридан алоҳида эгувчи момент эпюраларини қуриш.

2. Ҳар бир номаълум X дан эгувчи момент эпюраларини қуриш.

3. Ҳар бир X нинг бирга тенг қийматидан бирлик эпюралар қуриш.

4. Верешчагин усулини қўллаб, деформация тенгламадаги кўчишларни аниқлаш.

5. Деформация тенгламаларини ечиш ва номаълум X ларнинг миқдорини аниқлаш.

6. Номаълум X ларнинг миқдорини асосий балкага кўчириб қўйиш ва натижада статик аниқ балкани ҳосил қилиш. Агар номаълум X нинг қиймати манфий бўлиб чиқса, асосий балкадаги тегишли номаълумнинг йўналишини ўзгартириб қўйиш керак.

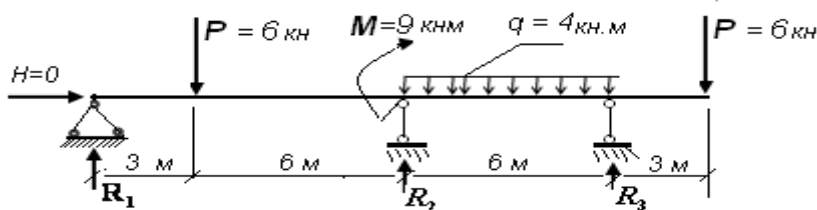
Қолган ишлар статик аниқ балкани ҳисоблаш тартиби бўйича олиб борилади. Лекин бу ҳисобни бажаришдан олдин, юқорида бажарилган

ишларни текшириб кўриш керак Бунинг учун деформацияли текширув ўтказилади. Бу текширувда деформация тенгламаларида қўйилган шартлар бажарилгани текшириб кўрилади. Бу ҳам Верещчагин усулида бажарилади.

Юқорида келтирилган статик аниқмас балка ҳисобининг бажариш кетма-кетлигидан фойдаланиб, бир нечта мисоллар кўриб чиқилади.

5.4 Масалалар ечиш

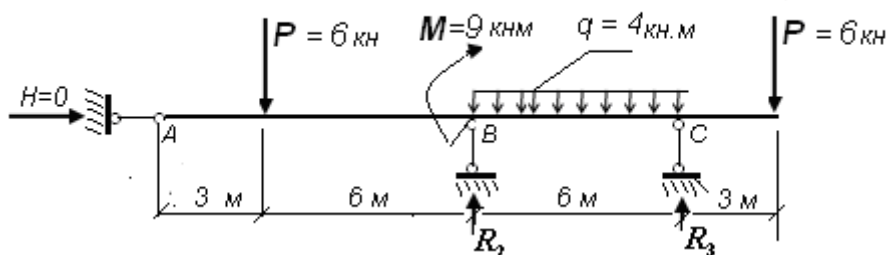
1-мисол. Берилган статик аниқмас балкани ҳисобланг (5.2-расм).



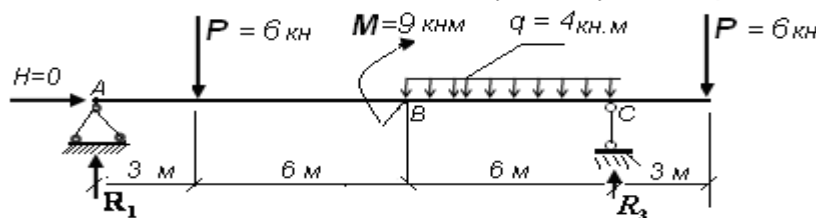
5.2-расм.

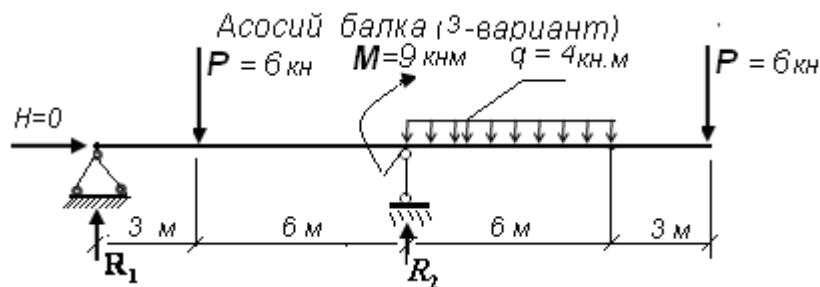
Берилган балкада реакция кучлари ҳосил бўладиган боғланишлар сони $n_R = 4$ га тенг. Статик аниқмаслик даражаси $n=4-3=1$ бўлади. Демак, статик аниқ асосий балка ҳосил қилиш учун берилган балкадан битта боғланишни олиб ташлаш керак. Асосий балканинг 1-вариантини ҳосил қилиш учун R_1 реакция ҳосил қилувчи боғланиш “ортиқча” деб ҳисобланади, 2-вариант – R_2 ни ҳосил қилувчи ва 3-вариантда R_3 реакция ҳосил қилувчи боғланиш “ортиқча” деб олинади. Бундай ҳолда қуйидаги статик аниқ асосий балкалар ҳосил бўлади.

Асосий балка (1- вариант)

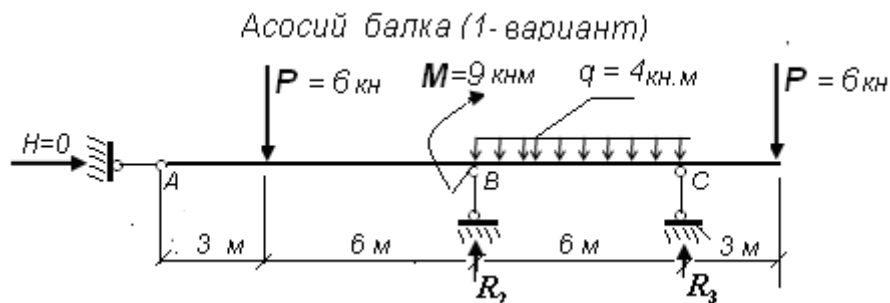


Асосий балка (2- вариант)

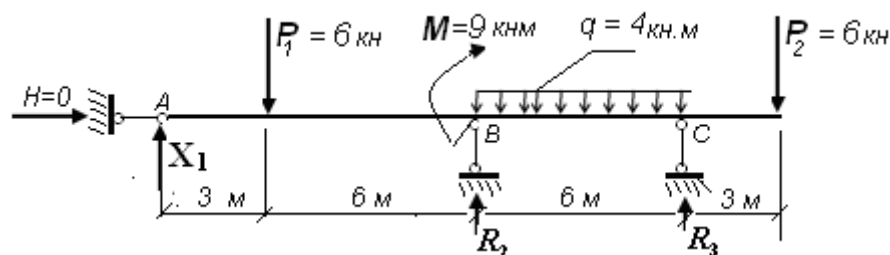




Ишлаш учун асосий балкалардан 1-вариант олинади



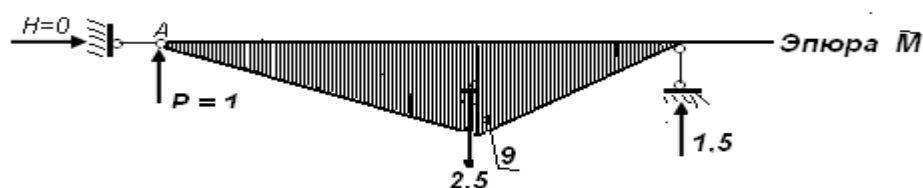
Асосий ва берилган балкалар орасидаги куч фарқини йўқотиш учун олиб ташланган боғланиш (А нуктадаги) йўналиши бўйича X_1 куч қўйилади:



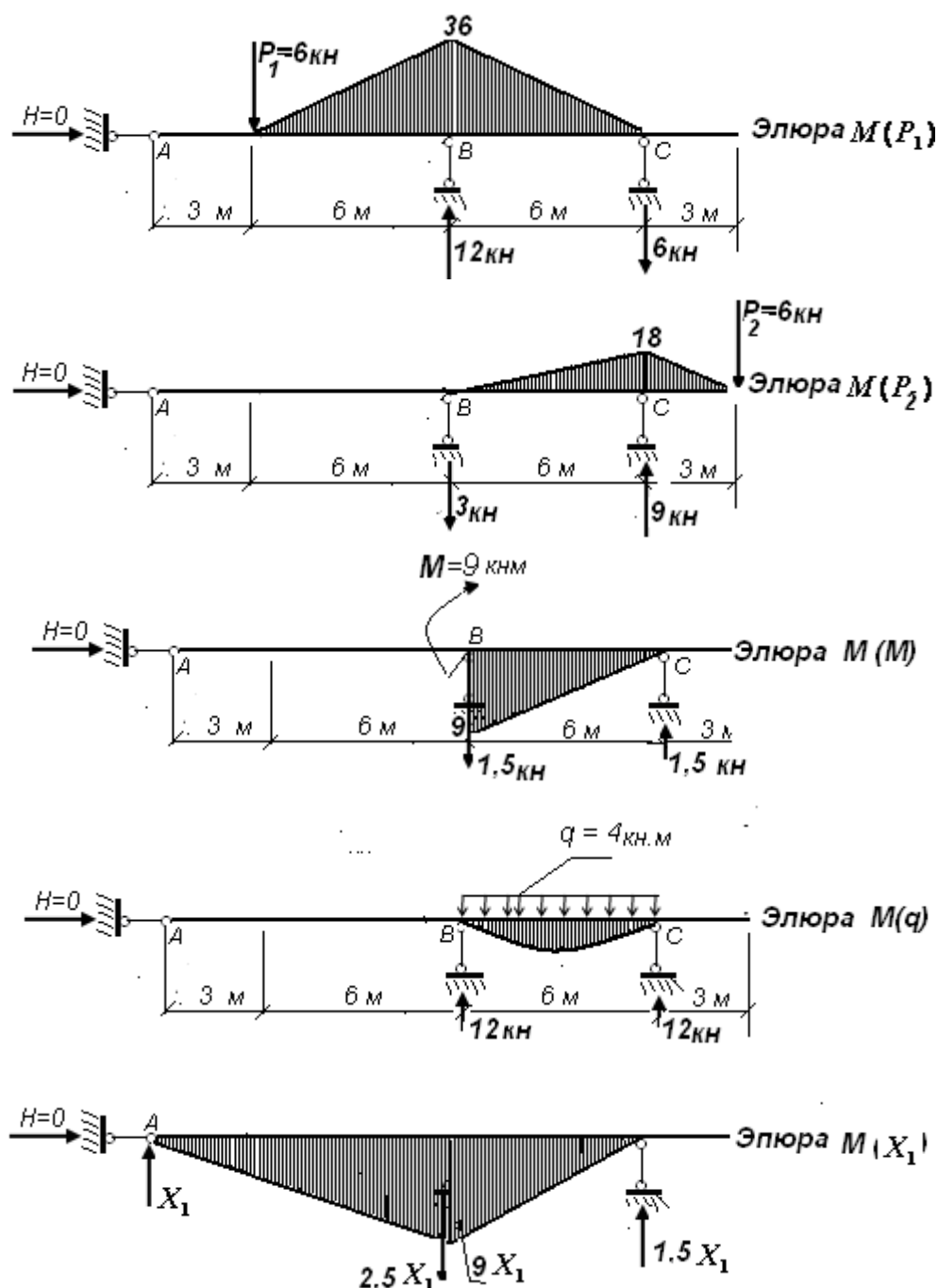
Асосий ва берилган балкалар орасидаги деформация фарқини йўқотиш учун қуйидаги деформация тенгламаси ёзилади:

$$y_a = y_a(P_1) + y_a(P_2) + y_a(M) + y_a(q) + y_a(X_1) = 0$$

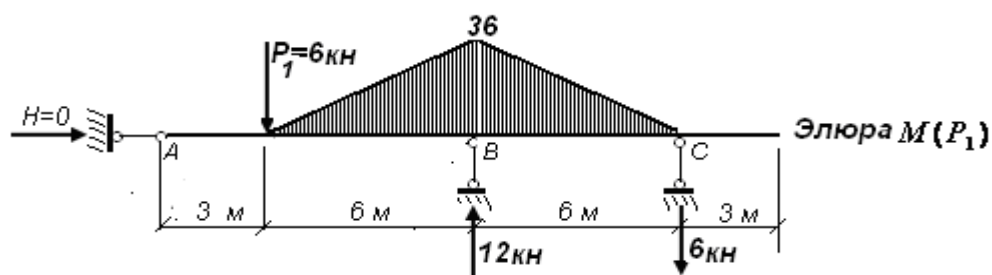
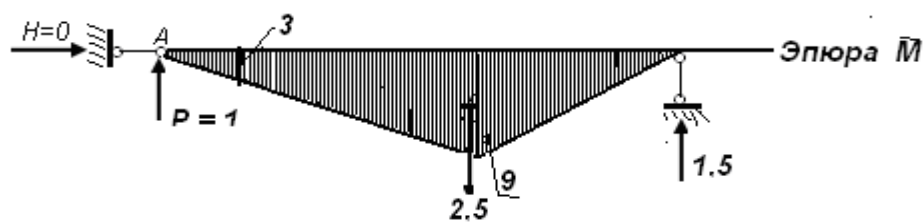
Бу тенгламанинг физик маъноси шундан иборатки, олиб ташланган боғланиш йўналиши бўйича ҳар бир таъсирдан аниқланган кўчишларнинг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши шарт, чунки берилган балкада мазкур кўчиш нолга тенг. Деформация тенгламасидаги кўчишларни топиш учун Верещагин усули қўлланилади, бунинг учун асосий балкада ҳар бир таъсирдан ва ҳозирча номаълум бўлган X_1 куч дан эгувчи момент эпюралари қурилади. Бундан ташқари Верещагин усулини қўллаш учун бирлик эпюра ҳам қурилади:



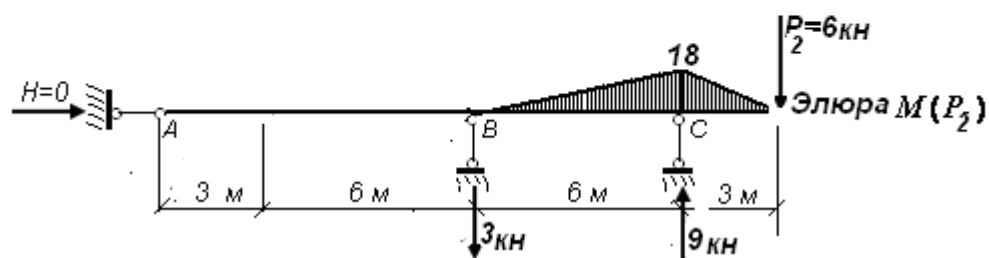
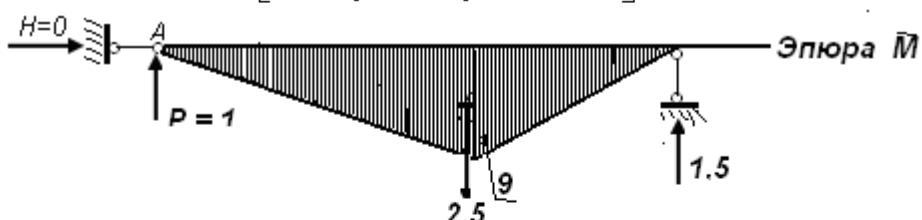
Энди ташки юк таъсиридан ва номаълум X_1 кучдан эгувчи момент эпюралари курилади. Бу эпюраларни асосий балка схемасида кўрсатиш лозим.



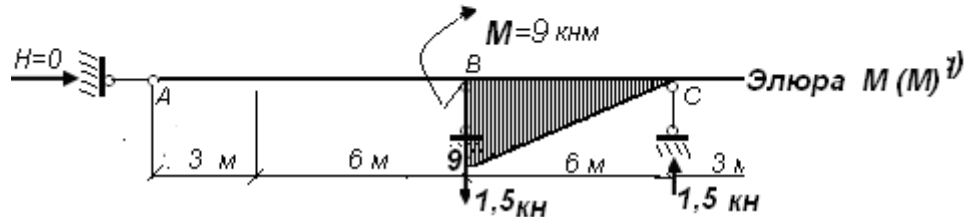
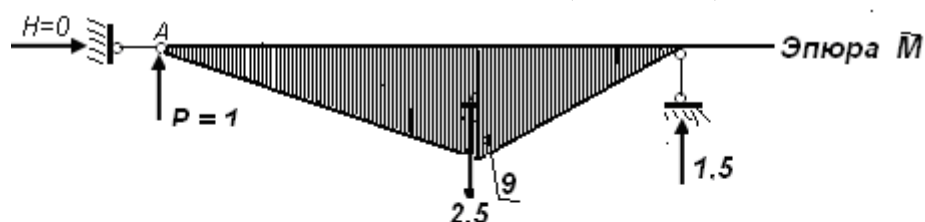
Деформация тенгламасидаги кўчишларни Верещчагин усули ёрдамида аниқлашга керак бўлган эпюралар тайёр. Кўчишларни бирма-бир аниқлашга ўтилади. Қулайлик учун юқоридан тегишли юк эпюраси билан бирлик эпюрани кўчириб, кўчишлар аниқланади.



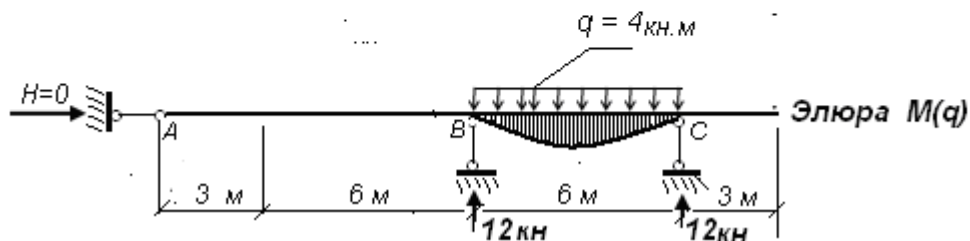
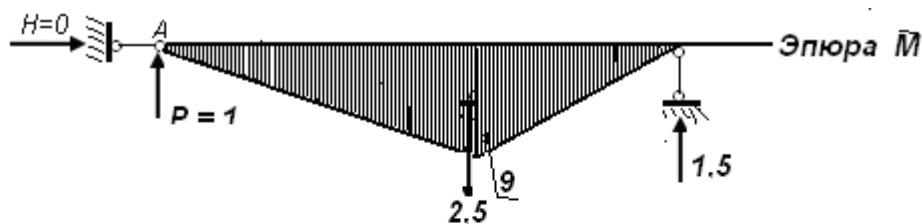
$$Y_a(P_1) = \bar{M} \times M(P_1) = \frac{-1}{EI} \left[\frac{36 \cdot 6}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) + \frac{36 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right] = -\frac{756 + 648}{EI} = -\frac{1404}{EI}.$$



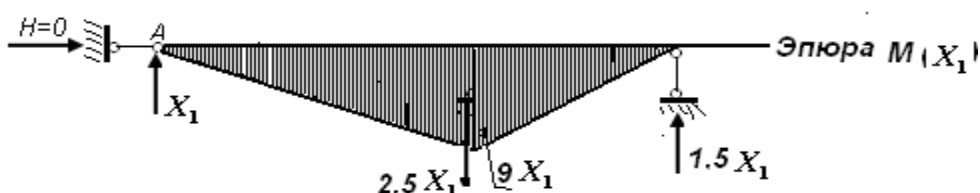
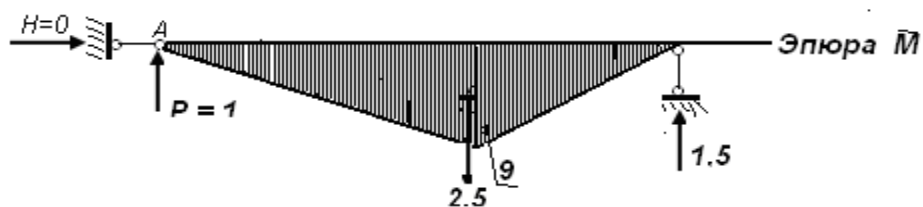
$$Y_a(P_2) = \bar{M} \times M(P_2) = -\frac{1}{EI} \left(\frac{18 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \right) = -\frac{162}{EI}.$$



$$Y_a(M) = \bar{M} \times M(M) = \frac{1}{EI} \left(\frac{9 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right) = \frac{162}{EI}.$$



$$Y_a(q) = \overline{M} \times M(q) = \frac{1}{EI} \left(\frac{4 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \right) = \frac{324}{EI}.$$



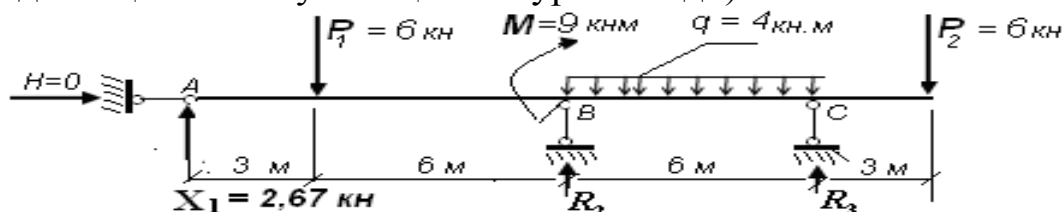
$$Y_a(X_1) = \overline{M} \times M(X_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{9X_1 \cdot 9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 + \frac{9X_1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 9 \right) = \frac{405X_1}{EI}.$$

Аниқланган кўчишларнинг қийматлари ва ифодасини деформация тенгламасига қўйиб, номаълум X_1 нинг қиймати топилади.

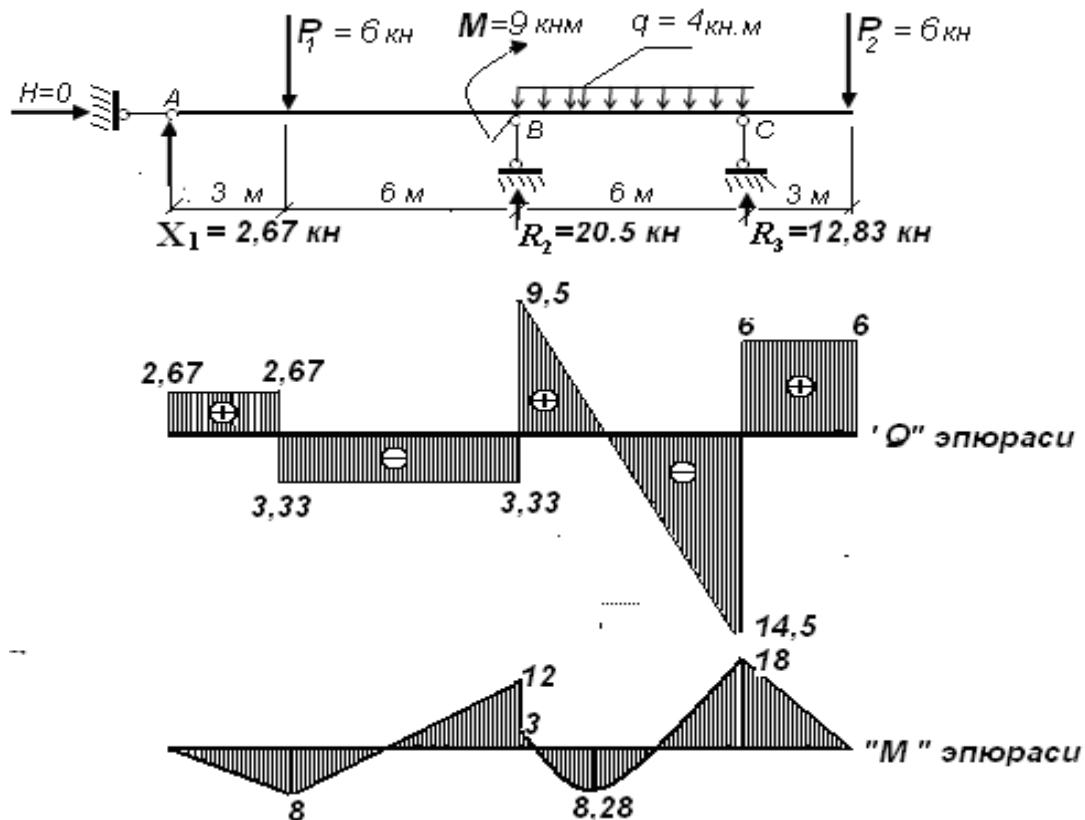
$$-1404 - 162 + 162 + 324 + 405 X_1 = 0. \quad 405 X_1 = 1080.$$

$$X_1 = \frac{1080}{405} = 2,67 \text{ кН}.$$

Аниқланган X_1 қиймати танлаб олинган асосий балка схемасига қўйилади (агар қиймат манфий бўлса, схемада йўналиши ўзгартириб қўйилади ва қиймати мусбат қилиб кўрсатилади).



Энди статик аниқ балкага эга бўлинди ва бунинг давоми сифатида статик аниқ балкаларни ҳисоблаш тартиби бўйича иш олиб борилади. Мисолни давом эттиришдан олдин кўндаланг куч ва эгувчи момент эпюралари албатта қурилади ва шундан кейин масала шартига кўра, балка мустаҳкамлигини текшириш масаласига ўтилади. Агарда кўндаланг кесим ўлчамлар берилмаган бўлса, ўлчамлар аниқланади. Шундан кейин бошқа талаблар, масалан, бирор кесимдаги кўчишни аниқлаш бажарилади.



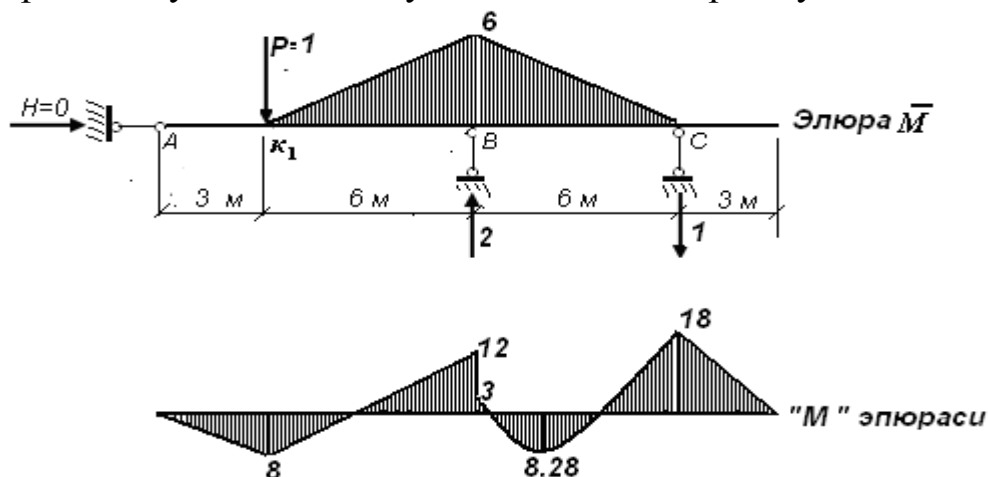
Таянч реакцияларни топиш, ички кучлар эпюраларини қуриш масалалари юқорида батафсил берилганлиги сабабли, бу ерда тайёр равишда бериш лозим топилди.

Эпюралар қурилди. Масала шартида кўндаланг кесим ўлчамлари берилган бўлса, балканинг мустаҳкамлигини текширилади, акс ҳолда уларни аниқлаш керак. Биз қўштаврли кўндаланг кесим танлаймиз. Эгувчи момент эпюрасидан максимал моментнинг абсолют қиймати олинади: $M_{\max} = 18 \text{ кНм} = 1800 \text{ кНсм}$. Балка мустаҳкамлигини таъминлашга зарур бўлган қаршилик момент аниқланади: $[\sigma] = 16 \text{ кН/см}^2$ (пўлат материали учун);

$$W_{\text{зарур}} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{1800}{16} = 112,5 \text{ см}^3$$

ГОСТ 8239-89 га асосан балканинг кўндаланг кесими учун №16 қўштаврни қабул қилинди; $W_x = 118 \text{ см}^3$; $I_x = 945 \text{ см}^4$ Балканинг эгилишга бикрлиги: $EI_x = 2 \cdot 10^4 \cdot 945 = 1890 \cdot 10^4 \text{ кНсм}^2 = 1890 \text{ кНм}^2$.

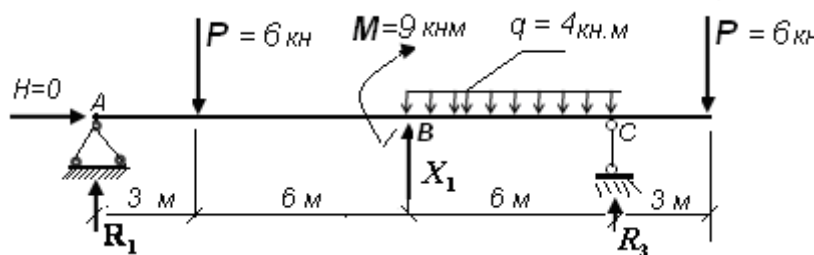
Масаланинг шартида балканинг белгиланган кесими учун кўчишни аниқлаш вазифаси қўйилиши мумкин, масалан P_1 кучнинг остида вертикал йўналишдаги кўчишни топиш керак бўлсин.



Бу кўчиш Верешчагин усули билан аниқланади. Кўчишни аниқлаш учун керак бўлган бирлик эпюрани берилган балкадан ҳосил қилинган ихтиёрий статик аниқ балкада қуриш мумкин.

$$y_{\kappa_1} = \frac{1}{EI} \left(\frac{12 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 - \frac{8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 - \frac{4 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right) = \frac{24}{EI} = \frac{24}{1890} = 0,0127 \text{ м.}$$

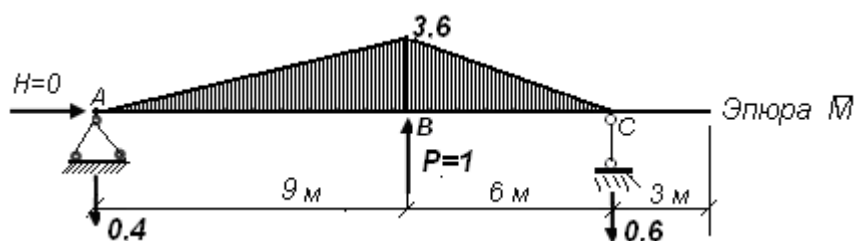
Шу ерда биринчи мисолни тугатиб, кейинги мисолга ўтиш мумкин эди, аммо бир муаммо ечимсиз қолди. Мисолнинг бошида уч вариант асосий балка сифатида олинган эди, лекин улардан фақат бири ишлатилди. Қайси вариантни ишлатиш ўзимизга боғлиқ, лекин қайси бири олинмасин бир хил натижага эга бўлинади. Асосий балкани танлаб олишда Верешчагин усулини ишлатишда иложи борица камроқ иш ҳажмига эга бўлишга интилиш керак. Бунга зарураят бўлмаса ҳам, қўрилган мисолни қайтадан иккинчи вариантдаги асосий балкани кўриб чиқамиз.



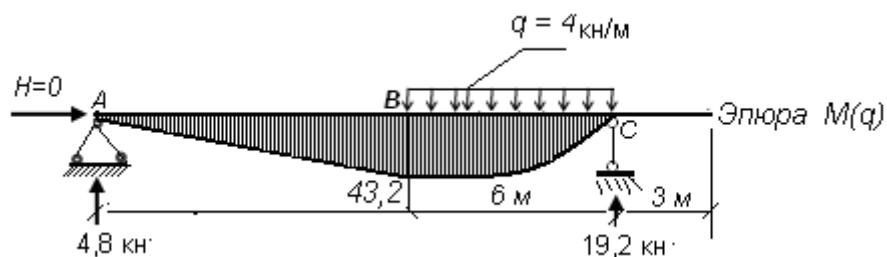
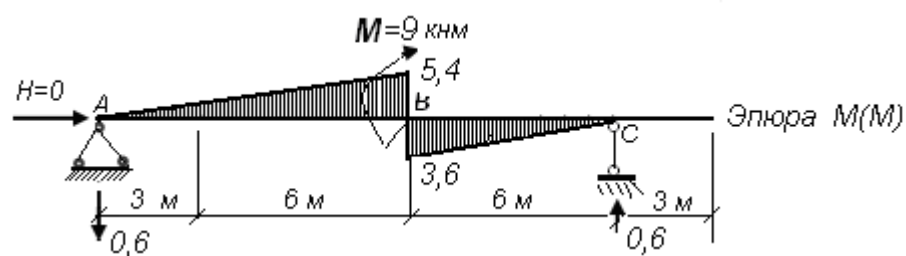
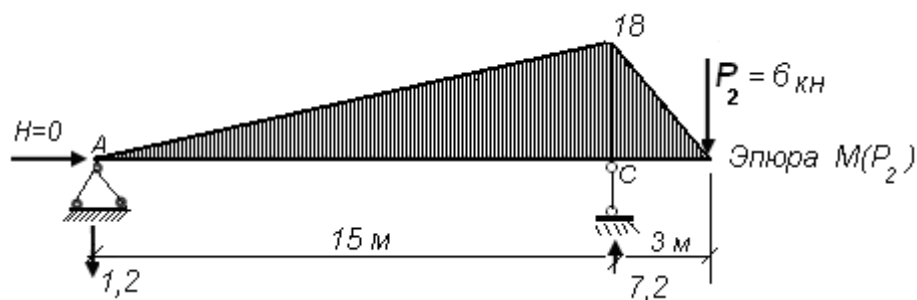
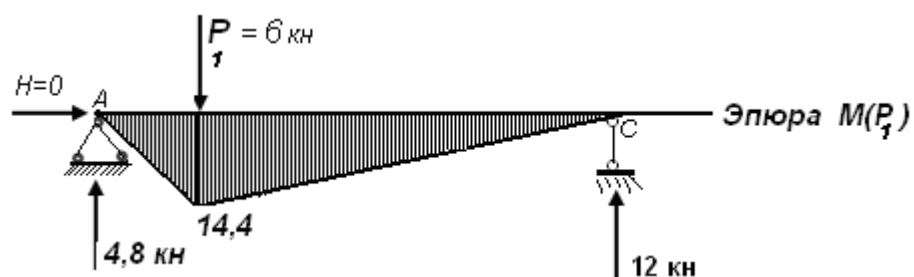
Асосий ва берилган балкалар орасидаги деформация фарқини йўқотиш учун қуйидаги деформация тенгламаси ёзилади:

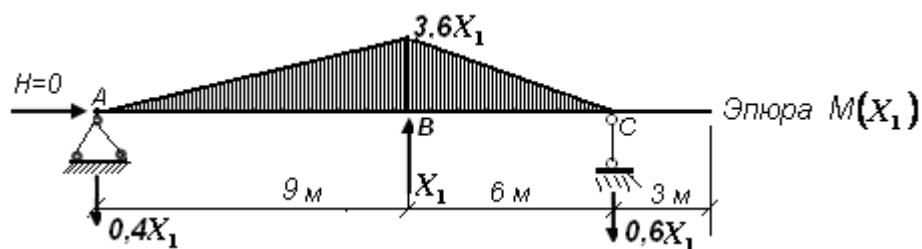
$$y_B = y_B(p_1) + y_B(P_2) + y_B(M) + y_B(q) + y_B(X_1) = 0.$$

Олиб ташланган боғланиш йўналиши кўчишни (УВ) аниқлаш учун бирлик эпюра $\overline{m}$ қурилади.

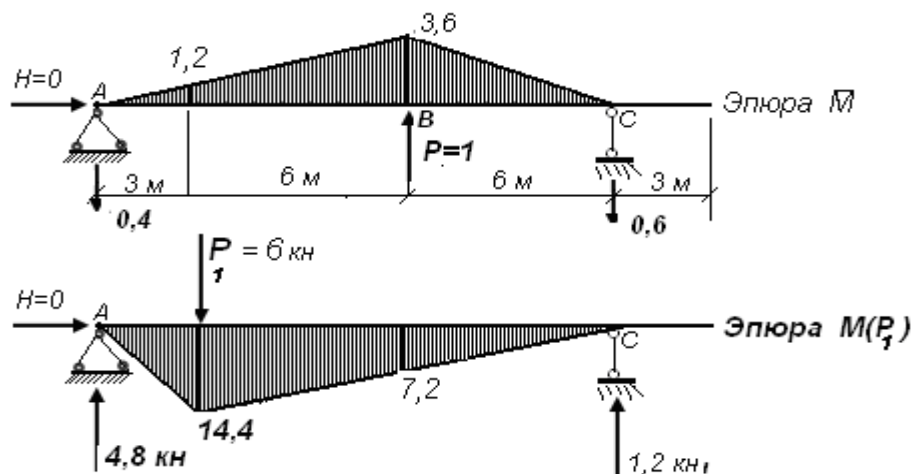


Балкага қўйилган ҳар бир таъсирдан алоҳида эгувчи момент эпюралари қурилади.



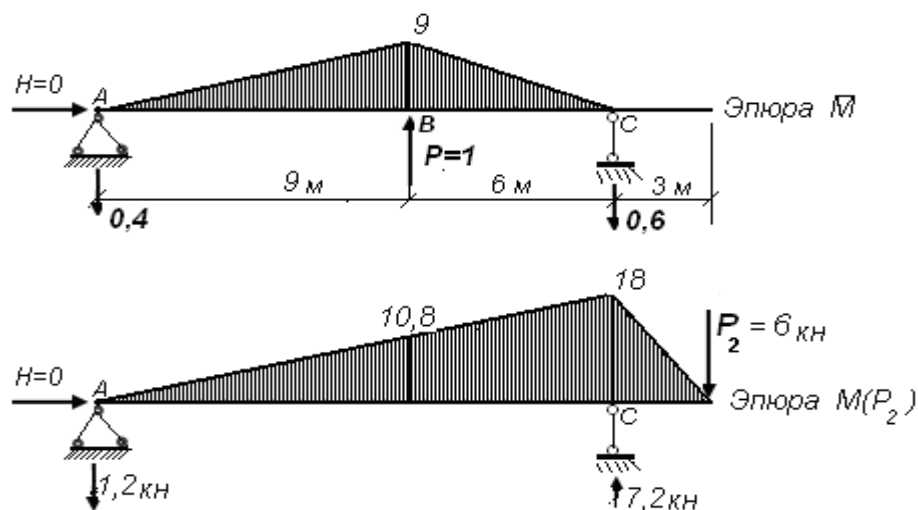


Деформация тенгламасидаги кўчишларни Верещагин усули билан аниқлаш учун керакли эпюралар тайёр, энди уларни бирма-бир аниқлаш лозим.



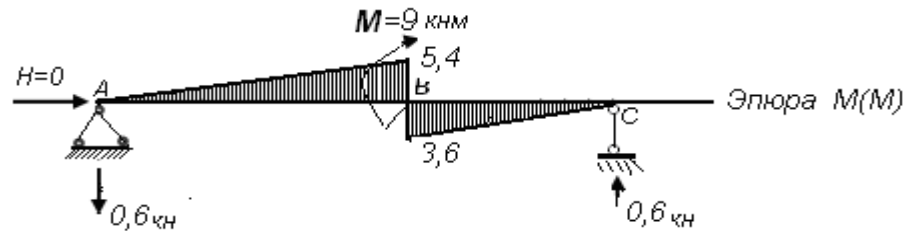
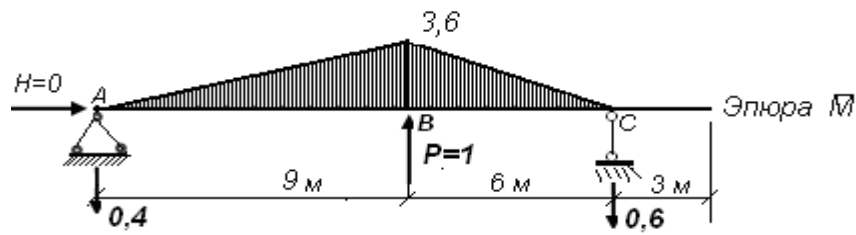
$$Y_B(P_1) = \overline{M} \times M(P_1) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{14,4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,2 - \frac{14,4 \cdot 6}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 1,2 + \frac{1}{3} \cdot 3,6 \right) - \frac{7,2 \cdot 6}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 1,2 + \frac{2}{3} \cdot 3,6 \right) \right] -$$

$$- \frac{1}{EI} \left(\frac{7,2 \cdot 6}{2} \cdot \frac{3}{3} \cdot 3,6 \right) = - \frac{1}{EI} (17,28 + 86,4 + 60,48 + 51,84) = - \frac{216}{EI};$$



$$Y_B(P_2) = \overline{M} \times M(P_2) = \frac{1}{EI} \left(\frac{10,8 \cdot 9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 + \frac{10,8 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 + \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3,6 \right) =$$

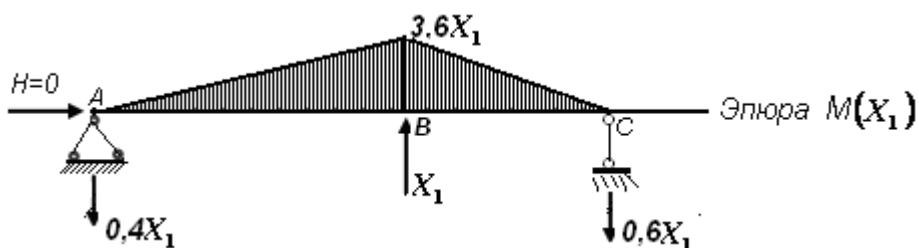
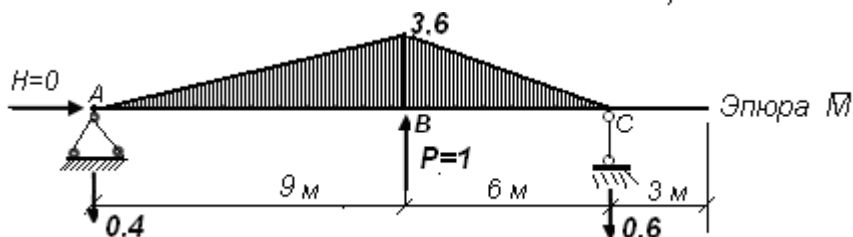
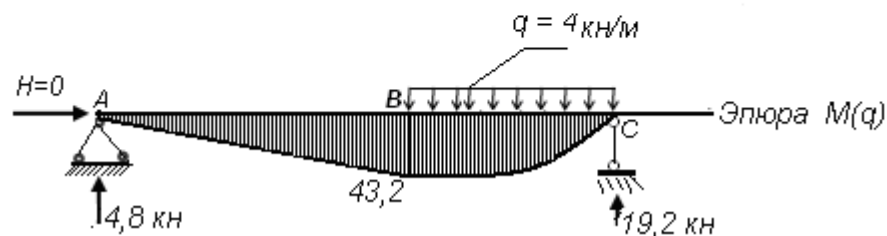
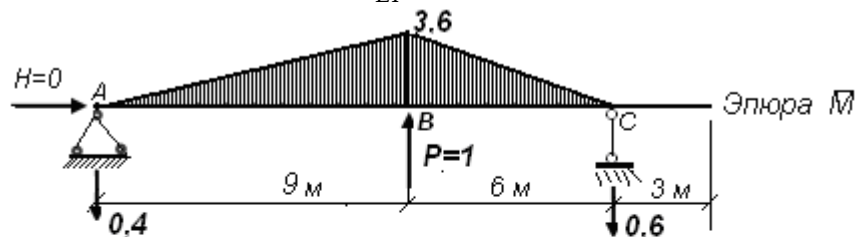
$$= \frac{1}{EI} (116,64 + 77,76 + 64,8) = \frac{259,2}{EI};$$



$$y_B(M) = \bar{M} \times M(M) = \frac{1}{EI} \left(\frac{5,4 \cdot 9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 - \frac{3,6 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 \right) = \frac{1}{EI} (58,32 - 25,92) = \frac{32,4}{EI}$$

$$y_B(q) = \bar{M} \times M(q) = \frac{1}{EI} \left(-\frac{43,2 \cdot 9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 - \frac{43,2 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 - \frac{4 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,6 \right) =$$

$$= \frac{1}{EI} (-466,56 - 311,04 - 129,06) = -\frac{907,2}{EI};$$

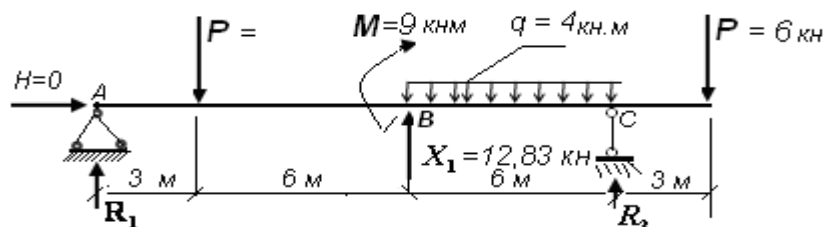


$$y_B(X_1) = \bar{M} \times M(X_1) = \frac{1}{EI} \left(\frac{3,6 X_1 \cdot 9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 + \frac{3,6 X_1 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,6 \right) = \frac{64,8 X_1}{EI}.$$

Аниқланган кўчишларнинг миқдорини деформация тенглама - сига қўйиб, у ердан номаълум X_1 топилади.

$$\frac{1}{EI}(-216 + 259,2 + 32,4 - 907,2 + 64,8 X_1) = 0; \quad X_1 = \frac{831,6}{64,8} = 12,83 \text{ кН}.$$

Аниқланган қиймат асосий балкага қўйилади.



R_1 ва R_3 реакция кучлари аниқланади:

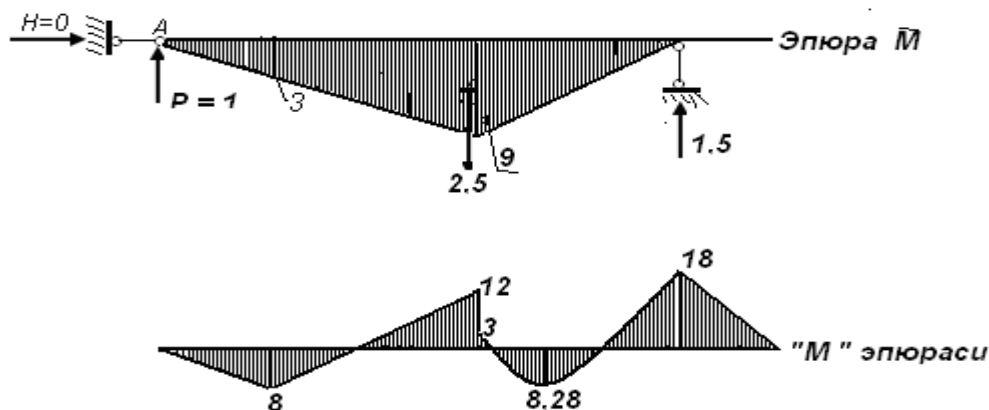
$$R_1 = \frac{P_1 \cdot 12 - M + q \cdot 6 \cdot 3 - X_1 \cdot 6 - P_2 \cdot 3}{15} = \frac{6 \cdot 12 - 9 + 4 \cdot 6 \cdot 3 - 12,83 \cdot 6 - 6 \cdot 3}{15} =$$

$$= \frac{72 - 9 + 72 - 77 - 18}{15} = \frac{40}{15} = 2,67 \text{ кН}.$$

$$R_3 = \frac{P \cdot 3 + M + q \cdot 6 \cdot 12 - X_1 \cdot 9 + P_2 \cdot 18}{15} = \frac{6 \cdot 3 + 9 + 4 \cdot 6 \cdot 12 - 12,83 \cdot 9 + 6 \cdot 18}{15} =$$

$$= \frac{18 + 9 + 288 - 115,5 + 108}{15} = \frac{307,5}{15} = 20,5 \text{ кН}$$

Кўришиб турибдики, таянч реакцияларининг қиймати худди биринчи вариантда топилган қийматларга тенг чиқди. Шунинг учун бу вариантни давом эттиришнинг зарураяти йўқ. Статик аниқмас балкани асосий балканинг бир неча вариантлари бўйича ҳисоблаб, натижаларни солиштириш талаб қилинмайди, лекин ҳисобни текшириш учун деформацион текширув ўтказиб, яъни $\overline{M} \times M = 0$ шартнинг бажарилиши текшириб кўрилади.

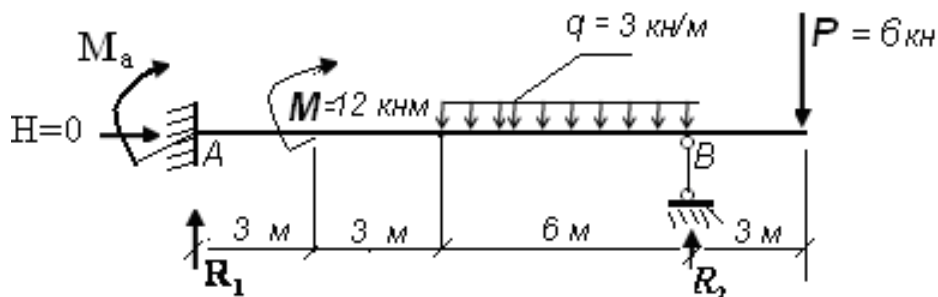


$$\overline{M} \times M = \frac{1}{EI} \left[\frac{8 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{8 \cdot 6}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 9 \right) - \frac{12 \cdot 6}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 9 \right) - \frac{3 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4 \cdot 6^3}{12} \cdot 4,5 \right] =$$

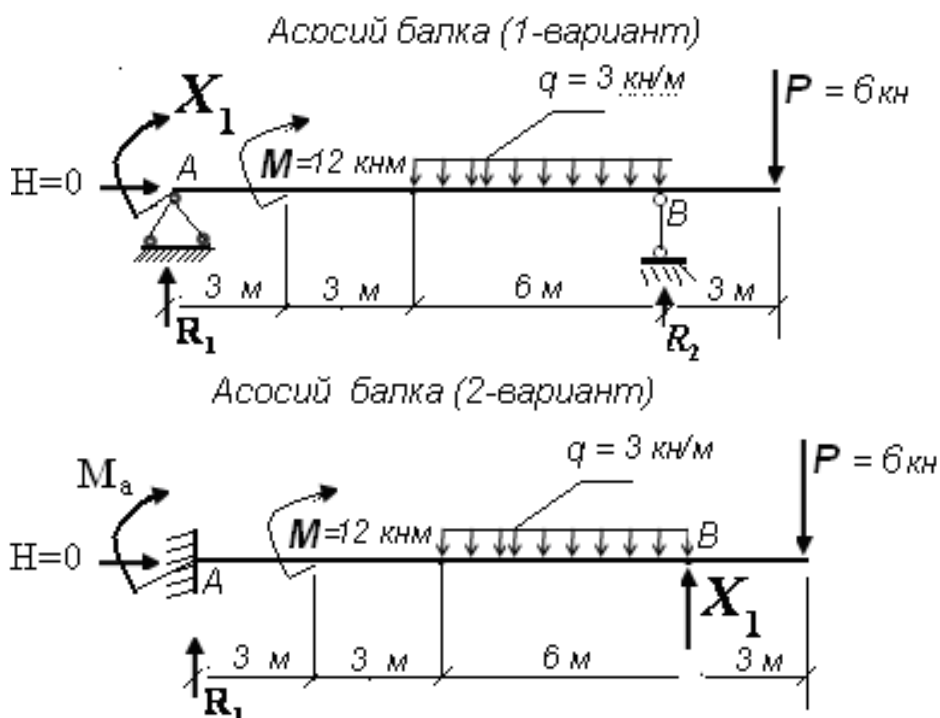
$$= \frac{1}{EI} (24 + 120 - 252 - 54 - 162 + 324) = 0.$$

Шу билан биринчи мисолни ечишни тугатиб, иккинчи мисолга ўтилади. Иккинчи мисолда статик аниқмас балканинг таянч боғланишини ўзгартириб кўрамиз. Иккинчи мисол биринчи мисолда кўрилган ҳисоблаш кетма-кетлиги бўйича ёзилади, лекин айрим ишларни ташаб ёки қисқартириб олиб боришга тўғри келади, чунки мазкур кўрсатманинг ҳажми чекланган.

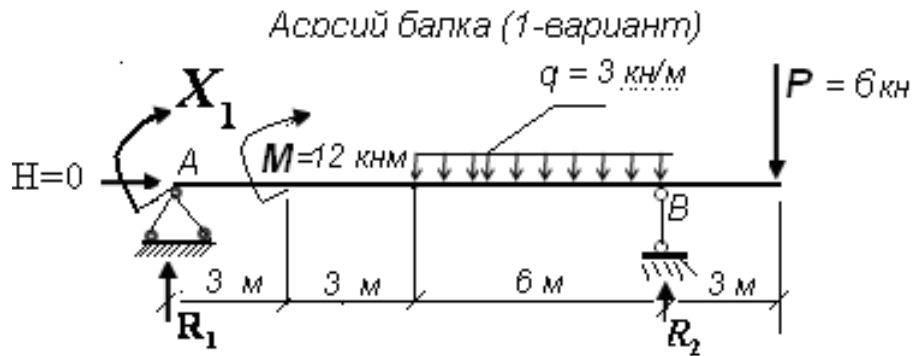
2-мисол. Статик аниқмас балканинг схемаси.



Берилган балкада реакция кучлари ҳосил бўладиган боғланишлар сони $n_R = 4$ га тенг. Статик аниқмаслик даражаси $n=4-3=1$. Демак, статик аниқ асосий балка ҳосил қилиш учун берилган балкадан битта боғланишни олиб ташлаш керак. Иккита асосий балка вариантлари куйидагича:



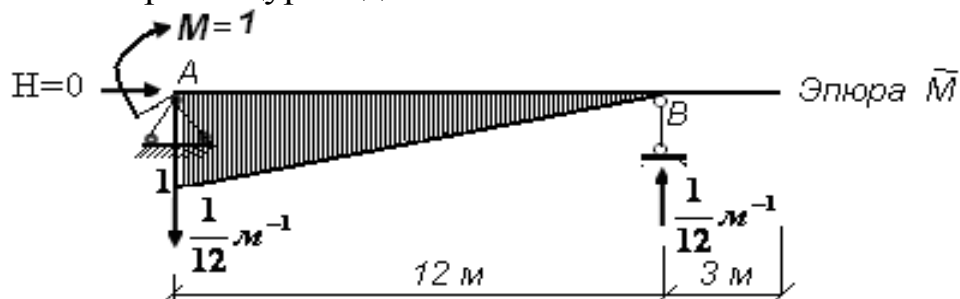
Ишлаш учун асосий балканинг 1-варианти олинади



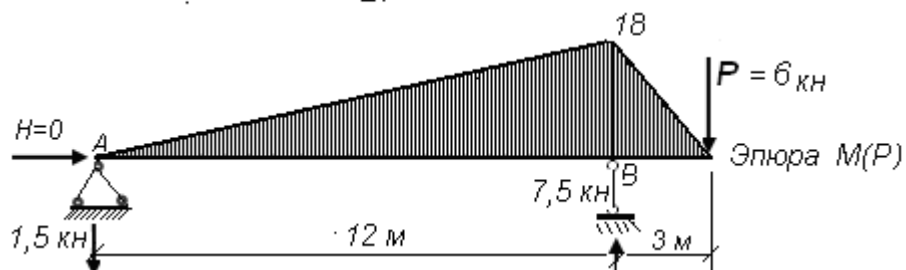
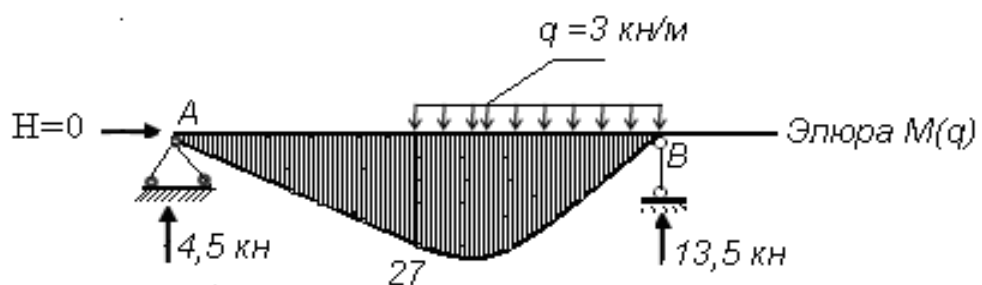
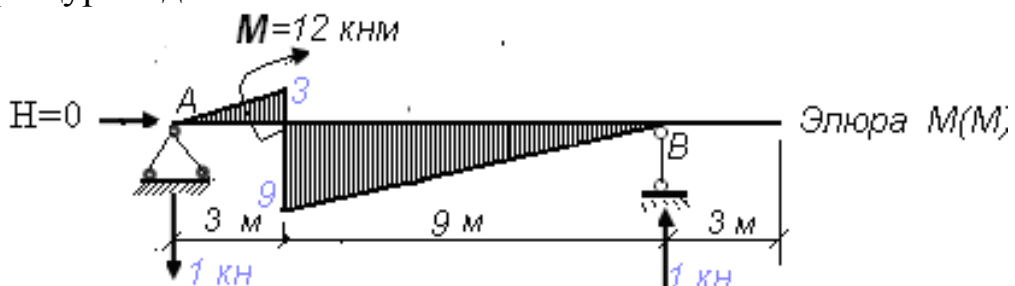
Асосий ва берилган балкалар орасидаги деформация фарқини йўқотиш учун қуйидаги деформация тенгламаси ёзилади:

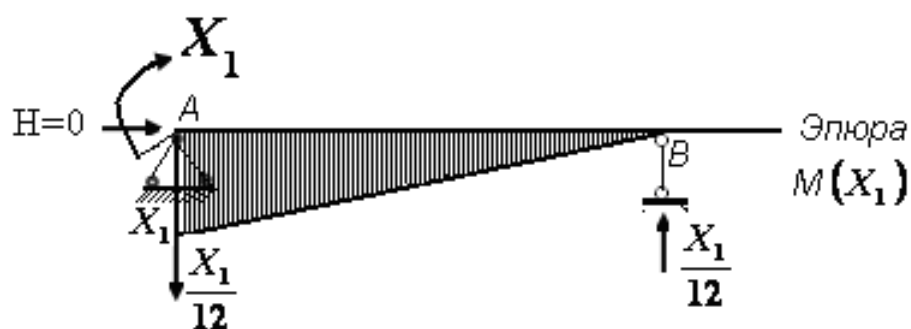
$$\varphi_A = \varphi_A(M) + \varphi_A(q) + \varphi_F(P) = 0.$$

Олиб ташланган боғланиш йўналишида кўчишни (φ_A) аниқлаш учун бирлик эпюра $\bar{M}$ курилади.

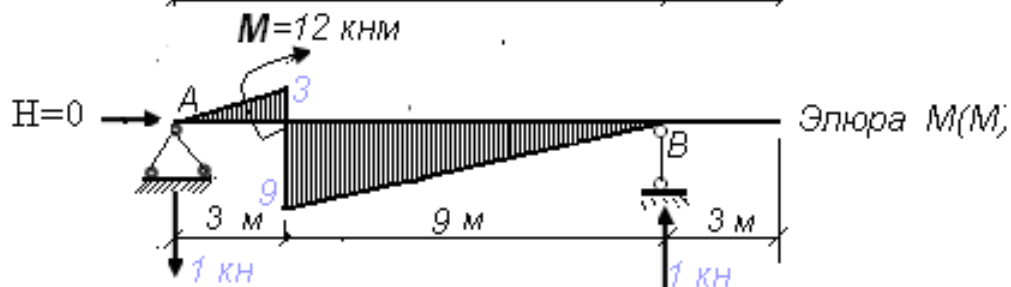
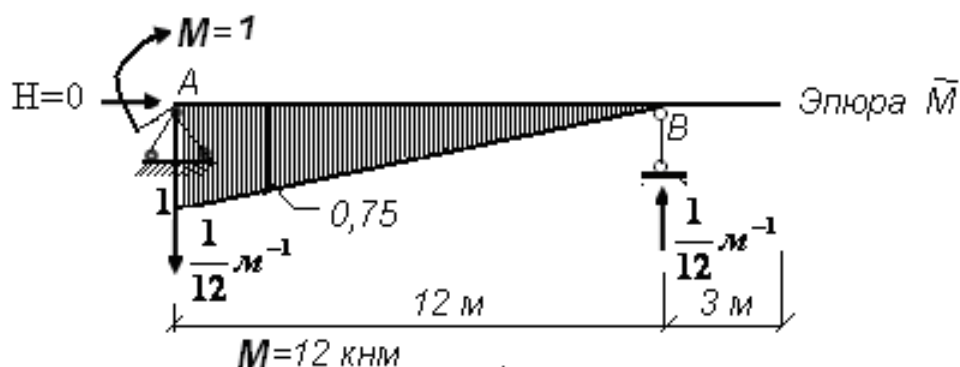


Балкага қўйилган ҳар бир таъсирдан алоҳида эгувчи момент эпюралари курилади.



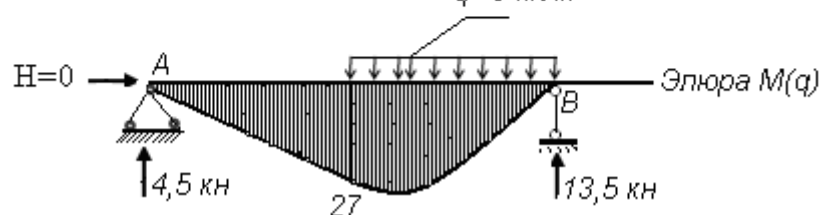
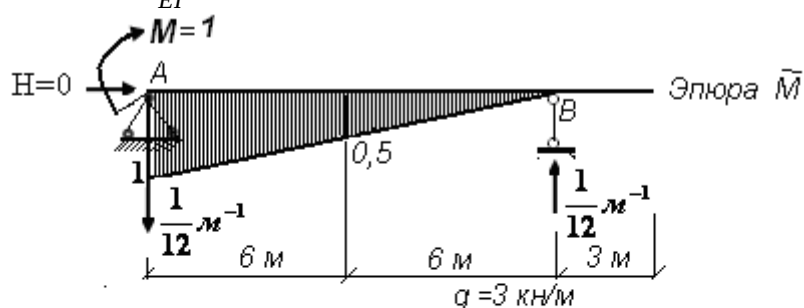


Деформация тенгламасидаги кўчишларни Верещагин усули билан аниқлаш учун керакли эпюралар тайёр. Энди улар бирма-бир аниқланади:



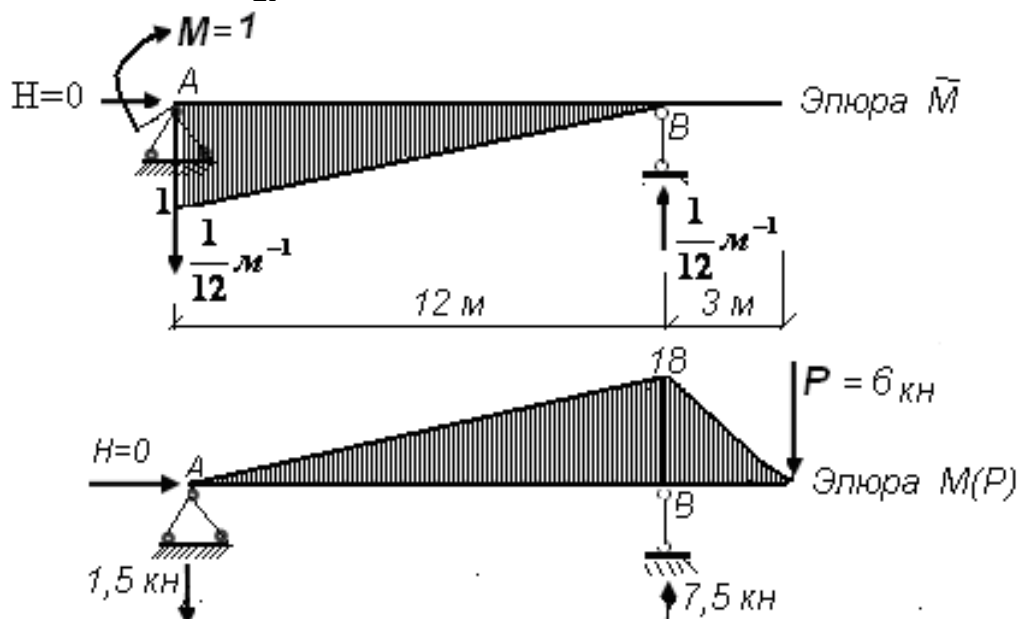
$$\varphi_A(M) = \bar{M} \times M(M) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{3 \cdot 3}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{9 \cdot 9}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,75 \right] =$$

$$= \frac{1}{EI} (-3,75 + 20,25) = \frac{16,5}{EI};$$



$$\varphi_A(q) = \bar{M} \times M(q) = \frac{1}{EI} \left[\frac{27 \cdot 6}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{3} \cdot 1 \right) + \frac{27 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{3 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \right] =$$

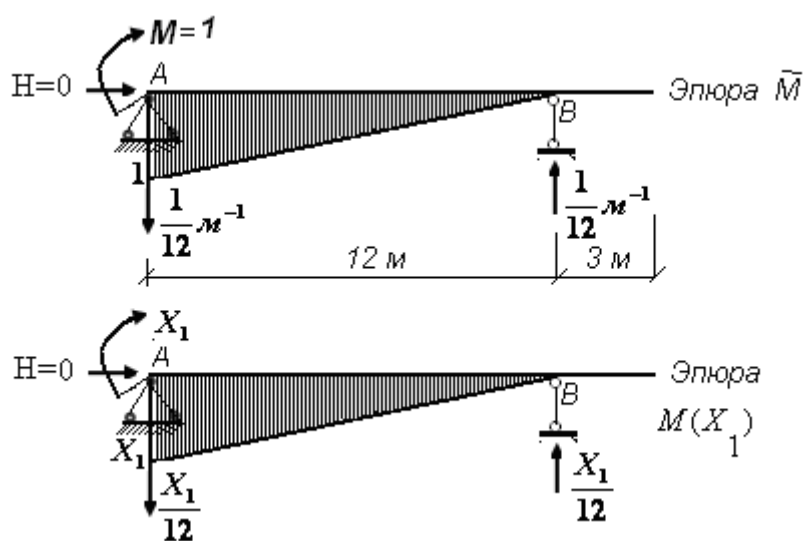
$$= \frac{1}{EI} (54 + 27 + 13,5) = \frac{94,5}{EI};$$



$$\varphi_A(P) = \bar{M} \times M(P) = -\frac{1}{EI} \left(\frac{18 \cdot 12}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = -\frac{36}{EI};$$

$$\varphi_A(X_1) = \bar{M} \times M(P) = \frac{1}{EI} \left(\frac{X_1 \cdot 12}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{4X_1}{EI}.$$

Аниқланган кўчишларнинг қийматлари ва ифодасини деформация тенгласига қўйиб, номаълум X_1 нинг қиймати топилади.



$$\frac{1}{EI} (16,5 + 94,5 - 36 + 4X_1) = 0; \quad X_1 = -18,75 \text{ кНм}.$$

$$\sum M_A = 0; \text{ дан } R_2 = \frac{-18,75 + 12 + 3 \cdot 6 \cdot 9 + 6 \cdot 15}{12} = 20,4375 \text{ кН.}$$

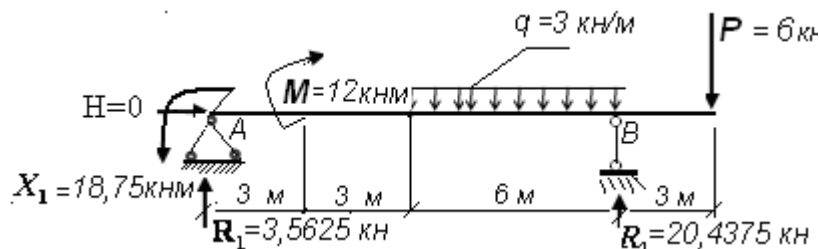
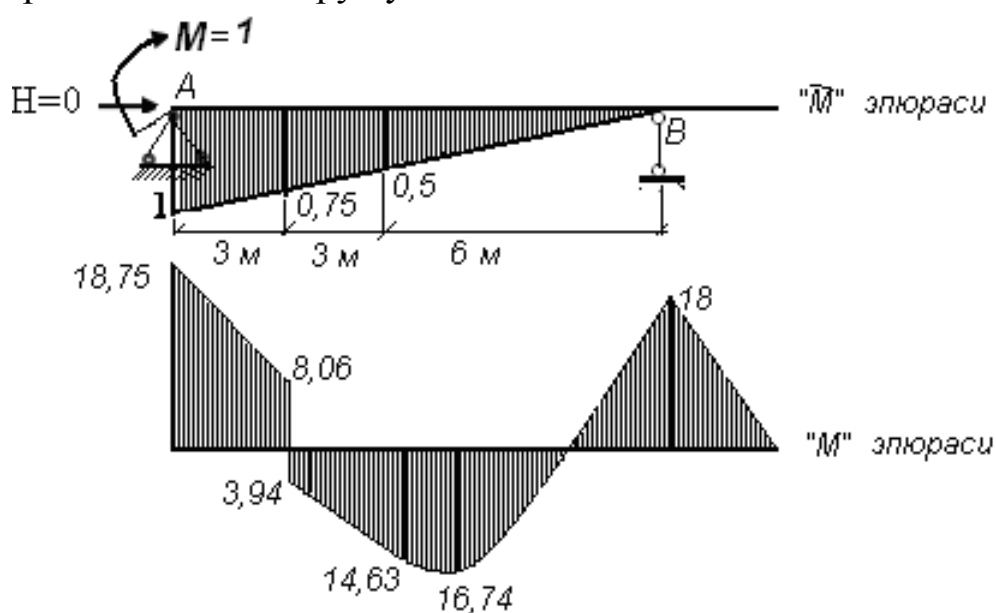


Diagram of a beam with a fixed support at A and a roller support at B. The beam is divided into segments of 3m, 3m, 6m, and 3m. A horizontal force $H=0$ is applied at A. A clockwise moment $M=12 \text{ kNm}$ is applied at the first 3m segment. A uniformly distributed load $q=3 \text{ kN/m}$ acts downwards over the 6m segment. A point load $P=6 \text{ kN}$ acts downwards at the end. Reaction forces are $R_1=3,5625 \text{ kN}$ at A and $R_2=20,4375 \text{ kN}$ at B. Below the beam are the shear force (Q) and bending moment (M) diagrams. The Q diagram shows positive shear of 3,56 kN in the first 3m, negative shear decreasing to -14,44 kN at the start of the last 3m, and positive shear of 6 kN in the last 3m. The M diagram shows a linear increase from 0 to 18,75 kNm at the first 3m, a parabolic decrease to -16,74 kNm at the start of the last 3m, and a linear increase to 18 kNm at the end.

Деформацияли текширув ўтказилади:



$$\begin{aligned} \overline{M} \times M &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{18,75 \cdot 3}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,76 \right) - \frac{8,06 \cdot 3}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 0,75 \right) \right] + \\ &\frac{1}{EI} \left[\frac{3,94 \cdot 3}{2} \left(\frac{2}{3} \cdot 0,75 + \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right) + \frac{14,63 \cdot 3}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot 0,75 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 \right) + \frac{14,63 \cdot 6}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 - \frac{18 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 0,5 \right] + \\ &+ \frac{1}{EI} \left(\frac{3 \cdot 6^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,5 \right) = \frac{1}{EI} (-25,78125 - 10,075 + 3,94 + 12,80125 + 14,63 - 9 + 13,5) = \\ &= \frac{1}{EI} (-35,85625 + 35,87125) \approx 0. \end{aligned}$$

Деформацияли текширув натижаси аниқ нолга тенг чикмади, чунки натижавий эгувчи момент эюрасида ординаталарнинг қиймати ихчамлаштирилди. Бу мисолда кўндаланг кесим берилган деб ҳисоблансин (қўштавр №16 ; $W_x = 118 \text{ см}^3$). Берилган балканинг

мустваҳкамлиги текшириб кўрилади: $\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma].$

$$\sigma = \frac{1875}{118} = 15,89 \text{ кН / см}^2 \leq 16 \text{ кН / см}^2. \text{ Демак, балка мустваҳкам экан.}$$

Иккинчи мисол ҳам ечилди, лекин материални тўла ўзлаштириш учун, талабаларга қуйидаги мисолни муствақил кўриб чиқиш тавсия қилинади:

