

V-BOB.
ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI.

5.1. Sonli va harfiy ifodalar.

5.1.1. Sonli ifodalar.

Ayrim masalalarni yechishda sonli ifodalarga duch kelamiz. Quyidagi masalani qaraylik.

Masala: A va B punktlar orasidagi masofa 1760 km A punktdan B punktga qarab soatiga 80 km/s tezlik bilan yuk avtomashinasi chiqdi. 2 soat o'tgandan keyin esa B punktdan soatiga 120 km/s tezlik bilan engil avtomashina A punkt tomon jo'nadi. Engil avtomashina yo'lga chiqqandan necha soatdan keyin yuk avtomashinasi bilan uchrashishdi.

Masalani yechish uchun dastlab yuk avtomashinasini 2 soatda bosib o'tgan yo'lini hisoblaymiz. Buning uchun 80 ni 2 ga ko'paytiramiz. Bu amalni bajarmasdan uni 80×2 deb belgilaymiz.

Shundan keyin yuk avtomashinasi B punktdan qancha masofada ekanligini aniqlaymiz. $1760 - 80 \times 2$

Keyinchalik yuk va engil avtomashinalarning birgalikdagi tezligini topamiz. $80 + 120$

Eng oxirida ikkita avtomobilning uchrashishi uchun ketgan vaqtni hisoblaymiz.

$$(1760 - 80 \times 2) : (80 + 120)$$

Masalani yechish jarayonida biz yuqoridagi ko'rinishdagi sonli ifoda qiymatini sonli ifodada amallarni bajarish dasturiga asosan topamiz, ya'ni

$$(1760 - 80 \times 2) : (80 + 120) = (1760 - 160) : 200 = 1600 : 200 = 8$$

Demak, ikkita avtomashina 8 soatdan keyin uchrashadi. Bunda biz faqat sonlar bilan ish ko'rdik.

1-ta'rif. Sonlar, arifmetik amallar va qavslar ishtirok etuvchi yozuv sonli ifoda deyiladi.

Umumiy holda sonli ifoda quyidagicha aniqlanadi:

- 1) Har bir son sonli ifodadir.
- 2) Agar A va B -lar sonli ifodalar bo'lsa, u holda $(A) + (B)$, $(A) - (B)$, $(A) \cdot (B)$, $(A) : (B)$ lar ham sonli ifodalar bo'ladi.

Sonli ifodada ko'rsatilgan har bir amalni ketma-ket bajarish natijasida hosil bo'lgan son sonli ifodaning qiymati deyiladi.

Agar yuqoridagi qoidaga amal qilsak, qavslar soni ko'payib ketadi. Shuning uchun har bir sonni qavsga olmaslikga kelishib olinadi.

Shuningdek bir qancha ifodalar qo'shilsa, ayirilsa, ko'paytirilsa yoki bo'linsa qavslar qo'yilmasdan amallar chapdan o'ngga qarab bajariladi. Masalan,

$$35 - 4 + 56 - 12 - 34 \text{ yoki } 80 : 2 \cdot 5 \cdot 8 : 5$$

Amallarni bajarishda avvalo ikkinchi bosqich (ko'paytirish va bo'lish), keyinchalik birinchi bosqich (qo'shish va ayirish) amallar bajariladi.

Shuni hisobga olsak sonli ifodalar qiymatlarini hisoblashda quyidagi qoidalariga amal qilinadi:

1) Agar sonli ifoda qavslarsiz berilgan bo'lsa, sonli ifoda qo'shish amallarini va ayirish amallarini o'zida saqlovchi bo'laklarga ajratiladi. Bu bo'laklarni har birida ko'paytirish va bo'lish amallari chapdan o'ngga qarab bajarilib, bo'laklar qiymatlari hisoblanadi, keyinchalik hisoblangan qiymatlar o'rniga qo'yilib, sonli ifoda qiymati qo'shish va ayirish amallarini chapdan o'ngga hisoblab topiladi.

2) Agar sonli ifoda o'zida qavsni saqlasa, u holda chap va o'ng qavs ichidagi ifoda 1) qoidaga asosan hisoblanadi va qavslarni o'rniga hisoblangan qiymat qo'yiladi, keyingi hisoblashlar 1) qoida asosida hisoblanadi, aks holda yana 2) qoida qo'llaniladi.

Masalan:

1) $32 \cdot 2 - 7 \cdot 5 + 4 : 2 - 5 \cdot 3 + 8 : 2$ ifoda berilsa,

$$32 \cdot 2 - 7 \cdot 5 + 4 : 2 - 5 \cdot 3 + 8 : 2 = 32 \cdot 2 + 4 : 2 + 8 : 2 - 7 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = \\ = 64 + 2 + 4 - 35 - 15 = 70 - 50 = 20$$

$$2) (24 : 2 + 12 \cdot 3) - (44 : 11 + 5) + 12 = (12 + 36) - (4 + 5) + 12 = \\ = 48 - 9 + 12 = 48 + 12 - 9 = 60 - 9 = 51;$$

Shuning bilan birga barcha sonli ifodalar qiymatga ega bo'lavermasligini qayd etamiz. Masalan $9 : (3-3)$ va $(8-8) : (3-3)$ lar qiymatlarga ega emas, chunki nolga bo'lish mumkin emas.

2-ta'rif. Sonlar va harflardan tuzilib amal ishoralari bilan birlashtirilgan ifoda

harfiy ifoda deyiladi. Masalan $\frac{2b}{a+c} - \frac{b-a}{2a+b}$; $7a + \frac{3}{4}b$; va hakoza.

Harfiy ifodada harflarning o'rniga qo'yish mumkin bo'lgan sonlar to'plami harfiy ifodaning aniqlanish sohasi deyiladi.

5.1.2. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligi.

1.Ta'rif: «Teng» (=) belgisi bilan birlashtirilgan ikki ifoda tenglik deyiladi (agar ifoda sonlardan iborat bo'lsa sonli tenglik deyiladi).

Ikkita A va B sonli ifoda berilgan bo'lsin. Biz bu ifodalardan $A=B$ tenglikni hosil qilishimiz mumkin. Bular mulohazalar bo'lib, chin yoki yolg'on bo'lishi mumkin. $A=B$ tenglik faqat va faqat A va B ifodalar son qiymatlarga ega bo'lib, bu qiymatlar teng bo'lsagina chin bo'ladi.

Masalan: $3+8=4+7$ chin; $7:(3-3)=6$ yolg'on, chunki $7:(3-3)$ son qiymatga ega emas.

Shuningdek natural sonlar to'plamida $2-5+11=2 \cdot 4$ yolg'on, chunki N to'plamda $2-5$ ifoda aniqlangan emas.

Ammo sonlar to'plami kengaytirilgandan keyin, ya'ni manfiy sonlar to'plami kiritilgandan keyin yuqoridagi tenglik o'rinli, chunki tenglikning ikkala tomoni ham 8 ga teng qiymatga ega bo'ladi.

Sonli ifodalarning tenglik munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega, shu sababli ekvivalentlik munosabatidir.

Shuning uchun bir xil qiymatlarga ega bo'lgan sonli ifodalar to'plami ekvivalentlik sinflarga bo'linadi.

Masalan: $7+2$, $6+3$, $11-2$, $18:2$, $3\cdot3$ va hakoza – bularni barchasi 9 qiymatiga ega. Yuqoridagi ta'riflardan, agar A, B, C, D lar sonli ifodalar bo'lib, $A=B$ va $C=D$ tengliklar chin bo'lsa, u holda quyidagi tengliklar ham chin bo'ladi.

$$(A)+(C)=(B)+(D); (A)-(C)=(B)-(D)$$

$$(A)\cdot(C)=(B)\cdot(D); (A):(C)=(B):(D)$$

2.Ta'rif. «Katta» ($>$), «kichik» ($<$), «katta yoki teng» ($\geq$), «kichik yoki teng» ($\leq$) belgisi bilan birlashtirilgan ikki ifoda tengsizlik deb ataladi. Agar A va B lar sonli ifodalar bo'lsa, $A < B$ tengsizlik, A va B ifodalar son qiymatlarga ega bo'lib, A ifodaning sonli qiymati B ifodaning sonli qiymatidan kichik bo'lganda chin bo'ladi.

Masalan: $(16-4):3 < 2+5$ tengsizlik chin chunki $(16-4):3$ ning qiymati 4, $2+5$ ning qiymati 7, shu sababli $4 < 7$;

$A=B, C < D$ (A, B, C, D – sonli ifodalar) ko'rinishidagi yozuvlarni mulohazalar deganimiz uchun ularni ustida kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya va boshqa mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Masalan: $A \leq B = (A < B) \vee (A = B)$

Bu munosabat $A < B$; $A = B$ mulohazalardan biri chin bo'lganda chin.

Masalan: $(12:3+5)\cdot2 \leq 25+13$ chin, chunki $(12:3+5)\cdot2$ ifoda qiymati 18, $25+13$ ifoda qiymati 38, $18 < 38$ tengsizlik esa chin.

$A < B < C$ qo'shtengsizlik esa $A < B$ va $B < C$ tengsizliklar kon'yunksiyasini ifodalaydi. Bu kon'yunksiya ikkita tengsizlik chin bo'lganda chin.

Masalan: $5+12 < 441:21 < 2\cdot17$ chin, chunki $5+12$ ning qiymati 17, $441:21$ ning qiymati 21, $2\cdot17$ ning qiymati 34. Shunday qilib $17 < 21$ va $21 < 34$ bo'lgani uchun qo'sh tengsizlik chin. Biz endi tengsizlik tushunchasiga tartib munosabati orqali kelamiz.

Bizga ma'lumki haqiqiy sonlar to'plamidagi kichik munosabati tartib munosabatiga misol bo'la oladi. Kichik munosabati « $<$ » belgi bilan ifodalanadi. Bu munosabat qattiq chiziqli tartiblangan munosabat boshqacha aytganda, u asimmetrik va tranzitiv. Haqiqiy sonlar to'plamidagi ixtiyoriy x va y sonlari uchun $x < y$ yoki $y > x$ munosabatlardan faqat bittasi bajariladi.

Shuningdek $x < y$ munosabat faqat va faqat $y-x > 0$ bo'lganda o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin. Shu sababli $a > 0$ va $b > 0$ bo'lganda $a+b > 0$ va $ab > 0$ tengsizliklar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Tengsizlikni shu xossasidan qolgan xossalarini ham keltirib chiqarish mumkin.

1) Tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil sonni qo'shsa $x < y$ munosabati saqlanadi bu munosabatga qo'shishga nisbatan tartib munosabatining monotonligi deyiladi. Boshqacha aytganda, agar $x < y$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy a soni uchun $x+a < y+a$ tengsizlik bajariladi. Haqiqatan ham $x < y$ tengsizlikdan $y-x > 0$ kelib chiqadi. Ammo $(y+a)-(x+a) = y-x > 0$ bo'lganidan $x+a < y+a$ bo'ladi.

2) Agar $x < y$ va $a < b$ bo'lsa, u holda $x + a < y + b$ bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda $y - x > 0$ va $b - a > 0$ bo'lganidan

$$(y + b) - (x + a) = (y - x) + (b - a) > 0 \text{ bo'ladi.}$$

3) Tengsizlikni ikkala tomoni bir xil musbat songa ko'paytirilsa $x < y$ munosabat saqlanadi, ya'ni $x < y$ va $a > 0$ munosabatdan $ax < ay$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $x < y$ tengsizlikdan $y - x > 0$ kelib chiqadi. Ikkita musbat son ko'paytmasi musbat son bo'lishidan $a(y - x) > 0$ bo'lishi ravshan.

$$a(y - x) = ay - ax \text{ bo'lishidan } ax < ay \text{ kelib chiqadi.}$$

4) Agar x, y, a, b - sonlari musbat sonlar bo'lsa, $x < y$ va $a < b$ tengsizliklardan $ax < by$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $x < y$ va a sonining musbatligidan $ax < ay$ ga ega bo'lamiz. Tengsizlik munosabatini tranzitivlik xossasidan esa $ax < ay$ va $ay < by$ tengsizliklardan $ax < by$ ga ega bo'lamiz.

$y > x$ va $x < y$ tengsizliklar ekvivalent bo'lganligidan bu ikkala tengsizlik bir vaqtda chin yoki bir vaqtda yolg'on. Shu sababli « $>$ » va « $<$ » tengsizlik belgilari o'zaro teskari belgilar.

5) Tengsizlikda sonlarning ishoralarini o'zgartirsak, tengsizlik belgisi teskarisiga o'zgaradi, ya'ni $x < y$ bo'lsa, $-x > -y$ bo'ladi. Haqiqatan ham $x < y$ bo'lishi $y - x > 0$ bo'lishini bildiradi. Ammo $y - x = (-x) - (-y)$; Shu sababli $(-x) - (-y) > 0$, ya'ni $-y < -x$;

6) Tengsizlikni ikkala tomoni manfiy songa ko'paytirilsa, tengsizlik belgisi teskarisiga o'zgaradi, ya'ni $x < y$ va a manfiy son bo'lsa, u holda $ax > ay$ bo'ladi.

7) Agar $0 < x < y$ yoki $x < y < 0$ bo'lsa, u holda $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ bo'ladi.

Buni isbotlash uchun $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy}$ munosabatdan foydalanamiz. Shartga ko'ra

x va y sonlari bir xil ishoralarga ega, shuning uchun xy - ham musbat son, shu

sababli $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ham musbat, bundan esa $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$;

$x > y$ va $x < y$ munosabatlar bilan birgalikda $x \leq y$, $x \geq y$ munosabatlar ham qo'llaniladi. $x \leq y$ tengsizlik $x < y$ tengsizlik va $x = y$ tenglik dizyunksiyasini ifodalaydi. Ularni bittasi chin bo'lsa, diz'yunktsiya chin bo'ladi.

$x \leq y = (x < y) \vee (x = y)$; Masalan: $5 \leq 9$ chin, chunki $5 < 9$ chin

$x < y < z$ tengsizlik. $x < y$ va $y < z$ tengsizliklar kon'yunksiyasi bo'lib, u ikkala tengsizlik chin bo'lganda chin bo'ladi.

Masalan: $5 < 7 < 9$ chin, chunki $5 < 7$ va $7 < 9$ tengsizliklar chin, $3 < 7 < 6$ bu yolg'on, chunki $3 < 7$ tengsizlik chin bo'lsa ham, $7 < 6$ tengsizlik yolg'on.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Sonli, harfiy ifodalarga ta’rif bering, ularni aniqlanish sohasiga misollar keltiring.
2. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligiga ta’rif bering
3. Sonli tengsizlik xossalarini aytib, tushuntiring.

5.2. O‘zgaruvchili ifoda.

O‘zgaruvchili ifoda tushunchasi ham sonli ifoda tushunchasi kabi aniqlanadi va unda sonlar bilan birga harflar ham ishlatiladi.

Agar x va y o‘zgaruvchilarga ega bo‘lgan ifoda berilgan bo‘lsa, u holda har bir sonli (a, b) kartejga sonli ifoda mos keladi. U ifoda x ni a ga y ni b ga almashtirish natijasida hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan ifoda qiymatga ega bo‘lsa, u holda bu qiymat $x = a$ va $y = b$ bo‘lganda ifodani qiymati deyiladi. O‘zgaruvchili ifoda $A(x)$, $B(x; y)$ va hokozo ko‘rinishda belgilanadi. Agar o‘zgaruvchili ifoda $B(x; y)$ da $x = 16$, $y = 5$ sonlariga almashtirilsa, $B(16; 5)$ sonli ifoda hosil bo‘ladi.

O‘zgaruvchili ifoda predikat hisoblanmaydi, chunki harflarni o‘rniga son qo‘yganda mulohaza hosil bo‘lmasdan, sonli ifoda hosil bo‘ladi. Bu ifodaning qiymati chin yoki yolg‘on bo‘lmasdan, son kelib chiqadi.

x o‘zgaruvchini o‘zida saqlovchi ifodada x ni o‘rniga qo‘yganda ifoda aniq qiymatga ega bo‘luvchi sonlar to‘plami mavjud. Bu sonlar to‘plamiga berilgan ifodani aniqlanish sohasi deyiladi. Masalan: $7 : (x - 5)$ ifodani aniqlanish sohasi 5 sonidan boshqa barcha sonlardan iborat.

Ayrim hollarda x faqat natural sonlar to‘plamidan qiymatlar qabul qilishi mumkin, Masalan, guruhdagi talabalar to‘plami. Shuningdek o‘zgaruvchili ifoda o‘zida bir qancha o‘zgaruvchini saqlasa, aytaylik, ifoda x va y o‘zgaruvchini o‘zida saqlasin, u holda ifodaning aniqlanish sohasi $(a; b)$ juft sonlar to‘plamidan iborat bo‘lishi mumkin. Masalan: $8 : (x - y)$ buni aniqlanish sohasi barcha sonlarning $(a; b)$ juftliklardan iborat bo‘lib, bunda faqat $a \neq b$.

O‘zgaruvchili ifodada o‘zgaruvchini faqat sonlar bilan emas, balki boshqa harfiy ifodalar bilan ham almashtirish mumkin. Masalan, $2x + 3y$ ifodada x ni $3a + 2b$ y ni $2a - 4b$ bilan almashtirsak $2(3a + 2b) + 3(2a - 4b)$ ko‘rinishdagi ifodaga ega bo‘lamiz.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ o‘zgaruvchili ifoda ifodaga kiruvchi harflarni qabul qiliishi mumkin bo‘lgan qiymatlarida bir xil qiymatlar qabul qilsa, $A(x)$ va $B(x)$ lar bilan aynan teng deyiladi.

Ta’rif: Agar o‘zgaruvchilarning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy qiymatida ikki ifodaning mos qiymatlari teng bo‘lsa, bu ikki ifoda aynan teng deyiladi.

Masalan, $(x + 5)^2$ va $x^2 + 10x + 25$ aynan teng.

$\frac{x}{3}$ va $\frac{x^2}{3x}$ aynan teng emas, chunki $x=0$ da birinchi 0 qiymatga, ikkinchisi esa son qiymatga ega bo'lmaydi. Ammo noldan farqli sonlar to'plamida u aynan teng. O'zgaruvchili ikkita ifodaning aynan tengligi tasdig'i mulohaza hisoblanadi, Yuqoridagi $(x+5)^2$ va $x^2+10x+25$ ifodalarning aynan tengligini $(\forall x)((x+5)^2 = x^2+10x+25)$ ko'rinishida yozish mumkin. Odatda qisqalik uchun $\forall x$ ni tashlab quyidagicha yoziladi $(x+5)^2 = x^2+10x+25$;

O'zgaruvchining ixtiyoriy qiymatida to'g'ri bo'lgan tenglik ayniyat deyiladi. Barcha haqiqiy sonlarning ko'paytirish va qo'shish qonunlari, yig'indidan sonni ayirish, sonidan yig'indini ayirish qoidalari, yig'indini songa bo'lish va boshqalar ayniyat hisoblanadi. Shuningdek, 0 va 1 lar bilan bajariladigan amallar qoidalari ham ayniyat hisoblanadi. Ifodaning ayniy shakl almashtirish deganda, umumiy qoidalarga tayanib, berilgan ifodani unga aynan teng bo'lgan boshqa ifodaga ketma-ket o'tish tushuniladi. Masalan,

$\frac{x-y}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{y^2-x^2} - \frac{x}{x+y} \right)$ ifodani soddalashtiring.

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{y^2-x^2} - \frac{x}{x+y} \right) &= \frac{x-y}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{x(x+y) + x^2 + y^2 - x(x-y)}{x^2 - y^2} \right) = \\ &= \frac{x-y}{(x+y)^2} \cdot \frac{x^2 + xy + x^2 + y^2 - x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \frac{x-y}{(x+y)^2} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \\ &= \frac{(x-y)(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y}; \end{aligned}$$

$$\text{Demak, } \frac{x-y}{(x+y)^2} \cdot \left(\frac{x}{x-y} - \frac{x^2+y^2}{y^2-x^2} - \frac{x}{x+y} \right) = \frac{1}{x+y}$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. O'zgaruvchili ifodani ta'riflang
2. O'zgaruvchili ifoda qachon aynan teng bo'ladi
3. Ayni shakl almashtirishni misollar yordamida tushuntiring.

5.3. Tenglama va tengsizliklar.

5.3.1. Bir o'zgaruvchili tenglama.

Bizga x o'zgaruvchini o'zida saqllovchi, aniqlanish sohasi X to'plamdan iborat $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar berilgan bo'lsin.

Ta'rif. $f_1(x) = f_2(x)$ bir o'rinli predikatga bir o'zgaruvchili tenglama deyiladi, bunda $x \in X$. Tenglamani yechish deganda x o'zgaruvchini tenglamani chin tenglikka aylantiruvchi qiymatini yoki boshqacha aytganda berilgan predikatni chinlik to'plami T ni topish tushuniladi. Demak, $f_1(x) = f_2(x) \quad x \in X$

predikatni chinlik to'plamiga tenglamani yechimi, to'plamga kiruvchi sonlarga esa tenglamaning ildizlari deyiladi.

Misol. $(x-2)(x+3)=0$ tenglama ikkita 2 va -3 ildizlarga ega. Bu tenglamani yechimlar to'plami $T=\{2;-3\}$. Cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lgan tenglamalar ham mavjud.

Masalan: $x=|x|$ tenglamaning yechimlar to'plami barcha nomanfiy sonlardan iborat.

X to'plamdan olingan biror δ qiymatda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ma'noga ega bo'lmasligi mumkin. Bu holda $f_1(x)=f_2(x)$ tenglik yolg'on hisoblanadi va δ $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani ildizi bo'la olmaydi.

Masalan: $\frac{1}{x-3}+5=\frac{1}{x-7}+6$ tenglama uchun 3 va 7 sonlari ildiz bo'la olmaydi, chunki $x=3$ da $\frac{1}{x-3}$ kasr, $x=7$ da $\frac{1}{x-7}$ kasr ma'noga ega emas.

Shuning uchun $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani yechishdan oldin $f_1(x)$ va $f_2(x)$ aniq qiymatlarga ega bo'lgan A to'plamni topish kerak. Bu A to'plamga x o'zgaruvchini qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami yoki tenglamani aniqlanish sohasi deyiladi. Yuqoridagi tenglama uchun bunday soha 3 va 7 sonlaridan tashqari barcha haqiqiy sonlar to'plami hisoblanadi va u quyidagicha yoziladi.

$$A =]-\infty; 3[\cup]3; 7[\cup]7; +\infty[$$

$f_1(x)=f_2(x)$ predikatni aniqlanish sohasi X to'plam chekli bo'lsa, u holda tenglama ildizini topish uchun X to'plamdagi sonlarni birin-ketin qo'yish yordamida tenglama ildizlarini topish mumkin. Agar X to'plam cheksiz bo'lsa, u holda tenglamalar tengkuchliligidan foydalanamiz.

Ta'rif. Agar ikkita $f_1(x)=f_2(x)$, va $g_1(x)=g_2(x)$ tenglamaning yechimlar to'plami teng bo'lsa, bu ikki tenglama teng kuchli deyiladi.

Masalan, $(x-1)^2=9$ va $(x-2)(x+4)=0$ tenglamalar haqiqiy sonlar to'plamida teng kuchli, chunki birinchi va ikkinchi tenglamaning yechimlar to'plami $\{-4;2\}$.

Bunda ikki tenglama ham bir xil aniqlanish sohasiga ega.

Boshqacha aytganda $f_1(x)=f_2(x)$, $g_1(x)=g_2(x)$ predikatlar ekvivalent bo'lsa, ikkita tenglama teng kuchli bo'ladi.

Agar $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamaning yechimlar to'plami $g_1(x)=g_2(x)$ tenglama yechimlar to'plamining to'plam ostisi bo'lsa, $g_1(x)=g_2(x)$ tenglama $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamaning natijasi deyiladi. Ikkita tenglama faqat va faqat biri-birining natijasi bo'lgan holdagina tengkuchli bo'ladi.

Agar $g_1(x)=g_2(x)$ tenglama $f_1(x)=f_2(x)$ tenglamani qanoatlantirmaydigan ildizlarga ega bo'lsa, bu ildizlar $f_1(x)=f_2(x)$ tenglama uchun begona (chet) ildizlar bo'ladi.

Umuman olganda, agar tenglamani yechishda uni natija bilan olmashtirilsa (teng kuchli tenglama bilan emas), u holda natija tenglamaning barcha ildizlarini topish kerak va ularni berilgan tenglamaga qo'yib tekshirish va begona ildizlarni tashlab yuborish kerak.

5.3.2. Teng kuchli tenglamalar haqida teoremlar.

1-teorema $f_1(x)=f_2(x)$ (1) tenglama X to'plamda berilgan va $F(x)$ esa shu to'plamda aniqlangan ifoda bo'lsin. U holda $f_1(x)=f_2(x)$ (1) va $f_1(x)+F(x)=f_2(x)+F(x)$ (2) tenglamalar X to'plamda teng kuchli bo'ladi.

Bu teoremani boshqacha ta'riflash mumkin ya'ni, aniqlanish sohasi X bo'lgan tenglamaning ikkala qismiga shu X to'plamda aniqlangan o'zgaruvchili bir xil ifoda qo'shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lgan yangi tenglama hosil bo'ladi.

Isboti: (1) tenglamaning yechimlari to'plamini T_1 bilan (2) tenglamaning yechimlar to'plamini T_2 bilan belgilaymiz.

Agar $T_1 = T_2$ bo'lsa, (1) va (2) tenglamalar teng kuchli bo'ladi. Ammo bunga ishonch hosil qilish uchun T_1 dagi istalgan ildiz (2) tenglamaning ham ildizi bo'lishini va aksincha, T_2 dagi istalgan ildiz (1) tenglama ildizi bo'lishini ko'rsatish lozim.

Aytaylik a soni (1) tenglamaning ildizi bo'lsin. U holda $a \in T_1$ va u (1) tenglamaga qo'yilganda uni $f_1(a)=f_2(a)$ to'g'ri sonli tenglikka, $F(x)$ ifodani sonli ifoda $F(a)$ ga aylantiradi. $f_1(a)=f_2(a)$ to'g'ri tenglikning ikkala qismiga $F(a)$ sonli ifodani qo'shamiz. Natijada to'g'ri sonli tenglikning xossasiga ko'ra to'g'ri sonli tenglik hosil bo'ldi:

$$f_1(a) + F(a) = f_2(a) + F(a)$$

Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, a soni (2) tenglamaning ham ildizi ekan.

Shunday qilib, (1) tenglamaning har bir ildizi (2) tenglamaning ham ildizi bo'lishi isbotlandi. ya'ni $T_1 = T_2$.

Tenglamalarni yechishda ko'pincha bu teoremaning o'zi emas, balki undan kelib chiqqadigan natijalar qo'llaniladi:

1. Agar tenglamaning ikkala qismiga ayni bir xil son qo'shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.
2. Agar tenglamaning birorta qo'shiluvchisini bir qismidan ikkinchi qismiga ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirib o'tkazilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

2- teorema . $f_1(x)=f_2(x)$ tenglama X to'plamda berilgan hamda $F(x)$ shu to'plamda aniqlangan va X to'plamdagi x ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydigan ifoda bo'lsin. U holda $f_1(x) = f_2(x)$ va $f_1(x) \cdot F(x) = f_2(x) \cdot F(x)$ tenglamalar X to'plamida teng kuchli bo'ladi. (teorema isboti mustaqil ish sifatida qoldiriladi).

2-teoremadan tenglamalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan natija kelib chiqadi.

Natija: Agar tenglamaning ikkala qismi noldan farqli ayni bir songa ko'paytirilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Tenglamaga ta’rif bering. Tenglamani yechimi deganda nimani tushinasiz.
2. Teng kuchli tenglamani misollar yordamida tushuntiring.
3. Teng kuchli tenglamalar haqidagi teoremlarni ayting va isbotlang.

5.4. Bir o‘zgaruvchili tengsizlik.

Bizga x o‘zgaruvchini o‘zida saqlovchi aniqlanish sohasi X to‘plamdan iborat $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif: $f_1(x) < f_2(x)$, $x \in X$; yoki $f_1(x) > f_2(x)$ $x \in X$; bir o‘rinli predikatlarga bir o‘zgaruvchili tengsizlik deyiladi.

Bunday tengsizliklarni yechish deganda x ni o‘rniga qo‘yganda tengsizlikni chin tengsizlikga aylantiruvchi sonlar to‘plami T ni topish tushuniladi. Bu sonlar to‘plami tengsizlikni yechimlar to‘plami deyiladi. Bir tengsizlikni har bir yechimi ikkinchi tengsizlikni yechimi bo‘lishi mumkin. U holda ikkinchi tengsizlik birinchi tengsizlikning natijasi deyiladi. Masalan, $x > 3$ va $x > 6$ tengsizliklarni olaylik. Bundan 6 dan katta son 3 sonidan ham katta bo‘ladi. Shuning uchun $x > 3$ tengsizlik $x > 6$ tengsizlikning natijasi. Shu sababli berilgan tengsizlik natijasi bo‘lgan tengsizlikni yechimlar to‘plami Q berilgan tengsizlik yechimlar to‘plami T ni o‘z ichiga oladi ya’ni $T \subset Q$. Agar ikkita tengsizlik bir xil yechimlar to‘plamiga ega bo‘lsa u tengsizliklar teng kuchli deyiladi. U holda bu tengsizliklar bir-birining natijasi bo‘ladi.

Masalan, biror a soni 7 dan katta deyish bilan $a+1$ soni 8 dan katta deyish teng kuchli. Shuning uchun $x > 7$ $x+1 > 8$ tengsizliklari teng kuchli. x ni o‘zida saqlovchi tengsizliklar predikatlar bo‘lgani uchun, ularni kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi to‘g‘risida gapirish mumkin.

Masalan a soni $3x-8 > 1$ va $2x+5 < 15$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u son tengsizliklarning $(3x-8 > 1) \wedge (2x+5 < 15)$ kon’yunksiyasini ham qanoatlantiradi. Bu a soni esa 4 sonidan iborat. Maktab kursida kon’yunksiya deb aytmadan, uni quyidagi sistema ko‘rinishida yozish qabul qilingan:

$$\begin{cases} 3x - 8 > 1 \\ 2x + 5 < 15 \end{cases}$$

Agar biror a sonida ikki va undan ortiq tengsizliklardan kamida bitta tengsizlik chin qiymatga ega bo‘lsa, u tengsizliklar diz’yunksiyasi shu a sonida chin qiymatga ega bo‘ladi.

Masalan, -2 soni $(2x > 8) \vee (3x < -3)$ (1) tengsizliklar diz’yunksiyasi yechimlar to‘plamiga tegishli. Haqiqatan ham bu sonni birinchi tengsizlikga qo‘ysak, u holda $2 \cdot (-2) > 8$ degan yolg'on tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tengsizlikga qo‘ysak, $3(-2) < -3$ degan chin tengsizlik hosil bo‘ladi. Demak, -2 soni (1) tengsizliklar diz’yunksiyasi yechimlar to‘plamiga tegishli.

Agar 0 sonini olsak, bu son tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar to'plamiga tegishli emas, chunki 0 sonini (1) ga kiruvchi tengsizliklarga qo'ysak $2 \cdot 0 > 8$ va $3 \cdot 0 < -3$ degan yolg'on tengsizliklarga ega bo'lamiz. Qoidaga ko'ra tengsizliklar yechimlar to'plami cheksiz, buni koordinatalar o'qida ko'rgazmali tasvirlaydilar. Bunda yechimlar to'plami bir qancha jufti-jufti bilan kesishmaydigan nuqtalar, kesmalar, oraliqlar va nurlar orqali ifodalanadi. Teng kuchli tengsizliklar uchun quyidagi teoremlar o'rinli.(teoremlar isbotsiz keltiriladi).

1-Teorema. Agar $F(x)$ ifoda ixtiyoriy $x \in X$ qiymatlarda aniqlangan bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $f_1(x) + F(x) < f_2(x) + F(x)$ tengsizliklar teng kuchli.

2-Teorema. Agar $F(x)$ ifoda barcha $x \in X$ larda aniqlangan hamda X sohada musbat bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $f_1(x)F(x) < f_2(x)F(x)$ tengsizliklar teng kuchli. Boshqacha aytganda, $F(x)$ manfiy bo'lmasa, u holda $f_1(x) \leq f_2(x)$ va $f_1(x)F(x) \leq f_2(x)F(x)$ tengsizliklar ham teng kuchli.

Bu teoremdan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1-Natija. Agar a soni musbat ya'ni $a > 0$ bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $af_1(x) < af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchlidir.

2-Natija. Agar $a < 0$ bo'lsa, $f_1(x) < f_2(x)$ va $af_1(x) > af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchli. Demak, tengsizlik manfiy songa ko'paytirilsa, tengsizlik belgisi teskariga olmashadi.

3-Teorema. $0 < f_1(x) < f_2(x)$ va $0 < \frac{1}{f_2(x)} < \frac{1}{f_1(x)}$ tengsizliklar bir-biriga teng kuchli.

1-Misol. $3x-4 > x+6$ tengsizlik yechilsin.

Yechish: 1-teoreмага asosan $3x - x > 6+4$ yoki $2x > 10$

2-teorema natijalariga ko'ra $x > 5$.

Demak tengsizlik yechimlar to'plami $]5; +\infty[$ nurdan iborat.

2-Misol. $(2x-3 < 5) \wedge (3x-5 > 1)$ tengsizliklar kon'yunksiyasi yechilsin.

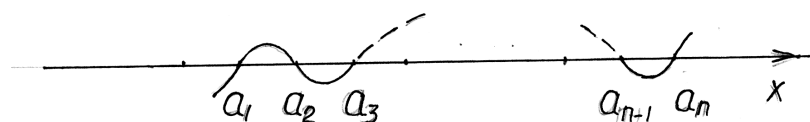
Yechish: Dastlab birinchi keyin ikkinchi tengsizlikni yechamiz.

$$2x - 3 < 5 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$$

$$3x - 5 > 1 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$$

Bu tengsizlik kon'yunksiyasini qanoatlantiruvchi sonlar ikkita tengsizlikni ham qanoatlantirishi kerak. Shu sababli kon'yunksiya yechimlar to'plami topilgan yechimlar to'plamining kesishmasidan iborat bo'ladi, ya'ni $x < 4$ va $x > 2$ nurlarning kesishmasidan iborat bo'ladi. Demak, yechimlar to'plami $2 < x < 4$ sonlar intervalidan iborat.

$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) > 0$ (bundan $a_1 < a_2 < \dots < a_n$) ko'rinishdagi tengsizliklarni yechish quyidagicha olib boriladi. $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) > 0$ ko'paytma o'z ishorasini ko'paytuvchilardan biri ishorasini o'zgartirganda o'zgartiradi, boshqacha aytganda $a_1, a_2, \dots, a_n$ nuqtalardan o'tishda o'zgartiradi. Bu nuqtalar sonlar o'qini $]-\infty; a_1[,]a_1; a_2[, \dots,]a_n; +\infty[$ oraliqlarga bo'ladi (75-chizma)



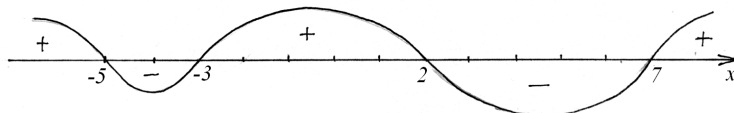
75-chizma

Har bir oraliqda ko'paytma o'zgaras ishoraga ega. Shu sababli ko'paytmani har bir oraliqdagi bitta nuqtada ishorasini bilish etarlik. Shunday qilib barcha ko'paytmaning barcha oraliqlardagi ishoralarini aniqlaymiz. Ko'paytma musbat bo'lgan oraliqlarni birlashtiramiz. Bu birlashma $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) > 0$ tengsizlikning yechimlar to'plami bo'ladi.

3-Misol. $(x - 2)(x + 3)(x - 7)(x + 5) > 0$ tengsizlikning yechimlar to'plami topilsin.

Yechish: 2, -3, 7, -5 nuqtalar sonlar o'qini $]-\infty; -5[$, $]-5; -3[$, $]-3; 2[$, $]; 2; 7[$, $]; 7; +\infty[$ oraliqlarga bo'ladi.

Oraliqlarda ko'paytma ishorasini aniqlaymiz. $]-\infty; -5[$ oraliqdagi ishorani aniqlash uchun shu oraliqdan -10 sonini olib, ko'paytmadagi x o'rniga qo'yamiz, ya'ni $(-10-2)(-10+3)(-10-7)(-10+5) > 0$ musbat, qolgan oraliqlardagi ishoralarni ham aniqlab sonlar o'qiga joylashtiramiz (76- chizma).



76- chizma

Musbat oraliqlar: $]-\infty; -5[$, $]-3; 2[$, $]; 7; +\infty[$. Bu oraliqlarni birlashtirsak, u tengsizlikni yechimlar to'plami bo'ladi.

$T =]-\infty; -5[\cup]-3; 2[\cup]; 7; +\infty[$. Chizmadagi chiziqqa ishoralar egrisi deyiladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Bir o'zgaruvchili tengsizlikni ta'riflang.
2. Tengsizliklar kon'yuktsiyasi va diz'yunktsiyasini misollar yordamida yechib ko'rsating.
3. Tengsizliklarni tengligi, tengsizligini tushuntiring.
4. Teng kuchli tengsizliklar haqidagi teoremlarni aytib bering.
5. Bir o'zgaruvchili tengsizliklarni intervallar metodi bilan yechishni misol yordamida tushuntiring.

5.5. Ikki o'zgaruvchili tenglama va tenglamalar sistemasi.

5.5.1. Ikki o'zgaruvchili tenglama.

$ax + by = c$ ko'rinishdagi tenglamaga birinchi darajali ikki o'zgaruvchili tenglama deyiladi. Ikkita x va y o'zgaruvchiga ega bo'lgan tenglama ikki o'rinli predikat hisoblanadi. Ikki o'zgaruvchili tenglamaning yechimi deb, shu tenglamani to'g'ri tenglikka aylantiradigan o'zgaruvchilarning qiymatlari juftiga aytiladi.

Masalan, $(3;14)$ juftlik $2x+4y=62$ tenglamaning bitta yechimi hisoblanadi. Bu yechimdan boshqa $(1;15)$, $(5; 13)$ va boshqa juftliklar ham bu tenglamaning yechimlari bo'la oladi. Bundan ko'rinadiki, ikki o'zgaruvchili tenglamaga uning juftliklardan tashkil topgan ko'pgina yechimlari mos keladi. Bu juftliklar esa x va y o'zgaruvchilarni aniqlanish sohasi X va Y lardan olingan bo'lishi kerak. $(a; b)$ juftliklarni $(a \in X \text{ va } b \in Y)$ tekislikda a va b koordinatalarga ega bo'lgan $M=M(a;b)$ nuqta bilan tasvirlash mumkin.

Ikki o'zgaruvchili tenglama yechimlar to'plamini tekislikda joylashtirib tekislik nuqtalar to'plamining to'plam ostiga ega bo'lamiz. Bu to'plam ostiga tenglamaning grafigi deyiladi.

Odatda ikki o'zgaruvchili tenglama cheksiz ko'p yechimlarga ega. Shu sababli uning grafigi cheksiz ko'p nuqtalarga ega.

Misol. $y-x=0$ tenglamani yechimi abssissasi va ordinatasi bir-biriga teng bo'lgan $(a;a), a \in R$ juftliklardan iborat. Agar tekislikda $M(a;a)$ ko'rinishdagi nuqtalardan bir nychtasini olsak, ya'ni $M(1;1)$, $M(2;2)$, .. bu nuqtalarni koordinata boshidan o'tib, abstsissa o'qining musbat yo'nalishi bilan 45° burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziqli yotishini ko'ramiz. (77-chizma).

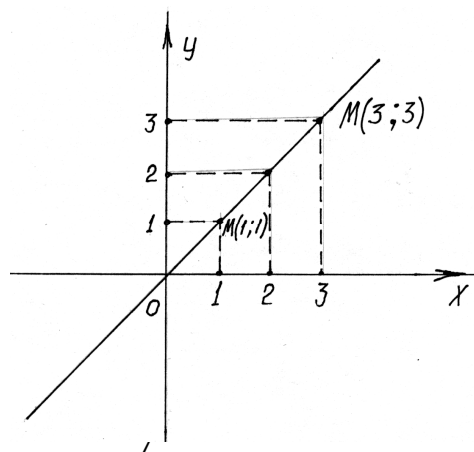
Agar ikki o'zgaruvchili ikkita tenglamaning grafigi bir xil bo'lsa, ular teng kuchli deyiladi. Masalan, $2x+y=7$ va $6x+3y=21$ tenglamalar teng kuchli.

Teng kuchli tenglamalar to'g'risidagi teoremlarni keltiramiz. (isbotsiz)

1-Teorema. Agar $f(x;y)$ ifoda x va y larning barcha qiymatlari uchun aniqlangan bo'lsa, u holda

$$F(x;y) = \Phi(x;y) \quad \text{va}$$

$F(x;y) + f(x;y) = \Phi(x;y) + f(x;y)$ tenglamalar tengkuchli.



77-chizma.

2-Teorema: Agar $f(x;y)$ ifoda x va y larning barcha qiymatlari uchun aniqlangan, hamda x va y ning hech bir qiymatida nolga aylanmasa, u holda $F(x;y) = \Phi(x;y)$ va $F(x;y) \cdot f(x;y) = \Phi(x;y) \cdot f(x;y)$ tenglamalar teng kuchli.

5.2. Ikki o'zgaruvchili tenglamalar sistemasi va ularni yechish usullari

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases} \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi ikki o'zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasi deyiladi. bunda a_1, b_1, c_1 , va a_2, b_2, c_2 , lar haqiqiy sonlar.

Agar (1) sistemada $c_1 = c_2 = 0$ bo'lsa, tenglama

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{cases} \quad (2)$$

ko‘rinishga keladi. (2) tenglamalar sistemasi bir jinsli sistema deyiladi.

Boshqacha aytganda $a_1x + b_1y = c_1$ tenglamaning yechimlar to‘lami B_1 va $a_2x + b_2y = c_2$ tenglamaning yechimlar to‘plami B_2 bo‘lsa, har ikkala tenglamaning qanoatlantiradigan, har ikki tenglama uchun umumiy bo‘lgan yechimlar B_1 va B_2 to‘plamlarning kesishmasidan, ya’ni $B_1 \cap B_2$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

Tenglamalar sistemasini yechish uning barcha yechimlar to‘plamini topish demakdir.

Kamida bitta yechimga ega bo‘lgan sistema birgalikdagi sistema deb, bironta ham yechimga ega bo‘lmagan sistema birgalikda bo‘lmagan sistema deyiladi.

Ikki o‘zgaruvchili chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning quyidagi usullari mavjud: 1) algebraik qo‘shish usuli:

Bu usulda (1) sistemaning birinchi tenglamasini b_2 ga, ikkinchisini $-b_1$ ga ko‘paytirib, o‘zaro qo‘shsak

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamadan x topiladi.

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (3)$$

birinchi tenglamani $-a_2$ ga, ikkinchisini a_1 ga ko‘paytirib o‘zaro qo‘shsak

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

tenglama hosil bo‘ladi bu tenglamadan y topiladi.

$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \quad (4)$$

topilgan x va y lar (1) sistemaning yechimi bo‘ladi.

2) O‘rniga qo‘yish usuli. (1) sistemani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yechish uchun tenglamadan biror o‘zgaruvchini ikkinchi o‘zgaruvchi orqali ifodalab, bu ifoda ikkinchi tenglamaga qo‘yiladi (odatda koeffitsienti kichik son bo‘lgan o‘zgaruvchi topiladi)

Masalan, birinchi tenglamadan y ni topamiz

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \quad (b_1 \neq 0) \quad \text{buni (1) sistemaning}$$

ikkinchi tenglamasiga qo‘ysak $a_2x + b_2 \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2$

Bir o‘zgaruvchili tenglama hosil bo‘ladi. Bundan x o‘zgaruvchi aniqlanadi. x ning

aniqlangan qiymatini $y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$ ifodaga qo‘yib, y topiladi.

3) Grafik usulda yechish

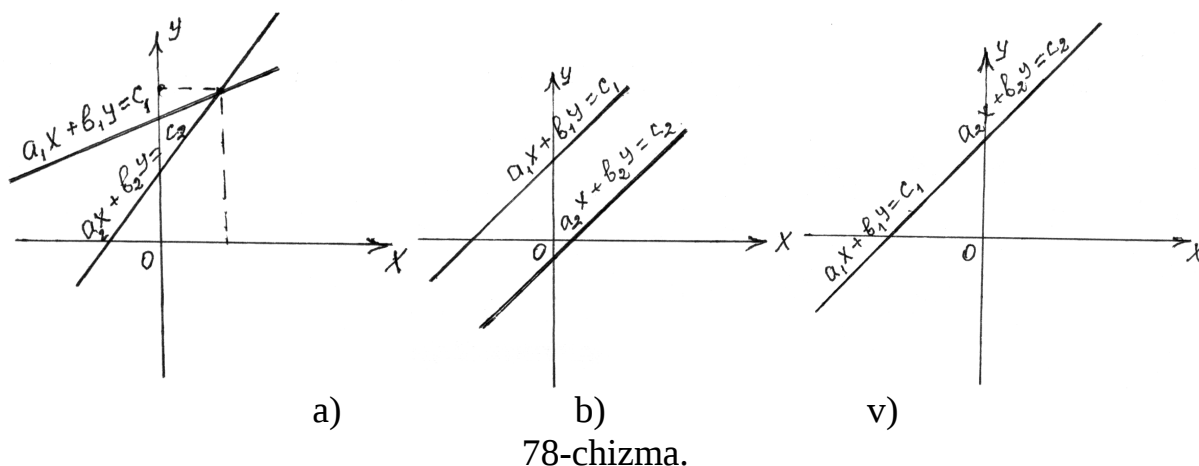
(1) sistemani grafik usulda yechish uchun sistemadagi har bir tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$y = \frac{c_1 - a_1 x}{b_1} \quad (5)$$

$$y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2} \quad (6)$$

(5) va (6) lar chiziqli funksiyalarni ifodalaydi. Bu chiziqli funksiyalarni koordinata sistemasida grafiklarini yasaymiz, ular to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.

Ikkita to'g'ri chiziq kesishsa, kesishish nuqtasining koordinatalari (x_1, y_1) lar sistemani yechimi bo'ladi. Agar to'g'ri chiziklar parallel joylashsa, sistema yechimga ega bo'lmaydi, ular ustma-ust tushsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. (78-chizma)



Ikki noma'lumli chiziqli tenglamalarni determinantlar yordamida yechish usuli ham mavjud. Bu usul keyinroq ko'rib o'tiladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki o'zgaruvchili tenglamani ta'riflang. Uni yechimi deganda nimani tushunasiz.
2. Ikki o'zgaruvchili tenglamalar sistemasini yechish usullarini misollar yordamida tushuntiring.

5.6. Ikki o'zgaruvchili tengsizlik va uning grafigi.

Ta'rif: $f(x, y) \geq 0$ yoki $f(x, y) \leq 0$ ko'rinishdagi o'zgaruvchili ifodalarga ikki o'zgaruvchili tengsizlik deyiladi.

Ikki o'zgaruvchili $f(x, y) \geq 0$ yoki $f(x, y) \leq 0$ tengsizlikning yechimi deb, sonlarning tartiblangan barcha (a, b) juftlariga aytiladiki, bu sonlar tengsizlikdagi noma'lumlar o'rniga qo'yilgandan keyin chin tengsizlik hosil bo'ladi. Qisqa qilib, sonlarning $(a; b)$ jufti berilgan tengsizlikni qanoatlantiradi, deyiladi.

Masalan: $(4; 2)$ juftlik $x^2 + y^2 < 25$ tengsizlikni yechimlar to'plamiga tegishli, chunki x ni 4 ga y ni 2 ga almashtirsak $4^2 + 2^2 < 25$ chin tengsizlik hosil bo'ladi.

Agar tengsizlikning yechimlari to'plamidan olingan har bir $(x;y)$ juftga mos ravishda tekislikning $M(x;y)$ nuqtasini qo'ysak, u holda berilgan tengsizlikka mos tekislik nuqtalar to'plamiga ega bo'lamiz. Bunga berilgan tengsizlikning grafigi deyiladi.

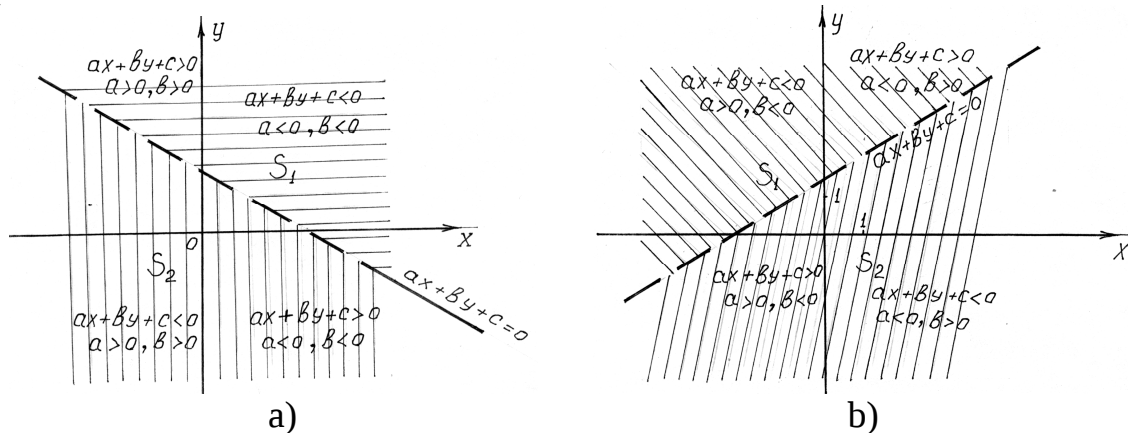
Odatda tengsizlik grafigi tekislik sohalaridan iborat bo'ladi. $F(x,y) > 0$ tengsizlikni yechimlar to'plamini tasvirlashda quyidagiga amal qilinadi: Dastlab tengsizlik belgisi tenglik belgisi bilan almashtiriladi va $F(x,y) = 0$ tenglamaga mos chiziq chiziladi. Bu chiziq tekislikni bir qancha bo'laklarga bo'ladi. Bu bo'laklarni har birida bitta nuqta olinib, bu nuqtada $F(x,y) > 0$ tengsizlik bajarilishi tekshiriladi. Agar tengsizlik shu nuqtada bajarilsa, bu tengsizlik tekislikning shu bo'lagida to'la bajariladi. Shunday qismlar birlashtirilib berilgan tengsizlikning yechimlar to'plami hosil qilinadi.

Uni koordinata tekisligida tasvirlash mumkin. Masalan,

$$ax + by + c > 0 \quad (1) \quad ax + by + c < 0 \quad (3)$$

$$ax + by + c \geq 0 \quad (2) \quad ax + by + c \leq 0 \quad (4)$$

chiziqli tengsizliklar yechimlari to'plami (1) va (3) tengsizliklar uchun a va b koeffitsientlar ishoralariga bog'liq ravishda ochiq yarim tekisliklarni ifodalaydi. (79 a,b - chizmalar). Agar tengsizliklar noqat'iy bo'lsa, ya'ni (2) va (4) ko'rinishda bo'lsa, yechimlar to'plami yarim tekisliklardan iborat bo'ladi, boshqacha aytganda yechimlar to'plamiga $ax + by + c = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ham kiradi.

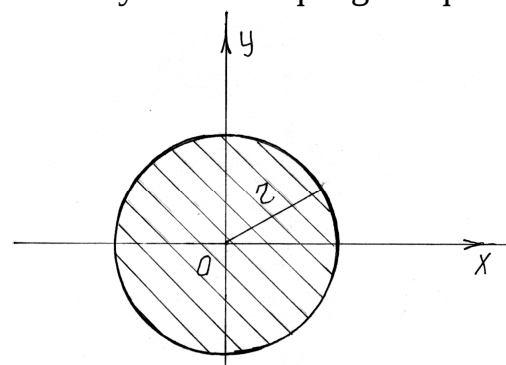


79-chizma

$x^2 + y^2 \leq r^2$ tengsizlikning yechimlari to'plami markazi koordinatalar boshida va radiusi r bo'lgan doiradan iborat (qat'iy tengsizlikda aylana chiziqidagi nuqtalar yechimlar to'plamiga tegishli emas), noqat'iy tengsizlikda aylana chiziqidagi nuqtalar bu to'plamga tegishli (80-chizma).

$x^2 + y^2 > r^2$ tengsizlikning yechimlari to'plami esa bu doiraning to'ldirmasidir (81-chizma).

Umumiy holda $f(x,y) > 0$ yoki $f(x,y) \geq 0$ tengsizlikning yechimlari to'plami tekislikdagi figuradir. Masalan,



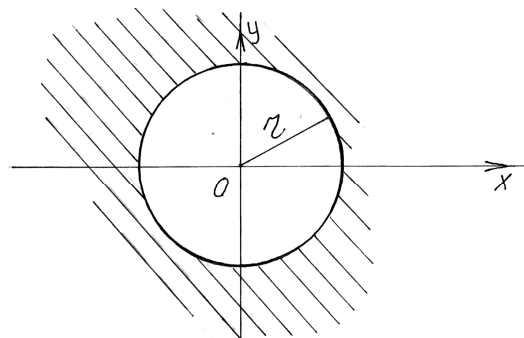
80-чизма

$$y + x^2 - 2x - 2 \leq 0$$

tengsizlikning yechimlari to'plamini topish uchun tengsizlikni standart ko'rinishiga keltiramiz, buning uchun esa teng kuchli shakl almashtirishlarni bajaramiz.

$$y + x^2 - 2x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq -x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$y \leq -(x-1)^2 + 3;$$



81-чизма

Oxirgi tengsizlikni ya'ni berilgan tengsizlikni $y = -(x-1)^2 + 3$ parabola va uning ichki sohasiga tegishli tekislik nuqtalari to'plami qanoatlantiradi. (82 chizmadagi shtrixlangan soha).

Ikki o'zgaruvchili tengsizlik yechimlar to'plamini topishga doir misollar.

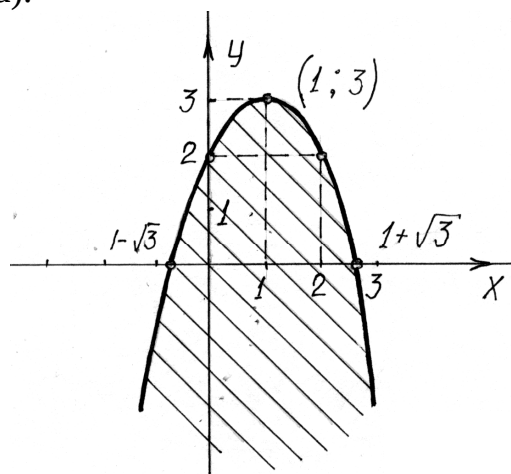
1-misol. Tekislikda a) $x(x-y) > 0$ b) $|x| + |y| \leq 1$ tengsizliklarning yechimlar to'plamini ko'rsating.

Yechimi: a) $x(x-y) > 0$ tengsizlikni yechishda quyidagi ikki hol b o'lishi mumkin:

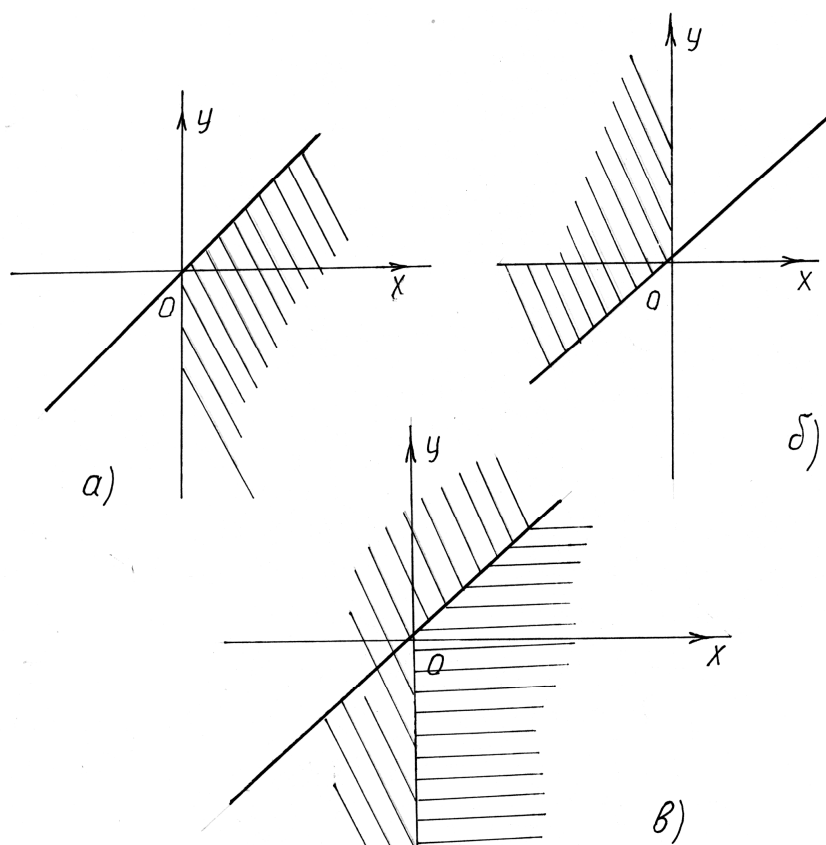
1) $x > 0$ va $x > y$ bo'lgan hol, 2) $x < 0, x < y$ bo'lgan hol

1) holda tengsizlik $y = x$ to'g'ri chiziqdan pastdagi $x > 0$ o'ng yarim tekislikni tasvirlaydi. (83-a chizma);

2) holda esa tengsizlik $y = x$ to'g'ri chiziqdan yuqoridagi chap yarim tekislikni tasvirlaydi (83-b chizma).



82-chizma.



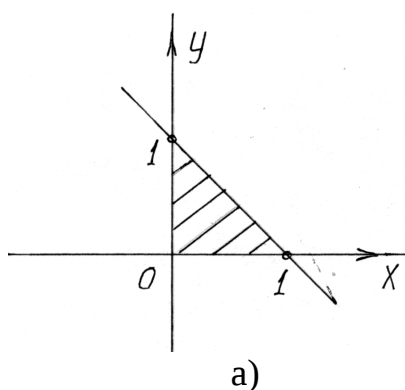
83-chizma.

Tengsizlikning barcha yechimlar to'plami esa chizmada ko'rsatilgan shtrixlangan soha (83-b chizma). Shtrixlangan sohani chegaralovchi $x=0$ va $y=x$ chiziqlar sohaga kirmaydi (chunki tengsizlik qat'iy tengsizlik).

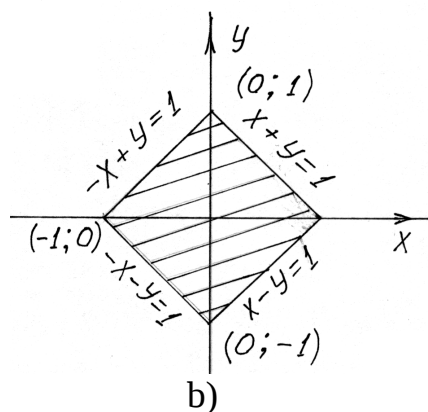
b) dastlab $x \geq 0$ va $y \geq 0$ bo'lsin. U holda quyidagi sistemaga ega bo'lamiz.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 1 \end{cases}$$

$x+y=1$ koordinata o'qlaridan 1 birlik kesma kesuvchi to'g'ri chiziq bo'lgani uchun yuqoridagi tenglamalar sistemasi $x+y=1$ to'g'ri chiziq va koordinata o'qlari bilan chegaralangan shtrixlangan sohani ifodalaydi (84-a chizma). Qolgan choraklardagi sohalar ham yuqoridagi uchburchaklarga simmetrik bo'ladi. Bu esa $(x;y)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan $(-x;y)$, $(x;-y)$ va $(-x;-y)$ nuqtalar tengsizlikni qanoatlantirishidan yaqqol ko'rinadi. (84-b chizma)



a)

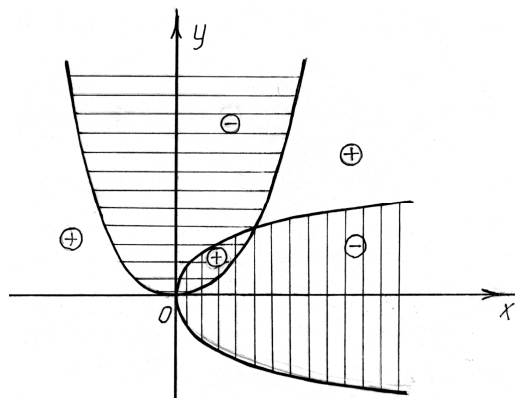


b)

84-chizma

2-misol. $z = (y - x^2)(x - y^2)$ funktsiyaning xOy tekislikda musbat yoki manfiy sohalarini ko'rsating.

Yechimi: xOy tekislikda $y > x^2$ va $y < x^2$ shuningdek $x > y^2$ va $x < y^2$ sohalarni bir-biridan ajratuvchi $y = x^2$ va $x = y^2$ parabolalarni yasaymiz



85 -

(85- chizma). Ikkita chizmani bir-biri ustiga joylashtiramiz. U holda kesishgan shtrixlar joylashgan, shtrixlanmagan soha musbat soha, qolganlari manfiy soha bo'ladi. Umuman 5 ta soha mavjud bo'lib undan ikkitasi manfiy, uchta musbat hisoblanadi.

Ikki o'zgaruvchili tengsizlikni ikki o'zgaruvchili predikat sifatida qarash mumkin. Shu sababli

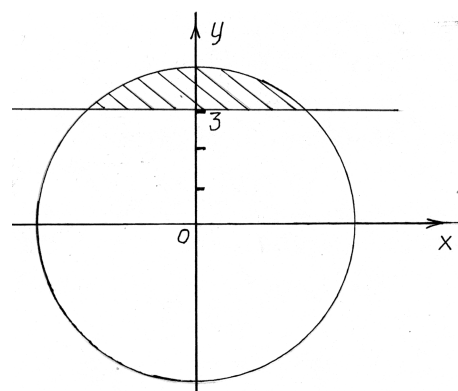
$$\begin{cases} f(x; y) > 0 \\ g(x; y) < 0 \end{cases}$$

ko'rinishdagi ikki noma'lumli tengsizliklar sistemasini bu tengsizliklarning $(f(x; y) > 0) \wedge (g(x; y) < 0)$ kon'yunksiyasi ko'rinishida yozish mumkin.

Bu kon'yunksiyani yechimlar to'plami har bir predikat chinlik to'plamlari kesishmasidan iborat bo'ladi.

3-misol. $(y > 3) \wedge (x^2 + y^2) = 25$ yoki $\begin{cases} y > 3 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

Buni grafigi markazi koordinatalar boshida radiusi 5 ga teng doirani abssissa o'qiga parallel va undan 3 birlik yuqoridan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan kesishgan yuqorigi qismini ifodalaydi (86-chizma).



86-chizma

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki o'zgaruvchili tengsizlikni ta'rifini ayting.
2. Ikki o'zgaruvchili tengsizlik yechimini misollar yordamida koordinatalar sistemasida tasvirlab bering.

5.7. Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matritsasi.

Dastlab matritsalar va ular ustida bajariladigan amallarni ko'rib o'tamiz.

5.7.1. Matritsalar va ular ustida amallar.

$m \cdot n$ ta sondan tuzilgan, quyidagi to'g'ri burchakli jadvalga

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

m ta satrli va n ta ustunli matritsa yoki $m \times n$ o'lchamli matritsa deb ataladi.

a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) sonlar matritsaning elementlari deb ataladi.

Elementning birinchi indeks i matritsa elementi turgan satr nomerini ikkinchi indeks j esa ustun nomerini ko'rsatadi.

Qisqalik maqsadida matritsalar $A, B, \dots$ harflar bilan belgilanadi.

Masalan,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Satrlari soni ustunlari soniga teng ya'ni $m=n$ ga matritsa (tarkibli) kvadrat matritsa deb ataladi.

Ikkita A va B matritsaning satrlari va ustunlari soni mos ravishda teng hamda bir xil o'rinda turgan sonlari teng, ya'ni $i = k$ va $j = l$ bo'lganda $a_{ij} = b_{kl}$ bo'lsa ular teng matritsalar deb ataladi.

Matritsalar ustidagi asosiy arifmetik amallar matritsani songa ko'paytirish, matritsalar qo'shish va matritsalar ko'paytirish amallaridir.

a) Matritsani songa ko'paytirish:

λ son va A matritsani ko'paytmasi deb $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ qoida bo'yicha hisoblanadigan B matritsaga aytiladi, ya'ni bu matritsaning har bir b_{ij} elementi λ son bilan matritsaning a_{ij} elementi ko'paytmasidan iboratdir.

Masalan:

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Barcha elementlari nolga teng matritsa nol matritsa deb ataladi, va odatda 0 bilan belgilanadi.

Matritsani songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega:

1) kommutativlik xossasiga:

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$$

2) assotsiativlik xossasiga:

$$(\alpha \cdot B) \cdot A = \alpha \cdot (B \cdot A)$$

b) Matritsalar ni qo'shish:

Satrlari va ustunlari soni $(i, k = 1, 2, \dots, m \text{ va } j, l = 1, 2, \dots, n)$ mos ravishda teng A va B matritsalar ni yigindisi deb elementlari A va B matritsalar ni mos elementlari yig'indisi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ga teng bo'lgan $m \times n$ o'lchovli C matritsaga aytiladi.

A va B matritsalar ni yigindisi A+B bilan belgilanadi.

Matritsalar ni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1). Matritsalar ni qo'shish kommutativlik xossasiga ega.

$$A + B = B + A$$

2). Matritsalar ni qo'shish assotsiativlik xossasiga ega.

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

3). Matritsalar ni qo'shish qo'shish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga ega.

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda A + \lambda B$$

4). Matritsalar ni qo'shish sonlari qo'shishga nisbatan distributivlik xossasiga ega.

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$$

Matritsani songa ko'paytirish va matritsalar ni qo'shish amalining yuqorida aytilgan xossalari bu amallar ni ta'riflari, haqiqiy sonlari qo'shish va ko'paytirish amallar ni kommutativlik va assotsiativlik xossalari hamda ko'paytirish ni qo'shishga nisbatan distributivlik xossasini natijasidir.

v) Matritsalar ni ayirish.

A va B matritsani ayirmasi deb, berilgan A va B matritsalar ni mos elementlari ayirmasidan tuzilgan C matritsaga aytiladi.

Ayirma quyidagicha yoziladi:

$$C = A - B$$

g) Matritsalar ni ko'paytirish.

A va B ikkita matritsa, shu bilan birga birinchi matritsani ustunlari soni ikkinchi matritsani satrlari soniga teng bo'lsin, ya'ni bu matritsalar ushbu ko'rinishga ega bo'lsinlar:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

A va B matritsalarining ko'paytmasi deb elementlari

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (*)$$

qoida bo'yicha hisoblanadigan $m \times k$ - tartibli C matritsaga aytiladi, ya'ni ikkita matritsa ko'paytmasining i - satri va j - ustunida turgan elementi A matritsa i - satrining birinchi elementini B- matritsa j - ustunining birinchi elementiga ko'paytirish, A matritsa i - satrining ikkinchi elementini B matritsa j - ustunining ikkinchi elementiga ko'paytirish va hokazo, so'ngra A va B matritsalar elementlari juftlarining barcha shunday ko'paytmalarini qo'shish natijasida hosil bo'ladi. A va B matritsalarining ko'paytmasi $A \cdot B$ bilan belgilanadi. Yuqorida berilgan ta'rifga asoson matritsalar ko'paytmasi $A \cdot B$ berilgan A matritsaning satrlari soni B matritsaning ustunlari soniga teng bo'lganda mavjuddir.

Matritsalarini ko'paytirish amali umuman aytganda nokommutativdir.

Masalan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ya'ni matritsalarining ko'paytmasi ko'paytuvchilarning kelish tartibiga bog'liqdir. Yana buning ustiga nokvadrat matritsalar ko'paytiriladigan bo'lsa, u holda ikki matritsaning ko'paytmasi bir tartibda ko'paytirilganda mavjud bo'lishi, ikkinchi tartibda ko'paytirilganda esa mavjud bo'lmay qolishi mumkin.

Matritsalarining ko'paytirish quyidagi xossalarga ega.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad (\text{assotsiativlik})$$

Matritsalarini ko'paytirish amalining asosiy xossalari:

$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B, \quad A \cdot (\alpha \cdot B) = (A \cdot \alpha) \cdot B$$

$$(A \cdot B) \cdot \alpha = A \cdot (B \cdot \alpha), \quad (A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$C \cdot (A + B) = CA + CB$$

Tayinlangan n - tartibli (chiziqli) kvadrat matritsalar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari istalgan ikkita matritsa uchun aniqlangan. Ikkita n - tartibli kvadrat matritsalarining yigindisi va ko'paytmasi yana n - tartibli kvadrat matritsalar bo'ladi, ya'ni tayinlangan tartibli barcha kvadrat matritsalar to'plami qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq, shu bilan birga ko'paytirish amali assotsiativ ammo, nokommutativ bo'lishini eslatmoq zarur.

n - tartibli kvadrat matritsaning $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elementlari diagonal elementlari deb ataladi.

Barcha diagonal elementlari 1 ga, qolgan elementlari nolga teng kvadrat matritsa birlik matritsa deb ataladi va E bilan belgilanadi.

Istalgan n - tartibli A kvadrat matritsa uchun ushbu tenglik o'rinli.

$$E \cdot A = A \cdot E = A$$

Barcha $i \neq j$ lar uchun $a_{ij} = 0$ bo'lgan n -tartibli quyidagi ko'rinishdagi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsalar diagonal matritsalar deb ataladi.

Diagonal matritsalar xossasi: Ikkita diagonal matritsani yigindisi va ko'paytmasi yana diagonal matritsadir.

A matritsadan uning satrlarini ustunlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa A matritsaga nisbatan transponirlangan matritsa deb ataladi va A_T bilan belgilanadi.

Agar $A_T = A$ bo'lsa A kvadrat matritsa simmetrik matritsa agar $A_T = -A$ bo'lsa, qiya simmetrik matritsa deb ataladi.

Simmetrik matritsaning bosh diagonalga nisbatan simmetrik joylashgan elementlari teng, qiya simmetrik matritsaning bunday elementlari esa qarama-qarshidir. Qiya simmetrik matritsaning barcha diagonal elementlari nolga teng.

Misol. A va B matritsalarini ko'paytiring.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Echish. (*) formulaga ko'ra:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 5 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & 3 \cdot 5 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 9 & -8 & 18 \\ 10 & 5 & 16 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Matritsa nima?
2. Matritsalarini turlarini aytib bering.
3. Matritsalarining xossalarini aytib tushuntirib bering.
4. Matritsalar ustida amallarni misollar yordamida tushuntiring.

5.7.2. Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasining matritsasi. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.

Bizga ma'lumki, o'rta maktab kursida ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning o'rniga qo'yish, no'malumlarni ketma-ket yo'qotish usullari mavjud edi. Ammo chiziqli tenglamalar sistemalarini noma'lumlarni ketma-ket yo'qotish usuli bilan yechishning muhim kamchiligi shundaki, u chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdagi va aniqlanganlik shartlarini uning koeffitsientlari va ozod hadlari orqali ifodalashga imkon bermaydi.

Determinant tushunchasi chiziqli tenglamalar sistemalarining yechimlarini uning koeffitsientlari va ozod hadlari orqali ifodalaydigan umumiy formulalar topish masalasini hal etish jarayonida yuzaga keldi. Ikkita x va y noma'lumli ikkita chiziqli tenglama sistemasini qaraymiz.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \quad (1)$$

(1) tenglamalar sistemasining o'zgaruvchilari oldidagi koeffitsientlari va ozod hadlaridan tuzilgan ushbu jadvallarni qaraymiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$$

A va A' matritsalariga (1) sistemaning mos ravishda asosiy va kengaytirilgan matritsalar deb ataladi.

(1) sistemaning birinchi tenglamasini a_{22} ga ikkinchi tenglamasini $(-a_{12})$ ga ko'paytiramiz va bu tenglamalarni qo'shamiz. Qo'shish natijasida

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \quad (2)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Shunga o'xshash sistemaning birinchi tenglamasining ikkala qismini $(-a_{21})$ ga, ikkinchi tenglamasining ikkala qismini esa a_{11} ga ko'paytirib va bu tenglamalarni qo'shib

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \cdot y = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \quad (3)$$

tenglamani hosil qilamiz.

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ifoda A matritsaning determinanti deb ataladi va $\det A$ bilan belgilanadi. A matritsa ikkinchi tartibli bo'lgani uchun $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ifoda ikkinchi tartibli determinant bo'ladi. (2), (3) tengliklarning o'ng tomonlarida chap tomonlarda turgan koeffitsientga o'xshash ko'rinishdagi ifodalar turibdi, ular ham ikkinchi tartibli determinantlardir; (2) tenglikning o'ng tomonida A matritsadan uning birinchi ustunini (1) sistemaning ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil qilingan matritsaning determinanti turibdi, (3) tenglikning o'ng tomonida esa A matritsadan uning ikkinchi ustunini (1) sistemaning ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsaning determinanti turibdi.

(2), (3) tenglamalarni endi

$$\Delta \cdot x = \Delta_x \quad \Delta \cdot y = \Delta_y$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu erda Δ , Δ_x va Δ_y orqali ushbu determinantlar belgilangan.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ \Delta_x &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \\ x &= \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}\end{aligned}\tag{4}$$

Uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini qaraymiz.

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3\end{aligned}\tag{5}$$

Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

matritsalar (5) sistemaning asosiy va kengaytirilgan matritsalar deb ataladi. Ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglama sistemasidagidek x noma'lum uchun koeffitsientlari sistemaning koeffitsientlari va ozod hadlari orqali ifodalangan ushbu tenglamani hosil qilish mumkin.

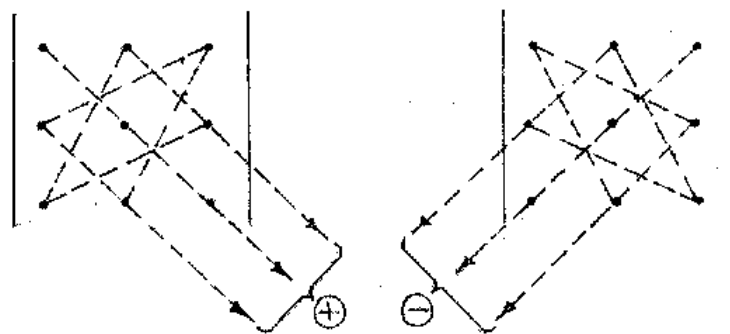
$$\begin{aligned}(a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{32} a_{21} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}) \cdot x = \\ b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} b_2 a_{32} - a_{13} a_{22} b_3 - a_{12} b_2 a_{33} - b_1 a_{23} a_{32}\end{aligned}\tag{6}$$

(6) tenglamada x oldidagi koeffitsient uchinchi tartibli A kvadrat matritsaning determinanti deb ataladi va Δ bilan belgilanadi.

Shunday qilib, uchinchi tartibli matritsaning determinanti ushbu qoida bo'yicha hisoblanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}$$

Uchinchi tartibli matritsaning determinantini hisoblash qoidasini grafik usulida quyidagicha tasvirlash mumkin. (87-chizma)



87-chizma

(6) tenglikning o'ng tomoni ham A matritsadan uning birinchi ustunini (5) sistemaning ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan uchinchi tartibli matritsaning determinanti bo'ladi. Agar A matritsaning determinanti Δ orqali (6) tenglikning o'ng tomonida turgan determinantni Δ_x orqali belgilasak, u holda (6) tenglama

$$\Delta \cdot x = \Delta_x$$

ko'rinishni oladi.

Shunga o'xshash (5) sistemadan y va z noma'lumlarni topish uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz.

$$\Delta \cdot y = \Delta_y \quad \Delta \cdot z = \Delta_z$$

bu erda Δ_y va Δ_z orqali Δ matritsadan uning ikkinchi ustunini (mos ravishda uchinchi ustunini) ozod hadlar ustuni bilan almashtirish bilan hosil qilingan uchinchi tartibli matritsalarining tegishli determinantlari olingan, ya'ni,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}; \quad (7)$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlardan foydalanib yechish qoidasiga Kramer qoidalari, (4) va (7) formulalarga Kramer formulalari deyiladi.

Yuqori tartibli (uchdan yuqori) determinantlarni hisoblashda, ularni tartibi pasaytirilib hisoblanadi. Buning uchun determinantni satr bo'yicha yoyish degan qoidaga asoslaniladi.

n – tartibli A matritsa berilgan bo'lsin. Bu matritsaning determinanti

$$\det(A) = a_{11} |A_{11}| - a_{12} |A_{12}| + \dots + (-1)^{n-1} a_{1n} |A_{1n}|$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu erda $|A_{ij}|$ orqali (A) matritsadan uning birinchi satri va j – ustunini o'chirishdan hosil bo'lgan $(n-1)$ – tartibli matritsaning determinanti belgilangan.

Misol. Quyidagi sistemalarni Kramer formulalaridan foydalanib yeching.

$$a) \quad \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Yechish: Sistemaning determinantlarini topamiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

bo'lgani uchun, sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14 \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

(4) formulalarga ko'ra

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-14}{-7} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Javob: (2;1)

$$6) \begin{cases} 5x + 2y - 4z = 38 \\ 4x + 3z = -7 \\ x - 3y = -10 \end{cases}$$

determinantlarni tuzamiz va hisoblaymiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 99, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 38 & 2 & -4 \\ -7 & 0 & 3 \\ -10 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 198, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 38 & -4 \\ 4 & -7 & 3 \\ 1 & -10 & 0 \end{vmatrix} = 396$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 38 \\ 4 & 0 & -7 \\ 1 & -3 & -10 \end{vmatrix} = -495.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{198}{99} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{396}{99} = 4, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-495}{99} = -5$$

Javob: (2;4;-5)

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki va uch noma'lumli tenglamalar sistemasining matritsalarini yozib ko'rsating.
2. Kramer formulalaridan foydalanib ixtiyoriy sistemalarni yozing.

5.7.3. Determinantning xossalari.

1. Determinantning hamma ustunlarini uning mos satrlari bilan o'rnini almashtirishdan determinant o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Isbot. Δ — berilgan determinant, Δ^* esa Δ dan uning satrlarini mos ustunlar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinant bo'lsin. Δ ni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Endi Δ^* ni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz:

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Demak, $\Delta = \Delta^*$

(Determinantni satr va ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblashni mustaqil o'rganish talabalarga topshiriladi.)

2. Determinantning istalgan ikkita satrining (yoki ikki ustunining) o'rinlari almashtirilsa, determinantning faqat ishorasi o'zgaradi. Masalan, agar birinchi va uchinchi satrlarning o'rinlarini almashtirsak:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

3. Ikkita satri yoki ikkita ustuni bir xil bo'lgan determinantning qiymati nolga teng.

4. Biror satr (yoki ustun) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Isbot. Aytaylik, determinantning ikkinchi satr elementlari umumiy ko'paytuvchiga ega bo'lsin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Bu determinantni ikkinchi satr elementlari bo'yicha yoyamiz.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{21}A_{21} + ka_{22}A_{22} + ka_{23}A_{23} = k\Delta$$

5. Agar determinant biror i -satr (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo'shiluvchining yig'indisidan iborat, ya'ni $a_{ik} = b_k + c_k$ ($k = \overline{1, n}$) bo'lsa, u holda berilgan determinant shunday ikkita determinantning yig'indisiga teng bo'ladiki, bu determinantlarning i -satridan boshqa satrlari dastlabki determinantnikiday bo'ladi, ularning biridagi i -satr elementlarning, ikkinchisi esa c_k elementlardan iborat bo'ladi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} a_1 + m_1 & a_2 + m_2 & a_3 + m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

6. Determinantning biror ustun (satr) elementlariga boshqa ustunning (satrning) bir xil songa ko'paytirilgan mos elementlarini qo'shishdan determinantning qiymati o'zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Determinantlarning xossalarini sanab, aytib bering.

5.7.4. Teskari matritsa

Bizga ma'lumki E birlik matritsa va

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

tenglik o'rinli.

1-Ta'rif. A matritsa uchun $A \cdot B = E$ tenglikni qanoatlantiruvchi B matritsa A ga *teskari* matritsa deyiladi va u $B = A^{-1}$ ko'rinishda belgilanadi.

2-Ta'rif. Barcha satr vektorlari chiziqli erkli matritsa *xosmas* (aynimagan) matritsa, barcha satr vektorlari chiziqli bog'langan matritsa *xos* (aynigan) matritsa deb ataladi.

Xosmas matritsalariga doir quyidagi ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-Teorema. Xosmas matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin.

2-Teorema. Xosmas matritsaga teskari matritsa mavjud va yagonadir. (Teoremaning isbotlari A.G.Kuroshning «Oliy algebra kursi» kitobida keltirilgan).

Teskari matritsani topish.

Aytaylik, n – tartibli kvadrat, xosmas A matritsa berilgan bo'lsin:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsaga teskari B matritsani topish uchun, uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right) \quad (1)$$

Chap tomonida berilgan A matritsa, o'ng tomonda E birlik matritsa yozilgan. Bu matritsalarining ikkalasiga bir vaqtda A matritsani birlik E matritsaga keltiradigan satrlar bo'yicha elementar almashtirishlar qo'llaymiz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right) \quad (2)$$

(2) ning o'ng tomonidagi matritsa xuddi A ga teng teskari B matritsani ifodalaydi, ya'ni

$$A \cdot B = E$$

bo'ladi. A matritsa o'z navbatida B ga teskari bo'lganligi sababli $B \cdot A = E$ ham bajariladi.

Misol. Berilgan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari bo'lgan A^{-1} matritsani toping.

Yehish. Buning uchun quyidagi matritsani tuzamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Birinchi ustunni 1 ga, so'ngra -2 ga ko'paytirib, mos ravishda ikkinchi va uchinchi ustunga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ikkinchi ustunni 2 ga va 1 ga ko'paytirib, mos ravishda birinchi va uchinchi ustunga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Uchinchi ustunni -3 ga ko'paytirib, birinchi ustunga qo'shamiz va ikkinchi ustunni -1 ga ko'paytiramiz:

matritsaga ko'paytirishdan kelib chiqadigan n satrli va bir ustunli matritsaning elementlari, sistemani o'ng tomonida esa

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

matritsaning elementlari turibdi. Shu sababli ikki matritsaning tenglik ta'rifiga asosan, (3) ni tubandagicha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

yoki qisqacha

$$A \cdot X = B \quad (4)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglama matritsaviy tenglama (chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali ko'rinishi) deyiladi. A xosmas matritsa bo'lgani sababli, unga teskari bo'lgan A^{-1} matritsa mavjud, shuning uchun (4) ni chap tomonini A^{-1} ko'paytiramiz:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B, \text{ lekin } A^{-1} \cdot (A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A) \cdot X = EX = X, \text{ demak,}$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

yoki

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}b_1 + a'_{12}b_2 + \dots + a'_{1n}b_n \\ a'_{21}b_1 + a'_{22}b_2 + \dots + a'_{2n}b_n, \\ \dots \\ a'_{n1}b_1 + a'_{n2}b_2 + \dots + a'_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

bundan esa, ikki matritsaning tenglik shartiga asosan (4) yoki (3) ning echimiga ega bo'lamiz:

$$x_i = a'_{i1}b_1 + a'_{i2}b_2 + \dots + a'_{in}b_n, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (5)$$

Misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini matritsaviy ko‘rinishda yozing va uning echimini toping.

Yechish. Berilgan sistemaning matritsasini yozamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

va

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

deb belgilasak, u holda sistemaning «matritsaviy» ko‘rinishi

$$A \cdot X = B \quad \dots (*)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. A ga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bo‘lgani sababli (*) ni chap tomondan A^{-1} ko‘paytiramiz: u vaqtda

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B$$

yoki

$X = A^{-1} \cdot B$ ga egamiz, bundan $A^{-1} \cdot B$ ni topamiz:

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-8) \cdot 5 + (-5) \cdot 1 + 6 \cdot 4 \\ 18 \cdot 5 + 11 \cdot 1 + (-13) \cdot 4 \\ 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 49 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Demak, tenglamalar sistemasini yechimi:

$$x_1 = -21; \quad x_2 = 49; \quad x_3 = 2$$

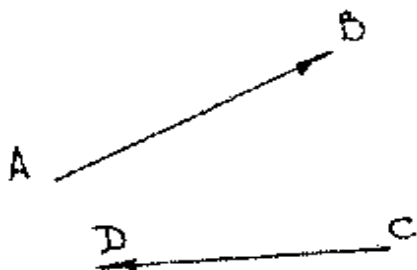
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ixtiyoriy ikki yoki uch noma’lumli tenglamalar sistemasini olib uni matritsaviy ko‘rinishda yozing va yechib ko‘rsating.

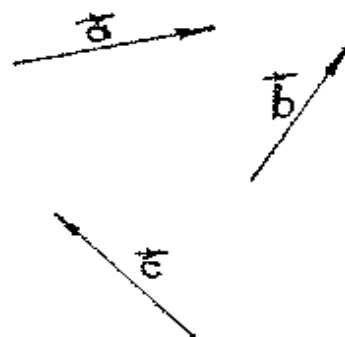
5.8. Vektorlar. Vektorlar ustida amallar. Vektor va nuqtaning koordinatalari

5.8.1. Vektor. Nol vektor. Vektor uzunligi, qiymati va yo'nalishi.

Agar kesma oxirlarining tartibi e'tiborga olinsa, u yo'nalgan hisoblanadi. Agar oldin A nuqta keyin B nuqta berilgan bo'lsa, u holda A nuqta $\overline{AB}$ yo'nalgan kesmaning boshi B nuqta esa oxiri deyiladi. $\overline{AB}$ yo'nalgan kesma ustiga chiziq qo'yish bilan belgilanadi. Oddiy kesmaning uchlari teng huquqli bo'lib, ularning tartibini ahamiyati yo'q. Yo'nalgan kesmada esa boshi oxirining o'rinlari almashtirilishi bilan ularning yo'nalishi o'zgaradi. Yo'nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi deb, $[AB]$ kesmaning uzunligini aytiladi va $|\overline{AB}|$ bilan belgilanadi. Yo'naltirilgan kesma vektor deyiladi. Vektorlarni belgilashda biz ustiga strelka qo'yilgan kichik harflardan foydalanamiz: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, Ba'zan vektorlarni kesma oxirlarini ko'rsatuvchi o'sha harflar bilan ham belgilanadi.

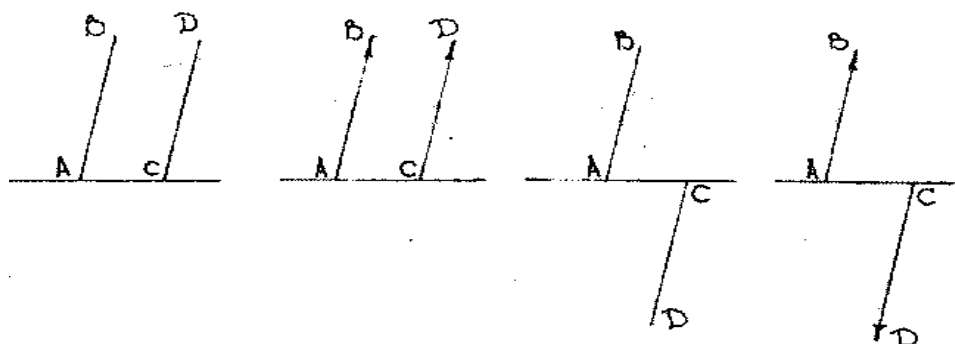


88 – chizma



89 - chizma

Masalan: Vektorni 88,89-chizmada ko'rsatilgandek, $\overrightarrow{AB}$ ko'rinishda belgilash mumkin. A nuqta vektorning boshi, B nuqta vektorning oxiri deyiladi. Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo'nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli bo'lsa $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar bir xil (qarama-qarshi) yo'nalishli vektorlar deyiladi. (90-chizma).



90-chizma

$\vec{a}$ vektorning absolyut qiymati (uzunligi) yoki moduli deb shu vektorni tasvirlovchi kesma uzunligiga aytiladi. $\vec{a}$ vektorning absolyut qiymati $|\vec{a}|$ bilan,

$\vec{AB}$ vektorning absolyut qiymati esa $|\vec{AB}|$ bilan belgilanadi. Moduli birga teng bo'lgan vektor birlik vektor deyiladi. Vektorning boshi uning oxiri bilan ustma-ust tushishi mumkin. Bunday vektorlar nol vektor deb ataladi. Nol vektor ustiga strelka qo'yilgan nol ($\vec{0}$) bilan belgilanadi. Nol vektorning yo'nalishi haqida so'z yuritilmaydi - u aniqlanmagan. Nol vektorning moduli nolga teng deb hisoblanadi. Noldan farqli ikkita vektor bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlar kollinear vektorlar deyiladi. $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning kollinearligi $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi. Uzunliklari teng, kollinear va bir xil yo'nalishli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi. Bir tekislikka parallel bo'lgan yoki shu tekislikda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deyiladi.

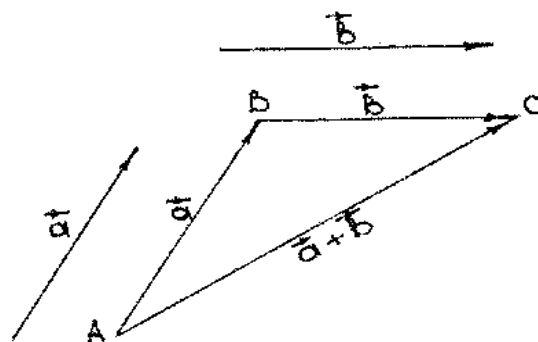
O'z - o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Vektor nima?
2. Kollinear, komplanar va nol vektorlarni tushuntiring.

5.8.2. Vektorlar ustida amallar.

a). Vektorlarni qo'shish.

Ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb istalgan A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri B ga $\vec{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A da, oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C da bo'lgan $\vec{AC}$ vektorga aytiladi. (91-chizma).

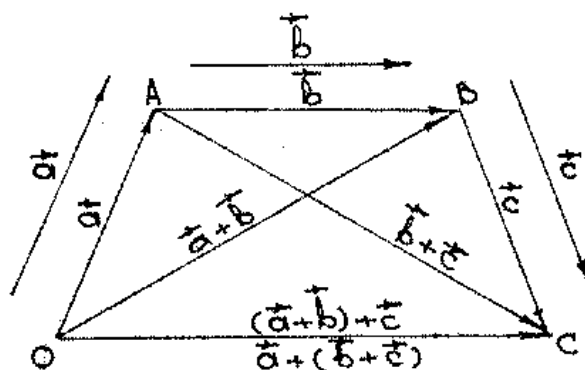


91-chizma

$\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{a} + \vec{b}$ bilan belgilanadi. Vektorni qo'shish ta'rifidan istalgan A, B va C uch nuqta uchun

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. (1) tenglik vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasi deyiladi. Ikki kollinear vektorni qo'shish ham shu qoida bo'yicha bajariladi.



92-chizma

Vektorlarni qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1). Qo'shishning gruppallash (assotsiativlik) xossasi. Har qanday $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchun $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ munosabat o'rinli.

Isbot. Vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasidan (92-chizma):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$$

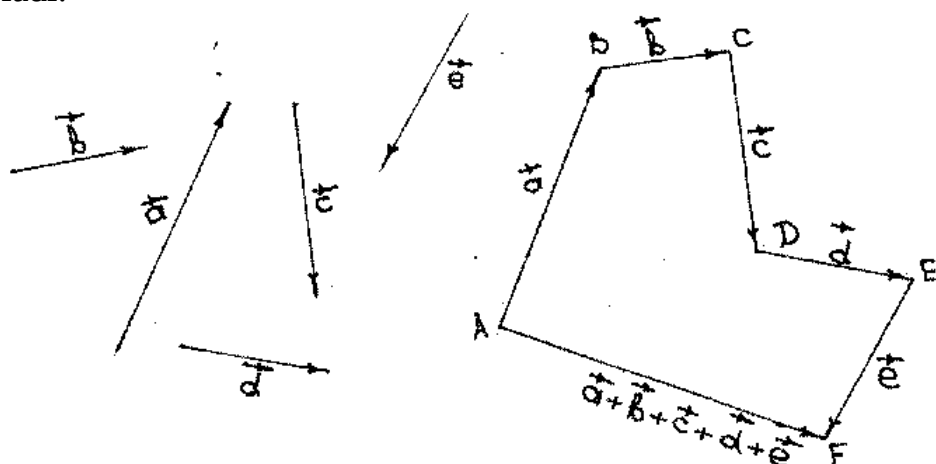
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC}$$

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

bundan $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ekani kelib chiqadi.

Qo'shiluvchi vektorlarning soni ikkitadan ortiq bo'lganda ularni qo'shish quyidagicha bajariladi. Berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{l}$ vektorlarning yig'indisini hosil qilish uchun $\vec{a}$ vektorning oxiriga $\vec{b}$ vektorning boshini qo'yish keyin $\vec{b}$ vektorning oxiriga $\vec{c}$ vektorning boshini qo'yish va h.k. Bu ishini oxirgi vektor ustida bajarilguncha davom ettirish kerak. Yig'indi vektor yani $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \dots + \vec{l}$ yig'indisi bo'lgan vektor boshi $\vec{a}$ vektorning boshidan, oxiri esa $\vec{l}$ vektorning oxiridan iborat vektor bo'ladi.

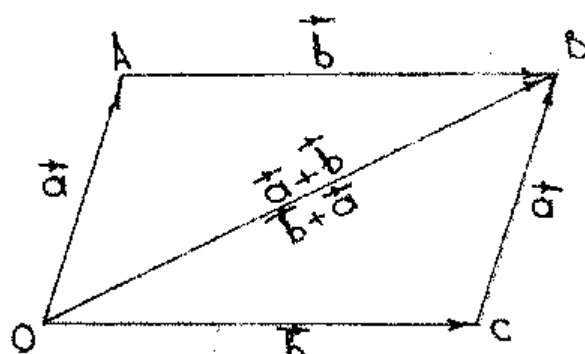


93-chizma

Masalan, 93-chizmadagi $\vec{AF}$ vektor berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ vektorlarni qo'shishdan hosil bo'lgan vektordir.

2) Qo'shishning o'rin almashtirish (kommutativlik) xossasi. Har qanday ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uchun $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ tenglik o'rinlidir.

Isbot: $\vec{a} = \vec{OA}$ va $\vec{b} = \vec{AB}$ bo'lsin. Ikki hol bo'lishi mumkin:



94-chizma

a) $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear emas. Bu holda O, A, B nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotmaydi (94-chizma) OAB uchburchakni OABC parallelogrammga to'ldirsak, vektorlarni qo'shishning uchburchak qoidasiga ko'ra:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB} \quad \vec{b} + \vec{a} = \vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB}$$

bu ikki tenglikdan esa $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ kelib chiqadi.

b) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lsin. Bu holda O, A, B nuqtalar bitta to'g'ri chiziqda yotadi. d to'g'ri chiziqda yotmaydigan C nuqta olaylik, u holda

$$\vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB} \quad (2)$$

a) holga ko'ra $\vec{OC} + \vec{CB} = \vec{CB} + \vec{OC}$.

Lekin $\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB}$, $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$ bo'lgani uchun:

$$\vec{OB} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{OA} \quad (3)$$

qarama-qarshi vektorlar yig'indisi $\vec{0}$ ga teng bo'lgani uchun $\vec{CA} + \vec{AC} = \vec{0}$ ikkinchi tomondan,

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (4)$$

(3) va (4) tengliklardan $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ tenglikka ega bo'lamiz.

3) har qanday $\vec{a}$ vektorga nol vektor qo'shilsa, $\vec{a}$ vektor hosil bo'ladi, ya'ni

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. Uchburchak qoidasiga ko'ra istalgan $\vec{a} = \vec{OA}$ vektor uchun

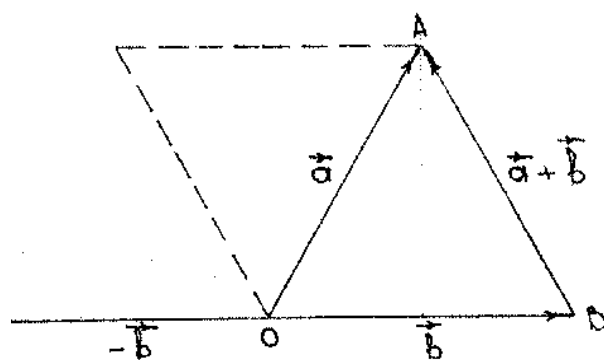
$\vec{OA} + \vec{AA} = \vec{OA}$ tenglik yoki $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ tenglik o'rinli.

4) har qanday $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{a}'$ vektor mavjudki, uning uchun:

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0} \quad (5)$$

b). Vektorlarni ayirish.

Ta'rif. $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorning yig'indisiga aytiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ayirma vektorni yasash uchun $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ vektorni yasash kerak ekan. Agar $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar bitta O nuqtaga qo'yilgan. (95-chizma)



95-chizma

hamda $\vec{a} = \vec{OA}$ va $\vec{b} = \vec{OB}$ deb belgilangan bo'lsa, u holda

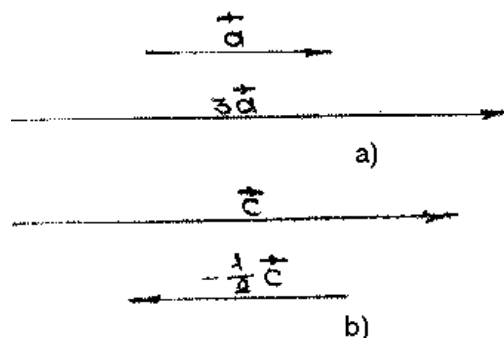
$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA}$$

Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini topish uchun boshi $\vec{B}$ nuqtada oxiri $\vec{A}$ nuqtada bo'lgan $\vec{BA}$ vektorni yasash etarli bo'ladi.

v). Vektorlarni songa ko'paytirish.

$\vec{a} \neq \vec{0}$ vektor va α son berilgan bo'lsin, bu erda $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ta'rif. Vektorning α songa ko'paytmasi deb shunday $\vec{b}$ vektorga aytiladiki $\alpha > 0$ bo'lganda $\vec{b}$ ning yo'nalishi $\vec{a}$ ning yo'nalishi bilan bir xil, $\alpha < 0$ da $\vec{b}$ ning yo'nalishiga teskari bo'lib, $\vec{b}$ vektorning



96-chizma

uzunligi esa $\vec{a}$ vektorning uzunligi bilan α son modulining ko'paytmasiga teng, $\vec{a}$ ning α songa ko'paytmasi $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ shaklida belgilanadi. Bu ta'rifdan bevosita quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun:

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

2) ixtiyoriy $\alpha \in \mathbb{R}$ son uchun: $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

3) ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a} ; (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$$

4) $\vec{a}$ va $\alpha \vec{a}$ vektorlar o'zaro kollinearlar:

96-a chizmada $\vec{a}$ vektor 3 soniga ko'paytirilgan: $\vec{b} = 3\vec{a}$; 96-b chizmada $\vec{c}$ vektor $-\frac{1}{2}$ soniga ko'paytirilgan: $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$. Biror $\vec{a} \neq \vec{0}$ vektorni o'zining uzunligiga teskari $\frac{1}{|\vec{a}|}$ songa ko'paytirilsa, shu vektor yo'nalishidagi birlik vektor

(ort) hosil bo'ladi, ya'ni $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \vec{a}_0 (|\vec{a}_0| = 1)$

Teorema: Agar $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) bo'lsa, u holda shunday α son mavjudki, $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ bo'ladi. (4)

Isbot. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo'lgani uchun quyidagi uch hol bo'lishi mumkin:

1) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ bo'lsa, $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$ bo'lib, bundan $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$

bu holda $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo'ladi:

2) $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ bo'lsa $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|} \vec{b}$ bo'lib, bundan $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \vec{a}$; bu holda

$\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo'ladi.

3) $\vec{b} = \vec{0}$ bo'lganda $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$ bundan $\alpha = 0$. Demak, vektorni songa ko'paytirish ta'rifidan va yuqoridagi teoremdan quyidagi xulosani chiqarish mumkin:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \alpha \vec{a} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Shunday qilib (4) munosabat $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinearligining zaruriy va etarli shartidir.

Vektorni songa ko'paytirish quyidagi xossalarga ega

a) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}; (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

b) $\alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \vec{a}$ (gruppalar qonuni).

v) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ (vektorlarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni).

g) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ (skalyarni qo'shishga nisbatan taqsimot qonuni).

Ikkinchi xossani, ya'ni tenglikning o'rinli ekanini ko'rsatish bilan cheklanamiz.

Isbot. Ma'lumki, $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ va $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ vektorlar bir xil $|\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\vec{a}|$ uzunlikka ega. Vektorni songa ko'paytirish amali ta'rifiga ko'ra agar $\alpha \cdot \beta > 0$ bo'lsa, $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ va $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ vektorlar bir xil yo'nalgan, agar $\alpha \cdot \beta < 0$ bo'lsa, vektorlar $\vec{a}$ ga qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Shunday qilib, agar $\alpha = 0, \beta \neq 0, \vec{a} \neq 0$ bo'lsa, $\alpha(\beta \cdot \vec{a})$ $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}$ ga ega bo'lamiz. Agar $\alpha = 0, \beta = 0, \vec{a} = 0$ bo'lsa, u holda $\alpha(\beta \cdot 0) = 0$ va $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = 0$ bo'ladi.

O'z - o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Vektorlar ustidagi amallarni geometrik nuqtai nazardan tushuntirib bering.
2. Vektorning skalyarga ko'paytmasi deganda nimani tushunasiz?

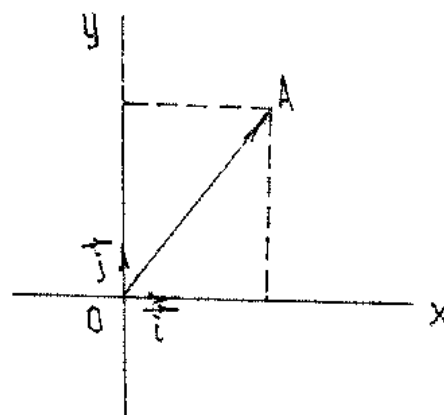
5.8.3. To'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi.

Nuqtaning va vektorning koordinatalari

Tekislikda koordinatalar sistemasini kiritish.

Tekislikda nuqta, chiziq, kesma, shuningdek, boshqa geometrik ob'ektlarni o'rinlarini tasvirlash uchun to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritiladi. Buning uchun tekislikda biror 0 nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikulyar ikkita o'qni olamiz. Bu o'qlarning har birida 0 nuqtadan boshlab kollinear bo'lmagan $\vec{i}, \vec{j}$ vektorlarni ajratamiz.(97-chizma).

1-Ta'rif. Musbat yo'nalishlari mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}$ vektorlar bilan aniqlanuvchi o'zaro perpendikular ikkita o'qdan tashkil topgan sistema tekislikda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi va $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ ko'rinishda belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi, $\vec{i}, \vec{j}$ birlik vektorlar esa koordinata vektorlari deyiladi. Ta'rifga asosan, $\vec{i}, \vec{j}$ vektorlar ortogonal va birlik vektorlardir: $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$; $\vec{i} \perp \vec{j}$. Musbat yo'nalishlari $\vec{i}, \vec{j}$ vektorlar bilan aniqlangan o'qlar mos ravishda abssissalar va ordinatalar o'qlari deb ataladi.(97-chizma)



97-chizma

Tekislikda $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ koordinata sistemasi berilgan bo'lsin. Shu tekislikning A nuqtasi uchun $\vec{OA}$ vektor A nuqtaning radius - vektori deyiladi. $\vec{OA}$ vektor uchun quyidagi munosabatni yozish mumkin:

$$\vec{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

2 - Ta'rif: OA radius - vektorning x,y koordinatalari A nuqtaning $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ koordinata sistemasida koordinatalari deyiladi va u A (x;y) ko'rinishda belgilanadi. Bunda x A nuqtaning abssissasi y esa A nuqtaning ordinatasi deyiladi.

Endi vektorning koordinatalarini qaraymiz:

3-Ta'rif: Vektorning koordinata o'qlaridagi proeksiyalari vektorning koordinatlari deb aytiladi.

Vektorni Ox o'qidagi proeksiyasi uning birinchi koordinatasi yoki x koordinatasi, Oy o'qidagi proeksiyasi uning ikkinchi koordinatasi yoki y koordinatasi deyiladi. Shunga ko'ra $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini x_a , y_a bilan belgilasak, u holda ta'rifga asosan

$$x_a = \text{pr}_{\text{Ox}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{i})$$

$$y_a = \text{pr}_{\text{Oy}} \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{j})$$

Aytaylik, tekislikda $\vec{a} = \vec{AB}$ vektori berilgan bo'lsin. A nuqtadan Ox o'qiga parallel, B nuqtadan Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz (98-chizma). Ularning kesishish nuqtasi C bo'lsin. U holda

$$\vec{AC} = x_a \cdot \vec{i}, \quad \vec{CB} = y_a \cdot \vec{j} \quad \text{va}$$

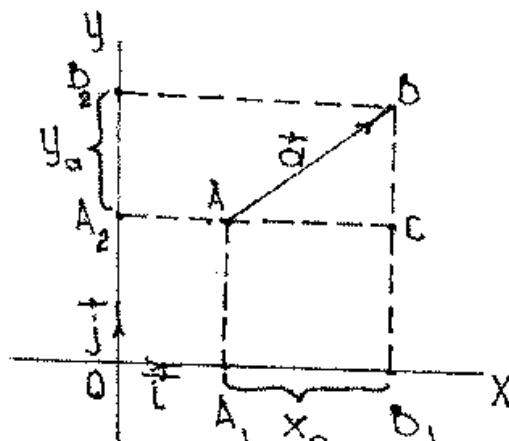
$$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} \quad \text{bo'ladi.}$$

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar x_a , y_a lar $\vec{a}$ vektorining koordinatalari bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalari orqali tubandagi ko'rinishda yozish mumkin:

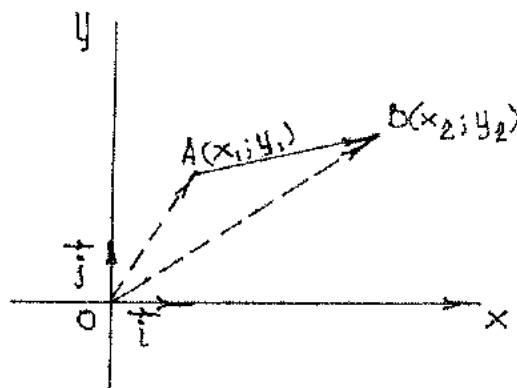
$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} \quad (1)$$

(1) vektor tenglik ko'p hollarda $\vec{a} = \{x_a; y_a\}$ simvolik ko'rinishda yoziladi.

(1) tenglik tekislikdagi har qanday vektorni ikkita o'zaro



98-chizma



99-chizma

perpendikulyar vektorlarga yoyib yozish mumkinligini bildiradi. Umuman olganda tekislikdagi har qanday vektorni kollinear bo'lmagan ikkita vektorga yoyib yozish mumkin. Vektorning boshi va oxirini koordinatalari $R = \{o, \vec{i}, \vec{j}\}$ ga nisbatan ma'lum bo'lsa, bu vektorning koordinatalarini topishni qaraylik.

Aytaylik, $R = \{o, \vec{i}, \vec{j}\}$ ga nisbatan $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ bo'lsin (99-chizma). Bu holda $\vec{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$; $\vec{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$; $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$; $\vec{AB} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j}$

Bundan

$$\vec{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\} \quad (2)$$

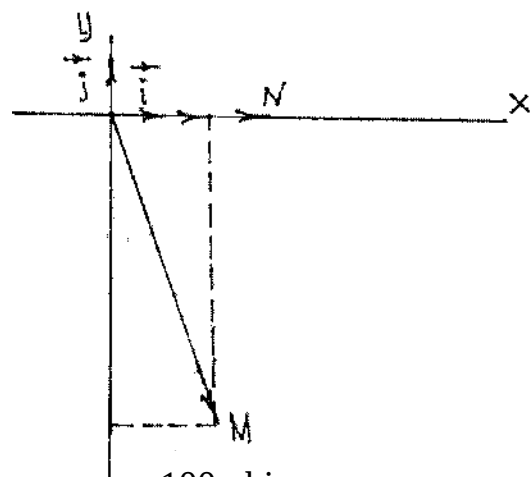
ya'ni vektorning koordinatalari shu vektor oxirining koordinatlaridan mos ravishda boshining koordinatlarini ayirish bilan hosil qilinadi.

Misol. $R=\{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ da $M(1;-5)$, $N(3;0)$ nuqtalarni yasang. $\overrightarrow{MN}$ vektorning koordinatalarini toping.

Echish. $M(1;-5)$ nuqtani yasash uchun $\rightarrow$
 $\overrightarrow{OM}=1\vec{i}-5\vec{j}$ vektorni yasaymiz. Buning uchun O nuqtadan boshlab $\vec{i}$ ga kollinear $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ga kollinear $-5\vec{j}$ vektorni yasaymiz. So'ngra

bu vektorlarning yig'indisini topsak, $\overrightarrow{OM}$ vektor hosil bo'ladi va undan izlanayotgan M

nuqtani topamiz. Xuddi shunday $N(3;0)$ nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{ON}=3\vec{i}$ vektorni yasaymiz. $N(3;0)$ (100-chizma).



100-chizma

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

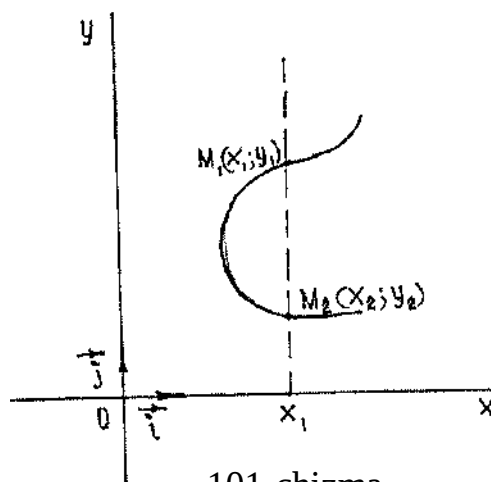
1. Tekislikda koordinatalar sistemasini kiritishni tushuntiring.
2. Nuqta va vektorning koordinatalarini formulalarini yozing va koordinata sistemasida misollar yordamida tushuntiring.

5.9. Tekislikda chiziqli tenglamalari.

5.9.1. Ikki o'zgaruvchili tenglama va uning grafigi. Chiziqli tenglamasi.

Aytaylik $F(x;y)=0$ (1) tenglama x,y o'zgaruvchilarni bir-biri bilan bog'lovchi biror tenglama bo'lsin. Bu tenglama o'zgaruvchilaridan birini, masalan y ni ikkinchisining funksiyasi kabi aniqlaydi. U holda (1) ni y ga nisbatan yechsak $y=\varphi(x)...$ (2) (bu erda $a \leq x \leq b$) tenglama hosil bo'ladi. (2) da $x \in [a,b]$ kesmada o'zgarganda $\varphi(x)$ funksiyani uzluksiz ravishda o'zgaradi deb qaraymiz.

Dastlab $\varphi(x)$ bir qiymatli funksiya deb qarab, x va y larni $R=\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinatalar tekisligidagi biror M nuqtaning koordinatalari deb faraz qilamiz. U vaqtda x ning har bir qiymati uchun (2) tenglama y ning yakka bitta qiymatini aniqlaydi. Demak, x ning har bir qiymatiga tekislikning koordinatalari $(x, \varphi(x))$ bo'lgan birgina nuqtasi to'g'ri keladi. Agar x uzluksiz ravishda o'zgarib turli qiymatlar olsa, M nuqta $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinatalar tekisligida x va y ning qiymatlariga qarab o'rnini o'zgartira boradi va biror geometrik o'rinni tasvirlaydi. Bu geometrik o'rin chiziqli deb ataladi. Agar $\varphi(x)$ funksiya ko'p qiymatli bo'lsa, yani x ning har bir qiymatiga



101-chizma

y ning bir necha $y_1; y_2; \dots; y_n$ qiymatlari mos kelsa, u holda x ning har bir qiymatiga $\{0; \bar{i}; \bar{j}\}$ tekislikda $M_1; M_2; \dots; M_n$ nuqtalar to'g'ri keladi. Masalan, $y = \varphi(x)$ funksiya ikki qiymatli bo'lsin.

Bu holda x ning har bir qiymatiga y ning $y_1 = \varphi(x_1)$ va $y_2 = \varphi(x_1)$ qiymatlari mos kelib, $\{0; \bar{i}; \bar{j}\}$ koordinatalar tekisligida x ning x_1 qiymati bilan ikkita $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_1; y_2)$ nuqta aniqlanadi (101-chizma).

$[a, b]$ kesmada x uzluksiz o'zgarganda M_1 va M_2 nuqtalar ham o'rinlarini uzluksiz ravishda o'zgartiradi va chiziq deb atalgan geometrik o'rinni tasvirlaydi.

Ta'rif: Agar chiziq ixtiyoriy nuqtasining x va y koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa, va aksincha by tenglamani qanoatlantiradigan har bir juft (x, y) qiymat chiziq nuqtasini tasvirlasa, u holda (1) tenglamaga chiziqning oshkormas tenglamasi deb ataladi. Analitik geometriyada ikki xil masala qaraladi: 1) berilgan geometrik xossalarga ko'ra chiziq tenglamasini tuzish; 2) tenglamasiga ko'ra koordinatalari tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik obrazini yaratish;

Misol. Koordinata burchaklari bissektrisalarining tenglamalari tuzilsin.

Yechish. Dastlab bissektrisaga xos geometrik xossani ifodalaymiz. Burchak bissektrisasi bu burchak ichida yotuvchi va uning tomonlaridan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rnini ifodalaydi. By xossaga asoslanib I va III koordinat burchaklarining bissektrisasi tenglamasini tuzamiz (102-chizma).

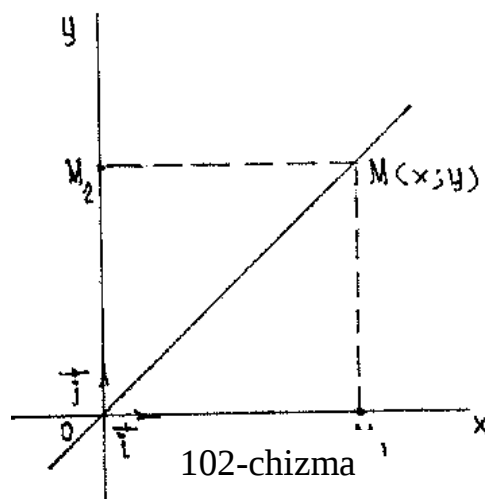
Agar OM birinchi koordinat burchagining bissektrisasi bo'lib, $M(x, y)$ uning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, xossaga ko'ra

$$|M_1M| = |M_2M| \quad \text{yoki} \quad y = x \dots (3)$$

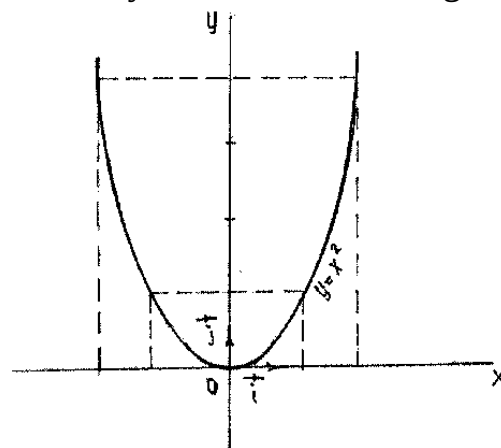
Agar $M(x, y)$ uchinchi koordinat burchagining bissektrisasidagi ixtiyoriy nuqta bo'lsa, x ham y ham manfiy son bo'lib, ularning absolyut qiymatlari bir-biriga teng bo'ladi va biz yana (3) tenglamaga kelamiz. Shynga o'xshash II va IV koordinat burchaklarining bissektrisasi tenglamasi $y = -x \dots (4)$ ekanligini ko'rish mumkin.

Endi chiziqning (1) tenglamasiga ko'ra yasash masalasini qaraymiz. x, y koordinatlarni bog'lovchi biror tenglamaning tekislikda qanday chiziqni tasvir etishini bilish uchun chiziqni shu tenglamaga asoslanib yasash kerak. Tekislikdagi nuqta esa o'zining (x, y) koordinatalari bilan aniqlanadi. Shyning uchun (1) tenglamadagi x ga $x_1; x_2; \dots; x_n$ qiymatlarni bersak

$$F_1(x_1; y) = 0, F_2(x_2; y) = 0, \dots, F_n(x_n; y) = 0 \quad (4)$$



102-chizma



103-chizma

tenglamalar hosil bo'ladi. Bu tenglamalardan x ning $x_1; x_2; \dots x_n$ qiymatlariga mos bo'lgan y ning $y_1; y_2; \dots y_n$ qiymatlarini topamiz, natijada koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi

$$(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots (x_n; y_n) \quad (5)$$

nuqtalarga ega bo'lamiz. Bu nuqtalarni

koordinatalar sistemasida yasab, ularni tutash chiziq bilan birlashtirsak (1) tenglamani tasvir etuvchi chiziq hosil bo'ladi. Bu chiziqqa ikki o'zgaruvchili (1) tenglamani grafigi deyiladi.

Misol. $y=x^2$ tenglama tasvirlaydigan chiziq yasalsin. Yasash. Tenglamadagi x ga $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots$ qiymatlarni beramiz va shunga mos y ni qiymatlarini topamiz. Buni jadval shaklda yozamiz.

x		-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y		9	4	1	0	1	4	9	

Natijada $\dots (-3;9); (-2;4); (-1;1); (0;0); (1;1); (2;4); (3;9); \dots$ nuqtalar hosil bo'ladi. Bu nuqtalarni $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ sistemada joylashtirib, ularni birlashtirsak, $y=x^2$ funktsiyaning grafigi ya'ni parabola chizig'i hosil bo'ladi. (103-chizma)

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Chiziqqa ta'rif bering.
2. Chiziq tenglamasini tuzishga misollar keltiring.

5.9.2. Tekislikda to'g'ri chiziqning turli tenglamalari.

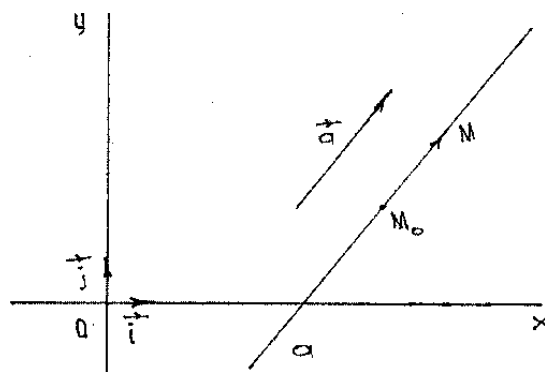
Ta'rif. To'g'ri chiziqqa parallel yoki shu to'g'ri chiziqda yotuvchi har qanday vektor uning yo'naltiruvchi vektori deyiladi. Quyida biz to'g'ri chiziqning berilish usullariga qarab uning tenglamasini keltirib chiqaramiz.

1). To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari.

To'g'ri chiziq a biror $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinata sistemasiga nisbatan o'zining biror $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasining va yo'naltiruvchi $\vec{a} = \{a_1; a_2\}$ vektorining berilishi bilan aniqlanadi. To'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqta olamiz. U holda $\overline{M_0M}$ vektori $\vec{a}$ vektori bilan kollinear bo'ladi. U holda shunday t soni topiladiki

$$\overline{M_0M} = t\vec{a}; \quad t \in R \dots (1)$$

munosabat bajariladi. (104-chizma).



104-chizma

Aksincha, biror M nuqta uchun (1) munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $\overline{M_0M} \parallel \vec{a}$ demak (1) munosabat faqat to'g'ri chiziqqa tegishli M nuqtalar uchungina bajariladi. M, M_0 nuqtalarning radius vektorlarini mos ravishda $\vec{r}, \vec{r}_0$ bilan belgilasak ya'ni, $\vec{r} = \overline{OM}$, $\vec{r}_0 = \overline{OM_0}$ bo'lsa, u holda $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ bo'ladi. (1) tenglikdan $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}$ (2)

(2) tenglamaga a to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi deyiladi. t ga turli qiymatlar berib, a ga tegishli nuqtalarning radius vektorlarini hosil qilamiz; (2)

tenglamaga kirgan t o'zgaruvchi parametr deyiladi. Endi (2) ni koordinatalarda yozaylik u holda quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + a_1 t \\ y &= y_0 + a_2 t\end{aligned}\quad (3)$$

Bu tenglamalar to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalari deb ataladi. Agar a to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan birortasiga ham parallel bo'lmasa, ya'ni

$a_1 a_2 \neq 0$ shart bajarilsa, (3) dan quyidagi

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \quad (4)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bundan

$$a_2 x - a_1 y + (-a_2 x_0 + a_1 y_0) = 0 \quad (5)$$

Bu erda shartga ko'ra a_1, a_2 ning bittasi noldan farqli, shu sababli (5) birinchi darajali tenglamadir. Bundan esa har qanday to'g'ri chiziq birinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi degan muhim xulosaga kelamiz.

Misol. $M_0(3; -2)$ nuqta orqali o'tuvchi va yo'naltiruvchi vektori $\vec{a} = \{2; 4\}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Masala shartiga ko'ra $x_0 = 3; y_0 = -2; a_1 = 2; a_2 = 4$ (3) formulaga asosan $x = 3 + 2t; y = -2 + 4t$ tenglamalarga ega bo'lamiz. Bu tenglamalar biz izlagan to'g'ri chiziqlarning parametrik tenglamalaridir.

2). Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Bizga ma'lumki ikki nuqta orqali yagona to'g'ri chiziq o'tadi. Agar M_1 va M_2 nuqtalarning $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ sistemaga nisbatan koordinatalari ma'lum bo'lsa shu nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

Aytaylik $M_1(x_1; y_1); M_2(x_2; y_2)$ bo'lsin. Izlanayotgan a to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqta olamiz.

Agar $\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ vektori $\overrightarrow{M_1 M} = (x - x_1; y - y_1)$ vektoriga kollinear bo'lsa, M nuqta to'g'ri chiziqda yotadi, bu deganimiz quyidagi munosabat o'rinli bo'ladi.

$$\overrightarrow{M_1 M} = t \overrightarrow{M_1 M_2} \quad (6)$$

(6) munosabatda vektorlarni tengligiga asosan

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1) \text{ va } y - y_1 = t(y_2 - y_1) \quad (7)$$

ga ega bo'lamiz.

Bundan esa

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (8)$$

(8) - tenglama berilgan ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi deyiladi. Bu tenglama $x_2 - x_1 \neq 0$ va $y_2 - y_1 \neq 0$ bo'lganda o'rinli. Agar $x_2 - x_1 = 0$ bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq (Oy) o'qqa parallel bo'lib, tenglama quyidagi ko'rinishni oladi.

$$x - x_1 = 0 \text{ yoki } x = x_1$$

Misol. ABC uchburchakning uchlarining koordinatalari berilgan: $A(3, 4), B(12, -6), C(13, 14)$ AB va BC tomonlarining tenglamasini tuzing.

Yechish: 1) AB tomonini tenglamasini tuzamiz. (8) formulaga murojaat qilamiz.

$$\frac{x-3}{9} = \frac{y-4}{-10}; -10(x-3)=9(y-4); -10x+30=9y-36; 9y+10x-66=0 \quad (AB)$$

Endi BC tomonini tenglamasini tuzamiz.

$$\frac{x-12}{13-12} = \frac{y+6}{14+6}; \frac{x-12}{1} = \frac{y+6}{20}; 20x-240=y+6; y-20x+246=0 \quad (BC)$$

3). To'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari bo'yicha tenglamasi.

d to'g'ri chiziqni aniqlovchi M_1 va M_2 nuqtalar koordinata o'qlari (Ox) va (Oy) da yotsin.

Aniqlik uchun $M_1(a;0)$ (Ox) o'qda $M_2(0;b)$ (Oy) o'qida yotsin. (105-chizma) Bu holda (8) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0} \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad (9)$$

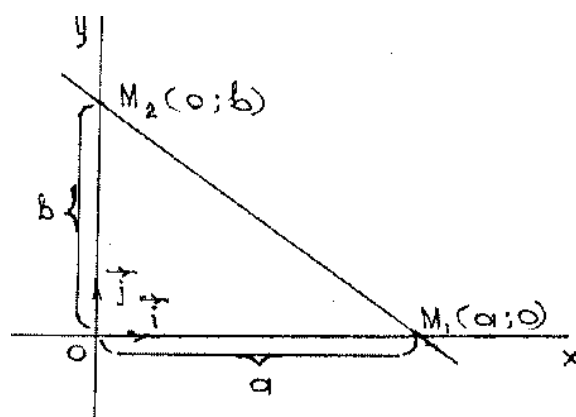
(9) tenglamaga to'g'ri chiziqning koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari bo'yicha tenglamasi deyiladi, bu erda a va b lar to'g'ri chiziqni mos ravishda (Ox) va (Oy) o'qlaridan kesgan kesmalarini ifodalaydi.

Misol. To'g'ri chiziq tenglamasi $6x-4y-24=0$. Uning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping.

Yechish: Kesishgan nuqtalarning koordinatalarini topish uchun, berilgan to'g'ri chiziq tenglamasini to'g'ri chiziqning koordinatalar o'qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi (9) ko'rinishiga keltiramiz.

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$$

Demak, koordinata o'qlari bilan kesishish nuqtalari: $A(3;0)$ va $B(0;-4)$



105-chizma

4). To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Dastlab to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti tushunchasini kiritamiz.

Ta'rif: $\vec{a}$ vektor $\{0, \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinatalar sistemasida a_1, a_2 koordinatalarga ega va $a_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda $a_2/a_1 = k$ son $\vec{a}$ vektorning burchak koeffitsienti deyiladi. To'g'ri chiziqni burchak koeffitsientli tenglamasini keltirib chiqaramiz. Izlanayotgan to'g'ri chiziqni bitta nuqtasi va burchak koeffitsienti tekislikda shu to'g'ri chiziq vaziyatini to'la aniqlaydi. (Oy) o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar uchun burchak koeffitsient mavjud emas. Shuning uchun (Oy) o'qqa parallel bo'lmagan a

to'g'ri chiziq $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan o'tsin va k burchak koeffitsientga ega bo'lsin. a to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. (4) ga asosan $a_1 \neq 0$ shartda

$$y - y_0 = \frac{a_2}{a_1}(x - x_0) \quad \text{bu erda} \quad \frac{a_2}{a_1} = k$$

$$\text{demak} \quad y - y_0 = k(x - x_0) \quad (10)$$

$$\text{yoki} \quad y = kx + b \quad (11)$$

$$\text{bu erda} \quad b = y_0 - kx_0$$

(11) tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi. $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar orqali o'tgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti, $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formula bilan aniqlanadi.

To'g'ri chiziqning bunday berilishi, to'g'ri chiziq Oy o'qiga parallel bo'lmagan holda to'g'ridir. k ni ya'ni burchak koeffitsientni geometrik izohlaymiz. (106-chizma). M_1M_2N uchburchakdan, burchak koeffitsient $k = \operatorname{tg} \alpha$ ekanligi ko'rinadi, bu erda α (Ox) o'qini soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda burib a to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushgunga qadar burish burchagi, shuning uchun ham k - burchak koeffitsienti deyiladi.

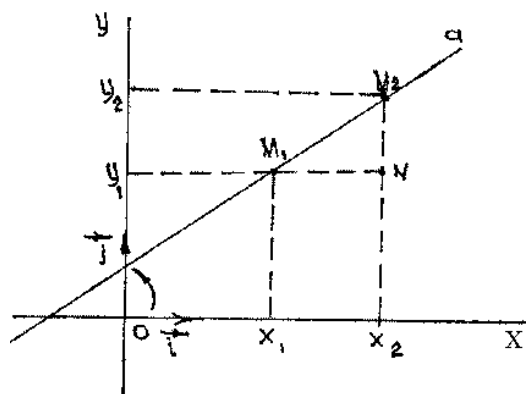
1-Misol. $M_1(3;2)$ va $M_2(4;3)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientini toping.

$$\text{Yechish:} \quad k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{formulaga ko'ra}$$

$$k = \frac{3 - 2}{4 - 3} = 1 \quad \text{bundan} \quad k = \operatorname{tg} \alpha = 1$$

$$\text{Demak,} \quad \alpha = 45^\circ$$

2-Misol. (Ox) o'qi bilan 60° burchak tashkil etib $M_1(2; -3)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.



106-chizma

Yechish. Izlanayotgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti

$k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ ga teng. (10) tenglamaga $x_0 = 2$; $y_0 = -3$ qiymatlarni qo'yib quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz.

$$y + 3 = \sqrt{3}(x - 2) \quad \text{yoki} \quad x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{5}{\sqrt{3}} = 0;$$

5). To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Yuqoridagi tenglamalarning barchasi uchun xarakterli bo'lgan narsa, ularning birinchi darajali bo'lishligidir.

Shuning uchun, tubandagi birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \quad (12)$$

tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. (12) umumiy tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqning koordinata o'qlariga nisbatan joylashuvida, tubandagi hollar bo'lishi mumkin:

a) Agar $C=0$ bo'lsa, (12) - to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tadi.

b) Agar $A=0, C \neq 0$ bo'lsa (12) to'g'ri chiziq Ox o'qiga, agar $B=0, C \neq 0$ bo'lsa (12) to'g'ri chiziq Oy o'qiga parallel bo'ladi.

To'g'ri chiziq umumiy tenglamasidan burchak koeffitsienti k ni topaylik. $k = -A/B = -a_2/a_1$ demak to'g'ri chiziq $\vec{a}$ yo'naltiruvchi vektorining koordinatalari sifatida $-B, A$ sonlarini qabul qilish mumkin, ya'ni umumiy tenglamasi bilan berilgan to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori sifatida

$$\vec{a} = \{-B; A\} \quad (13)$$

vektorni olish mumkin.

Tekislikning (x, y) koordinatali barcha nuqtalarining (12) to'g'ri chiziqdan bir tomonda joylashishi uchun $Ax + By + C > 0$ yoki $Ax + By + C < 0$ tengsizlikni bajarilishi kerak. $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalarning to'g'ri chiziqning turli tomonida joylashishlari uchun $Ax_1 + By_1 + C > 0$ va $Ax_2 + By_2 + C < 0$ lar turli xil ishoraga ega bo'lishlari zarur va etarli.

1-Misol. $4x - 3y + 6 = 0$ to'g'ri chiziqning normal vektorini ko'rsating.

Yechish. Normal vektor $\vec{N} = \{A; B\}$ ko'rinishda bo'lgani uchun berilgan to'g'ri chiziq tenglamasida $A=4; B=-3$.

Shuning uchun $\vec{N} = \{4; -3\}$

2-Misol. $2x + y - 4 = 0$ va $x - y + 1 = 0$ to'g'ri chiziqlarni kesishish nuqtasi orqali o'tib $x + y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Dastlab ikki to'g'ri chiziqni kesishish nuqtasini topamiz, buning uchun kesishish nuqtasini koordinatalarini $x_1; y_1$ deb olamiz. u holda

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 - 4 = 0 \\ x_1 - y_1 + 1 = 0 \end{cases}$$

sistemadan $x_1=1; y_1=2$ ga ega bo'lamiz.

Izlanayotgan to'g'ri chiziqni yo'naltiruvchi vektori $\vec{a}$ sifatida $x + y - 5 = 0$ to'g'ri chiziqning normal vektorini olsa bo'ladi. $\vec{N} = \{1; 1\}$ y holda izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasi tubandagicha bo'ladi.

$$1(x-1) + 1(y-2) = 0 \quad \text{yoki} \quad x + y - 3 = 0$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. To'g'ri chiziqning turli ko'rinishdagi tenglamalarini yozing.
2. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasiga ko'ra tekshiring.

5.9.3. Tekislikda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashuvi.

Tenglamalari bilan berilgan d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarni olaylik.

$$d_1 : Ax_1 + By_1 + C_2 = 0 \quad (1)$$

$$d_2 : Ax_2 + By_2 + C_2 = 0 \quad (2)$$

Bu to'g'ri chiziqlarning tekislikda o'zaro joylashuvini tekshirish uchun (1) va (2) ni sistema qilib tekshirish kerak. Sistemani tekshirish esa chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishda ko'rib o'tilgan edi. d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvida ushbu hollar bo'lishi mumkin: a) d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar kesishadi (sistema yagona echimga ega); b) d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar parallel, bu holda $A_1/A_2 = B_1/B_2$ bo'ladi.; v) agar $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$ bo'lsa, d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushadi.

Misol $x-4y+3=0$ va $2x-y+5=0$ to'g'ri chiziqlarning tekislikda joylashuvini tekshiring.

Yechish. Tekislikda joylashuvini tekshirish uchun tubandagi sistemani tekshiramiz

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

By sistemadan kesishish nuqtasini topamiz: (2;1)

Demak to'g'ri chiziqlar kesishadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

Tekislikda ikki to'g'ri chiziq joylashuvini tushuntirib bering..

5.9.4. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

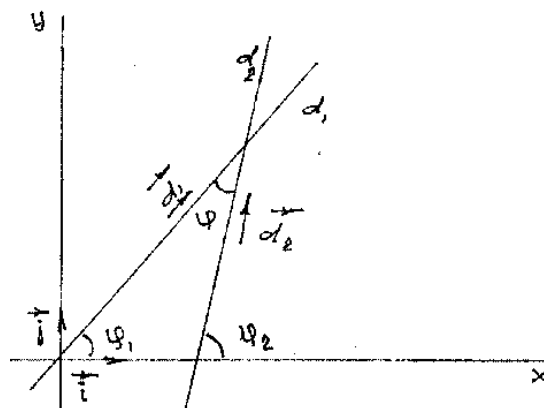
d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deganda, bu to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi (φ burchak 0° dan 90° gacha oraliqda o'zgaradi).

d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin. (107-chizma).

$$d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

$$d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

$\vec{d}_1 = \{-B_1; A_1\}$ vektor d_1 to'g'ri chiziqning $\vec{d}_2 = \{-B_2; A_2\}$ vektor d_2 to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektoridir. U holda ta'rifga asosan d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak quyidagi formuladan aniqlanadi:



107-chizma

$$\cos \varphi = \cos(\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2) = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (3)$$

Xususiyl holda

$$\vec{d}_1 \perp \vec{d}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (4)$$

(4) tenglik ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi. $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ sistemada Oy o'qqa parallel bo'lmagan d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo'lsin

(33-chizma).

$$d_1: y = k_1x + b_1$$

$$d_2: y = k_2x + b_2$$

Bu holda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak tubandagi formula bilan ifodalanadi:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (5)$$

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} \quad (6)$$

φ -bu erda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak (5) formula to'g'ri chiziqlar perpendikular bo'lmagan holda ishlatiladi. (5) va (6) formuladan $k_1 = k_2$ to'g'ri chiziqlarning parallellik, $k_1 k_2 = -1$ to'g'ri chiziqlarning perpendikularlik shartlari kelib chiqadi.

Agar to'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalar bilan berilsa, u holda

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \quad (7)$$

To'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad (8)$$

ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti,

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad (9)$$

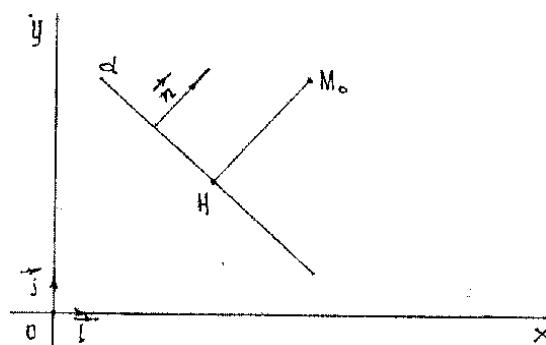
esa ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak uchun formula keltirib chiqaring.
2. Ikki to'g'ri chiziqning perpendikularlik va parallellik shartlari nimadan iborat?

5.9.5. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa.

$\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinata sistemasida $d: Ax + By + C = 0$ to'g'ri chiziq va $M_0(x_0; y_0)$ nuqta berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan d to'g'ri chiziqqa perpendikular o'tkazamiz va ularni kesishgan nuqtasini H bilan belgilaymiz (108- chizma). $\overrightarrow{HM_0}$ vektorning uzunligini M_0 nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa deyiladi va $\rho(M_0, d)$ ko'rinishda belgilanadi.



108-chizma

$\vec{n} = \{A, B\}$ vektor berilgan to'g'ri chiziqning normal vektori. Agar M_0 nuqta d to'g'ri chiziqni nuqtasi bo'lsa, $\rho(M_0, d) = 0$ bo'ladi. Agar M_0 nuqta d to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmasa, u holda $\rho(M_0, d) = |\overrightarrow{HM_0}|$; $|\overrightarrow{HM_0}|$ va $\vec{n}$ vektorlar

kollinear, chunki $\vec{n}$ vektor d to'g'ri chiziqning normali. U holda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa tubandagicha bo'ladi:

$$\rho(M_0, d) = \frac{|\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} \quad (1)$$

Agar H nuqtaning koordinatalari $x_1; y_1$ bo'lsa, u holda $\overrightarrow{HM_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$ bo'ladi. H nuqta d to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgani uchun $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, u holda (1) formula quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + C = 0 \quad (2)$$

Shu bilan birga $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ ekanini nazarda tutsak (1) formula quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\rho(M_0, d) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (3)$$

(3) berilgan M_0 nuqtadan berilgan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulasidir.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

Tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasini keltirib chiqaring.

5.9.6. To'g'ri chiziqlar dastasi.

To'g'ri chiziqlar dastasi ikki xil bo'ladi: kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi va parallel to'g'ri chiziqlar dastasi. Agar 5.9.4-mavzudagi (1) va (2) tenglamalar bilan ifodalanuvchi to'g'ri chiziqlar biror nuqtada kesishsa, u nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasini tashkil qiladi. Shu nuqta dasta markazi deyiladi.

Agar (1) va (2) to'g'ri chiziqlarni yo'naltiruvchi vektorlari parallel yoki ustma - ust tushsa, u holda shu yo'nalishdagi to'g'ri chiziqlar parallel to'g'ri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining markazi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

bu erda, α va β lar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan har xil qiymatlarni qabul qiladi. Agar kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi markazining koordinatlari $(x_0; y_0)$ berilgan bo'lsa, u holda dasta tenglamasi tubandagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0 \quad (1)$$

Misol. To'g'ri chiziqlar $2x + 3y + 10 = 0$ va $4x - 5y - 5 = 0$ tenglamalar bilan berilgan. Shu to'g'ri chiziqlar va $M(2; 3)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish: Dastlab berilgan to'g'ri chiziqlardan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi tenglamasini tuzamiz.

$$2x + 3y + 10 + \lambda(4x - 5y - 5) = 0 \quad (*)$$

Bu to'g'ri chiziqlar dastasidan $M(1;2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqni ajratib olishimiz kerak. Biz izlayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini M nuqta koordinatalari qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun M nuqta koordinatalarini (*) tenglamaga qo'yamiz.

$$4 + 9 + 10 + \lambda(4 \cdot 2 - 5 \cdot 3 - 5) = 0; \quad \lambda = \frac{23}{12}$$

Bu qiymatni (*) tenglamaga qo'yib izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini olamiz. $116x - 79y + 5 = 0$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

To'g'ri chiziqlar dastasini turlarini aytib bering va tushuntiring.