

VI –bob

Geometriya elementlari

6.1. Geometriyaning rivojlanishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot

Geometriya tarixi qadimgi dunyoning uzoq o'tmishidan boshlanadi, lekin u shubhasiz, sharq mamlakatlarida paydo bo'lgan. Geometriya ning taraqqiyotini to'rtta davr bilan xarakterlash mumkin, lekin uning chegarasini biror ma'lum yillar bilan ajratib bo'lmaydi.

Birinchi davr —geometriyaning paydo bo'lish davri eramizdan oldingi V asrgacha bo'lgan davrni o'z ichiga oladi va qadimgi Misr, Vaviloniya va Gretsiyada yer o'lchash ishlarining taraqqiyoti bilan chambarchas bog'liqdir (geometriya so'zi ham grekcha: *γῆ* — yer va *μετρέω* — o'lchayman so'zlaridan olingan bo'lib, lug'aviy ma'nosi yer o'lchash demakdir).

Grek tarixchisi Gerodatning (tahminan miloddan avvalgi 465-425 y) yozib qoldirgan ma'lumotlariga ko'ra geometriyaga oid dastlabki ma'lumotlar Misrda tarkib topa boshlagan. Aytishlaricha Shohlar misrliklarga dehqonchilik qilish uchun to'g'ri to'rtburchak shaklidagi yer maydonlarini taqsimlab berar va yer egasidan mos ravishda soliq undirishar ekan. Nil daryosining toshib ketishi oqibatida buzilib ketgan maydonlar qaytadan o'lchanar va unga yarasha soliq miqdori qaytadan belgilanar ekan.

Yerlarni taqsimlash, soliq miqdorini belgilash, yuzlarni o'lchash, sug'orish inshootlarini qurish kabi bir qator ehtiyojli zaruriyatlar Misrda geometriyaning shakllanishiga omil bo'lgan.

Antiq Misr geometriyasi haqidagi ma'lumotlar Raynd va Moskva papiruslarida keltirilgan.

Papirus Misr daryolari bo'yida, bo'yi 3 m gacha yetadigan ko'p yillik o'simlik po'stloqlarini bir-biriga tekis yopishtirishdan hosil qilingan.

Papiruslarning birinchisini ingliz sayyohi va misrshunos Raynd 1858 yilda Nil daryosining o'ng qirg'og'ida joylashgan Luqsor qishlog'idan sotib olgan. Papirusning eni 30 sm, bo'yi 20 m bo'lib unda 80 masala berilgan. Papirus uni ko'chirib yozgan Axmes nomi bilan ham ataladi. Uni yozib qoldirishicha papirus miloddan avvalgi 2000-1800 yillarga tegishlidir. Papirusda keltirilgan 20 ta geometrik masaladan 8 tasi hajmni, 7 tasi yuzani va 5 tasi qiya piramida hajmini hisoblashga bag'ishlangan. Papirus matnini birinchi marta misrshunos Geydelberg universiteti olimi Avgust Eyzenlar (1805-1880) o'qishga muyassar bo'lgan va nemis tiliga tarjima qilgan va sharhlar keltirgan holda chop qilgan. Papirus bugungi kunda qisman Britaniya va Nyu-York davlat muzeylarida saqlanmoqda. Ikkinchi "Moskva" papirusini rus olimi, sharqshunos V.S.Golenishchev 1893 yilda Peterburg davlat Ermetajida saqlanayotganini aniqlagan. 1930 yilda manba sharqshunos B.A.To'raev va V.V.Struve tamonidan nemis tiliga tarjima qilingan va nashr ettirilgan. Manbaning eni 8sm bo'yi 5,44m ni tashkil etib, u o'z ichiga 18ta arifmetik, 7ta geometrik masalani oladi. Papirus Moskva nafis san'at muzeyida saqlanmoqda.

Raynd va Moskva papiruslari qadimgi Misr yozuvida bitilgan. Misrliklar yozishda iyerogliflardan foydalanganlar. Iyerogliflar vazifasini xayvonlar, qushlar, xashorotlar, odamlar, anjomlarni ifoda qiluvchi rasmlar bajargan.

Qog'oz vazifasini o'tovchi papirus kashf qilingach iyerogliflar o'rnini ieratik yozuvlar egallagan. Raynd va Moskva papiruslari ieratik yozuvda bitilgan, faqat Raynd papirusining yakuni iyeroglif yozuvda bayon qilingan.

Papiruslar taxlili shuni ko'rsatadiki misrliklar kvadrat, teng yonli uchburchak, teng yonli trapetsiya, doira yuzasini, asosi kvadrat bo'lgan kesik piramida hajmini hisoblashni bilganlar. Ularni ekin maydonlari yuzini hisoblash, mahsulotlarni taqsimlash, omborlar, idishlar sig'imini o'lchashga tadbiiq qila olganlar.

Shuningdek ular bir noma'lumli chiziqli tenglamani yechishni bilganlar. Raynd papirusida shularga doir 15 masala, Moskva papirusida esa 3 masala keltirilgan.

Antiq davr madaniyati o'choqlaridan yana biri ikki Frot va Dajla (Tigr va Efrat) daryo oralig'i madaniyatidir. Bu madaniyat tarixda Shumer - Bobil madaniyati deb nom qozongan. Ikki daryo oralig'ida papirus o'smagani sababli bobilliklar yozuvlarni yumshoq loydan yasalgan taxtachalarga bombuq yoki suyak yordamida yozganlar va ularni oftob, yoki olovda quritganlar.

Qurtilgan taxtachalar papiruslarga qaraganda mustahkam bo'lganidan bizgacha "mix xatlar" da yozilgan matnlar papiruslarga qaraganda ko'proq yetib kelgan. Hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlari muzeylarida miloddan avvalgi III mingliklarga taaluqli bo'lgan 560 mingga yaqin sopol matnlar saqlanmoqda.

Bobilliklar shuningdek tenglamalar sistemasi va ikkinchi darajali tenglamalarni yecha olganlar. Bobil matematikasi Misr matematikasi kabi ko'proq amaliy ahamiyat kasb etgan bo'lsada, ular algebraic shakl almashtirishlar bajara olganlar va ularni tenglamalarni echishga tadbiiq qila bilganlar.

Bobil matematikasida abstraktlashtirish jarayoni misrliklarga qaraganda ancha yuqori bo'lgan. Matematikaning keyingi rivoji Yunoniston bilan bog'liqdir. Misr va Bobilliklar bilan o'rnatilgan aloqalar Yunonistonga madaniyat bilan bir qatorda to'plangan matematik tushunchalarni ham olib keladi. Yunonlar ularni o'zlashtiribgina qolmay, balki ularni asoslash, hulosalash va isbotlashga harakat qilganlar.

Eramizdan oldingi VII asrda geometrik ma'lumotlar; grek tarixchilarishshg fikriga qaraganda, Misr va Vaviloniyadan Gretsiyaga o'tgan. Grek faylasuflari Misr va Vaviloniya donishmandlarining ishlari bilan tanisha boshlagan. Ana shu vaqtdan boshlab geometriya taraqqiyotining ikkinchi davri - geometriyani fan sifatida sistemali bayon qilish davri boshlanadi, bunda barcha jumlar isbot qilinardi.

Ular matematikani dunyoni bilish, borliqni anglash va unda insonning tutgan o'rnini aniqlash maqsadida o'rganganlar va rivojlantirganlar. Shuning uchun bo'lsa kerak Yunonistonda dastlab shakllangan maktablar falsafiy yo'nalish kasb etgan. Bu maktablarda matematika falsafa bilan uzviy aloqadorlikda rivojlangan. Ana shunday maktablardan dastlabkisi Milet maktabidir. Maktabga grek matematikasining otasi hisoblangan Miletlik savdogor Fales (640-556 e.o.) asos solgan, uning exrom balandligini uning soyasiga qarab o'lchay olganligi, dengizdagi kemadan qirg'oqqacha bo'lgan masofasini aniqlaganligi, sirqul asbobidan birinchi bo'lib foydalanganligi e'tirof etiladi. Shuningdek eramizdan

avvalgi 585 yil 28-mayda bo'lib o'tgan quyosh tutilishini oldindan aytib berganligi tarixiy manbalarda qayd etilgan.

Yunon matematikasining rivojiga Pifogor va uning shogirdlari munosib hissa qo'shgan. Falsafiy yo'nalishdagi Pifogor maktabi yuqori mavqega ega bo'lgan. Pifogor va uning shogirdlari uchburchak ichki burchaklari yig'indisi, dunyoga Pifogor tioremasi nomi bilan mashhur bo'lgan teoremani isbot qilganlar, muntazam ko'pyoqlilar soni beshta ekanligi, o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar mavjud ekanligini aniqlaganlar.

Demoqrit (330-275 e.o.) "Bo'linmas zarrachalar" metodini yaratadi, u dunyo bo'linmas zarrachalar-atomlardan tashkil topgan degan fikrni ilgari suradi. Uning fikricha har bir geometrik figura bir qancha elementar qismlardan iborat bo'lib, figura hajmi elementar figuralar hajmlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Pifogor "Dunyoni son boshqaradi" degan g'oyani ilgari surgan bo'lsa, Platon (429-348 e.o.) "Oллоh eng buyuk va mashhur geometr" degan goyani ilgari surgan, Platon akademyasi qoshiga "Bu yerga geometryani bilmaganlarning kirishi man etiladi" degan yozuvni ilib qo'ygan va falsafa bilan shug'ullanishdan oldin geometrya bilan shug'ullanishni tavsiya etgan.

Platon maktabida yasashga doir geometrik masalalar ham yechilgan. Sirqul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmaydigan qub hajmini ikkilantirish masalasini Platon tomonidan yaratilgan asbob yordamida yechganlar. yasashga doir geometrik masalalarni bosqichlab yechish metodi, geometrik o'rin g'oyasi shu maktabda asoslangan va bir qancha egri chiziqlar yasalgan.

Evdoks (410-355 e.o.) Platon maktabi vakili bo'lib praporsiyalar nazaryasiga asos solgan. Pifogor izdoshlari yaratgan sonli nisbat tushunchasidan farqli o'laroq bu nazaryani u o'lchovdosh bo'lgan kesmalar bilan bir qatorda o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar uchun ham qo'llagan, natijada irratsional son tushunchasiga asos solgan. Nisbatlar nazaryasi yordamida piramida, konus hajmini hisoblagan. Evdoksning shogirdi Menexm nomi esa konus kesimlar g'oyasi bilan bog'langandir. Buyuk faylasuf Aristotel mantiq ilmining rivojiga munosib hissa qo'shadi. Faxrli ravishda Aristotel, formalogika fani va deduktiv bayon asoschisi hisoblanadi.

Eramizdan oldingi III asrga kelib Yunonistonda shakllangan falsafiy maktab namoyondalari Misr va Bobilliklar yaratgan matematik tushunchalar va g'oyalarni tanqidiy o'rganish asosida ularni rivojlantirdilar, tushuncha va g'oyani asoslash, ilmiy bayon etish yo'llarini isbotlash (tahlil, sintez, hulosa chiqarish, hukm chiqarish) usullarini yaratishga harakat qildilar va bu metodlarni mujasamlashtirdilarki toki ular mavjud bo'lgan tushunchalarni tizimlashtirish tartibli bayon qilishni taqoza etdi.

Geometryani deduktiv prinsipda qurishni grek olimi Evklid o'z zamonasiga nisbatan qoniqarli hal qilib, 13ta kitobdan iborat "Negizlar" nomli asarini yaratdi. Evklid hayoti haqida to'la ma'lumotlar bizgacha yetib kelmagan u bizning eramizdan avvalgi 300 yillarda yashagan bo'lib, Ptolomey podshohlik qilgan davrda Aleksandriyada matematikadan dars bergan va shox tomonidan tashkil qilingan muzeyni matematika bo'limini yaratgan.

Aytishlaricha, kunlardan bir kun shoh Evklidni chaqirib "Geometryani

o'rganishda "Negizlar"dan ko'ra qisqaroq yo'l bormi?" deb so'raganda Evklid mag'rurona shunday degan ekan : "Geometryada shohlar uchun mahsus yo'l yo'q". Bundan tashqari Evklidning "Optika"va boshqa asarlari ham ma'lumdir. Insoniyat tarixida Evklidning "Negizlar" asari bilan taqqoslash mumkin bo'lgan va o'z qadr-qimmatini yo'qotmay kelgan, zamonasiga nisbatan chuqur ilmiy asosda yaratilgan birorta asarni ko'rsatish qiyin.

Evklid "Negizlar" kitobiga o'zidan oldin o'tgan olimlarning eng muhim ma'lumotlarini kiritdi va geometriyada unga qanoatlanarli bo'lmagan qoidalarni asosli isbotini berdi. "Negizlar" "dagi ba'zi teoremlarni Evklid o'zi kashf qilganligi shubhasizdir. Lekin "Negizlar" kitobidagi muallifning asosiy xizmati shundaki, u asrlar davomida yig'ilib kelgan geometrik bilimlarni hammasini shunday bir sistemaga soldiki, bu sistema uzoq vaqtlargacha aniqlik va qat'iylik namunasi bo'lib keldi. Hech bir ilmiy kitob Evklidning "Negizlar" kitobi singari bunchalik ko'p umr ko'rgan emas.

Bu kitob avval juda ko'p marta qo'lda ko'chirilgan, so'ng dunyodagi hamma tillarda qayta-qayta nashr qilingan. Evklidning bu asari 1482-1880 yillar orasida dunyo tillarida 460 marta nashr qilingan. Shulardan 155 tasi lotin, 142 tasu ingiliz, 48 tasi nemis, 38 tasi fransus, 27 tasu italya, 14 tasu golland, 5 tasi rus, 2 tasi palyak, qolganlari esa boshqa tillarga tarjima qilingan.

"Negizlar"kitobining qisqacha mazmuni.

1-kitob 34ta qoida, 48 teoremadan iborat bo'lib, uchburchaklarning tenglik shartlari, uchburchak tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabatlari, parallelogram va uchburchakning yuzlari hamda Pifogor teoremasi haqida so'z yuritiladi.

2-kitob 2qoida va 14ta teoremadan iborat bo'lib, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ va shu kabi ayniyatlar geometrik formada talqin qilinadi.

3-kitob aylanaga bag'ishlanadi. Bunda asosan aylanaga o'tkazilgan kesuvchi, urunma, markaziy burchaklar, ichki chizilgan burchaklar qaraladi.

4-kitobda aylanaga ichki va tashqi chizilgan ko'pburchaklar qaralib, muntazam to'rtburchak, beshburchak, oltiburchak va o'n burchaklarni yasash ko'rsatiladi.

5-kitobda asosan trapetsiyalar nazariyasi qaraladi.

6-kitobda praporsiyalar nazariyasining tadbqiqi sifatida uchburchaklar o'xshashligi nazariyasi va ko'pburchak yuzlarini topish beriladi.

7-9 kitoblar arifmetika va sonlar nazariyasiga bag'ishlangan.

10- kitobda irratsional miqdorlar nazariyasi qaraladi.

11-13 kitoblar stereometriyaga bag'ishlangan bo'lib, ularda ko'pyoqlar va muntazam ko'pyoqlilar haqida ma'lumotlar beruladi.

Evklidning "Negizlar" asari matematika fanining tadrijiy taraqqiyoti uchun o'ta muhim ahamiyat kasb etadi. Yunon matematikasida o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar va irratsionallik tushunchalarning vujudga kelishi bilan vujudga kelgan qiyinchiliklarni to'g'ri bartaraf qila olmaslik, ya'ni irratsional son tushunchasi, sonli to'plamlarni kengaytirish va haqiqiy sonlar nazaryasini yaratish muommosini

to'g'ri yechaolmaslik, ularning yechimini geometriyadan, to'g'rirog'i geometriya yasashlardan izlashga olib keladi.

Qadimgi quldorchilik tuzumining emirilishi Gretsiyada geometriya taraqqiyotining to'xtalishiga olib keldi, lekin geometriya arab sharqi mamlakatlari, O'rta Osiyo va Hindistonda taraqqiy qila bordi.

Evropada kapitalizmning paydo bo'lishi geometriya taraqqiyotining yangi, uchinchi davriga olib keldi; XVII asrning birinchi yarmida Dekart va Fermaning analitik geometriya yaratishi shu davrga mansubdir.

Analitik geometriya koordinatalar metodiga tayanib geometrik shakllar xossalarini ulariing algebraik tenglamalariga qarab tekshiradi. Differentsial hisob va geometrik shakllarning lokal xarakterdagi (berilgan nuqta atrofidagi) xossalarini tekshirish, munosabati bilan Eyler va Monj asarlarida XVIII asrda differentsial geometriya yaratildi. XVII asrning birinchi yarmida J. Dezarg va B. Paskal asarlarida proektiv geometriya paydo bo'la boshladi, bu geometriya dastlab perspektivalarni tasvirlashni o'rganishda, undan keyin esa fazoning biror nuqtasidan bir tekislikni ikkinchi tekislikka proektsiyalashda shakllarning o'zgarmaydigan xossalarini o'rganishda paydo bo'ldi va nihoyat J. Ponsele asarlarida takomillashtirildi.

Geometriya taraqqiyotining to'rtinchi davri noevklid geometriyalarning yaratilishi bilan nishonlanadi. Bu geometriyalardan birinchisi Lobachevskiy geometriyasi bo'lib uni Lobachevskiy geometriyani asoslashni tekshirishda, jumladan parallel to'g'ri chiziklar haqidagi aksiomani tekshirishda yaratgan. O'z geometriyasining mazmunini N. I. Lobachevskiy birinchi marta 1826 y. da Qozon universiteti fizika-matematika fakulteti majlisida bayon qildi. Uning asari esa 1829 y. da e'lon etildi. Venger matematigi Yanosh Boyan shu masala haqidagi biroz xomroq ishni 1832 y. da e'lon qildi. Lobachevskiy geometriya sining yaratilishidan boshlab matematikada, jumladan geometriyada aksiomatik metodning ahamiyati muhimlashib qoldi. Evklid geometriyasi (maktabda o'qitiladigan odatdagi elementar geometriya) keyinchalik aksiomatik jihatdan asoslab berildi. Lobachevskiy geometriyasi, proektiv geometriya, affin geometriya, ko'p o'lchovli (n o'lchovli) Evklid geometriyasi va boshqa geometriyalar ham aksiomatik asoslandi.

Hozirgi vaqtda geometriya ko'p xil geometriya lar va nazariyalarni o'z ichiga olgan bo'lib, ular orasida aniq chegara yo'q. Shu bilan birga ayrim geometrik nazariyalar analiz (differentsial geometriya) bilan, to'plamlar nazariyasi (nuqtalar to'plamlari nazariyasi, topologiya) bilan qo'shib ketgan. Har bir geometriya boshqasidan qanday fazoni tekshirishi bilan (Evklid, Lobachevskiy geometriyalari), qanday metodlardan foydalanishi bilan masalan, analitik geometriyada 2- tartibli egri chiziqlarning analitik nazariyasi,- yoki sintetik geometriyada 2-tartibli. egri chiziqlarning sintetik, sof geometrik nazariyasi, qanday ob'ektlarni (shakllarni) yoki ularning xossalarini tekshirishi bilan (masalan, ko'p yoqlilar va, ularniig xossalarini, egri chiziq va sirlarni va h. k. larni tekshirish bilan farq qiladi. Metrika masalalari (kesmalar uzunliklari, burchaklar va yuzlarni o'lchash) metrik geometriya tushunchasiga olib keladi. Intsidentsiya (tegishlilik, joylanishlik) masalalari holat geometriyasi, ya'ni proektiv geometriya

tushunchasiga olib keladi.

Geometriyani asoslash masalalari uning mantiqiy asoslarini, uning aksiomatikasi va tuzilishini o'rganuvchi elementar geometriya bo'limiga keltiradiki, bu ilmiy fan geometriya asoslari deb ataladi.

Geometriyalarning har birini Kleyning taklifiga ko'ra uning o'rganadigan almashtirishlar gruppasi orqali xarakterlash mumkin. Masalan, elementar geometriya Evklid harakatlari gruppasi bilan, affin geometriya affin almashtirishlar gruppasi bilan, proektiv geometriya barcha kollineatsiyalar (proektiv almashtirishlar) gruppasi bilan xarakterlanadi.

6.2. Maktabda o'rganiladigan geometrik tushunchalar sistemasi

Boshlang'ich ta'lim umumiy o'rta ta'lim tizimida muhim bo'g'in hisoblanib u mazmun va mohiyat jihatidan maktabgacha ta'lim jarayoni bilan ta'limning navbatdagi yuqori bosqichi bo'lgan o'rta ta'limni o'zaro bog'laydi.

Maktabgacha ta'lim yoshidagi bolalar egallashi lozim bo'lgan matematik bilim ko'lamini o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'lib u ilk matematik tasavvurlar ko'rinishida shakllantiriladi va maktabgacha yoshdagi bolalarning rivojlanishiga qo'yilgan davlat talablari asosida belgilanadi.

Davlat talablarini amaliyotga joriy etish borasida ishlab chiqilgan tayanch dasturlarda ilk matematik tasavvurlarni shakllantirish asosan son va sanoqqa, miqdor, shakl, fazoviy tasavvur va vaqtga oid tasavvurlarni shakllantirish yo'nalishlarida olib borish tavsiya etiladi.

Maktabgacha ta'lim yoshidagi bolalarda harakatli konkret va ko'rgazmali obrazli mantiqiy tafakkur vositasida uchburchak, to'rtburchak, kvadrat, aylana, doira, oval, ko'pburchak, kub, silindr, shar kabi geometrik figuralar ularning ba'zi bir xossa va xususiyatlari haqida tasavvurlar shakllantiriladi.

Boshlang'ich maktab matematika kursi arifmetika, algebra va geometrik materialni o'quvchilarni yosh xususiyatlarini hisobga olgan holda berilgan mavzu negizida mutanosib mujassamlashuvi asosida o'rgatiladi. Maktabgacha ta'lim jarayonida tasavvurlar shaklida egallangan geometrik material boshlang'ich ta'lim jarayonida o'tkir, o'tmas, to'g'ri burchak, uchburchak, to'g'ri to'rtburchak, kvadrat, ko'pburchak, kesma uzunligi, yuza, perimetr, ko'pyoqli va uning elementlari kub hajmiga oid tushunchalar qadar kengaytiriladi.

Boshlang'ich sinflarda tushuncha shaklida egallangan geometriyaga oid bilimlar yuqori sinflarda chuqurlashtiriladi, kengaytiriladi va aniqlashtiriladi. Yuqori sinflarda asosan geometriyaning sistemali kursi o'rgatiladi. Sistemali kurs ikki qismdan iborat bo'lib ular «Planimetriya» va «Stereometriya» deb yuritiladi.

Planimetriya kursida bir tekislikka tegishli bo'lgan figuralarning xossa va xususiyatlari, ularning elementlari orasidagi metrik munosabatlar, yuzalarni o'lchash masalalari o'rganiladi.

Barcha nuqtalari bilan bir tekislikka tegishli bo'lmagan figuralar xossa va xususiyatlari, ularning elementlari orasidagi metrik munosabatlarni, hajmlarni o'lchash masalalari stereometriya kursida o'rganiladi.

Planimetriya va stereometriyaning sistemali kurslarini o'rganish asosan boshlang'ich tushunchalar, boshlang'ich munosabatlar, boshlang'ich tushunchalar

bilan boshlang'ich munosabatlar orasidagi bog'lanishlarni ifodalovchi aksiomalar sistemasini keltirish orqali boshlanadi.

Geometriyaning bu tariqa bayon qilinishi fanda mazmunli aksiomatik bayon deb yuritilib uning ibtidosi Evklidga borib taqaladi. Evklid «Negizlar» asarining har bir kitobini deduktiv bayon asosida yaratgan bo'lib kitobda dastlab ta'riflar, postulotlar, aksiomalar so'ngra esa ta'rif, postulot va aksiomalar yordamida isbotlanadigan xossa va xususiyatlarni ifodalovchi teoremlarni keltirgan. Shu tariqa izchil tizimli asosli mantiqiy bayonning dastlabki namunasini birinchilar qatorida yaratadi. O'z davrining etuk asari hisoblangan «Negizlar» olimlar tomonidan tanqidiy o'rganilishi natijasida qator kamchiliklar mavjudligi aniqlangan.

Evklid tomonidan berilgan ta'riflarni o'rganish ularda uchraydigan «uzunlik» «kenglik» kabi tushunchalarning o'zlari ta'rifga muhtoj ekanligi, kitoblarda keltirilgan ta'rif, aksioma va postulotlar tegishli teorema va isbot talab qiluvchi matematik jumalarni isbotlash uchun etarli emasligi, hamda ular nuqta, to'g'ri chiziq va tekisliklar orasidagi munosabatlarni asoslash uchun etarli emasligi aniqlangan.

Evklid sistemasini tanqidiy o'rgangan David Gilbert, birorta ilmiy nazariyani asoslash uchun dastlab ta'riflanmaydigan boshlang'ich tushunchalar, so'ngra boshlang'ich tushunchalar orasidagi bog'lanishlarni izohlovchi boshlang'ich munosabatlar, boshlang'ich tushunchalar va boshlang'ich munosabatlar orasidagi bog'lanishlarni izohlovchi aksiomalar qabul qilish asosida mazkur ilmiy nazariyaga oid faktlarni isbotlash lozim degan g'oyani ilgari suradi, g'oyaga asoslangan holda fanda aksiomatik metod qabul qilingan. Mazkur g'oyani u 1899 yilda yaratilgan «Geometriya asoslari» kitobida bayon qilgan.

D.Gilbert Evklid geometriyasini asoslash uchun boshlang'ich tushunchalar sifatida «nuqta», «to'g'ri chiziq», «tekislik» ni boshlang'ich munosabatlar sifatida, «yotadi», «orasida yotadi», «tegishli» munosabatlarini, aksiomalar sifatida esa 5 guruh aksiomalarni qabul qiladi. Birinchi guruh tegishlilik aksiomalari deb yuritilib, tarkibiga 8 ta aksioma, ikkinchi guruh tartib aksiomalari 4 ta, uchinchi guruh kongruentlik 5 ta, to'rtinchi guruh uzluksizlik 2 ta, beshinchi guruh parallellik 1 ta aksiomadan iborat bo'lib jami 20 ta aksiomani tashkil qiladi.

Planimetriyaning tizimli kursi ta'riflanmaydigan asosiy tushunchalar «nuqta» va «to'g'ri chiziq»ni, boshlang'ich munosabat sifatida «yotadi», «tegishli» munosabatlarni, asosiy tushunchalar va asosiy munosabatlar orasidagi munosabatlar mohiyati va xususiyatini ochib beruvchi 2 ta tegishlilik, 2 ta tartib, 3 ta o'lchash, 2 ta kongruentlik, 1 ta parallellik aksiomalari vositasida bayon qilinadi.

Planimetriya kursida burchaklar, uchburchak, to'rtburchaklar, aylana, doira, ularning xossalari, perimetri, yuzlari, geometrik figuralarning xossalari, ularning elementlari orasidagi o'zaro bog'lanishlar teorema sifatida isbotlanadi.

Stereometriya kursida ta'riflanmaydigan asosiy tushunchalar sifatida «nuqta», «to'g'ri chiziq», «tekislik» tushunchalari olinadi. Asosiy tushunchalar qatoriga «tekislik» tushunchasining kiritilishi planimetriyada qabul qilingan aksiomalar sistemasini kengaytirishni talab etadi. Shuning uchun fazoviy figuralar xossa va xususiyatlarini o'rganish, teoremlarni isbot qilish maqsadida stereometriya kursida quyidagi aksiomalar qabul qilinadi. Maktab geometriya kursida bu aksiomalar S gruppasi aksiomalar deb yuritiladi.

S_1 : tekislik qanday bo'lsin, shu tekislikka tegishli nuqtalar va unga tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud.

S_2 : agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa ular to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi.

S_3 : agar ikkita turli to'g'ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo'lsa ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.

Planimetriya kursi aksiomalari faqat bitta tekislikda joylashgan nuqtalar va to'g'ri chiziqlar orasidagi munosabatlarni izohlagani va stereometriyada esa bunday tekisliklar ko'p sonli ekanligini inobatga olib planimetriya kursi aksiomalari sistemasi stereometriya kursiga moslashtirilgan holda qabul qilinadi. Bu aksiomalar quyidagilardir.

I_1 : To'g'ri chiziq qanday bo'lsin, bu to'g'ri chiziqqa tegishli va tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud;

I_2 : Istagan ikki nuqtadan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin va faqat bitta;

II_1 : To'g'ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi;

II_2 : Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi;

III_1 : Har bir kesma noldan katta tayin uzunlikka ega. Kesma uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan qismlari uzunliklarining yig'indisiga teng;

III_2 : Har bir burchak noldan katta tayin gradus o'lchovga ega. Yoyiq burchak 180^0 ga teng. Burchakning gradus o'lchovi o'zining tomonlari orasidan o'tuvchi har qanday nur yordamida ajratilishidan hosil qilingan burchaklarning gradus o'lchovlari yig'indisiga teng;

III_3 : Istalgan yarim to'g'ri chiziqqa uning boshlang'ich nuqtasidan berilgan uzunlikda yagona kesma qo'yish mumkin;

IV_1 : Tekislikka tegishli bo'lgan yarim to'g'ri chiziqdan berilgan yarim tekislikka 180^0 dan kichik bo'lgan berilgan gradus o'lchovli burchak qo'yish mumkin va faqat bitta;

IV_2 : qanday bo'lsin berilgan tekislikda undagi berilgan yarim to'g'ri chiziqqa nisbatan berilgan vaziyatda joylashgan shu uchburchakka teng uchburchak mavjud bo'ladi;

V_1 : Tekislikda berilgan to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bittadan ortiq parallel to'g'ri chiziq o'tkazib bo'lmaydi.

Yuqorida qayd qilingan I-V guruh aksiomalari va S_1 , S_2 , S_3 aksiomalar birgalikda stereometriya aksiomalar sistemasini tashkil qiladi.

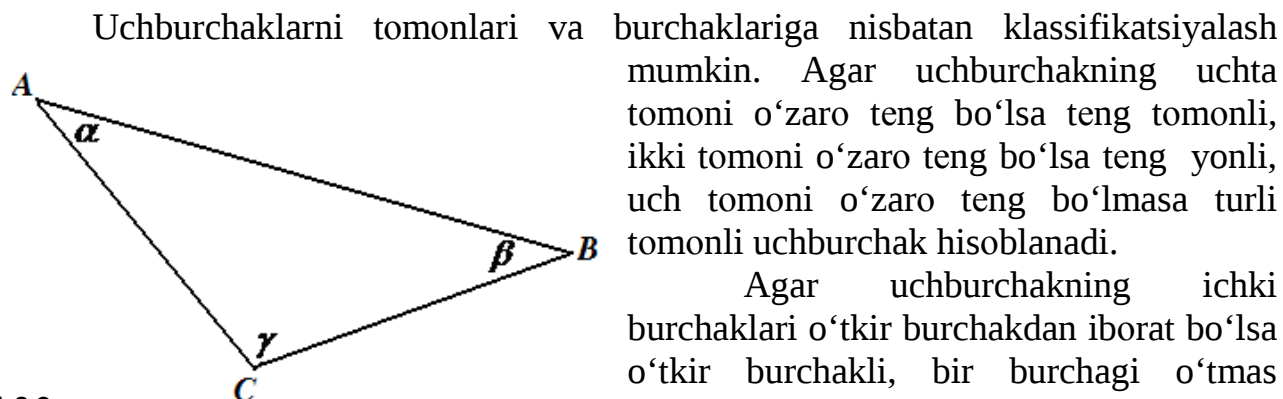
Maktab stereometriya kursida to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning parallellik, perpendikularligi, to'g'ri chiziq va tekislikning, to'g'ri chiziqlarning o'zaro munosabatlari o'rganiladi.

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini kiritish orqali ikki nuqta orasidagi masofa, vektor, koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar, to'g'ri chiziq tenglamalari, to'g'ri chiziqlar va tekisliklar orasidagi burchak shuningdek, ko'pyoqlilar ularning xossalari, yon va to'la sirtlari, hajmlari o'rganiladi.

6.3. Geometrik figuralar, ularning ta'rifi, hossalari va alomatlari.

6.3.1. UCHBURCHAKLAR

Ta'rif. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta va uchlari ularning har ikkalasiga tegishli bo'lgan uchta kesmadan iborat geometrik shakl uchburchak deyiladi. A, B, C uchburchak uchlari, AB, BC, AC tomonlari $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ ichki burchaklardir. $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. (109-chizma).



109-

Uchburchaklarni tomonlari va burchaklariga nisbatan klassifikatsiyalash mumkin. Agar uchburchakning uchta tomoni o'zaro teng bo'lsa teng tomonli, ikki tomoni o'zaro teng bo'lsa teng yonli, uch tomoni o'zaro teng bo'lmasa turli tomonli uchburchak hisoblanadi.

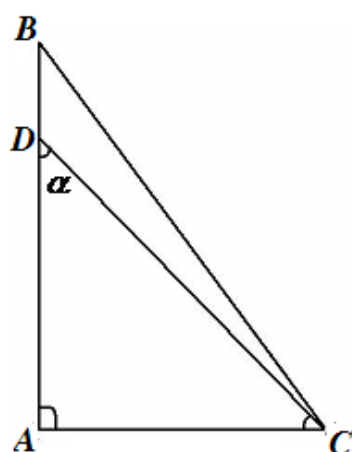
Agar uchburchakning ichki burchaklari o'tkir burchakdan iborat bo'lsa o'tkir burchakli, bir burchagi o'tmas burchak bo'lsa o'tmas burchakli, bir

burchagi to'g'ri burchak bo'lsa to'g'ri burchakli uchburchak deyiladi.

Har qanday uchburchak uchta tomoni, bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi yoki ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagi bilan to'la aniqlanadi.

Uchta a, b, c tomonlariga ko'ra berilgan uchburchak mavjud bo'lishi uchun uning ixtiyoriy ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta bo'lishi shart.

$a + b > c$; $a + c > b$; $c + b > a$ tengsizlik uchburchak tengsizligi deyiladi. Ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra berilgan uchburchak mavjud bo'lishi uchun $\alpha < 180^\circ$ tengsizlik, bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra



110-

berilgan uchburchak mavjud bo'lishi uchun $\alpha + \beta < 180^\circ$ tengsizlik bajarilishi zarur va etarlidir.

To'g'ri burchakli uchburchakda to'g'ri burchak qarshisida yotgan tomon gipotenuza, qolgan tomonlari katetlar deb ataladi. BC gipotenuza, AB va AC katetlar. (110-chizma).

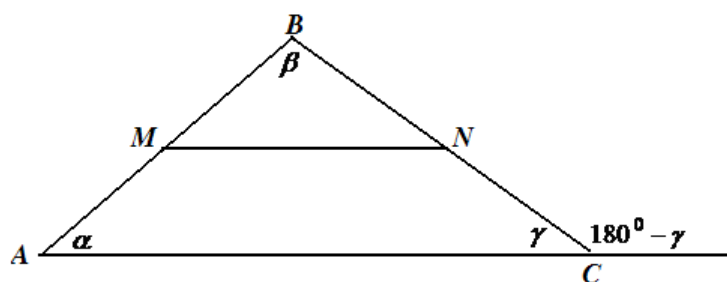
Ikkala kateti teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakka teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak deyiladi va uning o'tkir burchaklari 45° ga teng bo'ladi.

$$\angle ADC = 45^\circ \quad \angle ACD = 45^\circ$$

Uchburchakda teng tomonlar qarshisida teng burchaklar, teng burchaklar qarshisida teng tomonlar, katta burchak qarshisida katta tomon, kichik tomon qarshisida esa kichik burchak yotadi. Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchaklari yig'indisi uning uchinchi burchagining qo'shni burchagiga tengdir. (111-chizma).

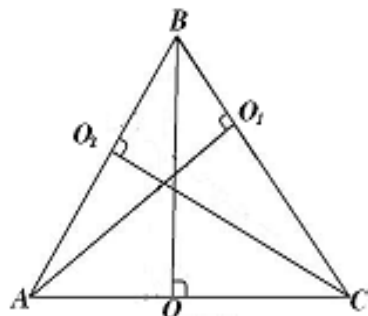
$$\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 180^\circ$$

$$\angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ - \angle \gamma$$

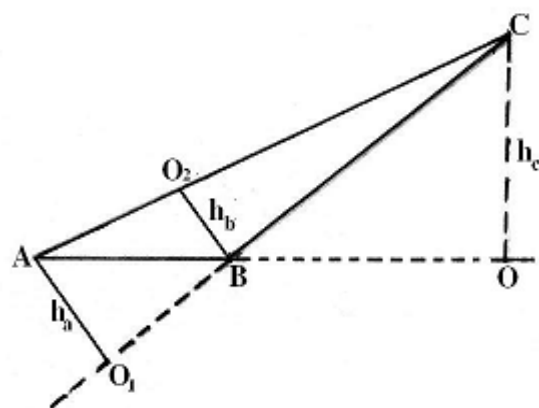


111-chizma

Uchburchakning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomoniga tushirilgan perpendikular uchburchakning balandligi deyiladi. (112a, 112b-chizmalar). 112a va 112b chizmalarda o'tkir va o'tmas burchakli uchburchak balandliklari ko'rsatilgan. Uchburchakning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomonini teng ikkiga bo'luvchi kesma mediana deyiladi. (113-chizma).

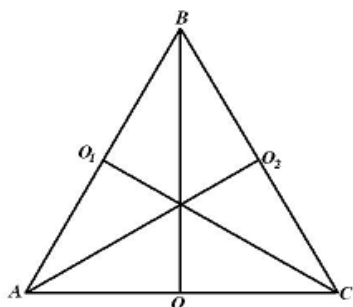


112a-chizma

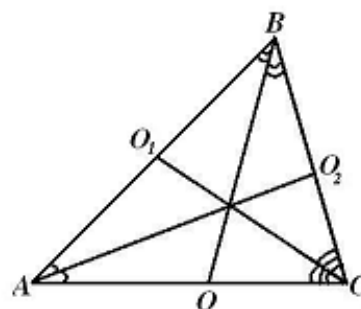


112b-

Uchburchakning bir uchidan chiqib shu burchakni teng ikkiga bo'luvchi kesma bissektrisa deyiladi. (114-chizma). Uchburchakning ixtiyoriy ikkita tomoni o'rtalarini tutashtiruvchi kesma uchburchakning o'rta chizig'i deyiladi. Uchburchakning o'rta chizig'i uning uchinchi tomoniga parallel bo'lib, parallel tomon uzunligi ning yarmiga teng bo'ladi. (111-chizma).



113 -



114 -

Tengyonli uchburchakda asos qarshisidagi uchdan asosga tushirilgan balandlik mediana va bissektrisa vazifasini bajaradi.

To'g'ri burchakli uchburchak o'tkir burchagi qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning sinusi, o'tkir burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning kosinusi, o'tkir burchak qarshisidagi katetning yopishgan katetga nisbati shu burchak tangensi, yopishgan katetning qarshi yotgan

katetga nisbati shu burchak katangensi deyiladi. (110-chizma).

$$\frac{AC}{DC} = \sin \alpha \quad \frac{AD}{DC} = \cos \alpha \quad \frac{AC}{AD} = \operatorname{tg} \alpha \quad \frac{AD}{AC} = \operatorname{ctg} \alpha$$

Uchburchakning tomonlari qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsional $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$. Bu munosabat sinuslar teoremasi deb yuritiladi. (113-chizma).

To'g'ri burchakli uchburchakda gipotenuzaning kvadrati katetlar kvadratlarning yig'indsiga teng. $a^2 = b^2 + c^2$ bu munosabat Pifagor teoremasi deb nomlangan. Yuqorida keltirilgan munosabatlar isbotini talabaga havola qilamiz.

Uchburchaklar tengligi va o'xshashligi alomatlari.

1 – alomati.

Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi ikkinchi uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar tengdirlar.

2-alomati.

Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagi ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar tengdirlar.

3-alomati.

Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar tengdirlar.

Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi bir uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda proporsional bo'lsa bunday uchburchaklar o'xshashdirlar. Agar bir uchburchakning ikki burchagi, ikkinchi bir uchburchakning ikki burchagiga mos ravishda teng bo'lsa bunday uchburchaklar o'xshashdirlar.

Agar bir uchburchakning ikki tomoni mos ravishda ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga proporsional bo'lib proporsional tomonlar orasidagi burchaklar teng bo'lsa bunday uchburchaklar o'xshashdirlar.

Uchburchakning medianalari uchburchak tomonlari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

Uchburchak balandligi uning tomonlari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

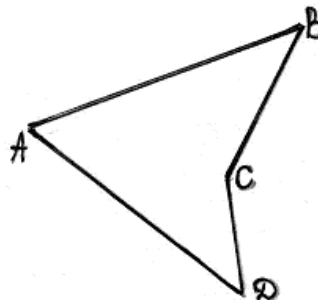
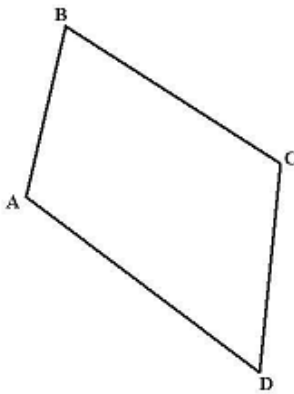
$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c}$$

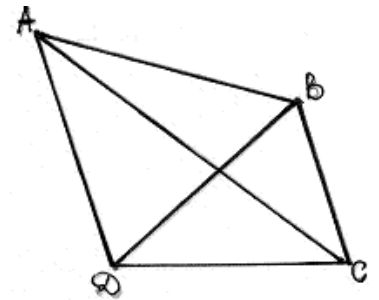
$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

6.3.2. TO'RTBURCHAKLAR

Tekislikda hech bir uchasi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan to'rtta nuqta va ularni har ikkalasini tutashtiruvchi, o'zaro kesishmaydigan to'rtta kesmadan tashkil topgan geometrik shakl to'rtburchak deyiladi. A, B, C, D to'rtburchak uchlari, AB, BC, CD, AD tomonlari, AC, BD diagonalari. (115-chizma)

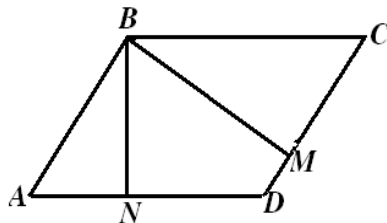


15-chizma



To'rtburchaklarning quyidagi turlari mavjud:

1. Parallelogramm tomonlari parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi to'rtburchak parallelogrammdir. (116-chizma)



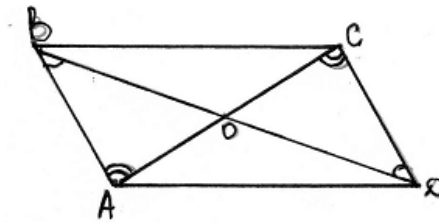
116-chizma

$$AB \parallel CD \quad |AB| = |CD| \quad |AD| = |BC|$$

Parallelogrammning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomonga tushirilgan perpendikular uning balandligidir. BN, BM balandliklar.

Teorema. Parallelogramm diagonalari bir nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi. (117-chizma)

Isbot: AC va BD diagonalari o'tkazamiz. Diagonallar bir nuqtada kesishadi.

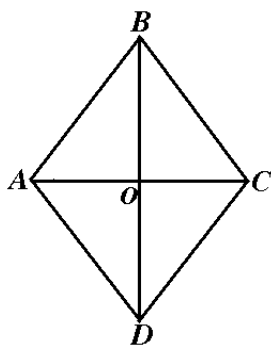


117-chizma

$$\left. \begin{aligned} (AC) \cap (BD) &= \{O\} \\ \angle BAO &= \angle DCO \\ \angle CDO &= \angle ABO \\ |AB| &= |CD| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ga ko'ra } \triangle BOA = \triangle COD \text{ bundan } OB=OD \quad OC=OA.$$

Xuddi shuningdek $\triangle BOC = \triangle AOD$ tengliligini ko'rsatish mumkin.

2) Romb



118-chizma

Hamma tomonlari teng bo'lgan parallelogramm rombdir.(118-chizma)

AC rombnining kichik diagonali, BD rombnining katta diagonali. $\triangle ABC = \triangle ADC$ $\triangle ABC$ teng yonli uchburchak bo'lganidan $OB \perp AC$, $AO = OC$. $\triangle BAD = \triangle BCD$, $\triangle BCD$ teng yonli $BD \perp AC$, $OB = OD$ bundan esa quyidagi xossani o'rinli ekanini ko'rish mumkin. Rombning diagonallari kesishish nuqtasida o'zaro perpendikular bo'ladi va teng ikkiga bo'linadi.

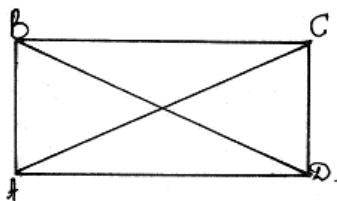
3) To'g'ri to'rtburchak

Hamma burchaklari to'g'ri burchak bo'lgan parallelogramm to'g'ri to'rt burchakdir.(119-chizma)

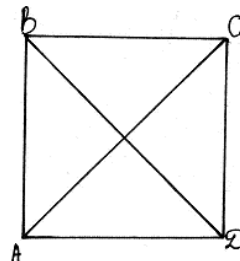
To'g'ri to'rt burchakning AC diagonali uni o'zaro teng ikkita ABC va ADC uchburchaklarga, BD diagonali esa BAD va BCD uchburchaklarga ajratadi.

Bu uchburchaklar ikkita tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra tengdirlar.

Bu esa bizga to'g'ri to'rt burchakning diagonallari o'zaro tengdir degan xulosani chiqarishga asos bo'ladi.



119-chizma



120-chizma

4) Kvadrat

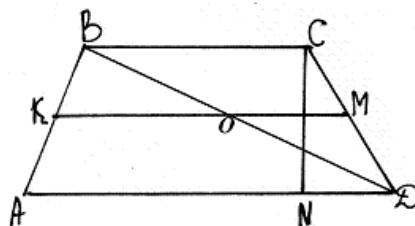
Hamma tomonlari teng bo'lgan to'g'ri to'rt burchak kvadratdir. Kvadratning diagonallari ham to'g'ri burchak ostida kesishishini xossa sifatida isbotlash mumkin. (120-chizma)

Kvadratni hamma burchaklari teng romb sifatida ham qarash mumkin.

Demak, kvadrat parallelogramm, romb, to'g'ri to'rt burchakka xos bo'lgan barcha xossalarga ega bo'ladi.

5) Trapetsiya

Ikki tomoni parallel qolgan ikki tomoni parallel bo'lmagan to'rtburchak trapetsiya deyiladi.(121-chizma)



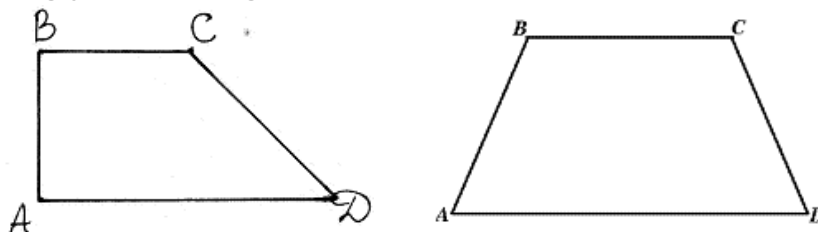
121-chizma

Trapetsiyaning parallel tomonlari uning asoslari (AD va BC), qolganlari yon tomonlaridir (AB va CD). Yon tomonlari o'rtalarini tutashtiruvchi kesma trapetsiyaning o'rta chizig'i deyiladi va asoslariga parallel bo'ladi. Trapetsiyaning bir asosi uchidan ikkinchi asosiga tushirilgan perpendikular trapetsiyaning balandligidir (CN). Trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslar yig'indisining yarmiga teng. Haqiqatan ham chizmadan:

$$KO = \frac{AO}{2} \quad OM = \frac{BC}{2} \quad KO + OM = KM$$

$$KM = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}$$

122-chizmada teng yonli va to'g'ri burchakli trapetsiyalar tasvirlangan.

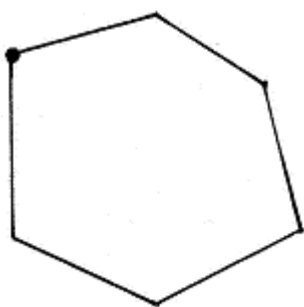


122-chizma

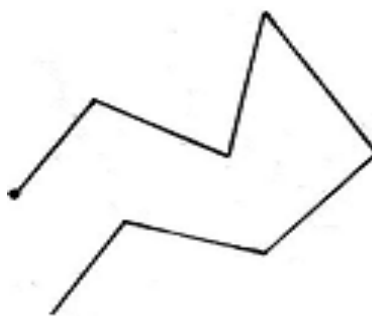
6.3.3. KO'PBURCHAK

Birining oxiri bilan ikkinchisining boshi ustma ust tushuvchi kesmalar birlashmasiga siniq chiziq deyiladi. Siniq chiziqni hosil qilayotgan kesmalar uning bo'g'inlari, oxiri va boshi bir nuqtada bo'lgan bo'g'inlar esa qo'shni bo'g'inlar sanaladi. Birinchi bo'g'inning boshi va so'ngi bo'g'inning oxiri ustma-ust tuchgan siniq chiziq yopiq siniq chiziqdir.

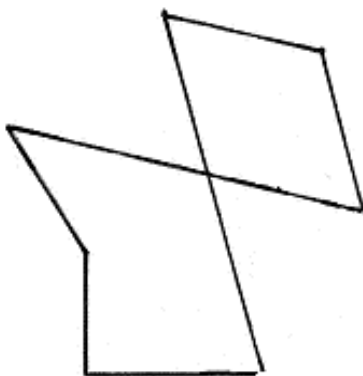
Har ikkila bo'g'ini faqatgina bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan siniq chiziq oddiy siniq chiziq sanaladi. 123-a, 123-b chizmalarda oddiy siniq chiziqlar, 123-a chizmada yopiq siniq chiziq tasvirlangan. 123-v va 123-g chizmalarda oddiy bo'lmagan yopiq siniq chiziqlar tasvirlangan.



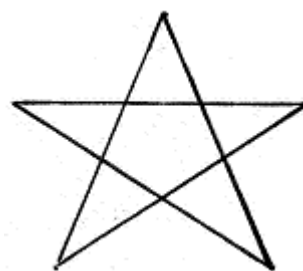
123a-chizma



123b-chizma



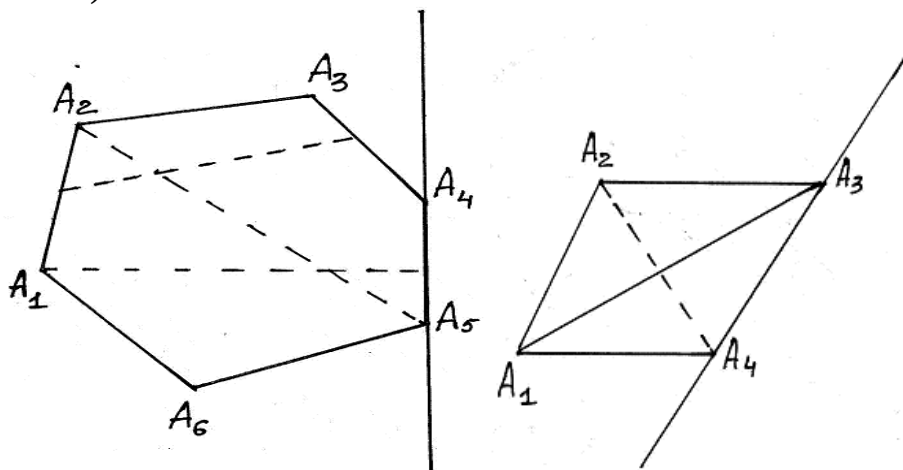
123v-chizma



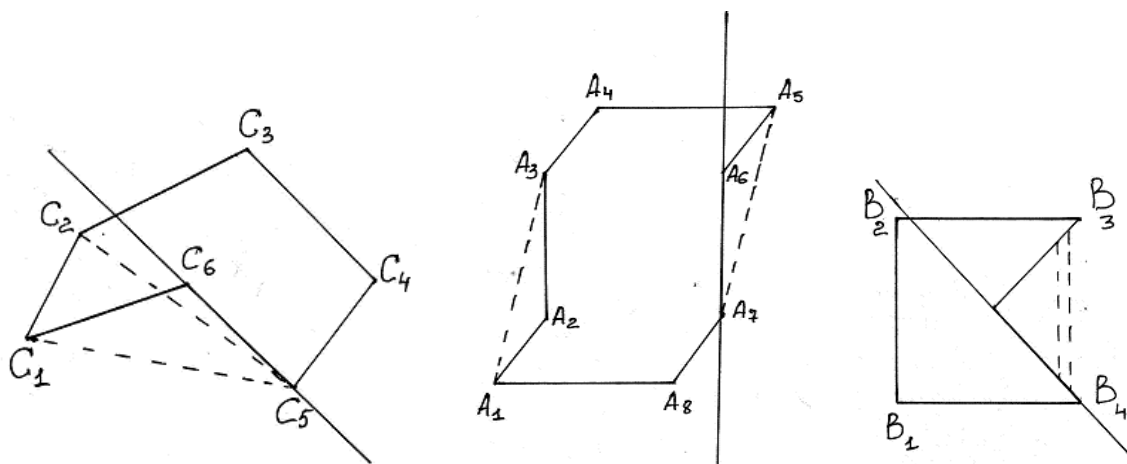
123g-chizma

Biz 123-a va 123-b chizmalarda tasvirlangan oddiy siniq chiziqlarning xossa va xususyatlarni o'rganamiz. Oddiy yopiq siniq chiziq o'zi yotgan tekislikni ikkita ichki va tashqi sohalarga ajratadi. Oddiy yopiq siniq chiziq o'zining ichki sohasi bilan birgalikda ko'pburchak deyiladi. Ko'pburchakni chegaralab turgan siniq chiziqlar uning chegarasidir. Ko'pburchakni hosil qilayotgan bo'g'inlar uning tomonlari, bo'g'inlarining kesishish nuqtalari esa uchlari hisoblanadi.

Ko'pburchakning tomonlari soni bilan uchlari soni teng, umumiy nuqtaga ega bo'lgan tomonlar qo'shni tomonlar deyiladi. Ko'pburchaklar botiq va qabariq ko'pburchaklarga bo'linadi. Agar ko'pburchakning har qanday ikkita nuqtasini tutashtiruvchi kesma to'laligicha ko'pburchakka tegishli bo'lsa yoki ko'pburchakning ixtiyoriy tomoni orqali o'tgan to'g'ri chiziqdan ko'pburchakning barcha nuqtalari bir tarafida yotsa ko'pburchak qabariq ko'pburchaklar deyiladi. (124a-chizma).



124a-chizma

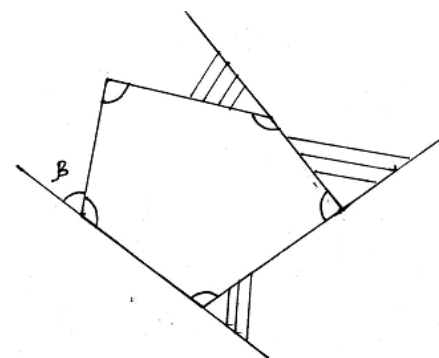


124b-chizma

124b chizmada botiq ko'pburchaklar tasvirlangan.

Ko'pburchakning qo'shni tomonlari bilan chegaralangan ichki sohasi uning ichki burchagi ichki burchagiga qo'shni bo'lgan burchak esa tashqi burchakdir. (125-chizma) $\angle \alpha$ - ichki burchak $\angle \beta$ - tashqi burchak

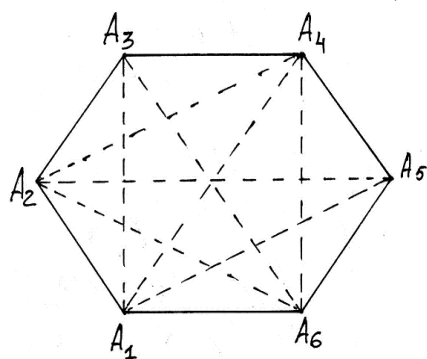
Ko'pburchak o'zining burchaklari soni bilan nomlanadi. Agar ko'pburchakda burchaklar soni 3 bo'lsa uchburchak, 4 bo'lsa to'rtburchak va hakozi. Ko'pburchak ichki burchaklar yig'indisi $180^\circ(n-2)$ ga teng. Ko'pburchak tomonlari uzunliklari yig'indisi perimetr deyiladi. Ko'pburchaklarning qo'shni bo'lmagan uchlarini tutashtiruvchi kesma diagonaldir. Qobariq n-burchakning diagonalari soni $\frac{1}{2}n(n-3)$ ga teng. Hamma tomonlari, barcha ichki



125 -

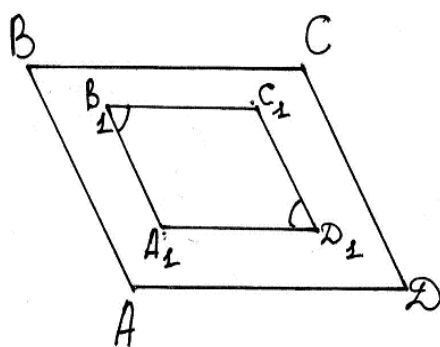
burchaklari teng bo'lgan ko'pburchak muntazam ko'pburchak deyiladi.

Muntazam ko'pburchak ichki burchagi $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ ga teng, n-ko'pburchak tomonlari soni (126-chizma).

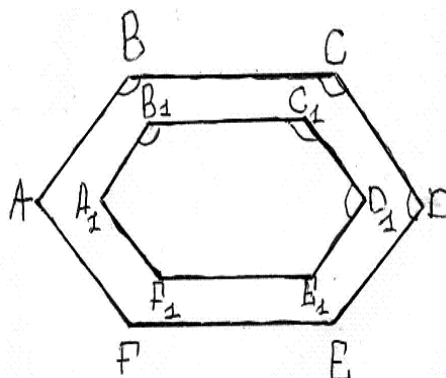


126 -

Ko'pburchaklar o'xshashligi va tengligi quyidagicha ta'riflanadi: agar bir ko'pburchakning tomonlari va burchaklari mos ravishda ikkinchi ko'pburchakning tomonlari va burchaklariga teng bo'lsa bu ko'pburchaklar teng deyiladi. Agar bir ko'pburchakning tomonlari ikkinchi bir ko'pburchakning tomonlariga mos ravishda proporsional bo'lsa va proporsional tomonlar orasidagi burchaklar teng bo'lsa bunday ko'pburchaklar o'xshashdirlar. (127a- 127b-chizmalar).



127a-chizma



127b-chizma

O'z o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Uchburchaklarni turlariga ta'rif berib, hossalarini ayting va ularni yasab ko'rsating.
2. Uchburchaklar tengligi va o'hshashligi alomatlarini tushuntiring
3. To'rtburchaklarga ta'rif bering, hossalarini aytib, yasab ko'rsating.
4. To'rtburchaklarni turlarini aytib o'hshash ko'pburchaklar to'g'risida so'zlab bering.

6.4. MATEMATIK MASALALAR VA ULARNI KLASSIFIKATSIYALASH

Matematika kursida yechiladigan barcha masalalarni masalada berilgan ob'ektlarning xarakter va xususiyatlariga ko'ra, masalaning nazariy xarakteriga, masalada qo'yilgan shartning xususiyatiga ko'ra shartli ravishda klassifikatsiyalash mumkin. O'z navbatida ob'ektlarning xarakter va xususiyatlariga ko'ra berilgan masalalarni amaliy va matematik masalaga bo'lish mumkin.

Agar masala shartidagi ob'ektlarning birortasi real predmetlardan tashkil topgan bo'lsa, bunday masalaga amaliy masala deyiladi. Quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

Masala. Uzunligi 15 m ga teng bo'lgan telefon simi, yer satxidan 8 m balandlikda joylashgan simyog'ochdan uy oldidagi balandligi 20 m ga teng simyog'ochgacha tortilib mahkamlangan. Telefon simini tarang tortilgan hisoblab, uy bilan simyog'och orasidagi masofani toping.

Masala ob'ekti real predmetlardan iborat. Bular telefon simi, simyog'och va uy. Shuning uchun bu amaliy masaladir. Bu amaliy masalani matematik masalaga aylantirish uchun yoki masalani matematik ob'ektlar yordamida yechish uchun masala shartida berilgan real ob'ektlarni matematik o'ektlar bilan almashtirish lozim bo'ladi. Bu masalada tarang tortilgan ip, simyog'ochni, shartli ravishda kesmaga almashtiramiz.

Masala: Agar uzunliklari 8 va 20 m bo'lgan kesmalar ularni asoslarini birlashtiruvchi kesmaga perpendicular va kesmalar uchlari orasidagi masofa 15m bo'lsa, perpendicularar asoslari orasidagi masofani toping. Matematika kursida real masalalar matematik masalalarga keltirilgan holda echiladi. Demak, amaliy

masalaning ob'ektlari real predmetlardan, matematik masalaning ob'ektlari esa matematik ob'ektlardan, iborat bo'ladi.

Yechilish tartibi ma'lum qonun qoidalar asosida amalga oshiriladigan masalalar standart masalalar deb ataladi.

Ildiz chiqarish, darajaga ko'tarish, kvadrat tenglama ildizlarini topish, arifmetik, geometrik progressiyaning hadini hisoblash, geometrik figuralar yuzlarini aniqlash, funksiyani differentsialini hisoblash, funksiya hosilasini, boshlang'ich funksiyani hisoblashga doir masalalar, oldindan ma'lum bo'lgan qoidalar, formulalar, teoremlar, ayniyatlar yordamida yechiladi.

Masala: Daryodan turistik bazagacha bo'lgan masofani turistlar 6 soatda o'tishni mo'ljalladi. Lekin 2 soat yurgach ular tezlikni 0,5 km/s kamaytirishgan. Natijada ular turistik bazaga 30 daqiqa kech qolib kirib kelishdi. Turistlarning birinchi galgi tezligini toping.

Masala matnli amaliy masaladir. Bunday masalalar uchun oldindan aniqlangan yechish tartibi mavjud emas. Masalani yechishda qoida-so'z, qoida-ta'rif, qoida—ayniyat, qoida-teorema, qoida-formula, ya'ni standart masalalar yechish qoidalarining birortasiga bo'ysunmaydi. Bunday masalalarni yechish uchun tipik yo'l mavjud emas. Bunday masala tipik bo'lmagan nostandart masalalar jumlasiga kiradi.

Masalani yechish uchun quyidagi ishlarni amalga oshiramiz.

Turistlarning dastlabki tezligi x km/s bo'lsin. U holda daryodan turistik bazaga bo'lgan masofa $6x$ km/s bo'ladi. Lekin ular 2 soatgina x tezlik bilan qolgan 4 soatida $(x-0,5)$ km tezlik bilan yurishgan, 4 soat $(x-0,5)$ km/s tezlik bilan yurib, turistik bazaga o'z vaqtida etib kela olmaganlar, ular turistik bazaga etib kelish uchun yana yarim soat yurishgan. Bundan esa quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$6x = 2x + 4,5(x - 0,5)$$

$$6x = 2x + 4,5x - 2,25$$

$$0,5x = 2,25$$

$$x = 2,25 : \frac{1}{2} = 2,25 \frac{2}{1} = 4,5$$

$$x = 4,5 (km / s)$$

Demak, turistlar dastlab soatiga 4,5 km/s soat tezlik bilan yo'l bosgan. Nostandart masalalarni yechish jarayonida bir qancha standart masalalarni yechish lozim bo'ladi. Yuqoridagi masalada tuzilgan $6x=2x+4,5(x-0,5)$ tenglamani yechishda bir noma'lumli chiziqli tenglamani yechish usulidan foydalanildi. Nostandart masalalarni, standart, tipik bo'lgan masalalarga keltirish orqali yechishda yuqorida aytganimizdek umumiy qonun qoidalar yo'q, lekin bu degan so'z nostandart masalalarni yechishda biror metod yoki usul yo'k degani emas.

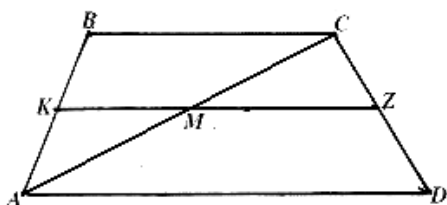
Nostandart masalalarni yechish jarayonida qoidali usullardan foydalanish imkoniyati bo'lmagani bilan ularni yechish zaruriyati yechishning qoidasiz usullarini izlab topish imkoniyatini yaratib beradi. Bunday «qoidasiz» usullar «evristik» usullar yoki «evristik» qoidalar deb yuritiladi.

«Evristik» so'zi yunon so'zi bo'lib «Haqiqatni topish san'ati» demakdir.

Bunday masalalarni yechish jarayonida yechishga tomon qilingan har bir qadam uchun qoidalarini yozish shart emas, lekin mazkur qoidalarini to'g'ri ishlata bilish malaka, ko'nikmalari shakllanishi uchun juda ko'p mashqlar bajarish lozim bo'ladi.

Har qanday masalani yechish uchun uni elementlarga, ya'ni «Berilganlar» va «Izlanganlar» ga ajratish lozim bo'ladi. Atroflicha tahlil qilish, o'zingizga ma'lum bo'lgan tushunchalar, xulosalar, formulalar, tasdiqlarni esga olish va ularni masala sharti bilan uyg'unlashtirish, ya'ni ularning umumiy holatlarini, bog'liqlik jihatlarini aniqlash, shular orqali deduktiv xulosalar chiqarish va masala yechimini izlash jarayonini vujudga keltiradi.

Masala: Asoslari 4 sm va 10 sm bo'lgan trapetsiyaning o'rta chizig'ini uning bir diagonali ikkita kesmaga ajratadi. Kesmalar uzunliklarini toping. Masalani yechish uchun masala matnini bir necha karra o'qiydiz va masala shartida berilgan chizmani chizamiz. Masalada berilganlar va topilishi lozim bo'lganlarni ajratamiz. Berilgan: ABCD – trapetsiya.(128-chizma)



128-chizma

$$\begin{aligned} AD \parallel BC; AK = KB; DZ = ZC; \\ AD = 10\text{sm}; BC = 4\text{sm} \\ \text{T.k. } KM = ?, \quad MZ = ? \end{aligned}$$

Yechish: Ma'lumki trapetsiyaning o'rta chizig'i uning asoslariga parallel.

$KZ \parallel AD; KZ \parallel BC$, Trapetsiyaning AC diagonali uni ikkita $\triangle ABC$ va $\triangle ACD$ larga ajratadi. Uchburchak o'rta chizig'ining xossasiga ko'ra, ABC

uchburchakni o'rta chizig'i $KM = \frac{1}{2} BC$ ga, ACD uchburchak o'rta chizig'i

$$MZ = \frac{1}{2} AD \text{ ga teng.}$$

Demak, $KM=2\text{sm}$, $MZ=5\text{sm}$.

6.4.1. Geometrik masalalar va ularning turlari.

Maslada qo'yilgan shartning xususiyati yoki mohiyatiga qarab geometrik masalarni hisoblashga oid, isbotlashga oid va yasashga oid geometrik masalalarga ajratish mumkin.

Yasashga oid geometrik masalalarga ayrim to'xtalamiz.

Geometrik masalalar ham har qanday masala kabi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, ularni amaliyotga tatbiq eta bilish, geometrik figuralarning xossa va xususiyatlaridan o'rinli va maqsadli foydalana olishga oid malaka va ko'nikmalarni hosil qilishni maqsad qilib qo'yadi. Malaka va ko'nikmalar amaliy mashqlar bajarish jarayonida shakllantiriladi.

Hisoblashga oid masalalar geometriyaning har bir bo'limida mavjud bo'lib ular asosan egallangan nazariy bilimlar, ularni o'rganish jarayonida chiqarilgan xulosalar, geometrik figuralar elementlari orasidagi bog'lanishlarni ifodalovchi

xossa va xususiylardan foydalangan holda burchak, uzunlik, yuza, hajm kabi kattaliklarni topishni maqsad qilib qo'yadi. Masalan, uchburchakning tomonlari va burchakiga, tomon uzunliklari, asosi va balandligiga ko'ra yuzasini hisoblash, asosining yuzi va balandligiga ko'ra hajmini topish kabi masalalarni hisoblashga oid masalalar tarkibiga kiritish mumkin.

Hisoblashga oid quyidagi masalani ko'raylik.

Masala

Uchburchakning asosi 26 ga, yon tomonlari 13 va 19 ga teng. Asosiga tushirilgan medianasini toping.

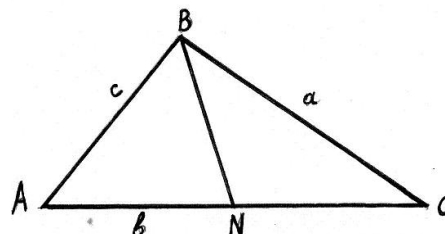
Ber.

$$AB=13 \text{ (bir)}$$

$$BC=19 \text{ (bir)}$$

$$AC=26 \text{ (bir)}$$

T.k: $BN=?$



129-

Uchburchak medianasini uning tomonlari orqali ifodalash formulasiga asosan

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 19^2 + 2 \cdot 13^2 - 26^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{384} = \frac{8\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{6} \text{ (bir)}$$

Isbotlashga oid geometrik masalalar tarkibiga geometrik figuralarni xossa va xususiylarini, geometrik figuralar elementlari orasidagi bog'lanishlarni nazariy jihatdan asoslashga bag'ishlangan masalalarni kiritish mumkun.

Isbotlashga oid geometrik masalalarni yechishda masalada berilgan va topilishi so'ralganlarni, ya'ni masalaning sharti va xulosasini aniq ajratish, mustahkam nazariy bilimga ega bo'lish, tafakkur amallaridan, tahlil va sintez metodlarini to'g'ri qo'llay bilish lozim bo'ladi.

Umuman matematika kursida isbotlashga oid masalalarni, teoremlarni isbotlash, ayniyatlarni isbotlash va tengsizlikni isbotlashga oid masalalarga ajratish mumkin.

O'rta maktab matematika kursida ma'lumki deyarlik barcha teoremlar isbotlaniladi.

Tushunchalarning asosiy bo'lmagan va ta'riflarga kiritilmagan xossalari odatda isbotlanadi.

O'rta maktab geometriya kursida bunday masalalar tarkibiga quyidagilarni kiritish mumkin bo'ladi:

Sinuslar teoremasini isbotlash.

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

Kosinuslar teoremasini isbotlash.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Uchburchak yuzini hisoblash formulalarini isbotlash.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ - Geron formulasi (bu erda } p\text{-yarim perimetr)}$$

$$S = \frac{3}{4} \sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)} \text{ -Medianalar orqali}$$

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} \text{ - tomonlari va balandliklari orqali}$$

Uchburchak medianasini hisoblash, formulalarini keltirib chiqarish

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \quad m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

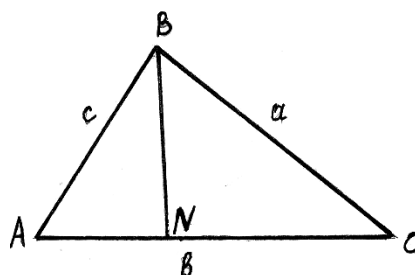
Uchburchak balandligini hisoblash formulalarini keltirib chiqarish.

$$\left. \begin{aligned} h_a &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \\ h_b &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b} \\ h_c &= \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Isbotlashga doir quyidagi masalani qarymiz.

Masala. Uchburchak balandligi uning tomonlari orqali (1) formulalar bilan ifodalanishini isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik bizga ABC uchburchak berilgan bo'lib, uning tomonlari uzunliklari $AB=c$ $BC=a$ $AC=b$ bo'lsin. B uchdan b tomonga tushirilgan balandligi $BN = h_b$ bo'lsin. Agar $AN=x$ deb belgilasak $NC=b-x$ bo'ladi.



130-chizma

chizmadan:

$$\triangle BNC \Rightarrow h_b^2 = a^2 - (b-x)^2 \quad (2) \quad \triangle BNA \Rightarrow h_b^2 = c^2 - x^2 \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow a^2 - b^2 + 2bx - c^2 = 0 \Rightarrow 2bx = c^2 - a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} \Rightarrow x^2 = \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2}$$

$$h_b^2 = c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2c^2 - (c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} = \frac{(2bc - c^2 + a^2 - b^2)(2bc + c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2}$$

$$\begin{aligned}
2bc - c^2 + a^2 - b^2 &= a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b - c)^2 (a - b + c)(a + b - c) \\
2bc + c^2 - a^2 + b^2 &= (b + c)^2 - a^2 = (b + c - a)(b + c + a) \\
a - b + c &= 2p - 2b = 2(p - b); \quad a + b + c = 2p; \quad b + c - a = 2(p - a); \\
a + c - b &= 2(p - b)
\end{aligned}$$

$$h_b^2 = \frac{2p \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c) \cdot 2(p - a)}{4b^2}$$

$$h_b = \frac{1}{2b} \sqrt{2p \cdot 2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)};$$

6.4.2. Yasashga oid geometrik masalalar haqida tushuncha, yasash aksiomalari.

Geometriyada har qanday figura nuqtaviy obraz yoki nuqtalar to'plami sifatida qaraladi. Barcha nuqtalari bir tekislikka tegishli bo'lgan figura tekis, barcha nuqtalari bir tekislikka tegishli bo'lmagan figuralar fazoviy figuralar deyiladi. Bir yoki bir nechta yasash qurollari vositasida ma'lum shartlarga javob beruvchi geometrik figura yasashni talab qiluvchi masalalar yasashga oid geometrik masalalar deb yuritiladi.

Geometriyaning figuralar yasash hamda yasashga oid masalalar yechish metodlarini o'rganuvchi bo'limi konstruktiv geometriya deb ataladi.

Biz asosan tekislikda bajariladigan yasashga oid geometrik masalalar haqida so'z yuritamiz. Tekislikda yasashga oid geometrik masalalar antik Misr, Bobil, Yunon matematikasida alohida o'rin egallagan. Tekislikda yasashga oid geometrik masalalarni bir qancha yasash asboblari vositasida yasash mumkin. Biz esa faqat chizg'ich va sirkul vositasida yasaladigan masalalarni ko'rib chiqamiz.

Shuning uchun geometriyaning bu qismi konstruktiv geometriya yoki sirkul va chizg'ich geometriyasi deb ham ataladi.

Tekislikda yasashga doir geometrik masalalarni yechish jarayonida yasashga oid quyidagi umumiy aksiomalardan foydalaniladi.

YaA₁. Har bir $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ figura yasalgandir.

YaA₂. Agar F_1 va F_2 figura yasalgan bo'lsa $F_1 \cup F_2$ yasalgandir.

YaA₃. Agar $F_1 \cap F_2$ bo'lib F_1 va F_2 figuralar yasalgan bo'lsa $F_1 \cap F_2$ figura yasalgandir.

YaA₄. Agar F_1 va F_2 figura yasalgan bo'lib $F_2 \subset F_1$, $F_1 \neq F_2$ bo'lsa, u holda $F_1 \setminus F_2$ yasalgandir.

YaA₅. Agar F_1 figura yasalgan bo'lsa unga tegishli nuqta yasalgandir.

YaA₆. Agar F figura yasalgan bo'lsa ($F \neq E$) F ga tegishli bo'lmagan nuqtani yasash mumkin. (E Evklid fazasi nazarda tutiladi).

YaA₇. Agar A va B ($A \neq B$) nuqtalar yasalgan bo'lsa $[AB]$ nurni yasash mumkin.

YaA₃ va YaA₇ ga asosan $[AB]$ kesmani yasash mumkin.
 $[AB) \cap [BA) = [AB]$

YaA₈. Agar 0 nuqta va $[AB]$ kesma yasalgan bo'lsa markazi 0 nuqtada va radiusi AB kesmaga teng aylanani yasash mumkin.

$\{YaA_1, YaA_2, YaA_3, YaA_4, YaA_5, YaA_6, YaA_7, YaA_8\}$ yasash aksiomalarini sirkul va chizg'ich yordamida yasash aksiomalari deb ataladi.

Mazkur yasash aksiomalari bizga sirkul va chizg'ich vositasida quyidagi oddiy yasashlarni bajarish imkoniyatini beradi.

OyA₁. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo'lsa $[AB]$ nurni yasash mumkin.

OyA₂. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo'lsa $[AB]$ kesmani yasash mumkin.

OyA₃. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo'lsa (AB) to'g'ri chiziqni yasash mumkin.

OyA₄. Agar 0 nuqta va aylana radiusiga teng $[AB] = r$ yasalgan bo'lsa $S(0, AB)$ aylanani yasash mumkin.

OyA₅. O'zaro parallel bo'lmagan ikkita to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini yasash mumkin.

OyA₆. yasalgan $S(0, r)$ aylana va (AB) to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish mumkin (agar ular kesishsa).

OyA₇. yasalgan ikkita $S(0, r)$ va $S(0_1, r_1)$ aylanalarning kesishish nuqtalarini topish mumkin (agar ular kesishsa).

OyA₈. yasalgan F figuraga tegishli A nuqtani $A \in F$ yasash mumkin.

OyA₉. yasalgan F figuraga tegishli bo'lmagan A nuqtani yasash mumkin $A \notin F$ (Bizga bu erda F figuraning figura yasalgan tekislikka teng bo'lmashligi talab qilinadi).

Tekislikda birorta F figurani yasash uchun chekli sondagi oddiy yasashlarni chizg'ich va sirkul yordamida bajarish lozim bo'ladi. Agar lozim bo'lgan figurani yasash uchun qo'llaniladigan oddiy yasashlar soni ma'lum darajada chekli bo'lsa bunday yasashlarni so'zsiz bajarish mumkin, agar talab qilingan oddiy yasashlar ko'p sonni tashkil qilsa bu yasashlarni bajarish ko'p vaqtni olishi bilan bir qatorda zerikarli ham bo'ladi.

Shuning uchun talab qilingan figurani yasashni oddiy yasashlarga emas balki, bir qancha oddiy yasashlar yordamida bajariladigan asosiy yasashlar deb nomlanadigan yasashlarga keltirish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Tekislikda yasashga oid masalalarni echishda quyidagi asosiy yasashlardan foydalaniladi.

AyA₁. Berilgan uch tomoniga ko'ra uchburchak yasash.

AyA₂. Berilgan kesmani teng ikkiga bo'lish.

AyA₃. Berilgan burchakka kongruent bo'lgan burchak yasash.

AyA₄. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish.

AyA₅. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikular o'tkazish.

AyA₆. Berilgan bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra uchburchak yasash.

AyA₇. Berilgan ikki tomoni va ular orasidagi bir burchakka ko'ra uchburchak yasash.

AyA₈. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel chiziq o'tkazish.

AyA₉. Berilgan gipotenuzasi va o'tkir burchagiga ko'ra to'g'ri burchakli uchburchak yasash.

AyA₁₀. Berilgan bir kateti va gipotenuzasiga ko'ra to'g'ri burchakli uchburchak yasash.

AyA₁₁. Aylana tashqarisida olingan nuqtadan aylanaga urinma o'tkazish.

Yuqorida qayd qilinganlarga asoslangan holda quyidagi masalalarni yasaymiz: 1) «Berilgan kesmani teng ikkiga bo'lish» masalasi ya'ni AyA₂ ni yasaylik. Faraz qilaylik bizga $[AB]$ kesma berilsin. $[AB]$ kesmani o'rtasini topish kerak. Buning uchun OyA₄ dan foydalanamiz. Kesmani A uchini markaz qilib taxminan kesma o'rtasidan katta bo'lgan kesmani radius qilib $S(A, r)$ aylanani, so'ngra esa $S(B, r)$ aylanani chizamiz. Aylanalar kesishish nuqtalari orqali OyA₂ ga asosan kesma o'tkazamiz. O'tkazilgan kesma bilan berilgan $[AB]$ kesmani kesishish nuqtasi, $[AB]$ kesmani o'rtasi bo'ladi.

1. $[AB]$ yasaladi.

2. $S(A, r), r > \frac{[AB]}{2}$

3. $S_1(B, r), r > \frac{[AB]}{2}$

4. $S \cap S_1 = \{x_1, x_2\}$

5. $[x_1, x_2]$

6. $[x_1x_2] \cap [AB] = \{0\}$

7. $AO=OB$

O nuqta AB kesmani teng ikkiga bo'ladi

2) Berilgan burchakka kongruent bo'lgan burchak yasash masalasi.

1. $\angle BAC$ berilgan bo'lsin

2. $[A_1C_1]$ yasaymiz

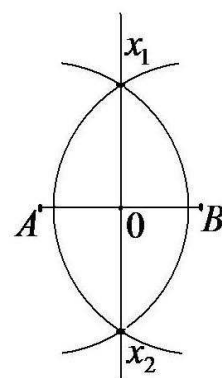
3. $S(A, r)$, ni yasaymiz, bunda $r = Ax_1$,

4. $S(A, r) \cap \angle BAC = \{x_1, y_1\}$

5. $S_1(A_1, r)$ ni yasaymiz bunda $r = Ax_1$

6. $S_1 \cap [A_1C_1] = \{x_2\}$ bunda $Ax_2 = Ax_1$

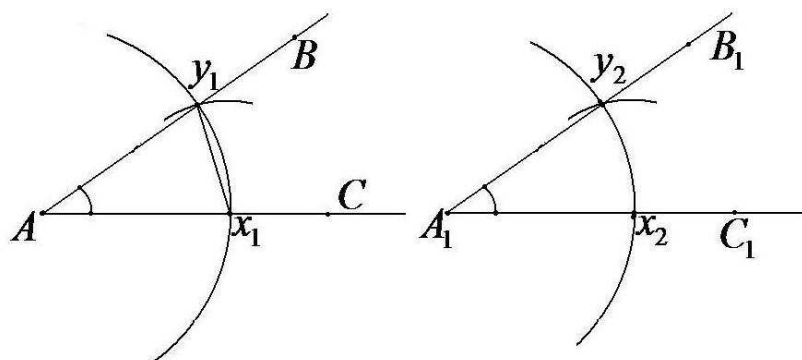
7. $S_2(x_1, r_1)$ ni yasaymiz bunda $r_1 = [x_1y_1]$



131 -

chizma

8. $S_3(x_2, r_1)$ ni yasaymiz
9. $S_3 \cap S_1 = \{y_2\}$
10. $\angle y_2 A_1 x_2 = \angle BAC$

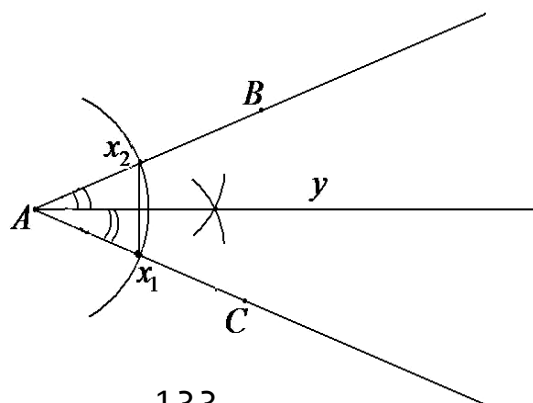


132 - chizma

- 3) Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish masalasi.
1. $\angle BAC$ berilgan bo'lsin. Oldingi masalaga asoslanib:
2. $\angle BAC$ yasalani
3. $S(A, r)$ aylana yasalani, bunda $r < [AC]$
4. $S(A; r) \cap \angle BAC = \{x_1 x_2\}$
5. $S_1(x_1, r_1)$ va $S_2(x_2, r_1)$ aylanalar

o'tkaziladi, bu yerda $r_1 > \frac{[x_1 x_2]}{2}$

6. $S_1 \cap S_2 = \{y\}$
7. $[Ay]$
8. $\angle YAC = \angle YAB$



133 -
chizma

6.4.3. Yasashga oid geometrik masalalarni yechish bosqichlari.

Tekisliklarda echishga oid masalalarni sirqul va chizg'ich yordamida yechishda geometrik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko'ruvchi to'g'rilash, geometrik o'rinlar, simmetriya, parallel ko'chirish, o'xshashlik yoki gomotetiya, inversiya hamda algebraik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko'ruvchi algebraik metodlardan foydalaniladi.

Yasashga oid geometrik masalalarni yechish jarayoni qaysi metod bilan amalga oshirilishidan qat'iy nazar, u bir qancha bosqichlarda bajariladi va ular tekislikda yasashga oid masalalarni echish bosqichlari deb yuritiladi. Bular tahlil, yasash, isbot va tekshirish bosqichlari bo'lib, har bir bosqich masala yechish jarayonida ma'lum bir maqsadni amalga oshirishni nazarda tutadi.

Tahlil bosqichi: Masala yechishning eng muhim, ijodiy bosqichi bo'lib, bunda yasalishi lozim bo'lgan F figura, masala talablariga mumkin qadar to'la

javob beradigan darajada taxminan chizib olinadi. Tahlil chizmasida masala shartida berilganlar bor yoqligi aniqlanadi, agar ular chizmada aks etmagan bo'lsa qo'shimcha chizib olinadi. Natijada asosiy ya'ni yasalishi lozim bo'lgan figura bilan hamjihatlikda bo'lgan bir qancha yordamchi figuralar hosil bo'ladi. Yordamchi figuralarda masala shartida berilganlar bilan bir qatorda, izlangan ya'ni yasalishi lozim bo'lgan asosiy figuraning nuqtalari ham joylashadi. Shu tariqa berilganlar va izlanganlar orasidagi bog'lanishlarni o'rnatish natijasida asosiy figurani yasash imkoniyatlari axtariladi va aniqlanadi. yasash mumkin bo'lgan yordamchi figura orqali izlangan figurani yasashga o'tiladi.

Yasash bosqichi: Tahlil bosqichida aniqlanganlarni amaliy jihatdan bajarilishini nazarda tutadi.

Bunda yasalishi mumkin bo'lgan yordamchi figuralar yasash vositalari yordamida yasaladi va ular orqali yasalishi lozim bo'lgan asosiy figuraning nuqtalari va elementlari yasab olinadi.

Isbot bosqichi: Masala yechimining sinash bosqichi bo'lib tahlil bosqichida taxminan chizib olingan asosiy figura bilan yasash bosqichida yasalgan figuraning masala shartlariga javob berishi isbotlanadi.

Tekshirish bosqichi: Masala yechishning yakunlash bosqichi hisoblanib, unda masala shartida berilganlarga asosan figura yasash mumkinmi, agar mumkin bo'lmasa berilganlarni qanday tanlash lozim qanday hollarda echim mavjud, berilganlarga asoslanib nechta figura yasash mumkin, masala nechta yechimga ega ekanligi aniqlanadi.

Masala yechish bosqichlarini yanada chuqurroq o'rgansak quyidagicha hulosaga kelimiz.

1-bosqich.

Yechilishi lozim bo'lgan masala har tomonlama o'rganiladi, masalada berilganlar, izlanganlar, ya'ni masalani sharti va talabi aniqlanadi.

Ushbu bosqich tahlil bosqichi deb yuritiladi.

2-bosqich.

Analiz bosqichida aniqlangan masala sharti va talabi, berilganlar, topilishi lozim bo'lganlarni yozish, sxematik yozuvini berish bu masala yechishning ikkinchi bosqichi bo'ladi. Bu bosqichni qayd qilish bosqichi deb atash mumkin.

3-bosqich.

Tahlil va qayd qilish bosqichlari masalani yechish uchun usullar tanlash maqsadida amalga oshiriladi. Masalani tahlil va qayd qilish bosqichlarida aniqlanganlarga asoslangan holda masalani yechish usullarini izlash bu uchinchi bosqichni tashkil etadi.

4-bosqich.

Masalani yechish usullari tanlangach, masalani yechish amalga oshiriladi. Masala yechimini axtarish, yechimni topish bu to'rtinchi bosqich hisoblanadi.

5-bosqich.

Masalani yechimi masala shartini qanoatlantiradimi – yo'qmi aniqlanadi. Bu bosqich masala yechimini tekshirish yoki tekshirish bosqichi bo'ladi.

6-bosqich.

Ko'p hollarda masala yechimi topilib, tekshirilib bo'lgach ham masala ustida

izlanish olib boriladi. Bu izlanishning maqsadi masala nechta yechimga ega bo'ladimi, qanday shartlarda masala yechimga ega bo'lmasligiga qaratiladi. Bu bosqichni masala ustida izlanish olib borish bosqichi deb atash mumkin.

7-bosqich.

Yuqoridagi bosqichlar bajarilgach masala yechimini isbotlash bosqichi.

8-bosqich.

Masalani yechilish jarayoni tahlil qilinadi, masalani yechishda ratsional usullar ajratiladi, yechish usullari taqqoslanadi, yechishning qulay va oson usullari qayd qilinadi.

O'z o'zini nazorat qilish uchun savollar.

1. Matematik masalalarni tushuntirib, klasifikatsiyalab bering
2. Sirkul va chizg'ich aksiomalarini aytib bering
3. Yasash bosqichlarini masala tanlab yasashlarni bajarib tushuntiring

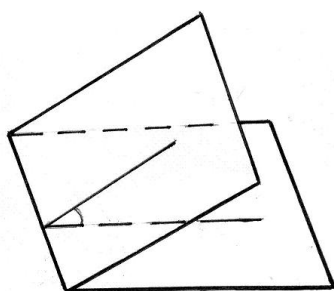
6.5. KO'PYOQLAR

Dastlab ko'pyoqli burchaklar bilan tanishamiz.

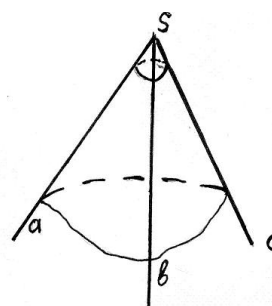
6.5.1 Ko'p yoqli burchaklar.

Ikkita yarim tekislikdan va ularni chegaralab turgan umumiy to'g'ri chiziqdan tashkil topgan figura ikki yoqli burchak deyiladi. (134-chizma). yarim tekisliklar ikki yoqli burchakning yoqlari, ularni chegaralovchi to'g'ri chiziq esa ikki yoqli burchakning qirrasiga deyiladi. Ikki yoqli burchakning qirrasiga perpendikular tekislik o'tkazilsa, u yoqlarni ikkita yarim to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tadi. Bu yarim to'g'ri chiziqlar tashkil qilgan burchak ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi deyiladi.

Uchta yassi burchakdan tashkil topgan figura uch yoqli burchak deyiladi. (135-chizma) (ab) , (bc) , va (ac) lar yassi burchaklar, (abc) esa uch yoqli burchak.



134-chizma



135-chizma

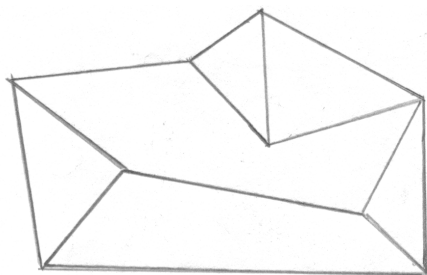
yassi burchaklar uch yoqli burchakning yoqlari, ularning tomonlari esa uch yoqli burchakning qirralari, umumiy uch esa uch yoqli burchakning uchi deyiladi.

Uch yoqli burchak, uchta ikki yoqli burchakdan tashkil topgan.

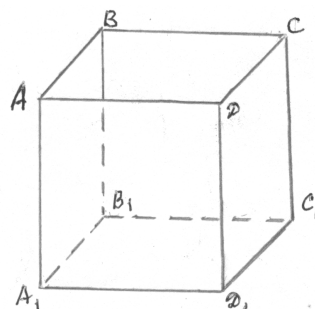
Shunga o'xshash ko'p yoqli burchak ham yassi burchaklardan tuzilganligini qayd qilish mumkin.

6.5.2. Ko'pyoqlilar.

Sirti chekli miqdordagi yassi tekisliklardan iborat jism ko'pyoq deyiladi (136-chizma). Agar ko'pyoqning o'zi uning sirtidagi har bir ko'pburchak tekisligining bir tomonida yotsa, bunday ko'pyoq qavariq ko'pyoq deyiladi. Qavariq ko'pyoqning sirti bilan bunday tekislikning umumiy qismi yoq deyiladi. Qavariq ko'pyoqning yoqlari qavariq ko'pburchaklardan iborat. Ko'pyoq yoqlarining tomonlari uning qirralari, uchlari esa ko'pyoqning uchlari deyiladi.



136-chizma



137-chizma

Bu ta'rifni biz kub misolida tushuntiramiz (137-chizma). Kub qavariq ko'pyoqdir. Uning sirti oltita kvadratdan tashkil topgan: ABCD, B B₁ C₁ C, ... Bu kvadratlar kubning yoqlaridir. Bu kvadratlarning AB, BC, B B₁ ... tomonlari kubning qirralari bo'ladi. Kvadratlarning A, B, C, D, A₁, ... uchlari kubning uchlari bo'ladi.

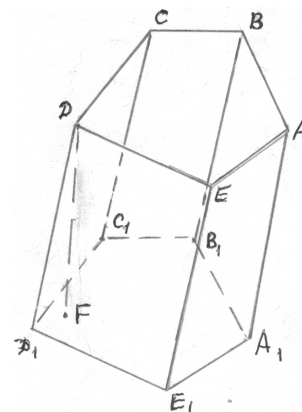
Ko'pyoqli turlaridan prizma va piramidani ko'rib o'tamiz.

Prizma.

Ikki yog'ining mos tomonlari bir-biriga parallel bo'lgan teng ko'pburchakdan iborat bo'lib, boshqa yoqlari esa parallelogrammdan iborat bo'lgan ko'p yoqli prizma deyiladi (138-chizma).

Prizma ta'rifga asosan:

- 1). Prizmaning asoslari ikki teng ko'pburchakdan iborat bo'lib, ularning mos tomonlari paralleldir;
- 2). Prizmaning yon yoqlari parallelogrammdan iboratdir. Yon qirralari asos tekisligiga og'ma bo'lgan prizma og'ma prizma deyiladi. Yon qirralari asosga perpendikular bo'lgan prizma to'g'ri prizma deb ataladi.



138-

Asoslari muntazam n-burchaklar bo'lgan to'g'ri prizma muntazam deyiladi. Parallel tekisliklardagi uchlarning biridan ikkinchi tekislikka tushirilgan perpendikular prizmaning balandligi deyiladi.

ABCDE va A₁B₁C₁D₁E₁-asoslar, AA₁, BB₁, CC₁, DD₁, EE₁- yon qirralar, D F- balandlik.

Prizmadagi asosiy munosabatlar:

- 1) Prizma hajmi $V = S_{as} \cdot H$, S_{as} -asos yuzasi, H - prizma balandligi, to'g'ri prizmaning hajmi $V = S_{yon} \ell$, ℓ -AA₁ yon qirra uzunligi.
- 2) Prizma yon sirti $S_{yon} = P_1 \cdot \ell$, P_1 – perpendikular kesim perimetri, ℓ -yon qirradi.

To'g'ri prizmaning yon sirti, $S_{yon} = P_{as} \cdot \ell$, P_{as} - asos perimetri.

3) Prizmaning to'la sirti $S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{as}$, S_{as} - asos yuzasi.

Parallelepiped.

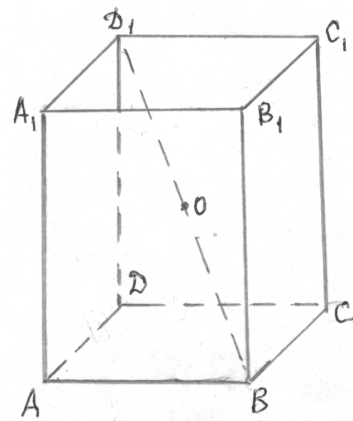
Asosi parallelogramm bo'lgan prizma parallelepiped deyiladi (139-chizma). yOn qirralari asosga perpendikular bo'lgan parallelepiped to'g'ri deyiladi..

Asosi to'g'ri to'rtburchak bo'lgan to'g'ri parallelepiped to'g'ri burchakli deyiladi.

Kub-barcha qirralari teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped.

Parallelepipedning xossalari:

- 1) Parallelepiped diagonalining o'rtasi uning simmetriya markazidir.
- 2) Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari juft-juft kongurent va paralleldir.
- 3) Parallelepipedning barcha dioganallari bir nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo'linadi.



139-chizma

To'g'ri burchakli parallelepipedning sirt yuzi yon sirtining yuzi bilan ikki asosi yuzlarining yig'indisiga teng.

Yon sirtining yuzi esa asos perimetri bilan balandligining ko'paytmasiga tengdir.

To'g'ri burchakli parallelepipedning barcha dioganallari teng uzunlikda bo'ladi.

Piramida.

Agar ko'p yoqli burchak uchidan o'tmaydigan biror tekislik bilan kesilsa, kesuvchi tekislik va ko'p yoqli burchak yoqlari bilan cheklangan jism piramida deyiladi (140-chizma).

Kesuvchi tekislikning ko'p yoqli burchak yoklari orasidagi bo'lagi piramidaning asosi deyiladi.

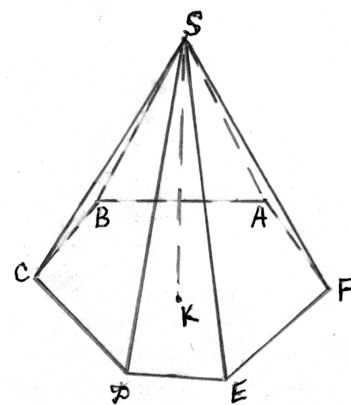
ABCDEF-asos, SAB, SBC,- yon yoqlari, S- umumiy uch.

SA, SB, ... -yon qirralar; SK -balandlik (asosga tushirilgan perpendikular).

Piramidaning hajmi $V = \frac{1}{3} S_{as} \cdot H$, S_{as} -asos yuzasi, H-

balandlik. Muntazam piramida yon sirti $S_{yon} = \frac{1}{2} p h$, p-

asos perimetri, h-apofema.

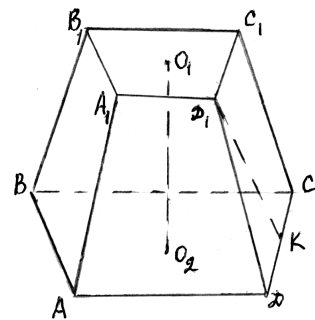


140-chizma

Asosga parallel tekislik piramidani ikki qismga ajratadi. U holda qismlardan biri yana piramida bo'ladi, ikkinchi qism esa kesik piramida deyiladi (141-chizma).

Kesik piramidada ABCD va A₁ B₁ C₁ D₁- asoslar, AA₁, BB₁, CC₁, DD₁ - yon qirralar, O₁ O₂ -balandlik, D₁ K-apofema.

Kesik piramida hajmi $V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$ H-balandlik, S_1 va S_2 asoslarning yuzalari. Muntazam kesik piramida yon sirti $S_{yon} = \frac{1}{2}h(p_1 + p_2)$, h-apofema, p_1 va p_2 asoslarning perimetrlari.



141-chizma

6.5.3. Muntazam ko'pyoqlilar.

Hamma yoqlari teng muntazam ko'pburchaklardan tashkil topgan ko'pyoqlilarni muntazam ko'pyoqlilar deyiladi.

Ko'pyoqlilarning uchlari-U, yoqlari-Yo, qirralari-Q orasidagi bog'lanishni quyidagi Eyler teoremasi ifodalaydi.

Teorema: Muntazam ko'pyoqli uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$U + Yo - Q = 2$$

Bunga muntazam ko'pyoqli uchun Eyler xarakteristikasi deyiladi. (Eyler xarakteristikasi 2 ga teng).

Biz bu teorema isbotini xususiyl holda muntazam ko'pyoqlilarda ko'ramiz.

Muntazam ko'pyoqlilarning 5 ta turi mavjud. Bular: tetraedr, kub, oktaedr, ikosaedr, dodekaedr.

Muntazam tetraedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat, har bir uchida uchtdan qirra birlashadi. Tetraedr hamma qirralari teng bo'lgan uchburchakli piramidadan iborat. U 4 ta yoq, 6 ta qirra, 4 ta uchga ega (142-chizma).

Kubning hamma yoqlari kvadratlardan iborat, har bir uchida uchta qirra birlashadi. Kub qirralari teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped.

U 6 ta yoq, 12 ta qirra, 8 ta uchga ega (143-chizma).

Oktaedrning yoqlari muntazam uchburchaklar bo'lib, tetraedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida to'rtta qirra birlashadi.

U 8 ta yoq, 12 ta qirra, 6 ta uchga ega (144-chizma).

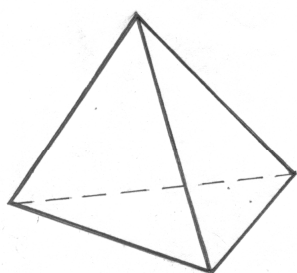
Dodekaedrning yoqlari muntazam beshburchaklardan iborat. Uning har bir uchida uchtdan qirra birlashadi.

U 12 ta yoq, 30 ta qirra, 20 ta uchga ega (145-chizma).

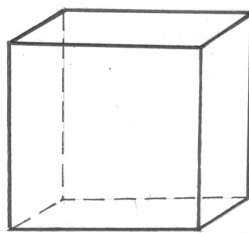
Ikosaedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo'lib, tetraedr va oktaedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida beshtadan qirra birlashadi.

U 20 ta yoq, 30 ta qirra 12 ta uchga ega (146-chizma).

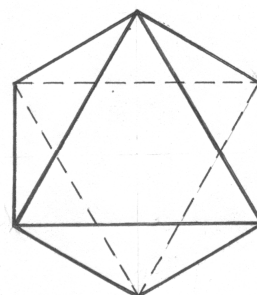
Eyler teoremasi yuqoridagi barcha muntazam ko'pyoqlilar uchun o'rinli.



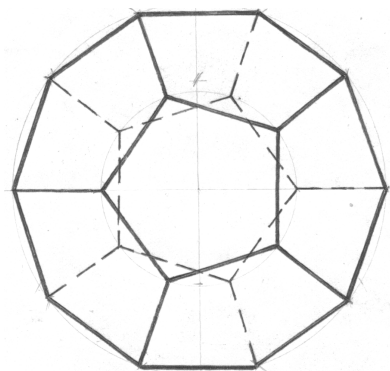
142-chizma.



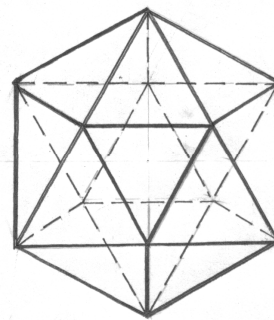
143-chizma.



144-chizma.



145-chizma.



146-chizma.

6.5.4. Muntazam ko'pyoqlilar tarixi to'g'risida qisqacha ma'lumot

Evklidning «Negizlar» asarining 13 kitobida muntazam ko'pyoqlilar haqida so'z yuritilgan. Ammo muntazam ko'pyoqlilar haqidagi ma'lumotlar antik yunon matematiklarining ishlarida ham o'z aksini topgan. Yunon matematigi Prokl (412-485) beshta muntazam ko'pyoqlilarni Pifagor kashf qilganligini qayd qilgan. Ammo keyinchalik Pifagor, muntazam ko'pyoqlilardan faqat geksaedr tetraedr va dodekaedrnigina bilganligi, oktaedr va ikosaedr esa Tetet Afinskiy (e.o.IV) tomonidan kashf qilinganligi ma'lum bo'lgan.

Yunon faylasufi Platon esa tabiatning to'rtta unsuri yer, havo, suv va olovni muntazam ko'pyoqlilarga qiyos qilgan va yer shaklini dodekaedrga o'xshatgan. Keyinchalik esa Arximed tomonidan 13 ta yarimmuntazam ko'pyoqlilar kashf etilgan.

Sevimli mashg'uloti muntazam ko'pyoqlilar bo'lgan Iogann Kepler Arximed sirtlarini muntazam o'rgangan holda ikkita botiq, muntazam, yulduzsimon ko'pyoqli mavjudligini kashf qiladi. Keyinchalik fransuz matematigi L.Puanso yana ikkita yarim botiq yulduzsimon muntazam ko'pyoqli mavjudligini kashf qiladi va 1812 yilda Koshi yulduzsimon muntazam ko'pyoqlilarning faqatgina to'rtta turi mavjudligini isbot qilgan.

Uyg'onish davri vakillari Leonardo da Vinchi, Luka Pocholilar ham muntazam va yarimmuntazam ko'pyoqlilar ustida ish olib borganlar va o'z tadqiqotlarini «Ilohiy nisbat haqida (1509)» degan asarda bayon etganlar.

Al Beruniy «Kitob at-tafkim» (1029-1034 yy) asarining geometriya bo'limida muntazam ko'pyoqlilarni o'rganib ularni sfera ichiga joylashtirish mumkinligini aytib o'tgan va tetraedrni «noriy» ya'ni olovniki, oktaedrni «havoiiy» ya'ni havoniki, kubni «arziy» ya'ni yerniki, ikosaedrni «moiiy» ya'ni suvniki, dodekvedrni «falakiy» ya'ni osmonniki deb atagan.

Platon olam tuzilishi bilan muntazam ko'pyoqlilar orasidagi bog'lanishlarni izlagan. Platon olamni tashkil etgan «to'rtta element» «Olov», «er», «havo», «suv» zarralari tetraedr, kub, oktaedr va dodekaedr shaklida bo'lishini ta'kidlagan.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar.

1. Ko'p yoqli burchaklarga ta'rif bering.
2. Ko'pyoqli deb qanday jismga aytiladi? Qavariq ko'pyoqliga ta'rif bering.

3. Prizma deb qanday ko'pyoqliga aytiladi?
4. Piramida deb qanday ko'pyoqliga aytiladi?
5. Muntazam ko'pyoqliga ta'rif bering va uning turlarini aytib, tushuntiring?

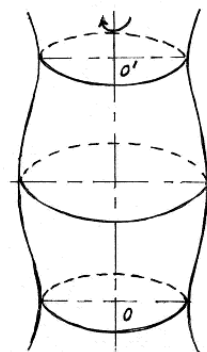
6.6. Aylanma jism va aylanma sirt haqida tushuncha.

Biror to'g'ri chiziqni yoki egri chiziqni bir to'g'ri chiziq atrofida aylantirishdan aylanma sirt hosil bo'ladi.

Agar aylanma sirtni o'q deb ataluvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan parallel ikkita tekislik bilan kessak aylanma sirt va doira bilan chegaralangan aylanma jism hosil bo'ladi (147- chizma).

OO_1 - aylanma jismning o'qi, jismning egri sirti aylanma sirt deyiladi.

Aylanma sirt parallel tekisliklar bilan kesilsa, kesim doiralardan iborat bo'ladi.



147-chizma

Silindr.

O'q atrofida unga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq aylantirilsa, silindrik sirt hosil bo'ladi. U o'qqa perpendikular ikkita parallel tekislik bilan kesilsa ular orasida silindrik jism hosil bo'ladi (148-chizma).

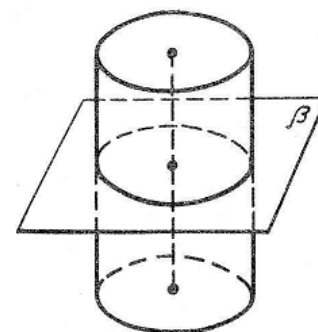
Doirlar silindrning asoslari deyiladi, doira aylanalari mos nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalar silindrning yasovchilari deyiladi. Silindrning sirti asoslaridan va yon sirtidan tashkil topadi. yon sirt yasovchilardan tuzilgan.

Silindrning yasovchilari asos tekisliklariga perpendikulyar bo'lsa, bunday silindr to'g'ri silindr deyiladi. To'g'ri silindrni to'g'ri to'rtburchakni aylantirish o'qi vazifasini bajargan biror tomoni atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin.

Silindr asosining radiusi silindrning radiusi deyiladi. Silindr asosining tekisliklari orasidagi masofa silindrning balandligi deyiladi. Asoslarining markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq silindrning o'qi deyiladi. bu o'q yasovchilarga parallel bo'ladi. Silindrning o'qi orqali o'tuvchi kesim o'q kesim deyiladi. Silindrning yasovchisi orqali o'tib, bu yasovchi orqali o'tadigan o'q kesimga perpendikulyar tekislik silindrning *urinma tekisligi* deyiladi.

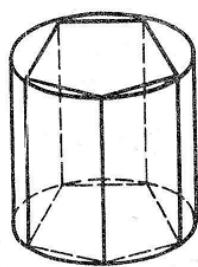
Teorema. Silindr o'qiga perpendikulyar tekislik uning yon sirtini asos aylanasiga teng aylana bo'yicha kesadi. (149-chizma) (teorema isboti mustaqil ish sifatida beriladi).

Silindrga *ichki chizilgan* prizma deb shunday prizмага aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga ichki chizilgan teng ko'pburchaklardan iborat. Uning yon qirralari silindrning yasovchilari bo'ladi (150- chizma).

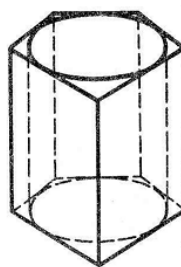


149-

chizma



150-chizma

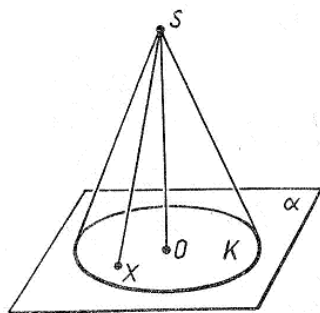


151-chizma

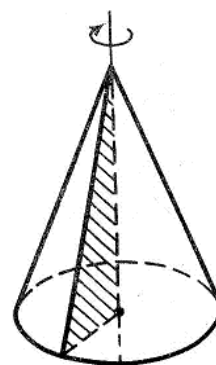
Silindrga *tashqi chizilgan* prizma deb shunday prizмага aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga tashqi chizilgan teng ko'pburchaklardan iborat. Uning yon yoqlari tekisliklari silindrning yon sirtiga urinadi (151-chizma).

KONUS

Konus (aniqrog'i doiraviy konus) deb shunday jismga aytiladiki, u doira – konus asosidan, shu doira tekisligidagi yotgan nuqta-konusning uchidan va konusning uchini asosining hamma nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalardan iborat bo'ladi (152-chizma). Konus uchini asos aylanasi nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalar konusning yasovchilari bo'ladi. Konusning sirti asosidan va yon sirtidan iborat.



152-chizma



153-chizma

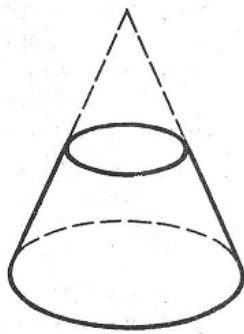
Konusning uchi bilan asos aylanasi markazini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq asos tekisligiga perpendikulyar bo'lsa, bunday konus *to'g'ri konus* deyiladi.

To'g'ri konusni to'g'ri burchakli uchburchakni kateti atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin (153-chizma).

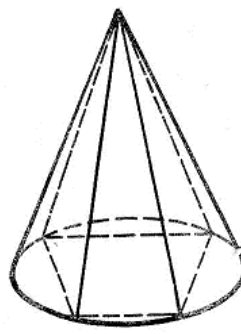
Konusning uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikulyar konusning balandligi deyiladi. To'g'ri konus balandligining asosi asos markazi bilan ustma-ust tushadi. To'g'ri konusning balandligidan o'tuvchi to'g'ri chiziq uning *o'qi* deyiladi. Konusning o'qi orqali o'tuvchi tekislik bilan kesimi *o'q kesim* deyiladi. konusning yasovchisi orqali o'tuvchi va bu yasovchi orqali o'tkazilgan o'q kesimga perpendikulyar tekislik konusning *urinma tekisligi* deyiladi.

Toerema: Konusning o'qiga perpendikulyar tekislik konusni doira bo'yicha kesadi, yon sirtini esa markazi konusning o'qida joylashgan aylana bo'yicha kesib o'tadi. (teoremani isbot qilish talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi).

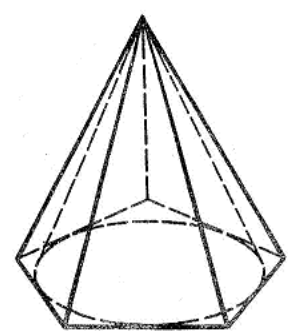
Konusning o'qiga perpendikulyar tekislik undan kichik konus ajratadi. Qolgan qismi *kesik konus* deyiladi. (154-chizma).



154-chizma



155-chizma



156-chizma

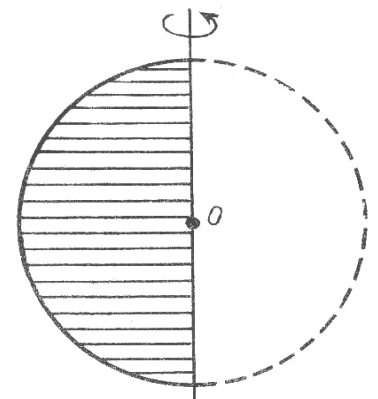
Asosi konus asosidagi aylanaga ichki chizilgan ko'pburchak bo'lib, uchi esa konusning uchida bo'lgan piramida konusga ichki chizilgan piramida deyiladi. (155-chizma). Konusga ichki chizilgan piramidaning yon qirralari konusning yasovchilari bo'ladi. Asosi konusning asosiga tahqi chizilgan ko'pburchak bo'lib, uchi esa konusning uchi bilan ustma-ust tushgan piramida konusga tashqi chizilgan piramida deyiladi. Tashqi chizilgan piramida yon yoqlarining tekisliklari konusning urinma tekisliklari bo'ladi. (156-chizma).

SHAR

Ta'rif: Fazoning berilgan nuqtasidan berilgan masofadan katta bo'lmagan uzoqlikda yotgan hamma nuqtalaridan iborat jism shar deyiladi. Berilgan nuqta sharning markazi, berilgan masofa esa sharning radiusi deyiladi. Sharning chegaasi shar sirti yoki sfera deb ataladi. Shunday qilib sharning markazidan radiusga teng masofa qadar uzoqlashgan hamma nuqtalari shar sirti yoki sfera deb ataladi.

Shar sirtining ikki nuqtasini tutashtiruvchi va sharning markazidan o'tuvchi kesma diametr deyiladi. istalgan diametrning uchlari (oxirlari) sharning diametral qarama-qarshi nuqtalari deyiladi.

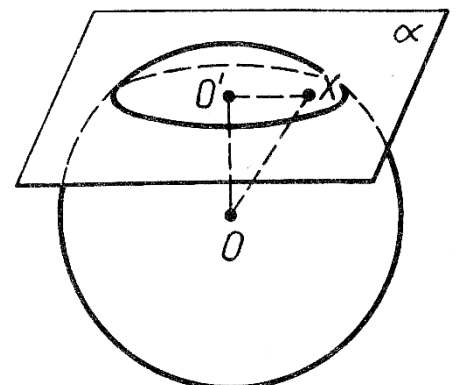
Shar ham aylanma jism bo'lgani uchun uni yarim doirani o'zining diametri atrofida aylantirishdan ham hosil qilish mumkin. (157-chizma).



157-chizma

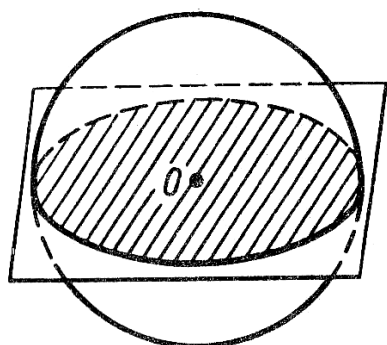
1- Teorema. Sharning har qanday tekislik bilan kesimi doiradir. Bu doiraning markazi sharning markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosidir.

Isboti. Aytaylik α - kesuvchi tekislik va O-sharning markazi bo'lsin (158-chizma). Sharning markazidan α tekislikka OO' perpendikulyar tushiramiz. O' bilan perpendikulyarning asosini belgilaymiz. X – sharning α tekislikka tegishli ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Pifagor teoremasiga ko'ra $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$ Ammo OX kesma sharning R radiusidan katta bo'lmagani uchun $O'X \leq \sqrt{R^2 - OO'^2}$. Demak, X nuqta markazi O'



158-chizma

nuqtada va radiusi $R = \sqrt{R^2 - OO'^2}$ ga teng doiraga tegishli. Aksincha, bu doiraning istalgan X nuqtasi sharga tegishli. Bu esa sharning α tekislik bilan kesimi markazi O' nuqtada bo'lgan doira demakdir.

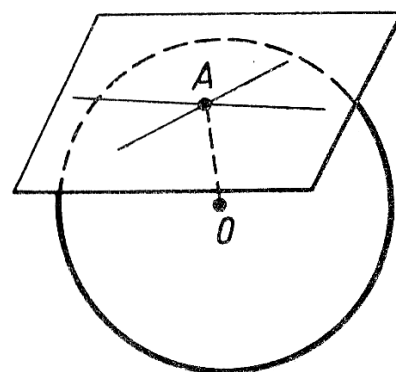


159-

Sharning markazidan o'tadigan tekislik diametral tekislik deyiladi.

2- Teorema. Sharning istalgan diametral tekisligi uning simmetriya tekisligi bo'ladi. Sharning markazi uning simmetriya markazidir.

Shar sirtidagi A nuqtadan o'tib shu nuqtaga o'tkazilgan radiusga perpendikular tekislik urinma tekislik deyiladi. A nuqta urinish nuqtasi deyiladi (160-chizma)



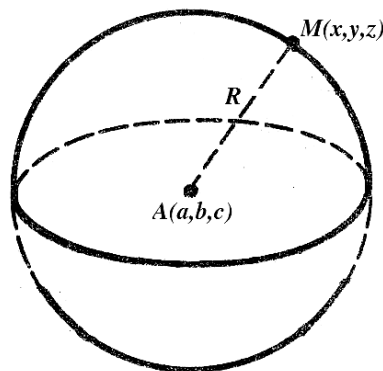
160-

3- Teorema. Urinma tekislik shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga – urinish nuqtasiga ega.

4- Teorema. Shar sirtidagi istalgan nuqtadan cheksiz ko'p urinma o'tadi, ularning hammasi sharning urinma tekisligida yotadi. (2-4 teoremlarni isboti talabalarga mustaqil ish qilib beriladi)

Sfera tenglamasi.

Sfera deb, fazoning berilgan nuqtasidan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalar to'plamiga aytiladi. Sfera tenglamasini tuzamiz. Sferaning markazi $A(a, b, c)$ nuqtada, radiusi esa R bo'lsin (161-chizma). Sferaning nuqtalari fazoning shunday nuqtalaridan, bu nuqtadan A nuqtagacha masofa R ga teng. Sferaning ixtiyoriy (x, y, z) nuqtasidan A nuqtagacha masofaning kvadrati



161-chizma

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ ga teng. Shuning uchun sferaning tenglamasi $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ ko'rinishga ega. Sferaning markazi koordinatalar boshi bo'lsa, sferaning tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Ikkita sferaning kesishgan chizig'i aylanadan iborat bo'ladi. Buni isbot qilish ham mumkin.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar.

1. Aylanma sirtga ta'rif bering
2. Silindr va konusga ta'rif bering
3. Sharga ta'rif bering
4. Sfera tenglamasini keltirib chiqaring.