О КОСВЕННЫХ МЕТОДАХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Нередко в методической литературе можно встретить понимание косвенных доказательств как доказательство от противного. На самом деле это очень узкое толкование данного понятия.

Доказательство от противного является одним из наиболее известных косвенных методов доказательства, но далеко не единственным. Другие косвенные методы доказательства, хотя и часто применяются на интуитивном уровне, но это применение редко осознается, и поэтому они малоизвестны. Обсуждению того. что такое косвенные методы, применяются ли они широко в математике и ее преподавании, и посвящена эта статья.

В доказательствах мы часто используем следующие слова: «Допустим, что верно то-то, и докажем,…», «Допустим ,что это неверно, тогда», «Пусть х -произвольный элемент данного множества (число, треугольник, функция и т.д.), докажем, что он обладает таким-то свойством»: « Пусть х -какой–нибудь элемент, обладающий данным свойством, докажем то-то и то-то». Когда и на каком основании такие словосочетания используются в доказательствах?

Слова « допустим» и «пусть» свидетельствуют о том, что в дедуктивном рассуждении используются допущения. Например, без этих слов, то есть без допущений, нельзя обойтись в доказательствах методики от противного и разбором случаев. Список методов рассуждений, в которых применяется допущения, этим не исчерпывается, и далее он будет продолжен. Специфика рассуждений, в которых используются допущения, заключается в том, что вывод в них делается не непосредственно из каких-то предыдущих предложений, а на основании построения некоторых вспомогательных рассуждений, исходящих из промежуточных допущений. Поэтому такие рассуждения называются косвенными (непрямыми) рассуждениями, соответствующие методы доказательства - косвенными методами. В прямых рассуждениях, в отличие от косвенных, вывод делается непосредственно из предшествующих компонентов рассуждений - посылок.

Итак, особенности прямых и косвенных умозаключений (то есть элементарных рассуждений) заключаются в следующем. Прямое умозаключение состоит в переходе от одного или нескольких предложений, называемых посылками, к предложению, называемому заключением, непосредственно следующему из них по какому-то прямому логическому правилу. Если посылки прямого умозаключения обоснованы, то и его заключение считается обоснованным.

Косвенное умозаключение основано на некотором вспомогательном рассуждении, исходящем из вспомогательных допущений. Другими словами, в косвенном умозаключении заключительное предложение является непосредственным следствием из вспомогательных рассуждений (и, возможно, предложений-посылок) по какому-то косвенному логическому правилу.

Средствами математической логики можно точно описать не только прямые, но и косвенные методы рассуждений. Наиболее подходящими для описания косвенных рассуждений являются правила естественного вывода, предложенные немецким математиком-логиком Г.Генценом, учеником Д.Гильберта.

Рассмотрим наиболее важные косвенные методы доказательства и соответствующие им (точнее, формализующие их) косвенные правила естественного вывода.

Начнем с анализа косвенного метода рассуждений, который очень часто используется, но крайне редко осознается. Его иногда называют методом вспомогательной гипотезы. Содержательный смысл этого правила заключается в следующем: если из А выведено В, то считаем обоснованным предложение: «Если А, то В ($A \Rightarrow B$)».

При доказательстве теорем, сформулированных в импликативной форме: «Если А, то В», по существу рассуждение ведется следующим образом. Утверждение А берется в качестве допущения, из которого выводится В (это и есть вспомогательное рассуждение, исходящее из допущения). При этом не требуется, чтобы вводимое промежуточное допущение А было доказанным. После того, как с помощью допущения А обосновано утверждение В, делается заключение, что обосновано и утверждение: «Если А, то В». Заключительное утверждение «Если А, то В» не зависит от допущения А. Как принято говорить, промежуточное допущение устраняется.

Рассмотрим, например, теорему из школьного курса геометрии: «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны». Доказательство этой теоремы обычно проводится следующим образом.

Пусть АВСД – произвольный четырехугольник. Делаем допущение, что четырехугольник АВСД является ромбом. Затем в несколько шагов мы доказываем, что его диагонали взаимно перпендикулярны. Таким образом, мы проводим вспомогательное рассуждение: доказываем, что [АС] перпендикулярен [ВД] при допущении, что АВСД – ромб. После этого мы считаем полностью обоснованным утверждение: «Если четырехугольник является ромбом, то его диагонали взаимно перпендикулярны». При этом мы освобождаемся от допущения, что АВСД- ромб. Это допущение было промежуточным, временным. Оно было необходимо только на стадии выведения из него утверждения «[АС] перпендикулярен [ВД]», т.е. в рамках вспомогательного рассуждения. Методу, использованному в данном рассуждении, соответствует косвенное правило введения импликации $A \Leftrightarrow B$, которое в системе естественного вывода принято записывать так:

$$\frac{\begin{array}{c}[A]\\ B\end{array}}{A \Rightarrow B}$$

В этом правиле буква, заключенная в прямоугольных скобках, соответствует допущению А, с помощью которого обосновывается В.

То, что записано над чертой, символизирует вспомогательный вывод предложения B из допущения A. Наличие этого вывода позволяет считать обоснованным предложение $A \Rightarrow B$.

Именно метод введения вспомогательной гипотезы позволяет свести доказательство утверждения вида «Если A, то B» к доказательству B при допущении A. Традиционно такие сведения сопровождаются привычными словами: «Дано A» и «Докажем B». На самом деле вместо «Дано A» тоже можно было бы говорить «Допустим A». Однако прочно утвердившуюся традицию не изменишь.

Рассмотрим теперь более известный косвенный метод рассуждения - метод доказательства разбором случаев. Он заключается в следующем. Если обосновано утверждение «A при B» ($A \vee B$), то для обоснования предложения C проводим два вспомогательных рассуждения, использующие промежуточные допущения, предварительно говоря: «Рассмотрим два случая:». После этого мы сначала из допущения A выводим C, сопровождая его словами « Рассмотрим первый случай. Допустим, что верно A , и докажем C». Затем из допущения B также выводим C, сопровождая его словами: «Рассмотрим второй случай. Допустим, что верно B, и докажем C. После этого считаем, что C имеет место независимо от обоих допущений A и B, то есть считаем утверждение C полностью обоснованным»

Метод доказательства разбором случаев соответствует правилу удаления дизъюнкции ($\vee$) , которое в системах естественного вывода принято записывать так

$$\frac{A \vee B \quad \overset{[A]}{C} \quad \overset{[B]}{C}}{C}$$

Согласно этому правилу предложению C непосредственно следует из предложения $A \vee B$ и двух вспомогательных выводов: вывода предложения C из допущения A и вывода предложения C из допущения B.

Простейшим примером использования этого метода является доказательство утверждения «Если c/a или c/b,то c/ab» Здесь в качестве A, B и C выступают предложения c/a, c/b и c/ab соответственно: при построении доказательства утверждения строим два вспомогательных вывода: сначала из допущения c/a выводим предложение c/ab.Затем из допущения c/b выводим предложение c/ab. После этого делаем заключение, что утверждение доказано. Заметим, что здесь не явно был использован также метод вспомогательной гипотезы, то есть правило ($\Leftarrow B$). Действительно, в самом начале доказательства были пропущены, но подразумевались слова «Допустим, что c/a или c/b, и докажем, что c/ab»

Обобщением рассмотренного метода является метод доказательства разбором нескольких случаев, возможно, более, чем двух, то есть когда мы располагаем дизъюнкцией с несколькими членами: $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$.где $n \geq 2$. При доказательстве разбором случаев часто встречается ситуация, когда случаев больше, чем два. Известным примером доказательства разбором трех случаев является доказательство утверждения об угле, вписанном в окружность. При этом рассматриваются следующие случаи: центр окружности лежит внутри угла, на стороне угла, вне угла. Одной из типичных ошибок, допускающихся при доказательстве разбором случаев является рассмотрение не всех возможных случаев, что делает рассуждение неправильным. Например, в некоторых доказательствах нужно рассмотреть следующие три случая для действительного числа $a: a<0, a>0$ и $a=0$. Однако учащиеся могут ограничиться рассмотрением только двух случаев $a<0$ и $a>0$, забывая при этом рассмотреть случай, когда $a=0$. Это делает рассуждение ошибочным, поскольку невозможно обосновать дизъюнкцию $a<0 \vee a>0$ для произвольного действительного числа a. С *методом доказательства разборов всех случаев* связан ещё один косвенный метод рассуждения. Очень часто при доказательстве разбором случаев разбираются случаи A и ˥A для некоторого A, то есть в качестве допущений выступает два предложения, одно из которых является отрицанием другого. Если доказательство ведется классическим способом, то посылка A∨˥A, являющаяся классическим верным утверждением, удаляется. Такое рассуждение соответствует косвенному правилу

$$\frac{\begin{matrix}[A] & [\neg A] \\ C & C\end{matrix}}{C}$$

Это правило производным является от правила удаления дизъюнкции (∨У) и закона исключения третьего A ∨ ˥A . Его можно назвать правилом классического разбора случаев, поскольку оно опирается на классический закон исключения третьего. Рассуждение по этому правилу, вообще говоря, неприемлемо с точки зрения конструктивно мыслящих математиков, поскольку они не признают закона исключения третьего в качестве универсального. Если утверждение A∨˥A имеет вид $\exists x P(x) \cup \neg \exists x P(x)$, причем речь идет о свойстве элементов бесконечного множества, то такое рассуждение может быть безоговорочно признано только с позиции классической логики. Если рассуждение ведется о свойстве конечного множества, то оно будет признано и конструктивно мыслящими математиками.

Перейдем к следующему очень важному косвенному методу рассуждения – методу доказательства *приведением к нелепости* (лат.- reductio ad absurdum), если из допущения A мы выводим противоречие, то есть утверждение B и не B(˥B) для некоторого B, то считаем, что обосновано не A(˥A).

Методом доказательства приведением к нелепости формируется одноименное правило – правило доказательство приведением к нелепости, которое также называют правилом введения отрицания (˥B). В системах естественного вывода его принято записывать так:

$$\frac{\begin{matrix}[A] & [A] \\ B & \neg B\end{matrix}}{\neg A}$$

Согласно этому правилу предложение ┐A непосредственно следует из двух вспомогательных выводов: вывода предложения B из допущения A и вывода предложения ┐B из допущения A. Доказательство утверждения вида ┐A принято называть опровержением утверждения A.

Таким образом, метод доказательства приведением к нелепости используется для опровержения утверждения, то есть для доказательства предложений вида ┐A. Методом доказательства приведением к нелепости доказывают, например, что не существует общей точки у двух различных прямых(то есть параллельность этих прямых), если они удовлетворяют тем или иным условиям. Этим же методом обычно доказывают, что не существует двух различных элементов с заданным свойством (то есть единственность элементов с этим свойством). Простота метода доказательства приведением к нелепости, сочетающаяся с глубиной его содержания, обеспечивает рассмотрение различных его видов. Часто встречается выделение разновидностей доказательства приведением к нелепости в зависимости от вида противоречия: противоречие с условием, противоречие с ранее доказанной теоремой и т.п. Такое перечисление наиболее важных видов противоречий все же не исчерпывает все возможности. Противоречие –это всякая пара утверждений, одно из которых является отрицанием другого: B и ┐B. При этом абсолютно неважно, является ли какое-нибудь из этих утверждений условием ранее доказанной теоремы или допущением.

Очень распространено заблуждение, согласно которому методом доказательства приведением к нелепости называют метод прямого рассуждения по схеме

$$\frac{A \to B}{\neg A \to \neg B},$$

являющейся в действительности правилом контрапозиции. Ошибочно называют правилом приведения к нелепости также следующий вариант правила контрапозиции

$$\frac{A \to B \neg B}{\neg A}$$

Каждое из этих правил является производным от правила доказательства приведением к нелепости и в определенном смысле более слабым, чем это правило.

Метод доказательства приведением к нелепости часто не отличают от метода доказательства от противного. При доказательстве утверждения A методом от противного из допущения ┐A мы видим противоречащее друг другу утверждения В и ˥В для некоторого В, после чего заключаем, что обосновано само А.

Формализацией метода доказательства от противного служит одноименное правило - правило доказательства от противного: из допущения ˥А мы выводим противоречащее друг другу утверждения В и ˥В для некоторого В, после чего заключаем, что обосновано А. В системах естественного вывода это правило принято записывать так:

$$\frac{\begin{matrix}[\neg A] & [\neg A]\\ B & \neg B\end{matrix}}{A}$$

Согласно этому правилу предложение А непосредственно следует из двух вспомогательных выводов: вывода предложения В из допущения ˥А и вывода предложения˥ В из допущения ˥А.

Рассуждение методом от противного эквивалентно следующему рассуждению, состоящему из двух частей: первая часть представляет собой доказательство утверждения ˥А приведением к нелепости, а вторая - переход от ˥А к утверждению А методом двойного отрицания. Поскольку, хотя и не явно, при этом используется метод классического правила - снятия двойного отрицания. Метод доказательства от противного является классическим (неконструктивным) методом доказательства. Он служит источником неэффективных доказательств теорем существования, то есть теорем вида $\exists x P(x)$. Отметим также, что косвенный метод доказательства от противного часто путают с прямым методом доказательства по схеме обратной контрапозиции:

$$\frac{\neg B \to \neg A}{A \to B}$$

Теперь перейдем к косвенным рассуждениям, в которых участвуют предложения с кванторами. Если требуется доказать предложение вида: «Все элементы данного множества обладают свойством А (символически $\exists x A(x)$)», доказательство обычно начинается со слов: «Пусть x - произвольный элемент из данного множества. Докажем, что он обладает свойством А, то есть А(x)». Доказав А(x), делают заключение, что все элементы из данного множества обладают свойством А, поскольку через x был обозначен произвольный элемент данного множества. При доказательстве предложения А(x) могут использоваться еще какие-то допущения, однако в них не должны накладываться никакие условия на x, иначе x уже не будет произвольным. Например, требуется доказать утверждение: «Во всяком равнобедренном треугольнике углы при основании равны». Доказательство этого утверждения обычно начинается со слов: «Пусть ΔABC – произвольный равнобедренный треугольник: докажем, что углы при его основании равны». Дальнейшие рассуждения не должны опираться ни на какие дополнительные условия, накладываемые на равнобедренный треугольник ABC. Иначе этот треугольник уже не будет произвольным.

Формализацией рассматриваемого метода рассуждений является правило введения квантора общности ($\forall B: \dfrac{A(x)}{\exists x A(x)}$) , согласно которому предложение $\forall x A(x)$ является непосредственным следствием вспомогательного рассуждения, где предложение A(x) выводится из каких-то допущений, не зависящих от x. Применять это правило можно, лишь соблюдая упомянутое выше ограничение: предложения используемые в качестве допущений при выводе A(x) не должны зависеть от x.

Наконец, рассмотрим еще один распространенный способ косвенного рассуждения. Если мы располагаем допущением или доказанным утверждением «Существует элемент (данного множества), обладающий свойством A (символически $\exists x A(x)$)», а требуется доказать какое-то утверждение C, то достаточно из допущения A(x) вывести C для произвольного фиксированного x. Доказательство мы обычно начинаем со слов: «Пусть x -произвольный фиксированный элемент данного множества, обладающий свойством A (то есть верно A(x)). Исходя из допущения A(x), докажем, что имеет место C. После того, как из допущения A(x) выведено C, считаем, что требуемое утверждение C полностью обосновано (при условии $\exists x A(x)$, но вне зависимости от допущения A(x))». При этом принципиально важным являются два следующих ограничения. Во-первых, предложение C не должно зависеть от x. Действительно, если это ограничение не выполнено, то есть C есть C(x), то будет доказано всего лишь, что предложение C(x) верно только для тех x, для которых верно A(x). Во-вторых, если при доказательстве C, кроме допущения A(x) используется какое-то другое допущение, то в этих допущениях не должны накладываться никакие условия на x. В противном случае, будет нарушена произвольность x, обладающего свойством A, провозглашенная в допущении: «Пусть x - произвольный элемент, обладающий свойством A ». Формализуется такой способ рассуждения в виде правила удаления квантора существования ($\exists Y$), которое в системах естественного вывода принято записывать так:

$$\frac{\exists x A(x) \quad \begin{matrix}[A(x)] \\ C\end{matrix}}{C}.$$

Согласно этому правилу предложение C непосредственно следует из предложения $\exists x A(x)$ и вспомогательного рассуждения, в котором предложение C выводится из допущения A(x). Применяется это правило с указанными выше ограничениями.

Рассмотрим содержательный пример. Пусть требуется доказать следующее утверждение: «Если существует треугольник Δ, подобный каждому из указанных треугольников Δ_1 и Δ_2, то эти треугольники подобны друг другу». Обозначим через $A(\Delta)$ предложение «$\Delta \sim \Delta_1$ и $\Delta \sim \Delta_2$», зависящее от Δ, а через C предложение «$\Delta_1 \sim \Delta_2$», не зависящее от Δ. Доказав «$\Delta_1 \sim \Delta_2$»

в предположении «$\Delta \sim \Delta_1$ и $\Delta \sim \Delta_2$», делаем вывод, что из существования треугольника, подобного двум данным треугольникам Δ_1 и Δ_2, следует, что эти треугольники подобны.

Выявим логическую структуру проведенного рассуждения. Прежде всего в соответствии с правилом введения импликации $(\rightarrow B)$ сводим задачу к доказательству утверждения С при допущении $\exists\Delta A(\Delta)$. Традиционно оформляем его следующим образом:

Дано (точнее допустим): $\exists\Delta(\Delta \sim \Delta_1$ и $\Delta \sim \Delta_2)$ (согласно введенным обозначениям: $\exists\Delta A(\Delta)$).

Требуется доказать: $\Delta_1 \sim \Delta_2$ (согласно введенным обозначениям: С).

Доказательство начинается со слов «Пусть Δ - какой-нибудь треугольник, подобный треугольникам Δ_1 и Δ_2 (т. е. пусть $A(\Delta)$). Докажем, что тогда треугольники Δ_1 и Δ_2 подобны (т.е.докажем С). Далее после введения из допущения $A(\Delta)$, считаем, что С доказано при одном условии: $\exists\Delta A(\Delta)$.Это рассуждение можно представить в виде дерева следующим образом):

$$\frac{\exists\Delta(\Delta \sim \Delta_1 \,\&\, \Delta \sim \Delta_2) \quad \begin{array}{c}[\Delta \sim \Delta_1 \,\&\, \Delta \sim \Delta_2]\\ \Delta_1 \sim \Delta_2\end{array}}{\Delta_1 \sim \Delta_2}$$

или используя введенные обозначения более схематично:

$$\frac{\exists\Delta A(\Delta) \quad \begin{array}{c}[A(\Delta)]\\ C\end{array}}{C} \quad (1)$$

где запись $\dfrac{A(\Delta)}{C}$ обозначает доказательство предложения С («$\Delta_1 \sim \Delta_2$») при допущении $A(\Delta)$ («$\Delta \sim \Delta_1$ и $\Delta \sim \Delta_2$»). «Метка «$1'$» показывает, какое предложение и когда берется в качестве допущения, а двойная черта означает, что в этом месте пропущено несколько шагов доказательства.

Разумеется, в математических доказательствах можно использовать и другие косвенные методы рассуждений, не упомянутые здесь. Однако все допустимые правила являются производными от основных.

Для более точного и полного описания, что такое косвенное рассуждение и допущение и какова их роль в доказательствах, необходима от неформальных понятий перейти к их формальным уточнениям средствами математической логики, точнее средствами теории естественного вывода. Средства этой теории позволяют математически точно и непосредственно описать и обосновать косвенные методы рассуждений путем формализации их в виде косвенных правил естественного вывода, а косвенным рассуждениям сопоставить формальный вывод в виде дерева.

Преподаватель математики должен иметь четкое представление о понятии доказательства и его математических уточнениях, о структуре доказательств, о различиях между прямыми и косвенными доказательствами, об основных косвенных методах доказательства. Что именно и в какой форме говорить учащимся о косвенных методах доказательства - тема особого исследования. Отметим только, что положительный опыт углубленного изучения со школьниками и студентами некоторых из них у нас уже имеется.

Георгий Злоцкий,
доктор педагогических наук, профессор СамГУ,
Шерзод Хайитмурадов,
аспирант СамГУ.