ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Жиззах Политехника Институти

«ОЛИЙ МАТЕМАТИКА» КАФЕДРАСИ

МУСАЕВ А.О., АБДУЛХАЛИКОВ А., ТЎРАЕВ Ў.Я.

Майдонлар назарияси элементлари

Жиззах– 2010

МУСАЕВ А.О., АБДУЛХАЛИКОВ А., ТЎРАЕВ Ў.Я., МАЙДОНЛАР НАЗАРИЯСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ. УСЛУБИЙ ҚЎЛЛАНМА: ЖИЗЗАХ, 2010.

Т А Қ Р И З Ч И Л А Р: 1) Т.ф.н. И.Ғаниев,– ЖизПИ доценти.
2) А.Пардабоев – ЖизПИ “ЭЭ ва физика” кафедраси катта ўқитувчиси.

Жиззах Политехника институти (13 январ 2010 йил, № 4)
илмий услубий кенгаши томонидан нашрга тавсия этилди.

Жиззах Политехника институти, 2010.

КИРИШ

Замонавий фан-техниканинг ривожланиши ҳар бир муҳандисдан математиканинг элементларидан яхшигина хабардор бўлишлигини талаб этади. Ишлаб чиқаришга замонавий технологияларнинг кириб келиши, уларнинг яратилишида муҳандислар чуқур математик билимга эга бўлишини тақозо қилади.

Ушбу услубий қўлланма математиканинг муҳим қисмларидан бири бўлган векторлар таҳлилининг майдон тушунчасини ўрганишга, таҳлил қилишга бағишланган. Бу қўлланмадан техника олий ўқув юрти талабалари, аспирантлар ва кенг муҳандислар гуруҳи фойдаланиши мумкин. Ундаги скаляр, вектор майдонлар, улардаги муҳим математик амалллар содда тилда баён этилишига ҳаракат қилинган.

Фазодаги бирор-бир катталик учун майдон берилган дейилади, агарда фазонинг ҳар бир нуқтаси ёки унинг атрофида бу катталикнинг қиймати мавжуд бўлса. Текширилаётган катталикнинг характерига кўра майдон икки хил кўринишга, яъни скаляр ва вектор майдонларга бўлинади. Агарда скаляр катталикни u, фазовий нуқтани M деб белгиласак, у ҳолда M нуқтанинг ҳар бир ҳолатини аниқлашда u сонли катталикнинг маълум бир қийматидан фойдаланилади. Демак, u ни M нуқтанинг функцияси деб қабул қилишимиз мумкин. Табиийки, бу функция тушунчаси бизга шу пайтгача маълум бўлган бир ўзгарувчили функция тушунчасидан фарқ қилади. Агар майдон ностационар (барқарор эмас) бўлса, у ҳолда $u = f(M,t)$ кўринишда бўлади. Агар текширилаётган катталик масаланинг қўйилишига кўра текисликда бўлса, у ҳолда бу майдон ясси дейилади. Масалан, қалинлиги ҳисобга олинмаган ҳолда пластинкада рўй бераётган иссиқлик жараёнларини ўрганишда ясси майдондан фойдаланилади.

Майдонлар назариясидаги ҳар бир математик амаллар назарий ва амалий жиҳатдан тушунарли ҳолда келтирилган. Шунинг учун талабалар ва муҳандислик ишлари билан машғул бўлган мутахассислар учун ушбу услубий қўлланма амалий ишларига ёрдам беради.

1. Скаляр ва векторлар

Математик физик ва механика масалаларига интеграл ҳисобини кўпинча вектор кўринишда қўллаш қулай бўлади. Талаба ўзининг сонли қиймати билан аниқланадиган (масалан, ҳажм, масса, зичлик, температура) скаляр ёки скаляр миқдор тушунчаси ҳамда тўла аниқланиши учун яна йўналиш кўрсатилишини талаб қилувчи (сурилиш, тезлик, тезланиш, куч ва ҳоказо) вектор ва вектор миқдор тушунчаси билан таниш деб ҳисоблаймиз. Маълумки, векторларни тепасига стрелка қўйилган ҳарфлар $\vec{A}, \vec{r}, \vec{v}, \ldots.$ билан, стрелкасиз шу $A, r, v, \ldots..$ ҳарфлар билан уларнинг узунликлари $A = \left|\vec{A}\right|, r = \left|\vec{r}\right|, v = \left|\vec{v}\right|, \ldots$ ни белгилаймиз. Индексли ҳарфлар $\vec{A}_x, \vec{r}_y, \vec{v}_n, \ldots.$ эса уларнинг мос равишда $x, y, n, \ldots$ ўқлардаги проекцияларини билдиради. $\vec{A}$ векторнинг координата ўқларга проекциялари $\vec{A}_x, \vec{A}_y, \vec{A}_z$ лар, уни узунлик (сон қиймати) жиҳатидан ҳам, йўналиш жиҳатидан ҳам тўла аниқлайди. Шунингдек, талаба қуйидаги векторлар алгебрасининг асосий маълумотлари билан ҳам таниш деб ҳисоблаймиз.

$\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

Скаляр (сон)ни айтилишини эслатиб ўтамиз ва у ўқлардаги проекциялари орқали қуйидагича ифодаланади

$$\vec{A} \cdot B = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z \,, \tag{1}$$

Қуйида ва бундан кейин биз соат стрелкасига тескари айланишни, яъни ўнг координата системасини асос қилиб оламиз. У ҳолда икки $\vec{A}$ ва $\vec{B}$ векторларнинг *вектор кўпайтмаси* узунлиги $A \cdot B \cdot \sin(\vec{A}, \vec{B})$ бўлган ва иккала кўпайтувчига перпендикуляр, $\vec{A}$ дан $\vec{B}$ га (180^0 дан кичик бурчакка) бурилиш соат стрелкасига тескари томонга йўналган вектор бўлади: уни $\vec{A} \times \vec{B}$ билан белгиланади. Вектор кўпайтманинг ўқлардаги проекциялари, агар ўнг координата системаси олинган бўлса, қуйидагига тенг бўлади

$$A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y, A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z, A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x \tag{2}$$

2. Скаляр ва вектор майдони

Таъриф. Фазонинг бирор қисми (ёки бутун фазонинг) ҳар бир M нуқтаси билан бирор скаляр ёки вектор миқдор билан боғланган бўлса, бу миқдорнинг, мос равишда скаляр ёки *вектор майдони* берилган дейилади.

Скаляр майдонга, масалан, ҳарорат майдони, бир жинслимас муҳитда зичлик майдони, куч майдони потенциали, электрик потенциали майдони мисол бўла олади.

Агар u катталик t вақтга боғлиқ бўлмаса, бу катталик статционар (ёки барқарор) катталик дейилади, акс ҳолда майдон ностатционар (ёки барқарор бўлмаган) майдон дейилади. Шундай қилиб u катталик t вақтга боғлиқ бўлмасдан, балки фақат M нуқтанинг фазодаги ўрнига боғлиқ бўлади, яъни u катталик M нуқтанинг функцияси сифатида қаралади ва $u = u(M)$ кўринишда белгиланади. Бу функцияни майдон функцияси деб атаймиз.

Агар фазода $Oxyz$ координаталар системасини киритсак, у ҳолда ҳар бир M нуқта маълум x, y, z координаталарга эга бўлади ва u скаляр функция шу координаталарнинг функцияси бўлади $u = u(M) = u(x, y, z)$. Шундай қилиб, биз уч ўзгарувчили функциянинг физик талқинига келдик.

Биз доимо бу функция учала эркли ўзгарувчи бўйича узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз. Агар бу ҳосилалар бир пайтда нолга айланмаса

$$u(x, y, z) = c, \quad (c = const)$$

тенглама бирор (махсус нуқталари бўлмаган) сиртни аниқлайди.

Таъриф. Скаляр майдонннинг *сатҳ сирти* деб фазонинг шундай нуқталар тўпламига айтиладики, унда майдон функцияси $u = u(x, y, z)$ ўзгармас қийматга эга бўлади.

Бошқача айтганда $u = u(x, y, z)$ майдон функцияси ўзгармас қийматга эга бўладиган фазонинг шундай нуқталар тўпламига скаляр майдонннинг сатҳ сирти деб аталади. Сатҳ сирти деб аталувчи бу сирт нуқталарида u ўзгармас қийматни сақлайди. Бундай сиртлар тўплами қаралаётган соҳани тўлдиради, айни пайтда соҳанинг ҳар бир нуқтасидан битта ва фақат битта сатҳ сирти ўтади. Равшанки, бундай сиртлар ўзаро кесишмайди.

Текисликнинг қисмида (ёки бутун текисликда) аниқланадиган скаляр майдонни қарасак, унинг ҳар бир M нуқтасига u скаляр катталикнинг сон қиймати мос келади, яъни $u = u(M)$.

Таъриф. Ясси скаляр майдоннинг *сатҳ чизиғи* деб текисликнинг шундай нуқталар тўпламига айтиладики, унда $u = u(x, y)$ майдон функцияси ўзгармас қийматга эга бўлади.

Агар, масалан, майдон $u = x^2 + y^2 + z^2$ функция билан ифодаланган бўлса, у ҳолда маркази координата бошида бўлган $x^2 + y^2 + z^2 = C$, $(C > 0)$ сфера сатҳ сирти вазифасини бажаради.

3. Берилган йўналиш бўйича ҳосила

Скаляр майдонннинг муҳим тушунчаси берилган йўналиш бўйича ҳосиладир. Фараз қилайлик, скаляр майдоннинг дифференциалланувчи функцияси $u = u(x, y, z)$ берилган бўлсин. Бу майдондаги бирор $M(x, y, z)$ нуқтани ва шу нуқтадан чиқувчи бирор $\vec{l}$ нурни қараймиз. Бу нурнинг Ox, Oy, Oz ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ орқали белгилаймиз. Агар $\vec{l}_0$ бирлик вектор бу нур бўйича йўналган бўлса, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\vec{l}_0 = \vec{i} \cdot \cos\alpha + \vec{j} \cdot \cos\beta + \vec{k} \cdot \cos\gamma$$

Скаляр майдоннинг дифференциалланувчи $u = u(x, y, z)$ функциясининг $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосиласи $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ қуйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma$$

формула билан аниқланади.

Агар M нуқта тайинланган бўлса, у ҳолда ҳосиланинг катталиги фақат $\vec{l}$ нурнинг йўналишигагина боғлиқ бўлади. $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосила хусусий ҳосилаларга ўхшаш u функциянинг мазкур йўналишдаги ўзгариш тезлигини характерлайди. Ҳосиланинг $\vec{l}$ йўналиш бўйича абсолют миқдори $\left|\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|$ тезликнинг катталигини аниқлайди, ҳосиланинг ишораси эса u функция ўзгаришининг характерини аниқлайди:

Агар $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} > 0$ бўлса, у ҳолда функция бу йўналишда ўсади, Агар $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} < 0$ бўлса, у ҳолда функция бу йўналишда камайади.

Агар $\vec{l}$ йўналиш координаталар ўқининг йўналишларидан бири билан бир хил бўлса, у ҳолда бу йўналиш бўйича ҳосила тегишли хусусий ҳосилага тенг, шунинг учун $\cos\alpha = 1, \cos\beta = 0, \cos\gamma = 0$ ва $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

<u>Мисол</u>. $u = xyz$ функциянинг $M(-1,2,4)$ нуқтада, шу нуқтадан $M_1(-3,4,5)$ нуқтага томон йўналишдаги ҳосиласини топинг.

<u>Ечиш</u>. $\overline{MM_1}$ векторни топамиз. $\overline{MM_1} = (-3+1)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (5-4)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ ва унга мос бирлик векторни топамиз: $\vec{l}_0 = \frac{\overline{MM_1}}{\left|\overline{MM_1}\right|} = \frac{-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$.

Шундай қилиб, $\vec{l}_0$ вектор қуйидаги йўналтирувчи косинусларга эга $\cos\alpha = -\frac{2}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{1}{3}$

Энди $u = xyz$ функциянинг хусусий ҳосилала рини топамиз: $\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \frac{\partial u}{\partial y} = xz, \frac{\partial u}{\partial z} = xy$ ва уларни $M(-1,2,4)$ нуқтада ҳисоблаймиз

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 8 \cdot (-\frac{2}{3}) - 4 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(-8-4-1) = -\frac{26}{3}$$

“-“ ишора берилган йўналишда $u = xyz$ функциянинг камайишини кўрсатади.

4. Скаляр майдон градиенти

<u>Таъриф</u>. $u = u(x,y,z)$ скаляр майдоннинг градиенти деб $\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ векторга айтилади ва у $gradu$ каби белгиланади.

$u = u(x,y,z)$ функциянинг берилган нуқтадаги градиенти билан бу нуқтадаги йўналиш бўйича ҳосила орасидаги боғланишни ифодаловчи қуйидаги мунособат ўринли $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = gradu \cdot \vec{l}$ ёки $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = np_{\vec{l}}\, gradu$

Градиент қуйидаги хоссаларга эга:

а) $grad(u_1 + u_2) = gradu_1 + gradu_2$

б) $gradCu = Cgradu$

в) $grad((u_1 \cdot u_2) = u_1 gradu_2 + u_2 gradu_1)$

г) $gradf(u) = f'(u) \cdot gradu$

бу хоссалар функциянинг ҳосиласини топиш қоидалари билан мос тушади.

<u>Мисол</u>. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциянинг $M(x,y,z)$ нуқтадаги градиентини топинг.

<u>Ечиш</u>. Аввал хусусий ҳосилаларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{u}$$

Демак ,

$$gradu = \frac{x}{u}\vec{i} + \frac{y}{u}\vec{j} + \frac{z}{u}\vec{k}$$

Скаляр майдоннинг сатҳ сиртлари концентрик сфералардан иборат бўлгани учун $gradu$ унинг радиуси бўйлаб йўналган бўлади, шу билан бирга $gradu = \frac{x}{u}\vec{i} + \frac{y}{u}\vec{j} + \frac{z}{u}\vec{k}$

$|gradu| = \sqrt{\frac{x^2}{u^2} + \frac{y^2}{u^2} + \frac{z^2}{u^2}} = \frac{u}{u} = 1$, яъни $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функциянинг ўсишининг энг катта тезлиги 1 га тенг.

5. Вектор майдон

Таъриф. Ҳар бир M нуқтасига бирор $\vec{a}$ вектор мос қўйилган фазонинг бирор қисми (ёки бутун фазо) *вектор майдон* дейилади.

Куч майдони (оғирлик куч майдони), электр майдони, электромагнит майдони, оқаётган суюқликнинг тезликлари майдони вектор майдонига мисол бўла олади. Биз $\vec{a}$ вектор фақат M нуқтанинг вазиятига боғлиқ бўладиган ва вақтга боғлиқ бўлмайдиган $\vec{a} = \vec{a}(M)$ статционар майдонларни қараб чиқамиз. Агар фазода $Oxyz$ координаталар системаси киритилса, у ҳолда ҳар бир M нуқта маълум x, y, z координаталарга эга бўлади ва $\vec{a}$ вектор бу координаталарнинг функцияси бўлади, яъни $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$.

$a_x(x, y, z), a_y(x, y, z), a_z(x, y, z)$ - лар $\vec{a}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари бўлиб, улар ҳам координаталарнинг функцияси бўлади. Шундай қилиб

$$\vec{a} = \vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z) = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ .$$

Агар a_x, a_y, a_z- лар ўзгармас катталик бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ вектор ўзгармас бўлади, бундай вектор майдон бир жинсли дейилади, масалан, оғирлик куч майдони бир жинслидир. Биз доимо a_x, a_y, a_z- функциялар учала эркли ўзгарувчилари бўйича узлуксиз ҳосилаларга эга деб фараз қиламиз. Вектор майдонни ўрганишда вектор чизиқлари муҳим рол ўйнайди.

Таъриф. $\vec{a} = \vec{a}(M)$ вектор майдоннинг ҳар бир нуқтасидаги уринманинг йўналиши шу нуқтага мос келган $\vec{a}$ векторнинг йўналиши билан мос келадиган эгри чизиққа вектор майдоннинг *вектор чизиғи* дейилади.

Аниқ майдонларда вектор чизиқлар маълум физик маънога эга бўлади. Агар $\vec{a}(M)$ оқаётган суюқликнинг тезликлари майдони бўлса, у ҳолда вектор чизиқлар суюқликнинг оқиш чизиқлари бўлади, яъни суюқликнинг заррачалари ҳаракатланаётган чизиқлар бўлади. Агар $\vec{a}(M)$ электрмайдони бўлса, у ҳолда вектор чизиқлар бу майдоннинг куч чизиқлари бўлади.

Таъриф. σ сирт бўлагининг нуқталари орқали ўтувчи ҳамма вектор чизиқлари тўплами *вектор найчалари* дейилади.

Эгри чизиққа уринманинг йўналтирувчи косинуслари dx, dy, dz дифференциалларга пропорционал бўлгани учун, вектор чизиғи

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}$$

тенгликлар билан характерланади.

$\vec{a}$ вектор нолдан фарқли бўлсин. У ҳолда дифференциал тенгламалар системалари назариясидаги “мавжудлик теоремаси” га таяниб, қаралаётган соҳа вектор чизиқлар билан тўлишади ва унинг ҳар бир нуқтасидан битта ва фақат битта вектор чизиғи ўтади. Вектор чизиқлар ўзаро кесишмайди.

Таъриф. Вектор чизиқлардан ташкил топган сиртларни *вектор сирт* дейилади.

Вектор сирти ундаги ҳар бир M нуқтага мос $\vec{a}(M)$ векторнинг шу нуқтада урунувчи текисликда ётиши билан характерланади. Агар қаралаётган соҳада вектор чизиғидан фарқли бирор эгри чизиқ олиб, унинг ҳар бир нуқтаси орқали вектор чизиғи ўтказилса, бу чизиқларнинг геометрик ўрни вектор ситрни беради. Агар олинган “йўналтирувчи” чизиқ ёпиқ бўлса, у ҳолда ҳосил бўлган вектор сирт *трубкасимон вектор сирт* дейилади. Уни *вектор трубкаси* ҳам дейилади.

Мисол. $\vec{a}(M) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ вектор майдонннинг вектор чизиқларини топинг.

Ечиш. Вектор чизиқларнинг дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z} \end{cases}$$

Бу системани интеграллаб

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1, \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_2$$

Бундан $y = C_1 x, \quad z = C_2 x$ бунда C_1, C_2 -лар ихтиёрий ўзгармас сонлар.

Координата бошидан чиқаётган нурлар вектор чизиқлари бўлиши равшан. Бу чизиқларнинг каноник тенгламалари қуйидаги ккринишга эга

$$x = \frac{y}{C_1} = \frac{z}{C_2}.$$

6. Сирт орқали ўтадиган вектор майдон оқими

Агар σ сиртнинг ҳар бир нуқтасидаги нормалнинг мусбат йўналиши

$$\vec{n}^0 = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$$

бирлик вектор орқали аниқланган бўлса, у ҳолда

$$\vec{a}(M) = \{a_x, a_y, a_z\} = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$$

Вектор майдоннинг σ сирт орқали ўтувчи Π оқим деб қуйидаги иккинчи тур сирт интегралига айтилади:

$$\Pi = \iint_{\sigma} a_x(x,y,z)dydz + a_y(x,y,z)dzdx + a_z(x,y,z)dxdy$$

ёки

$$\Pi = \iint_{\sigma} [\ a_x(x,y,z)\cos\alpha + a_y(x,y,z)\cos\beta + a_z(x,y,z)\cos\gamma\ ]d\sigma$$

ёки вектор шаклда $\Pi = \iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma$.

Агар σ-ёпиқ бўлакли-силлиқ сирт бўлиб, ташқи нормалнинг бирлик вектори $\vec{n}^0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ бўлса, у ҳолда бу сирт орқали оқиб ўтадиган $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ вектор оқими Π ни ушбу Остроградский-Грин формуласи ёрдамида ҳисоблаш мумкин:

$$\Pi = \oiint\limits_{\sigma} (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma) d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} (\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}) dxdydz$$

бу ерда Ω- фазонинг σ сирт билан чегараланган бўлаги.

Таъриф. $\vec{a}(M)$ вектор майдоннинг дивиргенцияси деб

$$div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

муносабат билан аниқланган скаляр миқдорга айтилади.

Остроградский-Грин формуласи вектор шаклда қуйидаги шаклда ёзилади:

$$\oiint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} div\vec{a} \cdot dxdydz$$

Вектор майдон оқимининг физик маъносини ўрганамиз. Фараз қилайлик, $\vec{a}(M)$ вектор оқаётган суюқликнинг тезликлари майдони σ сирт орқали аниқлансин. Бу тезлик вектори ҳар бир M нуқтада суюқлик заррачаси интилаётган йўналиш, вектор чизиқлари эса суюқликнинг оқим чизиқлари бўлади. σ сирт орқали вақт бирлиги ичида оқиб ўтадиган суюқлик миқдорини ҳисоблаймиз. Бунинг учун сиртда M нуқтани ва сиртнинг $\partial\sigma$ элементини қайд этамиз.

Вақт бирлигида бу элемент орқали оқиб ўтган суюқлик миқдори асоси $\partial\sigma$ ва ясовчиси $\vec{a}$ бўлган цилиндрнинг ҳажмини аниқлайди. Бу цилиндрнинг баландлиги унинг ясовчиси $\vec{n}^0$ нормал бирлик векторга проекциялаш йўли билан ҳосил қилинади. Шунинг учун цилиндрнинг ҳажми $\vec{a} \cdot \vec{n}^0 \cdot d\sigma$ катталиккa тенг бўлади. Вақт бирлиги ичида бутун σ сирт бўйича оқиб ўтадиган суюқлик миқдори σ бўйича интеграллаш натижасида ҳосил бўлади:

$$\iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 \cdot d\sigma$$

Демак, қуйидаги хулосага келамиз:

σ сирт орқали орқали ўтаётган $\vec{a}$ тезлик векторининг Π оқим шу сирт орқали вақт бирлиги ичида сирт ориентатцияланган йўналишда оқиб ўтган суюқлик миқдорига тенг.

σ сирт фазонинг бирор соҳасини чегаралавчи ёпиқ сирт бўлган ҳол айниқса катта қизиқиш уйғотади. Бу ҳолда $\vec{n}^0$ нормал векторини доимо фазонинг ташқи қисмига йўналган деб оламиз. Нормал томонга қараб ҳаракат сиртнинг тегишли жойида суюқлик ω соҳадан оқиб чиқишини англатади, нормалнинг қарама-қарши томонга қараб ҳаракати эса суюқлик сиртнинг тегишли жойида шу соҳага оқиб киришини англатади.

σ сирт бўйича олинган интегралнинг ўзи эса

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma$$

куринишда белгилинади ва ω сиртдан оқиб чиқаётган суюқлик билан унга оқиб кираётган суюқлик орасидаги фарқни беради. Бунда:

Агар $\Pi = 0$ бўлса, у ҳолда ω соҳага ундан қанча суюқлик оқиб чикса, шунча суюқлик оқиб киради.

Агар $\Pi > 0$ бўлса, у ҳолда ω соҳадан унга оқиб кирадиган суюқликдан кўпроқ суюқлик оқиб чиқади.

Агар $\Pi < 0$ бўлса, у ҳолда курдум(сток)лар борлигини кўрсатади (масалан, буғланади).

Шундай қилиб $\iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 \cdot d\sigma$ интеграл манбаларнинг ва курдумларнинг умумий кувватини беради.

Вектор майдони дивиргенциясининг асосий хоссалари:

1^0. $div(\vec{a} + \vec{b}) = div\vec{a} + div\vec{b}$

2^0. агар $\vec{c} = const$, яъни ўзгармас вектор бўлса, у ҳолда $div\vec{c} = 0$ бўлади.

3^0. $div((f \cdot \vec{a})) = f \cdot div\vec{a} + \vec{a} \cdot gradf$, бу ерда $f = f(x, y, z)$ - скаляр функция.

Сирт орқали оқиб ўтадиган оқимни ҳисоблашга доир мисоллар.

<u>Мисол 1</u>. $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x + 2y + 3z = 6$ текислигининг биринчи октантада жойлашган юқори қисми бўйича оқимни ҳисобланг.

<u>Ечиш</u>. $x + 2y + 3z = 6$ текислинининг тенгламасини каноник шаклга келтириб шаклини чизамиз: $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$

Текисликнинг нормал векторини аниқлаймиз: $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$\vec{a}$ вектор оқимини қуйидаги формула бўйича ҳисоблаймиз

$$\Pi = \iint\limits_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint\limits_{\sigma} (x - 4y + 3z) d\sigma,$$

бу ерда $z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y)$, $d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy = \sqrt{1 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2}\, dxdy$.

Шундай қилиб,

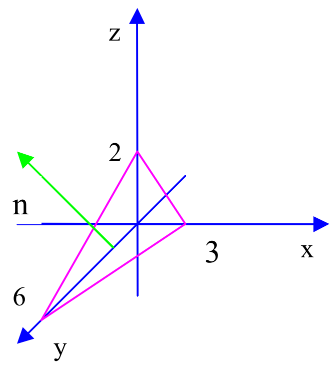
$$\Pi = \frac{1}{3}\iint\limits_{D}(x - 4y + 6 - x - 2y)dxdy =$$

$$= \frac{1}{3}\iint\limits_{D}(6 - 2y)dxdy = 2\int_0^3 dy \int_0^{6-2y}(1 - y)dx =$$

$$= 2\int_0^3 (1 - y)(6 - 2y)dy = 2\int_0^3 (6 - 8y + 2y^2)dy =$$

$$= 4\int_0^3 (y^2 - 4y + 3)dy = 4(\frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 3y)\Big|_0^3 =$$

$$= 4(\frac{27}{3} - 18 + 9) = 0$$



1-чизма

Мисол 2. $\vec{a} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шар сирти бўйича унинг ташқи томонига оқимини ҳисобланг.

Ечиш. Сирт ёпиқ бўлгани учун $\vec{a}$ вектор майдоннинг шар сирти бўйича ташқи томонига оқими Π ни Остроградский-Гаусс формуласи бўйича топамиз:

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \iiint_{\Omega} div\vec{a} \cdot dxdydz = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2)dxdydz,$$

$$\text{чунки} \qquad div\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (xz^2)'_x + (yx^2)'_y + (zy^2)'_z = z^2 + x^2 + y^2$$

Уч ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун қуйидаги формулалар ёрдамида сферик координаталарга ўтамиз:

$$\begin{cases} x = r\sin\theta \cdot \cos\varphi, \\ y = r\sin\theta \cdot \sin\varphi, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases} \qquad \text{бу ерда } 0 \le r \le a, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi,$$

ва қуйидагини топамиз $dxdydz = r^2 \sin\theta \cdot dr \cdot d\varphi \cdot d\theta$, у ҳолда

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \iiint_{\Omega} div\vec{a} \cdot dxdydz = \iiint_{\Omega} (z^2 + x^2 + y^2)dxdydz =$$

$$= \iiint_{\Omega} r^4 \sin\theta \cdot drd\theta d\varphi = \int_0^a r^4 dr \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4a^5\pi}{5}.$$

7. Солениоидли (найчасимон) майдонлар

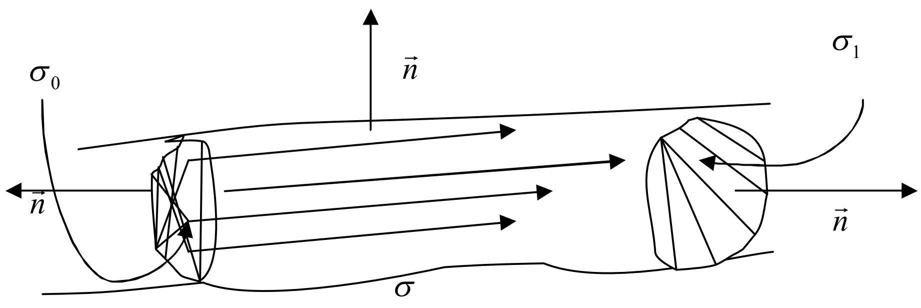
Исталган $\vec{a}$ вектор майдон $div\vec{a}$ ёрдамида скаляр майдонни вужудга келтиради.

Таъриф. $\vec{a}(M)$ вектор майдоннинг дивиргенцияси ω соҳанинг ҳар бир нуқтасида нолга тенг бўлса, яъни $div\vec{a} = 0$ бўлса, у ҳолда бу майдон шу соҳада солениоидли (найчасимон) майдон дейилади.

Шунинг учун солениоидли майдон учун Остроградский формуласига кўра:

$$\iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = 0 \ , (*)$$

формулани ҳосил қиламиз, бунда σ - ёпиқ сирт бўлиб, ω соҳани чегараловчи ташқи нормал йўналишида орентирланган. Бу майдонда бирор σ_0 юзачани оламиз ва унинг чегарасидаги ҳар бир нуқтасидан вектор чизиғи ўтказамиз (2-чизма).



2-чизма

Бу чизиқлар фазонинг вектор найчалари деб аталувчи қисмини чегаралайди. Агар $\vec{a}(M)$ вектор оқаётган суюқликнинг оқиш тезликлари майдонини ташкил этса, у ҳолда суюқлик оқиш давомида бундай найчалар бўйлаб уни кесиб ўтмасдан ҳаракатланади.

σ_0 юзача, бирор σ_1 кесим ва найчанинг σ ён сирти билан чегараланган найчанинг бирор қисмини қараб чиқамиз. (*) тенглик бундай ёпиқ сирт учун қуйидаги куринишни олади

$$\iint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\sigma_0} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma + \iint_{\sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma + \iint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = 0, \quad (**)$$

бу ерда $\vec{n}^0$-ташқи нормалнинг бирлик вектори.

Найчанинг ён сиртида нормаллар $\vec{a}$ вектор майдонга перпендикуляр бўлгани учун $\vec{a}\cdot\vec{n}^0 = 0$.

Шу сабабли охирги тенгликдаги учунчи қўшилувчи нолга тенг $\iint_{\sigma} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = 0$.

Натижада (**) тенгликнинг кўриниши қуйидагича бўлади

$$\iint_{\sigma_0} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma + \iint_{\sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = 0$$

Бундан эса

$$\iint_{\sigma_0} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = -\iint_{\sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma$$

Агар σ_0 юзачадаги нормалнинг йўналишини ташқаридан ичкарига алмаштирсак, у ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\iint_{\sigma_0} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\sigma_1} \vec{a}\cdot\vec{n}^0 d\sigma .$$

Демак, солиноидли майдонда вектор найчанинг ҳар бир кесимидан ўтказилган вектор чизиқлар йўналишидаги векторлар оқими бир хил бўлади, яъни манбасиз ва қурдумсиз майдонда (чунки $div\vec{a}(M) = 0$) вектор найчанинг ҳар бир кесимидан бир хил миқдорда суюқлик оқиб ўтади. Солениоидли майдондаги вектор чизиқлар ҳеч қаерда йўқолмайди ва янгиси пайдо ҳам бўлмайди.

8. Вектор майдонидаги чизиқли интеграл. Куч майдони бажарган иш.

Вектор майдони циркуляцияси

Фараз қилайлик, ω соҳада вектор майдони

$$\vec{a}(M)=\{a_x,a_y,a_z\}=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

вектор орқали ҳосил қилинган бўлсин. Бу соҳада бирор L чизиқни оламиз ва ундаги маълум йўналишни белгилаймиз.

Таъриф. Йўналган L чизиқ бўйича олинган ушбу

$$\int_L \vec{a}d\vec{r}=\int_L a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+a_z(x,y,z)dz$$

иккинчи тур эгри чизиқли интеграл $\vec{a}(M)$ векторнинг L чизиқ бўйича олинган чизиқли интеграли дейилади.

Агар $\vec{a}(M)$ вектор куч майдонини ҳосил қилса, $\vec{a}(M)$ векторнинг L чизиқ бўйича олинган чизиқли интеграли маълум йўналишда $\vec{a}(M)$ векторнинг L чизиқ бўйича бажарган ишга тенг бўлади.

Таъриф. Ёпиқ L контур бўйича чизиқли интеграл вектор циркулцяси дейилади ва у Ц билан белгиланади, яъни

$$Ц=\oint_L \vec{a}d\vec{r}=\oint_L a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+a_z(x,y,z)dz$$

Теорема. Агар a_x,a_y,a_z функциялар ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан бирга σ соҳада узлуксиз бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$\oint_L a_x(x,y,z)dx+a_y(x,y,z)dy+a_z(x,y,z)dz=$$

$$=\iint_\sigma\left[(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})\cos\gamma\right]d\sigma$$

бу ерда $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ лар σ-сирт нормал векторининг йўналтирувчи косинуслари, L-эса сирт чегараси. Бу формула Стокс формуласи дейилади. Грин формуласи Стокс формуласининг L эгри чизиқ ва σ сирт Oxy текислигида ётган хусусий ҳолидир.

9. Вектор майдон уюрмаси

Таъриф. $\vec{a}(M)$ вектор майдоннинг уюрмаси (ёки ротори) деб қуйидаги векторга айтилади

$$rot\vec{a}=(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z})\vec{i}+(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x})\vec{j}+(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y})\vec{k}\ .$$

$\vec{a}(M)$ вектор майдоннинг уюрмаси юқоридаги формула билан аниқланучи вектор майдонни вужудга келтиради. $\vec{a}(M)$ вектор майдоннинг роторини символик равишда қуйидагича ёза оламиз

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Стокс формуласини вектор шаклда қуйидагича ёза оламиз

$$\int_L \vec{a}d\vec{r} = \iint_\sigma \vec{n}^0 \cdot rot\vec{a} \cdot d\sigma,$$

яъни $\vec{a}$ векторнинг σ сиртни чегаралавчи L контури мусбат йўналиш бўйича циркулцяси $rot\vec{a}$ векторнинг шу сирт орқали ўтадиган оқимга тенг.

Вектор майдони роторининг баъзи хоссалари:

1^0. $rot(\vec{a}+\vec{b}) = rot\vec{a} + rot\vec{b}$

2^0. $rot\vec{c} = 0, \quad (c = const)$

3^0. $rot(\varphi \cdot \vec{a}) = \varphi \cdot rot\vec{a} + grad\varphi \cdot \vec{a}$, бу ерда $\varphi = \varphi(x,y,z)$ скаляр функция.

Мисол. $\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r}$ чизиқли тезлик вектор майдонинг фазодаги ихтиёрий $M(x,y,z)$ нуқтасидаги роторини топинг.

Ечиш. Чизиқли тезлик вектори $\vec{v}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (w_y \cdot z - w_z \cdot y)\vec{i} + (w_z \cdot x - w_y \cdot z)\vec{j} + (w_x \cdot y - w_y \cdot x)\vec{k}$$

Демак,

$$\vec{v} = \vec{w} \times \vec{r} = 2w_x\vec{i} + 2w_y\vec{j} + 2w_z\vec{k} = 2\vec{w}.$$

10.Потенциал майдон. Потенциал майдондаги чизиқли интеграл

Таъриф. Агар фазонинг бир боғламли Ω соҳасининг ҳар бир нуқтасида $rot\vec{a} = 0$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ вектор майдон Ω соҳада потенциал ёки уюрмасиз майдон дейилади.

$rot(gradu) = 0$ бўлгани учун исталган $u = u(x,y,z)$ скаляр майдон градиенти ҳосил қилган майдон ҳар доим потенциалдир.

$\vec{a}$ майдон Ω соҳада потенциал бўлиши учун икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $u = u(x,y,z)$ скаляр функция мавжуд бўлиши етарли ва зарур бўлиб, унинг учун $\vec{a} = gradu$ бўлиши керак.

Шундай қилиб $u = u(x,y,z)$ функция $\vec{a}$ майдоннинг потенциали (ёки потенциал функцияси) дейилади.

$\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ потенциал майдон учун потенциални топиш учун қуйидаги формуладан фойдаланилади:

$$u(x,y,z) = \int_{M_0M} a_x(x,y,z)dx + a_y(x,y,z)dy + a_z(x,y,z)dz + C,$$

бу ерда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта Ω соҳанинг бирор тайин нуқтаси, $M(x,y,z)$ нуқта эса соҳанинг ихтиёрий нуқтаси, C-ихтиёрий ўзгармас сон.

Бу формулада интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаган иккинчи тур эгри чизиқли интегрални ҳисоблаш формуласи келиб чиқади:

$$\int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz = u(B) - u(A),$$

бу ерда $u(A)$ ва $u(B)$ потенциал йўлининг бошланғич ва охирги нуқталардаги қиймати.

Маълумки агар фазонинг Ω соҳадаги ҳар бир нуқтасида $div\vec{a}=0$ бўлса, $\vec{a}$ вектор майдон шу соҳада *солиниоидли* ёки *найчасимон* майдон дейилар эди. Шунинг учун $div(rot\vec{a})=0$ бўлса, у ҳолда исталган $\vec{a}$ вектор майдоннинг ротор майдони солениоидли майдон бўлади.

Таъриф. Агар фазонинг Ω соҳада $\vec{a}$ вектор майдон бир вақтнинг ўзида ҳам потенциал, ҳам солениоидли бўлса, яъни Ω соҳанинг ҳар бир нуқтасида $div\vec{a}=0, rot\vec{a}=0$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ вектор майдон Ω соҳада *гармоник* майдон дейилади.

Гармоник майдоннинг u потенциали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

Лаплас тенгламасининг ечимидан иборатдир.
Лаплас тенгламасини қаноатлантирувчи $u=u(x,y,z)$ функция *гармоник функция* дейилади.

Мисол. $\vec{a}=\{2xy+z, x^2-2y, x\}$ векторнинг майдони потенциал, лекин солениоидли эмаслигини кўрсатинг ва берилган майдоннинг потенциали u ни топинг.

Ечиш. $a_x=2xy+z$, $a_y=x^2-2y$, $a_z=x$ бўлгани учун

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x+z & x^2-2y & x \end{vmatrix}=(0-0)\vec{i}-(1-1)\vec{j}+(2x-2x)\vec{k}=0$$

яъни $\vec{a}$ - потенциал майдон.

$$div\vec{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}=2y-2\neq 0$$

Демак, $\vec{a}$ солениоидли майдон эмас. Энди u ни топамиз:

$$u(x,y,z)=\int_{OM}(2xy+z)dx+(x^2-2y)dy+xdz+C=\int_0^x(2xy+z)dx-\int_0^y(-2y)dy+\int_0^z 0dz=$$
$$=x^2y+xy-y^2+C$$

11.Гамильтон (Набла) оператори

Вектор анализнинг $grad$, div, rot дифференциал амалларни Гамильтон оператори деб аталувчи

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial x}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial x}\vec{k},$$

дифференциал оператори ёрдамида ифодалаш қулайдир. ∇- символ “набла” деб ўқилади. Бу вектор билан аммаллар бажарилиш қоидаларини қараб чиқамиз:

1. ∇ набла векторнинг $u(M)$ скаляр функцияга кўпайтмаси шу функциянинг градиентини беради, яъни

$$\nabla u = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{k})u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial x}\vec{k} = gradu$$

Шундай қилиб

$$\nabla u = gradu\,.$$

2. ∇ набла векторнинг $\vec{a}(M)$ вектор функция билан скаляр кўпайтмаси шу функциянинг дивргенциясини беради, яъни

$$\nabla\cdot\vec{a} = (\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial x}\vec{k})\cdot(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = div\vec{a}$$

3. ∇ набла векторнинг $\vec{a}(M)$ вектор функция билан вектор кўпайтмаси шу функциянинг уюрмасини беради, яъни

$$\nabla\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = (\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z})\vec{i} + (\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x})\vec{j} + (\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y})\vec{k} = rot\vec{a}$$

Шундай қилиб,

$$\nabla\times\vec{a} = rot\vec{a}\,.$$

Келтириб ўтилган амаллар биринчи тартибли дифференциал амаллари дейилади. Гамильтон оператори ёрдамида вектор анализининг мураккаб ифодалари устида дифференциал амалларни бажариш қулай. Бунда фақат шуни эсда тутиш керакки, бу оператор дифференциаллаш операторидир ва кўпайтмани дифференциаллаш қоидасини билиш лозим.

<u>Мисол</u>. Иккита u ва v скаляр функциялар кўпайтмасининг градиентини топинг.

<u>Ечиш</u>. $grad(u\cdot v) = \nabla(u\cdot v) = u\cdot\nabla v + v\cdot\nabla u = u\cdot gradv + v\cdot gradu$

Энди вектор майдонидаги иккинчи тартибли амаллар билан танишиб чиқамиз. Шуни такидлаб ўтамизки $gradu$, $rot\,\vec{a}$ дифференциал амаллар вектор майдонларини вужудга келтиради, $div\vec{a}$ амали эса скаляр майдонни вужудга келтиради. Масалан,кўрсатилган амалларнинг қуйидаги комбинациялари бўлиши мумкин:

$$div(gradu),\quad grad(div\vec{a}),\quad rot(rot\vec{a}),\quad div(rot\vec{a})\,.$$

Бу типдаги амаллар иккинчи тартибли амаллар дейилади. Улардан энг муҳимларини қараб чиқамиз.

1. $div(rot\vec{a}) = 0$.

Ҳақиқатдан, агар вектор майдон $\vec{a}(M)$ бўлса, у ҳолда иккинчи тартибли аралаш ҳосилаларнинг тенглиги учун

$$div(rot\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}) =$$

$$= \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 a_x}{\partial z\partial y} = 0$$

2. $rot(gradu) = 0$.

Ҳақиқатдан, $gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}=\nabla u$ бўлгани учун ҳамда иккинча тартибли аралаш ҳосилаларнинг тенглиги туфайли

$$rot(gradu)=\left[\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial z})-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial y})\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial z})\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y})-\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial x})\right]\vec{k}=$$

$$=\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right]\vec{j}+\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\right]\vec{k}=0$$

Шу натижанинг ўзини ∇ набла оператори ёрдамида ҳам ҳосил қилиш мумкин:

$$rot(gradu)=\nabla\times\nabla u=(\nabla\times\nabla)u=0,$$

чунки бир хил векторларнинг вектор кўпайтмаси нолга тенг.

3. $div(gradu)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Ҳақиқатдан, ҳам $gradu=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$ бўлгани учун

$$div(gradu)=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial u}{\partial z})=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Қуйидагича белгилаш киритамиз

$$\Delta u=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})u$$

бунда $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ символ Лаплас оператори дейилади. Бу операторни ∇ векторнинг скаляр квадрати тарзида қараш мумкин $\nabla\cdot\nabla=(\frac{\partial}{\partial x})^2+(\frac{\partial}{\partial y})^2+(\frac{\partial}{\partial z})^2=\Delta$.

Шунинг учун $div(gradu)=\nabla(\nabla u)=\nabla^2 u=\Delta u$.

Демак, иккинчи тартибли бешта дифференциал амални қуйидагича ёзиш мумкин:

1. $div(gradu)=\nabla\cdot\nabla u=\nabla^2 u=\Delta u$;
2. $rot(gradu)=(\nabla\times\nabla)u$;
3. $div(rot\vec{a})=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})$;
4. $grad(div\vec{a})=\nabla(\nabla\vec{a})$;
5. $rot(rot\vec{a})=\nabla\times(\nabla\times\vec{a})$;

12. **Намунавий ҳисоб топшириқлари**

1. $u=u(x,y,z)$ скаляр майдоннинг M нуқтадаги $\vec{l}$ вектор йўналиши бўйича ҳосиласини топинг:

1.1. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $M(1,1,1)$.

1.2. $u=x+\ln(y^2+z^2)$, $\vec{l}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $M(2,1,1)$.

1.3. $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$, $\vec{l}=2\vec{j}-2\vec{k}$, $M(1,5,-2)$.

1.4. $u=y\ln(1+x^2)-arctgz$, $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$, $M(0,1,1)$.

1.5. $u = x(\ln y - arctgz)$, $\vec{l} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$, $M(-2,1,-1)$.

1.6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2 z$, $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M(1,3,2)$.

1.7. $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$, $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $M(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3)$.

1.8. $u = x^2 y^2 z - \ln(z - 1)$, $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5} \cdot \vec{k}$, $M(1,1,2)$.

1.9. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$, $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$, $M(1,-3,4)$.

1.10. $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$, $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $M(4,1,-2)$.

1.11. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$, $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $M(1,1,0)$.

1.12. $u = 2\sqrt{x + y} + yarctgz$, $\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$, $M(3,-2,1)$.

1.13. $u = z^2 + 2arctg(x - y)$, $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M(1,2,-1)$.

1.14. $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$, $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$, $M(1,-1,2)$.

1.15. $u = xy - \frac{x}{z}$, $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $M(-4,3,-1)$.

1.16. $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$, $\vec{l} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $M(1,3,4)$.

1.17. $u = x^2 - arctg(y + z)$, $\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $M(2,1,1)$.

1.18. $u = x^2 y + y^2 z + z^2 x$, $\vec{l} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$, $M(1,-1,2)$.

1.19. $u = \ln(xy + yz + zx)$, $\vec{l} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $M(-2,3,-1)$.

1.20. $u = 5x^2 yz - xy^2 z + yz^2$, $\vec{l} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$, $M(1,1,1)$.

1.21. $u = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$, $\vec{l} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $M(-1,2,2)$.

1.22. $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{l} = -4\vec{i} - 3\vec{k}$, $M(1,2,2)$.

1.23. $u = 5x^2 yz - xy^2 z + yz^2$, $\vec{l} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $M(1,-3,2)$.

1.24. $u = x^2 + xy^2 - 6xyz$, $\vec{l} = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $M(1,3,-5)$.

1.25. $u = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $M(1,1,1)$.

1.26. $u = \ln(x^3 + y^3 + z + 1)$, $\vec{l} = -5\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $M(1,3,0)$.

1.27. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}$, $\vec{l} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $M(-1,1,1)$.

1.28. $u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$, $\vec{l} = 4\vec{i} + 2\vec{k}$, $M(1,-1,2)$.

1.29. $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, $\vec{l} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $M(-1,2,1)$.

1.30. $u = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{x}{z}$, $\vec{l} = -5\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $M(2,2,2)$.

2. $u = u(x, y, z)$ **скаляр майдоннинг** M **нуқтадаги энг катта ўзгариши катталигини ва йўналишини топинг:**

2.1. $u = xyz$, $M(0,1,-2)$.

2.2. $u = xy^2 z$, $M(1,-2,0)$.

2.3. $u = x^2 y^2 z$, $M(-1,0,3)$.

2.4. $u = xy^2 z^2$, $M(-2,1,1)$.

2.5. $u = x^2 y + y^2 z$, $M(0,-2,1)$.

2.6. $u = xy - xz$, $M(-1,2,1)$.

2.7. $u = xyz$, $M(2,1,0)$.

2.8. $u = x^2 yz$, $M(2,0,2)$.

2.9. $u = xyz^2$, $M(3,0,1)$.

2.10. $u = x^2 yz^2$, $M(2,1,-1)$.

2.11. $u = y^2 z - x^2$, $M(0,1,1)$.

2.12. $u = x(y + z)$, $M(0,1,2)$.

2.13. $u = x^2 yz$, $M(1,-1,1)$.

2.14. $u = xyz^2$, $M(4,0,1)$.

2.15. $u = 2x^2 yz$, $M(-3,0,2)$.

2.16. $u = (x + y)z^2$, $M(0,-1,4)$.

2.17. $u = x^2(y^2 + z)$, $M(0,1,-3)$.

2.18. $u = x^2(y + z^2)$, $M(3,0,1)$.

2.19. $u = x(y^2 + z^2)$, $M(1,-2,1)$.

2.20. $u = x^2 z - y^2$, $M(1,1,-2)$.

2.21. $u = x^2 y - z$, $M(-2,2,1)$.

2.22. $u = y(x + z)$, $M(0,2,-2)$.

2.23. $u = x^2 yz$, $M(1,0,4)$.

2.24. $u = (x + z)y^2$, $M(2,2,2)$.

2.25. $u = (x^2 + z)y^2$, $M(-4,1,0)$.

2.26. $u = (x^2 - y)z^2$, $M(1,3,0)$.

2.27. $u = x^2 + 3y^2 - z^2$, $M(0,0,1)$.

2.28. $u = xz^2 + y$, $M(2,2,-1)$.

2.29. $u = xz^2 - z$, $M(-1,2,1)$.

2.30. $u = z(x + y)$, $M(1,-1,0)$.

3. $u = u(x, y, z)$ **ва** $v = v(x, y, z)$ **скаляр майдонлар градиентлари орасидаги бурчакни топинг:**

3.1. $u = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $v = \frac{yz^2}{x^2}$, $M(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

3.2. $u = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{6}{9y} + \frac{3}{z}$, $v = x^2 yz^3$, $M(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

3.3. $u = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$, $v = \frac{z^3}{xy^2}$, $M(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}})$.

3.4. $u = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$, $v = \frac{xz^2}{y}$, $M(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1)$.

3.5. $u = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}$, $v = \frac{yz^2}{x}$, $M(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

3.6. $u = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, $v = \frac{z}{x^3 y^2}$, $M(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

3.7. $u = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$, $v = \frac{x^2}{yz^2}$, $M(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

3.8. $u = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, $v = \frac{z^2}{xy^2}$, $M(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}})$.

3.9. $u = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$, $v = \frac{xy^2}{z^2}$, $M(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}})$.

3.10. $u = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$, $v = \frac{x^3 y^2}{z}$, $M(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

3.11. $u = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}x}$, $v = \frac{1}{x^2 yz}$, $M(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

3.12. $u = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$, $v = \frac{x^2}{y^2 z^3}$, $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

3.13. $u = x^2 + 9y^2 + 6z^2$, $v = xyz$, $M(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}})$.

3.14. $u = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$, $v = \frac{y^3}{x^2 z}$, $M(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$.

3.15. $u=\sqrt{2}x^2-\frac{3}{\sqrt{2}}y^2-6\sqrt{2}z^2, \quad v=xy^2z, \quad M(1,\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}).$

3.16. $u=-\frac{\sqrt{6}}{2x}+\frac{\sqrt{6}}{2y}-\frac{2}{3x}, \quad v=\frac{x}{yz^2}, \quad M(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}).$

3.17. $u=\frac{6}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}, \quad v=\frac{y^2z^3}{x^2}, \quad M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}).$

3.18. $u=\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2x}, \quad v=\frac{y^2z^3}{x}, \quad M(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}).$

3.15. $u=\sqrt{2}x^2-\frac{3}{\sqrt{2}}y^2-6\sqrt{2}z^2, \quad v=xy^2z, \quad M(1,\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}).$

3.19. $u=6\sqrt{6}x^3-6\sqrt{6}y^3+2z^3, \quad v=\frac{y}{xz^2}, \quad M(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},1).$

3.20. $u=x^2-y^2-3z^2, \quad v=\frac{yz^2}{x}, \quad M(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}).$

3.21. $u=\frac{3}{\sqrt{2}}x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}y^2+\sqrt{2}z^2, \quad v=\frac{z^2}{x^2y^2}, \quad M(\frac{2}{3},2,\sqrt{\frac{2}{3}}).$

3.22. $u=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{\sqrt{2}}y^3+\frac{8}{\sqrt{3}}z^3, \quad v=\frac{x^2}{z^3y^2}, \quad M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}).$

3.23. $u=\frac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2, \quad v=x^2yz^3, \quad M(2,\frac{1}{3},\frac{3}{2}).$

3.24. $u=9\sqrt{2}x^3-\frac{1}{2\sqrt{2}}y^3-\frac{4}{3}z^3, \quad v=\frac{xy^2}{z^3}, \quad M(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{3}{2}}).$

3.25. $u=\sqrt{2}x^2+\frac{3}{2}y^2-6\sqrt{2}z^2, \quad v=\frac{1}{xy^2z}, \quad M(1,\frac{2}{3},\frac{1}{6}).$

3.26. $u=\frac{1}{\sqrt{2}x}-\frac{2\sqrt{2}}{y}-\frac{3\sqrt{3}}{2x}, \quad v=\frac{x}{y^2z^3}, \quad M(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}).$

3.27. $u=-\frac{4\sqrt{2}}{x}+\frac{\sqrt{2}}{9y}+\frac{1}{\sqrt{3}x}, \quad v=x^2yz, \quad M(2,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}).$

3.28. $u=x^2+9y^2+6z^2, \quad v=\frac{1}{xyz}, \quad M(1,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}).$

3.29. $u=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{\sqrt{2}}y^3-\frac{8}{\sqrt{3}}z^3, \quad v=\frac{y^2z^3}{x^2}, \quad M(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}).$

3.30. $u=-\frac{3}{\sqrt{2}}x^3+\frac{2\sqrt{2}}{3}y^3+8\sqrt{3}z^3, \quad v=\frac{x^2z}{y^3}, \quad M(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2}).$

4. $\vec{a}$ **вектор майдонидаги вектор чизиқларини топинг:**

4.1. $\vec{a}=4y\vec{i}-9x\vec{j}$

4.2. $\vec{a}=x\vec{i}+4yx\vec{j}$

4.3. $\vec{a}=4y\vec{i}+8z\vec{k}.$

4.4. $\vec{a}=4z\vec{j}-9y\vec{k}.$

4.5. $\vec{a}=5x\vec{i}+10y\vec{j}.$

4.6. $\vec{a}=y\vec{j}+4z\vec{k}.$

4.7. $\vec{a}=9y\vec{i}-4x\vec{j}.$

4.8. $\vec{a}=4x\vec{i}+z\vec{k}.$

4.9. $\vec{a} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j}.$

4.10. $\vec{a} = 3x\vec{i} + 6z\vec{k}.$

4.11. $\vec{a} = y\vec{j} + 3z\vec{k}.$

4.12. $\vec{a} = 2z\vec{j} + 3y\vec{k}.$

4.13. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

4.14. $\vec{a} = 2y\vec{j} + 6z\vec{k}.$

4.15. $\vec{a} = 5z\vec{i} + 7x\vec{k}.$

4.16. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 4y\vec{j}$

4.17. $\vec{a} = 4z\vec{i} - 9x\vec{k}.$

4.18. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 8z\vec{k}.$

4.19. $\vec{a} = 6x\vec{i} + 12z\vec{k}.$

4.20. $\vec{a} = 4x\vec{i} + y\vec{j}$

4.21. $\vec{a} = x\vec{i} + z\vec{k}.$

4.22. $\vec{a} = 7y\vec{j} + 14z\vec{k}.$

4.23. $\vec{a} = 9z\vec{j} - 4y\vec{k}.$

4.24. $\vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j}$

4.25. $\vec{a} = 2z\vec{i} + 3x\vec{k}.$

4.26. $\vec{a} = x\vec{i} + 3z\vec{k}.$

4.27. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 6y\vec{j}$

4.28. $\vec{a} = 5y\vec{i} + 7x\vec{j}$

4.29. $\vec{a} = 9z\vec{i} - 4x\vec{k}.$

4.30. $\vec{a} = 2x\vec{i} + 6z\vec{k}.$

5. $\vec{a}$ **вектор майдоннинг** p **текислик ва координата текисликлари ҳосил қилган пирамиданинг ташқи сирти бўйича оқимини икки усул билан топинг:**

а) оқим таърифидан фойдаланиб;

б) Остроградский-Гаусс формуласи ёрдамида.

5.1. $\vec{a} = 3x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x-z)\vec{k}, \quad p: \quad x+3y+z=3.$

5.2. $\vec{a} = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k}, \quad p: \quad 2x-y-2z=2.$

5.3. $\vec{a} = x\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}, \quad p: \quad 3x+3y+z=3.$

5.4. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x+2y+z)\vec{k}, \quad p: \quad x+y+z=2.$

5.5. $\vec{a} = (y+2z)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + (x-2y)\vec{k}, \quad p: \quad 2x+y+2z=2.$

5.6. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y-z)\vec{k}, \quad p: \quad x+2y+z=2.$

5.7. $\vec{a} = (3x-y)\vec{i} + (2y+z)\vec{j} + (2z-x)\vec{k}, \quad p: \quad 2x-3y+z=6.$

5.8. $\vec{a} = (2y+z)\vec{i} + (x-y)\vec{j} - 2z)\vec{k}, \quad p: \quad x-y+z=2.$

5.9. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + 3y\vec{j} + (y-z)\vec{k}, \quad p: \quad 2x-y-2z=-2.$

5.10. $\vec{a} = (x+y-z)\vec{i} - 2y\vec{j} + (x+2z)\vec{k}, \quad p: \quad x+2y+z=2.$

5.11. $\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + z\vec{k}, \quad p: \quad 2x+y+z=2.$

5.12. $\vec{a} = x\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (2x-y+2z)\vec{k}, \quad p: \quad x+2y+2z=2.$

5.13. $\vec{a} = (x+2z)\vec{i} + (y-3z)\vec{j} + z\vec{k}, \quad p: \quad 3x+2y+2z=6.$

5.14. $\vec{a} = 4x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y-2z)\vec{k}, \quad p: \quad 2x+y+z=4.$

5.15. $\vec{a} = (2z-x)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + 3z\vec{k}, \quad p: \quad x+4y+2z=8.$

5.16. $\vec{a} = 4z\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+z)\vec{k}, \quad p: \quad x-2y+2z=2.$

5.17. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + 2(x+z)\vec{k}, \quad p: \quad 3x-2y+2z=6.$

5.18. $\vec{a} = (x+y+z)\vec{i} + 2z)\vec{j} + (y-7z)\vec{k}, \quad p: \quad 2x+3y+z=6.$

5.19. $\vec{a} = (2x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}, \quad p: \quad x-y+z=2.$

5.20. $\vec{a} = (2y-z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + x\vec{k}, \quad p: \quad x+2y+2z=4.$

5.21. $\vec{a} = (2z-y)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + (3x+z)\vec{k}, \quad p: \quad x+y+2z=2.$

5.22. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $x+y+2z=2$.
5.23. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, p: $2x+2y+z=4$.
5.24. $\vec{a}=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $x+2y+z=2$.
5.25. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$, p: $2x+y+3z=6$.
5.26. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $x+2y+2z=2$.
5.27. $\vec{a}=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $x+3y+2z=6$.
5.28. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, p: $2x+2y+z=2$.
5.29. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, p: $3x+2y+z=6$.
5.30. $\vec{a}=z\vec{i}+(x+y)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $2x+y+2z=2$.

6. $\vec{a}$ вектор майдоннинг p текислик ва координата текисликлари билан кесишишидан ҳосил бўлган учбурчак контури бўйича циркуляцияси қуйидаги икки усул билан ҳисобланг:

а) циркуляция таърифидан фойдаланиб:
б) Стокс формуласи ёрдамида.

6.1. $\vec{a}=z\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $2x+y+2z=2$.
6.2. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, p: $3x+2y+z=6$.
6.3. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(y-2z)\vec{k}$, p: $2x+2y+z=2$.
6.4. $\vec{a}=(2y-z)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $x+3y+2z=6$.
6.5. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(x+6y)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $x+2y+2z=2$.
6.6. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(2x-z)\vec{j}+(y+3z)\vec{k}$, p: $2x+y+3z=6$.
6.7. $\vec{a}=(3x+y)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $x+2y+z=2$.
6.8. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+z\vec{j}+(2x-y)\vec{k}$, p: $2x+2y+z=4$.
6.9. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $x+y+2z=2$.
6.10. $\vec{a}=z\vec{i}+(x+z)\vec{j}+y\vec{k}$, p: $2x+y+2z=2$.
6.11. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x-y)\vec{j}+(3x+z)\vec{k}$, p: $x+y+2z=2$.
6.12. $\vec{a}=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, p: $x-y+z=2$.
6.13. $\vec{a}=(x+y+z)\vec{i}+2z\vec{j}+(y-7z)\vec{k}$, p: $2x+3y+z=6$.
6.14. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+2(x+z)\vec{k}$, p: $3x-2y+2z=6$.
6.15. $\vec{a}=4z\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+z)\vec{k}$, p: $x+4y+2z=2$.
6.16. $\vec{a}=(2z-x)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+3z)\vec{k}$, p: $x+4y+2z=8$.
6.17. $\vec{a}=4x\vec{i}+(x-y-z)\vec{j}+(3y+2z)\vec{k}$, p: $2x+y+z=4$.
6.18. $\vec{a}=(x+2z)\vec{i}+(y-3z)\vec{j}+z\vec{k}$, p: $3x+2y+2z=6$.
6.19. $\vec{a}=x\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+(2x-y+2z)\vec{k}$, p: $x+2y+2z=2$.
6.20. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+z\vec{k}$, p: $2x+y+z=2$.
6.21. $\vec{a}=(x+y-z)\vec{i}-2y\vec{j}+(x+2z)\vec{k}$, p: $x+2y+z=2$.
6.22. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+3y\vec{j}+(y-z)\vec{k}$, p: $2x-y-2z=-2$.
6.23. $\vec{a}=(2y+z)\vec{i}+(x-y)\vec{j}-2z\vec{k}$, p: $x-y+z=2$.

6.24. $\vec{a}=(3x-y)\vec{i}+(2y+z)\vec{j}+(2z-x)\vec{k}$, p: $2x-3y+z=6$.

6.25. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+2y\vec{j}+(x+y-z)\vec{k}$, p: $x+2y+z=2$.

6.26. $\vec{a}=(y+2z)\vec{i}+(x+2z)\vec{j}+(x-2y)\vec{k}$, p: $2x+y+2z=2$.

6.27. $\vec{a}=(x+z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x+2y+z)\vec{k}$, p: $x+y+z=2$.

6.28. $\vec{a}=x\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$, p: $3x+3y+z=3$.

6.29. $\vec{a}=(3x-y)\vec{i}+(y-x+z)\vec{j}+4z\vec{k}$, p: $2x-y-2z=-2$.

6.30. $\vec{a}=3x\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(x-z)\vec{k}$, p: $x+3y+z=3$.

7. $\vec{a}$ **вектор майдон соленоидлими (1-11 вариантлар), потенциалми (12-25 вариантлар), гармоникми (26-30 вариантлар) эканини аниқланг:**

7.1. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+yx\vec{j}-xz\vec{k}$

7.2. $\vec{a}=x^2y\vec{i}-2xy^2\vec{j}+2xyz)\vec{k}$

7.3. $\vec{a}=(2yz-2x)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+xy\vec{k}$

7.4. $\vec{a}=(x^2-z^2)\vec{i}-3xy\vec{j}+(y^2+z^2)\vec{k}$

7.5. $\vec{a}=2xyz\vec{i}-y(yz+1)\vec{j}+z\vec{k}$

7.6. $\vec{a}=(2x-3y)\vec{i}+2xy\vec{j}-z^2\vec{k}$

7.7. $\vec{a}=(x^2-y^2)\vec{i}+(y^2-z^2)\vec{j}+(z^2-x^2)\vec{k}$

7.8. $\vec{a}=yz\vec{i}+(x-y)\vec{j}+z^2\vec{k}$

7.9. $\vec{a}=(y+z)\vec{i}+(x+z)\vec{j}+(x+y)\vec{k}$.

7.10. $\vec{a}=3x^2y)\vec{i}-2xy^2\vec{j}-2xyz\vec{k}$.

7.11. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}-(y+z)\vec{j}+(z-x)\vec{k}$.

7.12. $\vec{a}=(yz-2x)\vec{i}-(xz+zy)\vec{j}+xy)\vec{k}$.

7.13. $\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$.

7.14. $\vec{a}=6xy\vec{i}-(3x^2-2y)\vec{j}+z\vec{k}$.

7.15. $\vec{a}=(2x-yz)\vec{i}+(2x-xy)\vec{j}+yz\vec{k}$.

7.16. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+3xyz\vec{j}+(z-x)\vec{k}$.

7.17. $\vec{a}=(y-z)i+(x+z)\vec{j}+(x^2-y^2)\vec{k}$.

7.18. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}-2xz)\vec{j}-(z+y)\vec{k}$.

7.19. $\vec{a}=z^2\vec{i}+(y+xz)\vec{j}+x^2\vec{k}$.

7.20. $\vec{a}=xy(3x-4y)\vec{i}+x^2(x-4y)\vec{j}+3z^2\vec{k}$.

7.21. $\vec{a}=6x^2\vec{i}+3\cos(3x+2z)\vec{j}+\cos(3y+2z)\vec{k}$.

7.22. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y-z)\vec{j}+2(z+x)\vec{k}$.

7.23. $\vec{a}=3(x-z)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+3z\vec{k}$.

7.24. $\vec{a}=(2x-yz)\vec{i}+(xz-2y)\vec{j}+2zyx\vec{k}$.

7.25. $\vec{a}=3x^2\vec{i}+4(x-y)\vec{j}+2(x-z)\vec{k}$.

7.26. $\vec{a}=x^2z\vec{i}+y^2\vec{j}-z^2x)\vec{k}$.

7.27. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(z+x)\vec{k}$.

7.28. $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}.$

7.29. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}.$

7.30. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}.$

А Д А Б И Ё Т Л А Р:

1. Соатов Ё.У. Олий математика, 2-жилд-Т.: Ўқитувчи, 1994.

2. Соатов Ё.У. Олий математика, 3-жилд-Т.: Ўқитувчи, 1994.

2. Пискунов Н.С. Дифференциал ва интеграл ҳисоб, 2-том- Т.: Ўқитувчи, 1974.

4. Краснов М.Л. и другие. Векторный анализ- Москва: Наука, 1978.

М у н д а р и ж а

1. Кириш ____ 3

2. Скаляр ва векторлар __________________________________ 4

3. Скаляр ва вектор майдони ______________________________ 4

4. Берилган йўналиш бўйича ҳосила________________________________5
5. Скаляр майдон градиенти_______________________________________ 6
6. Вектор майдон____7
7. Сирт орқали ўтадиган вектор майдон оқими_______________________9
8. Солениоидли (найчасимон) майдонлар___________________________11
9. Вектор майдонидаги чизиқли интеграл. Куч майдони бажарган иш.
Вектор майдони циркуляцияси_________________________________13
10. Вектор майдон уюрмаси____14
11. Потенциал майдон. Потенциал майдондаги чизиқли интеграл________14
12. Гамильтон (Набла) оператори_____________________________________16
13. Намунавий ҳисоб топшириқлари___________________________________17
Адабиётлар____25