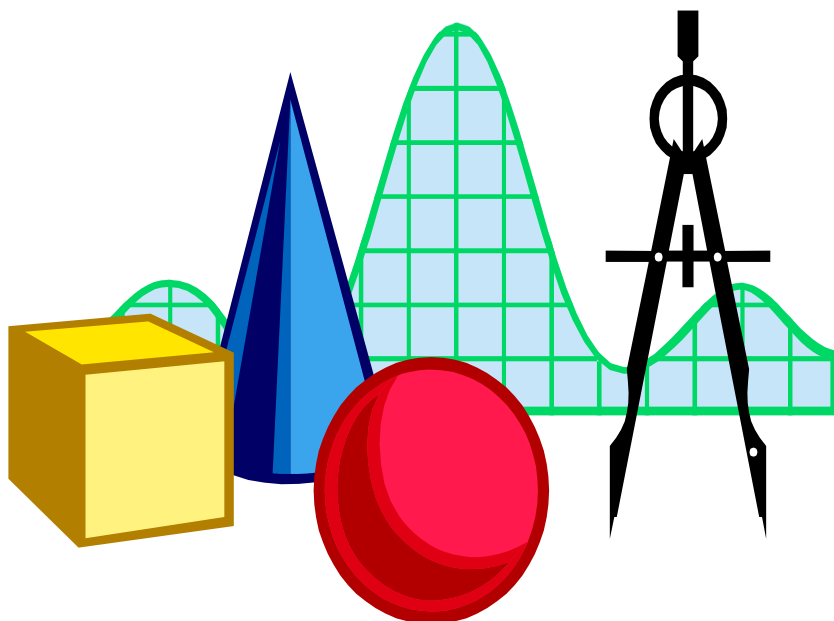


O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

JIZZAX POLITEKNIKA INSTITUTI

“Oliy matematika” fanidan
MA'RUZALAR MATNI
II-QISM



Jizzax-2010

Egamqulov Sh. Abduxaliqov A. “Oliy matematika” fanidan ma`ruzalar matni. II-qism. -Jizzax: JizPI nashri, 2010 yil. 108 bet.

Ushbu ma`ruzalar matni texnika oliy o`quv yurtlarining “Oliy matematika” fani o`quv dasturi asosida yozilgan bo`lib, texnika oliy o`quv yurtlari talabalari uchun mo`ljallangan.

Undan boshqa yo`nalishdagi o`quv yurtlari talabalari o`rganishda qo`shimcha adabiyot sifatida foydalanishlari mumkin.

Taqrirlar:

1. Shamsiyev A . - JDPI “Umumiy matematika”
kafedrası mudiri ,i.f.n., dotsenti.
2. Anvarov R . - Jiz PI “ Oliy matematika”
kafedrası dotsenti, f-m.f.n.

Institutning “ Oliy matematika” kafedrası №5, 12 yanvar 2010 yil
ilmiy uslubiy yig`ilishida chop etish uchun tavsiya etilgan.

Jizzax Politexnika instituti, 2010

Kirish

Matematik tadqiqot usullari hozirgi zamon fan va texnikada o'ziga xos muhim o'ringa ega. Hisoblash texnikasining rivojlanishi va uning inson faoliyatining barcha jabhalaridagi tadbiqini kenggayishi bilan bog'liq bo'lishligi oqibatida, ayniqsa, matematikaning ahamiyati yanada oshadi. Bu esa muhandis mutaxassislarning matematik tayyorgarligi yuqori bo'lishligiga doir bo'lgan talabni yanada oshirish zaruriyatini vujudga keltiradi.

Matematika fani taraqqiy etishida o'rta asr olimlaridan Muso al-Xorazmiy, Axmad al-Farg'oniy, Abu Rayxon Beruniy, Mirzo Ulug'bek va boshqalar juda katta xissa qo'shganlar.

O'zbek matematiklarining matematika fani soxasidagi xizmatlarini yuqori baholab, O'zbekiston Respublikasi Prezidinti I. A. Karimovning "O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida" asarida shunday deyiladi: "Matematikaning " ehtimollar nazariyasi va matematika statistika", "Differentsial tenglamalar nazariyasi", "Matematika-fizika tenglamalari", "Funksional analiz" sohalari bo'yicha erishilgan natijalar Respublikadan tashqarida ham ma'lum"

Yuqorida aytilgan natijalarga ega bo'lishda matematiklardan V. I. Romonovskiy, T. N. Qori-Niyoziy, T. A. Sarimsakov, S. X. Srojiddinov, I. S. Artaix, M.S. Saloxiddinov, Sh. A. Achilov, T. A. Azlarov, Sh. A. Alimov, D. X. Xojiyev va boshqalarning xizmatlari nihoyatta kattadir.

Mamlakatimizda barcha yunalishlar bo'yicha bakalavurlar tayyorlash tizimiga o'tilgach, barcha fanlar bo'yicha o'quv rejalari va tipik dasturlarni davlat standartiga qo'yish zarurati tug'uldi. Shu bilan birga xalqaro ta'lim berish standartlarini qo'llash, ajdodlarimizning boy milliy meroslarini shu jarayoniga jalb qilish kerak bo'ladi. Har bir yo'nalish bir necha mutaxassisliklarni o'z ichiga olgani uchun, mamlakatimizdagi barcha texnik oliy o'quv yurtida bakalavurlar tayyorlash bo'yicha oliy matematika fanidan o'zbek tilidagi darslik tayyorlash muammosi paydo bo'ldi. Tavsiya etilayotgan ushbu ma'ruzalar matni ana shu maqsadlarni ko'zda tutadi.

1-Mavzu. Boshlang'ich funktsiya. Aniqmas integral va uning xossalari

- Reja:** 1. Boshlang'ich funktsiya va uning xossasi.
2. Aniqmas integral va uning xossalari.
3. Asosiy integrallar jadvali.

Tayanch ibora va tushunchalar

Boshlang'ich funktsiya, aniqmas integral, integrallash, aniqmas integral xossalari, asosiy integrallar jadvali.

Boshlang'ich funktsiya va uning xossasi.

Ma'lumki matematikada amallar juft-juft bo'lib uchray keladi. Jumladan, qo'shish va ayirish, ko'paytirish va bo'lish, darajaga ko'tarish va ildiz chiqarish va boshqalar. Funktsiya hosilasini topishga yoki differentsialash amaliga teskari amal bormikan degan tabiiy savol tug'iladi.

Differentsial hisobda funktsiya berilgan bo'lsa, uning hosilasini topishni qaradik. Haqiqatda ham fan va texnikaning bir qancha masalalarini hal etishda teskari masalani yechishga to'g'ri keladiki, berilgan $f(x)$ funktsiya uchun shunday, $F(x)$ funktsiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan $f(x)$ funktsiyaga teng bo'lsin. Ma'lumki, bunday $F(x)$ funktsiyaga berilgan $f(x)$

funktsiyaning **boshlang'ich (dastlabki) funktsiyasi** deyiladi. Masalan, $y = f(x) = x^4$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi, $F(x) = \frac{x^5}{5}$ bo'ladi, chunki $F'(x) = (\frac{x^5}{5})' = x^4 = f(x)$ bo'ladi.

Aniqmas integral va uning xossalari.

Ta'rif. $F(x)$ funktsiya biror oraliqda $f(x)$ funktsiyaning boshlang'ich funktsiyasi bo'lsa, $F(x) + C$ (bunda C ixtiyoriy o'zgarmas) funktsiyalar to'plami shu oraliqda $f(x)$ **funktsiyaning aniqmas integrali** deyiladi va $\int f(x)dx = F(x) + C$ bilan belgilanadi. Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funktsiya, $f(x)dx$ integral ostidagi ifoda, x integrallash o'zgaruvchisi, (integral belgisi) deyiladi.

Demak, $\int f(x)dx$ simvol, $f(x)$ funktsiyaning hamma boshlang'ich funktsiyalari to'plamini belgilaydi.

Berilgan funktsiyaning aniqmas integralini topish amaliga integrallash deyiladi.

Aniqmas integralning xossalari:

1. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funktsiyaga, differentsiali esa integral ostidagi ifodaga teng, ya'ni $(\int f(x)dx)' = f(x)$ *ya* $d \int F(x)dx = F(x)dx$;

2. Biror funktsiyaning hosilasidan hamda differentsialidan aniqmas integral shu funktsiya bilan ixtiyoriy o'zgarmasning yig'indisiga teng, ya'ni

$$f'(x)dx = f(x) + C \quad \text{ya} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Bu xossalar aniqmas integralning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi. Haqiqatan, 1-xossadan $(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)$ bo'ladi. (Qolganlarini keltirib chiqarish o'quvchiga havola etiladi).

Bu xossalardan differentsiallashtirish va integrallashtirish amallari o'zaro teskari amallar ekanligini payqash mumkin.

3. O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni $K = \text{const} \neq 0$ bo'lsa, $\int Kf(x)dx = K \int f(x)dx$;

4. Chekli sondagi funktsiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funktsiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx.$$

Asosiy integrallar jadvali.

Berilgan funktsiyaga asosan uning boshlang'ichini topish, berilgan funktsiyani differentsiallashtirish nisbatan ancha murakkabroq masaladir. Differentsial hisobda asosiy elementar funktsiyalarning, yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hamda murakkab funktsiyalarning hosilasini topishni o'rgandik. Bu qoidalar istalgan elementar funktsiyalarning hosilasini topishga imkon berdi. Elementar funktsiyalarni integrallashtirishda esa differentsiallashtirishdagi umumiy qoidalar yo'q. Masalan, ikkita elementar funktsiyalar boshlang'ichlarining ma'lum bo'lishiga qaramasdan, ular ko'paytmasining, bo'linmasining boshlang'ichini topishda aniq bir qoida yo'q.

Integrallashtirishda integral ostidagi ifodaning muayyan berilishiga qarab, unga mos individual usullardan foydalanishga to'g'ri keladi. Boshqacha aytganda, integrallashtirishda ancha kengroq fikr yuritish kerak bo'ladi. Funktsiyani integrallashtirish ya'ni boshlang'ich funktsiyani topish metodlari bir qancha shunday usullarni ko'rsatadiki, ular yordamida ko'p hollarda maqsadga erishiladi.

Integrallashtirishda maqsadga erishish uchun quyidagi asosiy integrallar jadvalini yoddan bilish zarur.

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1; \quad 2) \int dx = x + C; \quad 3) \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$$

$$4) \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 5) \int \cos x dx = \sin x + C; \quad 6) \int e^x dx = e^x + C;$$

$$7) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1); \quad 8) \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$9) \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad 10) \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$11) \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C; \quad 12) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C, \quad a \neq 0;$$

$$13) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - k}} = \left| \ln x + \sqrt{x^2 - k} \right| + C.$$

Bu formulalarning to'g'riligini, tekshirish tengliklarning o'ng tomonidagi ifodalar differentsiali integral ostidagi ifodaga teng ekanligini ko'rsatishdan iboratdir. Masalan,

$$d \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C \right) = \left(\frac{x^n + 1}{n+1} + C \right)' dx = \frac{(n+1)x^n}{n+1} dx = x^n dx.$$

Integrallashtirishga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integralning 4 va 3 xossalari asosan, $\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \int x^3 dx + 5 \int \sin x dx - 9 \int dx$ bo'ladi. Asosiy integrallar jadvalidagi 1), 2), 4) formulalarga asosan,

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C_1, \quad 5 \int \sin x dx = 5(-\cos x + C_2), \quad -9 \int dx = -9(x + C_3).$$

$$\text{Demak, } \int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + (C_1 + 5C_2 - 9C_3)$$

Yuqoridagi integralni hisoblashda har bir uchta integralda o'zining ixtiyoriy o'zgarmasini qo'shдик, lekin oxirgi natijada bitta ixtiyoriy o'zgarmasni qo'shamiz, chunki C_1, C_2, C_3 ixtiyoriy o'zgarmalar bo'lsa, $C = C_1 + 5C_2 - 9C_3$ ham ixtiyoriy o'zgarmas bo'ladi, shuning uchun, oxirgi natijani quyidagicha yozamiz:

$$\int (x^3 + 5 \sin x - 9) dx = \frac{x^4}{4} - 5 \cos x - 9x + C$$

Integralning to'g'ri hisoblanganligini tekshirish uchun oxirgi tenglikning o'ng tomonini differentsiallash bilan ko'rsatish mumkin. (buni bajarishni o'quvchiga havola etamiz).

2-misol. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} \right) dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Manfiy daraja xossasidan, hamda 4) xossadan foydalanib, jadvaldagi 1) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3^3 \sqrt{x^2}} \right) dx &= \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \int x^{-\frac{1}{2}} dx - \frac{1}{3} \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\frac{1}{3}} + C = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + C \quad \text{bo'ladi.} \end{aligned}$$

3-misol. $\int \frac{3 dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ayniyatdan hamda integralning 3) va 4) qossalaridan foydalanib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{3 dx}{\sin^2 x \cos^2 x} &= 3 \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = 3 \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + 3 \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\ &= 3 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = 3(\tan x - \cot x) + C. \end{aligned}$$

4-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. Jadvaldagi (9) formulaga asosan,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Boshlang'ich funktsiya qanday funktsiya?
2. Boshlang'ich funktsiya va aniqmas integral orasida qanday bog'lanish bor?
3. Integrallash amali nima?
4. Aniqmas integral qanday xossalarga ega?
5. Asosiy integrallar jadvali nimalardan iborat?
6. Integrallash to'g'ri bajarilganligini qanday tekshirish mumkin?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{5x^8 + 6}{x^4} dx; \quad 2. \int \left(\frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right) dx; \quad 3. \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) dx; \quad 4. \int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 3}{\sqrt[3]{x^2}} dx; \\ 5. \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^3} \right) dx; \quad 6. \int \left(5^x + \frac{5^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx; \quad 7. \int \frac{5 + 3 \tan^2 x}{\sin^2 x} dx; \quad 8. \int \left(\frac{4}{9 + x^2} - \frac{5}{\sqrt{4 - x^2}} \right) dx \\ 9. \int \frac{dx}{x^2 - 49}; \quad 10. \int \frac{dx}{x^2 + 16}; \quad 11. \int \left(\frac{5}{\sqrt{9 - x^2}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3}} \right) dx; \quad 12. \int \left(\frac{7}{x^2 + 7} - \frac{6}{x^2 - 3} \right) dx. \end{aligned}$$

2-mavzu. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish bo'laklab integrallash

Reja: 1. O'zgaruvchini almashtirish.
2. Bo'laklab integrallash.

Tayanch ibora va tushunchalar

O'zgaruvchini almashtirish, bevosita integrallash, bo'laklab integrallash, bo'laklab integrallashning maqsadga muvofiqligi.

Shunday bir necha usullarni qaraymizki, ular yordamida ko'p hollarda integrallarni hisoblash, jadval integrallariga keltiriladi.

1. O'zgaruvchini almashtirish.

Ko'p hollarda yangi o'zgaruvchi kiritish bilan integralni hisoblash, jadval integraliga keltiriladi. Bunda $\varphi(x) = t$ almashtirish olinib, bunda t yangi o'zgaruvchi bo'lib, o'zgaruvchini almashtirish formulasi

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \text{ ko'rinishda bo'ladi.}$$

O'zgaruvchini almashtirish usuliga bir necha misollar qaraymiz

1-misol. $\int (3x + 1)^7 dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $3x + 1 = t$ deb $3dx = dt$ yoki $dx = \frac{dt}{3}$ ekanligini hisoblasak,

$$\int (3x + 1)^7 dx = \int t^7 \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^8}{8} + C = \frac{t^8}{24} + C = \frac{(3x + 1)^8}{24} + C \text{ bo'ladi.}$$

2-misol. $\int \sqrt[3]{1 + x^2} x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $1 + x^2 = t$ o'zgaruvchi bilan almashtiramiz. Bu holda $2x dx = dt$ yoki $x dx = \frac{dt}{2}$ bo'lib,

$$\int \sqrt[3]{1+x^2} \cdot x dx = \int \sqrt[3]{t} \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} t^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{1+x^2} + C \quad \text{bo'ladi.}$$

3-misol. $\int \cos mx dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bunda $dx = \frac{1}{m} d(mx)$ o'zgartirish olib,

$\int \cos mx dx = \frac{1}{m} \int \cos mx d(mx) = \frac{1}{m} \sin mx + C$ natijaga ega bo'lamiz. Bunday integrallashga bevosita integrallash deb ataladi. Chunki $mx = t$ bilan o'zgaruvchini almashtirib ham shu natijaga kelish mumkin edi. Yuqoridagi integralda o'zgaruvchini almashtirib o'tirmasdan uni fikrda bajardik.

4-misol. $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\ln x = t$ bilan yangi o'zgaruvchini almashtirib, $\frac{dx}{x} = dt$ ekanligini hisobga olsak,

$$\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C \quad \text{bo'ladi.}$$

5-misol. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x = t^2$ bilan yangi o'zgaruvchi kiritamiz. Oxirgi tenglikdan differentsial topib, $dx = 2tdt$ bo'lganligi uchun, $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\sin t}{t} 2tdt = 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = -2 \cos \sqrt{x} + C$ bo'ladi.

6-misol. $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\cos x dx = d(\sin x)$ ni hisobga olib $\int e^{\sin x} \cdot \cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$ natijaga kelamiz.

Shunday qilib, oddiy hollarda

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad dx = \frac{1}{a}(ax + b),$$

tengliklardan foydalanib, o'zgaruvchini almashtirishni fikrda bajarib, bevosita integrallash ham mumkin.

2. Bo'laklab integrallash

Bo'laklab integrallash usuli differentsial hisobning ikkita funktsiya ko'paytmasi differentsiali formulasiga asoslangan.

Ma'lumki, $d(uv) = u dv + v du$, bundan $u dv = d(uv) - v du$. Oxirgi tenglikni integrallab,

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du \quad \text{natijaga ega bo'lamiz. Shunday qilib,}$$

$\int u dv = uv - \int v du$ (1) formulani hosil qildik. (1) formulaga **bo'laklab integrallash** formulasi deyiladi.

Bu formula yordamida berilgan $\int u dv$ integraldan ikkinchi $\int v du$ integralga o'tiladi. Demak, bo'laklab integrallashni qo'llash natijasida hosil bo'lgan ikkinchi integral, berilgan integralga nisbatan soddaroq yoki jadval integrali bo'lgandagina bu usulni qo'llash maqsadga muvofiqdir. Bu maqsadga integral ostidagi ifodani u va dv ko'paytuvchilarga qulay bo'laklab olish natijasida erishish mumkin. Berilgan integral ostidagi ifodaning bir qismini u va qolgan qismini dv deb olgandan keyin (1) formuladan foydalanish uchun u va dv larni aniqlash kerak bo'ladi. dv ni topish uchun u ning differentsiali topilib, u ni topish uchun esa dv ifodani integralaymiz, bunda integral ixtiyoriy o'zgarmas C ga bog'liq bo'lib, uning istalgan bir qiymatini xususiy holda $C = 0$ ni olish mumkin.

Shunday qilib, integral ostidagi ifodaning bir qismini u deb olishda u differentsiallash bilan soddalashadigan, qolgan qismi dv bo'lib, qiyinchiliksiz integrallanadigan bo'lishi kerak.

Bo'laklab integrallash formulasi ko'proq:

1) $\int p(x)e^{ax} dx$, $\int p(x)\sin mx dx$, $\int p(x)\cos ax dx$ va 2) $\int p(x)\ln x dx$, $\int p(x)\arcsin x dx$, $\int p(x)\arccos x dx$, $\int p(x)\arctg x dx$, $\int p(x)\text{arcctg} x dx$ bularda $p(x)$ biror darajali ko'p had ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda ishlatiladi. Bu integrallarni hisoblashda 1) gurux integrallarda u uchun $p(x)$ ko'p had, qolgan qismi dv uchun olinib, 2) gurux integrallarda u uchun mos ravishda $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg} x$ lar, qolgan qismi dv uchun olinadi.

Bo'laklab integrallashga bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = x$, $dv = \cos x dx$ deb

Bo'laklasak, $du = dx$, $v = \int \cos x dx = \sin x$ bo'lib, (1) formulaga asosan,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C \quad \text{natijaga ega bo'lamiz.}$$

Bu integralda (1) formuladan foydalanish natijasida ikkinchi integral $\int \sin x dx$ hosil bo'ldi, bu jadval integrali bo'lganligi uchun osongina topildi.

2-misol. $\int x^2 e^{3x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek $u = x^2$, $dv = e^{3x} dx$ ko'rinishda bo'laklab olsak,

$$du = 2x dx, \quad v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} \quad \text{hosil bo'ladi. (1) formulaga asosan}$$

$\int x^2 e^{3x} dx = x^2 \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx$ bo'ladi. Oxirgi hosil bo'lgan integral berilgan integralga nisbatan soddalashdi (berilgan integralda 2- darajasi, ikkinchisida buning darajasi bittaga kamaydi). Keyingi integralda yana (1) formulani qo'laymiz.

$$\int x e^{3x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{3x}, \quad v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right| = x \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} e^{3x} + C_1$$

Shunday qilib, natijada

$$= \frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1$$

$$\int x^2 e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \left[\frac{1}{3} e^{3x} \left(x - \frac{1}{3} \right) + C_1 \right] =$$

hosil bo'ladi.

$$\frac{e^{3x}}{3} \left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9} \right) + C$$

3-misol. $\int x^3 \cos 2x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqorida eslatilganidek emas, teskarisini ya'ni $u = \cos 2x$, $dv = x^3 dx$ bo'laklab olaylik; bu holda $du = -2 \sin 2x dx$, $v = \frac{x^4}{4}$ bo'lib (1) formuladan foydalangandan keyin

$$\int x^3 \cos 2x dx = \cos 2x \cdot \frac{x^4}{4} + \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \sin 2x dx = -\frac{x^4}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \int x^4 \sin 2x dx$$

ifoda hosil bo'ladi. Keyingi $\int x^4 \sin 2x dx$ integral berilgan $\int x^3 \cos 2x dx$ integralga nisbatan murakkabroqdir (x ning darajasi bittaga ortdi). Demak, bunday bo'laklab olish maqsadga muvofiq emas, ya'ni $u = x^3$, $dv = \cos 2x dx$ deb olish kerak edi. (Bu integralni hisoblashni o'quvchiga havola qilamiz).

4-misol. $\int \arccos x dx$ integralni hisoblang.

$$\text{Yechish. } \int \arccos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \arccos x, \quad du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2xdx = \frac{dt}{2} \\ xdx = -\frac{dt}{2} \end{array} \right| = x \arccos x + \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = x \arccos x - \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$$

$$+ C = x \arccos x - \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

Bu integralda bir marta bo'laklab integrallagandan keyingi hosil bo'lgan integralda o'zgaruvchini almashtirish usulidan foydalanib integralladik. Integrallash usullarini qo'llashda o'zgaruvchini almashtirganda yoki bo'laklab integrallaganda yozuvda tartib bo'lishi uchun yuqoridagi integralni hisoblangandagidek yozishga odat qilishni tavsiya etiladi.

5-misol. $J = \int e^x \cos x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bo'laklab integrallasak

$$J = \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx, \text{ hosil bo'ladi.}$$

Keyingi integral, berilgan integral bilan o'xshashdek tuyuladi, lekin oxirgi integralda bo'laklab integrallash formulasini ikkinchi marta qo'llash bilan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x, \quad du = \cos x dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right| = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \text{ Shunday qilib,}$$

$$J = e^x \cos x + e^x \sin x - J$$

J hisoblanishi kerak bo'lgan integralga nisbatan oddiy chiziqli tenglamaga keldik. Oxirgi tenglamadan

$$2J = e^x \cos x + e^x \sin x \quad \text{ëku} \quad J = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C \text{ natijaga ega bo'lamiz.}$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chekli sondagi funktsiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali nimaga teng?
2. O'zgaruvchini almashtirib integrallashning mohiyati nima?
3. Bevosita integrallash nima?
4. Bo'laklab integrallash usuli nimaga asoslanadi?
5. Bo'laklab integrallash formulasini yozing?
6. Bo'laklab integrallash qanday holda maqsadga muvofiq bo'ladi?
7. Qanday hollarda bo'laklab integrallashdan foydalaniladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

1. $\int \sin 3x dx$.
2. $\int \frac{2x-7}{x^2-7x+5} dx$.
3. $\int e^{-x^3} x^2 dx$.
4. $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$.
5. $\int (e^x + e^{-\frac{x}{2}}) dx$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 5x}$.
7. $\int (5-2x)^9 dx$.
8. $\int \sqrt[3]{7-3x} dx$.
9. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} dx$.
10. $\int \cos(1-3x) dx$.
11. $\int \sin(5x+7) dx$.
12. $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$.
13. $\int 3^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.
15. $\int \frac{1-3\sin x}{\cos^2 x} dx$.
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-5x}}$.
17. $\int x^2 \sin x dx$.
18. $\int x \ln x dx$.
19. $\int \arctg x dx$.
20. $\int \arcsin x dx$.
21. $\int x^2 e^{2x} dx$.
22. $\int e^x \sin x dx$.
23. $\int (x+3) \sin x dx$.
24. $\int x \cos \left(\frac{x}{2} \right) dx$.
25. $\int x \arctg x dx$.
26. $\int \frac{dx}{(3x+1)^3}$.
27. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6} dx$.

3-4 mavzu. Eng sodda ratsional kasrlar va ularni integrallash

Reja: 1. Ratsional kasr funktsiyalarni integrallash

2. To'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funktsiyalar haqida
3. To'g'ri kasr ratsional funtsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash va ularni integrallash
4. Noto'g'ri kasr ratsional funtsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash

Tayanch ibora va tushunchalar

Kasr ratsional funktsiyalar, to'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funktsiyalar, ko'p hadni ko'p hadga bo'lish, sodda kasrlar, ratsional funktsiya yoyilmasi, noma'lum koeffitsientlar usuli.

1. Ratsional kasr funktsiyalarni integrallash.

To'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funktsiyalar haqida.

Yuqorida ko'rsatilgan integrallash usullari yordamida hamma integrallarni hisoblash mumkin deb bo'lmaydi. Shunday funktsiyalar sinflari borki, ular uchun muayyan usullardan foydalanib ularni jadval

integrallariga yoki integrallash usullaridan foydalanish uchun qulay qo'lga keltirish mumkin, shunday funktsiya sinflaridan ayrimlarini qaraymiz.

Ma'lumki, har qanday ratsional funktsiyani ushbu ko'rinishida ifodalash mumkin, ya'ni

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}$$

Suratdagi ko'p hadning darajasi maxrajdagi ko'p had darajasidan kichik, ya'ni $m < n$ bo'lsa, berilgan kasrga **to'g'ri kasr ratsional** funktsiya deyiladi. Suratdagi ko'p hadning darajasi $m \geq n$ bo'lsa, **noto'g'ri kasr ratsional funktsiya** deyiladi. Kasr noto'g'ri kasr ratsional funktsiya bo'lsa, suratni maxrajga, ko'p hadni ko'p hadga bo'lish qoidasiga asosan bo'lib, uning butun qismini ajratib, uni butun va to'g'ri kasr ratsional funktsiyaga keltirish mumkin.

Masalan, $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x}$ noto'g'ri kasr ratsional funktsiyani, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ ko'p

hadni $x^2 - x$ ko'p hadga bo'lib, $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x} = x + 4 + \frac{7x + 1}{x^2 - x}$ ko'rinishda yozish

mumkin. Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto'g'ri kasr ratsional funktsiya bo'lsa, uni $\frac{Q(x)}{P(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$

shaklda ifodalash mumkin, bu yerda $T(x)$ butun ratsional funktsiya, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri ratsional kasr funktsiyadan iborat. $T(x)$ funktsiyani osongina integrallash mumkin.

Shunday qilib, noto'g'ri kasr ratsional funktsiyani integrallashni, $\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional funktsiyani integrallashga keltiriladi.

1). To'g'ri kasr ratsional funtsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash va ularni integrallash

1) $\frac{A}{x-a}$; 2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k > 1$ *большее* *числа*); 3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$; ($\frac{p^2}{4} - q < 0$ ya'ni, kvadrat uch qad haqiqiy ildizga ega emas);

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n > 1$ butun son, $\frac{p^2}{4} - q < 0$) ratsional to'g'ri kasrlarga **sodda kasr**

ratsional funktsiyalar deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

Birinchi ikki xildagi funktsiyalarni osongina integrallash mumkin, ya'ni,

1) $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C$, bo'ladi.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$

Endi ushbu 3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx$ integralni hisoblaymiz.

Oldin xususiyl hol $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx$ integralni qaraylik. x^2+px+q dan to'la kvadrat ajratib,

$x + \frac{p}{2} = t$ almashtirishdan keyin quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \left| \begin{matrix} x + \frac{p}{2} = t \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)},$$

bu yerda $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Oxirgi integralda jadval integralidan foydalanib,

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \quad (2) \text{ natijani hosil qilamiz.}$$

Endi $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx$ integralni hisoblaymiz.

$Ax + B = (2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B$ shakl o'zgartirishdan foydalanib, integralni quyidagicha yozamiz.

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{(2x + p) \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2 + px + q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{1}{x^2 + px + q} dx. \end{aligned}$$

Oxirgi tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} = \ln |x^2 + px + q| + C_1 \text{ bo'lib, ikkinchi integral (2) formulaga asosan,}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C_2$$

$$\text{Shunday qilib, } \int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C$$

natijaga ega bo'lamiz.

Bir necha misollar qaraymiz.

1-misol. $\int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funktsiya noto'g'ri kasr ratsional funktsiyadan iborat. Uning butun qismini ajratamiz:

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} -x^4 \\ x^4 + 9x^2 \\ \hline -9x^2 \\ -9x^2 - 81 \\ \hline 81 \end{array} & \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9} \end{array} \quad \text{Demak, } \frac{x^4}{x^2 + 9} = x^2 - 9 + \frac{81}{x^2 + 9} \text{ bo'ladi.}$$

$$\text{Shunday qilib, } \int \frac{x^4}{x^2 + 9} dx = \int \left(x^2 - 9 + \frac{81}{x^2 + 9} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 9x + 81 \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = \frac{x^3}{3} - 9x + 27 \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$$

2-misol. $\int \frac{x + 3}{x^2 - 8x + 25} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Maxrajdagi kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratamiz:
 $x^2 - 8x + 25 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 25 = (x - 4)^2 + 9$, hamda $x - 4 = t$, $dx = dt$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int \frac{x+3}{x^2-8x+25} dx = \int \frac{t+4+3}{t^2+9} dt = \int \frac{tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+9} + 7 \int \frac{dt}{t^2+3^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |t^2+9| + \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{1}{2} \ln(x^2-8x+25) + \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3} + C.$$

2. To'g'ri kasr ratsional funtsiyalarni sodda kasrlar ko'rinishida ifodalash.

$\frac{R(x)}{P(x)}$ to'g'ri kasr ratsional funksiyaning maxrajini

$P(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s \cdot \dots \cdot (x^2+2px+q)^t \cdot (x^2+2kx+\ell)^m \cdot \dots$, ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa,

bu funktsiyani yagona

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + \dots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + \dots +$$

$$+ \frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \frac{F_1x+E_1}{(x^2+2kx+\ell)} + \dots + \frac{F_mx+E_m}{(x^2+2kx+\ell)^m} + \dots \quad (1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bunda $r, s, \dots, t, m$, musbat butun sonlar, a, b, p, q, k, ℓ haqiqiy sonlar.

$A_1, A_2, \dots, A_r, B_1, \dots, B_s, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ lar ayrim haqiqiy sonlar. (1) tenglikka to'g'ri ratsional funksiyaning **sodda kasrlar orqali yoyilmasi** deyiladi.

Yoyilmadagi $A_1, A_2, \dots, A_r, M_1, N_1, \dots, M_t, N_t, \dots$ koeffitsientlarni topish uchun uni $P(x)$ ga ko'paytiramiz. $P(x)$ ko'p had bilan (1) yoyilmaning o'ng tomonida hosil bo'lgan ko'p had o'zaro teng bo'lishi uchun bir xil darajali x lar koeffitsientlari o'zaro teng bo'lishi kerak. Bir xil darajali x lar koeffitsientlarini tenglashtirib $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, \dots$, noma'lum koeffitsientlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu tenglamalar sistemasini yechib aniqmas koeffitsientlarni topamiz.

Ratsional funkiya yoyilmasidagi noma'lum koeffitsientlarni bunday usul bilan topishga noma'lum **koeffitsientlar usuli** deyiladi.

Bu usulni bir necha misollarda qaraymiz.

1-misol. $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$ ratsional funktsiyani sodda kasrlar yoyilmasi ko'rinishida yozing.

Yechish. Maxrajni $x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$ chiziqli ko'paytuvchilarga ajratib, (1) formulaga asosan, qo'yidagicha yozamiz:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x-2}.$$

Oxirgi tenglikni x^2-5x+6 ga ko'paytirib $2x-1 = A_1(x-2) + A_2(x-3)$ *ëku* $2x-1 = (A_1+A_2)x - 2A_1 - 3A_2$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil darajali x lar koeffitsientlarini tenglashtirib

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2, \\ -2A_1 - 3A_2 = -1 \end{cases}$$

A_1 va A_2 noma'lumlarga nisbatan, chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qildik. Bundan $A_1 = 5, A_2 = -3$ bo'ladi.

Shunday qilib, $\frac{2x-1}{x^2-5x+6} = \frac{5}{x-3} - \frac{3}{x-2}$ hosil bo'ldi.

2-misol. $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$ ratsional kasrni, sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida yozing.

Yechish. (1) formulaga asosan, quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Oxirgi tenglikni $x(x^2 + 1)^2$ ga ko'paytirib quyidagini hosil qilamiz:

$$x^2 - 1 = A_1(x^2 + 1)^2 + (M_1 x + N_1)x(x^2 + 1) + (M_2 x + N_2)x \quad \text{ëku}$$

$$x^2 - 1 = (A_1 + M_1)x^4 + N_1 x^3 + (2A_1 + M_1 + M_2)x^2 + (N_1 + N_2)x + A_1$$

x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 larning koeffitsientlarini tenglashtirib

$$x^4 \div 2A_1 + M_1 = 0,$$

$$x^3 \div N_1 = 0,$$

$$x^2 \div 2A_1 + M_1 + M_2 = 1,$$

$$x^1 \div N_1 + N_2 = 0,$$

$$x^0 \div A_1 = -1$$

chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemadan

$$N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \quad A_1 = -1, \quad M_1 = 1, \quad M_2 = 2 \quad \text{bo'ladi.}$$

Shuning uchun yoyilma quyidagicha

$$\frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{bo'ladi.}$$

Endi bir necha integrallarni hisoblaymiz.

3-misol. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ funktsiyani $\left(\frac{-1}{x-2} + \frac{1}{x-3} \right)$ ikkita sodda kasrning ayirmasi

ko'rinishda yozish mumkin.

Shuning uchun,

$$\int \frac{1}{(x-2)(x-3)} dx = -\int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) dx = -\ln|x-2| + \ln|x-3| + C = \ln\left(\frac{x-3}{x-2}\right) + C \quad \text{bo'ladi.}$$

4-misol. $\int \frac{x-2}{x^3 + 2x^2} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{x-2}{x^2(x+2)}$ integral ostidagi to'g'ri ratsional funktsiyani sodda kasrlar yig'indisi

shaklida yozamiz:

$$\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+2} \quad \text{oxirgi tenglikni } x^2(x+2) \text{ ga ko'paytirib,}$$

$$x-2 = Ax(x+2) + B(x+2) + Cx^2 \quad \text{ëku} \quad x-2 = (A+C)x^2 + (2A+B)x + 2B \quad \text{tenglikka ega bo'lamiz.}$$

Endi x ning bir xil darajalilari koeffitsientlarini tenglashtirsak, quyidagi tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi.

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + C = 0 \\ x^1 & 2A + B = 1 \\ x^0 & 2B = -2 \end{array} \quad \text{bundan} \quad \begin{array}{l} A + C = 0 \\ 2A + B = 1 \\ B = -1 \end{array} \quad \begin{array}{l} A = 1 \\ C = -1 \end{array} \quad \text{bo'ladi.}$$

Shunday qilib, $\frac{x-2}{x^2(x+2)} = \frac{1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{-1}{x+2}$

Natijada $\int \frac{x-2}{x^3+2x^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln|x| + \frac{1}{x} - \ln|x+2| + C = \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + C$ bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Butun ratsional funktsiya nimadan iborat?
2. Kasr ratsional funktsiyalar qanday?
3. To'g'ri va noto'g'ri kasr ratsional funktsiyalar deb nimaga aytiladi?
4. Noto'g'ri kasr ratsional funktsiyani integrallash, to'g'ri ratsional funktsiyani integrallashga qanday qilib keltiriladi?
5. Sodda kasr ratsional funktsiyalar deb nimaga aytiladi?
6. Sodda kasr ratsional funktsiyalar qanday integrallanadi?
7. Aniqmas koeffitsientlar usuli nima?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu ratsional funktsiyalarni integrallang.

1) $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx$; 2) $\int \frac{5x-1}{2x^2+x-3} dx$; 3) $\int \frac{2x+5}{(x-4)(x+5)} dx$;
4) $\int \frac{6x-7}{x^3-4x^2+4x} dx$.

5-mavzu. Ayrim irratsional funktsiyalarni integrallash

Reja: 1) $\int x^m (a + bx^n)^p$ ko'rinishdagi integrallar

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integral

3) $\int \frac{dx}{(x + \alpha) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integral

Tayanch ibora va tushunchalar

Irratsional funktsiya, kvadrat uch had, to'la kvadrat, o'zgaruvchini almashtirish, N'yuton Binomi, ratsional funktsiya

1. Irratsional funktsiyalarni integrallash

Ko'p hollarda o'zgaruvchini almashtirish bilan ratsional funktsiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunday irratsional funktsiyalarning ayrimlarini qaraymiz.

1. $\int x^m (a + bx^n)^p$ ko'rinishdagi integralni hisoblash talab etilsin, bunda m, n, p ratsional sonlar, a va b lar no'ldan farqli o'zgarmaslar.

1) p butun son bo'lsa, N'yuton Binomi bo'yicha yoyish bilan integrallanadi;

$a + bx^n = t^s$ ratsionallashtiriladi, bunda s p kasrning maxraji;

3) $\frac{m+1}{n} + p$ butun bo'lsa, $ax^{-n} + b = t^s$ almashtirish olinib, ratsional funktsiyaga keltiriladi.

1-misol. $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ integralni toping.

Yechish. Integralni $\int x^{-2/3} (1 + x^{1/3}) dx$ ko'rinishida yozib,

$$m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{3}, p = \frac{1}{2}, \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{2}{3} + 1}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 \text{ bo'lganligi uchun } (1 + x^{1/3}) = t^2$$

almashtirish olsak, $x^{1/3} = t^2 - 1$, $\frac{1}{3} x^{-2/3} dx = 2tdt$, $x^{-2/3} dx = 6tdt$ bo'ladi. Bularni

berilgan integralga qo'ysak, $\int x^{-2/3} (1 + x^{1/3})^{1/2} dx = \int t \cdot 6tdt = 6 \int t^2 dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = 2(1 + \sqrt[3]{x})^{3/2} + C$ bo'ladi.

2-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0 (1+x^4)^{-1/4} dx$, $m = 0$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ (butun)

bo'lganligi uchun $x^{-4} + 1 = t^4$ almashtirish olsak,

$x = (t^4 - 1)^{-1/4}$, $dx = -t^3 (t^4 - 1)^{-5/4} dt$, $\sqrt[4]{1+x^4} = t(t^4 - 1)^{-1/4}$ bo'ladi.

Demak, $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^3 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \arctg t + C$, $t = \sqrt[4]{1+x^4}$ bo'lganligi

uchun,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + 1}{\sqrt[4]{1+x^4} - 1} \right| - \frac{1}{2} \arctg \sqrt[4]{1+x^4} + C \text{ bo'ladi.}$$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integralni qaraymiz.

Bunday ko'rinishdagi ifodalarni integrallash kvadrat uch haddan to'la kvadrat ajratish bilan

$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}}$ yoki $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}}$ jadval integrallaridan biriga keltiriladi.

3-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 + 4 = (x+1)^2 + 4$ to'la kvadrat ajratib, $x+1 = u$

desak, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 4}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + 4} \right| + C = \ln \left| (x+1) + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \right| + C$ bo'ladi.

3) $\int \frac{dx}{(x + \alpha) \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ko'rinishdagi integral, $\frac{1}{x + \alpha} = t$ almashtirish orqali 2.

ko'rinishdagi integralga keltiriladi.

4-misol. $\int \frac{dx}{(x + 1) \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$ integralni hisoblang.

Yechish. $\frac{1}{x + 1} = t$ bilan almashtirsak,

$$t(x + 1) = 1, \quad tx + t = 1, \quad tx = 1 - t, \quad x = \frac{1 - t}{t}, \quad dx = -\frac{1}{t^2} dt$$

bo'lib,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 1) \sqrt{x^2 + 2x + 2}} &= \int \frac{t \left(\frac{-1}{t^2} \right) dt}{\sqrt{\left(\frac{1 - t}{t} \right)^2 + 2 \frac{1 - t}{t} + 2}} = - \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{1 - 2t + t^2}{t^2} + \frac{2 - 2t}{t} + 2}} = \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{1 - 2t + t^2 + 2t}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \end{aligned}$$

bu jadval integraldir. (Oxirgi integralni mustaqil bajarishni o'quvchiga havola qilamiz).

Mustahkamlash uchun savollar

1. Qanday funktsiyalar sinfiga irratsional funktsiyalar deyiladi?
2. Irratsional funktsiyalar qanday integrallanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. Ushbu irratsional funktsiyalarni integrallang.

$$1) \int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}} dx; \quad 2) \int \frac{2x - 3}{\sqrt{8 - 2x - x^2}} dx; \quad 3) \int \frac{7x - 5}{\sqrt{\sqrt{5 + 2x - x^2}}} dx; \quad 4)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2 - \sqrt{2x + 1}}}; \quad 5) \int \frac{\sqrt{x} + 3}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} dx.$$

6-7 mavzu. Trigonometrik funktsiyalarni integrallash

Reja: 1. Har xil argumentli sinus va kosinuslar ko'paytmalari shaklidagi funktsiyalarni integrallash.

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

3. Aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar.

Tayanch ibora va tushunchalar

Trigonometrik funktsiyalarni integrallash, trigonometrik funktsiyalar ko'paytmasini yig'indiga keltirish formulalari, sinus va kosinus funktsiyalar ko'paytmasi darajalaridan birortasi toq, ikkalasi ham juft yoki toq, aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar.

1. Har xil argumentli sinus va kosinuslar ko'paytmalari shaklidagi funktsiyalarni integrallash

$$\int \sin mx \cos nxdx, \int \sin mx \sin nxdx, \int \cos mx \cos nxdx \quad (1)$$

ko'rinishdagi integrallarni hisoblaymiz. Maktab kursidan ma'lum bo'lgan trigonometrik funktsiyalar ko'paytmasini, yig'indiga keltirish

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)], \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \text{ formulalardan foydalanib, (1) ko'rinishdagi integrallarni}$$

$\int \sin ax dx, \int \cos bx dx$ integrallardan biriga keltirib integrallanadi.

1-misol. $\int \sin 2x \cos 7x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Yuqoridagi formulalarning birinchisidan

$$\sin 2x \cos 7x = \frac{1}{2} [\sin(2x + 7x) + \sin(2x - 7x)] = \frac{1}{2} (\sin 9x - \sin 5x),$$

$$\int \sin 2x \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 9x - \sin 5x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 9x dx - \frac{1}{2} \int \sin 5x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} (-\cos 9x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} (-\cos 5x) + C = \frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{18} \cos 9x + C.$$

natijaga ega bo'lamiz.

2-misol. $\int \cos 7x \cos 3x dx, \int \sin 4x \sin 2x dx, \int \sin 5x \cos 3x$ integrallarni mustaqil hisoblang.

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblash.

Bunda m, n lar butun sonlar. Xususiyl hollarda m yoki n sonlardan birontasi 0 ga teng bo'lishi ham mumkin.

1) m yoki n sonlardan bittasi toq bo'lsin. Bu holda integral ratsional funktsiyalarni integrallashga keltiriladi. Bunda integrallash moqiyati quyidagi misollardan tushunarli bo'ladi.

3-misol. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx = -d(\cos x)$ va $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ekanligini hamda $\cos x = z$ almashtirish kiritib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x (-d \cos x) = \\ &= -\int (1 - z^2) z^4 dz = -\int (z^4 - z^6) dz = -\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C. \end{aligned}$$

4-misol. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $\sin x dx = -d(\cos x)$ bo'lgani uchun, $t = \cos x$ almashtirish olsak,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx &= \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x dx = \int \frac{1 - t^2}{t^2} (-dt) = \\ &= -\int \frac{1}{t^2} dt + \int dt = \frac{1}{t} + t + C = \frac{1}{\cos x} + \cos x + C \end{aligned}$$

Bu usuldan m va n sonlardan bittasi toq va musbat boshqasi ixtiyoriy haqiqiy son bo'lganda ham foydalanish mumkin.

2). Endi m va n sonlar ikkalasi ham toq yoki juft va musbat bo'lsin. Bunday hollarda

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

formulalardan foydalanib, darajalarni pasaytirib integrallanadi.

6-misol. $\int \sin^2 x \, dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralni izohlarsiz hisoblaymiz:

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx - \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

7-misol. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Trigonometrik funktsiyalarning darajalarini pasaytirish formulalaridan foydalanib, quyidagi natijaga kelamiz:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int (\sin^2 2x \cos 2x) \, dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d \sin 2x = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{16} \frac{\sin^3 2x}{3} + C = \\ &= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

3. Aniqmas integral haqida yakuniy mulohazalar.

Biz yuqorida elementar funktsiyalarni o'z ichiga olgan muhim integrallash usullarini ko'rdik. Lekin amalyotda faqat shu usullardan aynan foydalanamiz degan fikr bo'lmasligi kerak. Boshqacha qilib aytganda, integral ostidagi funktsiyaning berilishiga qarab unga mos mulohazalardan foydalanish kerak. Masalan,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 6x - 4}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} \, dx &= \int \frac{d(x^3 + 3x^2 - 4x + 5)}{x^3 + 3x^2 - 4x + 5} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \\ &= \ln |x^3 + 3x^2 - 4x + 5| + C \end{aligned}$$

$$\text{yoki } \int \frac{x \, dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 3)}{x^2 + 3} = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 3| + C \quad \text{integrallashni bajarish mumkin.}$$

Juda ko'p integrallarni hisoblashda ayrim xususiy usullardan foydalanib oldingi hisoblangan integrallarga keltiriladi. Shuning uchun amalyotda integrallashda tayyor qo'llanmalardan foydalanish ham mumkin. Masalan [Yu.A. Bro`chkov, O.I.Marichev, A.P.Prudnikov. Tablitso` neopredelyonno`x integralov. M.: Nauka 1986-192s].

Integrallashning bayon etilishidan ma'lumki integrallash texnikasi differentsiallashdan murakkabroqdir. Shuning uchun ham integrallashda shunday ko'nikmalar kerakki, bunga ko'p sondagi misollarni yechish natijasida erishish mumkin.

Ma'lumki differentsial hisobda istalgan elementar funktsiyaning hosilasini topish mumkin edi va u yana elementar funktsiyalar bilan ifodalanar edi. Integral hisobda esa masala boshqacharoq bo'lib, ko'plab

misollar keltirish mumkinki, integral $\left(e^{-x^2}, \frac{1}{\ln x}, \frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x} \right)$ ostidagi funktsiyaning boshlang'ich funktsiyalari mavjud bo'lishiga qaramasdan, ular elementar funktsiyalar orqali ifodalanmaydi. Bunday integrallar yaxshi o'rganilgan va ulardan amaliyotda foydalanish uchun tayyor jadvallar, grafiklar tuzilgan.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Trigonometrik funktsiyalarning ko'paytmasini yig'indiga keltiriladigan formulalarni yozing?
2. Qanday hollarda trigonometrik funktsiyalar ratsionallasadi?
3. Qanday hollarda trigonometrik funktsiyalarning tartibini pasaytirish bilan integrallanadi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Ushbu integrallarni hisoblang.

1. $\int \sin 3x \sin 7x dx$.
2. $\int \sin 5x \cos 3x dx$.
3. $\int \sin x \sin 3x dx$.
4. $\int \sin 3x \cos 2x dx$.
5. $\int \cos 4x \cos 2x dx$.
6. $\int \sin 3x \cos x dx$.
7. $\int \sin x \cos^4 x dx$.
8. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.
9. $\int \sin^2 5x dx$.
10. $\int \cos 7x \cos 3x dx$.
11. $\int \sin 4x \sin 2x dx$.
12. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.
13. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$.
14. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$.
15. $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.
16. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$.
17. $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x} dx$.
18. $\int \sin^4 x dx$.
19. $\int \cos^4 x dx$.
20. $\int \sin^5 x dx$.
21. $\int \cos^5 x dx$.
22. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.
23. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x \sin^3 x} dx$.

8-mavzu. Aniq integral va uning xossalari

Reja:

1. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar
2. Aniq integralning ta'rifi
3. Aniq integralning yig'indining limiti sifatida qarab hisoblash
4. Aniq integralning mavjudligi
5. Aniq integralning hossalari

Tayanch ibora va tushunchalar

Egri chiziqli trapetsiya, kuch tasirida bajarilgan ish bosib o'tilgan yo'lni tezlik bo'yicha topish, moddiy chiziqli masalasini zichlik bo'yicha topish, aniq integral, yig'indining limiti.

Fan va texnikada juda ko'p masalalar chegaralanmagan sondagi cheksiz kichik qo'shiluvchilar yig'indisini hisoblash masalasiga keltiriladi. Bu masala esa, o'z navbatida, matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lgan aniq integral tushunchasiga olib keladi.

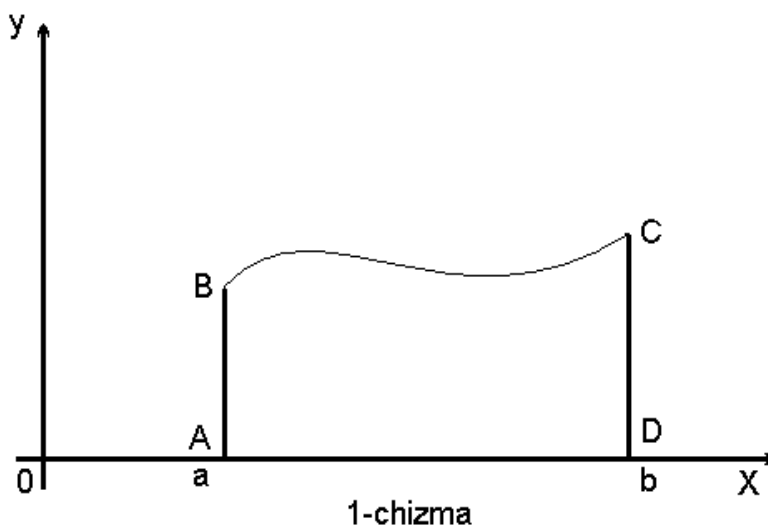
Aniq integral matematika, fizika, texnika va boshqa fanlarda tekshirishning eng kuchli quroli hisoblanadi.

1. Aniq integral tushunchasiga olib keladigan masalalar

1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish masalasi.

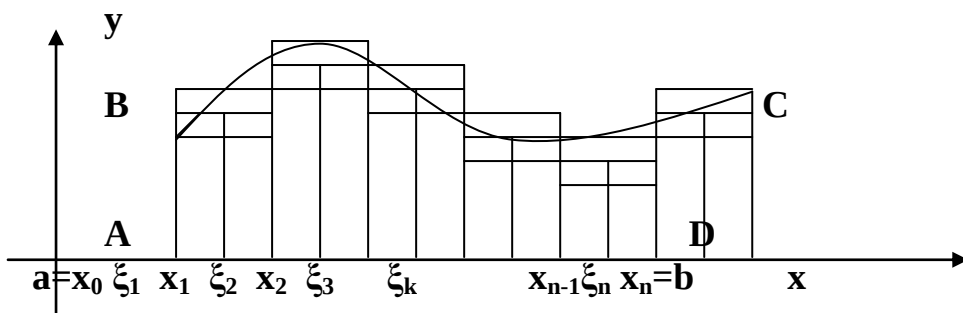
$[a, b]$ kesma, uzluksiz $y = f(x) > 0$ funksiya berilgan bo'lsin.

egri chiziq, $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar va Ox o'qi bilan chegaralangan tekis figura ABCD egri chiziqli trapetsiya deyiladi, shu tarapetsiyaning yuzini topish kerak bo'lsin (1-chizma)



Buning uchun $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta ixtiyoriy bo'lakka bo'lamiz va bo'linish nuqtalaridan Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazib, ABCD egri chiziqli trapetsiyaning n ta kichik egri chiziqli trapetsiyalarga ajratamiz. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ kesmachada ixtiyoriy ξ_k nuqta olib, $f(\xi_k)$ ordinatani o'tkazamiz $[x_{k-1}, x_k]$ kesmachaning uzunligini $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ kabi belgilaymiz va $\max \Delta x_k = \lambda$ deb olamiz.

Bunda $1 \leq k \leq n$ Har bir egri chiziqli trapetsiyada asosi Δx_k , balandligi $f(\xi_k)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak chizamiz (2-chizma).



2-chizma

Bu to'g'ri to'rtburchak yuzlarining yig'indisi quyidagiga teng:

$$S_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (1)$$

$\lambda \rightarrow 0$ da (n bo'linish soni cheksiz o'sganda) S_n ifoda egri chiziqli trapetsiya yuziga tobora yaqinlasha boradi. Shu sababli egri chiziqli trapetsiyaning yuzi uchun (2) ni qabul qilamiz.

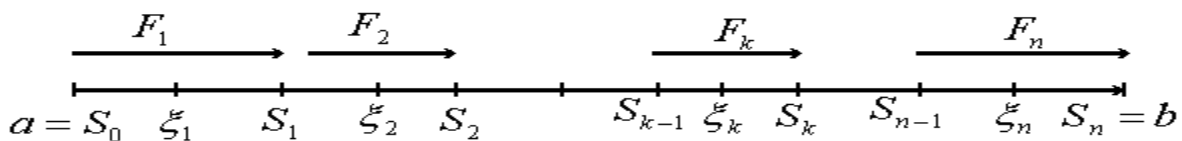
Σ (sigma) yig'indi belgisi, $\sum_{k=1}^n$ simvol k indeks 1 dan n gacha o'zgarganda n ta qo'shiluvchi qo'shilishni bildiradi.

II. Kuch ta'sirida bajariladigan ishni hisoblash masalasi

Agar kattaligi bilan ham, yo'nalishi bilan ham o'zgarmaydigan $\overline{F}$ kuch ta'sirida moddiy nuqta kuchining yo'nalishi bo'yicha S masofaga siljigan bo'lsa, kuchning ishi, mexanikadan ma'lumki, kuch kattaligi $\overline{F}$ ning siljish S ga ko'paytirmasiga teng. $\overline{A} = \overline{F} S$ (3)

Endi $\overline{F}$ kuch o'zgarmas yo'nalishni saqlasa ham sonli kattaligi (miqdori) bo'yicha o'zgargan holni qaraymiz. Biror $\overline{F}$ kuch ta'sirida moddiy nuqta OS to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qilib, $s=a$ vaziyatdan $s=b$ vaziyatga ko'chganda kuchning bajargan ishini hisoblash masalasini qo'yamiz.

Bu masalani yechish uchun 1-masaladagidek $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy ravishda $a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = b$ nuqtalar orqali n ta kesmachalarga bo'lamiz va har bir $[s_{k-1}, s_k]$ kesmachadan ixtiyoriy ravishda ξ_k ($k = 1, n$) nuqta olamiz (3-chizma)



3-chizma

Agar har bir $[s_{k-1}, s_k]$ kesmachada $\overline{F}$ kuch o'zgarmas va $f(\xi_k)$ ga teng deb faraz qilsak, bu kesmachada bajarilgan ish $\overline{F}(\xi) \Delta S_k$ ga teng bo'ladi, bunda $\Delta S_k = s_k - s_{k-1}$.

Bu holda $[a,b]$ kesmada $\overline{F}(S)$ kuch bajargan ish taqriban $\sum_{k=1}^n \overline{F}(\xi_k) \Delta S_k$ (4) ga teng bo'ladi.

Endi $[s_{k-1}, s_k]$ kesmachalarning eng uzunini kichraytira borib, nolga intiltirsak, ya'ni

$$\Delta S = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta S_k \rightarrow 0 \text{ bo'lsa, } \overline{F} \text{ kuch ta'sirida bajarilgan ish uchun } \overline{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \overline{F}(\xi_k) \Delta S_k \quad (5)$$

tenglikni hosil qilamiz.

III. Bosib o'tilgan yo'lni tezlik bo'yicha topish masalasi

Notekis harakatdagi moddiy nuqtaning t momentdagi tezligi $v=v(t)$ berilgan bo'lsin. Vaqt t $t=T_1$ dan $t=T_2$ gacha o'zgarganda bosib o'tilgan yo'lni topish kerak. Ma'lumki, moddiy nuqta notekis harakatlanayotganligi uchun $S=vt$ deb ololmaymiz (tekis harakatda $S=vt$ edi). Bu holda bosib o'tilgan yo'lni xuddi yuqoridagidek aniqlaymiz. Vaqt oralig'i $[T_1, T_2]$ ni ixtiyoriy ravishda $T = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_2$ nuqtalar orqali n ta

kesmachalarga bo'lamiz va har bir $[t_{k-1}, t_k]$ kesmachadan ixtiyoriy ravishda ξ_k nuqta

tanlaymiz. Agar bu kesmachalar yetarli darajada kichik bo'lsa, bu kesmachalarda tezlik $v = v(\xi_k)$ bo'lib, moddiy nuqta tekis harakat qiladi deyish mumkin.

$$[t_{k-1}, t_k] \text{ kesmachada bosib o'tilgan yo'l taqriban } s_k = v(\xi_k) \Delta t_k \quad (6)$$

$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} \quad (k = \overline{1, n})$ bo'lib, butun vaqt oralig'i $[T_1, T_2]$ da bosib o'tilgan yo'l taqriban $s_k = \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k \quad (7)$ ga teng bo'ladi. Vaqt oraliqlari $[t_{k-1}, t_k]$ ning eng kattasini nolga intiltirsak, ya'ni $\Delta t = \max \Delta t_k \rightarrow 0$ bo'lsa, bosib o'tilgan yo'l $1 \leq k \leq n$ uchun $s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t_k \quad (8)$ ni hosil qilamiz.

IV. Moddiy chiziq masalasini zichlik bo'yicha topish

Biror moddiy chiziq kesmasini olib, bu chiziqning har bir S nuqtasida zichlik ma'lum bo'lsin, ya'ni $\delta = f(s), 0 \leq s \leq s$. Xuddi yuqoridagidek $[0; s]$ kesmada moddiy chiziq

masalasi quyidagicha aniqlanadi; $m = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta s_k \quad (9)$, bunda

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = s$$

bo'lib, $[0; s]$ kesmaning bo'linish nuqtalari, $s_{k-1} \leq s_k \leq s_k, \Delta s_k = s_k - s_{k-1}$
 $\Delta s = \max \Delta s_k \quad (k = 1, n) \dots 1 \leq k \leq n$

Agar $[s_{k-1}, s_k]$ kesmachani yetarli darajada kichik deb qarasak, bu kesmachada zichlikni o'zgaras va $f(\xi_k)$ ga teng deb olishimiz mumkin. Bu holda yig'indidagi har bir $f(\xi_k) \Delta s_k$ qo'shiluvchi $[s_{k-1}, s_k]$ oraliqdagi chiziqning massasini ifodalaydi.

Shunday qilib, yuqoridagi masalalarni yechish umuman olganda quyidagi $\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta s_k$ ko'rinishdagi yig'indilarning limitini hisoblash masalasiga olib keladi. Shunga o'xshash ko'pgina fizik, geometrik va hokazo masalalar shu ko'rinishdagi yig'indining limitini izlashga keltiriladi.

2. Aniq integralning ta'rifi

Yuqoridagi masalalarni yechish bunga o'xshash ko'pdan-ko'p masalalarni yechish uchun zarur bo'lgan quyidagi matematik amallarni ta'riflashga olib keladi.

$[a, b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

1) $[a, b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar yordamida n ta qismga bo'lamiz. Bu qismlar uzunligi $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k = \overline{1, n})$ ga teng bo'lib, eng kattasining uzunligini λ bilan belgilaymiz.

2) Bu qismchalarning har birida $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ bo'ladigan ixtiyoriy ξ_k sonni tanlab olamiz va har bir bunday son uchun funksiyaning mos qiymati $f(\xi_k)$ ni aniqlaymiz. Har bir oraliq uchun $f(\xi_k) \Delta x_k$ ko'paytmani hisoblaymiz.

3) Barcha n ta qismchalar bo'yicha $S_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ (10) ko'paytmalar

yig'indisini tuzamiz. (1) yig'indi $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi integral yig'indisi deb ataladi. Integral yig'indini tuzish ξ_k berilgan $[a,b]$ kesmani ixtiyoriy qisman bo'laklarga bo'lish va har bir qismchada sonni ixtiyoriy tanlab olishdan iboratdir.

4) Tuzilgan oraliqchalardan eng kattasining uzunligi λ ni cheksiz kichraytirishi uchun oraliqlarni yanada maydalashtirib boriladi: $\lambda \rightarrow 0$ da integral yig'indi chekli limitga ega bo'lgan o'zgaruvchi miqdor bo'lib qoladi.

1-ta'rif. Agar $[a,b]$ kesmada $\lambda \rightarrow 0$ shartni qanoatlantiradigan har qanday bo'lakchalarga ajralganda va $[x_{k-1}, x_k]$ kesmada ξ_k nuqtani istagancha tanlab olganda (10) integral yig'indi birgina S limitga intilsa, u holda bu limit $[a,b]$ kesmada $f(x)$ funksiyaning aniq integrali deb ataladi va $\int_a^b f(x) dx$ bilan belgilanadi ("f(x) dan x bo'yicha a dan b gacha olingan aniq integral" deb o'qiladi):

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad (11). \text{ Bunda } \int \text{ belgi lotincha "summa" -- "yig'indi"}$$

so'zining bosh harfidan olingan bo'lib, lotincha S harfining cho'ziq holati;

$f(x)$ -integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ -integral ostidagi ifoda, $[a,b]$ -integrallash oralig'i, a va b sonlar mos ravishda integrallashning quyi va yuqori chegaralari deyiladi.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun (11) limit mavjud bo'lsa, u holda funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Aniq integral ta'rifidan foydalanib, 1-§ da ko'rilgan geometrik, fizik masalalar yig'indisining limitini aniq integral sifatida quyidagicha ifodalash mumkin (1-jadval);

1-jadval

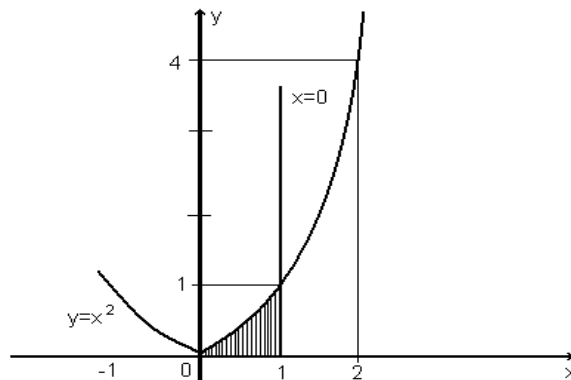
№	T/b	Qo'yilgan masala	Matematik ifodasi
1.		Egri chiziqli trapetsiya yuzi	$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$
2.		$\overline{F}$ kuch ta'sirida bajarilgan ish	$A = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \Delta S_k = \int_a^b F(S) dS$
3.		Tezlik bo'yicha bosib o'tilgan yo'l	$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(\xi_k) \Delta t = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt$
4.		Zichlik bo'yicha massa	$m = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta S_k = \int_0^S f(S) dS$

3. Aniq integralni yig'indining limiti sifatida qarab hisoblash

1-misol, $y = x^2$, $y=0$, $x=1$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzni hisoblang.

Yechish

Bu yerda ham $[0,1]$ kesmani n ta teng bo'lakka bo'lamiz; (4-chizma)



4-Chizma

Bularning har birini h bilan belgilaymiz $h = \frac{1}{n}$

Qisman kesmachalarning yana o'ng

oxirlarini tanlab olsak, $f(x) = x^2$ bo'lgani uchun; $f(x_1) = \left(\frac{1}{n}\right)^2$

$f(x_2) = \left(\frac{2}{n}\right)^2$, $f(x_3) = \left(\frac{3}{n}\right)^2$..., $f(x_n) = \left(\frac{n}{n}\right)^2$ bo'lib integral

yig'indining qo'shiluvchilari $x_k^2 \Delta x_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{k^2}{n^3}$ ko'rinishda bo'ladi.

Integral yig'indi;

$$S_n = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) =$$

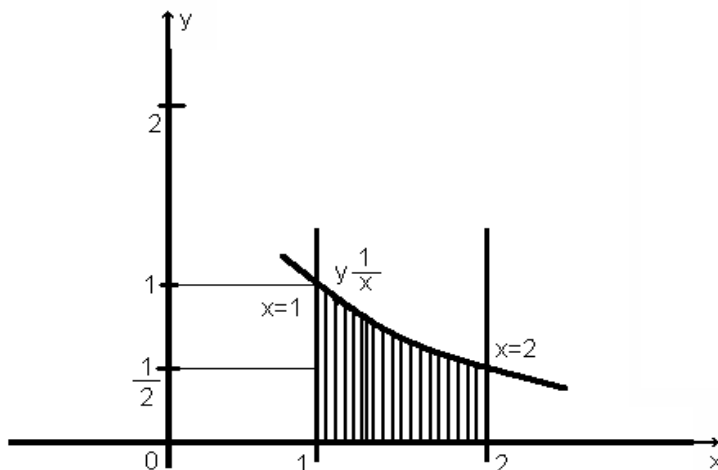
$$\frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

$n \rightarrow \infty$ da S_n ni limiti $s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)$ bo'ladi.

Shunday qilib, $s = \frac{1}{3}$ kv, birlik.

2-misol. Aniq integralning ta'rifidan foydalanib, $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ aniq integralni hisoblang.

Yechish



5-chizma

1) [1:2] kesmani geometrik progressiya taskil qiladigan $x_0 = 1$,

$x_1 = q, \dots, x_n = q^n$ yordamida n ta bo'lakka bo'lamiz. Bunda $\Delta x_n = q^{n-1}(q - 1)$.

2) $f(x_1) = \frac{1}{q}, f(x_2) = \frac{1}{q^2}, \dots, f(x_n) = \frac{1}{q^n} = \frac{1}{2}$ bo'lib integral yig'indining

qo'shiluvchilari $\frac{1}{x_k}, \Delta x_k = \frac{q^n - q^{n-1}}{q^n}$ ko'rinishda bo'ladi.

3) Integral yig'indi: $S_n = \frac{1}{q}(q - 1) + \frac{1}{q^2}(q^2 - q) + \dots + \frac{1}{q^n}(q^n - q^{n-1}) =$ chunki

$$\frac{1}{q}(q - 1) + \dots + \frac{1}{q}(q - 1) = \frac{n}{q}(q - 1) = \frac{n(\sqrt[n]{2} - 1)}{\sqrt[n]{2}},$$

$$q^n = 2 \Rightarrow q = \sqrt[n]{2}$$

4) $n \rightarrow \infty$ da s_n ning limiti:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2^{\frac{1}{n}} - 1)}{2^{\frac{1}{n}}} = t, \text{ deb } - \text{ olsak}$$

$$2^{\frac{1}{n}} = 1 + t * \text{ bo'lib }, n \rightarrow \infty \text{ da }, t \rightarrow 0 \text{ bo'ladi}$$

$$\text{dan } \frac{1}{n} \ln 2 = \ln(1 + t), \text{ yoki }, n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + t)} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \ln 2}{\ln(1 + t) \cdot (1 + t)} = \ln 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1 + t)} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + t} = \ln 2.$$

$$\text{Demak }, \dots \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$$

Yuqorida qaralgan misollar aniq integrallarni integral yig'indilarning limiti deb qarab, bevosita hisoblash katta qiyinchiliklar bilan bog'lik ekanini ko'rsatadi. Integral ostidagi funksiyalar juda sodda hollarda ham bu usul ancha og'ir hisoblasharni talab etadi. Murakkabroq funksiyalardan aniq integrallar topish yana ham qiyinroq hisoblashlarga olib keladi. Shuning uchun aniq integrallarni hisoblashning qulay usulini topish masalasi o'z-o'zidan kelib chiqadi. N'yuton-Leybnis kashf etgan bu usulda integrallash bilan differensiallash orasida mavjud munosabatdan foydalaniladi.

Bu usulni bayon etishda avval funksiya aniq intergrali mavjudligining zarur va yetarli shartini bayon etamiz.

4. Aniq integralning mavjudligi

Funksiyaning integrallanuvchi bo'lishi yoki bo'lmasligini aniq integral ta'rifi yordamida tekshirish mumkin. Lekin ko'pchilik hollarda integral yig'indining chekli limitga ega bo'lishini ko'rsatish juda murakkab bo'ladi.

$Y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va chegaralangan bo'lsa, $[a,b]$ segmentning ixtiyoriy n bo'lakka bo'linish nuqtalari to'plami. $p = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Aniq integral mavjudligining zarur va yetarli shartlarini ifodalovchi teoremlarni isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishi uchun $\forall \varepsilon > 0$ olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilib, $[a,b]$ oraliqning diametri $\lambda_p < \delta$ bo'lgan har qanday P bo'linishga nisbatan $|S - s| < \varepsilon$ (12) tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir, yani $\lim(S-s)=0$ (13) iboratdir. Bunda S va s lar mos ravishda yuqori va quyi integral yig'indilar.

2-teorema. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralangan va monoton bo'lsa, funksiya shu kesmada integrallanuvchi bo'ladi.

4-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada chegaralangan va bu kesmaning chekli sondagi nuqtalarida uzilish (sakrash) ga ega bo'lib, qolgan barcha nuqtalarida uzliksiz bo'lsa, funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

3-misol. $f(x) = 2^x$ funksiya $[0;10]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishligini tekshiring.

Yechish. $[0;10]$ kesmani n ta teng bo'lakka bo'lamiz:

$$\Delta x_n = \frac{10}{n} \Rightarrow x_0 = 0, x_1 = \frac{10}{n}, x_2 = \frac{20}{n}, \dots, x_n = 10 \quad \text{Endi}$$

$$\left[0; \frac{10}{n}\right], \left[\frac{10}{n}; \frac{20}{n}\right], \dots, \left[\frac{(n-1)10}{n}; 10\right] \text{ kesmalarning har biridan } f(x) = 2^x$$

funksiyaning eng kichik m_k va eng katta M_k qiymatlarini aniqlaymiz.

$$m_k : 2^0, 2^{\frac{10}{n}}, \dots, 2^{\frac{(n-1)10}{n}} \quad M_k : 2^{\frac{10}{n}}, 2^{\frac{20}{n}}, \dots, 2^{10}$$

$$S = \frac{10}{n} \left(2^0 + 2^{\frac{10}{n}} + \dots + 2^{\frac{(n-1)10}{n}} \right) = \frac{10}{n} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2^{\frac{10}{n}} - 1}$$

$$S = \frac{10}{n} \left(2^{\frac{10}{n}} + 2^{\frac{20}{n}} + \dots + 2^{10} \right) = \frac{10}{n} \cdot \frac{2^{10} - 1}{2^{\frac{10}{n}} - 1} \cdot 2^{\frac{10}{n}}$$

Integral (Darbu) yig'indilari $\lambda \rightarrow 0$ da umumiy limitga ega bo'lishi kerak, chunki $f(x) = 2^x$ funksiya $[0;10]$ da integrallovchidir (2-teorema).

Endi 1-teorema (integrallanuvchi bo'lishining zaruriy va yetarli sharti) ning bajarilishini tekshiramiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = \lim_{n \rightarrow \infty} (2^{10} - 1) \cdot \frac{\frac{10}{n}}{2^{\frac{10}{n}} - 1} = (2^{10} - 1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10}{n}}{2^{\frac{10}{n}} - 1} = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2} \quad \text{va}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S = (2^{10} - 1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{10}{n}}{2^{\frac{10}{n}} - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{10}{n}} = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}, \text{ chunki } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Demak $\lim_{n \rightarrow \infty} s = \lim_{n \rightarrow \infty} s = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}$, Bu esa $f(x) = 2^x$ funksiyaning $[0;10]$ kesmada integrallanuvchi bo'lishini bildiradi.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Kuch ta'sirida bajarilganishni qanday hisoblash mumkin?
2. Bosib o'tilgan yo'lni tezlik bo'yicha toping?
3. Aniq integralning ta'rifini ayting?
4. Integrallanuvchi funksiya deb nimaga aytiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Quyidagi aniq integralni hisoblang:

1. $\int_0^2 (3x + 1) dx, J : 8;$
2. $\int_{-5}^{+1} \frac{dx}{x}, J : -\ln 5;$
3. $\int_1^2 \frac{x^2 + 1}{x} dx; J : 1 + \ln 2$
4. $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx; J : 2$
5. $\int_1^4 \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx; J : 9;$
6. $\int_1^3 (x^2 - x + \frac{1}{x}) dx, J : \frac{14}{3} + \ln 3;$
7. $\int_0^3 (x - 2)^2 dx, J : 3$
8. $\int_1^4 \frac{x^2 + 4x}{x^2} dx, J : 3 + 8 \ln 2;$
9. $\int_1^3 \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x^2} dx, J : 7 \frac{1}{3}$
10. $\int_1^2 (x^2 - 3)^2 x dx, J : \frac{7}{6}$

9-10 mavzu. Aniq integralni hisoblash

Reja: 1. N'yuton-Leybnis formulasi

2. Aniq interegralda o'zgaruvchini almashtiruvchi
3. Aniq integralda bo'laklab integrallash
4. Aniq integral xossalari

Tayanch ibora va tushunchalar

Integral hisobning asosiy formulasi, N'yuton-Leybnis formulasi, aniq interegralda o'zgaruvchini almashtiruvchi, aniq integralda bo'laklab integrallash

Aniq integrallarni integral yig'indilarning limiti sifatida hisoblash hatto oddiy funksiyalar uchun ham murakkab. Integralning yuqori chegarasi bo'yicha haqidagi 10- xossa yig'indilarini jamlash va limitga o'tish amallarini chetlab o'tib, aniq integrallarni hisoblashning sodda usullarini aniqlash imkonini beradi. Aniq integralni hisoblashning bu yangi usuli biz keltirib chiqarishga endi kirishadigan N'yuton-Leybnits formulasi orqali hisoblanadi.

1. Aniq integralning xossalari

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Aniq integralning ta'rifidan kelib chiqib, uning sodda xossalari o'rganamiz:

1. Agar $f(x)$ funksiyaga $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi bo'lsa u istalgan $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ da ham integrallanuvchi bo'ladi.

2. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin, ya'ni agar $k=\text{const}$, u holda

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

3. Agar $f(x)$ bilan birga $\varphi(x)$ funksiya ham $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsa, u holda

$$\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx \quad (2)$$

4. Aniq integralning qiymati, integral ostidagi ifodada argumentning qanday belgilanishiga bog'liq emas, ya'ni

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du \quad (3)$$

5. Integral chegaralarining o'rnini almashtirilganda aniq integral o'z ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartiradi, yani

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (4).$$

6. Yuqori va quyi chegaralari teng bo'lgan aniq integral ta'rifga ko'ra nolga teng deb qabul qilinadi, $\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (5)$

7. Agar $[a,b]$ ($a < b$) kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $f(x) \leq \varphi(x) \quad (6)$

shartni qanoatlantirsa, u holda $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx \quad (7)$

8. Agar $f(x)$ funksiya uchun $\int_a^c f(x) dx, \int_c^b f(x) dx, \int_a^b f(x) dx$ mavjud bo'lsa, u

holda har qanday uchta a, b, c son uchun $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (8)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

9. (**O'rta qiymat haqida teorema**). Agar $[a,b]$ kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lib, $\varphi(x)$ funksiya o'z ishorasini o'zgartirmasa, u holda (a,b) oraliqda kamida bitta shunday c nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(c) \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (a < c < b) \quad (9) \text{ tenglik o'rinli bo'ladi.}$$

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \quad (10) \text{ funksiyaning } [a,b] \text{ kesmadagi o'rta qiymati deyiladi.}$$

Barcha xossa isbotlari [1],

2. N'yuton-Leybnis formulasi.

$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1)$ funksiya $f(x)$ ning $[a,b]$ da boshlang'ich funksiyasi bo'ladi. Ma'lumki,

$f(x)$ funksiyaning boshqa boshlang'ich funksiyalari $F(x)$ dan faqat o'zgarmas qo'shiluvchi bilan farq

qiladi. Shuning uchun, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshqa boshlang'ich funksiya bo'lsa, u holda

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad (2) \text{ bo'ladi, bunda } C = \text{const. Demak, } \Phi(x) = \int_a^x f(t) dt + C \dots (2)$$

$$(2) \text{ tenglikda } x=a \text{ deb olib, } \Phi(a) = \int_a^a f(t) dt + C = 0 + C = C \quad (3), \text{ so'ng } x=b$$

$$\text{deb olib, } \Phi(b) = \int_a^b f(x) dx + C \quad (4), \text{ bo'lishini topamiz.}$$

$$(3) \text{ va } (4) \text{ tengliklardan } \int_a^b f(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (5) \text{ bo'lishi kelib chiqadi.}$$

(5) formula N'yuton- Leybnis yoki integral hisobning asosiy formulasi deb yuritiladi.

$$\text{Odatda } \Phi(b) - \Phi(a) \text{ ayirma } \Phi(x) = \left| \int_a^b \right. \text{ kabi yoziladi:}$$

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x) = \int_a^b. \text{ Bu belgilashdan foydalanib, N'yuton -Leybnis formulasini}$$

$$\int_a^x f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^x = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (6) \text{ korinishda yozish mumkin. (6) tenglik aniq}$$

integralni aniqlash integral bilan bog'laydi. Bunda:

1) Berilgan integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi topiladi.

2) Boshlang'ich funksiya $x=b$ va $x=a$ lar qo'yilib, uning xususiy qiymatlari topiladi (b - integrallashning yuqori, a quyi chegaralaridir).

3) Boshlang'ich funksiyaning xususiy qiymatlari ayirmasi $F(b) - F(a)$ topiladi.

$$\text{4-misol. } \int_a^b x^2 dx \text{ integralni hisoblang.}$$

Yechish. Ravshanki, $f(x) = x^2$ ning boshlang'ich funksiyasi $\Phi(x) = \frac{x^3}{3}$ bo'ladi. Unda

$$\text{N'yuton Leybnis (6) formulasidan foydalanib topamiz: } \int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{1}{3} (b^3 - a^3).$$

$$\text{5-misol } \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = 0 - 1 = -1$$

6-misol

$$\begin{aligned} \int_1^4 (\sqrt{x^3} - \frac{2}{x^2} + 3x^3) dx &= \int_1^4 x^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int_1^4 x^{-2} dx + 3 \int_1^4 x^3 dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} = \\ &= \left| \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3 \cdot \frac{x^4}{4} \right|_1^4 = \left(\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{4} x^4 \right) \Big|_1^4 = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5}(4^2 \cdot 2 - 1^2) + \frac{1}{4} - 1 + \frac{3}{4}(4^4 - 1) = 12 \frac{2}{5} - \frac{3}{4} + 255 \cdot \frac{3}{4} =$$

$$= 254 \cdot \frac{4}{3} + 12 \frac{2}{5} = 350 \frac{16}{15} = 351 \frac{1}{15}$$

3. Aniq intregalda o'zgaruvchini almashtiruvchi

Aniq integral N'yuton-Leybnis formulasiga ko'ra aniqmas integralning ikki qiymati orasidagi ayirma ekanligi kelib chiqadi. Aniqmas integralni topishdagi hamma usullar aniq integralni topish uchun ham o'rinalidir.

Funksiyaning aniq integrallarini o'zgaruvchilarini almashtirish usuli yordamida ham hisoblash

mumkin. $f(x)$ funksiyaning aniq integrali $\int_a^b f(x) dx$ ni hisoblash maqsadida $x = \varphi(t)$ munosabat bilan x o'zgaruvchini almashtiramiz.

Teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda, $x = \varphi(t)$ funksiya esa $[\alpha, \beta]$ segmentda aniqlangan, uzluksiz bo'lib, t o'zgaruvchi $[\alpha, \beta]$ da o'zgarganda $x = \varphi(t)$ ning qiymatlari $[a, b]$ ni tashkil etsin.

—Agar $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha, \beta]$ da uzluksiz $\varphi(t)$ hosilaga ega bo'lib, 1 ga teng bo'lsa u holda

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt \quad (7) \text{ tenglik o'rinli bo'ladi.}$$

7-misol. $\int_1^2 \frac{x dx}{x^2 + 2}$ integralni hisoblang.

Yechish. Bu integralda $t = x^2 + 2$ almashtirishni bajaramiz.

U holda $x^2 = t - 2$, $2x dx = dt$ bo'lib, $x=1$ da $t=3$; $x=2$ da $t=6$ bo'ladi.

Demak, $\int_{-1}^2 \frac{x dx}{x^2 + 2} = \frac{1}{2} \int_3^6 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| \Big|_3^6 = \frac{1}{2} \ln \frac{6}{3} = \frac{1}{2} \ln 2.$

8-misol. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x, dt = -\sin x dx \\ t^2 = \cos^2 x, x = \frac{\pi}{3} \text{ da } t = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{2} \text{ da } t = 0 \end{array} \right| =$

$$= - \int_{\frac{1}{2}}^0 t^2 dt = \int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{24}.$$

9-misol. $\int_0^1 \ell^{x^2} x dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t \Rightarrow 2x dx = dt \\ x=0 \text{ da } t=0, x=1 \text{ da } t=1 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int_0^1 \ell^t dt = \frac{1}{2} \ell^t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\ell - 1)$

$$\text{10-misol. } \int_{\ell}^{\ell^3} \frac{dx}{x \ln x} \left| \begin{array}{l} \ln x = t, \frac{dx}{x} = dt \\ x = \ell \text{ da } t = 1, x = \ell^3 \text{ da } t = 3 \end{array} \right| = \int_1^3 \frac{dt}{t} = \ln |t| \Big|_1^3 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

4. Aniq integralda bo'laklab integrallash

Ikkita $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiya o'zlarining birinchi hosilalari bilan $[a,b]$ segmentda uzluksiz bo'lsin. Ularning ko'paytmasini differensiallaymiz:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + vdu = u \cdot v' dx + v \cdot u' dx \quad (8)$$

(8) ayniyatni a dan b gacha oraliqda integrallab, quyidagini hosil qilamiz:

$$\int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b u \cdot v' \cdot dx + \int_a^b v \cdot u' \cdot dx \quad (9)$$

Lekin, $du = u' dx \dots v \dots dv = v' dx$ hamda N'yuton- Leybenis formulasiga ko'ra

$$\int_a^b d(u \cdot v) = u \cdot v \Big|_a^b ;$$

Demak, (9) tenglik quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (10). \quad \text{Bu formula aniq integralda bo'laklab integrallash}$$

formulasi deyiladi.

Bunda integrallash chegaralari x erkli o'zgaruvchiga tegishli ekanligini nazarda tutish kerak.

$$\text{11-misol. } \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx \quad \text{integralni hisoblang,}$$

Yechish. Quyidagicha belgilashlarni olamiz: $u=x, v=-\cos x, dv=\sin x, du=dx$ (10) formulaga ko'ra:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx &= -x \cos x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \pi \cos \pi + \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \pi + \sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} = \pi - 1 \end{aligned}$$

$$\text{12.misol. } \int_1^3 x \ln x dx \quad \text{integralni hisoblang.}$$

$$u = \ln x, dv = x dx$$

Yechish. Quyidagicha almashtirishlarni olamiz:

$$du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_1^3 x \ln x dx &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{9}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \int_1^3 x dx = 4.5 \ln 3 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^3 = \\ &= 4.5 \ln 3 - \frac{1}{4} (9 - 1) = 4.5 \ln 3 - 2 \end{aligned}$$

13.misol.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \arcsin x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \arcsin x \quad \int dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leftarrow v = x \end{array} \right| = x \arcsin x \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{1-x^2} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{(2\sqrt{3}-1)\pi}{12} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

14.misol.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \quad dv = \cos x \, dx \\ du = 2x \, dx \leftarrow v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x \Big|_0^{\pi/2} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = \\
&= \frac{\pi^2}{4} - 2 \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin x \, dx \\ du = dx \leftarrow v = -\cos x \end{array} \right| = \frac{\pi^2}{4} - 2(-x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx) = \\
\frac{\pi^2}{4} - 2 \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/2} &= \frac{\pi^2}{4} - 2
\end{aligned}$$

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Aniq integral qanday hossalarga ega?
2. N'yuton-Leybnis formulasini yozing?
3. Aniq interegralda o'zgaruvchini almashtirishda nimalarga e'tabor qaratish lozim?
4. Aniq integralda bo'laklab integrallash formulasini yozing?
5. Bo'laklab integrallash qanday holda maqsadga muvafiq bo'ladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Quyidagi aniq integrallarni o'zgaruvchini almashtirish usuli yordamida hisoblang:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} \, dx, J: \pi;$$

$$2. \int_{-5}^{\ell^2} \frac{dx}{x \ln x}, J: \ln |\ell n 2|;$$

$$3. \int_0^{\pi/6} \cos \ell^{\sin x} \, dx, J: \sqrt{\ell} - 1$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{(2x-1)^3}, J: -\frac{2}{9}$$

$$5. \int_1^2 \frac{\ell^x \, dx}{\ell^x + 1}, J: \ln(1 + \ell)$$

$$6. \int_0^2 \frac{x+3}{x+4} \, dx, J: 2 + \ln \frac{2}{3}$$

Quyidagi intyegrallarni bo'laklab integrallash formulasidan foydalanib hisoblang.

$$7. \int_0^{\pi} x \cos x dx, J : -2$$

$$8. \int_{\ell}^{\ell^2} x \ln x dx, J : \frac{1}{4} \ell^2 (3\ell^2 - 1)$$

$$9. \int_1^{\ell} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx, J : 2(2 - \sqrt{\ell})$$

$$10. \int_0^{\ell} \arctg x dx, J : \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2}$$

$$11. \int_1^{\ell} x^2 \ln^2 x dx, J : \frac{13\ell^3 + 2}{27}$$

$$12. \int_0^{\ell} x \ell^{-x} dx, J : \frac{\ell - 2}{\ell} - 2e^{-1}$$

$$13. \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx, J : \pi - 1$$

$$14. \int_1^2 x \ln x dx, J : 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$$

11-mavzu. Xosmas integrallar

Reja: 1. Chegaralari cheksiz bo'lgan xosmas integrallar
2. Uzlukli funksiyaning integrali

Tayanch ibora va tushunchalar

Xosmas integrallar, chegaralari cheksiz bo'lgan xosmas integrallar, uzlukli funksiya, uzluksiz funksiya, yuqori chegarasi cheksiz bo'lgan xosmas integral, uzoqlashuvchi, yaqinlashuvchi.

Aniq integral tushunchasini kiritishda integrallash kesmasi $[a, b]$ ning uzunligi chekli, ya'ni integrallash oralig'i chekli va $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz deb faraz qilgan edik. Agar shu shartlardan birortasi buzilsa, ravshanki integral yig'indini tuzish ma'nosini yo'qatadi. Lekin ba'zi bir funksiyalar uchun shu shartlardan biri bajarilmaganda aniq integrallarni tekshirishga to'g'ri keladi.

Bunday integrallar xosmas integrallar deyiladi. Agar shartlardan birinchisi yani chegaralari cheksiz bo'lsa, bunday integrallar I tur xosmas integrallar, agar shartlardan ikkinchisi, ya'ni uzilishga ega bo'lsa, bunday integrallar II tur xosmas integrallar deyiladi.

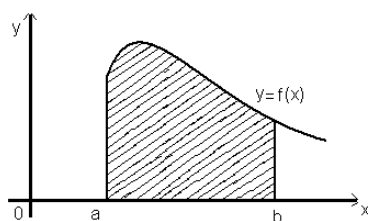
1. Chegaralari cheksiz bo'lgan xosmas integrallar

$f(x)$ funksiya x ning $0 \leq x \leq +\infty$ qiymatlarida aniqlangan va uzluksiz funksiya bo'lsin. U

shu $J(b) = \int_a^b f(x) dx$ (11) integralni qaraylik (11) integral har qanday $b > a$ uchun ma'noga ega.

b o'zgarganda integral ham o'zgaradi. (11) integral b ning uzluksiz funksiyasidir.

$b \rightarrow +\infty$ bo'lganda (11) integralning qanday o'zgarishini qaraymiz (6-chizma).



Ta'rif. Agar chekli limit $\int_a^b f(x) dx$ (12) mavjud bo'lsa, bu limit $f(x)$

funksiyaning $[a, +\infty]$ intervaldagi xosmas integrali deyiladi

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (13) \text{ simvol bilan belgilanadi.}$$

Demak, ta'rifga ko'ra $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$ (14). (12) limitga yuqori chegarasi cheksiz

bo'lgan xosmas integral deyilib (13) kabi belgilanadi.

Agar (12) limit mavjud bo'lsa, (13) integral yaqinlashuvchi, agar (12) limit mavjud bo'lmasa yoki cheksizlikka intilsa, (13) integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Xuddi shuningdek, quyi chegarasi cheksiz bo'lgan xosmas integral to'g'risida ham yuqoridagidek aniqlanadi:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (15), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx \quad (16),$$

bunda $-\infty < c < \infty$.

Agar $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ (17) integral yaqinlashuvchi bo'lsa, (13) integral absolyut

yaqinlashuvchi deyiladi. (13) integralning yaqinlashishini aniqlash uchun quyidagi taqqoslash alomatlaridan foydalaniladi.

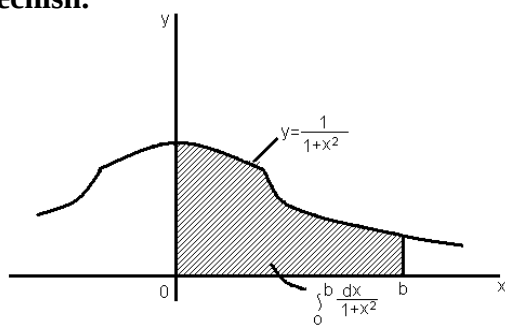
1-teorema. x ning barcha $x \geq a$ qiymatlarida $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ tengsiz o'rinli bo'lsa, u holda

1) agar $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa u holda (13) integral ham yaqinlashuvchi;

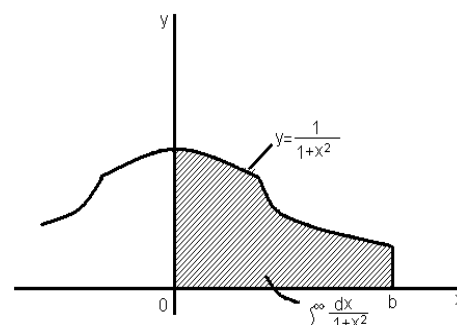
2) agar $x \geq a$ qiymatlarda $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ uzoqlashuvchi bo'lsa (13) integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

15-misol $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ integral hisoblansin (7-va 8-chizmalar).

Yechish.



7-chizma



8-chizma

Xosmas integralning ta'rifiga muvofiq quyidagini topamiz.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2} \text{ bo'lib,}$$

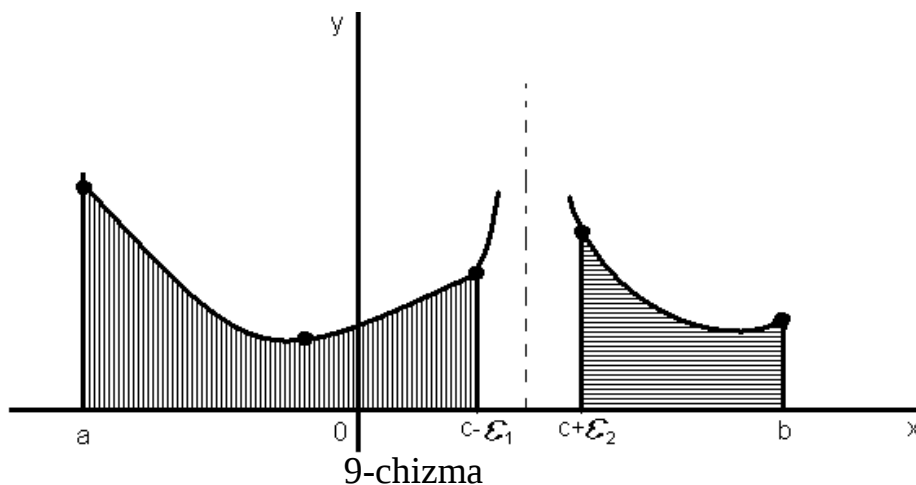
berilgan integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Qaralgan integral 8-chizmada shtrixlangan cheksiz egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalaydi.

2. Uzlukli funksiyaning integrali

$y=f(x)$ funsiya $[a,b]$ kesmaning $x=c$ nuqtasidan boshqa hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsin, $x=c$ nuqtada esa uzilishga ega bo'lsin (9-chizma). Kesma ichidagi $x=c$ nuqtada uzlukli bo'lsa, ta'rifga ko'ra

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx \quad (17)$$



bunda $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$. Agar (17) tenglikning o'ng tomonidagi ikkala integral mavjud bo'lsa, u holda berilgan integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar (17) ning o'ng tomonidagi integrallardan birortasi uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda berilgan integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

16-misol. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2}$ integralni hisoblang.

Yechish. Integrallash kesmasi ichida integral ostidagi funksiya $x=0$ da uzilishga ega. Shuning uchun ta'rifga ko'ra:

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0-0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} x^{-2} dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon_2}^2 x^{-2} dx$$

Har qaysi limitni alohida hisoblaymiz:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0-0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} x^{-2} dx = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0-0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty$$

Demak, $[-1;0]$ oraliqda integral uzoqlashadi.

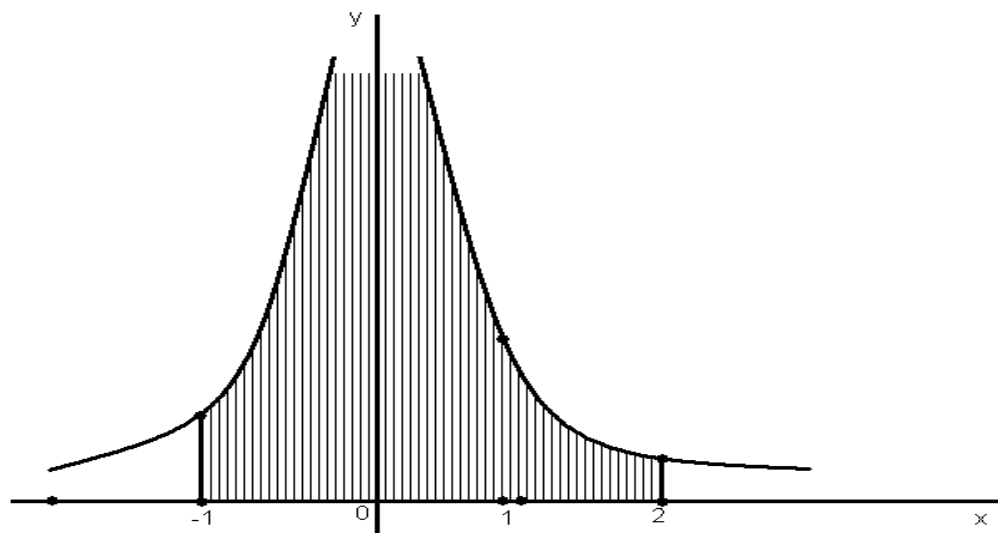
$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \int_{\varepsilon_2}^2 x^{-2} dx = - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} \Big|_{\varepsilon_2}^2 = - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \infty$$

Demak, $[0,2]$ oraliqda integral uzoqlashadi.

Shundayqilib, berilgan integral butun $[-1;2]$ kesmada uzoqlashadi.

Agar berilgan integralni integral ostiga funksiyaning $x=0$ nuqtadagi uzilishiga yetib qolmasdan hisoblaganimizda noto'g'ri natija hosil qilgan bo'lar ekan.

$$\text{Haqiqati. } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x^2} = - \frac{1}{x} \Big|_{-1}^2 = - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{-1} \right) = \frac{-3}{2} = -1.5 \text{ bu esa mumkin emas}$$



10-chizma

Izoh. Agar $[a, b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya bu kesma ichida chekli sondagi $a_1, a_2, \dots, a_n$ nuqtalarda uziluvchi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada olingan integral quyidagicha aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^b f(x) dx,$$

bunda tenglikning o'ng tomonidagi xosmas integrallarning har biri yaqinlashuvchi bo'lishi shart.

Agar bu integrallardan hech bo'lmaganda bittasi uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x) dx$ integral ham uzoqlashuvchi deyiladi.

Uzlukli funksiyalardan olingan xosmas integrallarning yaqinlashuvini aniqlash va ularning qiymatlarini baholash uchun ko'pincha chegaralari cheksiz bo'lgan integrallarni baholagandagiga o'xshash teoremlardan foydalaniladi.

2-teorema. $f(x), \varphi(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmadagi $x=c$ nuqtada uzilishga ega va $[a, b]$ kesmaning $x=c$ nuqtasidan boshqa hamma nuqtalarida :

agar $\varphi(x) \geq f(x) \geq 0$ tengsizlik bajarilganda

$\int_a^b \varphi(x) dx$ yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x) dx$ ham yaqinlashuvchi:

2) agar $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $\int_a^b \varphi(x) dx$ uzoqlashuvchi

bo'lganda, $\int_a^b f(x) dx$ ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, c]$ kesmada ishorasi o'zgaruvchi bo'lib, faqat c nuqtadagina uziluvchi bo'lsa va bu funksiyaning absolyut qiymatidan olingan $\int_a^c |f(x)| dx$ xosmas integral

yaqinlashuvchi bo'lsa u holda bu funksiyaning o'zidan olingan $\int_a^c f(x) dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Ko'pincha xosmas integral belgisi ostida turgan funksiya bilan taqqoslash qulay bo'lgan funksiya sifatida $\frac{1}{(c-x)^\alpha}$ funksiya olinadi. $\int_a^c \frac{dx}{(c-x)^\alpha}$ integral $\alpha < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi;

$\alpha \geq 1$ bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'lishini tekshirish oson. $\int_a^c \frac{dx}{(c-x)^\alpha}$ integral ham yaqinlashuvchi ekanligini tekshirib ko'rish qiyin emas.

17-misol. $\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x^3}$ integralning yaqinlashuvchiligini tekshiring.

Yechish. Integral ostidagi funksiya $x=0$ nuqtada uzilishga ega. $x \geq 0$ da

$\frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2x^2} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ bo'lgani uchun quyidagi xosmas integralni isbotlaymiz:

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{3} \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = \frac{2}{3} (\varepsilon > 0)$$

Xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lgani uchun berilgan integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Xosmas integral deganda nimani tushunasiz?
2. Xosmas integral turlarini ayting?
3. Chegaralari cheksiz bo'lgan integral qanday topiladi?
4. Uzlukli funksiyaning integrali deb nimaga aytiladi va u qanday topiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi xosmas integrallarni hisoblang yoki yaqinlashuvchiligini tekshiring.

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}, J : \text{uzoqlashuvchi}$

2. $\int_1^{\infty} \frac{\pi}{x^2} dx, J : \pi$

3. $\int_{\ell}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}, J : 0.5$

4. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx, J : 0.5$

5. $\int_0^{1/\ell} \frac{dx}{x \ln^2 x}, J : 1$

6. $\int_1^{\ell} \frac{\pi}{x \sqrt{\ln x}}, J : 2$

7. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}, J : \text{uzoqlashuvchi}$

8. $\int_1^{\infty} \frac{2+x}{\sqrt{x}} dx, J : \text{uzoq} - \text{chi}$

9. $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx, J : \text{uzoqlashuvchi}$

10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}, J : \pi$

$$11. \int_0^{\infty} x \sin x dx, J : \text{uzoqlashuv} \quad \text{chi} \quad 12. \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx, J : \frac{1}{4}$$

12-mavzu: Aniq integralni taqribiy hisoblash

- Reja:** 1. To'g'ri to'rtburchaklar usuli
2. Trapetsiyalar formulasi
3. Parabolalar (Simpson) formulasi

Tayanch ibora va tushunchalar

Egri chiziqli trapetsiya, parabolik trapetsiya, trapetsiyalar formulasi, Simpson formulasi

Berilgan $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $F(x)$ boshlang'ich funksiyani

topish mumkin bo'lsa, N'yuton Leybnits formulasi bo'yicha $\int_a^b f(x) dx$ aniq integralni hisoblagan

edik. Lekin har qanday uzluksiz funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini hamma vaqt topish qiyin, bazi hollarda esa boshlang'ich funksiyani elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmaydi.

Masalan.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \dots$$

Bunday hollarda N'yuton Leybnits formulasidan foydalana olmaymiz. Shuning uchun ularni taqriban bo'lsa ham hisoblashga to'g'ri keladi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblaydigan bir qancha usullar mavjud. Ushbu paragrafda ulardan uchtasini: to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiyalar hamda parabola (Simpson) usullarini keltiramiz.

1. To'g'ri to'rtburchaklar usuli

$f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda berilgan va uzluksiz bo'lsin. Bu funksiyaning aniq integral $\int_a^b f(x) dx$ ni taqribiy ifodalovchi formulani keltiramiz.

Hisoblashlarda aniq integralni yuzini ifodalovchi yig'indi limiti deb, ya'ni

$$\int_a^b f(x) dx \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (1) \text{ ko'rinishda mulohaza yuritiladi.}$$

$[a, b]$ kesmani $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nuqtalar bilan teng n ta bo'lakka bo'lamiz. Har

birining uzunligini $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$ ($i = 0, n$) deb olamiz.

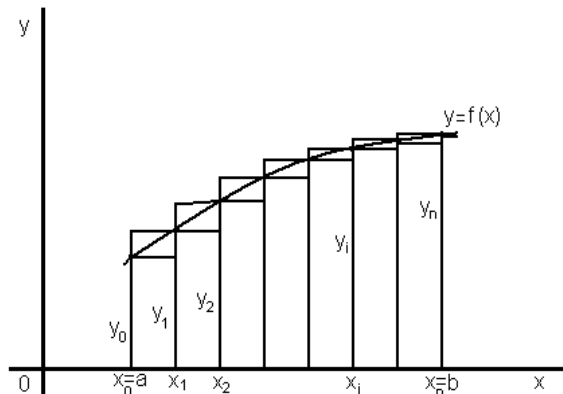
$x = x_i$ bo'lganda $f(x)$ funksiya qiymatlarini $y_i = f(x_i) = f(a + ih)$ (2) deb belgilaymiz.

(1) fomulaning o'ng tomonidagi yig'indini $\xi_i = x_{i-1}$ *yoki* x_i *deb*, quyidagi ikkita formulani hosil qilamiz:

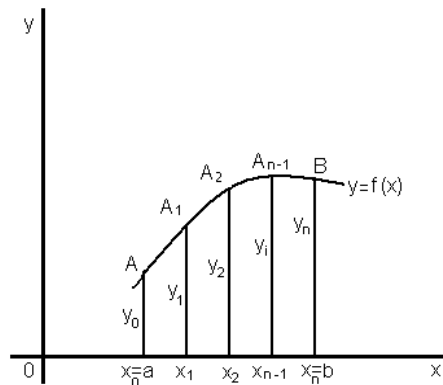
$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}], \quad (3)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_1 + y_2 + \dots + y_n], \quad (4)$$

(3) va (4) formulalarga aniq integralni taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deyiladi.



11-chizma



12-chizma

11-chizmada quyidagilar tasvirlangan: agar $f(x)$ musbat va o'suvchi funksiya bo'lsa, u holda (3) formula "ichki" to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shaklning yuzini tasvirlaydi. (4) formula esa "tashqi" to'rtburchaklardan tuzilgan zinapoyasimon shaklining yuzini tasvirlaydi. Integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi bilan hisoblashda qilingan xato n son qancha katta (ya'ni bo'linish qadami h qancha kichik) bo'la borishi bilan (3) va (4) formulalar aniqroq bo'la boradi, ya'ni $n \rightarrow \infty$ da va $h \rightarrow 0$ da ular aniq integralning haqiqiy qiymatini beradi.

2. Trapetsiyalar formulasi

Agar ordinatalar chizig'ining egri chiziq bilan kesishgan nuqtalarini zinapoyali siniq chiziqlar bilan emas, balki ichki chizilgan siniq chiziqlar bilan tutashtirsak (3) va (4) formulalarga nisbatan xatosi kamroq bo'lgan taqribiy formulani keltirib chiqaramiz: (12-chizma).

Bu holda egrai chizikli $aABb$ trapetsiyaning yuzi yuqoridan $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}B$ vatarlar bilan chegaralangan to'g'ri chizikli trapetsiyalar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi. Natijada trapetsiyalar formulasini hosil qilamiz.

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[\frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \right] =$$

$$\int_a^b h \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right] \quad (5),$$

bunda $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = x_{i-1} + h$, $(i = \overline{1, n})$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

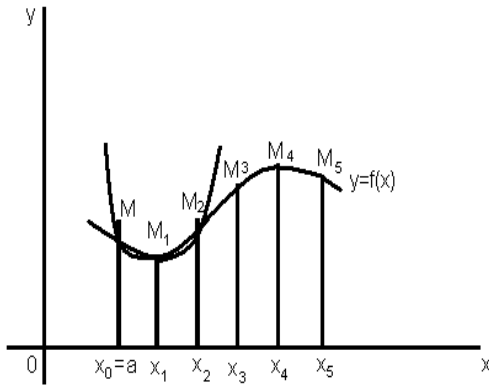
(5) ga trapetsiyalar formulasi deyiladi.

3. Parabolalar (Simpson) formulas

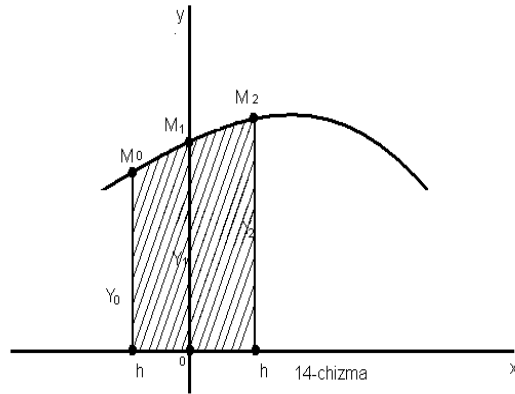
$[a, b]$ kesmani juft sonda $n=2m$ bo'laklarga ajratamiz. $[x_0, x_1]$ va $[x_1, x_2]$ kesmalarga mos va berilgan $y=f(x)$ egri chiziq bilan chegaralangan egri chizikli trapetsiyaning yuzini

$M(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$, uchta nuqtadan o'tuvchi va o'qi oy o'qi parallel bo'lgan

ikkinchi darajali parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi bilan almashtiramiz. (13-chizma).



13-chizma



14-chizma

Bunday egri chiziqli trapetsiyaning parabolik trapetsiya deb ataymiz.

O'qi Oy o'qqa parallel bo'lgan parabolaning tenglamasi $y = Ax^2 + Bx + C$ (6)

ko'rinishda bo'ladi. A, B va C koeffitsientlar parabolaning berilgan uch nuqta orqali o'tish shartidan bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Shunga o'xshagan parabolalarni kesmalarning boshqa juftlari uchun ham yasaymiz. Shunday yasalgan parabolik trapetsiyalar yuzlarining yig'indisi integralning taqribiy qiymatini beradi (14-chizma).

Lemma. Agar egri chiziqli trapetsiya (6) parabola, Ox o'q va oralig'i $2h$ ga teng bo'lgan ikkita ordinata bilan chegaralangan bo'lsa, u holda uning yuzi $S \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_1 + y_2)$ (7) ga teng, bunday y_0 va y_2 chetdagi ordinatalar y_1 esa egri chiziqli kesma o'rtasidagi ordinatasi.

Isboti [1], 455 betda.

(7) formuladan foydalanib, quyidagi taqribiy qiymatlarni yozamiz.

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\int_{x_{2(m-1)}}^{x_{2m}=b} f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_{2(m-1)} + 4y_{2(m-1)+1} + y_{2m})$$

Yuqoridagi taqribiy qiymatlarning chap va o'ng tomonlarini qo'shib, chapda izlanayotgan integralni, o'ngda esa uning taqribiy qiymatini xosil qilamiz:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 2y_{2(m-1)} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) \quad (8)$$

$$\text{yoki } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} [y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})] \quad (9)$$

(9) formulaga **Simpson formulasi** deyiladi. Bu yerda bo'linish nuqtalarining soni $2m$ ixtiyoriy, lekin bu son qancha katta bo'lsa, (9) tenglikning o'ng tomonidagi yig'indi integral qiymatini shuncha aniq ifodalaydi.

18-misol.

$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x}$ integralni to'g'ri ro'rtburchaklar trapetsiya va Simpson taqribiy formulalardan foydalanib 0.0001aniqlikda hisoblang.

Yechish. $[2;10]$ kesmani teng $n=8$ ta bo'lakka bo'lamiz. U holda bo'ladi. Integral ostidagi funksiya qiymatlari jadvalini tuzamiz:

2-jadval

X	$y = \frac{1}{\lg x}$	X	$y = \frac{1}{\lg x}$
$x_0 = 2$	$y_0 = \frac{1}{0.3010} \approx 3.3211$	$x_5 = 7$	$y_5 = \frac{1}{0.8451} \approx 1.1833$
$x_1 = 3$	$y_1 = \frac{1}{0.4771} \approx 2.0960$	$x_6 = 8$	$y_6 = \frac{1}{0.9031} \approx 1.1073$
$x_2 = 4$	$y_2 = \frac{1}{0.6021} \approx 1.6608$	$x_7 = 9$	$y_7 = \frac{1}{0.9442} \approx 1.0591$
$x_3 = 5$	$y_3 = \frac{1}{0.6990} \approx 1.4304$	$x_8 = 10$	$y_8 = 1$
$x_4 = 6$	$y_4 = \frac{1}{0.7781} \approx 1.2852$	$y_0 + y_1 + \dots + y_7 = 13.1432$ $y_1 + y_2 + \dots + y_8 = 10.8221$	

1-usul. To'g'ri to'rtburchaklar usuli. (3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx 1 \cdot [y_0 + y_1 + \dots + y_7] = 1 \cdot 13.1432 = 13.1432$$

(3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx 1[y_0 + y_1 + \dots + y_8] = 10.8221$$

2-usul. Trapetsiyalar usuli, (3) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx h \left[\frac{y_0 + y_8}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_7 \right] =$$

$$\frac{3.3211 + 1}{2} + 9.8221 = 2.1605 + 9.8221 = 11.9826$$

3-misol. Parabolalar (Simpson) usuli.

$2m=8$ deb olib, $\frac{h}{3} = \frac{b-a}{6m} = \frac{10-2}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3}$ ekanligini etiborga olsak, (9) formulaga asosan:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{\lg x} \approx \frac{h}{3} [y_0 + y_8 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)] = \frac{1}{3} [3.3211 + 1 + 4(2.0960 + 1.4304 + 1.1833 + 1.0591) + 2(1.6608 + 1.2852 + 1.1073)] = \frac{1}{3} [4.3211 + 23.0752 + 8.1066] = 11.8343$$

Shunday qilib, berilgan integralni to'g'ri to'rtburchaklar formulasi yordamida hisoblab 13.1432 va 10.8221, trapetsiyalar formulasi yordamida hisoblab 11.9826, parabolalar formulasi yordamida hisoblab 11.8343 bo'lishini topdik.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Aniq integralni hisoblashda taqribiy hisoblash formulalaridan nima uchun foydalaniladi?
2. Aniq integralni hisoblashdagi to'g'ri turtburchaklar usulini formulalarini ta'riflang?
3. Qanday formulaga trapetsiyalar formulasi diyiladi?
4. Parabolalar (Simpson) formulasini afzalligini tushuntiring?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyida berilgan aniq integrallarni to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiya, parabola usullar bilan hisoblab, aniq qiymati bilan taqqoslab xatolikni aniqlang.

$$1. \int_0^1 x^2 dx \quad (n = 10)$$

$$2. \int_0^{\pi} x \sin x dx \quad (n = 12)$$

$$3. \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad (n = 10)$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{1-x} \quad (n = 10)$$

$$5. \int_0^1 x^3 dx \quad (n = 10)$$

$$6. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \quad (n = 10)$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \cos x dx \quad (n = 10)$$

$$8. \int_0^1 e^{-x^2} dx \quad (n = 10)$$

$$9. \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{8-x^3}} \quad (n = 5)$$

$$10. \int_0^1 e^{-4x^2+2x+1} dx \quad (n = 10)$$

13-mavzu. Aniq integralning ba'zi tadbiqlari

- Reja:** 1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida yuzalarni hisoblash
2. Teglamalari parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziqli tropetsiya yuzini hisoblash
3. Qutub koordinatalar sistemasida sektor yuzini hisoblash

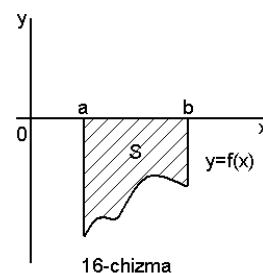
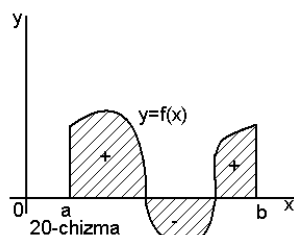
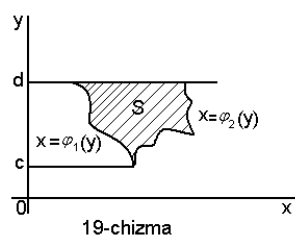
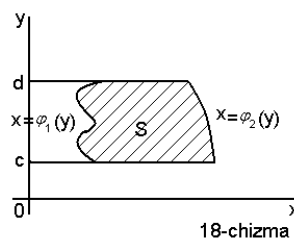
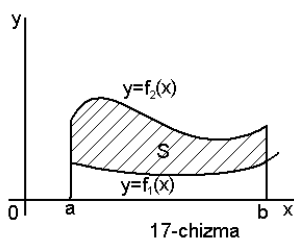
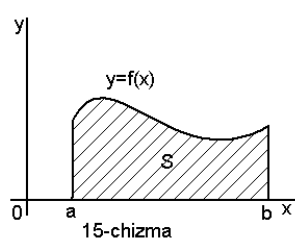
Tayanch ibora va tushunchalar

Egri chiziqli tropetsiya yuzi, parametrik ko'rinishdagi tenglama, qutb koordinatalar sistemasida, sektorining yuzi

Aniq integralning tadbiq doirasi keng bo'lib, egri chiziqlar bilan chegaralangan yuzlarni, egri chiziq yoylari uzunliklarini, hajmlarni, ishlarni, tezliklarni, inersiya momentlarini yo'llarini va hokazalarini topish masalalari aniq integral yordamida hisoblanadi.

1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida yuzalarni hisoblash

1. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz va musbat bo'lsa, va u holda asosi $[a,b]$ bo'lgan va yuqoridan bu funksiyaning grafigi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $S = \int_a^b f(x) dx$ (1) formula bilan topiladi (15-chizma).



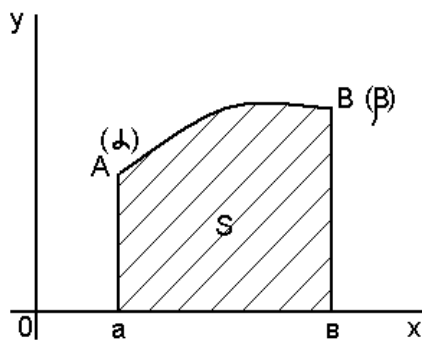
2. Agar $f(x) \leq 0$ funksiya $[a,b]$ segmentda uzluksiz, asosi $[a,b]$ bo'lgan va pastdan $y=f(x)$ funksiya grafigi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya (16-chizma) ning yuzi $S = \int_a^b f(x) dx$ (2) formula bilan topiladi.

3. Uzluksiz $y = f_1(x)$ va $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \leq f_2(x)$) egri chiziqli hamda $x = a, x = b$ ($a < b$) to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzi $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ (3) formula bilan hisoblanadi (17-chizma).

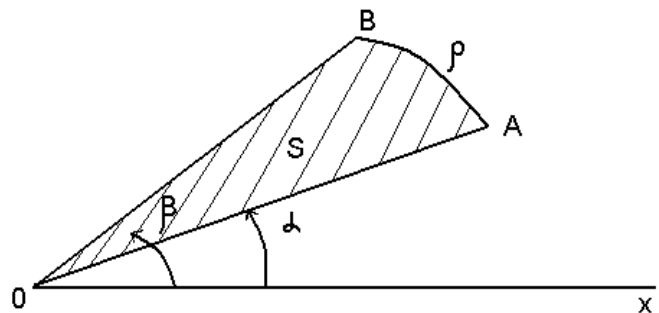
4. Uzluksiz $x = \varphi_1(y)$ va $x = \varphi_2(y)$, ($\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$) egri chiziqlar hamda $y=c$, $y=d$ ($c < d$) to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzi $S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) dy$ (4) formula bilan hisoblanadi (18-19-chizma) lar

5. Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada ishorasini chekli son marta o'zgartirsa, u holda integralni butun $[a,b]$ kesmada qisman kesmachalar bo'yicha integrallar yig'indisiga ajratamiz. Qayerda $f(x) \geq 0$ bo'lsa, o'sha kesmachada integral musbat, qayerda $f(x) \leq 0$ bo'lsa, o'sha kesmachada integral manfiy bo'ladi. Butun kesma bo'yicha olingan integral Ox o'qining yuqorisida va pastda yotgan yuzlarning ayirmasini beradi (20-chizma). Yuzlar yig'indisini odatdagi ma'noda hosil qilish uchun yuqorida ko'rsatilgan kesmalar bo'yicha olingan integrallar absolyut qiymatlari yig'indisini topish yoki $S = - \int_a^b |f(x)| dx$ (5) integrallarni hisoblash kerak.

6. Tenglamalari parametrik ko'rinishda berilgan $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} (\alpha \leq t \leq \beta)$ (6) va $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ egri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzi (21-chizma) ni hisoblaymiz.



21-chizma



22-chizma

(5) tenglamalar $[a,b]$ kesmada biror $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi deb faraz qilamiz, u holda egri chiziqli trapetsiyaning yuzini $S = \int_a^b f(x) dx$ formula bilan hisoblanadi.

Bu integralda o'zgaruvchini almashtiramiz; $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$

(5) tenglamalarga asosan $y = f(x) = f(\varphi(t)) = \psi(t)$

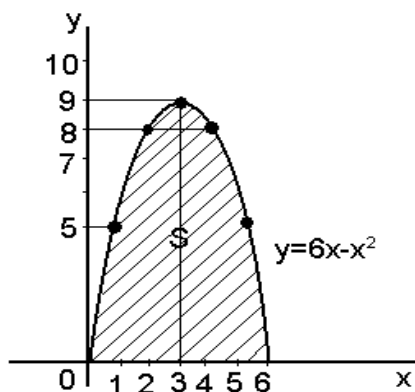
Demak, $S = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt$ (7), Bu parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash formulasidir.

7. Qutb koordinatalar sistemasida berilgan $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ kesimda uzluksiz $\rho = f(\varphi)$ (8) egri chiziq tenglamasi berilgan bo'lsa. $\rho = f(\varphi)$ egri chiziq, $\varphi = \alpha$ va $\varphi = \beta$ radius vektorlar bilan chegaralangan OAB sektorning yuzi (22-chizma):

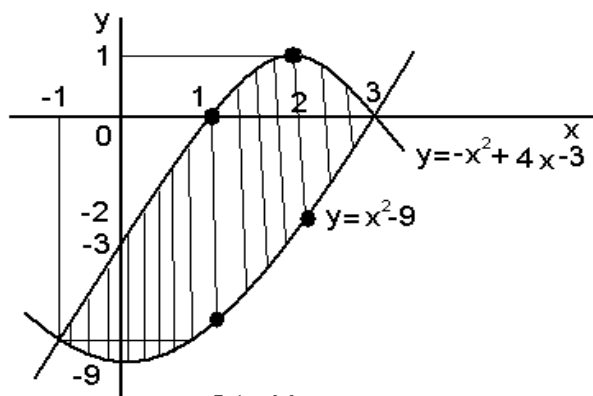
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi$$
 (9) formula bilan topiladi.

19-misol $y=6x-x^2$ va $y=0$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini hisoblang.

Yechish. Dastlab berilgan chiziqlar bilan chegaralangan shakilni chizamiz (23-chizma).



23-chizma



24-chizma

Izlanayotgan yuz $S = \int_0^6 (6x - x^2) dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^6 = 36$

(1) formulaga ko'ra:

20-misol $y = x^2 - 9$ va $y = -x^2 + 4x - 3$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini hisoblang (24-chizma).

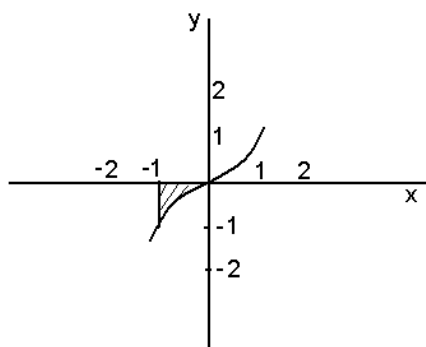
Yechish $f_1(x) = x^2 - 9$ va $f_2(x) = -x^2 + 4x - 3$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalari absissalarini topamiz. $x^2 - 9 = -x^2 + 4x - 3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 3$.

$[-1, 3]$ da $f_2(x) - f_1(x) = -2(x+1)(x-3) \geq 0$ bo'lganidan (3) formuladan foydalanib, ushuni topamiz.

$$S = \int_{-1}^3 ((-x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 9)) dx = 2 \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx = 21 \frac{1}{3}$$

21-misol $y = x^3$, $y = 0$, $x = -1$ chiziqlar bilan chegaralangan shakllarning yuzini hisoblang.

Yechish. $y = x^3$ ($x \in [-1; 0]$) funksiya Ox o'qidan pastda joylashgan (25-chizma) Shuning uchun yuzini hisoblashda (2) formulani qo'llaymiz; $S = - \int_{-1}^0 x^3 dx = - \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{4}$



25-chizma

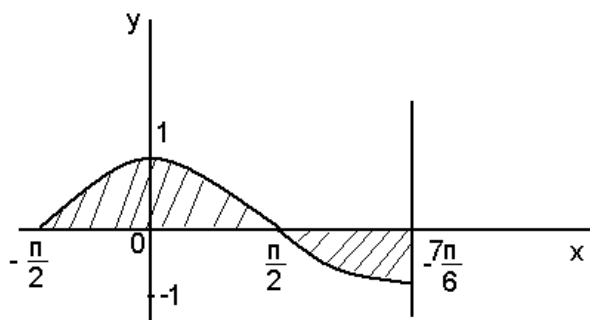
22-misol $y = \cos x$ funksiya grafigi Ox o'qning $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6} \right]$ kesmasi va $x = \frac{7\pi}{6}$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan shaklning yuzini hisoblang.

Yechish. $\cos x = 0$ tenglamani yechib, $y = \cos x$ funksiya grafigi $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6} \right]$ kesmada Ox o'qini $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ kesishini aniqlaymiz (26-chizma).

Demak, (5) formuladan foydalansak.

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} |\cos x| dx = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{7\pi}{6}} \cos x dx = 3.5$$

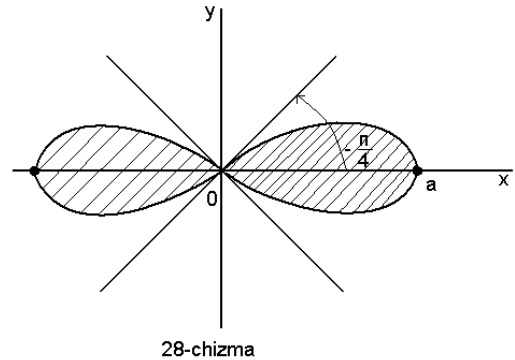
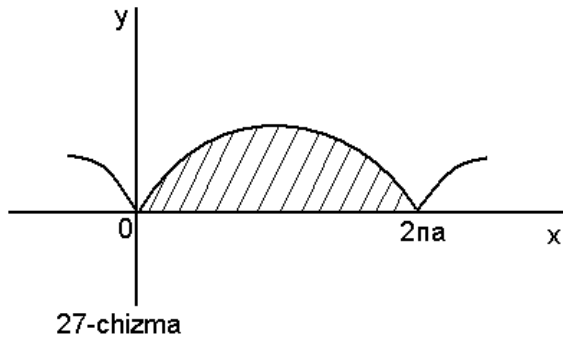
23-misol. Absissalar o'qi va sikloidaning bitta ark bilan chegaralangan shakl yuzini hisoblang: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.



26-chizma

Yechish. Sikloida shakli (27-chizma) yuzini (7) formuladan foydalanib topamiz.

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a(-1 \cos t) a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \left[t - 2 \sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$



24-misol. Bernulli lemniskatasi $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ bilan chegaralangan shakl (28-chizma) ning yuzini hisoblang.

Yechish. Berilgan egri chiziq tenglamasini qutb koordinatalar sistemasida ifodalaymiz. Buning uchun $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ almashtirish bajarsak, $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ yoki $\rho = a \sqrt{\cos 2\varphi}$ ga ega bo'lamiz.

Shaklning simmetrik xossasini va (9) formulani e'tiborga olsak, izlanayotgan yuz:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi = 2a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$

Mustahkamlash uchun savollar

1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish formulalarini ta'riflang?
2. Parametrik ko'rinishda berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi qaysi?
3. Qutub koordinatalar sistemasida berilgan sektorining yuzini topish formulasini ayting?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y=x^2$ funksiya grafigi va $x_1=-1$, $x_2=-2$ nuqtalarda $y=x^2$ funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar bilan chegaralangan shakl yuzini hisoblang. Javob: 2.25

2. $x=y^2$ parabola yoyi va $x=a$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan shaklning yuzini hisoblang.
Javob: $\frac{4a^{3/2}}{3}$

3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellips bilan chegaralangan shakl yuzini aniqlang. Javob: πab .

4. $y=x^2-4$ parabola va absissalar o'qi bilan chegaralangan shakl yuzini toping. Javob $\frac{32}{3}$

5. $y=-x^2$ va $y=\ell x$ egri chiziqlar, ordinatalar o'qi va $x=1$ to'g'ri chiziq bilan chegarlangan yuzini hisoblang. Javob $\ell - \frac{2}{3}$

6. $xy=10$, $y=0$, $x=2$, $x=5$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzini hisoblang. Javob $10 \ln \frac{5}{2} = 9.163$

7. $y=x^2-2x$ egri chiziq $x=-1$, $x=1$ to'g'ri chiziqlar va Ox o'qi bilan chegaralangan shaklning yuzini hisoblang. Javob: 2

8. $y=-x$ va $y=3x-x^2$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzini hisoblang. Javob $\frac{32}{3}$

9. $y=x^2+1$ paralel, $y=0$, $x=-1$, $x=4$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini hisoblang. Javob $\frac{80}{3}$

10. $y = \frac{1}{x}$ teng yonli giperbola, $x=1$ va $x=3$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblang. Javob. $\ln 3$

14-mavzu. Egri chiziqli yoyining uzunligi

- Reja:** 1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida egri chiziqli yoyining uzunligi
2. Tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan yoy uzunligi hisoblansin
3. Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqli yoyining uzunligi

Tayanch ibora va tushunchalar

Yoy uzunligi, sanoq chiziqli, tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan yoy uzunligi, qutub kordenatasi.

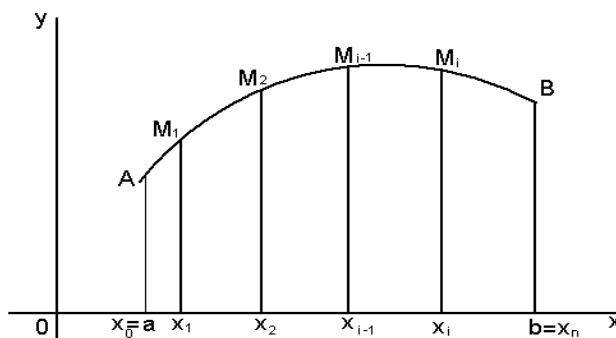
1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida egri chiziqli yoyining uzunligi

Tekislikda egri chiziqli AB yoyi (a,b) intervalda aniqlangan $y=f(x)$ funksiyaning grafigi bo'lsin.

Bu egri chiziqli $x=a$ va $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar orasidagi AB yoyning uzunligini topamiz (29-chizma).

Buning uchun uni $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ nuqtalar yordamida n bo'lakka bo'lamiz. Qo'shni bo'lgan nuqtalarini kesma bilan tutashtirib $AM_1, M_1M_2, \dots, M_{i-1}M_i, \dots, M_{n-1}B$ bug'unlardan tashkil topgan sinik chiziqlarni hosil qilamiz. Ularning uzunliklarini mos tartibda $\Delta \ell_1, \Delta \ell_2, \dots, \Delta \ell_i, \dots, \Delta \ell_n$ bilan belgilab

$$\ell_n = \sum_{i=1}^n \Delta \ell_i \quad (10)$$
 ni hosil qilamiz.



29-chizma

Ta'rif. ℓ yoyning uzunligi deb, ichki chizilgan sinik chiziqli eng katta bo'g'ini uzunligi nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$\ell = \lim_{\max \Delta \ell_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta \ell_i \quad (11)$$

Bunda (2) limit mavjud va ichki chizilgan sinik chiziqlarning tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi, deb faraz qilamiz.

Teorema. Agar AB yoy $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin, bu yerda $f(x)$ $[a,b]$ da uzluksiz birinchi tartibli hosilga egabo'lgan funksiya.

U holda uning uzunl $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$ (12) formulasi yordamida hisoblanadi. (isboti [4], 373

betda).

25-misol. $y^2=x^2$ parabolaning $O(0:0)$ dan $A(1:1)$ nuqtagacha bo'lgan yoy uzunligini toping.

Yechish. (12) formulaga ko'ra, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\ell = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \frac{4}{9} \int_0^1 \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9x}{4}\right) = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right) \approx 1.44$$

2.2 Tenglamasi parametrik ko'rinishda berilgan yoy uzunligini hisoblash.

Egri chiziq tenglamasi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ (13) parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, bunda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ uzluksiz, differensiallanuvchi funksiyalar. Bu holda (13) tenglama biror $y=f(x)$ uzluksiz funksiyani aniqlab, $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ uzluksiz hosilaga ega.

$a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ bo'lsin. Bu holda (12) integralda $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ (14)

almashtirishni bajarib, $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \varphi'(t)dt = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$ (15) yoy uzunligini

hisoblovchi formulani hosil qilamiz.

Izoh. Agar egri chiziq fazoda parametrik tenglamalar $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \phi(t)$ (16) bilan berilgan bo'lsa $(\alpha) \leq t \leq \beta$, u holda yoyning uzunligi $l = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\phi'(t)]^2} dt$ (16) formula bilan aniqlanadi.

26-misol. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(t - \cos t)$ siklorida bitta arki (27-chizma) uzunligini hisoblang.

Yechish. Sikloida arklari bir xil bo'lgani uchun (15)ning bitta arkini olamiz.

Bunda t parametr 0 dan 2π gacha o'zgaradi, $x'_t = a(1 - \cos t)$, $y'_t = a \sin t$ bo'lgani uchun fo'rmulaga ko'ra egri chiziqning uzunligi quyidagicha aniqlanadi :

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = a \int_0^{2\pi} 2 \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a$$

2. Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziq yoyining uzunligi

Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziq tenglamasi $p = f(\varphi)$ bo'lsin, bunda qutb radiusi, φ qutb burchagi.

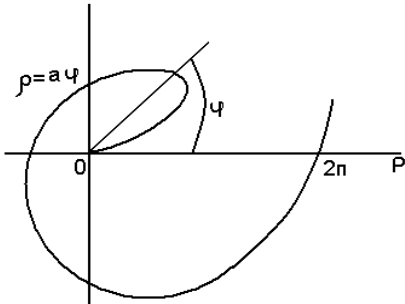
Qutb koordinatalaridan Dekart koordinatalariga o'tish formulasini yozamiz: $x = p \cos \varphi$, $y = p \sin \varphi$. Agar bunda p o'rniga uning φ orqali ifodasini qo'ysak, u holda $x = f(\varphi) \cos \varphi$, $y = f(\varphi) \sin \varphi$ tenglamalari hosil bo'ladi. Bu tenglamalarga egri chiziqning parametrik tenglamalari deb harash va yoy uzunligini hisoblash uchun formulani tatbiq etish mumkin. Buning uchun x va y dan φ parametr bo'yicha hosila olamiz:

$$x'_\varphi = f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi, y'_\varphi = f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi.$$

Bu holda $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{[f'(\varphi) \cos \varphi - f(\varphi) \sin \varphi]^2 + [f'(\varphi) \sin \varphi + f(\varphi) \cos \varphi]^2} d\varphi = \int_\alpha^\beta \sqrt{f'^2 + f^2} d\varphi$ (18) orqali egri chiziq yoyi uzunligi hisoblanadi. Bunda α va β qutb burchagi φ ning yoy uchlaridagi qiymatlari ($\alpha < \beta$).

27-misol. Arximed spirali $p = a\varphi$ ($a > 0$) ning bir o'rami uzunligini toping. (30. chizma).

Yechish. Ma'lumki Arximed spiralining bir o'rami φ ning 0 dan 2π gacha o'zgarishida hosil bo'ladi. $p_\varphi^1 = a$, $p_\varphi^{12} = a^2$, $p^2 = a^2 \varphi^2$ ekanligini va (1) formulaga ko'ra:



30-chizma

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1} d\varphi = a \left(\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) \right)$$

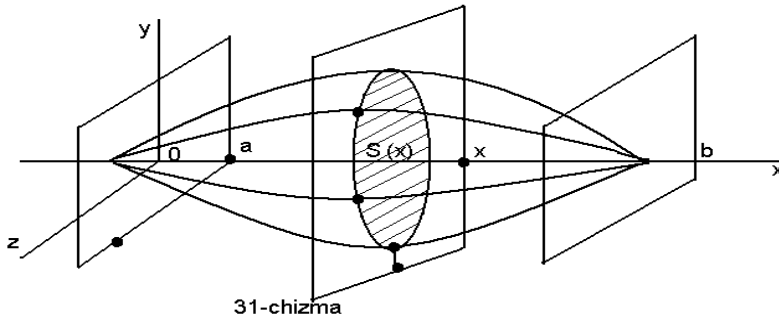
Bunda $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u \sqrt{a^2 + u^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$

formuladan foydalandik.

3. Hajimlarni hisoblash

3.1. Jismning hajmini parallel kesimlar yuzalari bo'yicha hisoblash

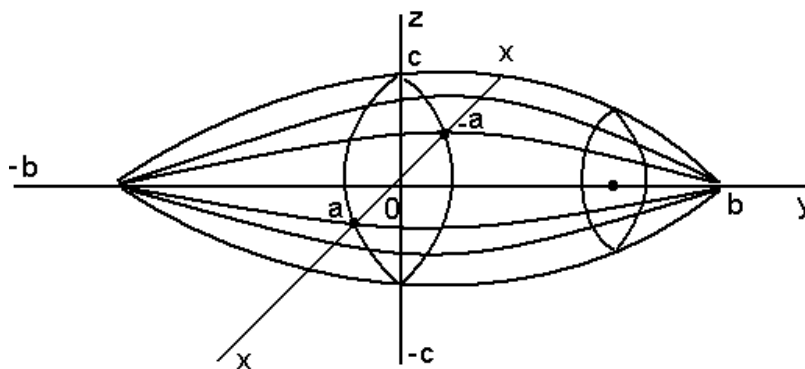
Fazoda $x=a$, $x=b$ tekisliklar orasida joylashgan biror jism berilgan bo'lsin. Ox o'qiga perpendikulyar va $x \in [a, b]$ nuqtalardan o'tuvchi har qanday tekisliklar bu jismni kesganda hosil bo'lgan kesimning yuzi $S(x)$ ga teng bo'lsin (31-chizma). U holda $x=a$, $x=b$ tekisliklar orasidagi jismning hajmi $V = \int_a^b S(x) dx$ (2) formula bilan hisoblanadi.



31-chizma

28-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoid bilan chegaralangan jism hajmini hisoblang.

Yechish. Ellipsoidni Oy o'qiga perpendikulyar $y \in [-b; b]$ nuqtalardan o'tuvchi ixtiyoriy tekislik bilan kesilganda hosil bo'lgan kesimni qaraymiz (32-chizma).



32-chizma

Kesim tenglamasi. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$, ($y = \text{const}$) yoki $1 - \frac{y^2}{b^2} > 0$ bo'lsa, u holda

$$\frac{x^2}{(a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}})^2} + \frac{z^2}{(c \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}})^2} = 1, \text{ ya'ni yarim o'qlari } a_1 = a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}, c_1 = c \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \text{ bo'lgan ellipsga}$$

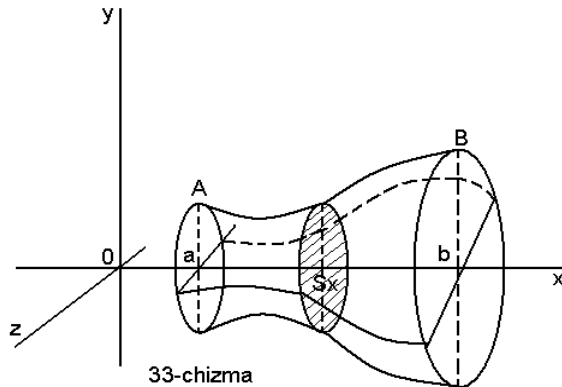
egabo'lamiz. Bu kesimni yuzi esa $S(y) = \pi a_1 c_1 = \pi a c (1 - \frac{y^2}{b^2})$ ga teng. U holda (2) formulaga ko'ra:

$$V = \int_{-b}^b \pi ac \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = 2\pi ac \left(y - \frac{y^3}{3b^2}\right) \Big|_0^b = \frac{4}{3} abc \pi$$

3.2. Aylanish jismining hajmi

Asosi $[a, b]$ bo'lgan, $y=f(x)$ egri chiziqli bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani qaraymiz. Trapetsiyani Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil qilingan aylanish jismining hajmini aniqlaymiz (33-chizma). Parallel kesmalar bu yerda radiusi aylanayotgan egri chiziqli Y ordinatasining moduliga teng bo'lgan doiralardir. Demak, kesim: yuzi $S(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$ (20)

(2) formulaga ko'ra aylanish jismning hajmini topamiz: $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx$ (21)

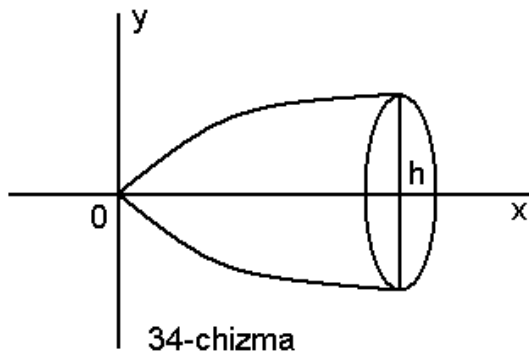


Xuddi shuningdek, $x = \varphi(y)$ egri chiziqli, Oy o'qi va $y=c, y=d$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmi:

$V = \pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy$ (5) formula bilan hisoblanadi.

Agar egri chiziqli trapeziya $y=f(x)$ egri chiziqli Ox o'qi va $x=a, x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmi. $V = 2\pi \int_a^b xy dx$ (6) formula bilan hisoblanadi.

Agar shakl $y = f_1(x), y = f_2(x) (0 \leq f_1(x) \leq f_2(x))$ egri chiziqlar va $x=a, x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan bo'lsa, Ox va Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmlari mos ravishda quyidagi $V = \pi \int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)] dx$ (7) va $V = \pi \int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)] dx$ (8) formulalar bilan hisoblanadi.



29-misol.

$y^2=x$ parabolani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt va $x=h$ tekislik bilan chegaralangan jismning hajmini aniqlang. (34-chizma).

Yechish. (21) formulani qo'llanib, quyidagini

topamiz. $V = \pi \int_0^h y^2 dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{\pi h^2}{2}$.

Agar egri chiziqli $x=x(t), y=y(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, egri chiziqli trapetsiyaning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jismning hajmi:

$V = \pi \int_\alpha^\beta [y(t)]^2 x'(t) dt$ (8) formula bilan hisoblanadi.

30-misol. $x = a(t - \sin t)$ $y = a(1 - \cos t)$ sikloida (27-chizma) ning bir arkasining Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan jismning hajmini toping.

Yechish (8) formuladan foydalansak, $x'(t)=a(1-\cos t)$ bo'lib, $0 \leq x \leq 2\pi a, 0 \leq t \leq 2\pi$ ekanligini e'tiborga olib quyidagini topamiz:

$$V = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 t \cdot \frac{t}{2} d\left(\frac{t}{2}\right) = 32\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 z dz ;$$

Ma'lumki,

$$\int \sin^6 z dz = \frac{1}{6} (5 \int \sin^4 z dz - \cos z \sin^5 z) = \frac{1}{6} (5 \cdot \frac{1}{4} (3 \int \sin^2 z dz - \cos z \sin^3 z) - \cos z \cdot \sin^5 z) =$$

$$= \frac{5}{16} z - \frac{5}{16} \sin z \cdot \cos z - \frac{5}{24} \cos z \sin^3 z - \frac{1}{6} \cos z \sin^5 z + C.$$

Demak, $V = 32 \pi a^3 \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{2} = 5 \pi^2 a^3.$

Qutb koordinatalar sistemasida berilgan $p = f(\varphi)$ egri chiziqli va $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ radius vektorlar bilan chegaralangan yassi shaklning qutb o'qi atrofida aylanishdan hosil bo'lgan jism hajmi $V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} p^3 \sin^3 \varphi d\varphi$ (9) formula bilan hisoblanadi.

Agar $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi$ bo'lsa $V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} p^3 \sin \varphi d\varphi$ (10)

31-misol

$p = a\varphi$ Arximed spirali (30-chizma) ning yarim aylanasi ($a > 0, 0 \leq \varphi \leq \pi$) qutb o'qi aylantirishdan hosil bo'ladigan jismning hajmini toping.

Yechish. (10) formuladan foydalaning.

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} p^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi a^3}{3} \int_0^{\pi} \varphi^3 \sin \varphi d\varphi = \left| \begin{array}{l} u = \varphi^3 d\varphi = \sin \varphi d\varphi \\ du = 3\varphi^2 d\varphi \quad \varphi = -\cos \varphi \end{array} \right| \frac{2\pi a^3}{3} (-\varphi^3 \cos \varphi \Big|_0^{\pi} + 3 \int_0^{\pi} \varphi^2 \cos \varphi d\varphi) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = \varphi^2 \quad d\varphi = \cos \varphi d\varphi \\ du = 2\varphi d\varphi \quad \varphi = \sin \varphi \end{array} \right| = \frac{2\pi a^3}{3} (\pi^3 + 3(\varphi^2 \sin \varphi \Big|_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \varphi \sin \varphi d\varphi)) = \left| \begin{array}{l} u = \varphi d\varphi = \sin \varphi d\varphi \\ du = d\varphi = -\cos \varphi \end{array} \right|$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3} (\pi^3 - 2(-\varphi \cos \varphi \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos \varphi d\varphi)) = \frac{2\pi a^3}{3} (\pi^3 - 2(\pi + \sin \varphi \Big|_0^{\pi})) = \frac{2\pi a^3}{3} (\pi^3 - 2\pi) = \frac{2\pi^2 a^3}{3} (\pi^2 - 2).$$

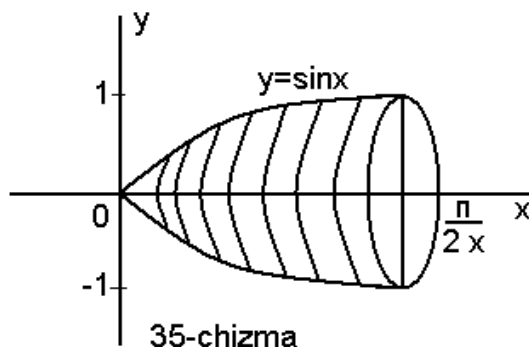
4. Aylanma jism sirtining yuzi

1. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) silliq egri chiziqli yoyini Ox o'qi atrofida aylantirish natijasida hosil bo'ladigan jism sirtining yuzi $S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$ (11) formula bilan hisoblanadi.

2. Agar silliq egri chiziqli $x = x(t), y = y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, sirt yuzi $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$ (12) formula bilan hisoblanadi.

3. Agar silliq egri chiziqli qutb koordinatalar sistemasida $p = f(\varphi), (l \leq \varphi \leq \beta)$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, uning qutb o'qi atrofida hosil bo'lgan jism sirtining yuzi $S = 2\pi \int_l^{\beta} p \sin \varphi \sqrt{p^2 + p'^2} d\varphi$ (13) formula bilan hisoblanadi.

32-misol. $y=\sin x$ sinus ifodaning $x=0$ dan $x=\frac{\pi}{2}$ gacha bo'lgan yoyini Ox oqi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt yuzini toping (35-chizma)



Yechish.(11) formuladan foydalansak:

$$y = \sin x, y' = \cos x; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} x \\ t \end{array} \right|_0^{\pi/2} = -2\pi \int_1^0 \sqrt{1+t^2} dt = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt =$$

$$= \pi (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})). \text{ Bunda } \int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

formuladan foydalandik.

33-misol. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi)$ sikloida (27-chizma) ning bir arkasini Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt yuzini hisoblang.

Yechish (12) formuladan foydalanamiz:

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} y(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt =$$

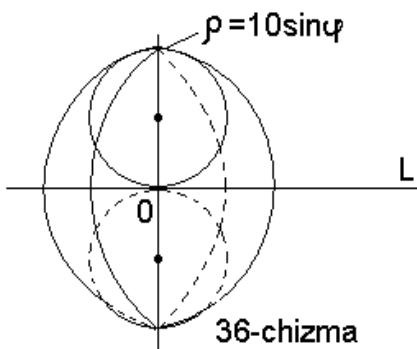
$$16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \left(\frac{t}{2}\right) d\left(\frac{t}{2}\right) = -16\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 z) d(\cos z) = 16\pi a^2 \left(\cos z - \frac{\cos^3 z}{3}\right) \Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

34-misol. $\rho = 10 \sin \varphi$ aylananing O'l qutb o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning yuzini hisoblang (36-chizma).

Yechish. (13) formuladan foydalanamiz:

$$\rho' = 10 \cos \varphi, \alpha = 0, \beta = \pi, S = 2\pi \int_0^{\pi} 10 \sin^2 \varphi \sqrt{(10 \sin^2 \varphi) + 100 \cos^2 \varphi} d\varphi = 200\pi \int_0^{\pi} \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$200\pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 100\pi \left(\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi\right) \Big|_0^{\pi} = 100\pi^2 \approx 985,96$$



Mustahkamlash uchun savollar

1. Yoy uzunligi nima?
2. Egri chiziq yoyinitopish formulasini ayting?
3. Qutb koordinatalar sistemasini tushuntirib bering?
4. Parametrik tenglama bilan berilgan egri chiziq yoy uzunligini topish formulasini ayting?
5. Aylanish jismining hajmi nima?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

1. $y^2 = 4x$ parabolaning $x=0$ dan $x=1$ gacha bo'lgan yoyi uzunligini toping. J: $2(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$

2. $x^2 + y^2 = R^2$ aylana uzunligini toping

J: $2\pi R$

3. $y = \frac{x^2}{2} + 1$ parabolaning Ox o'qi bilan kesilgan yoyning uzunligini toping

J: $\sqrt{6} + \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

4. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$ astroidaning uzunligini hisoblang J: $6a$.

5. $9y^2 = 4x^3$ egri chiziqning O(0:0) dan B($\sqrt{3}; 2\sqrt{3}$) gacha bo'lgan yoy uzunligini toping. J $\frac{14}{3}$;

6. $y = \ln x$ egri chiziqning ($\sqrt{3}; \ln \sqrt{3}$) nuqtadan ($\sqrt{8}; \ln \sqrt{8}$) nuqtagacha bo'lgan yoy uzunligini toping. J: $1 + \frac{1}{2} \ln 1,5$.

7. $y = \ln \sin x$ egri chiziqning $x = \frac{\pi}{3}$ dan $x = \frac{\pi}{2}$ gacha bo'lgan yoy uzunligini toping.

J: $\frac{1}{2} \ln 3$

8. $y = e^x$ egri chiziqning $x=0$ dan $x=1$ gacha bo'lgan yoy uzunligini toping.

J: $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - \ln \frac{1+\sqrt{1+e^2}}{e(1+\sqrt{2})}$.

9. $y = \frac{x}{2}$ chiziqning Ox o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanish jismining a) $x=2$, $x=6$ to'g'ri chiziqlar orasidagi qismining; b) $x=0$, $x=6$ to'g'ri chiziqlar orasidagi qismining hajmini toping.

J: a) $17 \frac{1}{3} \pi$ (kub birlik); b) 18π (kub birlik).

10. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ yarim aylananing Ox o'q atrofida aylanishdan hosil bo'lgan aylanish jismi – sharning hajmini toping J: $\frac{4}{3} \pi r^3$

11. $y = 6x - x^2$, $y = -x + 6$ chiziqlar orasidagi shakilning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanish jismning hajmini toping J: $214 \frac{1}{3} \pi$.

12. $y^2 = 4x$ parabolaning O(0:0) va A(4:4) nuqtalari orasidagi yoyini Ox o'qi atrofida aylanish natijasida hosil bo'ladigan aylanma paraboloidning hajmini hisoblang. J: 8π

13. $y = x^2 - 4$ parabolaning Ox o'qi bilan kesishganda hosil bo'lgan yoyini Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'ladigan jismning hajmini toping. J: $34 \frac{2}{15} \pi$.

14. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklni Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping. J: $\frac{64}{5} \pi$.

15. $y=x^3$ parabolaning $x=0$ dan $x=1$ gacha bo'lgan yoyini Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt yuzini hisoblang. J: $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$

15-mavzu. Aniq integralning mutaxassislikka oid masalalarni yechishga tadbiri

- Reja:** 1. Egri chiziqli massasini hisoblash
 2. Moddiy nuqtaning tezlik bo'yida bosib o'tilgan yo'lini hisoblash
 3. O'zgaruvchan kuchning bajargan ishini, suyuqlikning plastinkalarga ta'sir etuvchi bosim kuchini hisoblash
 4. Jismning sovush tezligi, xamir achishida achitqi (ferment)ning o'sish tezligi
 5. Chiziqli va doiraning inersiya momentlarini, tekis shakilning og'irlik markazini hisoblash

Tayanch iboralar va tushunchalar

Egri chiziqli massasi, moddiy nuqtaning tezlik bo'yida bosib o'tilgan yo'li, o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini, suyuqlikning plastinkalarga ta'sir etuvchi bosim kuchi, jismning sovush tezligi, xamir achishida achitqi (ferment)ning o'sish tezligi, chiziqli va doiraning inersiya momentlari, tekis shakilning og'irlik markazi

1. Egri chiziqli massasini hisoblash

Dekart koordinatalari sistemasida ℓ yassi egri chiziqli $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) tenglama bilan berilgan bo'lib, $(x;y)$ $\varepsilon \ell$ nuqtadagi chiziqli zichlik $\rho(x,y)$ bo'lsin. Bu holda egri chiziqli massasi

$$m = \int_a^b \rho(x; y) d\ell = \int_a^b \rho(x; f(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \quad (1) \text{ formula orqali hisoblanadi.}$$

Agar egri chiziqli $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, ($\alpha \leq t \leq \beta$) parametrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, egri chiziqli massasini $m = \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$ (2) formula orqali hisoblanadi.

Xususiyl holda zichlik $\rho(x,y) = 1$ bo'lsa, egri chiziqli massasi egri chiziqli uzunligiga teng.

2. Moddiy nuqtaning tezlik bo'yida bosib o'tilgan yo'lini hisoblash

Agar moddiy nuqta biror egri chiziqli bo'yicha harakatlanayotgan bo'lsa va uning t mamentdagi tezligi $V=f(t)$ ma'lum bo'lsa, u holda bu moddiy nuqtaning $[t_1;t_2]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'li

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (3) \text{ formula yordamida topiladi.}$$

3. O'zgaruvchan kuchning bajargan ishini hisoblash

$F(S)$ kuch ta'sirida M moddiy nuqta O_s to'g'ri chiziqli bo'ylab harakatlansin.

Bu kuchning M nuqtani $s=a$ vaziyatdan $s=b$ vaziyatga ko'chirishda bajargan ishi $A = \int_a^b F(s) ds$ (4) formula bilan topiladi.

4. Suyuqlikning plastinkalarga ta'sir etuvchi bosim kuchini hisoblash

Suyuqlikning plastinkaga bo'lgan bosim kuchi, Paskal qonuniga asosan $P = \gamma \int_a^b xy dx$ (5) formula yordamida topiladi. Bunda

- a – plastinkaning eng yuqori nuqtasi turgan chuqurlik;
- b – uning eng pastki nuqtasi turgan chuqurlik;

γ – suyuqlikning solishtirma og'irligi;

x – plastinka nuqtalaridan suyuqlik sathigacha bo'lgan masofa;

y – plastinka gorizonta kesimining uzunligi;

$y=f(x)$ – plastinkaning shakliga bog'liq bo'lgan ma'lum funksiya;

Gorizonta yuzga bosim kuchi (N larda) quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi: $p = 9807 \gamma_{sx}$ (6) bunda

γ -suyuqlik zichligi (kg/m^3 larda); S -yuzning sathi (m^2 larda); X -yuzining botish chuqurligi (m larda).

5. Jismning sovush tezligi

Oziq-ovqat sanoatda mahsulotning kafolat muddatlari oziq – ovqat mahsulotlarining kafolati sovuqlik darajasi bilan, ayrimlari esa qaynoqlik darajalari orqali aniqlanadi.

Jismning havoda sovush tezligi jismning harorati bilan havo harorati orasidagi ayirmaga proporsionaldir, ya'ni $\frac{dT}{dt} = k(T - T_o)$ (7), bunda T va T_o – mos ravishda jismning va havonong harorati.

(6) formulaga N'yutonning sovush qonuni deyiladi.

6. Xamir achishida achitqi (ferment)ning o'sish tezligi

Xamir achishida achitqi (ferment)ning o'sish tezligi uning mavjud miqdoriga proporsional bo'ladi, ya'ni agar Q -fermentning t paytdagi mavjud miqdori (gramm hisobida) bo'lsa, fermentning o'sish tezligi $\frac{dQ}{dt}$ bo'ladi, bunda t -soat hisobida olingan vaqt.

Masala shartiga asosan, $\frac{dQ}{dt} = kQ$ yoki $\frac{dQ}{Q} = kdt$ (8) tenglamada t bo'yicha a dan t gacha, Q

bo'yicha b dan Q gacha integrallaymiz: $\int_a^b kdt = \int_b^Q \frac{dQ}{Q}$ (9).

7. Chiziqli va doiraning inersiya momentlarini hisoblash

a) uzunligi e bo'lgan bir jinsli tayoqchanning ikkinchi uchiga nisbatan inersiya momenti quyidagicha hisoblanadi; $J = \gamma \int_0^e x^2 dx = \gamma \frac{e^3}{3}$ (10).

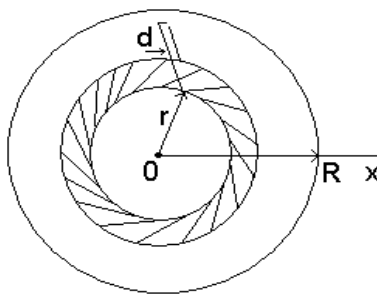
Agar tayoqchanning massasi M berilgan bo'lsa, u holda $\gamma = \frac{m}{e}$ bo'lib, $J = \frac{M}{e} \cdot \frac{e^3}{3} = \frac{1}{3} Me^2$ (11) ga ega bo'lamiz.

b) radiusi R bo'lgan aylananing markaziga nisbatan inersiya momenti $J = 2\pi\gamma r^3$ (12) formula orqali aniqlanadi.

c) radiusi r bo'lgan bir jinsli doiraning markaziga nisbatan inersiya momentini hisoblash uchun doirani n ta halqalarga ajratamiz. Bu halqalarning har birining yuzi $ds = 2\pi r dr$ ga, massasi $dm = 2\pi r \rho dr$ (13) ga teng, bunda $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ - zichlik. Bitta halqachaning inersiya momenti (38-chizma):

$$dJ_o = 2\pi r^3 dr \quad (14).$$

Bunday inersiya momentlari yig'indisining $n \rightarrow \infty$ dagi limiti mavjud va u quyidagi aniq integralga teng: $J_o = \int_0^R 2\pi r^3 dr = 2\pi \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^R = \frac{1}{2} \pi R^4 \cdot \frac{M}{\pi R^2} = \frac{1}{2} MR^2$ (15)



37-chizma

8. Tekis shaklning og'irlik markazini hisoblash

Quyidagi hollarni qaraymiz;

a) biror tekis shakl 15-chizmada ko'rsatilganidek berilgan bo'lsin. Tekis shakl $p = p(x)$ zichlikka ega bo'lsa, u holda tekis shaklning og'irlik markazi $C = (x_c; y_c)$ ning koordinatalari quyidagi formula bilan topiladi;

$$x_c = \frac{\int_a^b x p(x) \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b p(x) \sqrt{1 + y'^2} dx}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y p(x) \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b p(x) \sqrt{1 + y'^2} dx}; \quad (16)$$

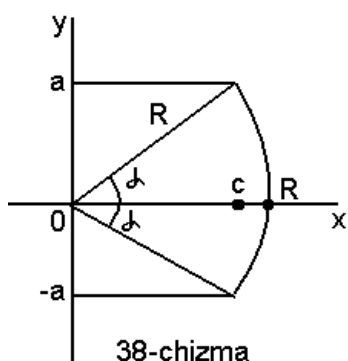
b) agar tekis shakl $[a, b]$ kesmada pastdan $y=f_1(x)$ yuqoridan $y=f_2(x)$ chiziqlar bilan chegaralangan (17-chizma) va zichlik $p = p(x)$ bo'lsa, u holda uning og'irlik markazi $C = (x_c; y_c)$ ning koordinatalari quyidagi formula bilan aniqlanadi;

$$x_c = \frac{\int_a^b x p(x) (f_2(x) - f_1(x)) dx}{\int_a^b p(x) (f_2(x) - f_1(x)) dx}; \quad y_c = \frac{\int_a^b y p(x) (f_2(x) - f_1(x)) dx}{\int_a^b p(x) (f_2(x) - f_1(x)) dx};$$

Eslatma: Hamma nuqtalarida bir xil zichlikka ega bo'lsa, $p(x)$ qisharib ketadi.

1-misol. Markaziy burchagi 2α va radiusi r bo'lgan bir jinsli aylana yoyi bilan chegaralangan shaklning og'irlik markazini toping.

Yechish. Koordinatalar sistemasini 37-chizmada ko'rsatilganidek olamiz.



38-chizma

Bu holda yoyning simmetrikligidan va bir jinsligidan $y_c=0$ ga ega

bo'lmiz. x_c ni (16) formuladan topamiz: $x_c = \frac{\int_{-a}^a x \sqrt{1 + x'^2} dy}{\int_{-a}^a \sqrt{1 + x'^2} dy};$

Aylananing parametrik tenglamasidan foydalanamiz: $\begin{cases} x = R \sin t \\ y = R \cos t \end{cases}$

$$\text{U holda } x_c = \frac{\int_{-a}^a R^2 \cos t dt}{\int_{-a}^a R dt} = R \frac{\sin t}{t} \Big|_{-a}^a = R \frac{\sin a}{a}$$

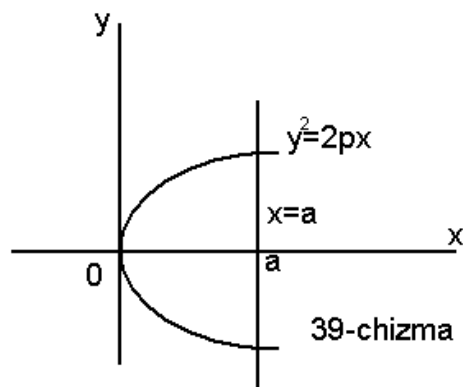
2-misol. $y^2=2px$ parabolaning $x=a$ to'g'ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo'lgan segment og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin (38-chizma).

Yechish: shakldan ko'rinadiki $[0; a]$ kesmada pastdan, $f_1(x) = -\sqrt{2px}$ yuqoridan $f_2 = \sqrt{2px}$

chiziqlar bilan chegaralangan. (17) formuladan foydalanamiz: $x_c = \frac{2 \int_0^a x \sqrt{2px} dx}{2 \int_0^a \sqrt{2px} dx} = \frac{2 \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{5} x^{5/2}}{2 \sqrt{2p} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2}} \Big|_0^a = \frac{3}{5} a$

$y_c=0$

(Chunki segment Ox o'qqa nisbatan simmetrikdir).



3-masala. Nuqtaning harakat tezligi $V = \sqrt{v_1 + t}$ m/s formula bilan berilgan. Nuqtaning boshlang'ich $t = 5$ s vaqt mobaynida bosib o'tilgan yo'lini toping. Bu vaqt oralig'idagi o'rtacha tezligini toping.

Yechish: 3-formulaga asosan:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_0^5 \sqrt{1+t} d(1+t) = \frac{2}{3} (1+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^5 = \frac{2}{3} (\sqrt{6^2} - 1) \approx \frac{2}{3} (3,3 - 1) = \frac{4,2}{3} = 1,4 \text{ m}$$

$$V_{o'r} = \frac{S}{t} = \frac{1,4}{5} = 0,28 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Javob: $S=1,4 \text{ m}$; $V_{o'r}=0,28 \text{ m/s}$

4-masala. 6 kg. kuch prujinani 8 sm.ga cho'zsa, 15 kg. kuch prujinani qanchagacha cho'zadi. Qanday ish bajaradi?

Yechish: Guk qonuniga ko'ra kuch cho'zilishga va qisilishga proporsionaldir, ya'ni $F=kx$ bunda k – proporsionallik ko'ffitsienti, x – cho'zilish yoki qisilish kattaligi. Masalaning shartiga ko'ra, 15 kg. kuch prujinani qanchaga cho'zishini topamiz:

6kg _____ 8 sm

$$15\text{kg} \quad x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{15 \cdot 8}{6} = 20 \text{ sm} = 0,2 \text{ m}.$$

Endi $\overline{F} = 15 \text{ kg}$, $x = 0,2 \text{ m}$ ekanligini e'tiborga olib, kuch tenglamasi (6) ga qo'ysak:

$$15\text{kg} = k \cdot 0,2\text{m} \Rightarrow k = \frac{15 \text{ kg}}{0,2 \text{ m}} = 75 \frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Demak, $\overline{F} = f(x) = 75 x$; $a = 0$; $b = 0,2$

(4) formulaga binoan bajarilgan ish quyidagiga teng:

$$A = \int_0^{0,2} 75 x dx = 75 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,2} = 37,5 \cdot 0,04 = 1,5 \text{ kg} / \text{m}; \quad 1 \text{ kgm} = 9,81 (j) \text{ bo'lishini}$$

(J (Jaul) – birliklarning Halqaro sistemasi SL dagi ish birligi)

Shuni hisobga olsak $V, A = 1,5 \text{ kgm} = 1,5 \cdot 9,81 (j) = 14,715 (j)$.

Javob: $A=14,715 (j)$

5-masala. Prujinani 5 sm. ga cho'zishda 3kg. ish bajariladi. Agar 2 kg. ish bajarilsa, prujina qancha cho'ziladi?

Yechish: $A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b kx dx$ formuladan foydalanamiz.

Masala shartida berilgan barcha kattaliklarni SL birliklarda ifodalaymiz: $x_0=a=0$, $x_1=b=5\text{sm}=0,05\text{m}$, $x_2=?$ $A_1 = 3 \text{ kgm} = 3 \cdot 9,81 (j) = 29,43 (j)$, $A_2 = 2 \text{ kgm} = 2 \cdot 9,81 (j) = 19,62 (j)$.

Bu qiymatlarni (19) formulaga qo'ysak: $29,43 = k \int_0^{0,05} x dx = k \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,05} = k \cdot 0,00125$ Bundan

$k=23544$.

$$A = k \int_{x_0}^{x_2} x dx \Leftrightarrow 19.62 = 23544 \int_0^{x_2} x dx = 11772 \cdot x_2^2 \Rightarrow x_2^2 \frac{19.62}{11772} = 0.0016 \Rightarrow x_2 \approx 0.0408 \text{ m}$$

Javob: $x_2=0,0408 \text{ m}$

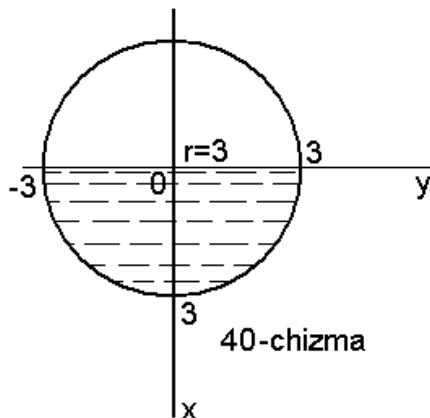
6-masala. Suv to'ldirilayotgan idishning bir tomoni uzunligi 50 sm, balandligi 40 sm. Suvning shu devorga bergan bosim kuchini toping.

Yechish. Suyuqlikning bosim kuchini (5) formuladan foydalanib topamiz. Masala shartiga ko'ra $a=0$, idish suv bilan to'ldirilgani uchun $b=40 \text{ sm}$, $y=50 \text{ sm}$, suvning solishtirma og'irligi $\gamma=1 \text{ g/sm}^3$.

$$\text{Bu holda } \rho = \int_0^{40} 50 x dx = 25 x^2 \Big|_0^{40} = 25 \cdot 1600 \text{ g} = 40000 = 40 \text{ kg}$$

Javob: 40kg

7-masala. Ko'ndalang kesimi 6 m. diametrli doira bo'lgan va gorizontaal yotgan trubada yarimigacha suv bor. (37-chizma).



Trubani berkitib turgan vertikal qopqoqqa (zaslonkaga) suvning bosim kuchini toping.

Yechish: Aylananing tenglamasini $x^2+y^2=9$. Binobarin, $y = \sqrt{9-x^2}$, $\gamma=1000$ va integrallash chegaralari $a=0$ va $b=3$ (1 m^3 suvning massasi 1000 kg). Bu qiymatlarni (5) formulaga qo'yib, qopqoqning Ox o'qdan o'ng tomonidagi vertikal qismiga tushayotgan bosim kuchini topamiz (37-chizma). Binobarin, butun qopqoqqa tushayotgan bosim kuchi quyidagiga teng:

$$p = 2 \cdot 9000 = 18000 \text{ kg} = 18 \cdot 10^4 \cdot N$$

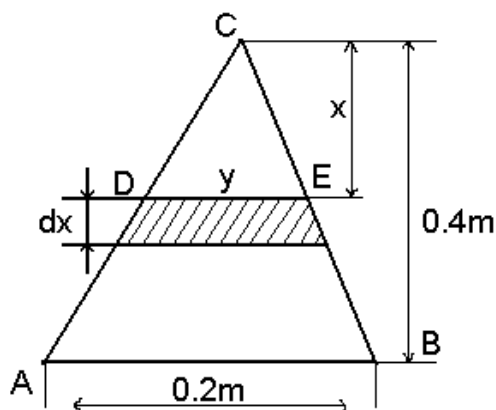
Javob: $p = 18 \cdot 10^4 \cdot N$

8-masala. Jismning havoda sovush tezligi temperaturalarining $T-T_0$ ayirmasiga proporsional, bu yerda T va T_0 – mos ravishda jismning va havoning temperaturasi. Agar T_0 – mos ravishda jismning va havoning temperaturasi. Agar $T_0=10^\circ\text{C}$ bo'lib, jism 15 min. ichida 1100°C dan 700°C gacha sovusa, temperaturasi 1100°C bo'lgan jism qancha vaqt ichida 200°C soviydi?

Yechish: Masala shartiga binoan, (7) formuladan foydalanib, !!! hosil qilamiz.

T_0 ning 100°C bo'lgani uchun $t=0$ da $T = 1100^\circ\text{C}$ bo'ladi, shuning uchun $C = -\ln 200$. Binobarin, k ni topish uchun bu tenglikka $T=700^\circ\text{C}$, $t = 15 \text{ min}$ qiymatlarni qo'yamiz: !!! shunday qilib, !!!, bundan izlanayotgan vaqtni topamiz:

9-masala. Xamir achishida achitgining (sermentning) o'sish tezligi uning bor miqdoriga proporsional bo'ladi. Agar boshlang'ich paytdagi 2 kg . achitg'i 1 soatdan keyin $2,6 \text{ gr.}$ bo'lib qolsa, achish boshlangandan 4 soat o'tgan paytdagi achitgi miqdorini aniqlang.



41 -chizma

Yechish: (40) formuladan foydalanamiz. Berilgan masalada $a=0$, $b=2$ bo'lganligidan: !!!

k ni topish uchun $t=1$ da $Q=2,6$ bo'lishini e'tiborga olsak: $k=\ln 2,6 - \ln 2 = \ln 1,3$. Bundan $\ln Q - \ln 2 = t \ln 1,3 \Rightarrow kt = \ln Q - \ln 2$.

k ni topish uchun $t = 1$ da $Q=2,6$ bo'lishini e'tiborga olsak:

$$k = \ln 2.6 - \ln 1.3$$

bundan

$\ln Q - \ln 2 = t \ln 1.3 \Rightarrow Q = 2 \cdot (1.3)^t$ bo'lganda $Q \approx 5,71 \text{ g}$ bo'ladi.

10 – masala. Asosi $0,2 \text{ m}$ va balandligi $0,4 \text{ m}$ bo'lgan uch burchakli plastina suvga vertikal ravishda

shunday botirilganki, uning uchi suv sathida yotadi, asosi esa suv sathiga parallel. Suvning plastinaga bosim kuchini aniqlang.

x chuqurlikda kengligi dx bo'lgan gorizontal yo'lak (polosa) ajratamiz (41-chizma). x chuqurlikning kichik dx ga o'zgarishi bosim kuchi P ning kichik kattalik dP ga o'zgarishiga sabab bo'ladi. Yo'lak yuzi $\Delta S = ydx$ ga teng. ABC va DEC uchburchaklarning o'xshashligidan $y : 0,2 = x : 0,4$. Bu yerdan $y = 0,5x$. Demak, $\Delta S = 0,5x dx$.

Elementlar bosim kuchi (N larda) quyidagiga teng: $dp = 9,807 \gamma x \Delta S = 4903,5 x^2 dx$.

dp ni x o'zgaruvchi O dan $0,4$ gacha o'zgarganda integrallab, topamiz:

Mustahkamlash uchun savollar

1. Egri chiziq massasi va o'zgaruvchan kuchning bajargan ishini topish formulasini ayting?
2. Suyuqlikning plastinkalarga ta'sir etuvchi bosim kuchini, jismning sovush tezligi qanday topiladi.
3. Chiziq va doiraning inersiya momentlarini, tekis shakilning og'irlik markazini topish formulalarini ko'rsating

16-mavzu. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar haqida umumiy tushunchalar

Reja

1. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar haqida umumiy tushunchalar.
2. Ikki va ko'p argumentli funktsiya limiti.
3. Ikki va ko'p argumentli funktsiyaning uzluksizligi va uzilishi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ko'p o'zgaruvchili funktsiya, ikki o'zgaruvchili funktsiya, ikki o'zgaruvchili funktsiya aniqlanish va o'zgarish sohalari, aniqlanish sohasi, o'zgarish sohasi, berilish usullari, geometrik tasviri, limiti, uzluksizligi va uzilishi.

1. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar haqida umumiy tushunchalar

Tabiat va jamiyatda juda ko'p masalalar borki o'zgaruvchi miqdorlar bog'lanishlarida bittasining sonli qiymati boshqa bir nechasining qiymati bilan aniqlanadi. Masalan, tomonlarining uzunliklari x va y dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi, uning tomonlarining uzunliklari o'zgarishi bilan o'zgarib boradi; parallelepipedning hajmi uning uchala o'lchovining o'zgarishi bilan o'zgaradi; biror yer maydonidan olinayotgan hosildorlik yerning tuzilishiga, unga o'g'it berishga, sug'orishga, dehqonning malakasiga va boshqa juda ko'p faktorlarga; sigirdan sog'ib olinayotgan sut miqdori, sigir zotiga, uning qanday em-xashak bilan bohilishiga va hakovzolarga bog'liq. Bunday misollarni istalgancha keltirish mumkin.

Bunday bog'lanishlarni tekishirish uchun **ko'p o'zgaruvchili (argumentli) funktsiyalar** tushunchasini kiritamiz va ularni tekshirish qurulma amallarini o'rganamiz.

1-ta'rif. R^2 fazoda biror D to'plamning bir-biriga bog'liq bo'lmagan x va y o'zgaruvchilari har bir x va y haqiqiy sonlari juftligiga biror qoidaga ko'ra E to'plamdagi bitta z haqiqiy son mos bo'lgan bo'lsa, D to'plamda **ikki** x va y **o'zgaruvchilarning funktsiyasi** **z** **aniqlangan** deyiladi. Ikki o'zgaruvchining funktsiyasi simvolik tarzda quyidagicha belgilanadi: $z = f(x, y)$, $z = F(x, y)$ (funktsiya x yoki y bilan o'zgaruvchilar mos ravishda x, t yoki x_1, x_2 lar bilan belgilangan

bo'lsa $z = f(x, t)$ yoki $z = F(x_1, x_2)$ tarzda ifodalanishi ham mumkin va h.k.). Bunda x, y o'zgaruvchilarga erkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, z ga erksiz o'zgaruvchi yoki funktsiya deb ataladi.

D to'plamga funktsiyaning aniqlanish sohasi, E to'plamga o'zgarish yoki qiymatlar sohasi deyiladi. Har bir juft haqiqiy songa biror tayin koordinat sistemasida bitta M nuqta va bitta nuqtaga bir juft haqiqiy son mos kelganligi uchun ikki argumentli funktsiyani M nuqtaning funktsiyasi ham deyiladi, hamda $y = f(x_1, x_2)$ o'rniga $y = f(M)$ deb yozish mumkin.

Ikki o'zgaruvchili funktsiya berilish usullari: bir o'zgaruvchili funktsiyaga o'xshash har xil bo'lishi mumkin. Ko'proq funktsiyaning **analitik usulda** berilishini qaraymiz.

Masalan. 1) $z = x_1^2 + x_2^2$ bu funktsiya analitik usulda bo'lib, $O X_1 X_2$ tekislikning hamma nuqtalari uchun aniqlangan. O'zgarish sohasi $[0, +\infty)$ dan iborat bo'ladi.

2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ funktsiya aniqlangan bo'lishi uchun

$4 - x^2 - y^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 \leq 4$ bo'lishi kerak, bunday nuqtalar to'plami markazi koordinatlar boshida radiusi 2 ga teng bo'lgan doiradan iborat. Qiymatlar to'plami $[0, 2)$ bo'ladi. 3)

$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$ funktsiya $x^2 + y^2 - 9 > 0$, ya'ni markazi koordinatlar boshida radiusi 3 ga teng bo'lgan doiradan tashqarida aniqlangan. Qiymatlar to'plami $(0, +\infty)$.

Ikki argumentli funktsiyaning geometrik tasviri fazoda tenglamasi $z = f(x, y)$ bo'lgan sirtini ifodalaydi.

Masalan: 1) $z = 2x + 3y - 12$ ikki argumentli funktsiya fazoda $2x + 3y - z - 12 = 0$ tekislikni tasvirlaydi. 2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sfera tenglamasi bo'lib, $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ikki argumentli funktsiyalar grafiklari sferani ifodalaydi.

2-ta'rif. D to'plamning har bir (x_1, x_2, x_3) haqiqiy sonlar uchligiga biror hoida bo'yicha E to'plamdagi bitta y haqiqiy son mos bo'lgan bo'lsa, D to'plamda uch o'zgaruvchining funktsiyasi aniqlangan deyiladi.

Bunda x_1, x_2, x_3 erkli o'zgaruvchilar yoki argumentlar, y esa erksiz o'zgaruvchi yoki funktsiya deb ataladi. Uch o'zgaruvchining funktsiyasi

$y = f(x_1, x_2, x_3)$, $u = f(x, y, z)$, $u = A(x, y, z)$ va h.k. belgilanadi.

Geometrik nuqtai nazardan to'g'ri burchakli koordinatlar sistemasida hahiiy sonlarning har bir (x, y, z) uchligiga fazoning yagona $P(x, y, z)$ nuqtasi mos keladi va aksincha. Shuning uchun uch o'zgaruvchining funktsiyasini $P(x, y, z)$ nuqtaning funktsiyasi sifatida harash mumkin. Shunday hilib, $u = f(x, y, z)$ o'rniga, $u = f(P)$ deb yozish ham mumkin. Uch o'zgaruvchili funktsiya aniqlanish sohasi R^3 fazoning biror nuqtalar to'plami yoki butun fazo bo'lishi mumkin.

Masalan: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ funktsiya aniqlanish sohasi: $25 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$ yoki $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ shartda aniqlanganligi uchun $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ sfera va uning ichida aniqlangan.

To'rt o'zgaruvchili va umuman n o'zgaruvchili funktsiyaga ham yuhoridagidek ta'rif berish mumkin. Bunday funktsiyalar mos ravishda

$y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ yoki $u = f(x, y, z, t)$, $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bilan belgilanadi.

To'rt va undan ortiq o'zgaruvchiga bog'liq funktsiyalarning aniqlanish sohasini chizmalarda ko'rgazmali namoyish etish mumkin emas. Ammo, uni tasvirlash mumkin bo'lmasa y yo'li deyish mumkin emas. Masalan, to'rtinchi o'zgaruvchi fazodagi temperatura, beshinchisi zichlik va h.k bo'lishi mumkin. Lekin, geometrik atamalarni davom ettirib n o'zgaruvchining funktsiyasini biror n o'lchovli fazo $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtasining funktsiyasi sifatida harash mumkin.

2. Ikki va ko'p argumentli funktsiya limiti. $y = f(x)$ funktsiya uchun nuqtaning atrofi shu nuqtani o'z ichiga olgan oraliq bo'lar edi. Ikki argumentli $z = f(x, y)$ funktsiya qaralganda nuqtaning δ atrofi deyilganda markazi $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada δ radiusli doiraning ichida yotuvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar tushuniladi.

Fazodagi nuqtaning $\mathcal{S}$ atrofi ham shunga o'xshash aniqlanib markazi $P_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtada radiusi $\mathcal{S}$ bo'lgan sharning ichki nuqtalari bo'ladi.

n o'lchovli ($n > 3$) fazoda $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nuqtaning δ atrofi shunga o'xshash aniqlanadi.

1-ta'rif. Ikki o'zgaruvchili $z = f(x, y) = f(P)$ funktsiya P_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsa (P_0 nuqtada aniqlanmagan bo'lishi mumkin) va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilsaki $\rho(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $P(x, y)$ nuqtalar uchun $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ yoki $|f(P) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A o'zgarmas son $z = f(x, y)$ funktsiyaning $P \rightarrow P_0$ dagi limiti deyiladi, va

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \text{ yoki } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad \text{bilan belgilanadi.}$$

Limitning ta'rifidan kelib chiqadiki, A son $z = f(x, y)$ funktsiyaning limiti bo'lsa, $|f(x, y) - A|$ ayirma $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ da cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Uch va undan ortiq o'zgaruvchi funktsiyasining limiti ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi.

Bir necha o'zgaruvchili funktsiyaning limiti 0 ga teng bo'lsa, bunday funktsiyaga cheksiz kichik funktsiya yoki cheksiz kichik miqdor deyiladi.

$y = f(x)$ funktsiya uchun limitlar haqidagi barcha asosiy teoremlar bir necha o'zgaruvchining funktsiyasi uchun ham o'rinli ekanligini ta'kidlab o'tamiz.

1-misol. $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y}$ limitni hisoblang.

Yechish. $P_0(2;0)$ nuqtada $\frac{\sin xy}{y}$ funktsiya aniqlanmagan. Limitning xossaligidan

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin xy}{xy} = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{chunki} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

3. Ikki va ko'p argumentli funktsiyaning uzluksizligi va uzilishi.

1-ta'rif. $z = f(x, y) = f(P)$ funktsiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada hamda uning biror atrofida aniqlangan va $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ yoki $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$ bo'lsa, ya'ni funktsiyaning

$P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi limiti funktsiyaning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, **funktsiya** **$P_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz** deyiladi.

Bu ta'rifga teng kuchli 2-tarifni ham keltiramiz.

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ funktsiyaning $P_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi to'liq orttirmasi bo'lsin.

2-ta'rif. $z = f(x, y) = f(P)$ funktsiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lsa, argumentlarning Δx va Δy cheksiz kichik orttirmalariga funktsiyaning ham Δz cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya'ni

$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ bo'lsa, **funktsiya $R_0(x_0, y_0)$ nuqtada uzluksiz** deyiladi.

3-ta'rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmagan nuqtalar **uzilish nuqtalari** deyiladi. Ikki o'zgaruvchili funktsiya uzilish nuqtalari butun chiziqni hosil qilishi mumkin.

1-misol. $z = x^2 + y^2$ funktsiyaning $P_0(2;3)$ nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish: Bu nuqtada funktsiyaning to'liq orttirmasini topamiz:

$$\begin{aligned}\Delta z &= (2 + \Delta x)^2 + (3 + \Delta y)^2 - (2^2 + 3^2) = 2^2 + 2\Delta x + \Delta x^2 + \\ &+ 3^2 + 6\Delta y + \Delta y^2 - 2^2 - 3^2 = 2\Delta x + \Delta x^2 + 6\Delta y + \Delta y^2\end{aligned}$$

2-ta'rifga asosan $\lim \Delta z = \lim [2\Delta x + (\Delta x)^2 + 6\Delta y + \Delta y^2] = 2 \cdot 0 + 0 + 6 \cdot 0 = 0$. Shunday qilib, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$ da $\Delta z \rightarrow 0$. Demak, $P_0(2;3)$ nuqtada berilgan funktsiya uzluksizdir. Bu holatni istalgan $P_0(x_0; y_0)$ uchun ko'rsatish mumkin. (Bu o'quvchiga havola etiladi). $z = f(x, y)$ funktsiya biror to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, unga bu to'plamda uzluksiz deyiladi.

2-misol. $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$ funktsiyaning uzilish nuqtalarini toping.

Yechish. Funktsiya koordinatalari $z^2 - y^2 = 0$ tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarda uzilishga ega. Bu $y = x$ va $y = -x$ to'g'richiziqalar bo'lib, bu to'g'richiziqalarga tegishli har bir nuqtada funktsiya uzilishga ega bo'ladi.

Ikki o'zgaruvchining uzluksiz funktsiyasi ham bir o'zgaruvchining uzluksiz funktsiyasi ega bo'lgan asosiy xossalarga ega bo'ladi. (Bu xossalarni takrorlash o'quvchiga tavsiya etiladi).

Mustaqil ish uchun topshiriqlar

1. Quyidagi funktsiyalarning aniqlanish sohasini aniqlang va uning qandayligini izohlang:

1) $u = \sqrt{1 - x^2 - 9y^2}$; 2) $u = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$; 3) $u = \ln(x + y)$;

4) $u = \sqrt{4 - x^2 + y^2 - z^2}$; 5) $z = \sqrt{xy}$; 6) $z = \frac{xy}{y - x}$.

2. Quyidagi limitlarni hisoblang.

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin(xy)}{x}$.

3. Quyidagi funktsiyalarning istalgan nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

1) $z = x - y$; 2) $z = x^2 + 3y^2$; 3) $u = x + y + 2z$; 4) $2x^2 + 3y^2 + 2z^2$.

4. Quyidagi funktsiyalarning uzilish nuqtalarini toping.

1) $z = \frac{6}{x^2 - y^2 - 2}$; 2) $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$; 3) $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ko'p argumentli funktsiyalar nazariyasiga nimalar olib keladi?
2. Qanday funktsiyalarga ikki argumentli funktsiyalar deyiladi?
3. Uch argumentli funktsiya deb nimaga aytiladi?
4. 2 va 3 argumentli funktsiyalarning aniqlanish sohalari nima?
5. Ikki va undan ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar limiti deb nimaga aytiladi?
6. Nuqtaning atrofi tushunchasi nima?
7. Ikki va undan ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar limiti qanday xossalarga ega?
8. Ikki va ko'p argumentli funktsiyalarning nuqtada uzluksizligini ta'riflang?
9. Ikki argumentli funktsiya qanday nuqtalarda uzilishga ega deyiladi?
10. Qanday funktsiyalar kesmada uzluksiz deyiladi?

17- mavzu. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilasi va to'la differentsiali

Reja:

1. 2-o'zgaruvchili funktsiya xususiy va to'la orttirmalari.
2. 2-o'zgaruvchili funktsiya xususiy hosilalari.
3. To'la differentsial.
4. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differentsiallar.

5. Ikki argumentli funktsiya ekstremumi.

6. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Tayanch ibora va tushunchalar

Xususiylar orttirma, xususiylar hosila, to'la differentsial, ikkinchi tartibli xususiylar hosila, ikkinchi tartibli to'la differentsial, taqribiy hisoblash. Ekstremumga ega bo'lishining zaruriy va etarli shartlari, eng kichik va katta qiymatlar, xarajat funktsiyasi, foyda funktsiyasi, tovarning limitik sahosi, limitik xarajat, foyda funktsiyasi maksimumi.

1. 2-o'zgaruvchili funktsiya xususiylar va to'la orttirmalari.

1-ta'rif. $z = f(x, y)$ funktsiyada x o'zgaruvchiga biror Δx orttirma berib, y ni o'zgarishsiz qoldirsak, funktsiya $\Delta_x z$ orttirma olib, bu orttirmaga z funktsiyaning x **o'zgaruvchi bo'yicha xususiylar orttirmasi** deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Xuddi shunday, y o'zgaruvchiga Δy orttirma berib x o'zgarishsiz qolsa, unga z funktsiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiylar orttirmasi deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

2-ta'rif. x va y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funktsiya $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to'liq orttirma oladi.

2. 2-o'zgaruvchili funktsiya xususiylar hosilalari.

1-ta'rif. a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funktsiyaning **o'zgaruvchi bo'yicha xususiylar hosilasi** deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial x}$ yoki $z'_x = f'_x(x, y)$ bilan belgilanadi.

b) $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ chekli limit mavjud bo'lsa, unga $z = f(x, y)$ funktsiyaning y o'zgaruvchi bo'yicha xususiylar hosilasi deyiladi va $\frac{\partial z}{\partial y}$ yoki $z'_y = f'_y(x, y)$ bilan belgilanadi.

Xususiylar hosilalar ta'riflaridan ko'rinadiki bir argumentli funktsiyaning differentsiallashtirishning hamma qoida va formulalari o'z kuchida qoladi.

Istalgan chekli sondagi o'zgaruvchilar funktsiyasining xususiylar hosilalari ham yuqoridagidek aniqlanadi.

1-misol. $z = x^2 + 2xy + 3y^2$ xususiylar hosilalarni toping.

Yechish: Oldin y ni o'zgarimas deb z'_x ni topamiz:

$z'_x = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_x = (x^2)'_x + (2xy)'_x + (3y^2)'_x = 2x + 2y$, endi x ni o'zgarimas deb $\frac{\partial z}{\partial y}$ ni topamiz:

$$z'_y = (x^2 + 2xy + 3y^2)'_y = (x^2)'_y + (2xy)'_y + (3y^2)'_y = 2x + 6y.$$

2-misol. $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ funktsiyaning xususiy hosilalarini toping.

Yechish: Hosila olish qoidalari va formulalaridan foydalanib quyidagilarni topamiz:

$$\begin{aligned} u'_x &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \right)'_x = \frac{x'_x(x^2 + y^2 + z^2) - x(x^2 + y^2 + z^2)'_x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \end{aligned}$$

(u'_y, u'_z larni mustaqil toping).

3. To'la differentials. Ma'lumki, x va y o'zgaruvchilar mos ravishda Δx va Δy orttirmalar olsa, $z = f(x, y)$ funktsiya $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ to'la orttirma oladi. Bu to'la orttirmaning Δx va Δy larga nisbatan chiziqli bo'lgan bosh qismi funktsiyaning **to'la differentials** deyiladi va dz bilan belgilanadi. $z = f(x, y)$ funktsiyaning to'la differentials

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (1)$$

formula bilan hisoblanadi, bu erda $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. To'la differentialsdan funktsiyaning taqribiy qiymatlarini hisoblashda foydalanish mumkin, ya'ni $\Delta z \approx dz$ yoki $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy$. bundan

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + z'_x dx + z'_y dy. \quad (2)$$

Uch argumentli $u = F(x, y, z)$ funktsiyaning to'la differentials

$$du = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \quad (3)$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol. $z = \ln(x^2 + y^2)$ funktsiyaning to'la differentialsini toping.

Yechish: Xususiy hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 yz^2)'_x = yz^2 (x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 yz^2)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 yz^2)'_z = yx^2 (z^2)'_z = 2x^2 yz.$$

(1)

formulaga asosan, $du = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 yz dz$ bo'ladi.

2-misol. $u = x^2 yz^2$ funktsiyaning to'la differentsialini toping.

Yechish: Xususiyl hosilalarni topamiz;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 yz^2)'_x = yz^2 (x^2)'_x = 2xyz^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = (x^2 yz^2)'_y = x^2 z^2 (y)'_y = x^2 z^2,$$

(3) formulaga asosan,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = (x^2 yz^2)'_z = yx^2 (z^2)'_z = 2x^2 yz.$$

$$du = 2xyz^2 dx + x^2 z^2 dy + 2x^2 yz dz \quad \text{bo'ladi.}$$

3-misol. O'lchovlari $a = 8m$, $b = 6m$, $c = 3m$ bo'lgan parallelepipedning uzunligi va eni mos ravishda 10 sm va 5 sm ga ko'paytirilsa, balandligi esa 15 sm kamaysa uning hajmii qanday o'zgaradi.

Yechish. Parallelepipedning hajmii $v = xyz$; x, y, z uning o'lchamlari. hajmi orttirmasini taqriban $\Delta V \approx dV$ formuladan hisoblash mumkin. $dV = yxdx + xzdy + xydz$ bo'lib, shartga ko'ra $x = 8$, $y = 6$, $z = 3$, $dx = 0.1$, $dy = 0.05$, $dz = -0.15$ bo'lganligi uchun

$$\Delta V \approx dV = 66 \cdot 3 \cdot 0.1 + 8 \cdot 3 \cdot 0.05 + 8 \cdot 6(-0.15) = -4.2.$$

Shunday qilib, hajmi taxminan $4.2m^3$ ga kamayadi.

4-misol. To'la differentsial formulasidan foydalanib:

$$1) \operatorname{arccctg}\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right), \quad 2) \sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02} \quad \text{larni taqribiy hisoblang.}$$

Yechish: To'la differentsial formulasidan taqribiy hisoblashda foydalanish uchun, oldin qiymati taqribiy hisoblanadigan funktsiyaning analitik ifodasini tanlash zarur, keyin boshlang'ich nuqtani shunday tanlash kerakki funktsiyaning va xususiyl hosilalarning bu nuqtadagi qiymatlarini jadvalsiz hisoblash mumkin bo'lsin. Shundan keyin (2) formuladan foydalanish kerak.

$$1) \operatorname{arccctg}\left(\frac{1.97}{1.02} - 1\right) \quad \text{ifoda } f(x, y) = \operatorname{arccctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) \quad \text{funktsiyaning } P_1(1.97; 1.02) \text{ nuqtadagi}$$

kiymati deyish mumkin. Boshlang'ich nuqta uchun $P_0 = (2; 1)$ ni olsak, $\Delta x = 1.97 - 2 = -0.03$,

$\Delta y = 1.02 - 1 = 0.02$ bo'ladi. Endi xususiyl hosilalarni topib, ularning P_0 nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y) = \left[\operatorname{arccctg}\left(\frac{x}{y} - 1\right) \right]'_x = - \frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)'_x}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2} = - \frac{\frac{1}{y}}{1 + \frac{(x^2 - y^2)}{y^2}} = - \frac{y}{y^2 + (x - y)^2};$$

$$f'_y(x, y) = \left[\operatorname{arccctg} \left(\frac{x}{y} - 1 \right) \right]'_y = - \frac{\left(\frac{x}{y} - 1 \right)'_y}{1 + \left(\frac{x}{y} - 1 \right)^2} = - \frac{-\frac{x}{y^2}}{\frac{(y^2 + (x^2 - y^2))}{y^2}} = \frac{x}{y^2 + (x - y)^2};$$

(2) dan

$$f'_x(2;1) = - \frac{1}{1 + (2-1)^2} = -0.5; \quad f'_y(2;1) = \frac{2}{1 + (2-1)^2} = 1.$$

foydalansak, $\operatorname{arccctg} \left(\frac{1.97}{1.02} - 1 \right) \approx \operatorname{arccctg} \left(\frac{2}{1} - 1 \right) + (-0.5)(-0.03) + 1 \cdot 0.02 = \frac{\pi}{4} + 0.015 + 0.02 = 0.82$ bo'ladi.

2) $\sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02}$ ni $f(x, y, z) = \sqrt{x^y + \ln z}$ funktsiyaning $P_1(1.04; 1.99; 1.02)$

nuqtadagi qiymati deb qaraymiz: boshlang'ich nuqta uchun $P_0(1; 2; 1)$ ni tanlaymiz. Bu holda

$$\Delta x = 1.04 - 1 = 0.04, \quad \Delta y = 1.99 - 2 = -0.01, \quad \Delta z = 1.02 - 1 = 0.02.$$

Xususiy hosilalarni topamiz va ularning $P_0(1; 2; 1)$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f'_x(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{yx^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_x(1; 2; 1) = \frac{2 \cdot 1^{2-1}}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 1;$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_y}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{x^y \cdot \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_y(1; 2; 1) = \frac{1^2 \cdot 0}{2\sqrt{1^2 + \ln 1}} = 0;$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{(x^y + \ln z)'_z}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}}, \quad f'_z(1; 2; 1) = \frac{1}{2}.$$

(2) formulaning uch argumentli funktsiya uchun umumlashganidan foydalanib,

$$\sqrt{1.04^{1.99} + \ln 1.02} \approx \sqrt{1^2 + \ln 1} + 1 \cdot 0.04 + 0 \cdot (-0.01) + \frac{1}{2} \cdot 0.02 = 1.05$$

natijani olamiz.

4. Yuqori tartibli xususiy hosilalar va differentsiallar.

1. $z = f(x, y)$ funktsiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalari deb birinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalarga aytiladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar qo'yidagicha belgilanadi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx}'' = f_{xx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy}'' = f_{xy}''(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx}'' = f_{yx}''(x, y); \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy}'' = f_{yy}''(x, y);$$

$f_{xy}''(x, y)$ va $f_{yx}''(x, y)$ xususiy hosilalar aralash xususiy hosilalar deyiladi. Aralash xususiy hosilalar uzluksiz bo'lgan nuqtalarda ular o'zaro teng bo'ladi.

Uchinchi va undan yuqori tartibli xususiy hosilalar ham yuqoridagidek aniqlanadi.

Ushbu $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ yozuv z funktsiyani m marta x o'zgaruvchi bo'yicha va $(n - m)$

marta $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ o'zgaruvchi bo'yicha differentsiallashni bildiradi.

1-misol. $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

Yechish. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_x = 4x^3 + 8xy^3 + 7y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1)'_y = 4x^2 \cdot 3y^2 + 7x = 12x^2y^2 + 7x.$$

Topilgan hosilalardan yana xususiy hosilalar olamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_x = 12x^2 + 8y^3,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)'_y = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (12x^2y^2 + 7x)'_x = 24xy^2 + 7,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (12x^2y^2 + 7x)'_y = 24x^2y$$

5. Ikkinchi tartibli to'la differentsial $d(dz) = d^2z$ kabi aniqlanib, xususiy hosilalar orqali quyidagicha topiladi.

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 \quad (1)$$

2-misol. $z = x^2y^3$ funktsiyaning ikkinchi tartibli to'la differentsialini toping.

Yechish. Xususiy hosilalarni topamiz:

$$z'_x = (x^2y^3)'_x = 2xy^3; \quad z'_y = 3x^2y^2; \quad z''_{xx} = 2y^3, \quad z''_{xy} = 6xy^2, \quad z''_{yx} = 6xy^2, \quad z''_{yy} = 6xy^2,$$

(1) formulaga asosan ikkinchi tartibli to'la differentsial

$$d^2z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2y dy^2.$$

5. Ikki argumentli funktsiya ekstremumi

5.1. Ikki argumentli funktsiya ekstremumi.

1-ta'rif. $z = f(x, y)$ funktsiyaning $P_0(x_0; y_0)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan katta, ya'ni $f(x_0; y_0) > f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funktsiya $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi.

2-ta'rif. $z = f(x, y)$ funktsiyaning $P_1(x_1; y_1)$ nuqtadagi qiymati uning bu nuqtaning biror atrofi istalgan $P(x, y)$ nuqtasidagi qiymatlaridan kichik bo'lsa, ya'ni $f(x_1; y_1) < f(x, y)$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funktsiya $P_1(x_1; y_1)$ nuqtada minimumga ega deyiladi.

Funktsiyaning maksimum yoki minimumi uning ekstremumi deyiladi. Funktsiya ekstremumga ega bo'lgan nuqta uning ekstremum nuqtasi deyiladi. Funktsiya ekstremumini xususiy hosilalar yordamida tekshiriladi.

Ekstremumning zaruriy shartlari: $P_0(x_0; y_0)$ nuqtada uzluksiz $z = f(x, y)$ funktsiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa,
$$\left. \begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ bo'ladi, yoki bu nuqtada hosilalarning } \Delta \text{ hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmaydi.}$$

Bunday nuqtalarga ekstremum uchun kritik (statsionar) nuqtalar deyiladi. Shuni takidlaymizki hamma kritik nuqtalar ham ekstremum nuqtalar bo'lavermaydi. Kritik nuqtada ekstremum bo'lmasligi ham mumkin.

Ekstremumning etarli shartlari:

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarning kritik nuqtadagi qiymatlarini

$A = f''_{xy}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0);$ bilan belgilaymiz va

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \text{ ni tuzamiz.}$$

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$ bo'lsa, $z = f(x, y)$ funktsiya $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremumga ega bo'lib: 1) $A < 0$ bo'lganda $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga,

2) $A > 0$ bo'lganda minimumga ega bo'ladi.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$ bo'lsa, $P_0(x_0, y_0)$ nuqtada ekstremum yo'q:

$\Delta = AC - B^2 = 0$ bo'lsa, ekstremum bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin.

1-misol. $z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ funktsiya ekstremumini tekshiring.

Yechish. Bu funktsiya butun xOy tekislikda aniqlagan. Birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f'_x = 4x^3 - 4x + 4y; f'_y = 4y^3 + 4x - 4y$$

ekstremumga ega bo'lishning zaruriy shartidan:

$$\left. \begin{aligned} 4x^3 - 4x + 4y &= 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y &= x - x^3 = x(1 - x^2) \\ y^3 + x - y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [x(1 - x^2)]^3 + x - x^{+x^3} &= 0, \\ (1 - x^2)^3 &= -1, 1 - x^2 = -1, x^2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= 0; x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{2} \\ y_1 &= 0; y_2 = \sqrt{2}, y_3 = -\sqrt{2} \end{aligned} \right\}.$$

Demak, uchta $O(0,0)$, $P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ va $P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ va $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ kritik nuqtalarga ega bo'lamiz, boshqa kritik nuqtalar yo'q, chunki $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$ xususiy hosilalar XOY tekislikning hamma nuqtalarida mavjud.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$f''_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4; f''_{xy}(x, y) = 4; f''_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4;$$

$O(0,0)$ nuqtada ekstremumning etarli shartini tekshiramiz: $A = -4$, $B = 4$, $C = -4$;

$\Delta = AC - B^2 = -4 \cdot (-4) - 4^2 = 0$; bo'lib, yuqoridagi etarli shart javob bermaydi. Bu nuqta atrofida berilgan funktsiya musbat ham, manfiy ham bo'lishini ko'ramiz, masalan Ox o'qi bo'yicha ($y = 0$)

$$f(x, y)_{y=0} = f(x, 0) = x^4 - 2x^2 = -x^2(2 - x^2) < 0. \quad y = x, \text{ bissektisa bo'yicha}$$

$$f(x, y)_{y=x} = f(x, x) = 2x^4 > 0 \text{ bo'ladi. Shunday qilib, } O(0,0) \text{ biror atrofida } \Delta f(x, y)$$

ortirma ishorasini bir xil saqlamaydi, demak ekstremum yo'q.

$P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ nuqtada etarli shartni tekshiramiz:

$$AC - B^2 = 400 - 16 > 0 \text{ va } A = 20 > 0 \text{ demak } P_1(-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \text{ nuqtada funktsiya minimumga ega.}$$

$$f_{\min} = -8;$$

$P_2(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ nuqtada etarli shartni tekshiramiz: bu nuqta uchun $A = 20$, $B = 4$, $C = 20$ bo'lib

$\Delta = AC - B^2 = 400 - 16 > 0$ va $A = 20 > 0$ bo'lganligi uchun $P_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ nuqtada ham berilgan funktsiya minimumga ega bo'ladi, $f_{\min} = -8$

2-misol. $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ funktsiyaning ekstremumini tekshiring.

Yechish.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x-1}{2\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}} \quad P_0(1;1) \text{ nuqtada xususiy}$$

hosilalar mavjud emas. Demak, $P_0(1;1)$ nuqta kritik nuqta bo'ladi. Bu nuqtada ekstremumni tekshirish uchun Δz orttirmaning P_0 nuqta atrofida ishorasini tekshiramiz:

$$\Delta z = \sqrt{(1 + \Delta x - 1)^2 + (1 + \Delta y - 1)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} > 0,$$

bu ishora $P_0(1;1)$ nuqtaning istalgan atrofida saqlanadi ya'ni $P_0(1;1)$ nuqtada funktsiya minimumga ega $z_{\min} = f(1;1) = 0$;

5.2. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topish.

Chegaralangan yopiq sohada differentsiallanuvchi funktsiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga yo sohada yotuvchi kritik nuqtada, yo bu sohachegarasida erishadi.

1-misol. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ funktsiyaning $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -3$ sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

Yechish. Soha AOB uchburchakdan iborat. Soha ichidagi kritik nuqtalarni topamiz:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{bundan } x = -1, y = -1 \text{ bo'lib, } P_0(-1, -1) \text{ kritik nuqtaga ega}$$

bo'lamiz. Funktsiyaning soxa chegarasida tekshiramiz: AO chegarada $y = 0$ bo'lib, $f(x)$ funktsiya xosil bo'ladi. Bu funktsiyaning ekstremumi: $z'_x = 2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2} = -0,5$ bo'ladi.

Demak, $P_1(-0,5, 0)$ AO chegaradagi kritik nuqta. Tenglamasi $x = 0$, BO chegarada

$$z = y^2 + y \text{ funktsiya xosil bo'lib, } z'_y = 2y + 1 = 0 \quad y = -1/2.$$

Demak, $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ BO chegaradagi kritik nuqta bo'ladi. Tenglamasi $y = -3 - x$

bo'lgan AB chegarada $z = 3x^2 + 9x + 6$ funktsiya hosil bo'lib $z'_x = 6x + 9 = 0 \quad x = -\frac{3}{2}$. AB

ning tenglamasidan $y = -3 + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$, demak, AB chegaradagi kritik nuqta $P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ bo'ladi.

Berilgan funktsiyaning P_0, P_1, P_2, P_3 kritik nuqtalardagi, hamda A, B, O nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz:

$$z_0 = f(P_0) = f(-1, -1) = -1 ;$$

$$z_1 = f(P_1) = f\left(-\frac{1}{2}, -0\right) = -\frac{1}{4} ;$$

$$z_2 = f(P_2) = f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} ;$$

$$z_3 = f(P_3) = f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} ;$$

$$z_4 = f(0) = f(0, 0) = 0 ;$$

$$z_5 = f(A) = f(-3, 0) = 6 ;$$

$$z_6 = f(B) = f(0, -3) = 6 .$$

Funktsiyaning topilgan barcha qiymatlarini taqqoslab
 $z_{eng\ kat} = f(A) = f(B) = 6$ va $z_{eng\ kich} = f(P_0) = -1$ degan xulosaga kelamiz

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki argumentli funktsiyaning ekstremumga ega bo'lishining zaruriy sharti nima?
2. Ikki argumentli funktsiyaning ekstremumga ega bo'lishining etarli sharti nima?
3. Kritik nuqtalar qanday nuqtalar?
4. Ikki argumentli funktsiyaning biror yopiq sohadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

5. Funktsiyaning xususiy orttirmasi deb nimaga aytiladi?
6. Ikki argumentli funktsiyaning xususiy hosilasi deb nimaga aytiladi?
7. Uch argumentli funktsiyaning xususiy hosilalari nechta bo'ladi?
8. Ikki argumentli funktsiyaning to'la differentsiali deb nimaga aytiladi?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar

Quyidagi funktsiyalarning ekstremumini tekshiring.

$$1. z = 2(x + y) - x^2 - y^2 .$$

$$2. z = xy(12 - x - y) .$$

3. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1.$
4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1.$
5. $z = x^2 + 3(y + 2)^2.$
6. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20.$
7. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10.$
8. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10.$
9. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$
10. $z = xy - 3x^2 - 2y^2.$

Quyidagi funktsiyalarning xususiy hosilalarini toping

$$d^2 z = 2y^3 dx^2 + 12xy^2 dx dy + 6x^2 y dy^2.$$

Quyidagi funktsiyalarning to'la differentsiallarini toping:

- 1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});$ 2) $u = x^{y^2 z};$ 3) $z = \sqrt{x^2 + y^2};$
- 4) $u = \sqrt{x^2 - 2y^2 + 3z^2};$ 5) $s = x \ln t.$

3. $z = xy$ funktsiya uchun $P_0(5;4)$ nuqtada $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$ bo'lganda dz va Δz larni hisoblang.

4. 1) $(1,04)^{2,02};$ 2) $\sin 32^\circ \cdot \cos 59^\circ$ taqribiy hisoblang.

5. $z = x^3 y + y^3$ funktsiyaning ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

6. $s = \ln\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right)$ funktsiya uchun $\frac{\partial^2 s}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{x^2}$ ekanligini tekshiring.

7. $u = \arctg(2x - t)$ bo'lsa, $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial t} = 0$ bajarilishini tekshiring.

8. $z = (x^2 + y^2)^2$ ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni toping.

9. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ funktsiya $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ tenglamani qanoatlantirishini

isbotlang.

10. $u = x^4 y^2$ ikkinchi tartibli to'la differentsialini toping.

11. $z = \sin x \cos y$ ikkinchi tartibli to'la differentsialini toping.

12 1) $u = \frac{y^2}{x^2};$ 2) $u = x \ln \frac{y}{x}$ ikkinchi tartibli to'la differentsiallarini toping.

18-mavzu. Ikki karrali integrallar

Reja

1. Ikki karrali integralning ta'rifi.
2. Ikki karrali integralni hisoblash.
3. Ikki karrali integralning tadbiqlari.

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikki karrali integral, integral yig'indi, ichki integral, tashqi integral, silindrik jismning hajmii, statik momentlar, og'irlik markazi, inertsia momentlari.

1. Ikki karrali integralning ta'rifi.

$f(x, y)$ funktsiya biror D sohada aniqlangan bo'lsin. D sohani n ta D_i qismlarga bo'lamiz. har bir D_i qismda $P_i(x_i, y_i)$ bittadan nuqta tanlaymiz hamda

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i \quad (1)$$

yig'indini to'zamiz. (1) yig'indiga $f(x, y)$ funktsiya uchun D sohadagi integral yig'indi deyiladi. λ qism sohalar diametrlarining eng kattasi bo'lsin. $\Delta S_i, D_i$ sohaning yuzi.

Ta'rif. (1) integral yig'indining, qismlarga bo'linish usuliga, P_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmagan $\lambda \rightarrow 0$ dagi limiti mavjud bo'lsa, bu limitga $f(x, y)$ funktsiyaning D sohadagi ikki karrali integrali deyiladi va

$$\iint_D f(x, y) ds \text{ simvol bilan belgilanadi.}$$

Ikki karrali integral aniq integralning ikki o'zgaruvchili (argumentli) funktsiya uchun umumlashgan holidir.

Ikki karrali integral ham aniq integralning asosiy xossalariga ega. Aniq integralning xossalarini takrorlashni tavsiya etamiz.

2. Ikki karrali integralni hisoblash. Ikki karrali integralni hisoblash ikkita aniq integralni ketma-ket hisoblashga keltiriladi. D soha $y = y_1(x), y = y_2(x)$ funktsiyalar graflari hamda $x = a$ va $x = b$ to'g'richiziqlar bilan chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa, ikki karrali integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (1)$$

Oxirgi aniq integral ichki integral deb ataladi va uni hisoblashda x ni o'zgarmas deb, integrallash y bo'yicha olib boriladi. Ichki integralni hisoblash natijasi tashqi integral uchun integral osti funktsiyasi bo'ladi.

D soha

$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$$

tengsizliklar bilan aniqlangan bo'lsa, ikki karrali integral

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_s^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_s^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

formula yordamida ikkita aniq integralni hisoblashga keltiriladi.

1-misol. $\iint_D x \ln y dx dy$ integralni D soha: $0 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq e$ to'g'ri to'rtburchak bo'lganda hisoblang.

Yechish. (1) formulaga asosan,

$$\iint_D x \ln y dx dy = \int_0^4 x dx \int_1^e \ln y dy = \int_0^4 x dx [y \ln y - y]_1^e = \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 = 8.$$

2-misol. $\iint_D (x - y) dx dy$ integralni $D : y = 2 - x^2, y = 2x - 1$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'lganda hisoblang.

Yechish. Birinchi chiziq uchi (0,2) nuqtada OY o'qiga simmetrik bo'lgan parabola. Ikkinchisi chiziq to'g'richiziq. Bu chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

tenlamalar sistemasini echib, $A(-3; -7), B(1,1)$ nuqtalarni topamiz. (1) formulaga asosan,

$$\begin{aligned} \iint_D (x, y) dx dy &= \int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x - y) dy = \\ &= \int_{-3}^1 \left[xy - \frac{y^2}{2} \right]_{2x-1}^{2-x^2} dx = \int_{-3}^1 \left[x \cdot (2 - x^2) - \frac{(2 - x^2)^2}{2} - \left(x \cdot (2x - 1) - \frac{(2x - 1)^2}{2} \right) \right] dx = \\ &= \int_{-3}^1 \left(2x - x^3 - \frac{4 - 4x^2 + x^4}{2} - 2x^2 + x + \frac{4x^2 - 4x + 1}{2} \right) dx = \\ &= \int_{-3}^1 \left(-\frac{1}{2}x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x \right]_{-3}^1 = 4 \frac{4}{15} \text{ bo'ladi.} \end{aligned}$$

3. Ikki karrali integralning tadbiqlari.

1. $\iint_D f(x, y) dx dy$ integralda $f(x, y) = 1$ bo'lsa, $\iint_D dx dy$ integral D figuraning yuzini ifodalaydi, ya'ni $S = \iint_D dx dy$

1-misol. $x = 4y - y^2, x + y = 6$ chiziqlar bilan chegaralangan sohaning yuzini toping.

Yechish. Berilgan chiziqlarning kesishish nuqtalarini topamiz.

$$x = 4y - y^2, \quad x = 6 - y \quad \text{dan} \quad 4y - y^2 = 6 - y, \quad y^2 - 5y + 6 = 0,$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = 3; \quad x_1 = 4, \quad x = 3; \quad A(4;2) \quad \text{va} \quad B(3;3)$$

kesishish nuqtalari bo'ladi. Shunday qilib, yuza

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 x \Big|_{6-y}^{4y-y^2} dy = \int_2^3 (4y - y^2 - 6 + y) dy = \int_2^3 (5y - y^2 - 6) dy = \\ &= \left(\frac{5}{2} y^2 - \frac{y^3}{3} - 6y \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{6} \quad (\text{kv. birlik}) \end{aligned}$$

2. Yuqoridan $z = f(x, y)$ sirt, quyidan $z = 0$ tekislik, yon tomondan to'g'risilindrik sirt bilan hamda xOy tekislikda D sohani hosil qiladigan **silindrik jismning xajmi**

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad \text{integral bilan xisoblanadi.}$$

2-misol. $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ sirtlar bilan chegaralangan I oktantadagi jismning hajmini hisoblang.

Yechish. hajmii hisoblanishi kerak bo'lgan jism yuqoridan $z = 3x$ tekislik, yondan $y = 1 + x^2$ parabolik silindr, $y = 5$ tekislik bilan chegaralangan. Shunday kilib

$$\begin{aligned} V &= \iint_D 3x dx dy = 3 \int_0^2 x dx \int_{1+x^2}^5 dy = 3 \int_0^2 x [5 - (1 + x^2)] dx = 3 \int_0^2 (4x - x^3) dx = 3 \left(4 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \\ &= 3 \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) = 24 - 12 = 12 \quad \text{kyb .bup .} \end{aligned}$$

3. Plastinka har bir nuqtasidagi zichlik funktsiyasi $\gamma(x, y)$ bo'lsa, uning massasi

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy \quad \text{integral bilan hisoblanadi.}$$

Plastinkaning Ox va Oy o'qlarga nisbatan statik momentlari.

$$M_x = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy, \quad M_y = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy \quad \text{formulalar bilan hisoblanadi.}$$

Plastinka birjinsli, ya'ni $\gamma = \text{const}$ bo'lganda uning og'irlik markazining koordinatalari

$$\bar{x}_c = \frac{M_y}{S} = \frac{\iint_D x dx dy}{S}, \quad \bar{y}_c = \frac{M_x}{S} = \frac{\iint_D y dx dy}{S} \quad \text{formulalar yordamida topiladi, bu}$$

erda S , D sohaning yuzi.

Plastinkaning Ox va Oy o'qlariga nisbatan **inertsia momentlari**

$$J_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad J_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy$$

formulalar bilan, koordinatlar boshiga nisbatan inertsia momenti

$$J_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy = J_x + J_y$$

formula bilan aniqlanadi. Yuqoridagi formulalarda $\gamma(x, y) = 1$ deb tekis figuralarning geometrik inertsia momentlarini topish formulalarini olamiz.

3-misol. $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning og'irlik markazining koordinatlarini toping.

Yechish. Chiziqlar Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lganligi uchun $\bar{y}_c = 0$ $\bar{x}_c$ ni topamiz:

$$S = \iint_D dx dy = 2 \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{4}} dy = 2 \int_0^2 \left(\frac{4-y^2}{2} - \frac{y^2-4}{4} \right) dy = 2 \int_0^2 \left(3 - \frac{3y^2}{4} \right) dy =$$

$$\bar{x}_c = \frac{1}{8} \iint_L x dx dy = \frac{1}{8} 2 \int_0^2 dy \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{4-y^2}{4}} x dx dy = \frac{1}{8} \int_0^2 \left[\frac{(4-y^2)^2}{4} - \frac{(y^2-4)^2}{16} \right] dy =$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^2 \left(3 - \frac{3}{2} y^2 + \frac{3}{16} y^4 \right) dy = \frac{1}{8} \left(3y - \frac{y^3}{2} + \frac{3y^5}{80} \right) \Big|_0^2 = \frac{2}{5} \text{ Demak } C\left(\frac{2}{5}; 0\right). \text{ Demak } C\left(\frac{2}{5}; 0\right).$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. $\iint_D (x + 2y) dx dy$ integralni $D : y = x, y = 2x, x = 2, x = 3$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'lganda hisoblang.

2. $\iint_D e^{x+\sin y} \cos y dx dy$ integralni $D : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ to'g'ri to'rt burchak bo'lganda hisoblang.

3. $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ integralni $D : y = x, x = 0, y = 1, y = 2$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'yicha hisoblang.

4. $\iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy$ integralni $D : x = 0, x = y^2, y = 2$ chiziqlar bilan chegaralangan soha bo'lganda hisoblang.

5. $x = y^2 - 2y, x + y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani ikki karrali integral yordamida hisoblang.

6. $y = 2 - x, y^2 = 4x + 4$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzani hisoblang.

7. $x^2 + y^2 = 8, x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 4$ sirtlar bilan chegaralangan jism hajmini hisoblang.

8. $x = 2y^2, x + 2y + z = 4, y = 0, z = 0$ sirtlar bilan chegaralangan silindrik jismning hajmini hisoblang.

9. $y = x^2, y = 2x^2, x = 1, x = 2$ chiziqlar bilan chegaralangan yuzaning og'irlik markazini toping.

10. $y^2 = x, x^2 = y$ parabolalar bilan chegaralangan yuzaning og'irlik markazini toping.

11. Bitta uchi koordinatlar boshida, qirralari mos ravishda 6, 8, 10 bo'lgan hamda zichlik taqsimoti $\rho(x, y, z) = x + y + z$ funktsiya bilan berilgan parallelepipedning massasini toping.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Ikki karrali integralni hisoblashga qanday masalalar keltiriladi?
2. Integral yig'indi deb nimaga aytiladi?
3. Ikki karrali integralning ta'rifi nimadan iborat?
4. Ichki va tashqi integrallar qanday integrallar?
5. Ikki karrali integral qanday hisoblanadi?
6. Ikki karrali yordamida nimalarni hisoblash mumkin?

19-mavzu: Differensial tenglamalar. Umumiy tushunchalar

- Reja:** 1. Umumiy tushunchalar
2. O'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar
3. Bir jinsli tenglama

Tayanch iboralar va tushunchalar

Oddiy **Differensial tenglama**, umumiy yechim, xususiy yechim, boshlang'ich shartlar, Koshi masalasi, o'zgaruvchilariga ajraladigan va bir jinsli tenglamalar.

1. Umumiy tushunchalar

1-ta'rif. Differensial tenglama deb, erkli o'zgaruvchi x , izlanayotgan funktsiya y va uning hosilalari (yoki differensiyalari)ni bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Differensial tenglamani simvolik ravishda quyidagicha yozish mumkin: $F(x, y, y') = 0$ (1.1) bu yerda, F – o'z argumentlarining biror tayinlangan sohasida uzluksiz, x –erkli o'zgaruvchi, y –bog'liq o'zgaruvchi, ya'ni x o'zgaruvchining berilishi kerak bo'lgan funktsiyasi, $y', y'', \dots, y^n$ - uning hosilalari.

Agar izlanayotgan funktsiya $y = y(x)$ bitta erkli o'zgaruvchining funktsiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama **oddiy differensial tenglama** deyiladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaning tartibi deb, tenglamaga kirgan hosila (yoki differensial) ning eng yuqori tartibiga aytiladi.

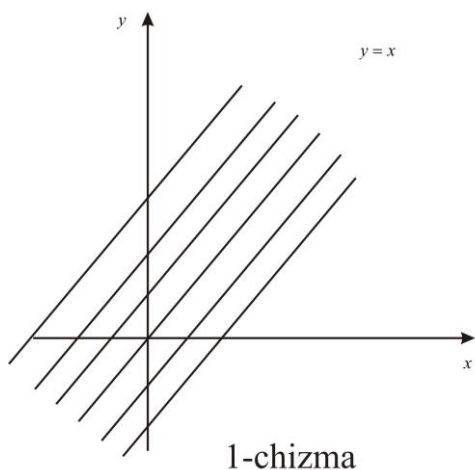
Masalan. $x dy - y dx = 0$ va $yy' = x$ tenglamalar birinchi tartibli, $y'' - 3y' = 0$ - ikkinchi tartibli, $3xy' - y''' = 0$ - uchinchi tartibli differensial tenglamadir.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi (yoki integrali) deb, differensial tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday $y = f(x)$ funktsiyaga aytiladi. Tenglamaning grafigi tenglamaning integral egri chizig'i deyiladi.

1-misol. $y' = 1$ (1.2) tenglamani yeching.

Yechish. (2) tenglamani $\frac{dy}{dx} = 1$ yoki $dy = dx$ (1.3) ko'rinishda yozish mumkin.

(1.3) tenglamaning ikkala tomonini integrallasak, natijada $y = x + C$ (1.4) funktsiyani hosil qilamiz, bu funktsiya (1.2) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.



1-chizma

(1.4) tenglamaning geometrik ma'nosi, koordinata o'qiga nisbatan 450 burchak hosil qilib o'tuvchi to'g'ri chiziqlar oilasini tashkil etadi.

Bu misollardan ko'rinadiki, birinchi tartibli differensial tenglamalarda bitta o'zgarmas miqdor C ishtirok etayapdi.

C o'zgarmas miqdorga turli qiymatlar berib, differensial tenglamaning aniq yechimlarini hosil qilamiz. Masalan, $y - x = 1$, $y - x = 4$. Bularni xususiy yechimlar deyiladi.

Umumiy holda $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ differensial tenglamani

umumiy yechimi $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ (1.5) ko'rinishda bo'ladi.

Differensial tenglamaning tartibi qanday bo'lsa, shuncha ixtiyoriy o'zgarmasga ega bo'lgan yechimi bu tenglamaning umumiy yechimi deyiladi.

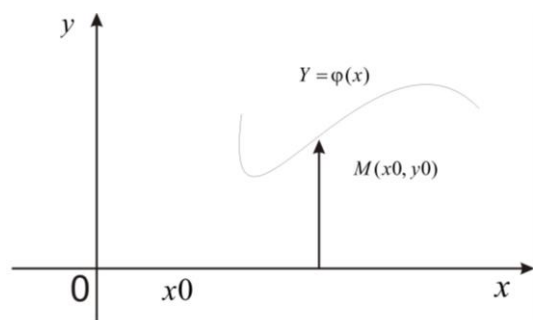
Umumiy yechimdagi o'zgarmaslarning turli son qiymatlarida hosil qilinadigan yechimlar, bu tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Umumiy yechim geometrik nuqtai nazardan bitta C parametrga bog'liq bo'lgan integral egri chiziqlar oilasidan iborat. Xususiy yechim esa, bu oilaning egri chiziqlaridan biri bo'lib, u $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tadi.

Differensial tenglamaning xususiy yechimini topish uchun boshlang'ich shartlar beriladi. Birinchi tartibli tenglama uchun ular $y(x_0) = y_0$ ko'rinishga, ikkinchi tartibli tenglama uchun $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ ko'rinishga ega.

2-misol. (1.4) to'g'ri chiziqlar oilasida $A(2;3)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini toping.

Yechish: $y(2) = 3$ (1.6)ga boshlang'ich shart deyilib, xususiy yechimni topamiz.



2-chizma

Bizga ma'lumki, (1.2) tenglamaning umumiy yechimi $y = x + C$ (1.4). Endi (1.6) shartdan foydalanib C ni topamiz. $3 = 2 + C \Rightarrow C = 1$

(1.6) shart (1.2) differensial tenglamaning boshlang'ich shartlari, (1.2) va (1.6) shartlarni topish masalasi, boshlang'ich masala yoki **Koshi** masalasi deyiladi. (1.2) va (1.6) Koshi masalalarini yechib, $y = x + 1$ (1.7) ni, ya'ni $A(2;3)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topdik. (1.7) yechim (1.2) tenglamaning xususiy yechimi deyiladi.

Umuman olganda quyidagi teorema o'rinli.

Teorema. Agar $y' = f(x, y)$ (1.8) birinchi tartibli tenglamada $f(x, y)$ funksiya va undan

y bo'yicha olingan $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosila xOy tekisligidagi (x_0, y_0) nuqtani o'z ichiga oluvchi biror

sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa, u holda berilgan tenglamaning $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina $y = \varphi(x)$ yechimi mavjud.

Teoremaning geometrik ma'nosi $M_0(x_0, y_0)$ nuqta orqali o'tuvchi integral egri chiziqni topishdan iborat.

2. O'zgaruvchilari ajraladigan tenglama

Ushbu $f_1(x) \cdot \varphi_1(y)dx + f_2(x) \cdot \varphi_2(y)dy = 0$ (2.1) ko'rinishdagi tenglama **o'zgaruv-chilari ajraladigan tenglama** deyiladi.

(1.1) tenglamaning ikkala hadini $\varphi_1(y) \cdot f_2(x)(\varphi_1(y) \cdot f_2(x) \neq 0)$ ko'paytmaga bo'lib,

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0 \text{ tenglamani hosil qilamiz.}$$

(1.1) tenglamaning umumiy integrali $\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$ dan iborat bo'ladi.

3-misol. $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \operatorname{ctg} y \cdot \cos^2 x dy = 0$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamaning har ikkala tomonini $\sin^2 y \cos^2 x (\sin^2 y \cos^2 x \neq 0)$ ko'paytmaga bo'lib, $\frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx + \frac{\operatorname{ctg} y}{\sin^2 y} dy = 0$ ni topamiz. Bu ifodani integrallab, $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{\operatorname{ctg} y}{\sin^2 y} dy = C$ yoki $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 y = C$ izlanayotgan umumiy integralni topamiz.

3. Bir jinsli tenglama

1-ta'rif. Agar λ ning har qanday qiymatida $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ ayniyat to'g'ri bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarga nisbatan n -o'lchovli **bir jinsli funksiya** deb ataladi.

4-misol. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki $f(\lambda x, \lambda y) = \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda f(x, y)$

5-misol. $f(x, y) = xy - x^2$ funksiya ikki o'lchovli bir jinsli funksiya, chunki $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) - (\lambda x)^2 = \lambda^2(xy - x^2) = \lambda^2 f(x, y)$

2-ta'rif. Agar birinchi tartibli $y' = f(x, y)$ (1.1) tenglamada $f(x, y)$ funksiya x va y nisbatan nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, (3.1) tenglama x va y o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli tenglama deyiladi.

Bir jinsli tenglamani yechish. Funksiya bir jinsli bo'lishining shartiga ko'ra $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

Bu ayniyatda $\lambda = \frac{1}{x}$ deb olsak, $f(x, y) = f(1, \frac{y}{x})$

Bu holda (3.1) tenglama $y' = f(1, \frac{y}{x})$ (3.2) ko'rinishni oladi. (3.2) tenglama $U = \frac{y}{x}$ yoki $y = \mu x$ almashtirish yordamida $\mu(x)$ noma'lum funksiyaga nisbatan o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keladi.

6-misol. Ushbu $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. Tenglamani $\frac{dy}{dx}$ hosilaga nisbatan yechamiz: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

Shunday qilib (3.2) ko'rinishdagi tenglamani, ya'ni bir jinsli tenglamani hosil qildik.

Endi $y = Ux$ deb o'zgaruvchini almashtiramiz. U holda $\frac{dy}{dx} = U + x \frac{dU}{dx}$ va tenglama $U + x \frac{dU}{dx} = U \ln U$ yoki $x \frac{dU}{dx} = U (\ln U - 1)$ ko'rinishga keladi. Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama, shuning uchun $\frac{du}{u (\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$. Integrallab $\ln|u| = Cx + 1$ ni yoki $u = e^{Cx+1}$ ni hosil qilamiz. u ning o'rniga $\frac{y}{x}$ ni qo'yib, $y = x * e^{Cx+1}$ izlangan umumiy integralni topamiz.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimining farqini tushuntiring?
3. Boshlang'ich shartlar deganda nimani tushunasiz?
3. Bir jinsli tenglama tarifini va uni yechish usullarini ayting.

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Differensial tenglamalarni yeching.

№ 1. $y' \sqrt{1-x^2} = 1+y^2$; Javob: $\arctg y - \arcsin x = C, x = \pm 1$.

№ 2. $y' = e^{x+y}$; Javob: $e^x + e^{-y} = C$.

№ 3. $y^1 + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0$; Javob: $y \sin y + \cos y - x \cos x + \sin x = C$.

№ 4. $(1+y^2)x dx + (1+x^2)dy = 0$; Javob: $\arctg y + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = C$.

№ 5. $xy dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0$; Javob: $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; $x = \pm 1$.

№ 6. $ye^{2x} dx - (1+e^{2x})dy = 0$; Javob: $y = C \sqrt{1+e^{2x}}$

№ 7. $2e^x \operatorname{tg} y dx + (1+e^x) \sec^2 y dy = 0$; Javob: $(1+e^x)^2 \operatorname{tg} y = C$

№ 8. $(1+y)(e^x dx - e^{2y} dy) - (1+y^2)dy = 0$; Javob: $e^x - \frac{1}{2}e^{2y} - 2 \ln|1+y| - \frac{(y-1)^2}{2} = C, y = -1$

№ 9. $y' = \cos(x+y)$; Javob: $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} - x = C$

№ 10. $y' = \frac{1}{2x+y}$; Javob: $4x + 2y + 1 = Ce^{2y}$

Differensial tenglamani yeching.

№ 11. $y^1 = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ Javob: $y = \pm x \sqrt{2 \ln|x|} + C$

№ 12. $y^1 \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$

Javob: $y = 2 \arctg Cx$

№ 13. $y^1 = \frac{x - y}{x + y}$

Javob: $x^2 - 2xy - y^2 = C$

№ 14. $(x^2 + xy)y^1 = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$ Javob: $\arcsin \frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sqrt{x^2 - y^2} - \ln|x| = C$

№ 15. $(x-y)dx + xdy = 0$

Javob: $xe^{y/x} = C$

20-21- mavzu: Birinchi tartibli chiziqli va Bernuli teglamasi. To'liq differensial tenglama

- Reja: 1.** Birinchi tartibli chiziqli tenglama
2. Bernuli teglamasi.
3. To'liq differensial tenglamasi.
4. Integrallovchi ko'paytuvchi.

Tayanch ibora va tushunchalar

Birinchi tartibli chiziqli tenglama, Bernuli teglamasi, to'liq differensial tenglama, integrallovchi ko'paytuvchi.

1. Birinchi tartibli chiziqli tenglama

Agar differensial tenglama izlanayotgan y funksiya va uning hosilasi $\frac{dy}{dx}$ ga nisbatan chiziqli (ya'ni birinchi darajali) bo'lsa bunday tenglama **chiziqli tenglama** deyiladi. Birinchi tartibli chiziqli tenglama $y^1 + P(x)y = Q(x)$ (4.1) ko'rinishga ega.

Birinchi tartibli chiziqli tenglamani quyidagi usullarning biri bilan yechishimiz mumkin:

1-usul. O'zgarasni variatsiyalash usuli.

Bunda (1.1) tenglamaning yechimini $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ (1.2) ko'rinishda izlaymiz. U vaqtda (1.1) tenglama $C(x)$ noma'lum funksiyaga nisbatan o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglamani hosil qilamiz: $C^1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$

Uning umumiy yechimi: $C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$ bunda C – ixtiyoriy o'zgaras.
Topilgan $C(x)$ ifodaga (1.2) ni qo'ysak, (1.1) ning umumiy yechimini topamiz:
 $y = e^{-\int P(x)dx} (C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx)$ (1.3)

2-usul. O'rniga qo'yish usuli.

(1.1) chiziqli differensial tenglamaning yechimi $y = u(x) \cdot v(x)$ (1.4) Bernuli almashtirilishi bilan o'zgaruvchilari ajraladigan ikkita tenglamaga keltiriladi. U holda $\frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dx} + u \frac{dv}{dx}$ va (1.1) tenglama ushbu ko'rinishga keladi. $v \frac{dv}{dx} + u \left[\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v \right] = Q(x)$ (4.5)

Yordamchi o'zgaruvchilardan biri, masalan, v ixtiyoriy tanlab olinganidan foydalanib, uni shunday tanlaymizki, natijada qavs ichidagi ifoda nolga teng bo'lsin, ya'ni v sifatida o'zgaruvchilari ajraladigan $\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v = 0$ tenglamaning xususiy yechimlaridan biri $v = v(x)$ ni olamiz. $v = v(x)$

ifodani (1.5) tenglamaga qo'yib, u funksiyaga nisbatan tenglama hosil qilamiz: $v \frac{dv}{dx} = Q(x)$ Bu tenglama ham o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lib, uning umumiy yechimi $u = u(x, c)$ ni topib, (1.1) tenglamaning umumiy yechimi $y = u(x, c) \cdot v(x)$ ni hosil qilamiz.

1-misol. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ differensial tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. Berilgan tenglamani $y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1+x^2$ ko'rinishga keltiramiz.

1-usul. O'zgarasni variatsiyalash usuli.

Bizning misolda $P(x) = -\frac{2x}{1+x^2}$; $Q(x) = 1+x^2$

Shu sababli $y = l^{\int \frac{xdx}{1+x^2}} (C + \int (1+x^2)e^{-\int \frac{xdx}{1+x^2}} dx) = (1+x^2)(C+x)$ Demak, umumiy yechim $y = (1+x^2)(C+x)$

2-usul. O'rniga qo'yish usuli. $y = u \cdot v$ deylik, u holda $\frac{dy}{dx} = v \frac{dv}{dx} + u \frac{dv}{dx}$ va berilgan tenglama $v(\frac{dv}{dx} - \frac{2ux}{1+x^2}) + (u \frac{dv}{dx} - (1+x^2)) = 0$ (1.6) ko'rinishga ega bo'ladi. $\frac{du}{dx} - \frac{2ux}{1+x^2} = 0$ tenglamani yechib, uning eng sodda xususiy yechimini hosil qilamiz: $u = C(1+x^2)$ (1.6) tenglamaga u ni qiymatini qo'yib, ushbu tenglamani hosil qilamiz: $C(1+x^2) \frac{dv}{dx} = 1+x^2$; Bu tenglamadan v ni topamiz. $v = \frac{x}{C} + C_1$

Shunday qilib, izlanayotgan umumiy yechim quyidagicha bo'ladi: $y = (C+x)(1+x^2)$

2. Bernulli tenglamasi

$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ (2.1), bunda $P(x)$ va $Q(x)$ — x ning uzluksiz funksiyalari (yoki o'zgaras miqdorlar) hamda $n \neq 0$ va $n \neq 1$ (aks holda chiziqli tenglama hosil bo'lar edi).

(2.1) tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi va quyidagi almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Tenglamaning barcha hadlarini y^n ga bo'lamiz. $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P y^{-n+1} = Q$ (2.2)

Endi, $z = y^{-n+1}$ (2.3) almashtirishni bajaramiz. U holda $\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx}$

Bu qiymatlarni (2.2) tenglamaga qo'ysak, chiziqli tenglama hosil bo'ladi: $\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$

Buning umumiy integralini topib hamda (2.3) almashtirishni e'tiborga olib, Bernulli tenglamasining umumiy integrali (yechimini) topamiz.

8-misol. Differensial tenglamani yeching.

$$y^1 + 4xy = 2xe^{-x^2} \sqrt{y}$$

Yechish. Bu misolda $n = \frac{1}{2}$ Berilgan differensial tenglamaning ikkala qismini $\sqrt{y}$ ga bo'lsak:

$$\frac{y^1}{\sqrt{y}} + 4xy^{-\frac{1}{2}} = 2xe^{-x^2} \quad \text{Endi } \sqrt{y} = z \quad \text{almashtirish olib, } z^1 = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y^1 \text{ ekanligini topamiz. Bu}$$

topilgan qiymatlarni e'tiborga olib $z^1 + 2xz = xe^{-x^2}$ chiziqli tenglama hosil qilamiz. Bu tenglamaning yechimi $z = e^{-x^2} (C + \frac{x^2}{2})$

Bundan berilgan Bernulli tenglamaning umumiy yechimi $y = e^{-x^2} (C + \frac{x^2}{2})^2$ ni topamiz.

3. To'liq differensial tenglama

Ta'rif. Agar $M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ (3.1) tenglama uchun $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (3.2) shart bajarilsa,

uni to'liq differensial tenglama deb ataymiz.

Agar (3.2) shart bajarilsa, (3.1) ning chap tomoni qandaydir $U(x;y)$ funksiyaning $dU(x;y)$ to'liq differensialidan iborat bo'ladi, ya'ni (3.1) tenglama $dU(x;y) = 0$ ko'rinishni oladi. Buni integrallab, uning umumiy yechimi $U(x;y) = C$ ni topamiz.

Agar (3.1) ning chap tomoni $U(x;y)$ funksiyaning to'liq differensial bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x;y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x;y) \quad \text{bo'lishi kerak. Birinchi tenglamadan } U = \int_{x_0}^x M(x;y)dx + \varphi(y) \text{ ni}$$

topamiz. $\varphi(y)$ ni topish uchun oxirgi tenglamani y bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x;y) \quad (3.2) \quad \text{shartni inobatga olsak, u holda } \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N,$$

$$N(x;y) \int_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x;y) \quad \text{Bundan } \varphi'(y) = N(x_0;y) \text{ yoki } \varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0;y)dy + C_1 \quad \text{Demak, } U(x;y)$$

$$\text{funksiya quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan: } U = \int_{x_0}^x M(x;y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0;y)dy + C_1$$

9-misol. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $M(x;y) = 2x + y$, $N(x;y) = x + 2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1. \quad \text{Demak, (3.2) shart bajarilyapti, shuning uchun bu to'liq differensial tenglamadir.}$$

$$\text{1-usul. } \frac{\partial U}{\partial x} = M(x;y) = 2x + y \Rightarrow U(x;y) = \int (2x + y)dx + \varphi(y) = x^2 + yx + \varphi(y) (*);$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \varphi'(y) (A); \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x;y) = x + 2y \quad (B).$$

(A) va (B) tengliklardan: $x + \varphi'(y) = x + 2y \Rightarrow \varphi(y) = y^2 + C(**)$ $C_1 = 0$ deb, (*) va (**) tengliklardan: $x^2 + yx + y^2 = C$.

2-usul. Umumiy yechimi $U(x;y) = C$ ni topish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz:

$$U(x;y) = \int Mdx + \int \left\{ N - \frac{\partial}{\partial y} \int Mdx \right\} dy = C; \quad \text{Bunda} \quad \varphi(y) = \int \left\{ N - \frac{\partial}{\partial y} \int Mdx \right\} dy.$$

$$U(x;y) = \int (2x + y)dx + \int \left\{ x + 2y - \frac{\partial}{\partial y} \int (2x + y)dx \right\} dy = x^2 + yx + \int \left\{ x + 2y - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + yx) \right\} dy =$$

$$= x^2 + yx + \int (x + 2y - x)dy = x^2 + yx + y^2 = C \quad \text{yoki} \quad x^2 + yx + y^2 = C.$$

4. Integrallovchi ko'paytuvchi

(3.1) tenglamaning chap tomoni biror funksiyaning to'la differensialli ya'ni (3.2) shart bajarilmasin. Biroq bu tenglamani tegishli $\mu(x, y)$ funksiyaga ko'paytirish bilan uni to'liq differensiallardagi tenglamaga keltirish mumkin. Bunday funksiya berilgan differensial tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchi nomi bilan yuritiladi. Har qanday differensial tenglama uchun ham integrallovchi ko'paytuvchi mavjud, biroq bu uni topish oson degan so'z emas.

Ushbu $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$ tenglama to'liq differensial tenglama bo'lishi uchun $\frac{\partial(\mu M)}{\partial x} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial y}$ yoki $N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right)$ (1.1) shart bajarilishi kerak.

(1.1) tenglik (3.1) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchilarining differensial tenglamasidir, chunki uning har bir yechimi tenglamaning ikkala tomoniga ko'paytirilganidan so'ng uni to'liq differensiallardagi tenglamaga keltiriladi. $\mu(x, y)$ ni topish uchun xususiy hosilali differensial tenglamani integrallash kerak. Agar μ faqat birgina x yoki y o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, masala ancha soddalashadi. Biz faqat ana shu ikki xususiy holni qaraymiz.

Masalan, tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi faqat x ga bog'liq bo'lsin, ya'ni $\mu = \mu(x)$ bo'lsin. U holda (7.1) tenglama ushbu ko'rinishni egallaydi:

$$N \frac{d\mu(x)}{dx} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \text{ yoki } \frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx, \text{ bu yerdan } \ln \mu(x) = \int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx + C,$$

ya'ni $\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}$ (ixtiyoriy C o'zgaruvchisi nolgacha teng deb olingan, chunki qandaydir bitta integrallovchi ko'paytuvchiga ega bo'lsak kifoya).

Shunga o'xshash μ faqat y ga bog'liq bo'lsa integrallovchi ko'paytuvchi

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy} \text{ bu yerda } C=0.$$

10-misol. Differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$(x^2 - y^2)y' = 2xy.$$

Yechish. $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$ (*)

$$M(x, y) = 2xy, \quad N(x, y) = y^2 - x^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

$$\text{Demak, } \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

(*) differensial tenglamani to'liq differensial tenglamaga keltirish uchun integral ko'paytuvchini aniqlaymiz. shart bajarilishi uchun integral ko'paytuvchi faqat y

$$\text{o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi. } \varphi(y) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} = \frac{4x}{-2xy} = -\frac{2}{y}$$

$$\text{Shuning uchun } \mu(y) = e^{\int \varphi(y) dy} = e^{-2 \int \frac{dy}{y}} = \frac{1}{y^2} \quad (*) \text{ differensial tenglamani integral}$$

ko'paytuvchi $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$ ga ko'paytirib to'liq differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{2x}{y}dx + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - \frac{x^2}{y^2} \quad (\text{A}) \quad U(x, y) = \int \frac{2x}{y}dx = \frac{x^2}{y} + \varphi(y). \quad \text{Bundan:} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + \varphi'(y)$$

(B)

$$(\text{A}) \text{ va } (\text{B}) \text{ tengliklardan: } -\frac{x^2}{y^2} + \varphi'(y) = 1 - \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 1 \quad \text{yoki} \quad \varphi(y) = y.$$

Demak, $U(x, y) = \frac{x^2}{y} + y$, $U(x, y) = C$ bo'lgani uchun $\frac{x^2}{y} + y = C$. Bu berilgan(*) tenglamaning umumiy yechimi.

Mashqlar. Quyidagi differensial tenglamalarning integral ko'paytuvchilarini va tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$\text{№ 1. } (x^2 - y)dx + (x^2 y^2 + x)dy = 0, \quad \text{Javob: } \mu(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 3x^2 + xy^3 + 3y - Cx = 0$$

$$\text{№ 2. } (y + xy^2)dx - xdy = 0, \quad \text{Javob: } \mu(y) = -\frac{2}{y}, \quad y = -\frac{2x}{x^2 + 2C}$$

5. Birinchi tartibli differensial tenglamalar bo'yicha olingan bilimlarni tekshirish uchun test savollari

Differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

$$1. (xy + y)dx + (xy + x)dy = 0,$$

$$\text{Javob: A) } xye^{x+y} = C,$$

$$\text{C) } (x - y)e^{x+y} = C,$$

$$\text{B) } (x + y)e^{xy} = C,$$

$$\text{D) } (x - y)e^{xy} = C.$$

$$2. (1 + e^{2x})y^2 y' = e^x,$$

$$\text{Javob: A) } y = \sqrt[3]{C + 3x \arctg e^x},$$

$$\text{C) } y = C + 3x \arctg e^x,$$

$$\text{B) } y = \sqrt[3]{C + 3 \arctg e^x},$$

$$\text{D) } y = C + 3 \arctg e^x.$$

$$3. 2x^2 y' = x^2 + y^2,$$

$$\text{Javob: A) } y = x^2 - \frac{x}{\ln(C\sqrt{|x|})},$$

$$\text{C) } y = x - \frac{x}{\ln(C\sqrt{|x|})},$$

$$\text{B) } y = x - \frac{x^2}{\ln(C\sqrt{|x|})},$$

$$\text{D) } y = 1 - \frac{x^2}{\ln(C\sqrt{|x|})}.$$

$$4. (x^2 - x)y' + y = x^2(2x - 1),$$

$$\text{Javob: A) } y = x + \frac{C}{x - 1},$$

$$\text{C) } y = x - \frac{C}{x - 1},$$

$$\text{B) } y = x^2 - \frac{C}{x - 1},$$

$$\text{D) } y = x^2 + \frac{C}{x - 1}.$$

5. $(2x - y^2)y' = 2y$,

Javob: A) $x = C - \frac{1}{2}y^2$,

C) $y = 2C - x^2$,

B) $y = C - \frac{1}{2}x^2$,

D) $x = 2C - y^2$.

6. $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$,

Javob: A) $y = \operatorname{tg} x (\cos x + C)$,

C) $y = \cos x + \operatorname{tg} x + C$,

B) $y = \cos x (\operatorname{tg} x + C)$,

D) $y = \cos x - \operatorname{tg} x + C$.

7. $y' + 2e^x y = 2e^x \sqrt{y}$,

Javob: A) $y = (x + Ce^{-x})^2$,

C) $y = (1 + Ce^{-e^x})^2$,

B) $y = (x + Ce^x)^2$,

D) $y = (1 + Ce^{-x})^2$.

8. $xy' + y = xy^2 \ln x$,

Javob: A) $y = \frac{2}{x(C + \ln^2 x)}$,

C) $y = \frac{2}{x(C + \ln x^2)}$,

B) $y = \frac{-2}{x(C + \ln x)}$,

D) $y = \frac{-2}{x(C + \ln^2 x)}$.

Mustahkamlash uchun savollar.

1. Birinchi tartibli chiziqli tenglama ta'rifini ayting?
2. Birinchi tartibli chiziqli tenglamani qanday aniqlaymiz?
3. Bernylli tenglamasining umumiy yechimi qanday topiladi?
4. To'liq differensial tenglamani qanday aniqlaymiz?

Mustaqil bajarish uchun topshiriqlar.

Bernulli differensial tenglamalarining umumiy yechimini toping.

1. $3(xy^1 + y) = y^2 \ln x$

Javob : $y = \frac{3}{3Cx + 1 + \ln x}$

2. $y^1 - y = 2xy^2$

Javob : $y = \frac{1}{Ce^x + 2x + 2}$

3. $y^1 - 3\frac{y}{x} = -x^3 y^2$

Javob : $y = \frac{4}{x^4 + 4cx^{-3}}$

4. $y^1 + 5y = xy^3$

Javob : $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5}(x + \frac{1}{10}) + c}}$

5. $xy^1 - 3y + x^2 y^2 = 0$

Javob : $y = \frac{1}{\frac{1}{3}(x - 1) + c}$

6. $y^1 = y \operatorname{ctg} x + \frac{y^3}{\sin x}$

Javob : $y = \frac{\sin x}{\sqrt{2 \cos x + c}}$

To'liq differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$7. (x^3 + 3y^2x)dx + (3x^2y + y^3)dy = 0,$$

$$\text{Javob : } x^4 + 8x^2y^2 + y^4 = C$$

$$8. e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0,$$

$$\text{Javob : } y + xe^{-y} = C$$

$$9. (x \cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2y dy = 0,$$

$$\text{Javob : } \frac{x^2}{2} \cos 2y + x = C$$

$$10. 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0,$$

$$\text{Javob : } x^2 \cos^2 y + y^2 = C$$

$$11. (2x + e^{x/y})dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right)e^{x/y}dy = 0,$$

$$\text{Javob : } x^2 + ye^{x/y} = C$$

$$12. (10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0,$$

$$\text{Javob : } 5x^2y - 8xy + x + 3y = C$$

$$13. \frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0,$$

$$\text{Javob : } y \ln x + \frac{1}{4}y^4 = C$$

$$14. \frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0,$$

$$\text{Javob : } \frac{y}{x} = C$$

$$15. 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0,$$

$$\text{Javob : } x^3e^y - y = C$$

22-23 mavzu. Yuqori tartibli differensial tenglamalar

Reja: 1) Umumiy tushunchalar

2) Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan differensial tenglamalar

Tayanch ibora va tushunchalar

Oshkor va oshkormas shakilda berilgan differensial tenglamalar differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari, boshlang'ich shartlar, tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan tenglamalar.

1. Umumiy tushunchalar.

Birinchi tartibdan yuqori tartibga ega bo'lgan barcha differensial tenglamalar yuqori tartibli differensial tenglamalar deyiladi.

n – tartibli tenglama $y^{(n)}$ hosiladan tashqari quyi tartibli hosilalarga ham ega bo'lishi mumkin, shuning uchun bunday tenglamaning umumiy ko'rinishi simvolik ravishda $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (1.1) ko'rinishda, yoki, agar mumkin bo'lsa, yuqori hosilaga nisbatan yechilgan ko'rinishda: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ (1.2) bo'ladi.

Birinchi tartibli tenglamalar uchun bo'lgani kabi, bu yerda ham umumiy yechim ixtiyoriy o'zgarmaslarga bog'liq bo'ladi. Shu sababli umumiy yechimdan xususiy yechimni ajratib olish uchun ixtiyoriy o'zgarmaslarni aniqlashga imkon beradigan ba'zi qo'shimcha shartlar ham berilgan bo'lishi kerak. Birinchi tartibli tenglama uchun bunday qo'shimcha shart $y(x_0) = y_0$ qiymatning, ya'ni integral egri chiziq o'tadigan nuqta koordinatalarining berilishi edi. Yuqori tartibli tenglamalar uchun bu shartlarni turli usullar bilan berish mumkin. Masalan, quyida ko'rsatilishicha, ikkinchi tartibli tenglama uchun umumiy yechim ikkita ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq bo'ladi. Ularni topish uchun ikkita shartga ega bo'lish kerak. Bu shartlarni izlanayotgan funksiyaning ikkita nuqtadagi qiymatini yoki izlanayotgan funksiyaning va uning birinchi hosilasining bitta nuqtadagi qiymatlarini berish bilan hosil qilish mumkin.

Ikkinchi usul mexanika masalalarini hal etishda keltirilib chiqariladigan differensial tenglamalarni yechishda keng qo'llaniladi. Haqiqatan ham, agar mexanika terminlaridan foydalanadigan bo'lsak, so'z

harakat qonuni to'g'risida ketayotgan bo'ladi, shu bilan birga nuqtaning boshlang'ich holati (funksiya qiymati) va uning boshlang'ich tezligi (birinchi hosila) berilgan bo'ladi. Shuning uchun xususiy yechimini umumiy yechimdan funksiyaning biror nuqtadagi berilgan qiymati va uning birinchi hosilasi bo'yicha topish boshlang'ich shartlari berilgan masala deyiladi.

Tartibi n bo'lgan tenglamalar uchun boshlang'ich shartlar sifatida izlanayotgan funksiyaning va uning $(n-1)$ - tartibgacha barcha hosilalarining birorta nuqtada qiymatlari, ya'ni $x = x_0$ da $y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0$ (1.3) sonlar sistemasi boshlang'ich shartlar sistemasi deyiladi.

Berilgan (1.2) differensial tenglamaning (1.3) boshlang'ich shartlar sistemasini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish **Koshi** masalasi deyiladi. Koshi birinchi bo'lib yechimning mavjudligi va yagonaligi to'g'risida teoremani isbotladi, uni quyidagicha ta'riflash mumkin.

Teorema. (1.2) differensial tenglama va (1.3) boshlang'ich shartlar sistemasi berilgan bo'lsin. Agar $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya boshlang'ich shartlar atrofida uzluksiz va $y, y^1, \dots, y^{(n-1)}$ argumentlar bo'yicha uzluksiz xususiy hosilalarga ega bo'lsa, u holda x_0 ni o'z ichiga olgan intervalda aniqlangan va uzluksiz hamda berilgan boshlang'ich shartlar sistemasini qanoatlantiruvchi yechim mavjud bo'lib, u yagona bo'ladi.

Bu teoremaning isbotiga to'xtalib o'tirmaymiz.

Materiallar qarshiligi kursida ko'pincha izlanayotgan funksiyaning bir nechta nuqtadagi qiymatlari ma'lum bo'lganda xususiy yechimni topish zarurati tug'iladi. Ana shunday va yanada umumiyroq masalalar differensial tenglamalar qo'llanishini talab etiladigan boshqa sohalarida ham uchraydi. Bu masalalarning ko'pchiligida xususiy yechimlarni chegaraviy shartlar deb ataladigan boshqa turdagi shartlardan izlashga to'g'ri keladi. Bunday masalalar, boshlang'ich shartlari berilgan masalaga nisbatan ancha murakkabdir. Biz boshlang'ich shartli masalalar bilangina chegaralanamiz.

Ta'rif. (1.2) differensial tenglamaning umumiy yechimi deb, ixtiyoriy o'zgarmaslarga ega bo'lgan yechimga aytiladi, bu o'zgarmaslarni boshlang'ich shartlarning istalgan yo'l qo'yiladigan (Koshi teoremasining shartlarini qanoatlantiruvchi sistema) sistemasini qanoatlantiradigan qilib tanlab olish mumkin.

Agar yechimning boshlang'ich shartlarga ham bog'liqligini e'tiborga olsak, uni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin: $y = \varphi(x, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0)$ (1.4)

Boshlang'ich shartlar sistemasi ixtiyoriy tanlab olinishi mumkin bo'lgani uchun (1.4) ifodadan n -tartibli tenglamaning umumiy yechimi n ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq ekanligi ko'rinadi.

2. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan differensial tenglamalar

1. $y^{(n)} = f(x)$ ko'rinishdagi tenglama

Tartibini pasaytirishga imkon beradigan n -tartibli tenglamalarning eng sodda turi $y^{(n)} = f(x)$ (2.1) ko'rinishdagi tenglamadir. Bu tenglamaning umumiy integralini topish uchun uning o'ng va chap tomonidan x bo'yicha n marta integrallaymiz: $y = \int dx \int dx \dots \int f(x) dx + P_{n-1}(x)$ (2.2),

$P_{n-1}(x) = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \dots + C_{n-1} x + C_n$ bo'lib, $C_1, C_2, \dots, C_n$ o'zgarmas sonlar.

1-misol. $y'' = \cos 2x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y' = \int \cos 2x dx + C_1 = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) dx + C_2 = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2$$

Bu (2.1) turdagi tenglamalarning soddaligiga qaramay, u muhim rol o'ynaydi, chunki boshqa ko'rinishdagi tenglamalar, shuningdek, materiallar qarshiligiga doir bir qator masalalarni yechishda hosil bo'ladigan ba'zi tenglamalar bu turdagi tenglamalarga keltiriladi.

2. $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ ko'rinishdagi tenglama

Izlanayotgan funksiya oshkor holda ishtirok etmagan va $(k-1)$ -tartibgacha (y ham kiradi) quyi tartibdagi hosilalar ishtirok etmagan $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ (2.3) differensial tenglamaning tartibini k birlikga pasaytirish mumkin.

Haqiqatan ham, yangi izlanayotgan funksiya uchun $P = y^{(k)}$ (2.4) deb almashtirish olsak, (2.3) differensial tenglama $F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0$ (2.5) ko'rinishga keladi.

Bu tenglamani integrallab va yangi izlanayotgan P funksiyaning aniqlab, y funksiyaning topish mumkin.

Bunda (2.4) tenglikni P funksiyasi ma'lum bo'lgan k -tartibli yangi $P(x) = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ (2.6) differensial tenglama sifatida qoraladi.

2-misol. $x^2 y''' = y'^2$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y'' = P, y''' = \frac{dp}{dx}$ almashtirish olsak, berilgan tenglama $x \frac{2dp}{dx} = P^2$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglama:

$$P = \frac{C_1 x}{x + C_1} = C_1 - \frac{C_1^2}{x + C_1} \Rightarrow y'' = C_1 - \frac{C_1^2}{x + C_1} \Rightarrow y' = C_1 x - C_1^2 \ln|x + C_1| + C_2 \Rightarrow$$

$$y = C_1 \cdot \frac{x^2}{2} - C_1^2 \left(x \ln(x + C_1) - \int \frac{x dx}{x + C_1} \right) + C_2 x + C_3 = C_1 \cdot \frac{x^2}{2} - C_1^2 (x + C_1) \cdot \ln(x + C_1) + C_2 x + C_3$$

Javob: $2y = C_1 x^2 - 2C_1^2 (x + C_1) \ln|x + C_1| + C_2 x + C_3$

Bu turdagi tenglamalarning xususiy holi izlanayotgan funksiya oshkor ishtirok etmagan 2-tartibli $F(x, y^1, y'') = 0$ (2.7) ko'rinishdagi tenglamadir.

(2.7) tenglamani yechish uchun $y^1 = P, y'' = \frac{dp}{dx}$ (2.5) almashtirish bajariladi.

3-misol. $(1+x)y'' = y'$ tenglamaning $y(0) = 1, y'(0) = 2$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. (2.8) almashtirishlarni bajarsak, berilgan tenglama: $(1+x) \frac{dp}{dx} = P$ yoki $\frac{dp}{P} = \frac{dx}{x+1}$ o'zgaruvchilarga ajralgan 1-tartibli differensial tenglamaga keladi. Buning yechimi $\ln|P| = \ln|x+1| + \ln C_1$ yoki $P = C_1(x+1)$, bundan $y' = C_1(x+1)$ yoki $y = C_1 x + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$ berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

Berilgan boshlang'ich shartlarga asosan $C_1 = 2, C_2 = 1$ ni o'rniga qo'ysak, $y = x^2 + 2x + 1$ xususiy yechim hosil bo'ladi.

3. $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ ko'rinishdagi tenglama

Tartibini pasaytirishga imkon beradigan tenglamalarning yana bir turi-erkli o'zgaruvchi oshkor ishtirok etmagan $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (2.9) ko'rinishdagi tenglamadir. Bu yerda ikkala o'zgaruvchini almashtirish orqali tenglama tartibi bir birlikga pasaytiriladi. Yangi izlanayotgan funksiya

sifatida $y' = P, y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = P \frac{dp}{dy}, y''' = P^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + P \left(\frac{dp}{dy} \right)^2, \dots, y^{(n)} = \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}$ (2.10) lar

orqali ifodalashni to'liq induksiya usuli yordamida ko'rsatish mumkin, demak, (2.9) tenglama (2.10)

almashtirishlar orqali $F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1} p}{dy^{n-1}}\right) = 0$ (2.11) ko'rinishga, ya'ni $(n-1)$ -tartibli

tenglamaga keltiriladi.

4-misol. $y^1 y'''' - 3y''^2 = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. (2.10) almashtirishlardan foydalansak, berilgan tenglamamizning ko'rinishi

$$P \left(P \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 + p^2 \cdot \frac{d^2 p}{dy^2} - 3 p^2 \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 = 0 \Rightarrow (p = 0, y = c) \right) \text{ yoki } \Rightarrow P \frac{d^2 p}{dy^2} - 2 \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 = 0. \quad \text{Bunda}$$

$$\frac{dp}{dy} = z, \frac{d^2 p}{dy^2} = z \frac{dz}{dp} \quad \text{almashtirishni olsak:} \quad Pz \frac{dz}{dp} - 2z^2 = 0 \Rightarrow (z = \frac{dp}{dy} = 0, \text{ ya'ni } P = C_1 \text{ va}$$

$$y = C_1 x + C_2) \Rightarrow \frac{dz}{z} - \frac{2dp}{p} = 0 \Rightarrow \ln |z| - \ln p^2 = \ln |C_1| \quad \text{yoki} \quad z = \frac{dp}{dy} = C_1 p^2 \Rightarrow -\frac{1}{p} = C_1 y + C_2 \quad \text{yoki}$$

$$-\frac{dx}{dy} = C_1 y + C_2 \Rightarrow x = C_1 y^2 + C_2 y + C_2, \text{ bunda } C_1 = -\frac{C_1}{2}, C_2 = -C_2.$$

(2.9) tenglamaning xususiy holi erkli o'zgaruvchi oshkor ishtirok etmagan $F(y, y', y'') = 0$ (2.12) ko'rinishdagi tenglamadir.

(2.12) tenglamaning umumiy yechimini ham (2.10) almashtirish yordamida topiladi.

5-misol. $5y \cdot y'' - (y')^2 = 0$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. (2.10) almashtirishdan foydalansak, berilgan tenglama $5y \cdot P \cdot \frac{dp}{dy} - P^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{5} \cdot \frac{dy}{y} = \frac{dp}{p}$ o'zgaruvchiga ajralgan tenglamani hosil qildik. Bu tenglikning ikkala tomonini integrallab, $P = C_1 y^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y' = C_1 y^{\frac{1}{5}} \Rightarrow y = (C_1 x + C_2)^{5/4}$ umumiy yechimini topamiz.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Yuqori tartibli differensial tenglamaning ta'rifini va tenglamalarni ayting?
2. Differensial tenglamaning umumiy yechimi bilan xususiy yechimi orasidagi farq?
3. Tartibini pasaytirish deganda nimani tushunasiz?
4. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan tenglama turlarini ayting?

Mustahkamlash uchun savollar

Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan differensial tenglamalarning umumiy yechimini toping.

$$1. \text{ a) } y' = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \text{b) } 2(y')^2 = (y-1)y''$$

$$2. \text{ a) } y'' = \sqrt{x^3} - \ln x; \quad \text{b) } y'' x \ln x - y' = 0$$

$$3. \text{ a) } y'' = \sqrt[3]{x^2} - \sin 5x; \quad \text{b) } y'' + 2y(y')^3 = 0$$

$$4. \text{ a) } y' = \sqrt[7]{x^2} + ctgx; \quad \text{b) } y'' tgy - 2y'^2 = 0$$

$$5. \text{ a) } y'' = x \sin x; \quad \text{b) } y'' + y' tgy = \sin x$$

$$\text{Javob: } y = -x \sin x - 2 \cos x + C_1 x + C_2; \quad \text{Javob: } y = \sin x \left(C_1 - \frac{1}{6} \sin^2 x \right) + C_2$$

$$6. \text{ a) } xy'' = \frac{1}{x} - x^2 \cos x; \quad \text{b) } y'' + 2xy'^2 = 0$$

$$\text{Javob: } y = -\ln |x| + x \cos x - 2 \sin x + C_1 x + C_2;$$

$$\text{Javob: } y = \frac{1}{C_1} \arctg \frac{x}{C_1} + C_2, y = \frac{1}{2C_1} \ln \left| \frac{x - C_1}{x + C_2} \right| + C_2.$$

$$7. \text{ a) } y'' = \frac{1}{x^2} + x^2; \quad \text{b) } xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0$$

$$\text{Javob: } y = -\ln |x| + \frac{1}{12} x^4 + C_1 x + C_2; \quad \text{Javob: } C_1^2 y = (C_1^2 x^2 + 1) \arctg C_1 x - C_1 x + C_2$$

$$2y = K \ln^2 + C (k = 0; \pm 1; \dots).$$

8. a) $y'' = x - x \cos x$;

b) $(1 - x^2)y'' + xy' - 2 = 0$

Javob:

$$y = \frac{1}{6}x^3 - x \cos x - 2 \sin x + C_1 x + C_2 ;$$

Javob: $y = C_1 \left(x \sqrt{x^2 - 1} - \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 1} \right| \right) + x^2 + C_2$; $y = C_1 \left(x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right) + x^2 + C_2$.

9. a) $y'' = \cos 2x$;

b) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$

Javob: $y = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2$;

Javob: $y = \frac{1}{C_1} e^{C_1 + x + 1} \left(x - \frac{1}{C_1} \right) + C_2$; $y = \frac{e^{x^2}}{2} + C$.

10. a) $y'' = x^2 - \sin x$;

b) $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$

Javob: $y = \frac{x^4}{12} + \sin x + C_1 x + C_2$;

Javob: $y = \frac{1}{x} + C_1 \ln x + C_2$

24-25-mavzu. Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar

Reja: 1) 2-tartibli chiziqli tenglamalarga doir asosiy tushunchalar

2) O'zgaras koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar

Tayanch ibora va tushunchalar

Ikkinchi tartibli bir jinsli o'zgaras koeffitsientli chiziqli tenglama, Vranskiy detrimenanti, xarakteristik tenglama.

1. 2-tartibli chiziqli tenglamalarga doir asosiy tushunchalar

1-ta'rif. Agar 2-tartibli differensial tenglama noma'lum funksiya y va uning hosilasi y', y'' ga nisbatan birinchi darajali bo'lsa, bunday tenglama chiziqli differensial tenglama deyiladi va u $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (3.1) ko'rinishda yoziladi. Bunda $a_1(x)$ va $a_2(x)$ lar x ning funksiyalari yoki o'zgaras sonlar.

Agar (3.1) da $f(x) \neq 0$ bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan yoki o'ng tomonli chiziqli tenglama, $f(x) = 0$ bo'lsa, bir jinsli yoki o'ng tomoni bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalarning ba'zi xossalari isbatsiz eslatib o'tamiz.

1- teorema. Agar y_1 va y_2 ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ (3.2) tenglamaning ikkita xususiy yechimi bo'lsa, u holda $y_1 + y_2$ ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

2- teorema. Agar y (3.2) tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda Cy ham shu tenglamaning yechimi bo'ladi.

2- ta'rif. Agar $[a, b]$ kesmada (3.2) tenglamaning ikkita y_1 va y_2 yechimlarining nisbati o'zgaras miqdorga teng bo'lmasa, ya'ni $\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const}$ bo'lsa, y_1 va y_2 yechimlar $[a, b]$ kesmada chiziqli bog'liq bo'lmagan erkli yechimlar deyiladi.

Agar $[a, b]$ kesmada shunday o'zgaras λ son mavjud bo'lib, $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ bo'lsa, y_1 va y_2 yechim chiziqli bog'liq yechim deyiladi.

Masalan, $y'' + y = 0$ tenglama uchun $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 2e^x$, $y = 4e^{-x}$ funksiyalar yechimlari bo'ladi. Bunda e^x va e^{-x} funksiyalar har qanday kesmada ham chiziqli bog'liq emas, chunki $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq \text{const}$ bo'lib, o'zgaruvchi miqdordir.

Lekin, e^x va $2e^x$ funksiyalar chiziqli bog'liq, chunki $\frac{2e^x}{e^x} = 2 = \text{const}$.

3-ta'rif. Agar y_1 va y_2 lar x argumentning funksiyasi bo'lsa, u holda $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$ (3.3) determinant Vronskiy determinanti yoki berilgan funksiyaning Vronskiysi deyiladi.

3- teorema. Agar y_1 va y_2 funksiyalar $[a, b]$ kesmada chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda bu kesmada Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo'ladi.

4- teorema. Agar (3.2) tenglamaning y_1 va y_2 yechimlari $[a, b]$ kesmada chiziqli erkli bo'lsa, bu yechimlardan tuzilgan Vronskiy determinanti kesmaning hech bir nuqtasida nolga aylanmaydi.

5-teorema. Agar y_1 va y_2 (3.2) tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimi bo'lsa, u holda $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ (3.4) tenglik (3.2) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Bunda C_1 va C_2 o'zgarmas sonlar.

2. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli $y'' + Py' + qy = 0$ (2.1) tenglama berilgan bo'lsin, bu yerda P va q o'zgarmas haqiqiy sonlar.

(2.1) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, ikkita xususiy yechimini topish kifoya.

Xususiy yechimlarni $y = e^{kx}$, ($k = \text{const}$) (2.2) ko'rinishda izlaymiz, u holda $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$ (2.3).

(2.2) va (2.3) larni (2.1) tenglamaga qo'ysak, $e^{kx}(k^2 + kp + q) = 0$ yoki $e^{kx} \neq 0$, $k^2 + kp + q = 0$ (2.4) xarakteristik tenglamani hosil qilamiz.

Uning ildizlari $k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ va $k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ bo'lib, ular quyidagicha bo'ladi

3-jadval.

T/n	Xarakteristik tenglamaning ildizi	Xususiy yechim	Umumiy yechim (integral)
1	k_1 va k_2 haqiqiy va teng bo'lmagan ($k_1 \neq k_2$) hol	$y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$ bo'lib, $\frac{y_2}{y_1} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq \text{const}$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	k_1 va k_2 haqiqiy va teng ($k_1 = k_2$) bo'lgan hol	$y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ bo'lib, $\frac{y_2}{y_1} = x \neq \text{const}$	$y = (C_1 + xC_2)e^{kx}$
3	k_1 va k_2 kompleks sonlar $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ bo'lgan hol	$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ bo'lib, $\frac{y_1}{y_2} = \text{ctg } \beta x \neq \text{const}$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

6-misol. $y'' - 3y' + 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi

$k^2 - 3k + 2 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. U holda xususiy yechimlar $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$

bo'lib, $\frac{y_2}{y_1} = e^{-x} \neq \text{const}$ bo'lgani uchun, umumiy integral (yechim): $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

7-misol. $y'' - 4y' + 3y = 0$ tenglamaning $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish. Tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2 - 4k + 3 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1 = 3$,

$k_2 = 1$. Shuning uchun xususiy yechimlar $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^x$ va $\frac{y_2}{y_1} e^{-2x} \neq \text{const}$ bo'lgani uchun

umumiy yechim $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^x$ (*).

Tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish uchun (*) dan birinchi tartibli hosila olamiz. $y' = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^x$ (**).

(*) va (**) larga boshlang'ich shartlarni qo'yib, C_1 va C_2 o'zgarmaslarga nisbatan

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 6 \\ 3C_1 + C_2 = 10 \end{cases} \quad \text{tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, } C_1 = 2, C_2 = 4 \text{ ni}$$

topamiz.

U holda berilgan differensial tenglamaning izlanayotgan yechimi: $y = 2e^{2x} + 4e^x$.

8-misol. $y'' + 2y' + 5y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Xarakteristik tenglama $k^2 + 2k + 5 = 0$ bo'lib, ildizlari $k_1 = -1 + 2i$, $k_2 = -1 - 2i$.

Shuning uchun $y_1 = e^{-x} \cos 2x$, $y_2 = e^{-x} \sin 2x$ va $i \frac{y_2}{y_1} = \tan 2x \neq \text{const}$ bo'lgani uchun

$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

9-misol. $y'' + 2y' + 2y = 0$ tenglamaning $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish. Berilgan o'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi $k^2 + 2k + 2 = 0$ bo'lib, $k_{1,2} = -1 \pm i$ ildizlarga ega. Shuning uchun $y_1 = e^{-x} \cos x$ va $y_2 = e^{-x} \sin x$. U holda tenglamaning umumiy yechimi $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Tenglamaning xususiy yechimlarini topish uchun y dan birinchi tartibli hosila olamiz va boshlang'ich shartlardan

foydalanib C_1, C_2 o'zgarmaslarga nisbatan $\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 - C_1 = 1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini hosil

qilamiz. Sistemani yechib $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ ni aniqlaymiz.

Topilgan C_1 va C_2 larning qiymatlarini tenglamaning umumiy yechimiga qo'yib, uning berilgan boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi $y = e^{-x}(\cos x + 2 \sin x)$ xususiy yechimini hosil qilamiz.

10-misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $k^2 + 4k + 4 = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = k_2 = 2$ bo'lib, haqiqiy va karrali bo'lgani uchun umumiy yechim $y = (C_1 + xC_2)e^{2x}$.

Mustahkamlash uchun savollar

1. Chiziqli teglama deb nimaga aytiladi?
2. O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli tenglamaning ko'rinishini yozing?
3. O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli tenglamaning xususiy yechimi qanday ko'rinishda izlanadi?
4. Xarakteristik tenglama ildizlari necha xil bulanadi va qanday topiladi?

Mustahkamlash uchun savollar

Quyidagi o'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalarning umumiy va boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari topilsin.

1. a) $y'' - 5y' + 6y = 0$ Javob: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$;
b) $y'' + 3y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 3$, Javob: $y = 2 - e^{-3x}$;
2. a) $y'' - 5y' - 6y = 0$, Javob: $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}$;
b) $y'' + 4y = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, Javob: $y = -\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$;
3. a) $y'' + 4y' + 4y = 0$, Javob: $y = e^{-2x}(C_1 + xC_2)$;
b) $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$, Javob: $y = e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x}$;
4. a) $y'' - 9y = 0$, Javob: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$;
b) $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 7$, Javob: $y = e^{2x}(2 + 7x)$;
5. a) $y'' + 6y' + 9y = 0$, Javob: $y = e^{-3x}(C_1 + xC_2)$;
b) $y'' - 2y' + 5y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -1$, Javob: $y = e^x \left(\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x \right)$;
6. a) $y'' + 16y = 0$, Javob: $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$;
b) $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$, Javob: $y = e^x(4 - 2x)$;
7. a) $2y'' - 3y' - 2y = 0$, Javob: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x}$;
b) $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$, Javob: $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{3x})$;
8. a) $y'' - 10y' + 25y = 0$, Javob: $y = e^{5x}(C_1 + xC_2)$;
b) $y'' - 6y' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$, Javob: $y = e^{3x}(1 - 2x)$;
9. a) $y'' + 49y = 0$, Javob: $y = C_1 \cos 7x + C_2 \sin 7x$;
b) $y'' - 5y' + 4y = 0, y(0) = y'(0) = 1$, Javob: $y = \frac{1}{3}(2e^x + e^{4x})$;
10. a) $y'' - 4y' + 13y = 0$, Javob: $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
b) $y'' - 2y' + y = 0, y(2) = 1, y'(2) = -2$, Javob: $y = (7 - 3x)e^{x-2}$.

26-27-mavzu. O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar

- Reja:** 1) Differensial tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = P_m(x)$, bo'lgan hol
2) Differensial tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$ bo'lgan hol
3) Differensial tenglamaning o'ng tomoni $f(x) = P_m(x) \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x$ bo'lgan hol
4) $y'' + py' + qy = f(x)$ tenglamaning xususiy yechimini topishning ixtiyoriy o'zgarmas miqtor, variant, usuli

Tayanch ibora va tushunchalar

O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli bo'lmagan tenglama, xarakteristik tenglama yechimlari, xususiy yechimlari, xarakteristik tenglamaning yechimi bo'lgan va bo'lmagan hollar.

Agar p va q haqiqiy sonlar, $f(x) \neq 0$ bo'lsa, u holda $y'' + py' + qy = f(x)$ (5.1) tenglama o'zgaras koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi.

(5.1) ko'rinishdagi tenglamani yechishda quyidagi teorema asosiy o'rin tutadi.

Teorema. Bir jinsli bo'lmagan (5.1) tenglamaning umumiy yechimi y , bu tenglamaning xususiy yechimi y^* bilan mos bir jinsli $y'' + py' + qy = 0$ (4.1) tenglamaning $\hat{y}$ umumiy yechimi yig'indisiga teng, ya'ni $y = y^* + \hat{y}$ (5.2).

Biz (4.1) tenglamaning umumiy yechimini topish bilan 4-§. da tanishdik, shuning uchun (5.1) tenglamaning xususiy yechimini topish usullari 2-jadvalda bayon etilgan:

4-jadval

№/ N	Differensial tenglamaning o'ng tomonining ko'rinishi	Xarakteristik tenglamaning ildizlari	Xususiy yechimning ko'rinishi
1	$f(x) = P_m(x)$, bunda $P_m(x)$ - darajasi m bo'lgan ko'p had	a) α soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagan hol	$Q_m(x)$ bunda, $Q_m(x)$ - darajasi m dan katta bo'lmagan ko'phad
		b) α soni xarakteristik tenglamaning l karrali ildizi	$x^e Q_m(x)$
2	$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_m(x)$, bunda α - haqiqiy son	a) α soni xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmagan hol	$Q_m(x)e^{\alpha x}$
		b) α soni xarakteristik tenglamaning e karrali ildizi	$x^e Q_m(x)e^{\alpha x}$
3	$f(x) = P_m(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x$, bunda $P_m(x)$ va $Q_m(x)$ darajasi m dan katta bo'lmagan ko'phadlar	a) β i son xarakteristik tenglamaning ildizi emas	$U_m(x)\cos \beta x + V_m(x)\sin \beta x$ bunda $U_m(x)$ va $V_m(x)$ - darajasi m dan katta bo'lmagan ko'phad
		b) β i son xarakteristik tenglamaning e karrali ildizi	$x^e [U_m(x)\cos \beta x + V_m(x)\sin \beta x]$
4	$f(x) = e^{\alpha x} [P_m(x)\cos \beta x + Q_m(x)\sin \beta x]$	a) $\alpha + i\beta$ son xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lmasin	$e^{\alpha x} [U_m(x)\cos \beta x + V_m(x)\sin \beta x]$
		b) $\alpha + i\beta$ son xarakteristik tenglamaning e karrali ildizi	$x^e e^{\alpha x} [U_m(x)\cos \beta x + V_m(x)\sin \beta x]$
5	$f(x) = M \cos \beta x + N \sin \beta x$	a) $i\beta$ son xarakteristik tenglamaning ildizi emas	$A \cos \beta x + B \sin \beta x$
		b) $i\beta$ son xarakteristik tenglamaning ildizi	$x(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$

25-misol. $y'' + 4y' + 3y = x$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Avval $y'' + 4y' + 3y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Uning xarakteristik tenglamasi $k^2 + 4k + 3 = 0$ bo'lib, uning ildizlari $k_1 = -1, k_2 = -3$ va umumiy yechimi $\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$ bo'ladi.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni 2-jadvaldagi 1-holning a) ko'rinishida ya'ni $A_0x + A_1$ ko'rinishda izlaymiz. Bu ifodaning birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini olib, berilgan tenglamaga qo'ysak: $4A_0 + 3(A_0x + A_1) = x$ hosil bo'ladi. Bir xil darajali x lar oldidagi koeffitsientlarni

tenglab,
$$\begin{cases} 3A_0 = 1 \\ 4A_0 + 3A_1 = 0 \end{cases} \quad \text{tenglamalar sistemasidan, noma'lum bo'lgan} \quad A_0 = \frac{1}{3}, \quad A_1 = -\frac{4}{9}$$

koeffitsientlarni topamiz. U holda berilgan tenglamaning xususiy yechimi: $y^* = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$ bo'lib,

umumiy yechimi: $y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{x}{3} - \frac{4}{9}$.

26-misol. $y'' + 4y' + 3y = (8x^2 + 84x)e^x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y'' + 4y' + 3y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Xarakteristik tenglamasi $k^2 + 4k + 3 = 0$ ning ildizlari $k_1 = -3, k_2 = -1$ bo'lib, umumiy yechimi $\tilde{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$.

Berilgan bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning xususiy yechimini topish lozim.

Bizning misolda $f(x) = (8x^2 + 84x)e^x$ bo'lgani uchun 2-jadvaldagi 2-holning a) ko'rinishida bo'lgani uchun xususiy yechim $y^* = (Ax^2 + Bx + C) \cdot e^x$ shaklda izlanadi, bu yerda A, B, C noma'lum koeffitsientlarni aniqlash kerak. Ularni topish uchun y^* berilgan tenglamaning ildizi bo'lishi kerakligidan foydalanib, $y^{*1}, y^{*''}$ larni topamiz. Topilgan bu qiymatlarni berilgan tenglamaga qo'yib: $(Ax^2 + 4Ax + Bx + 2A + 2B + C)e^x + 4(Ax^2 + 2Ax + Bx + B + C)e^x + (3Ax^2 + 3Bx + 3C)e^x = (8x^2 + 84x)e^x$ tenglikni hosil qilamiz.

Hosil qilingan tenglikning har ikkala tomonini e^x ga qisqartirib va x ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarini o'zaro tenglashtirish natijasida A, B, C koeffitsientlarni topish uchun quyidagi

sistamani hosil qilamiz:
$$\begin{cases} 8A = 8 \\ 12A + 8B = 84 \\ 2A + 6B + 8C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 9 \\ C = -7 \end{cases} \quad \text{larni topib, quyidagi} \quad y^* = (x^2 + 9x - 7)e^x$$

xususiy yechimga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimi: $y = \tilde{y} + y^* = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + (x^2 + 9x - 7)e^x$.

27-misol. $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. Avval $y'' + 2y' + 5y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Uning xarakteristik tenglamasi $k^2 + 2k + 5 = 0$ ko'rinishda bo'lib, $k_1 = -1 + 2i, k_2 = -1 - 2i$ ildizlarga ega. Shuning uchun uning umumiy yechimi $\tilde{y} = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x}$.

Berilgan tenglamaning xususiy yechimini topishda 2-jadvaldagi 5-holning a) ko'rinishidan foydalansak, bunda $\beta = 1$ ekanligini e'tiborga olsak $y^* = A \cos x + B \sin x$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda A va B noma'lum bo'lgan o'zgarmas koeffitsientlar. Bu noma'lum koeffitsientlarni topish uchun $y^*, y^{*1}, y^{*''}$ larning qiymatlarini berilgan tenglamaga qo'ysak:

$-A \cos x - B \sin x - 2A \sin x + 2B \cos x + 5A \cos x + 5B \sin x = 2 \cos x$ tenglikni hosil qilamiz. Bir xil trigonometrik funksiyalar oldidagi koeffitsientlarni tenglab, A va B larni aniqlash uchun quyidagi

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:
$$\begin{cases} -A + 2B + 5A = 2 \\ -B - 2A + 5B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{U holda berilgan tenglamaning}$$

xususiy yechimi $y^* = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$, umumiy yechim:

$y = \tilde{y} + y^* = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x} + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$.

2. O'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama xususiy yechimini topishning ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli

Bir jinslimas tenglama xususiy yechimini topishning umumiy usuli ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usulini ko'rsatamiz.

Agar berilgan tenglama 2-tartibli: $y'' + py' + qy = f(x)$ (2.1) ko'rinishda bo'lsa, bir jinsli $y'' + py' + qy = 0$ (2.1) tenglamaning umumiy yechimi $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ (2.1) ko'rinishda bo'ladi.

(2.1) dagi C_1 va C_2 ni x ning hozircha noma'lum funksiyalari deb hisoblab, (2.1) tenglamaning xususiy yechimini (2.1) ko'rinishda izlaymiz.

(2.1) ni differensiallab: $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2$ ni hosil qilamiz.

C_1 va C_2 funksiyalarni $C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0$ (2.2) tenglik bajariladigan qilib tanlab olamiz.

Agar bu qo'shimcha shartni e'tiborga olsak, u holda y' hosila: $y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$ ko'rinishda bo'ladi. Endi bu ifodadan y'' ni topamiz: $y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_2' + C_2' y_1'$.

y, y', y'' larni (2.1) tenglamaga qo'yib,

$C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_2' + C_2' y_1' + P(C_1 y_1' + C_2 y_2') + Q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = f(x)$ yoki

$C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) + C_1' y_2' + C_2' y_1' = f(x)$ tenglikni hosil qilamiz.

Birinchi ikkita qavs ichida turgan ifodalar nolga aylanadi, chunki y_1 va y_2 bir jinsli tenglamalarning yechimlari.

Demak, keyingi tenglik $C_1' y_1 + C_2' y_2 = f(x)$ (2.3) ko'rinishga keladi.

Shunday qilib, C_1 va C_2 funksiyalar (2.2) va (2.3) tenglamalar sistemasini qanoatlantirsa, ya'ni

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1 + C_2' y_2 = f(x) \end{cases} \quad (2.4) \text{ bo'lsa, (2.1) funksiya (2.1)}$$

tenglamaning yechimi bo'ladi. Ammo bu sistemaning determinanti chiziqli erkli y_1 va y_2 funksiyalarning Vronskiy determinanti bo'lgani uchun nolga teng bo'lmaydi. Demak, sistemani yechib, C_1' va C_2' ni x ning ma'lum funksiyalari sifatida aniqlaymiz: $C_1' = \varphi_1(x), C_2' = \varphi_2(x)$.

Integrallab, $C_1 = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1, C_2 = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2$ tengliklarni hosil qilamiz, bunda $\bar{C}_1$ va $\bar{C}_2$ integral o'zgarmaslaridir.

C_1 va C_2 ning hosil qilingan ifodalarini (2.1) ga qo'yib, ikkita ixtiyoriy o'zgarmas $\bar{C}_1$ va $\bar{C}_2$ miqdorlarga bog'liq bo'lgan integralni, ya'ni bir jinslimas tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

Agar berilgan tenglama n -tartibli: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x)$ (2.5)

ko'rinishda berilgan bo'lib, xususiy yechim $y^*(x) = C_1(x) y_1(x) + \dots + C_n(x) y_n(x)$ (2.6)

ko'rinishda bo'lib,

$$\begin{cases} y_1 \frac{dC_1}{dx} + \dots + y_n \frac{dC_n}{dx} = 0 \\ y_1' \frac{dC_1}{dx} + \dots + y_n' \frac{dC_n}{dx} = 0 \\ y_1^{(n-1)} \frac{dC_1}{dx} + \dots + y_n^{(n-1)} \frac{dC_n}{dx} = f(x) \end{cases} \quad (2.7) \text{ almashtirishlarni e'tiborga}$$

olinib, berilgan (2.5) tenglama yechimi topiladi.

28-misol. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $y'' - 4y' + 5y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. Xarakteristik tenglamasi $k^2 - 4k + 5 = 0$ ning ildizlari $k_{1,2} = 2 \pm i$ bo'lib, umumiy yechimi $\bar{y} = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$ (*)

Berilgan bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning xususiy yechimini ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlarni variatsiyalash usuli (2.4) yordamida izlaymiz.

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = \frac{e^{2x}}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ C_1' (2 \cos x - \sin x) + C_2' (2 \sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -\tan x \\ C_2' = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = \int -\tan x dx = \ln |\cos x| + \bar{C}_1 \\ C_2 = \int dx = x + \bar{C}_2 \end{cases}$$

C_1 va C_2 larning topilgan qiymatlarini (*) tenglikka qo'ysak:
 $y = [\ln |\cos x| + \bar{C}_1] e^{2x} \cos x + (x + \bar{C}_2) e^{2x} \sin x$, bunda $\bar{C}_1$ va $\bar{C}_2$ lar ixtiyoriy o'zgarmas miqdorlar.

Mustahkamlash uchun savollar

1. O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli bo'lmagan tenglama deb nimaga aytiladi?
2. $y'' + py' + qy = f(x)$ tenglamaning umumiy yechimi qanday topiladi?
3. $f(x)$ funksiyaning ko'rinishlari turlarini ayting?
4. Xususiy yechimlar qanday izlanadi?

Mustahkamlash uchun savollar

Quyida berilgan o'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalarning umumiy va boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini toping.

1. a) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$; Javob: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1)$

b) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, y(0) = 1, y'(0) = 0$; Javob: $y = 2x - 1 - \frac{2}{3} e^{2x} \sin 3x$

2. a) $y'' - 2y' + 2y = e^x$; Javob: $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^x$

b) $y'' + 2y' + y = x + \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 0$; Javob: $y = \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}x \right) e^{-x} - x - 2 - \frac{1}{2} \cos x$

3. a) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$; Javob: $y = \bar{y} + y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$

b) $y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x), y(0) = 0, y'(0) = 1$; Javob: $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{1}{2} \left(x + 1 + \frac{1}{2} \cos 2x \right)$

4. a) $y'' + y = (x^2 - 1)e^{-x} + \sin x$; Javob: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) - \frac{x}{2} \cos x$

b) $y'' - 2y' + y = x e^x, y(0) = 0, y'(0) = 3$; Javob: $y = 3x e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x$

5. a) $y'' - 6y' + 10y = 51 e^{-x}$; Javob: $y = e^{3x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{-x}$

b) $y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x, y(0) = 4, y'(0) = 0$; Javob: $y = 1.5 e^{-x} + e^{4x} - 2.5 \sin x + 1.5 \cos x$

6. a) $y'' - 6y = (\cos 4x - 8 \sin 4x) e^x$; Javob: $y = C_1 e^{-\sqrt{6}x} + C_2 e^{\sqrt{6}x} + e^x \left(\frac{2029}{3087} \cos 4x + \frac{136}{147} \sin 4x \right)$

b) $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, y(0) = 0, y'(0) = 2$; Javob: $y = x^2 + e^x \sin 2x$

7. a) $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$;

Javob: $y = x^2 (C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)) + 3x^2$;

Izoh: $x = e^t, x > 0$ almashtirish olinadi.

b) $y'' - 6y' = 18e^{6x}, y(0) = 1, y'(0) = -9$;

Javob: $y = 3 - 2e^{6x} + 3xe^{6x}$

8. a) $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}$;

Javob: $y = e^{2x} (C_1 + xC_2) + \frac{1}{9}e^{-x}$

b) $y'' + y = -8 \sin x - 6 \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi$;

Javob: $y = -3 \cos x + 2\pi \sin x + x(4 \cos x - 3 \sin x)$

9. a) $y'' + 4y = \cos 2x$;

Javob: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{x}{4} \sin 2x$

b) $y'' + 4y = 4 \sin 2x - 8 \cos 2x; y(0) = 0, y'(0) = 0$; Javob: $y = \frac{1}{2} \sin 2x - x(\cos 2x + 2 \sin 2x)$

10. a) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;

Javob: $y = e^{2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} \right)$

b) $y'' - 4y' + 4y = e^{-x}, y(0) = 0, y'(0) = 0$;

Javob: $y = e^{2x} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}x \right) + \frac{1}{9}e^{-x}$

28-mavzu. Ikki noma'lumli o'zgarmas koefitsentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi

Reja: 1. Ikki noma'lumli o'zgarmas koefitsentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.
2. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi

Tayanch ibora va tushunchalar

Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi, sistemaning xaraktersizlik tenglamasi ildizlari, umumiy yechim.

1. Ikki noma'lumli o'zgarmas koefitsentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.

Bizga
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1.1) \text{ differensial tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bunda } t -$$

argument, $x(t), y(t)$ – noma'lum funksiyalar, $a_{ij} (i, j = \overline{1, 2})$ o'zgarmas sonlar.

(1.1) sistema ikki noma'lumli o'zgarmas koefitsentli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deyiladi.

Ushbu: $\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0$ (1.8) kvadrat tenglama (1.1) sistemaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Quyida bizga $\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 = 0 \end{cases}$ (1.3) sistema kerak bo'ladi.

(1.1) sistemani yechish uchun avvalo (1.2) xarakteristik tenglama ildizlari k_1 va k_2 topiladi.

Xarakteristik tenglama ildizlari k_1 va k_2 haqiqiy va har xil bo'lsa, (1.3) sistemada k o'rniga k_1 ni qo'yib, bu sistema yechimlari $\alpha_1^{(1)}$ va $\alpha_2^{(1)}$ larni topamiz, so'ngra (1.3) ga k_2 ni

qo'yib, $\alpha_1^{(2)}$ va $\alpha_2^{(2)}$ larni topamiz. Shundan so'ng, (1.2) munosabatni hisobga olib, $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = 1$ desak, $\alpha_2^{(1)} = \frac{k_1 - a_{11}}{a_{12}}, \alpha_2^{(2)} = \frac{k_2 - a_{11}}{a_{12}}$ bo'ladi. (1.1) sistemaning umumiy yechimini topish 5-jadvalda berilgan.

5-jadval.

T/n	Xarakteristik tenglama ildizlari	(1.1) tenglamaning umumiy yechimi
1.	k_1 va k_2 haqiqiy sonlar bo'lib, har xil ($k_1 \neq k_2$)	$\begin{cases} x = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} \\ y = \frac{1}{a_{12}} [(k_1 - a_{11}) C_1 \cdot e^{k_1 t} + (k_2 - a_{11}) C_2 e^{k_2 t}] \end{cases}$
2.	k_1 va k_2 haqiqiy sonlar bo'lib, o'zaro teng $k_1 = k_2$	$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{k_1 t} \\ y = \frac{1}{a_{12}} [(k_1 - a_{11}) C_1 + C_2 + (k_1 - a_{11}) C_2 t] e^{k_1 t} \end{cases}$
3.	$k_1 = \alpha + \beta i$ va $k_2 = \alpha - \beta i$ qo'shma kompleks sonlar	$\begin{cases} x = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \\ y = e^{\alpha t} \cdot \left[\left(\frac{\alpha - a_{11}}{a_{12}} \cdot C_1 + \frac{\beta}{a_{12}} \cdot C_2 \right) \cos \beta t + \left(C_2 \cdot \frac{\alpha - a_{11}}{a_{12}} + C_1 \cdot \frac{\beta}{a_{12}} \right) \sin \beta t \right] \end{cases}$

1-misol. Quyidagi chiziqli differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimi topilsin.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$$

Yechish. Berilgan differensial tenglamalar sistemasining xarakteristik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $\begin{vmatrix} 4 - k & 6 \\ 2 & -k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 6k - 16 = 0 \Rightarrow k_1 = -2, k_2 = 8$

Sistemaning xususiy yechimlari quyidagi ko'rinishda izlanadi: $x_1 = \alpha_1 e^{k_1 t}; y_1 = \beta_1 e^{k_1 t},$
 $x_2 = \alpha_2 e^{k_2 t}, y_2 = \beta_2 e^{k_2 t};$

(1.3) sistemadan: $\begin{cases} (4 - k)\alpha + 6\beta = 0 \\ 4\alpha + (2 - k)\beta = 0 \end{cases} \quad k_2 = -2 \text{ da } \alpha \text{ va } \beta \text{ larni aniqlash uchun tenglamalar}$

sistemasini hosil qilamiz: $\begin{cases} (4 + 2)\alpha_1 + 6\beta_1 = 0 \\ 4\alpha_1 + (2 + 2)\beta_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\alpha_1 + 6\beta_1 = 0 \\ 4\alpha_1 + 4\beta_1 = 0 \end{cases}$

Bu sistema cheksiz ko'p yechimga ega, chunki bu ikki tenglama bitta $\alpha_1 + \beta_1 = 0$ tenglamaning o'zidir, $\alpha_1 = -\beta_2, \beta_1 = -1, \alpha_1 = 1.$

Demak, xarakteristik tenglamaning $k_1 = -2$ ildiziga $x_1 = e^{-2t}, y_1 = e^{-2t}$ xususiy yechimlar mos keladi.

Endi $k_2 = 8$ da α va β larni topish uchun quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} (4 - 8)\alpha_2 + 6\beta_2 = 0 \\ 4\alpha_2 + (2 - 8)\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha_2 + 6\beta_2 = 0 \\ 4\alpha_2 - 6\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Bu sistema ham cheksiz ko'p yechimga ega, chunki

ikkinchi tenglama 1-tenglamaning natijasidir, shuning uchun $4\alpha_2 = 6\beta_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{3}{2}\beta_2$; $\beta_2 = 2$ da $\alpha_2 = 3$ bo'ladi.

Demak, xarakteristik tenglamaning $k_2 = 8$ ildiziga $x_2 = 3e^{8t}$, $y_2 = 2e^{8t}$ xususiy yechimlar mos keladi.

Berilgan sistemaning umumiy yechimi 3-jadvalning 1-holidagini e'tiborga olsak, quyidagicha

bo'ladi:
$$\begin{cases} x(t) = C_1\alpha_1 e^{k_1 t} + C_2\alpha_2 e^{k_2 t} \\ y(t) = C_1\beta_1 e^{k_1 t} + C_2\beta_2 e^{k_2 t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = C_1 e^{-2t} + 3C_2 e^{8t} \\ y(t) = -C_1 e^{-2t} + 2C_2 e^{8t} \end{cases}$$

Umumiy yechimni matritsa ko'rinishda quyidagicha yozish mumkin:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & 3C_2 \\ -C_1 & 2C_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ e^{8t} \end{pmatrix}$$

2. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi

Ko'pincha x argument, noma'lum $y_1, y_2, \dots, y_n$ funksiyalar va ularning hosilalarini o'z ichiga olgan differensial tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi $y_1 = y_1(x)$; $y_2 = y_2(x)$; $\dots$; $y_n = y_n(x)$ funksiyalarni topish talab etiladi. Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (8.1), \text{ bunda } y_1, y_2, \dots, y_n - \text{izlanayotgan funksiyalar, } x \text{ esa argument.}$$

Chap tomonida 1- tartibli hosilalar turgan, o'ng tomoni hosilalarni o'z ichiga olmagan bunday tenglamalar sistemasi normal sistema deyiladi.

Sistemani yechish (integrallash) degani (1.1) tenglamalar sistemasini va $y_1(x_0) = y_{1_0}$; $y_2(x_0) = y_{2_0}, \dots, y_n(x_0) = y_{n_0}$ (1.2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1, \dots, y_n$ funksiyalarni topish demakdir.

(1.1) tenglamani yechish quyidagicha bajariladi:

(1.1) tenglamalardan birinchisini x bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \cdot \frac{dy_m}{dx} \quad \frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{dy_n}{dx} \quad \text{hosilalarni ularning tenglamalariga}$$

$f_1, \dots, f_n$ ifodalari bilan almashtirib, $\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x, y_1, \dots, y_n)$ tenglamani hosil qilamiz.

Hosil bo'lgan tenglamani differensiallab, hamda yuqoridagidek ish ko'rsak, $\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x, y_1, \dots, y_n)$ tenglamani topamiz.

Bundan keyin ham xuddi yuqoridagidek davom etib, nihoyat, $\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ tenglamani hosil qilamiz.

Shunday qilib, ushbu sistemani hosil qildik:
$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} &= F_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Olingan $n-1$ ta tenglamadan $y_2, y_3, \dots, y_n$ ning $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$ hosilalar orqali ifodasini (

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \varphi_2(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ y_3 &= \varphi_3(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \\ y_n &= \varphi_n(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}) \end{aligned} \right\} \quad (2.4).$$

Bu ifodalarni (2.3) tenglamalarning eng oxirgisiga qo'yib, y_1 ni aniqlash uchun n -tartibli tenglama hosil qilamiz: $\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi(x, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)})$ (2.5).

Bu sistemani yechib, y_1 ni aniqlaymiz: $y_1 = \Psi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ (2.6).

(2.6) ifodani $n-1$ marta differentsiallab, $\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$ hosilalarni $x, C_1, C_2, \dots, C_n$ larning funksiyasi kabi aniqlaymiz.

Bu funksiyalarni (2.4) tenglamalarga qo'yib, $y_2, y_3, \dots, y_n$ larni aniqlaymiz:

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \Psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y_n &= \Psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Hosil qilingan yechimlar berilgan (2.2) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi bo'lishligi uchun (2.6) va (2.7) tenglamalardan $C_1, \dots, C_n$ o'zgarmas miqdorlarning mos qiymatlarini topishgina qoladi.

30-misol.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y + z \\ \frac{dz}{dx} = 2x - 4y - 3z \end{cases} \quad (*) \text{ sistemani } y(0)=1, z(0)=0 \quad (**) \text{ boshlang'ich shartlarda}$$

integrallansin.

Yechish.

1) Birinchi tenglamani x bo'yicha differentsiallaymiz: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$. Bunga $\frac{dy}{dx}$ va $\frac{dz}{dx}$ larning

(*) dagi qiymatlarini qo'yib: $\frac{d^2 y}{dx^2} = -3y + 3x - 2z + 1$ (a)

2) (*) sistemaning birinchi tenglamasidan: $z = \frac{dy}{dx} - y - x$ (b) ni topamiz. (b) ni (a) ga qo'ysak:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -3y - 2\left(\frac{dy}{dx} - y - x\right) + 3x + 1 \text{ yoki } \frac{d^2 y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1. \text{ Bu tenglamaning umumiy yechimi:}$$

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + 5x - 9 \quad (c) \text{ bo'ladi.}$$

$$(b) \text{ ga asosan: } z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-x} - 6x + 14 \quad (d)$$

O'zgarmas C_1 va C_2 miqdorlarni (**) boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan qilib tanlaymiz. Bu holda (c) va (d) tengliklardan:
$$\begin{cases} C_1 - 9 = 1 \\ C_2 - 2C_1 + 14 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 10 \\ C_2 = 6 \end{cases}$$

Shunday qilib, berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechim:

$$\begin{cases} y = (10 + 6x)e^{-x} + 5x - 9 \\ z = (-14 - 12x)e^{-x} - 6x + 14 \end{cases}$$

Mustahkamlash uchun savollar

- O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli chiziqli bo'lmagan tenglama deb nimaga aytiladi?
- $y'' + py' + qy = f(x)$ tenglamaning umumiy yechimi qanday topiladi?

3. $f(x)$ funksiyaning ko'rinishlari turlarini ayting?
4. Xususiy yechimlar qanday izlanadi?

Mustahkamlash uchun savollar

Mashqlar. Tenglamalar sistemasining umumiy yechimini toping.

$$1. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y \end{cases}$$

$$\text{Javob: } x(t) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ -(2c_1 + c_2) - 2c_2 t \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$2. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{5t} \\ y = -4c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{5t} \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{4t} \\ y = -c_1 e^{4t} - 3c_2 e^{4t} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x = \left(c_1 t + c_2 - \frac{c_1}{2} \right) e^{-t} \\ y = (c_1 t + c_2) e^{-t} \end{cases}$$

$$5. \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x + 3y,$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ y = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$

$$6. \frac{dx}{dt} = 2x - 5y, \quad \frac{dy}{dt} = 5x - 6y$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x = e^{-2t} (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) \\ y = \frac{1}{5} e^{-2t} [(4c_1 - 3c_2) \cos 3t + (3c_1 + 4c_2) \sin 3t] \end{cases}$$

$$7. \frac{dx}{dt} = x - 4y, \quad \frac{dy}{dt} = x - 3y$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x = (2c_1 t + 2c_2 + 1) e^{-t} \\ y = (c_1 t + c_2) e^{-t} \end{cases}$$

$$8. \frac{dx}{dt} = x + 3y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + 5y, \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1 \quad \text{Javob: } \begin{cases} x = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}; \quad x = 3e^{2t} \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}; \quad y = e^{2t} \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-t} \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{-t} \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$

$$\text{Javob: } \begin{cases} x = (C_1 + C_2 t) e^{2t} \\ y = -(C_1 + C_2 + C_2 t) e^{2t} \end{cases}$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Piskunov. N. S. Differensial va integral hisob, I- tom. T: O'qituvchi, 1972.-504 bet
2. Jo'rayev . T. va boshqalar. Oliy matematika asoslari. B. 2, T: O'zbekiston, 1999.-303 bet.
3. Sharipova, T. Yo'ldoshev .E. Matematik analizdan misol va masalalar yechish. T: O'qituvchi, 1996.-384 bet.
4. Shneyder V. Ye. va boshqalar. Oliy matematika qisqa kursi. Q. 1. T.O'qituvchi, 1985.-408 bet.
5. Abdalimov. B. Solixov. Sh. Oliy matematika qisqa kursi.- T O'qituvchi,. 1981.-296 bet.
6. Tojiyev. Sh. I. Oliy matematikadan masalalar yechish. -T. O'zbekiston, 2002. – 512 bet.
7. Hikmatov . F va boshqalar. Matematik analizdan mashqlar va masalalar to'plami.-T. O'qituvchi, 1987-316 bet.
8. Tereshin N. A.. Matematikadan masalalar to'plami.- T. O'qituvchi, 1976.-104 bet.
9. Sirojiddinov S.X., Maqsudov M., Salohiddinov M.S. Kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi.-T.: O'qtuvchi, 1979.
10. Maqsudov Sh. T. Analitik funksiyalar nazariyasidan mashqlar.-T.: O'qtuvchi, 1978.
11. Privalov I. I. Vvedenie v teoriyu funktsiy kompleksnogo peremennogo.-M.: Nayka, 1977.
12. Markushevich A.I. Kratkiy kurs teorii analiticheskix funktsiy.-M.: Fizmatgiz 1961.
13. Bugrov Ya. S. Nikolskiy S.M. Funktsii Kompleksnogo peremennogo.-M.: Nauka, 1981.
14. Anvarov R. va boshqalar. Kompleks o'zgaruvchining funksiyalari nazariyasi. Uslubiy ko'rsatma.-Jizzax:JizPI nashri, 2009.

M U N D A R I J A

Kirish.....	3
1-Mavzu. Boshlang'ich funktsiya. Aniqmas integral va uning xossalari.....	4
2-Mavzu. Aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish bo'laklab integrallash.....	7
3-4 Mavzu. Eng sodda ratsional kasrlar va ularni integrallash.....	11
5-Mavzu. Ayrim irratsional funktsiyalarni integrallash.....	16
6-7 Mavzu. Trigonometrik funktsiyalarni integrallash.....	18
8-Mavzu. Aniq integral va uning xossalari.....	21
9-10 Mavzu. Aniq integralni hisoblash.....	29
11-Mavzu. Xosmas integrallar.....	35
12-Mavzu. Aniq integralni taqribiy hisoblash.....	40
13-Mavzu. Aniq integralning ba'zi tadbiqlari.....	45
14-Mavzu. Egri chiziq yoiyining uzunligi.....	49
15-Mavzu. Aniq integralning mutaxassislikka oid masalalarni yechishga tadbiqi.....	56
16-Mavzu. Ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar haqida umumiy tushunchalar.....	61
17-Mavzu. Ikki o'zgaruvchili funktsiyaning xususiy hosilasi va to'la differentsiali.....	65
18-mavzu. Ikki karrali integrallar	75
19-Mavzu: Differensial tenglamalar. Umumiy tushunchalar.....	79
20-21-Mavzu: Birinchi tartibli chiziqli va Bernuli teglamasi. To'liq differensial tenglama.....	83
22-23-mavzu. Yuqori tartibli differensial tenglamalar.....	89
24-25-Mavzu. Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar.....	93
26-27-Mavzu. O'zgarmas koeffitsientli 2-tartibli bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar.....	96
28-Mavzu. Ikki noma'lumli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi. Oddiy differensial tenglamalar sistemasi.....	101
Foydalanilgan adabiyotlar.....	106

