ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛЬТЕТИ
МАТЕМАТИКА КАФЕДРАСИ

Саттаров Искандар Абу-алиевич

Р-АДИК ДИНАМИК СИСТЕМАЛАР

РЕФЕРАТ

Наманган-2012.

МУНДАРИЖА

КИРИШ

p – адик динамик системалар назарияси динамик системалар, назарий физика, сонлар назарияси, алгебраик геометрия ва ноархимед анализ чегараларида интенсив ривожланаётган янги йўналиш ҳисобланади.

Одатий динамик системаларни R – ҳақиқий сонлар майдони ва C – комплекс сонлар майдони устида ўрганилган. Бунда аввал динамик системалар чекли майдонларда ўрганилган ва бу изланишларда сонлар назариясидан кенг қўлланилган. p – адик динамика мавжуд динамикани худди p қолдиқнинг модул синфлари майдони F_p га табиий умумлашмаси сифатида кенгайтирилган.

Алгебраик геометрияда ҳақиқий ва комплекс сонлар майдони ҳал қилувчи ролни ўйнамайди. Барча геометрик структуралар худди шундай ноархимед майлонлар устида ҳам бажарилиши мумкин: яъни кучли учбурчак тенгсизлиги

$$|x + y| \le \max(|x|, |y|)$$

бажариладиган майдонлар учун. Q_p – p – адик сонлар майдони ҳам ноархимед бўлишини такидлаб ўтамиз. Шунинг учун алгебраик геометрия билан шуғулланаётганлар учун баъзи математик структураларни ноархимед ҳолатларига умумлаштиришга уринишини табиий ҳол сифатида кўриш мумкин. Баъзан бажарилаётган кенгайтиришлар алгебраик геометрия майдони структураларидан чиқиб кетиши ҳам мумкин. Масалан, K ноархимед майдонидаги динамика. Бу (алгебраик геометрик) динамик оқим М.Герман ва J.C.Yoccoz [3] ноархимед майдонларда кичик бўлувчилар масаласига бағишланган мақоласидан бошланди. Бу ноархимед динамикаларга бағишланган биринчи мақола бўлган эди.

Назарий физикада p – адик динамик системаларга қизиқиш торлар назариясида p – адик моделлар назарияси, p – адик квант механикаси ва майдонли назария (В.С.Владимиров, И.В.Волович, А.Ю.Хренников) ларнинг ривожланиши билан боғлиқ ([1], [3]).

Яна айтиб ўтишимиз жоизки динамик системаларнинг ноархимед назарияси бу ноархимед анализдаги $f : K \to K$ акслантиришни тадбиқидаги энг табиий майдондир.

1997 йилда А.Ю.Хренников [3] англаш жараёнларини моделлаштиришда p – адик динамик системаларни тадбиқ қилишни таклиф қилди. p – адик сонларни когнивистикага тадбиқида Q_p да алгебраик структуранинг борлиги эмас, балки унинг дарахт сифат иерархик структураси асосий ролни ўйнайди. p – адик дарахтнинг бу структураси ақлий маълумотларни иерархик кодлаштиришда фойдаланилади. Бу ерда p – параметр англаш сиситемаларининг кодловчи системаларини характерлайди. Шунинг учун бундай p – адик англаш моделларида p – туб сон танланиши унчалик ҳам табиий эмас. Биз ихтиёрий $p > 1$ натурал учун ҳам Q_p p – адик сонлар ҳалқасидаги динамик системаларни тадбиқ қилишимиз ҳам мумкин. Бу ҳақда [5] да тўлароқ маълумотга эга бўлишингиз мумкин. Шуни таъкидлаб ўтамизки, p – адик динамик системалар асосан C_p ни ўзини-ўзига ўтказадиган содда (масалан $x^n, \frac{x+a}{bx+c}, \frac{ax^2}{bx+1}$) функциялар учун ўрганилган. Булардан мураккаброқ функциялар учун p – адик динамик системалар ўрганилмаган.

Ушбу ишда хозиргача ўрганилган p – адик динамик системалар рефератив таҳлил қилинади ва янги $f(x)=\dfrac{x+a+xA(x)}{bx+c+A(x)}$ кўринишидаги функция билан қурилган $p-$ адик динамик системанинг қўзғалмас нуқталари ва траекториялари ўрганилди.

I боб. p – адик сонлар ва p – адик анализ.

1.1. Ултраметрик фазолар. Ноархимед майдонлар.

X -бўш бўлмаган тўплам бўлсин. X нинг элементларидан тузилган барча (x, y) тартибланган жуфтликлар тўпламида аниқланган $\rho(x, y)$ функция, агар қуйидаги шартларни қаноатлантирса,

1) $\rho(x, y) \geq 0$ ва $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\forall x, y \in X$

3) $\forall z \in X$ учун $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, (учбурчак тенгсизлиги),

у ҳолда $\rho(x, y)$ фукцияни X тўпламдаги метрика дейилади ва (X, ρ) жуфт-ликка метрик фазо дейилади. Агар 3) шарт ўрнига учбурчак тенгсизлигига нисбатан кучли бўлган

$$\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\} \text{ (кучли учбурчак тенгсизлиги)} \qquad (1.1)$$

шарт қўйилса, у ҳолда $\rho(x, y)$ фукцияни X тўпламдаги ултраметрика дейилади ва (X, ρ) жуфтликка ултраметрик фазо дейилади.

Теорема 1.1. *Ултраметрик фазоларда ихтиёрий учбурчак тенг ёнлидир. Яъни, X ултраметрик фазо бўлиб $a, b, c \in X$ ва $\rho(a, b) \neq \rho(b, c)$ бўлса, у ҳолда $\rho(a, c) = \max\{\rho(a, b), \rho(b, c)\}$ бўлади.*

Исбот. Умумийликка зиён етказмаган ҳолда $\rho(a, b) < \rho(b, c)$ деб фараз қиламиз. У ҳолда қуйидагиларга эга бўламиз

$$\rho(a, c) \leq \max\{\rho(a, b), \rho(b, c)\} = \rho(b, c)$$

ва

чунки $\rho(a, b) < \rho(b, c)$. $\rho(b, c) \leq \max\{\rho(a, b), \rho(a, c)\} = \rho(a, c)$

Булардан $\rho(a, c) = \max\{\rho(a, b), \rho(b, c)\}$.

Теорема исботланди.

Таъриф 1.2. *(X, ρ) метрик фазо, $a \in X$ ва $r \in R^+$ бўлсин. У ҳолда $U_r(a) = \{x \in X : \rho(a, x) < r\}$ тўплам маркази a нуқтада ва радиуси r га тенг очиқ шар,*

$V_r(a) = \{x \in X : \rho(a, x) \leq r\}$ тўплам маркази a нуқтада ва радиуси r га тенг ёпиқ шар,

$S_r(a) = \{x \in X : \rho(a, x) = r\}$ тўплам эса маркази a нуқтада ва радиуси r га тенг сфера дейилади.

Теорема 1.3. *Агар (X, ρ) ултраметрик фазо бўлса, у ҳолда $V_r(a)$ шарнинг ихтиёрий нуқтаси марказ бўлади.*

Исбот. $b \in V_r(a)$ бўлсин. Теоремани исботлаш учун $V_r(b) = V_r(a)$ эканини кўрсатиш етарли. $x \in V_r(b)$ бўлсин. У ҳолда $\rho(x, a) \leq \max\{\rho(x, b), \rho(b, a)\} \leq r$. Бундан $V_r(b) \subseteq V_r(a)$. Худди шу каби $V_r(a) \subseteq V_r(b)$. Демак $V_r(b) = V_r(a)$. Теорема исботланди.

Теорема 1.4. *$a, b \in X$ ва $r, s \in R^+$, $(0 < s \leq r)$ бўлсин. У ҳолда $V_r(a)$ ва $V_s(b)$ шарлар ёки кесишмайди ёки $V_s(b) \subseteq V_r(a)$ бўлади.*

Исбот. $V_r(a)\cap V_s(b)\neq\varnothing$ бўлсин. У ҳолда $c\in V_r(a)\cap V_s(b)$ учун $V_r(c)=V_r(a)$ ва $V_s(c)=V_s(b)$ ҳамда $V_s(c)\subseteq V_r(c)$ бўлади. Булардан $V_s(b)\subseteq V_r(a)$. Теорема исботланди.

Таъриф 1.5. *F - майдон бўлсин. $\|\cdot\|:F\to R$ функция норма дейилади, агар қуйидаги шартларни қаноатлантирса,*

1) $\|x\|\geq 0,\forall x\in F$

2) $\|x\|=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$

3) $\|xy\|=\|x\|\|y\| \quad \forall x,y\in F$

4) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \quad \forall x,y\in F$.

Агар $\|\cdot\|$ норма кучли учбурчак тенгсизлигини қаноатлантирса, яъни

$$4')\ \|x+y\|\leq\max\{\|x\|,\|y\|\} \quad \forall x,y\in F \tag{1.2}$$

бўлса, у ҳолда $\|\cdot\|$ норма ноархимед нормаси дейилади.

Мисол. Тривиал норма ноархимед нормаси бўлади.

Бу ерда тривиал норма $\|x\|=\begin{cases}1, & агар \quad x\neq 0 \ \ бўлса\ ,\\ 0, & агар \quad x=0 \ \ бўлса\ ,\end{cases}$.

Теорема 1.6. *F - майдон ва $\|\cdot\|$ F даги ноархимед нормаси бўлсин. Агар $x,y\in F$ лар учун $\|x\|\neq\|y\|$ бўлса, у ҳолда $\|x+y\|=\max\{\|x\|,\|y\|\}$ бўлади.*

Исбот. Умумийликка зиён етказмаган ҳолда $\|x\|>\|y\|$ деб оламиз. Кучли учбурчак тенгсизлигига кўра,

$$\|x\|=\|(x+y)-y\|\leq\max\{\|x+y\|,\|y\|\}$$

$\|x\|>\|y\|$ эканлигидан $\max\{\|x+y\|,\|y\|\}=\|x+y\|$ ва демак $\|x\|\leq\|x+y\|$.
Ҳамда $\|x+y\|\leq\max\{\|x\|,\|y\|\}=\|x\|$. Булардан $\|x\|=\|x+y\|$. Теорема исботланди.

Ихтиёрий F майдонда $\|\cdot\|$ норма аниқланган бўлса $\rho(x,y)=\|x-y\|$ каби метрика киритиш мумкин ва бу метрикани шу нормага мос метрика деб атаймиз.

Барча (X,ρ) метрик фазоларда Коши кетма-кетликларини таърифлаш мумкин.

Таъриф 1.7. $\{x_j\},\ x_j\in X,\ \ j=1,2,3,...$ *– кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $\forall\varepsilon>0$ сон учун шундай $N(\varepsilon)$ номер топилсаки, барча $n,m>N(\varepsilon)$ лар учун $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда $\{x_j\}$ кетма-кетлик Коши кетма-кетлиги дейилади*

F майдонда аниқланган $\{a_i\}$ ва $\{b_i\}$ Коши кетма-кетликлари эквивалент дейилади, агар $i\to\infty$ да $\|a_i-b_i\|\to 0$ бўлса.

F майдонда аниқланган эквивалент Коши кетма-кетликлари синфлари тўплами F майдонни $\|\cdot\|$ норма бўйича тўлдирмаси дейилади.

Мисол. Q рационал сонлар майдонини $|\cdot|$ абсолют қиймат бўйича тўлдирмаси R хақиқий сонлар майдонини беради.

F майдонда аниқланган $\|\cdot\|_1$ ва $\|\cdot\|_2$ нормаларга мос Коши кетма-кетликлари устма-уст тушса, $\|\cdot\|_1$ ва $\|\cdot\|_2$ нормалар эквивалент дейилади.

1.2. p **– адик сонлар майдони.**

Бизга бирор P туб сон ва Q рационал сонлар майдони берилган бўлсин. n ва m бутун сонларнинг энг катта умумий бўлувчисини (n, m) билан белгилайлик. Арифметиканинг фундаментал теоремасига кўра $\forall x \in Q \setminus \{0\}$ сонни

$$x = p^{\gamma(x)}\frac{m}{n}, \qquad n \in N, \qquad \gamma = \gamma(x), m \in Z, \qquad (m, p) = (n, p) = 1 \qquad (1.3)$$

кўринишда ягона усулда ёзиш мумкин. Қуйидагича функцияни қараймиз

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma(x)}, & \text{агар} \quad x \neq 0 \quad \text{бўлса} \\ 0, & \text{агар} \quad x = 0 \quad \text{бўлса} \end{cases} \qquad (1.4)$$

Теорема 1.2.1. *$|\cdot|_p$ функция Q майдонда ноархимед нормаси бўлади.*

Исбот. Қуйидаги шартларни текширамиз

1) $|x|_p \geq 0 \ \ \forall x \in Q$ *ва* $|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

2) $|xy|_p = |x|_p |y|_p, \ \forall x, y \in Q$.

3) $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}, \ \ \forall x, y \in Q$

1) ва 2) шартларни бажарилишини текшириш қийин эмас. 3) шартни текширамиз. $\forall x, y \in Q$ сонларни (3) каби $x = p^{\gamma(x)}\frac{m_1}{n_1}$, $y = p^{\gamma(y)}\frac{m_2}{n_2}$ кўринишда ёзиш мумкин. $\min\{\gamma(x), \gamma(y)\} = \gamma(x)$ бўлсин.

У ҳолда

$$x + y = p^{\gamma(x)}\frac{m_1}{n_1} + p^{\gamma(y)}\frac{m_2}{n_2} = p^{\gamma(x)}\frac{m_1 n_2 + m_2 n_1 p^{\gamma(y)-\gamma(x)}}{n_1 n_2}.$$

$n_1 n_2$ сон p га бўлинмайди, $m_1 n_2 + m_2 n_1 p^{\gamma(y)-\gamma(x)}$ эса p га бўлиниши мумкин. Шунинг учун $\gamma(x+y) \geq \gamma(x) = \min\{\gamma(x), \gamma(y)\}$ ва бундан

$$|x + y|_p = p^{-\gamma(x+y)} \leq \max\{p^{-\gamma(x)}, p^{-\gamma(y)}\} = \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

тенгсизлик келиб чиқади. Теорема исботланди.

Натижа 1.2.2. *Агар $|x|_p \neq |y|_p$ бўлса, у ҳолда $|x + y|_p = \max\{|x|_p, |y|_p\}$ бўлади.*

Натижа 1.2.3. *$p = 2$ бўлган ҳолда, $|x|_2 = |y|_2$ бўлса, $|x + y|_2 \leq \frac{1}{2}|x|_2$ бўлади.*

Таъриф 1.2.4. *Q майдондаги $|\cdot|_p$ норма p – адик норма дейилади.*

Бизга маълумки Q рационал сонлар майдонини абсолют қиймат $|\cdot|$ бўйича тўлдирмаси R хақиқий сонлар майдонини беради. Худди шу каби Q рационал сонлар майдонини $|\cdot|_p$ p – адик норма бўйича тўлдирмаси Q_p p – адик сонлар майдонини беради. Табиий савол туғилади: Рационал сонлар майдонидан хосил қилиниши мумкин бўлган барча сонлар майдонини топиш мумкинми? Бошқача қилиб айтганда рационал сонлар майдонида ўзаро эквивалент бўлмаган қанча норма мавжуд? Бу саволларга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема 1.2.5.(Островский) [2] Q майдон устидаги ихтиёрий нотривиал норма, бирор p – туб сон учун p – адик нормага ёки абсолют қийматга эквивалент бўлади.

Маълумки, $\forall y \in R \setminus \{0\}$ ҳақиқий сонни қуйидагича каноник ёйилма билан ягона усулда ифодалаш мумкин

$$y = p^{\gamma(y)}\left(y_0 + y_1 p^{-1} + y_2 p^{-2} + \dots\right),$$

бу ерда $y_j, \gamma(y) \in Z$, $0 \le y_j \le p-1$, $y_0 > 0$, $(j = 0,1,2,\dots)$.

Худди шунга ўхшаш, $\forall x \in Q_p \setminus \{0\}$ p – адик сонни ҳам

$$x = p^{\gamma(x)}\left(x_0 + x_1 p^1 + x_2 p^2 + \dots\right), \tag{1.5}$$

бу ерда $x_j, \gamma(x) \in Z$, $0 \le x_j \le p-1$, $x_0 > 0$, $(j = 0,1,2,\dots)$.

кўринишдаги каноник ёйилма билан ягона усулда ифодалаш мумкин.

Лемма 1.2.6. *$x \in Q_p$ сон рационал сон бўлиши учун унинг (1.5) кўринишидаги ёйилмасида x_j, $j = 0,1,2,\dots$ сонлар бирор номердан бошлаб даврий бўлиши зарур ва етарли.*

Мисол. $-1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots$.

1.3. p – адик комплекс сонлар майдони.

Q_p нинг алгебраик кенгайтмаси.

Таъриф 1.3.1. *F майдон бўлсин. Агар ихтиёрий $F[x]$ кўпҳаднинг барча ноллари F майдонга тегишли бўлса, у ҳолда F - алгебраик ёпиқ дейилади, агар F майдон бирор K майдоннинг кенгайтмаси бўлиб, алгебраик ёпиқ бўлса, у ҳолда F майдон K нинг алгебраик ёпилмаси дейилади ва $F = \overline{K}$ каби белгиланади.*

R ҳақиқий сонлар майдони алгебраик ёпиқ эмас. Яъни, $x^2 + 1 = 0$ тенглама R да ечимга эга эмас. Ва i, $(i^2 = -1)$ сон бўйича R ҳақиқий сонлар майдонини кенгайтмаси C комплекс сонлар майдонини ҳосил қилади. Бу жараён Q_p p – адик сонлар майдонида унчалик осон эмас. Q_p ни, барча $Q_p[x]$ кўпҳадларнинг Q_p га тегишли бўлмаган ноллари бўйича кенгайтмасини $Q_p(x)$ деб белгилайлик.

Теорема 1.3.2. $[2]$. *$Q_p(x)$ майдон тўла эмас.*

$Q_p(x)$ майдонни p – адик норма бўйича тўлдирмаси C_p p – адик комплекс сонлар майдонини ҳосил қилади.

Теорема 1.3.3. *(Краснер) C_p p – адик комплекс сонлар майдони алгебраик ёпиқ*

.

C_p ҳақида қуйидаги ҳоссаларни келтиришимиз мумкин$[2]$:

1^0. $\forall x \in C_p$ учун $\exists r \in Q$ мавжудки, $|x|_p = p^r$ бўлади.

2^0. C_p майдон - локал компакт тўплам эмас.

1.4. p **– адик анализ. Аналитик функция.**

C_p p – адик комплекс сонлар майдони берилган бўлсин. $\{x_j\} \subset C_p$, $j = 1,2,3...$ кетма-кетлик $x \in C_p$ нуқта берилган бўлиб, $\lim\limits_{j \to \infty} |x_j - x|_p = 0$ бўлса, $\{x_j\}$ кетма-кетлик x нуқтага яқинлашади дейилади.

Таъриф 1.4.1. *$D \subset C_p$ очиқ тўплам ва $x \in D$ бўлсин. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\exists \delta > 0$ сон топилсаки, $|y - x|_p < \delta$ бўладиган $\forall y \in D$ учун $|f(y) - f(x)|_p < \varepsilon$ бўлса, у ҳолда $f : D \to C_p$ функция $x \in D$ нуқтада узлуксиз дейилади*

Таъриф 1.4.2. *$D \subset C_p$ очиқ тўплам ва $f : D \to C_p$ функция берилган бўлсин. f функция $x \in D$ нуқтада ҳосилага эга дейилади, агар қуйидаги лимит мавжуд бўлса:* $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Агар $f'(x)$, D нинг барча нуқтасида мавжуд бўлса , у ҳолда f функция D да ҳосилага эга дейилади.

Теорема 1.4.3. $[3]$ *Элементлари C_p дан олинган $\{a_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлиши учун $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n|_p = 0$ бўлиши зарур ва етарли.*

$f : C_p \to C_p$ функцияни аниқловчи қуйидагича p – адик даражали қаторни қараймиз

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad f_n \in C_p \tag{1.6}$$

Таъриф 1.4.4. *Агар (1.6) қатор $|x|_p \le R$ да яқинлашувчи ва $|x|_p > R$ да узоқлашувчи бўладиган $R = R(f)$ сон мавжуд бўлса, у ҳолда бу сон (1.6) қаторнинг яқинлашиш радиуси дейилади*

Ва у қуйидаги формула билан аниқланади:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |f_n|_p^{1/n}} \tag{1.7}$$

Таъриф 1.4.5. *$U_r(a) \subset C_p$ бўлсин. Агар $f : U_r(a) \to C_p$ функцияни*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (x-a)^n, \quad f_n \in C_p \tag{1.8}$$

кўринишдаги қаторга ёйиш мумкин бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $U_r(a)$ очиқ шарда аналитик функция дейилади.

II боб. p – адик динамик системалар.

$D \subset C_p$ ва $f : D \to C_p$ аналитик функция берилган бўлсин. (f, D) динамик системани ўрганиш бу- $\forall x_0 \in D$ нуқта учун $x_n = f^n(x_0)$, $n = 1,2,3,...$ кетма-кетлик лимитини ўрганишдир. Бу ерда $f^n(x_0) = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n \ ma}(x_0)$.

2.1. Қўзғалмас нуқта ва унинг характери.

Ишда қуйидаги асосий тушунчалардан фойдаланамиз.

Таъриф 2.1.1. *Агар $x_0 \in D$ нуқта учун $f(x_0) = x_0$ бўлса, у ҳолда x_0 нуқта (f, D) динамик системанинг қўзғалмас нуқтаси дейилади.*

Таъриф 2.1.2. *x_0 қўзғалмас нуқта бўлсин. Агар унинг шундай $U_r(x_0)$ атрофи топилиб, $\forall x \in U_r(x_0)$ учун $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$ тенглик бажарилса, у ҳолда x_0 нуқта тортувчи нуқта дейила.ва*

$$\mathrm{A}(x_0) = \left\{ x \in D : \lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0 \right\}$$

тўпламни эса, x_0 нуқтанинг тортишиш тўплами ёки аттрактори дейилади.

Таъриф 2.1.3. *Агар x_0 қўзғалмас нуқта бўлиб, унинг шундай $U_r(x_0)$ атрофи топилсаки, $\forall x \in U_r(x_0)$ нуқта учун $|x - x_0|_p < |f(x) - x_0|_p$ ўринли бўлса, у ҳолда x_0 нуқта итарувчи дейилади.*

Таъриф 2.1.4. *$x_0 \in D$, $f(x)$ функциянинг қўзғалмас нуқтаси бўлсин. Агар D да ётувчи $U_r(x_0)$ шар мавжуд бўлиб, $\forall \rho < r$ учун $S_\rho(x_0)$ сфера $f(x)$ функция учун инвариант бўлса, у ҳолда $U_r(x_0)$ шар - Зигел диски дейилади ва x_0 нуқта Зигел дискни маркази дейилади.*

D даги барча Зигел дисклари ва x_0 нуқта биргаликда максимал Зигел диски дейилади ва $SI(x_0)$ каби белгиланади.

Теорема 2.1.5. *x_0 нуқта, $f(x)$ функциянинг қўзғалмас нуқтаси бўлсин. Агар $|f'(x_0)|_p < 1$ бўлса, x_0 нуқта тортувчи; $|f'(x_0)|_p = 1$ бўлса, x_0 нуқта беътараф ва $|f'(x_0)|_p > 1$ бўлса, x_0 нуқта итарувчи булади.*

Теорема 2.1.6. *$x_0 \in D$, $f(x)$ аналитик функциянинг қўзғалмас нуқтаси бўлсин. У ҳолда:*

1^0. Агар x_0, $f(x)$ функция учун тортувчи нуқта бўлса ва $r > 0$ сон қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирса

$$q = \max_{1\le n<\infty} \left| \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \right|_p r^{n-1} < 1 \qquad (2.1)$$

ҳамда $U_r(x_0) \subset D$ бўлса, у ҳолда $U_r(x_0) \subset \mathrm{A}(x_0)$ бўлади.

2^0. Агар x_0, $f(x)$ функция учун беътараф нуқта бўлса, у холда у Зигел дискни маркази бўлади. $r > 0$ сон қуйидаги тенгсизликни қаноатлантирса

$$s = \max_{2\le n<\infty} \left| \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \right|_p r^{n-1} < |f'(x_0)|_p \qquad (2.2)$$

ва $U_r(x_0) \subset D$ *бўлса, у ҳолда* $U_r(x_0) \subset SI(x_0)$ *бўлади.*

3^0. *Агар* x_0, $f(x)$ *функция учун итарувчи нуқта бўлса, у ҳолда у* (f, D) *динамик система учун итарилиш нуқтаси бўлади.*

Теорема 2.1.7. [1](тескари функция хақидаги теорема)

$f(x)$ *функция* $V_r(x_0)$ *шарда аналитик ва‘* $f'(x_0) \neq 0$, $\left|f'(x_0)\right|_p = p^n$ *бўлсин. У ҳолда шундай* $V_\rho(x_0)$, $\rho \leq r$ *шар топиладики, уни* f *функция* $V_{\rho+n}(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ *шарга ўзаро бир қийматли акслантиради,* $g(y)$ *тескари функция эса* $V_{\rho+n}(y_0)$ *шарда аналитик бўлади ва қуйидаги тенгликларни қаноатлантиради:*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}; \qquad \left|g(y) - x_0\right|_p = \left|g'(y_0)\right|_p \left|y - y_0\right|_p, \; y \in V_{\rho+n}. \tag{2.3}$$

2.2. p – адик каср рационал функциянинг динамикаси.

$D \subset C_p$ ва $f : D \to C_p$ функция қуйидаги кўринишда

$$f(x) = \frac{x + a + xA(x)}{bx + c + A(x)}, \qquad b \neq 0, \qquad a, b, c \in C_p \tag{2.4}$$

берилган бўлсин. Бу ерда $A(x)$ ихтиёрий функция ҳамда $A(x) \neq -bx - c$.
Бизга (2.4) функциянинг динамикасини ўрганиш масаласи қўйилган бўлсин.

$$f(x) = x \text{ тенгламани ечиб, } x_{1,2} = \frac{1 - c \pm \sqrt{(c-1)^2 + 4ab}}{2b} \tag{2.5}$$

кўринишдаги қўзғалмас нуқталарга эга бўламиз.

$A(x)$ функция D да ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда

$$f'(x) = \frac{c - ab + (1 + c)A(x) + \left(bx^2 + (c-1)x - a\right)A'(x) + A^2(x)}{(bx + c + A(x))^2}$$

ва (2.5) дан

$$f'(x_j) = \frac{c - ab + (1 + c)A'(x_j) + A^2(x_j)}{\left(bx_j + c + A(x_j)\right)^2}, \qquad j = 1.2. \tag{2.6}$$

Қуйидагича белгилашлар киритамиз:

$$t^2 = \frac{(c-1)^2 + 4ab}{4},$$

$$\theta_1 = 2A(x_2) + 1 + c + t,$$

$$\theta_2 = 2A^2(x_2) + 2tA(x_2) + 4ab - 4c - t,$$

$$\theta_3 = (1 + c - t)A^2(x_2) - (2ab - 2c - t)A(x_2),$$

Теорема 2.2.1. *Агар* x_1 *ва* x_2 *қўзғалмас нуқталар учун* $A(x_1) = \varphi(A(x_2))$ *ва* $A(x_1) = \psi(A(x_2))$ *шартлар бажарилса, у ҳолда*

1. x_1 *нуқта (*x_2 *нуқта) тортувчи бўлса,* x_2 *нуқта (*x_1 *нуқта) итарувчи бўлади.*

2. x_1 *нуқта беътараф бўлса,* x_2 *нуқта ҳам беътараф бўлади.*

Бу ерда $\varphi(A(x_2)) = \dfrac{\theta_2 + \sqrt{\theta_2^2 + 4\theta_1\theta_3}}{2\theta_1}$, $\psi(A(x_2)) = \dfrac{\theta_2 - \sqrt{\theta_2^2 + 4\theta_1\theta_3}}{2\theta_1}$

Исбот. Теорема шартлари бажарилганда

$$f'(x_1)f'(x_2) = 1 \qquad (2.7)$$

Тенглик тўғрилигини кўрсатиш теоремани исботлаш учун етарли.

Теорема шартидан қуйидаги тенглик ўринли

$$\theta_1 A^2(x_1) - \theta_2 A(x_1) - \theta_3 = 0 \qquad (2.8)$$

(2.8) тенгликда содда алгебраик алмаштиришлар бажариб (2.7) тенгликка тенгкучли бўлган қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$[c - ab + (1+c)A(x_1) + A^2(x_1)][(1 + c - 2t) + 2A(x_2)]^2 =$$
$$= [c - ab + (1+c)A(x_2) + A^2(x_2)][(1 + c + 2t) + 2A(x_1)]^2$$

Бу эса теоремани исботлайди.

Энди $A(x) = x$ бўлган ҳолни кўрамиз. Бу ҳолда

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{bx + c}, \quad b \neq 0, \; a, b, c \in C_p \qquad (2.9)$$

бўлади. $f(x)$ функциянинг қўзғалмас нуқталарини топамиз.

1-ҳол. $b = 1$, $c \neq 1$ бўлса, $x_0 = \dfrac{a}{c-1}$;

2-ҳол. $b \neq 1$, $c \neq 1$ бўлса, $x_{1,2} = \dfrac{1 - c \pm \sqrt{(c-1)^2 + 4a(b-1)}}{2(b-1)}$;

3-ҳол. $b = 1$, $c = 1$, $a \neq 0$ бўлса қўзғалмас нуқта мавжуд эмас.

1-ҳолни ўрганамиз. Бу ҳолда (2.9) функция қуйидаги кўринишга келади:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x + c}. \qquad (2.10)$$

Бу ерда $x \neq \tilde{x} = -c$.

$\Pi = \{x \in C_p : \exists n \in N, \; f^n(x) = \tilde{x}\}$ тўпламни қараймиз. Π тўплам қайсидир қадамда $\tilde{x}$ га тушиб қоладиган нуқталар тўплами. $(f, C_p \setminus \Pi)$ – динамик системани ўрганамиз. (2.10) дан ҳосила олиб

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2cx + c - a}{(x+c)^2},$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \frac{c^2 - c + a}{(x+c)^{n+1}}$$

тенгликларга эга бўламиз. Бундан $x_0 = \dfrac{a}{c-1}$ нуқтада

$$f'(x_0) = \frac{x_0^2 + 2cx_0 + c - a}{(x_0 + c)^2} = \frac{a + c - 1}{c^2 - c + a} \qquad (2.11)$$

бўлади.

1) $\left|f'(x_0)\right|_p = 1$ бўлсин. У ҳолда теорема 2.1.5 га кўра x_0 бетараф қўзғалмас нуқта бўлади ва теорема 2.1.6 га кўра x_0 нуқта Зигел дискининг маркази бўлади.
Қуйидагича белгилаш киритамиз:

$$\left|x_0 + c\right|_p = \delta \tag{2.12}$$

Теорема 2.2.2. *Агар* $\left|f'(x_0)\right|_p = 1$ *бўлса, у ҳолда* $SI(x_0) = C_p \setminus \Pi$ *бўлади.*

Исбот. Ихтиёрий $r > 0,\ r \in R$ сон учун

$$f(S_r(x_0)) \subset S_r(x_0) \tag{2.13}$$

эканлигини кўрсатсак теорема исботланади.
$y \in S_r(x_0)$ бўлсин, яъни $y = x_0 + \gamma,\ |\gamma|_p = r$. У ҳолда (2.10) га кўра

$$\left|f(y) - x_0\right|_p = \left|\frac{\gamma\left(x_0^2 + 2cx_0 + c - a\right) + \gamma^2(x_0 + c)}{(x_0 + c)^2 + \gamma(x_0 + c)}\right|_p = \frac{r\left|f'(x_0) + \dfrac{\gamma}{x_0 + c}\right|_p}{\left|1 + \dfrac{\gamma}{x_0 + c}\right|_p} \tag{2.14}$$

Бу тенгликдан, теорема шарти ва кучли учбурчак тенгсизлигидан $r < \delta$ ва $r > \delta$ бўлганда қуйидаги тенгликни оламиз:

$$\left|f(y) - x_0\right|_p = r\,.$$

Бундан эса $f(y) \in S_r(x_0)$. y нинг ихтиёрийлигидан эса $f(S_r(x_0)) \subset S_r(x_0)$.
Энди $r = \delta$ бўлганда $f(S_r(x_0)) \subset S_r(x_0)$ эканлигини кўрсатиш қолди. Бунинг учун теорема 2.1.7 дан фойдаланамиз.
Теорема исботланди.
2) $\left|f'(x_0)\right|_p < 1$ бўлсин, яъни

$$\left|\frac{a + c - 1}{c^2 - c + a}\right|_p < 1 \tag{2.15}$$

Теорема 2.2.3. $\left|f'(x_0)\right|_p < 1$ *бўлсин. У ҳолда ихтиёрий* $\mu > \delta$ *сон учун* $f\left(S_\mu(x_0)\right) \subset S_\mu(x_0)$ *бўлади.*

Исбот. $\mu > \delta$ да ихтиёрий $y \in S_\mu(x_0)$ ни қуйидагича ёзиш мумкин:
$y = x_0 + \gamma,\ |\gamma|_p = \mu$. У ҳолда (2.14) тенгликдан

$$\left|f(y) - x_0\right|_p = \frac{\mu\left|f'(x_0) + \dfrac{\gamma}{x_0 + c}\right|_p}{\left|1 + \dfrac{\gamma}{x_0 + c}\right|_p}. \tag{2.16}$$

Энди теорема шартига кўра

$$\left|f'(x_0)\right|_p < 1\ ,\ \left|\frac{\gamma}{x_0 + c}\right|_p = \frac{|\gamma|_p}{\left|x_0 + c\right|_p} = \frac{\mu}{\delta} > 1$$

бўлади. Кучли учбурчак тенгсизлигидан эса $\left|f(y)-x_0\right|_p=\mu$. Бундан эса $f(y)\in S_\mu(x_0)$. y нинг ихтиёрийлигидан эса $f\left(S_\mu(x_0)\right)\subset S_\mu(x_0)$. Теорема исботланди.

Теорема 2.2.4. . $\left|f'(x_0)\right|_p<1$ *бўлсин. У ҳолда* $U_\delta(x_0)\subset A(x_0)$ *бўлади.*

Исбот. Теорема 2.1.6 га кўра, агар (2.15) шарт бажарилса ва $r>0$ ҳақиқий сон қуйидаги

$$q=\max_{1\le n<\infty}\left|\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\right|_p r^{n-1}<1 \tag{2.17}$$

тенгсизликни қаноатлантирса, ҳамда $V_r(x_0)\subset C_p$ бўлса, у ҳолда $V_r(x_0)\subset A(x_0)$ бўлади. Демак,

$$q=\max_{1\le n<\infty}\left|\frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)\right|_p r^{n-1}=\max_{1\le n<\infty}\left|\frac{c^2-c+a}{(x_0+c)^{n+1}}\right|_p r^{n-1}=$$

$$=\max_{1\le n<\infty}\left|\frac{c^2-c+a}{(x_0+c)^2}\right|_p\left|\frac{1}{(x_0+c)^{n-1}}\right|_p r^{n-1}=\max_{1\le n<\infty}\left|\frac{(c-1)^2}{c^2-c+a}\right|_p\left|\frac{1}{x_0+c}\right|_p^{n-1} r^{n-1}=$$

$$=\max_{1\le n<\infty}\left|\frac{c^2-c+a-a-c+1}{c^2-c+a}\right|_p\frac{r^{n-1}}{\left|x_0+c\right|_p^{n-1}}=$$

$$=\max_{1\le n<\infty}\left|1-f'(x_0)\right|_p\frac{r^{n-1}}{\left|x_0+c\right|_p^{n-1}}\le\max_{1\le n<\infty}\left|\frac{r}{x_0+c}\right|_p^{n-1}.$$

Агар $r<\delta=\left|x_0+c\right|_p$ бўлса, у ҳолда (2.17) тенглик бажарилади.

Демак, $U_\delta(x_0)\subset A(x_0)$. Теорема исботланди.

Лемма 2.2.5. $\Pi\subset S_\delta(x_0)$.

Исбот. $\tilde{x}\in\Pi$ нуқта $S_\delta(x_0)$ сферада ётади, яъни $\tilde{x}=-c$, $\left|-c-x_0\right|_p=\left|x_0+c\right|_p=\delta$. У ҳолда теорема 2.2.3. ва теорема 2.2.4 ларга кўра $\Pi\subset S_\delta(x_0)$. Лемма исботланди.

Энди $x\in S_\delta(x_0)\setminus\Pi$ бўлсин.

Теорема 2.2.6. $\left|f'(x_0)\right|_p<1$ *ва* $x\in S_\delta(x_0)\setminus\Pi$ *бўлсин. У ҳолда*

$$f^k(x)\in S_{\mu_k}(x_0),\ \ k\in N,\ \ \mu_k>\delta.$$

Исбот. Теорема шартига кўра $x\in S_\delta(x_0)\setminus\Pi$, у ҳолда $\left|x-x_0\right|_p=\delta$. Бундан $x=x_0+\xi$, $\left|\xi\right|_p=\delta$ дейиш мумкин. (2.14)га кўра

$$\left|f(x)-x_0\right|_p=\frac{|\xi|_p\left|f'(x_0)+\dfrac{\xi}{x_0+c}\right|_p}{\left|1+\dfrac{\xi}{x_0+c}\right|_p}\geq\delta.$$

Агар $\left|f(x)-x_0\right|_p>\delta$ бўлса, у ҳолда шундай $\mu_1>\delta$ мавжудки, у учун $f(x)\in S_{\mu_1}(x_0)$ бўлади. Бу ҳол теорема 2.2.3 да исботланган.

Агар $\left|f(x)-x_0\right|_p=\delta$ бўлса,у ҳолда

$$\left|f^2(x)-x_0\right|_p=\frac{\left|f(x)-x_0\right|_p\left|f'(x_0)+\dfrac{f(x)-x_0}{x_0+c}\right|_p}{\left|1+\dfrac{f(x)-x_0}{x_0+c}\right|_p}=\frac{\delta^2}{\left|f(x)+c\right|_p}.$$

Бунда $f(x)\in S_\delta(x_0)$ эканлигидан $f(x)=x_0+\xi'$, $\left|\xi'\right|_p=\delta$. У ҳолда

$\left|f^2(x)-x_0\right|_p=\dfrac{\delta^2}{\left|f(x)+c\right|_p}=\dfrac{\delta^2}{\left|\xi'+(x_0+c)\right|_p}.$ бўлади. Кучли учбурчак тенгсиз-лигидан эса, $\left|f^2(x)-x_0\right|_p\geq\delta$.

Агар $\left|f^2(x)-x_0\right|_p>\delta$ бўлса, шундай $\mu_2>\delta$ сон мавжудки, $f^2(x)\in S_{\mu_2}(x_0)$ бўлади.

Агар $\left|f^2(x)-x_0\right|_p=\delta$ бўлса, у ҳолда юқоридаги амалларни такрорлаймиз ва ҳоказо. Натижада агар $\left|f^{k-1}(x)-x_0\right|_p=\delta$ бўлса, у ҳолда (2.14) га кўра

$$\left|f^k(x)-x_0\right|_p=\frac{\left|f^{k-1}(x)-x_0\right|_p\left|f'(x_0)+\dfrac{f^{k-1}(x)-x_0}{x_0+c}\right|_p}{\left|1+\dfrac{f^{k-1}(x)-x_0}{x_0+c}\right|_p}=\frac{\delta^2}{\left|f^{k-1}(x)+c\right|_p}.$$

Бунда $f^{k-1}(x)\in S_\delta(x_0)$ эканлигидан $f^{k-1}(x)=x_0+\xi'''$, $\left|\xi'''\right|_p=\delta$. У ҳолда

$\left|f^k(x)-x_0\right|_p=\dfrac{\delta^2}{\left|f^{k-1}(x)+c\right|_p}=\dfrac{\delta^2}{\left|\xi'''+(x_0+c)\right|_p}.$ бўлади. Кучли учбурчак тенгсизлигидан эса, $\left|f^k(x)-x_0\right|_p\geq\delta$. Агар $\left|f^k(x)-x_0\right|_p>\delta$ бўлса, шундай $\mu_k>\delta$ сон мавжудки, $f^k(x)\in S_{\mu_k}(x_0)$ бўлади.

Агар $\left|f^k(x)-x_0\right|_p=\delta$ бўлса, у ҳолда юқоридаги амалларни яна такрорлаймиз. Булардан хулоса қилиб қуйидаги натижага келамиз.

$$f^{k}(x) \in S_{\mu_k}(x_0), \quad k \in N, \quad \mu_k > \delta.$$ Теорема исботланди.

Теорема 2.2.3., 2.2.4. ва 2.2.6. ҳамда лемма 2.2.5. лардан қуйидаги натижа бевосита келиб чиқади.

Натижа 2.2.7. $|f'(x_0)|_p < 1$ *бўлсин. У ҳолда* $A(x_0) = U_{\delta}(x_0)$ *бўлади.*

ХУЛОСА

Рефератнинг биринчи бобида Ултраметрик фазо тушунчаси, Ноархимед майдон тушунчаси, p – адик сонлар майдони ва p – адик комплекс сонлар майдони тушунчалари киритилиб, p – адик анализнинг айрим элементлари, жумладан лимит, хосила, сонли қаторлар ва уларнинг яқинлашишини зарур ва етарли шарти, даражали қатор ва унинг яқинлашиш радиусини ҳисоблаш формуласи ва аналитик функцияни таърифи келтирилган.

Рефератнинг иккинчи боби p – адик динамик системаларга бағишланган бўлиб, унинг 2.1. қисмида қўзғалмас нуқталар ва уларни турларининг таърифлари келтирилди.

2.2. қисмда p – адик каср рационал функциянинг динамикаси ўрганилди. Қўзғалмас нуқталар топилиб, уларнинг турли бўлишлик критерийси келтирилди ва исботланди. Бу критерийнинг шартлари бажарилмаган ҳолда p – адик каср рационал функциянинг кўринишини танлаб олиб, шу функциянинг динамикаси тўлиқ ўрганилди. Қўзғалмас нуқта бетараф бўлган ҳолда, Зигел дискни кўриниши топилди. Тортувчи бўлган ҳолда эса, аттракторнинг кўриниши топилди.

Фойдаланилган адабиётлар.

[1]. В.С.Владимиров, И.В.Волович, Е.И.Зеленов. p – адический анализ и математическаяфизика. М:Физматлит. 1994 г.

[2]. Н.Коблиц. p – адические числа, p – адический анализ и дзета-фукции. Издательство “Мир”. Москва 1982.

[3]. A.Yu.Khrennikov and M.Nilsson. p – adic Deterministic and Random Dynamics. Kluwer Akademic Publishers. London. 2004y.

[4]. U. Rozikov, F. Mukhamedov. On rational p – adic dynamical systems. M.F.A.T. Vol.10 N2. 2004.p.21-31.

[5]. B.Dragovich, A.Khrennikov, D.Mihailovich. Linear fractional p – adic and adelic dynamical systems. R.M.F.Vol.60. N1.2007. p.55-67.

[6]. M.Khamraev, F.Mukhamedov. On a class of rational p – adic dynamical systems. Math.Anal.Appl.N315. 2006. p.76-89.