МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ПЕДИАТРИЧЕСКИЙ МЕДИЦИНСКИЙ ИНСТИТУТ

ЦЕНТР РАЗВИТИЯ МЕДИЦИНСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО МЕДИЦИНСКОЙ И БИОЛОГИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ (ДЛЯ СТУДЕНТОВ)

Ташкент - 2009

Лабораторная работа № 1.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ.

Цель занятия: научиться вычислять ошибки прямых и косвенных измерений.

ЦЕЛЕВЫЕ ЗАДАЧИ.

Студент должен уметь: записать конечное значение измеряемой величины с учетом ошибок измерения.

Студент должен знать: вычисление абсолютной и относительной ошибок прямых и косвенных измерений.

ЗНАЧИМОСТЬ ИЗУЧАЕМОЙ ТЕМЫ.

В настоящее время в биологии и медицине широко применяются сложнейшие физические методы: оптическая и радиоскопия, электронная микроскопия, рентгенография и нейтронография, использование лазера, радионуклидов. Клиники и больницы все больше оснащаются сложнейшими электронными установками и аппаратурой, применяемыми в терапевтических и диагностических целях, а также для лабораторного анализа и исследовательских целей.

Измерение параметров биологических систем связано с точностью этого измерения. Истинного значения измеряемой величины получить нельзя, всякое измерение сопровождается определенной погрешностью или ошибкой. Поэтому необходимо при измерениях оценивать степень точности измерений.

ИСХОДНЫЙ УРОВЕНЬ ЗНАНИЙ.

Что бы цель занятия была достигнута необходимо знать следующие разделы математики:

1. Полный дифференциал, частные производные.

УЧЕБНЫЙ МАТЕРИАЛ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ЦЕЛЕВЫХ ЗАДАЧ.

1. Д.К.Горский, Н.М. Сакевич. Физический практикум с элементами электроники. Минск, 1980, стр. 5-19.
2. И.А. Саулова, Н.Е. Блохина, Л.Д. Ганцов. Руководство к лабораторным работам по физике. М., 1983, стр. 4-18.

БЛОК ИНФОРМАЦИИ.

Различают три вида погрешности первая систематические, второе случайные и третье грубые.

Систематические ошибки имеют место из-за несовершенства приборов, неточной установки нуля прибора, смещения шкалы прибора, недостаточной чувствительности прибора, приближенным характером уравнений и констант и т.д.

Особенностью систематических ошибок является тот факт, что при любом измерении оно его только увеличивает либо только уменьшает результат изменяя его всегда в одном направлении.

Систематические ошибки не вычисляются, они выявляются и устраняются путем изучения приборов, сопоставления с эталоном, многократного повторения эксперимента.

Грубые ошибки возникают в результате неаккуратности при снятии показаний приборов, просчете. В результате этих ошибок измеренные величины резко отличаются от значений, полученных в других измерениях. Для устранения грубых измерений эксперимент проводят многократно и значения, резко отличающиеся от других выкидывают из рассмотрения, т.е., не учитывают.

Случайные погрешности называются недостаточностью отсчетом, несовершенством органов чувств, а также факторами, трудно учитываемыми, но каждый из которых приводит к незначительному изменению измеряемой величины. Случайные ошибки нельзя устранить в эксперименте.

Они подчиняются законам математической статистики. Теория ошибок, построения на основе вероятностей, позволяет вычислить и учесть случайные погрешности в окончательном результате.

Измерение - это сравнение искомой величины с единицей ее измерения. Измерения делятся на прямые и косвенные. В прямых измерениях определяемая величина находится при помощи какого-либо прибора. Например, длина измеряется линейкой, штангенциркулем, микрометром, масса - весами, время - секундомером и т.д. При косвенных измерениях искомая величина вычисляется по формуле, а величины входящие в формулу, определяются в прямых измерениях.

Например, коэффициент преломления стеклянной пластинки определяется с помощью микроскопа по формуле:

$n = \frac{H}{h}$, где

H - действительная толщина пластинки

h - кажущаяся толщина, измеренная с помощью микроскопа.

Погрешность в определении n определяется погрешностью в измерениях H и h.

Вычисление ошибок прямых измерений.

Рассмотрим основные понятия теорий ошибок. В основе теорий ошибок лежит ряд положений:

1. Ошибки измерений принимают непрерывный ряд значений;
2. При большом количестве измерений одной и той же величины ошибки разного знака встречаются одинаково часто;
3. Вероятность появления ошибки уменьшается с ростом ее величины.

Пусть какая то величина измерена непосредственно в несколько (n) и получен ряд значений: X_1, X_2, X_3 и …

… Xn. За наиболее вероятное значение измеряемой величины принято ее среднее арифметическое:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + ...X_n}{n}$$

n - число измерений.

Отклонение величины, измеренной в каждом измерении от среднего арифметического, называется абсолютной ошибкой этого измерения и обозначается ΔXv, где V - номер измерения:

$$\Delta X_1 = X_1 - \bar{X} \qquad \Delta X_3 = X_3 - \bar{X}$$

$$\Delta X_2 = X_2 - \bar{X} \qquad \Delta X_n = X_n - \bar{X}$$

Средняя абсолютная ошибка измерений равна:

$$\Delta\bar{X} = \frac{|X_1| + |X_2| + |X_3| + ... + |X_n|}{n}$$

при вычислении ошибок измерения учитывается максимальная из возможных ошибок, поэтому складываются модули $|\Delta X_j|$, без учета знака.

Гаусс учитывая теорию вероятностей нашел закон распределения случайной величины, т.е. нашел функцию

$\int(\Delta X_j)$ - вероятность отклонения случайной величины X от ее наиболее вероятного значения X_0.

$$\oint_{(\Delta X i)} = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} l - \frac{\Delta X_j^2}{2\delta^2}$$

График этой функции молокообразная кривая,

Рис. 1 максимум которой соответствует истинному значению X_0.

δ- называют среднеквадратичной или стандартной ошибкой,

$\delta^2 = \zeta^2$ - дисперсией измерений, определяется "размазанностью" кривой функции распределения $\oint(\Delta X_j)$, с уменьшением ζ^2 .

При небольшом числе измерений дисперсия определяется по приближенной формуле:

$$\delta^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left|\bar{X} - X\right|^2$$

или

$$\delta^2 = \sqrt{\frac{\sum_{j-1}^{n}\left|\bar{X} - X_j\right|^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\left|\bar{X} - X_1\right|^2 + \left|\bar{X} - X_2\right| + \ldots + \left|\bar{X} - X_n\right|^2}{n-1}}$$

это среднеквадратичная ошибка.

Из теории вероятности следует, что случайная величина отклоняется от среднего значения практически на величину, не превышающую утроенной среднеквадратичной ошибки. В интервал от $\bar{X} - \delta$ до $\bar{X} + \delta$ попадает 60% измерений. В интервал $X - 2\delta$ до $X + 2\delta$ т.е. с удвоенной среднеквадратичной ошибкой укладывается 95% всех измерений, в интервале от $X - 3\delta$ до $X + 3\delta$ - 99% и только 0,03% всех измерений выходит за пределы утроенной среднеквадратичной ошибки. Среднеквадратичной ошибке приводит в соответствие определенную вероятность, называемую доверительной вероятностью.

Обычно экспериментатор проделывает не более 20 измерений. Стьюдент нашел закон распределения плотности вероятности, который при 20 измерениях практически не отличается от нормального закона распределения вероятности Гаусса. Им была установлена связь абсолютной ошибки ΔX с коэффициентом Стьюдента $t_{\alpha,n}$ и средней квадратичной ошибкой, определяемой выражением:

$$\Delta X = t_{\alpha,n} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{n}}$$

n - произведенных изменений

a - доверительная вероятность или надежность.

Для различения *n* и *a* Стьюдентом был найден соответствующие значения $t_{\alpha,n}$, некоторые из них чаще всего используемые в эксперименте, приведены в приложении.

При выполнении лабораторных работ ограничиваются доверительной вероятностью 95%. Итак, задавшись доверительной вероятностью, зная *n*, можно определить $t_{\alpha,n}$ по таблице, а затем ΔX. Зная среднеарифметическое значение измеряемой величины, результат можно записать в виде

$$X = \bar{X} \pm \Delta X$$

Эта запись означает, что значение измеряемой величины X попадает в доверительный интервал от $\left(\bar{X} - \Delta X\right)$ до $\left(\bar{X} + \Delta X\right)$ с вероятностью *a*.

Абсолютная ошибка ΔX не дает представления о точности измерения. Например, ошибка в 100 нм при измерении длины волны недопустимо груба, при измерении размеров тел означала бы высокую точность измерения. Поэтому для оценки точности измерений вводят понятие относительной ошибки.

Относительной ошибкой называются отношение абсолютной ошибки к среднему арифметическому значению измеряемой величины.

$E = \pm \frac{\Delta X}{X}$; можно выразить в процентах $E = \pm \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\%$

Обработка результатов косвенных измерений.

Пусть искомая величина является функцией нескольких аргументов, определяемых в прямых измерениях:

$$y = \oint \left(X_1 X_2 .....X_{\Pi}\right)$$

Среднее арифметическое такой функции находят путем подстановки средних значений непосредственно измеряемых величин:

$$\bar{y} = \oint \left(\bar{X}_1 \bar{X}_2 .....\right)$$

Дисперсия такой величины находится по формуле:

$$\varsigma^2 = \left(\frac{\varsigma F}{\varsigma X_1}\right)^2 \cdot \delta X_1^2 + \left(\frac{\varsigma F}{\varsigma X_2}\right)^2 \cdot \delta X_2^2 + ...$$

$\frac{\varsigma F}{\varsigma X_1}$ - частные производные функции

$$y = \oint \left(X_1 X_2 .....\right)$$

δ_{xj} - средние квадратичные ошибки непосредственно измеряемых величин.

Среднюю квадратичную ошибку косвенно определяемой величины вычисляются по формуле:

$$\delta_y = \sqrt{\left(\frac{\varsigma F}{\varsigma X_1}\right)^2 \cdot \delta X_1^2 + \left(\frac{\varsigma F}{\varsigma X_2}\right)^2 \cdot \delta X_2^2 + ...}$$

Средняя квадратичная ошибка среднего арифметического для измерений непосредственно определяемых величин равно:

$$\varsigma = \frac{\delta_y}{\sqrt{n}}$$

В этом случае абсолютная ошибка косвенно определяемой величины находится с помощью коэффициентов Стьюдента

$$\Delta y = t_{\alpha,n} \cdot \varsigma = t_{\alpha,n} \cdot \frac{\delta y}{n}$$

Окончательный результат косвенно определяемой величины записывают в виде

$y = \bar{y} \pm \Delta y$

относительная ошибка определяется по формуле:

$$E = \pm \frac{\Delta y}{\bar{y}} \cdot 100\%$$

Обучающие задачи и эталоны их решений.

Вычисление ошибок прямых измерений.

1. При измерении диаметра (Д) шарика получены следующие числовые значения: 1,47; 1,44; 1,45; 1,41; 1,42 мм. Вычислить ошибки измерения и записать результаты.

1. Найдем среднее арифметическое значения

$$Д = \frac{1{,}47 + 1{,}44 + 1{,}45 + 1{,}41 + 1{,}42}{5} = 1{,}438 = 1{,}44 мм$$

вычисления производят с точностью на порядок выше точности измерения, а затем округляют до точности измерений.

2. Определим среднюю квадратичную ошибку измерения:

$$\delta = \sqrt{\frac{(1{,}44 - 1{,}47)^2 + (1{,}44 - 1{,}44)^2 + (1{,}44 - 1{,}45)^2 + (1{,}44 - 1{,}41)^2 + (1{,}44 - 1{,}42)^2}{5 - 1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}03^2 + 0 + (0{,}01)^2 + (0{,}03)^2 + (0{,}02)^2}{4}} = \frac{23 \cdot 10^{-4}}{4} = \frac{5}{2} \cdot 10^{-2} = 2{,}5 \cdot 10^{-2} мм.$$

3. Определим среднеквадратичную ошибку среднего арифметического и коэффициент Стьюдента. Приняв доверительную вероятность a=0,95 при n=5 из таблицы 1 находим коэффициент Стьюдента:

$\bar{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{\varsigma}}$ $\qquad$ $t_{0,95;5}$=2,8 $\qquad$ $\bar{\delta} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2}}{\sqrt{5}}$

4. Определяем абсолютную ошибку в измерении ΔД;

$$\Delta Д = t_{\alpha,n} \cdot \frac{\delta}{\sqrt{n}} = 0{,}03 мм$$

Учитывая ΔД записываем конечный результат:

Д=Д±ΔД. $\qquad$ Д=(1,44±0,03) мм

Относительная ошибка измерения определяется по формуле:

$E = \frac{\Delta Д}{Д} \cdot 100\%$ $\qquad$ $E = \frac{0{,}03}{1{,}44} \cdot 100\% \cdot 2\%$

Вычисление ошибок косвенных изменений.

Плотность шара определяется по формуле:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{6M}{\pi Д^3}$$

Пусть масса и диаметр шара измерены 5 раз и получены следующие значения:

М = 10,970; 10,980; 11; 11,010; 10,990 г.

Д = 1,44; 1,47; 1,45; 1,41; 1,42 см

1. найдем среднее арифметическое этих значений:

$$\bar{M} = \frac{10{,}970 + 10{,}980 + 10{,}990 + 11 + 11{,}010}{5} = \frac{54{,}95}{5} = 10{,}990 г.$$

$$\bar{Д} = \frac{1{,}44 + 1{,}47 + 1{,}45 + 1{,}41 + 1{,}45}{5} = 14{,}4 мм = 1{,}44 см.$$

2. Найдем среднее арифметическое значение плотности

$$\bar{\rho} = \frac{6 \cdot 10{,}990}{3{,}14 \cdot (1{,}44)^3} = \frac{65{,}94}{9{,}375} = 7{,}03 г/см^3$$

3. Найдем средние квадратичные ошибки измерения М и Д.

$$\delta M = \sqrt{\frac{(10{,}990 - 10{,}970)^2 + (10{,}990 - 10{,}980)^2 +}{5-1}} =$$

$$\overline{\frac{+(10{,}990 - 10{,}990)^2 + (10{,}990 - 11)^2 + (10{,}990 - 110{,}01)}{5-1}}^{2} = 1{,}6 \cdot 10^{-2}$$

$$\delta Д = \sqrt{\frac{(1{,}44 - 1{,}44)^2 + (1{,}44 - 1{,}47)^2 + (1{,}44 - 1{,}45)^2 + (1{,}44 - 1{,}41)^2 + (1{,}44 - 1{,}42)^2}{(5-1)}} = 2{,}15 \cdot 10^{-2} см.$$

4. Средняя квадратичная ошибка плотности определяется по формуле:

$$\delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\delta\rho}{\delta M}\right)^2 \cdot \delta_м^2 + \left(\frac{\delta\rho}{\delta Д}\right) \cdot \delta_Д^2}$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta м} = \frac{6}{\pi Д^3}; \frac{\delta\rho}{\delta м} = \frac{6}{3{,}14 \cdot (1{,}44)^3} = \frac{6}{9{,}375} = 0{,}64$$

$$\frac{\delta\rho}{\delta Д} = \frac{6}{\pi} \cdot (Д^{-3})^1 = \frac{3 \cdot 6 \cdot м}{3{,}14 \cdot Д^4} \quad ; \quad \frac{\delta\rho}{\delta Д} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 10{,}990}{(1{,}44)^4 \cdot 3{,}14} = 14{,}65$$

$$\delta\rho = \sqrt{(0{,}64)^2 + (0{,}016)^2 + (14{,}65)^2 \cdot (0{,}024)^2} = 0{,}36$$

5. Определим среднюю квадратную ошибку среднего арифметического:

$$\bar{\delta} = \frac{\delta\rho}{\sqrt{5}} = \frac{0{,}36}{2{,}236} = 0{,}16$$

Приняв доверительную вероятность a=0,95; n=5 определяем по таблице Стьюдента: $t_{0,95;5}$=2,8

$$\Delta\bar{\rho} = t\alpha; n \cdot \delta = 2{,}08 \cdot 0{,}16 = 0{,}448$$

Конечный результат записывается в виде:

$$\rho = \bar{\rho} \pm \bar{\Delta\rho}$$ или ρ= (7,03±0,45) г/см^3

Относительная ошибка:

$$E = \frac{\Delta\bar{\rho}}{\rho} \cdot 100\% \qquad E = \frac{0{,}45}{7{,}03} \cdot 100\% = 6{,}4\%$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ:

1. Что такое измерение?
2. Какие типы измерений знаете?
3. Что такое абсолютная ошибка, относительная ошибка измерений?
4. Вычисление ошибок косвенных измерений.
5. Вычисление ошибок косвенных измерений.
6. Форма записи конечного результата.
7. Что такое дисперсия? Что она определяет?