

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

**ТАШКЕНТСКИЙ АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ
ИНСТИТУТ**

КАФЕДРА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

М.У.Гафуров, Р.Х.Кенджаев, Ф.М.Закиров

ТЕКСТЫ ЛЕКЦИЙ
по курсу

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ**

Ташкент 2010

М.У.Гафуров, Р.Х.Кенджаев, Ф.М.Закиров

Экономико-математические методы и модели. 2010 г. — 67 стр.

Настоящий сборник текстов лекций составлен на основе опыта, накопленного авторами при чтении в течение ряда лет в Ташкентском автомобильно-дорожном институте семестрового курса экономико-математических методов и моделей.

В сборнике приведены проблемы математического моделирования для современных экономических процессов, и, на их основе, методы прогнозирования, в частности, математические понятия, применяемые при адаптивном прогнозировании. Посредством анализа структуры построения динамических рядов при изучении динамики экономических процессов и с помощью примеров в простом виде изложено построение трендовых моделей и условия их адекватности.

Настоящий сборник рассчитан для студентов экономических специальностей высших экономических и технических учебных заведений, а также для всех специалистов, заинтересованных в решении задач математического моделирования.

Рецензенты: **А.А.Рахимов** — профессор кафедры «Высшая математика» Ташкентского института инженеров железнодорожного транспорта, доктор физико-математических наук,

Т.Г.Исанов — доцент кафедры «Высшая математика» Ташкентского автомобильно-дорожного института, кандидат физико-математических наук

Обсуждено и одобрено на заседании кафедры «Высшая математика» (протокол № 37 от 18 мая 2010 года)

Утверждено на заседании Научного совета
дорожно-строительного факультета ТАДИ
(протокол № 12 от 31 мая 2010 года)

О Г Л А В Л Е Н И Е

1. Предмет и задачи дисциплины «Экономико-математические методы и модели».....	4
2. Корреляция. Уравнения регрессии. Метод наименьших квадратов.....	9
3. Уравнения множественной корреляции.....	17
4. Методы и модели анализа динамики экономических процессов. Методы прогнозирования.....	21
5. Линейные модели в экономике.....	29
6. Эластичность в экономическом анализе.....	37
7. Модели потребительского спроса.....	47
8. Производственные модели.....	57
9. Задачи оптимизации в экономике.....	62
Список литературы.....	67

Тема № 1

Предмет и задачи дисциплины «Экономико-математические методы и модели»

План :

1. Классификация экономико-математических моделей.
2. Этапы экономико-математического моделирования.
3. Предмет и задачи дисциплины «Экономико-математические методы и модели».

В настоящее время экономическая наука и практика все более глубоко овладевают достижениями прикладной математики, превращая их из инструмента научных исследований в важное средство эффективного решения сложных хозяйственных проблем.

Современная экономическая теория, как на микро-, так и на макроуровне, включает как естественный, необходимый элемент математические модели и методы. Использование математики в экономике позволяет выделить и формально описать наиболее важные, существенные связи экономических переменных и объектов, точно и компактно излагать положения экономической теории, формулировать ее понятия и выводы.

Для изучения различных экономических явлений используются их упрощенные формальные описания, называемые *экономическими моделями*. Примерами экономических моделей являются модели потребительского выбора, модели фирмы, модели экономического роста, модели равновесия на товарных и финансовых рынках и многие другие.

Модель — это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале. При построении моделей выявляются существенные факторы, определяющие исследуемое явление и отбрасываются детали, несущественные для решения поставленной проблемы.

Экономико-математическая модель — это математическое описание экономических объектов или процессов с целью их

анализа или управления ими, т.е. математическая запись экономической задачи. Математическая модель экономического объекта — это его отображение в виде совокупности функций, уравнений, неравенств, логических отношений, графиков. Такое отображение объединяет группы отношений элементов изучаемого объекта в аналогичные отношения элементов модели.

Для классификации экономико-математических моделей используются разные основания. Модели делятся на теоретико-аналитические модели и прикладные модели, на макроэкономические модели и микроэкономические модели, на структурные модели и функциональные модели, на детерминированные модели и стохастические модели, на статические модели и динамические модели, на линейные модели и нелинейные модели, на пространственные модели и точечные модели.

Под *моделированием* понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Процесс моделирования включает три элемента:

- 1) субъект (исследователь);
- 2) объект исследования;
- 3) модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Первые математические модели использовались Ф.Кенэ (1758 г., экономическая таблица), А.Смитом (классическая макроэкономическая модель), Д.Рикардо (модель международной торговли). Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX в.

Математика и экономика на самом деле кажутся науками, далекими друг от друга. Одна абстрагирована, а другая имеет прикладной характер. Что объединяет обе эти науки? Если взаимосвязь между ними начала проявляться еще в XVII веке, то в XIX веке знаменитые исследователи, такие, как Антуан Курно, Альфред Маршалл, первыми применили математические методы

к изучению рынка. Экономико-математические методы таким образом вошли в период развития.

XX век можно назвать периодом стремительного вхождения математических методов в разные науки, в частности, в экономическую науку. Если заглянуть в историю, то заметим, что именно в этом веке важнейшие результаты и на их основе их авторы стали лауреатами Международной Нобелевской премии (Л.В.Канторович), а в Москве был образован знаменитый центральный экономико-математический институт.

Наряду с тем, что дала серьезное «оружие» научным изысканиям практических исследователей, математика сама тоже развивалась, появились ее новые направления. В течение последних 40 лет важное значение придавалось математическому моделированию экономических процессов и проблемам приведения на их основе точных прогнозов.

Для экономиста математические объекты и понятия могут оказаться сложными, и существуют трудности в их применении при составлении моделей. Для устранения таких неудобств целесообразно представить, что за математическими понятиями, например, такими, как точка, прямая, уравнение, функция и т.д. лежат выражения конкретных экономических процессов или объектов и зависимости между ними. Перевод на математический язык экономической задачи создает условия для исследований с применением весомых математических методов. Таким образом, математизация экономических процессов считается важным этапом при их анализе, в задачах прогнозирования.

Способы применения на практике экономико-математических моделей называются *экономико-математическими методами*. Экономико-математические методы (ЭММ) являются симбиозом экономических и математических наук, объединенных для изучения экономики. Это понятие было введено в науку академиком В.С.Немчиновым в 60-годах XX века. ЭММ образовались на стыке экономики, математики и кибернетики.

Предметом дисциплины «Экономико-математические методы и модели» является:

- изучение основ моделирования экономических процессов, происходящих в макроэкономике (народном хозяйстве) и ее отраслях;

- постановка и толкование экономического смысла задачи моделирования на примере конкретной экономической системы;
- изучение методов решения экономических задач, а также проведения вычислительных экспериментов на компьютере и анализа их результатов.

Задачами дисциплины «Экономико-математические методы и модели» являются:

- построение математических моделей экономических процессов и выбор метода их решения;
- углубление познаний о закономерностях экономического процесса на основе анализа математических моделей;
- изучение различных математических моделей, применяемых в макро- и микроэкономике.

Из экономико-математических методов следует особо выделить методы, применяемые в математической экономике и эконометрии.

Математическая экономика — раздел экономической науки, занимающийся анализом свойств и решений математических моделей экономических процессов. В математической экономике исследуются теоретические модели, основанные на определенных формальных предпосылках (линейность, выпуклость, монотонность и т.п. зависимости, конкретные формулы взаимосвязи величин). Задачей математической экономики является изучение вопроса о существовании решения модели, условиях его неотрицательности, стационарности, наличия других свойств.

Эконометрика — наука, исследующая количественные закономерности и взаимозависимости в экономике при помощи методов математической статистики. Основа этих методов — корреляционно-регрессионный анализ. Эконометрика занимается статистической оценкой и анализом экономических зависимостей и моделей на основе изучения эмпирических данных.

Процессы, встречающиеся в природе, имеют разнообразную сложность. Очевидна зависимость интересующего того или иного показателя от других показателей, составляющих рассматриваемый процесс. Количественное изучение степени зависимости и взаимосвязи показателей имеет важное значение при составлении математической модели процесса. Изучаемые

показатели обычно имеют случайный характер, и исследование таких случаев осуществляется с помощью методов математической статистики. Такие методы, в основном, основаны на корреляционном и регрессионном анализе. По этой причине построение и анализ математических моделей начнем с изучения понятий корреляции и регрессии.

Вопросы для повторения и контроля :

1. Что такое модель и экономическая модель?
2. Что такое экономико-математическая модель, какие ее виды вы знаете?
3. Что вы понимаете под моделированием и какие элементы оно включает в себя?
4. Что вы знаете об истории применения моделирования и что называется экономико-математическими методами?
5. Что является предметом дисциплины «Экономико-математические методы и модели»?
6. Какие задачи стоят перед дисциплиной «Экономико-математические методы и модели»?
7. В чем отличие математической экономики от эконометрики?

Тема № 2

Корреляция. Уравнения регрессии. Метод наименьших квадратов

План :

1. Связи между показателями. Корреляция.
2. Уравнения регрессии. Метод наименьших квадратов.
3. Коэффициент корреляции, его свойства.

Одним из важнейших применений методов математической статистики является определение степени взаимосвязи показателей, имеющих случайный характер и описывающих интересующий нас экономический процесс. Имеет практическое значение формирование экономических выводов в результате анализа на основе изучения степени зависимости, распределения ее по видам.

Поставленные цели достигаются путем обработки результатов наблюдений, проведенных над рассматриваемыми показателями.

Пусть наблюдения над переменными (показателями) X и Y можно выразить через пары чисел

$$(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \quad (2.1)$$

где n — число наблюдений или опытов.

Зависимы ли X и Y ? Если зависимы, то какова их зависимость? Ответ на этот вопрос можно найти, построив на координатной плоскости точки (2.1). Например:

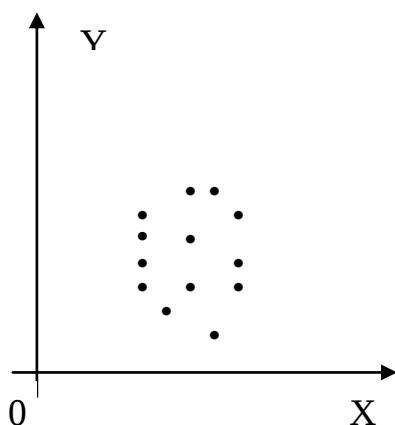


Рис. 2.1.

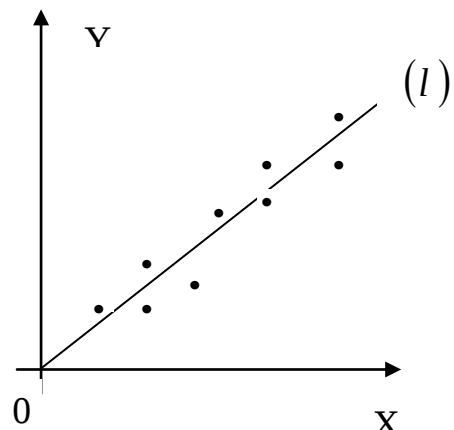


Рис. 2.2.

Из рис. 2.1 видно, что X и Y независимы, потому что по конкретному значению X нельзя точно назвать значение Y , а на рис. 2.2 заметно, что точки группируются вокруг прямой (l), а X и Y находятся в зависимости. В последнем случае X и Y называются коррелированными. Задачи типа определения направления, значимости зависимости между коррелированными переменными составляют основную цель корреляционного анализа.

Пример 2.1. Мастерской по ремонту бытовой техники требуется 1 токарь. На это место поступило два заявления. Каждому претенденту назначен 5 дневный испытательный срок, в течение которого каждый из них должен заниматься изготовлением одинаковых деталей. Результаты следующие:

№	Дни недели	Дневная производительность (штук)	
		1-й рабочий x	2-й рабочий y
1	Понедельник	46	44
2	Вторник	48	50
3	Среда	49	55
4	Четверг	54	40
5	Пятница	53	61
	Σ	250	250

Оба рабочих в течение недели изготовили по 250 деталей, средняя производительность равна $250:5=50$ деталей в день.

Таким образом, $\bar{x} = \bar{y} = 50$. Кого предпочтет руководитель мастерской? Из таблицы видно, что 1-й рабочий работает стабильней 2-го, поэтому руководителю целесообразней принять на работу 1-го рабочего. Итак, средняя производительность труда не является показателем, обеспечивающим надежность качества работы.

Целесообразно, чтобы при больших значениях $\bar{x}$, $\bar{y}$ дневные производительности мало отличались от них. Как можно определить такое отклонение? Для этого составим еще одну таблицу.

Дни недели	Отклонения от $\bar{X}$, $\bar{Y}$		Квадраты отклонений от $\bar{X}$, $\bar{Y}$	
	$x_i - \bar{X}$	$y_i - \bar{Y}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$
1	-4	-6	16	36
2	-2	0	4	0
3	-1	5	1	25
4	4	-10	16	100
5	3	11	9	121
Σ	0	0	46	282

Как видно из 2-го и 3-го столбцов таблицы,

$$-4 \leq x_i - \bar{X} \leq 3, \quad -6 \leq y_i - \bar{Y} \leq 11$$

разброс отклонений больше у 2-го претендента. Т.е., в некоторые дни он “отдыхает”, а в другие с напором наверстывает упущенное. А это, естественно, влияет на качество его работы. Из последней строки таблицы видно, что при $\bar{X} = \bar{Y}$ сумма отклонений равна 0. Таким образом, сумма соответствующих отклонений от $\bar{X}$, $\bar{Y}$ также не может быть надежной оценкой.

Теперь рассмотрим последние столбцы таблицы. Здесь приведены квадраты отклонений:

$$\text{для 1-го рабочего } \sum (x_i - \bar{X})^2 = 16 + 4 + 1 + 16 + 9 = 46,$$

$$\text{для 2-го рабочего } \sum (y_i - \bar{Y})^2 = 36 + 0 + 25 + 100 + 121 = 282.$$

$46 < 282$ означает более стабильную производительность труда 1-го рабочего.

Пусть требуется изучение зависимости между X и Y . Переменные X и Y по природе могут быть разными, их единицы измерения — неодинаковыми. Приведем числовые значения результатов наблюдений над ними в следующей таблице:

X	x_1	x_2	...	x_n
Y	y_1	y_2	...	y_n

На основе этих данных определим такую функцию $Y = f(X)$, которая в какой-то мере «хорошо» отображала бы зависимость между X и Y .

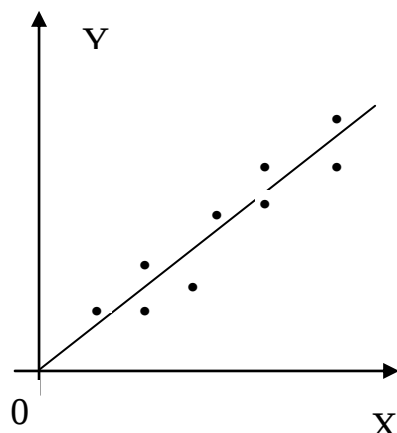


Рис. 2.3.

Вид функции $Y = f(X)$ можно определить на основе теоретических, логических рассуждений или через расположение на координатной плоскости точек (x_i, y_i) . Например, если расположение точек, выражающих результаты наблюдений, будет как на рис. 2.3, то с учетом погрешностей, допущенных при проведении наблюдений, округлении результатов естественно предположить, что зависимость линейна. С этой точки зрения можно приступить к поиску зависимости в виде $y = a_0 + a_1 x$.

Если рассуждать в общем, то функцию $y = F(x, a_0, a_1, \dots, a_k)$ и $a_0, \dots, a_k$ в ней нужно подобрать таким образом, чтобы величины $\tilde{y}_i = F(x_i, a_0, \dots, a_k)$, найденные по этой формуле, мало отличались от результатов наблюдений y_i .

Очевидно, что величины $y_i - \tilde{y}_i$ могут иметь разные знаки. Возведя в квадрат эти разности, рассмотрим неотрицательные отклонения и введем функцию $k+1$ переменных

$$S(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - F(x_i, a_0, \dots, a_k))^2.$$

Эта функция дает сумму отклонений. Ясно, что чем меньше значение S , тем меньше разница между X и Y . Таким образом, задача сводится к отысканию $\min_{a_0, \dots, a_n} S(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Эта задача та же самая задача, что и задача нахождения экстремума функции нескольких переменных.

Рассмотрим частный случай $y = a_0 + a_1 x (= F(x, a_0, a_1))$. В этом случае

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2.$$

Отсюда

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (y_i - (a_0 + a_1 x_i)) x_i = 0 \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} n a_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} \quad (2.2)$$

Таким образом, мы получили систему для вычисления a_0 и a_1 . Коэффициенты этой системы вычисляются через результаты наблюдений, а a_0 и a_1 найти известными нам методами (Крамера, Гаусса, матричные и т.п.).

Пример 2.2. В результате наблюдений получены 6 пар соответствующих значений величин X и Y:

X	0	1	2	3	4	5
Y	5.1	4.7	4.4	4.5	4.3	4

Как видно из таблицы, при возрастании значений X значения Y убывают. Поэтому зависимость между ними целесообразно искать в виде $Y = a_0 + a_1 X$. Составим следующую таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	0	5.1	0	0
2	1	4,7	1	4,7
3	2	4,4	4	8,8
4	3	4,5	9	13,5
5	4	4,3	16	17,2
6	5	4	25	20
Σ	15	27	55	64,2

Значит, $n = 6$, $\sum_{i=1}^6 x_i = 15$,

$$\sum_{i=1}^6 y_i = 27, \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 55,$$

$$\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 64,2.$$

Таким образом, в этом случае по формуле (2.2)

$$\begin{cases} 6a_0 + 15a_1 = 27 \\ 15a_0 + 55a_1 = 64,2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 5 \\ a_1 \approx 0,2 \end{cases}.$$

Отсюда

$$Y = 5 - 0,2X.$$

Например, если $x = 6$, то $Y = 5,0 - 0,2 \cdot 6 = 3,8$.

Теперь из (2.2) выведем общую формулу для нахождения значений a_0, a_1 :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 \bar{x} = \bar{y} \\ a_0 \bar{x} + a_1 \overline{x^2} = \overline{xy} \end{cases}, \quad (2.3)$$

где обозначены $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$,

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Предположим определитель системы (2.3) отличным от нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{x^2} \end{vmatrix} = \overline{x^2} - (\bar{x})^2 \neq 0.$$

Здесь

$$\Delta_{a_0} = \begin{vmatrix} \bar{y} & \bar{x} \\ \overline{xy} & \overline{x^2} \end{vmatrix} = \overline{x^2} \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy},$$

$$\Delta_{a_1} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{y} \\ \bar{x} & \overline{xy} \end{vmatrix} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Таким образом, по формуле Крамера

$$a_0 = \frac{\overline{x^2} \cdot \overline{y} - \overline{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2},$$

$$a_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}.$$

$Y = a_0 + a_1 X$ — называется уравнением регрессии Y на X .

Введем следующие обозначения:

$$S_x^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - (\overline{x})^2 \text{ (выборочная дисперсия),}$$

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \overline{x} \cdot \overline{y},$$

$$S_y^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - (\overline{y})^2 \text{ (выборочная дисперсия).}$$

В этом случае $a_1 = \frac{S_{xy}}{S_x}$ называется коэффициентом регрессии, а

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} \text{ — коэффициентом корреляции.}$$

Очень важен следующий логический вопрос: ввиду того, что наблюдения, использованные при вычислении коэффициента корреляции между X и Y , имеют случайную природу, случайна ли также зависимость между X и Y ?

Проверка случайности зависимости может быть проведена с помощью корреляционной «поправки» $\delta_{r_{xy}} = \frac{1 - r_{xy}^2}{\sqrt{n - 1}}$. Если

зависимость между X и Y существенна, то $\left| \frac{r_{xy}}{\delta_{r_{xy}}} \right| \geq 3$.

Для вышеупомянутого примера 2.2

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{15}{6} = 2,5, & \overline{y} &= 4,5, \\ \overline{x^2} &\approx 9,17, & \overline{xy} &= 10,7, & \overline{y^2} &= 20,37. \end{aligned}$$

Тогда $\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = -0,55$,

$$\sqrt{D(X)} = \sqrt{x^2 - (\bar{x})^2} = \sqrt{9,17 - 2,52} \approx 1,71 ,$$

$$\sqrt{D(Y)} \approx 0,35 ,$$

$$r = r_{xy} \approx -0,92 .$$

Так как коэффициент корреляции – 0,92, то зависимость очень сильная.

$$\delta_r = \frac{1 - 0,92^2}{\sqrt{5}} \approx 0,069 .$$

Таким образом, $\left| \frac{r}{\delta_r} \right| = \frac{0,92}{0,069} > 13 > 3 .$

Значит, зависимость между X и Y важна.

Вопросы для повторения и контроля :

1. Какие зависимости между показателями вы знаете? Что понимаете под корреляцией?
2. Каких видов зависимости между двумя показателями может быть осуществлен поиск?
3. Что вы знаете о методе наименьших квадратов?
4. Что такое коэффициент корреляции, какие его свойства вы знаете?

Тема № 3

Уравнения множественной корреляции

План :

1. Линейная корреляционная связь между тремя показателями.
2. Совокупный коэффициент корреляции, его свойства.
3. Частный коэффициент корреляции.

На практике интересующий нас показатель может статистически зависеть от ряда других показателей. Например, количество расхода топлива автомобиля зависит от состояния дороги, мастерства водителя, скорости и т.п..

Предположим, что рассматриваются три показателя X , Y и Z , и показатель Z статистически зависит от X и Y . Над этими показателями проведено m наблюдений, их результаты рассмотрим в следующей таблице.

X	Y	Z	Частота
X_1	Y_1	Z_1	n_1
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x_m	y_m	z_m	n_m
Сумма	-	-	n

Простейшей статистической зависимостью величин X , Y , Z является линейная корреляционная связь между ними. Например, зависимость между X , Y и Z может быть записана в виде

$$Z = a_0 X + a_1 Y + a_2. \quad (3.1)$$

Здесь a_0 , a_1 и a_2 – некоторые постоянные.

Основная задача множественной корреляционной связи состоит в установлении соотношения вида (3.1) методом наименьших квадратов.

Подставив результаты наблюдений x_i и y_i в равенство (3.1), найдем $\tilde{z}_i$, отличные от z_i . Отклонения $\tilde{z}_i - z_i$ показывают разницу между наблюдаемыми и вычисленными по формуле (3.1) значениями. Тогда сумма квадратов отклонений (с учетом их частот) имеет вид

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^m (a_0 x_i + a_1 y_i + a_2 - z_i)^2 n_i.$$

$S = S(a_0, a_1, a_2)$ можно рассматривать в качестве функции трех переменных. Суть метода наименьших квадратов состоит в нахождении значений параметров a_0, a_1, a_2 , минимизирующих S . Искомые значения a_0, a_1 и a_2 находятся из системы

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

Перепишем эту систему в более компактном виде:

$$\begin{cases} a_2 + a_0 \bar{x} + a_1 \bar{y} = \bar{z} \\ a_2 \bar{y} + a_0 \overline{xy} + a_1 \overline{y^2} = \overline{yz} \\ a_2 \bar{x} + a_0 \overline{x^2} + a_1 \overline{xy} = \overline{xz} \end{cases}, \quad (3.2)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i \cdot n_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m y_i \cdot n_i, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i \cdot y_i \cdot n_i,$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i^2 \cdot n_i, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m y_i^2 \cdot n_i, \quad \overline{yz} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m y_i \cdot z_i \cdot n_i,$$

$$\overline{xz} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m x_i \cdot z_i \cdot n_i.$$

Теперь, для приведения системы (3.2) в более удобный вид из ее первого уравнения найдем

$$a_2 = \bar{z} - a_0 \bar{x} - a_1 \bar{y} \quad (3.3)$$

и подставив это в (3.1), получим соотношение

$$Z = \bar{z} + a_0 (x - \bar{x}) + a_1 (y - \bar{y}).$$

Отсюда для нахождения точного выражения Z достаточно определить a_0, a_1 . С этой целью подставив (3.3) в (3.2), и проведя необходимые преобразования, получим систему

$$\begin{cases} a_0(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}) + a_1(\overline{y^2} + (\bar{y})^2) = \overline{yz} - \bar{y}\bar{z} \\ a_0(\overline{x^2} - (\bar{x})^2) + a_1(\overline{xy} + \bar{x}\bar{y}) = \overline{xz} - \bar{x}\bar{z} \end{cases} \quad (3.4)$$

Но систему (3.4), используя следующий вид дисперсии

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{\sum_{i=1}^m \xi_i n_i}{n} - (\bar{\xi})^2,$$

можно представить в виде

$$\begin{cases} a_0(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}) + a_1\sigma_y^2 = \overline{yz} - \bar{y}\bar{z} \\ a_0\sigma_x^2 + a_1(\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}) = \overline{xz} - \bar{x}\bar{z} \end{cases} \quad (3.5)$$

Система (3.5) определяет значения a_0 и a_1 . Для решения этой системы введем коэффициенты корреляции между X, Y и Z:

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad r_{xz} = \frac{\overline{xz} - \bar{x} \cdot \bar{z}}{\sigma_x \sigma_z}, \quad r_{yz} = \frac{\overline{yz} - \bar{y} \cdot \bar{z}}{\sigma_y \sigma_z}.$$

Введенные величины и (3.5) вместе образуют следующие системы:

$$\begin{cases} \overline{xy} - \bar{x}\bar{y} = r_{xy} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y \\ \overline{xz} - \bar{x}\bar{z} = r_{xz} \cdot \sigma_x \cdot \sigma_z \\ \overline{yz} - \bar{y}\bar{z} = r_{yz} \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_0 r_{xy} \sigma_x + a_1 \sigma_y = r_{yz} \sigma_z \\ a_0 \sigma_x + a_1 r_{xy} \sigma_y = r_{xz} \sigma_z \end{cases}.$$

Помимо установления зависимости Z от X и Y, важно оценить его влияние по отдельности на X и Y. Влияние Z на отдельно взятые показатели изучается через частный коэффициент корреляции. Частный коэффициент корреляции $r_{xz(y)}$ Z и X находится из следующего равенства:

$$r_{xz(y)} = \frac{r_{xz} - r_{xy} r_{yz}}{\sqrt{(1 - r_{xy}^2)(1 - r_{yz}^2)}}.$$

Здесь Y считается постоянным, и рассматривается только влияние Z на X. Аналогично, можно рассмотреть и $r_{xz(y)}$. Введенные величины меняются в промежутке от -1 до 1. Случаи

$r_{xz(y)} = 0$ или $r_{xz(y)} = 1$ рассматриваются таким же образом, как и при традиционном коэффициенте корреляции.

Вопросы для повторения и контроля :

1. Как выводится уравнение линейной корреляционной связи между тремя показателями?
2. Что вы знаете о частном коэффициенте корреляции?

Тема № 4

Методы и модели анализа динамики экономических процессов. Методы прогнозирования

План :

1. Динамические ряды и временные ряды, тренд, их компоненты.
2. Метод проверки разности средних уровней.
3. Метод Фостера – Стьюарта.
4. Адекватность трендовых моделей.
5. Оценки точности адекватных моделей.

Динамические процессы экономических систем часто проявляются в виде рядов значений показателей, расположенных в хронологическом порядке. Эти ряды отражают состояние развития рассматриваемого процесса.

Так как основные моменты, встречающиеся в экономике, выражаются через временные ряды, то в дальнейшем будем работать с временными рядами. Члены ряда называются уровнями. В зависимости от того, выражают ли уровни временного ряда значения экономического показателя в конкретный момент времени или в каком-либо промежутке времени, такие ряды называются соответственно мгновенными временными рядами или интервальными временными рядами.

При определении существования тренда во временных рядах важную роль играют методы теории вероятностей и математической статистики. Нужно соблюдать крайнюю осторожность при выводе экономической интерпретации результатов, полученных с помощью этих методов.

Рассмотрим следующий временной ряд:

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

В общем случае временной ряд экономических показателей можно разделить на четыре составляющие:

- составляющая тренда — $V_t, t = 1, 2, \dots, n$;
- сезонная компонента — $U_t, t = 1, 2, \dots, n$;
- циклическая компонента — $C_t, t = 1, 2, \dots, n$;

- случайная компонента — $\Sigma_t, t = 1, 2, \dots, n$.

Во временных рядах могут быть регулярные колебания. Если колебания периодические или близкие к ним, и завершаются в течение года, то говорят, что есть сезонные колебания. Если период колебаний составляет несколько лет, то говорят, что во временном ряду существует циклическая компонента.

Сезонные и циклические компоненты тренда называются регулярными компонентами временного ряда.

Оставшиеся после выделения из временного ряда регулярных компонент называются случайными компонентами или нерегулярными компонентами.

Построение моделей и проверка их адекватности связаны с наличием или отсутствием тренда во временном ряду.

Именно поэтому важно установление методов определения наличия тренда в рассматриваемом временном ряду. Ниже мы ознакомимся с двумя такими методами.

Сначала рассмотрим метод проверки разности средних уровней. Существуют четыре этапа осуществления этого метода:

1. Поделим уровни временного ряда $y_1, \dots, y_n$ на две примерно равных части объемами n_1 и n_2 ($n_1 + n_2 = n$).

2. Для каждой поделенной части вычисляется среднее значение и дисперсия:

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} y_i, \quad \sigma_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (y_i - \bar{y}_1)^2,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=n_1+1}^n y_i, \quad \sigma_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=n_1+1}^{n_2} (y_i - \bar{y}_2)^2.$$

3. Проверим равенство дисперсий поделенных частей посредством F-критерия Фишера на основе его вычисленных и табличных значений.

$$F = \begin{cases} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}, & \text{агар } \sigma_1^2 > \sigma_2^2 \\ \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}, & \text{агар } \sigma_1^2 < \sigma_2^2. \end{cases}$$

Сравним эти отношения со значениями F_α из таблицы F-критерия, соответствующими значениям α (уровня значимости или ошибки). Обычно принимается $\alpha = 0,1$ (10% ная ошибка), $0,05$ (5% ная ошибка), $0,01$ (1% ная ошибка).

$1 - \alpha$ называется доверительной вероятностью.

Если $F < F_\alpha$, то гипотеза о равенстве дисперсий принимается и переходим к следующему, 4 му этапу.

Если $F \geq F_\alpha$, то гипотеза отвергается и проверку наличия тренда невозможно осуществить этим методом.

4. Гипотеза об отсутствии тренда проверяется через t-критерий Стьюдента. Сначала вычисляемое значение критерия Стьюдента находится по формуле

$$t = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}},$$

где

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \sigma_1^2 + (n_2 - 1) \sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}.$$

Теперь ознакомимся с методом Фостера – Стьюарта. Этот метод считается более надежным, с большими возможностями по сравнению с предыдущим. На основе этого метода, помимо наличия тренда в ряду, также можно определить наличие тренда у его дисперсии. Если в тренде нет дисперсии, разброс уровней ряда будет постоянным. При увеличении дисперсии, ряд начнет “качаться”.

Применение этого метода также состоит из 4 этапов.

1. Каждый уровень ряда, начиная со второго, сравнивается с предшествующими, и определяются следующие две последовательности:

для $t = 2, 3, \dots, n$

$$K_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t \text{ больше всех предыдущих} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$l_t = \begin{cases} 1, & \text{если } y_t \text{ меньше всех предыдущих} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

2. Вычисляются s и d :

$$s = \sum_{t=2}^n (k_t + l_t); \quad d = \sum_{t=2}^n (k_t - l_t).$$

3. Этот этап посвящен проверке гипотез, при этом проверяется:

- а) случайный характер отклонения s от Ms для ряда, уровня которого расположены случайно;
- б) случайный характер отклонения d от 0.

Такая проверка проводится с использованием табличных значений t -критерия Стьюдента для среднего значения и дисперсии:

$$t_s = \frac{|s - Ms|}{\sigma_1}; \quad \sigma_1 = \sqrt{2 \ln n - 3,4253};$$

$$t_d = \frac{|d - 0|}{\sigma_2}; \quad \sigma_2 = \sqrt{2 \ln n - 0,8456}.$$

σ_1 и σ_2 являются средними квадратическими отклонениями s и d .

4. Здесь вычисленные значения t_s и t_d сравниваются со значениями t_α , соответствующими уровню значимости α , из таблицы значений t -критерия Стьюдента. Если вычисленные значения меньше табличных, принимается гипотеза об отсутствии тренда, в противном случае, отмечается наличие тренда.

Составление трендовых моделей в экономическом процессе дает возможность составления прогнозов о его развитии. Другими словами, с помощью модели мы имеем представление о будущем состоянии экономического показателя. Здесь, беря в качестве основы временной ряд, осуществляется экстраполяция, т.е. тенденция предыдущего состояния распространяется на последующие состояния.

Способ экстраполяции удобен для экономических процессов, имеющих тренд или устойчивое изменение.

Для того, чтобы трендовая модель $\tilde{y}_t$ для конкретного временного ряда y_t , $t = 1, 2, \dots, n$ была адекватной, разности

$\varepsilon_t = y_t - \tilde{y}_t$ должны удовлетворять четырем условиям для рассмотренных выше случайных компонент. Рассмотрим проверку выполнения или невыполнения этих условий.

1. Проверяется гипотеза о случайном характере изменений остаточной последовательности ε_t . Для этого составим разности $\varepsilon_t = y_t - \tilde{y}_t$, соответствующие $t = 1, 2, \dots, n$. Колебания разностей ε_t изучается через критерий серий, основанный на медиане выборки. При этом ряд значений ε_t , $t = 1, 2, \dots, n$ переписывается в порядке возрастания и находится его медиана (под медианой понимается член вариационного ряда, стоящий ровно посередине, когда число членов нечетно; и среднее арифметическое двух стоящих посередине членов, когда число членов четно).

Медиану обозначим через ε_M . Вернемся к предыдущему ряду, сравним его члены ε_t с ε_M и при $\varepsilon_t < \varepsilon_M$ $t = 1, 2, \dots, n$ поставим знак “+”, в противном случае — знак “-“. А в случае $\varepsilon_t = \varepsilon_M$ соответствующие ε_t пропускаются.

Продолжительность самой длинной серии обозначим через $K_{\max}$, а общее число серий — через ν . Для того, чтобы выборка ε_t была случайной, проверяется выполнение неравенств

$$K_{\max} < [3,3 (\ln n + 1)], \quad \nu > \left[\frac{1}{2} (n + 1 - 1,96 \sqrt{n - 1}) \right]$$

с 5% ным уровнем значимости. Здесь $[x]$ означает целую часть x . Если по крайней мере одно из этих неравенств не выполняется, то гипотеза о случайном характере колебаний уровней ε_t не принимается, и, следовательно, трендовая модель неадекватна.

Пусть число точек поворота равно p . В случайной выборке p является случайной величиной, и ее среднее значение $\bar{p}$ и дисперсия σ_p^2 вычисляются следующим образом:

$$\bar{p} = \frac{2}{3}(n - 2), \quad \sigma_p^2 = \frac{16 n - 29}{90}$$

Если не выполняется неравенство

$$p > \left[\bar{p} - 1,96 \sqrt{\sigma_p^2} \right],$$

то трендовая модель называется неадекватной.

2. При проверке предположения о подчинении нормальному закону распределения случайной компоненты (ввиду не очень большой длины соответствующего временного ряда) используются значения показателей ее асимметрии и эксцесса. При этом отметим равенство нулю показателей асимметрии и эксцесса нормально распределенной генеральной совокупности.

Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ рассматривать как выборку из генеральной совокупности, то характеристики γ_1 и γ_2 по этой выборке соответственно асимметрии и эксцесса, а также соответствующие им средние квадратические отклонения σ_{γ_1} и σ_{γ_2} определяются следующим образом:

$$\gamma_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right)^3}}, \quad \sigma_{\gamma_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}};$$

$$\gamma_2 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \right)^2} - 3, \quad \sigma_{\gamma_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}.$$

Если неравенства

$$|\gamma_1| < 1,5 \sigma_{\gamma_1} \text{ и } \left| \gamma_2 + \frac{6}{n+1} \right| < 1,5 \sigma_{\gamma_2}$$

выполняются одновременно, тогда предположение о нормальности распределения случайной компоненты принимается правильным.

Если же выполняется по крайней мере одно из неравенств

$$|\gamma_1| \geq 2 \sigma_{\gamma_1} \text{ и } \left| \gamma_2 + \frac{6}{n+1} \right| \geq 2 \sigma_{\gamma_2},$$

то предположение отвергается и трендовая модель объявляется неадекватной. Другие случаи дополнительно анализируются с помощью сложных критериев.

При проверке вышеупомянутого предположения кроме приведенного метода на практике используются также другие методы — критерий Вестергарда, RS – критерий и т.д.

3. Предположение о равенстве нулю математического ожидания случайной компоненты (если распределение случайной компоненты нормально) проверяется с помощью t -критерия Стьюдента.

Значение этого критерия вычисляется по формуле

$$t = \frac{\bar{\varepsilon}}{S_{\varepsilon}} \sqrt{n},$$

где $\bar{\varepsilon}$ означает среднее значение $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, а S_{ε} — среднее квадратическое отклонение этой последовательности.

4. Предположение о взаимной независимости уровней случайной компоненты можно проверить посредством ряда критериев. Одним из самых удобных, широко применяемых среди них является критерий Дарбина – Уотсона.

Значение этого критерия вычисляется по формуле

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}.$$

Если значение d находится в интервале (2; 4), то он заменяется на d' по формуле $d' = 4 - d$ и далее имеют дело со значениями d' .

Значения d (или d'), вычисленные по этим формулам, сравниваются с нижним критическим значением d_1 и верхним критическим значением d_2 статистики Дарбина – Уотсона, взятыми из таблицы.

Для адекватных моделей можно поставить вопрос об оценке их точности. При оценке точности модели рассматривается отклонение моделируемого показателя от реально вычисленного по модели значения.

В качестве статистических показателей точности вводятся следующие величины:

1) среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}$$

2) средняя относительная ошибка

$$\bar{\varepsilon}_{\text{отн}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \tilde{y}_i}{y_i} \right| \cdot 100 \%$$

3) коэффициент сходимости

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

4) коэффициент детерминации

$$R^2 = 1 - \varphi^2$$

С помощью этих показателей мы имеем возможность из нескольких адекватных моделей, предлагаемых для рассматриваемого процесса, выбрать имеющую наибольшую точность.

Вопросы для повторения и контроля :

1. Что вы знаете о динамических рядах и временных рядах, тренде, их компонентах?
2. Как определяется наличие тренда методом проверки разности средних уровней?
3. Как определяется наличие тренда методом Фостера – Стьюарта?
4. Как проверяются трендовые модели на адекватность?
5. Что вы знаете об оценках точности адекватных моделей?

Тема № 5

Линейные модели в экономике

План :

1. Модель межотраслевого баланса — модель Леонтьева.
2. Коэффициенты затрат, матрица затрат, условия продуктивности модели Леонтьева.
3. Модель Неймана.

Использование элементов алгебры матриц является одним из основных методов решения многих экономических задач. Этот вопрос стал особенно актуальным при разработке и использовании баз данных: при работе с ними почти вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой — потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного рода. Впервые эта проблема была сформулирована в 1936 г. в виде математической модели в трудах известного американского экономиста В.Леонтьева, который попытался проанализировать причины экономической депрессии в США 1929–1932 гг. Эта модель основана на алгебре матриц и использует аппарат матричного анализа.

Для простоты будем полагать, что производственная сфера хозяйства представляет собой n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени; в ряде случаев такой единицей служит год.

Введем следующие обозначения:

x_i — общий объем продукции i -й отрасли (ее валовый выпуск);

Введем в рассмотрение векторы-столбцы объемов произведенной продукции (вектор валового выпуска), объемов продукции конечного потребления (вектор конечного потребления) и матрицу коэффициентов прямых затрат:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Тогда система уравнений (5.3) в матричной форме имеет вид

$$\bar{x} = A \bar{x} + \bar{y}. \quad (5.5)$$

Обычно это соотношение называют *уравнением линейного межотраслевого баланса*. Вместе с описанием матричного представления (5.4) это уравнение носит название *модели Леонтьева*.

Уравнение межотраслевого баланса можно использовать в двух целях. В первом, наиболее простом случае, когда известен вектор валового выпуска $\bar{x}$, требуется рассчитать вектор конечного потребления $\bar{y}$. Во втором случае уравнение межотраслевого баланса используется для целей планирования со следующей формулировкой задачи: для периода времени T (например, год) известен вектор конечного потребления $\bar{y}$ и требуется определить вектор $\bar{x}$ валового выпуска. Здесь необходимо решать систему линейных уравнений (5.5) с известной матрицей A и заданным вектором $\bar{y}$.

Между тем система (5.5) имеет ряд особенностей, вытекающих из прикладного характера данной задачи; прежде всего — все элементы матрицы A и векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ должны быть неотрицательными.

Матрица A , все элементы которой неотрицательны, называется *продуктивной*, если для любого вектора $\bar{y}$ с неотрицательными компонентами существует решение уравнения (5.5) — вектор $\bar{x}$, все элементы которого неотрицательны. В таком случае и модель Леонтьева называется продуктивной.

Перепишем систему (5.5) с использованием единичной матрицы E в виде

$$(E - A) \bar{x} = \bar{y}.$$

Если существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$, то существует и единственное решение уравнения (5.5)

$$\bar{x} = (E - A)^{-1} \bar{y}.$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы A . Приведем два из них.

1. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.

2. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1 \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1,$$

причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Т а б л и ц а 5.1

№	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск, ден. ед.
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	15	50
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	3	3	50	100

Рассмотрим применение модели Леонтьева на несложных примерах.

Пример 1. В табл. 5.1 приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной в соответствии с приведенными выше критериями.

Решение. В табл. 5.1 приведены составляющие баланса в соответствии с соотношениями (5.4): x_{ij} — первые пять

столбцов, y_i — шестой столбец, x_i — последний столбец ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$). Согласно формулам (5.2) и (5.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,15 & 0,12 & 0,48 & 0,46 & 0,16 \\ 0,10 & 0,03 & 0,70 & 0,30 & 0,07 \\ 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,20 & 0,10 \\ 0,10 & 0,05 & 0,20 & 0,10 & 0,05 \\ 0,07 & 0,15 & 0,30 & 0,20 & 0,03 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы A положительны, однако нетрудно видеть, что их суммы в третьем и четвертом столбцах больше единицы. Следовательно, условия второго критерия продуктивности не соблюдены, и матрица A не является продуктивной. Экономическая причина этой непродуктивности заключается в том, что внутреннее потребление отраслей 3 и 4 слишком велико в соотношении с их валовыми выпусками.

Т а б л и ц а 5.2

№	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машиностроение	20	10	10	10	50

Пример 2. Таблица 5.2 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить, соответственно, до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления, а также матрицу коэффициентов прямых затрат. Согласно формулам (5.2) и (5.4), имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного

потребления новый вектор конечного потребления будет иметь вид

$$\bar{y}_* = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\bar{x}_*$, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица A не изменяется. В таком случае компоненты x_1, x_2, x_3 неизвестного вектора $\bar{x}_*$ находятся из системы уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\bar{x}_* = A \bar{x}_* + \bar{y}_* \quad \text{или} \quad (E - A) \bar{x}_* = \bar{y}_*. \quad (5.7)$$

Матрица этой системы имеет вид

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,40 \\ -0,10 & 0,90 & -0,40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений (5.7) при заданном векторе правой части (5.6) (например, методом Гаусса) дает новый вектор $\bar{x}_*$ как решение уравнений межотраслевого баланса:

$$\bar{x}_* = \begin{pmatrix} 152,1 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того, чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного потребления, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,1 %, уровень энергетики — на 35,8 % и выпуск машиностроения — на 85 % — по сравнению с исходными величинами, указанными в табл. 5.2.

Теперь перейдем к более общей модели Неймана. Рассмотрим экономику, описываемую парой (C, K) , где C — пространство товаров, а K — множество производственных процессов, перерабатывающих некоторые количества товаров в другие количества тех же товаров. Под товаром (продуктом) понимаются как первичные факторы производства (земля, труд) и

сырье (нефть, уголь), так и конечные продукты производства, услуги и т.п.

Пусть товаров всего n , тогда C есть неотрицательный октант n -мерного пространства. Множество K производственных процессов имеет в своей основе конечное число процессов $Q_1, \dots, Q_m$, которые называются *базисными*. Каждый базисный процесс представляет собой пару векторов $Q_j = (A_j, B_j)$ из C . Содержательный смысл процесса Q_j таков: он затрачивает вектор $A_j = (a_{ij})$ и выпускает вектор $B_j = (b_{ij})$, т.е. перерабатывает вектор A_j в вектор B_j . По смыслу все векторы A_j, B_j неотрицательны. Обозначив $A = (A_1, \dots, A_m)$, $B = (B_1, \dots, B_m)$, получаем, что технология рассматриваемой модели задается парой неотрицательных матриц A, B ; матрица A называется *матрицей затрат*, B — *матрицей выпуска*.

Комбинируя базисные процессы, можно получить новые процессы. Так, возьмем неотрицательные числа z_j ($j = 1, 2, \dots, m$) и определим новый производственный процесс

$z_1 Q_1 + \dots + z_m Q_m$, в котором затраты есть вектор $\sum_{j=1}^m z_j A_j$, а

выпуск есть вектор $\sum_{j=1}^m z_j B_j$; полученный производственный

процесс кратко обозначим (AZ, BZ) . Вектор-столбец $Z = (z_j)$ называется *вектором интенсивностей*. Получившееся более широкое множество процессов и обозначим K .

Можно заметить, что в то время как базисные процессы $Q_1, \dots, Q_m$ соответствуют, вообще говоря, реальным отраслям, заводам, фабрикам, каждый элемент $(X, Y) \in K$ есть некоторый фиктивный процесс, описывающий определенный режим совместной работы этих отраслей, заводов, фабрик. При этом X есть вектор затрат, Y — вектор выпуска.

Рассмотренная ранее модель Леонтьева действительно есть частный случай модели Неймана при $m = n$, $B = E$. Основное отличие модели Неймана состоит в том, что всякий базисный процесс может выпускать не один продукт. Ясно также, что модель Неймана линейна.

Вопросы для повторения и контроля :

1. Какова постановка задачи расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного рода, и что такое соотношения баланса?
2. Что вы знаете о модели Леонтьева, что такое коэффициенты прямых затрат, уравнение линейного межотраслевого баланса?
3. Какая матрица называется продуктивной, что такое матрица полных затрат и какие критерии продуктивности матрицы вы знаете?
4. Что вы знаете о модели Неймана, что такое матрица затрат, матрица выпуска, вектор интенсивностей?

Тема № 6

Эластичность в экономическом анализе

План :

1. Понятие эластичности и ее свойства.
2. Виды эластичностей в экономике.
3. Факторы, определяющие эластичность спроса.
4. Эластичность и налоговая политика.

Важнейшим направлением применения дифференциального исчисления в экономике является введение с его помощью понятия эластичности. Коэффициент эластичности показывает относительное изменение исследуемого экономического показателя под действием единичного относительного изменения экономического фактора, от которого он зависит при неизменных остальных влияющих на него факторах.

Пусть величина y зависит от x , и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Производная y'_x этой функции дает величину мгновенной скорости изменения пройденного за время x пути y , производная производственной функции дает предельную производительность труда и т.д. Однако в экономике этот показатель неудобен тем, что он зависит от выбора единиц измерения.

Например, если мы рассмотрим функцию спроса на сахар Q от его цены P , то увидим, что значение производной при каждой цене P (измеряемой в сумах)

$$Q'_P = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

зависит от того, измеряется ли спрос на сахар в килограммах или в центнерах. В первом случае производная измеряется в кг/сум, во втором — в ц/сум, соответственно ее значение при одном и том же значении цены будет различным в зависимости от единиц измерения величины спроса.

Поэтому для измерения чувствительности изменения функции к изменению аргумента в экономике изучается связь не абсолютных изменений переменных x и y (Δx и Δy), а их

относительных или процентных изменений. Иначе говоря, в экономике чрезвычайно удобно задавать такие вопросы: на сколько процентов изменится спрос на товар, если цена на него увеличится на 1%? На сколько процентов изменится предложение товара, если цена на него увеличится на 1%? и т.д. Такие вопросы и ответы на них вводят новое понятие «эластичность функции по аргументу» или относительная производная.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительных изменений переменных y и x . Если эластичность изменения переменной y при изменении переменной x обозначить через $E_x(y)$, то, используя определение производной, получаем

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{y} \right) / \left(\frac{\Delta x}{x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y}$$

или

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y}. \quad (6.1)$$

Теперь приведем свойства эластичности.

1. Эластичность — безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины y и x : $E_{ax}(by) = E_x(y)$.

2. Эластичности взаимно обратных функций — взаимно обратные величины: $E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}$.

Например, эластичность величины спроса по цене обратна эластичности цены по величине спроса: $E_p(Q) = \frac{1}{E_Q(P)}$.

3. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x , равна сумме эластичностей: $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$.

4. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x , равна разности

эластичностей: $E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$.

5. Эластичность суммы двух функций $u(x)$ и $v(x)$ может быть найдена по формуле: $E_x(u + v) = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u + v}$.

Функция с бесконечной эластичностью во всех точках называется *совершенно эластичной*, с нулевой эластичностью во всех точках — *совершенно неэластичной*.

Существуют несколько видов эластичностей в экономике.

Эластичность спроса по цене (прямая)

$$E_p(q) = \left(\frac{dq}{q} \right) / \left(\frac{dp}{p} \right) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$$

показывает относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса на какой-либо товар при изменении цены этого товара на один процент и характеризует чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию. Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине больше единицы, то спрос называется *эластичным* (*совершенно эластичным* при бесконечно большой величине эластичности спроса). Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине меньше единицы, то спрос называется *неэластичным* (*совершенно неэластичным* при нулевой эластичности спроса). И, наконец, если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине равна единице, то говорят о *спросе с единичной эластичностью*.

Эластичность спроса по доходу

$$E_I(q) = \left(\frac{dq}{q} \right) / \left(\frac{dI}{I} \right) = \frac{dq}{dI} \cdot \frac{I}{q}$$

характеризует относительное изменение (в процентах) величины спроса на какой-либо товар при изменении дохода потребителей этого товара на один процент. Положительная эластичность спроса по доходу характеризует нормальные (качественные) товары, а отрицательная величина — малоценные (некачественные) товары.

Перекрестная эластичность спроса по цене

$$E_{p_j}(q_i) = \left(\frac{dq_i}{q_i} \right) / \left(\frac{dp_j}{p_j} \right) = \frac{dq_i}{dp_j} \cdot \frac{p_j}{q_i}$$

характеризует относительное изменение (в процентах) величины спроса на один товар при изменении цены на другой товар (замещающее или дополняющее его в потреблении) на один процент. Положительный знак перекрестной эластичности спроса по цене свидетельствует о замещаемости товаров, а отрицательный — о дополняемости.

Ценовая эластичность ресурсов

$$E_{p_j}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i} \right) / \left(\frac{dp_j}{p_j} \right) = \frac{dR_i}{dp_j} \cdot \frac{p_j}{R_i}$$

характеризует относительное изменение (в процентах) величины спроса на какой-либо ресурс (например, труд) при изменении цены этого ресурса (соответственно, заработной платы) на один процент.

Эластичность замещения одного ресурса другим

$$E_{R_j}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i} \right) / \left(\frac{dR_j}{R_j} \right) = \frac{dR_i}{dR_j} \cdot \frac{R_j}{R_i}$$

характеризует необходимое изменение (в процентах) величины одного ресурса (например, капитала) при изменении количества другого ресурса (например, труда) на один процент с тем, чтобы выпуск при этом не изменился.

Рассмотрим факторы, определяющие эластичность спроса.

- *Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше замещаемость товара.* Замещаемость товара обычно характеризуется наличием и количеством заместителей. Чем больше у потребителей возможностей заместить потребление данного товара потреблением других товаров, тем выше эластичность спроса на этот товар.

- *Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше удельный вес расходов на данный товар в доходе потребителя.* Например, спрос потребителя на спички практически не изменится, даже если их цена возрастет в несколько раз, что свидетельствует о его низкой эластичности.

▪ *Эластичность спроса по цене тем выше, чем ниже субъективная необходимость в данном товаре.* Обычно считается, что спрос на предметы роскоши более эластичен, чем спрос на предметы первой необходимости. Это не совсем правильно, поскольку решающим фактором здесь является именно субъективная необходимость в данном товаре, которая на отдельные предметы роскоши может в силу моды, традиций или других причин может быть достаточно высокой и приводить к низкой эластичности спроса на него. Примером этому служит спрос на цветы 8 марта или 1 октября.

▪ *Эластичность спроса по цене обычно выше, чем больше промежуток времени.* Другими словами, долгосрочная эластичность спроса предполагается выше, чем краткосрочная эластичность. Это обычно обосновывается тем, что за долгосрочный промежуток времени потребители могут изменить привычки и найти больше заменителей данному товару.

Когда правительство вводит те или иные налоги на какие-либо товары, оно должно иметь ответы на следующие вопросы:

1. На какие товары вводить налог?
2. С кого взимать налог — с производителей или потребителей?
3. Какова будет величина дополнительных поступлений в бюджет?
4. На кого ляжет основное налоговое бремя?
5. Если налог уже взимается, то стоит ли увеличивать налоговую ставку для покрытия дефицита бюджета?

Интуитивно казалось бы, что основное налоговое бремя ляжет на тех, с кого будут взимать налог, и что чем больше будет налоговая ставка, тем больше будут поступления от налогов в бюджет. Более детальный экономический анализ показывает, что величина налогового бремени определяется не формальными плательщиками налога, а величинами эластичности спроса и предложения. Аналогично, увеличение налоговой ставки, эквивалентное увеличению цены облагаемого налогом товара может привести как к увеличению налоговых поступлений в бюджет, так и к их уменьшению, опять же в зависимости от эластичности.

Для того чтобы разобраться в этих вопросах, рассмотрим более детальную модель взимания налога, основанную на концепции спроса и предложения. Предположим вначале, что налог формально взимается с производителей (рис. 6.1), и для простоты будем считать, что налог с единицы продукции t постоянен и не зависит от величины выпуска (это не так, если налог определяется в процентах с выпуска или объема продаж). В этом случае введение налога приводит к параллельному сдвигу вверх кривой предложения S на величину налоговой ставки t .

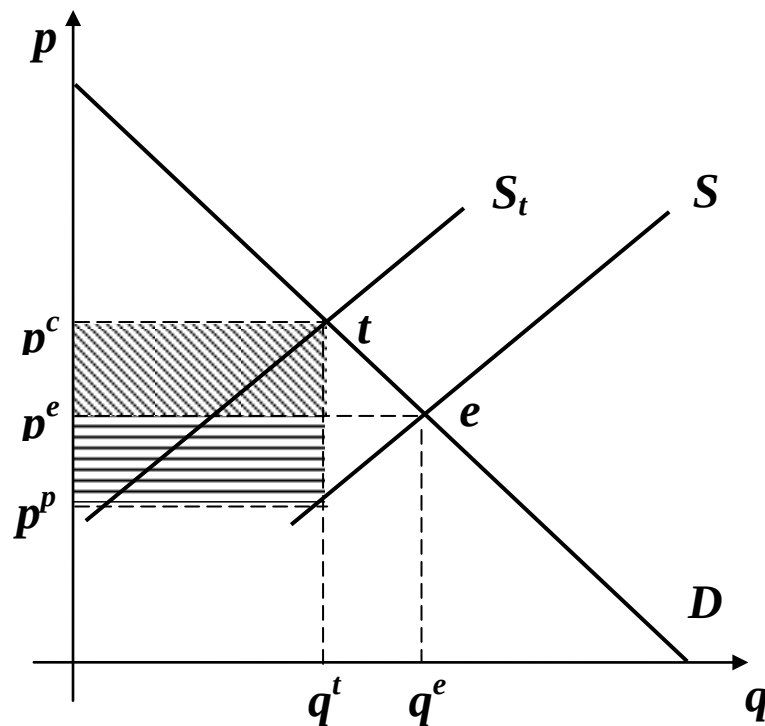


Рис. 6.1.

Из рис. 6.1 видно, что при введении налога рыночная цена товара повышается от p^e до p^c , которая теперь отличается от цены производителей p^p на величину налога t , а объем продаж уменьшается от q^e до q^t . Суммарная величина налоговых поступлений в бюджет T определяется как произведение налоговой ставки t на объем продаж q^t :

$$T = t \cdot q^t.$$

Одновременно это же выражение определяет и величину налогового бремени, часть которого

$$T_c = q^t \cdot (p^c - p^e)$$

падает на плечи потребителей, а другая часть

$$T_p = q^t \cdot (p^e - p^p)$$

— на производителей.

Нетрудно показать, что сумма этих частей равна налоговым поступлениям в бюджет:

$$T_c + T_p = T = q^t \cdot (p^c - p^p),$$

а соотношение этих частей обратно пропорционально соотношению эластичностей спроса и предложения:

$$\frac{T_c}{T_p} = \frac{p^c - p^e}{p^e - p^p} = - \frac{E^S}{E^D},$$

$$\text{здесь } E^D = \left(\frac{q^t - q^e}{q^e} \right) \bigg/ \left(\frac{p^c - p^e}{p^e} \right); \quad E^S = \left(\frac{q^t - q^e}{q^e} \right) \bigg/ \left(\frac{p^p - p^e}{p^e} \right).$$

Анализируя его, мы видим, что большее налоговое бремя падает на экономического агента с меньшей эластичностью, у которого меньше возможностей для ухода от налогового бремени. В частности, если эластичность спроса равна нулю, то все налоговое бремя ляжет на плечи потребителей, так как независимо от величины налога (а, следовательно, и от величины цены) потребители не изменят объема покупок (рис.6.2).

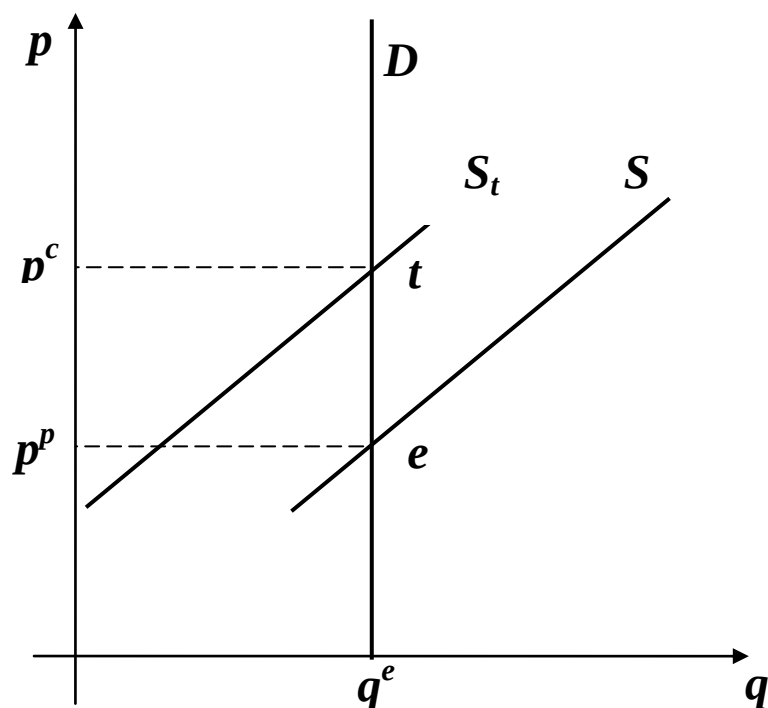


Рис. 6.2.

Если же спрос на какой-либо товар характеризуется совершенной эластичностью, то в проигрыше оказываются

производители, так как потребители уходят от налога, снижая величину спроса и переходя к потреблению товаров-субститутов. В этом случае все налоговое бремя падает на плечи производителей (рис.6.3).

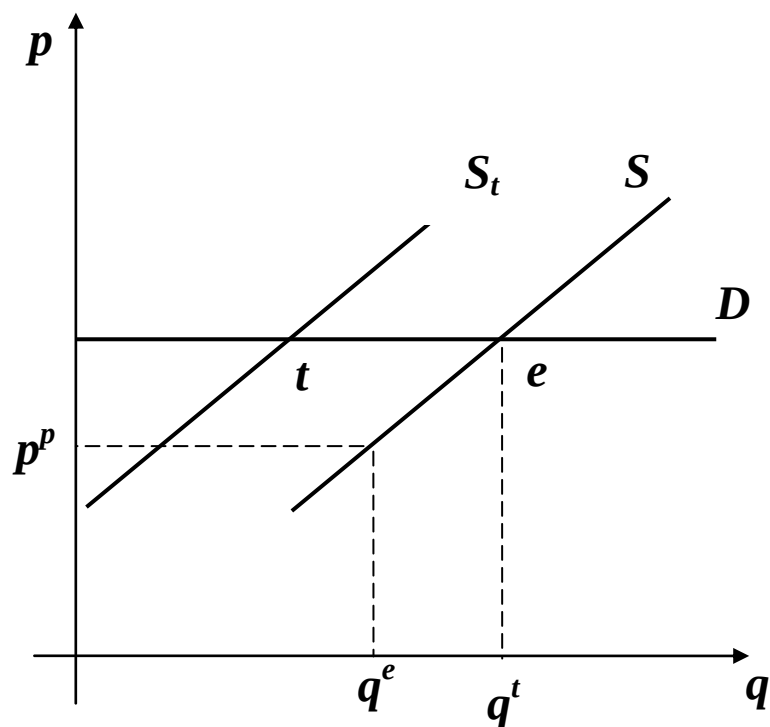


Рис. 6.3.

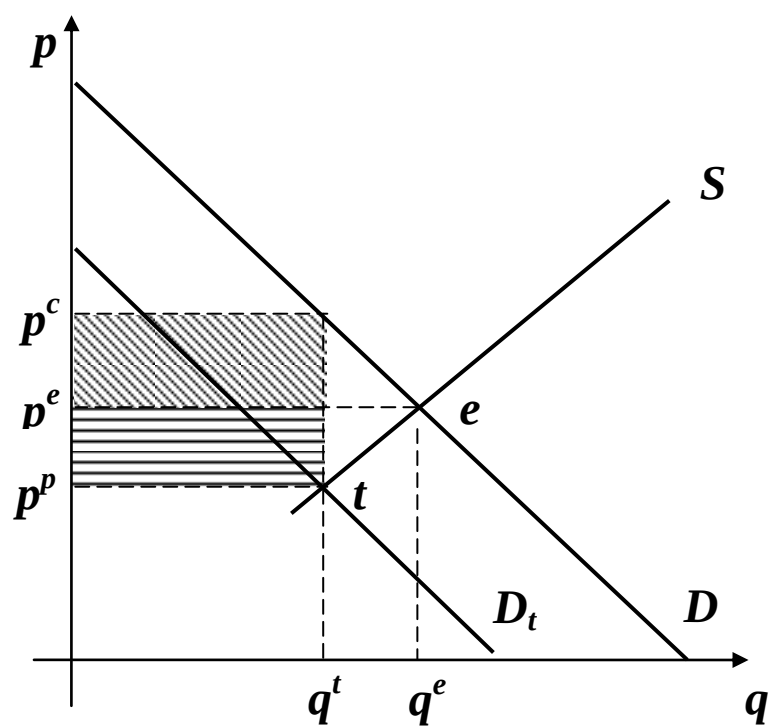


Рис. 6.4.

Аналогично происходит и перераспределение налогового бремени в случае, когда налог формально взимается с

потребителей. Например, оплачивая какую-либо покупку, покупатель платит по дополнительному чеку определенную сумму или процент от суммы покупки государству. В этом случае введение налога приводит к сдвигу кривой спроса D влево (рис.6.4).

Сравнивая рисунок 6.4 с рисунком 6.1, описывающим ситуацию взимания налога с производителей, можно заметить, что распределение налогового бремени между потребителями и производителями происходит так же, как и в предыдущем случае, и опять обратно пропорционально их эластичностям. Таким образом, формальные и фактические плательщики налога не совпадают. Независимо от того, кто является формальным плательщиком налога, фактическим плательщиком оказывается экономический агент с меньшей эластичностью, особенно если эластичности спроса и предложения сильно различаются.

Рассматривая вопрос о влиянии величины налоговой ставки на величину налоговой выручки, можно получить формулу

$$E_t(T) = \frac{t}{T} \cdot \frac{dT}{dt} = 1 - \frac{\frac{t}{p^e}}{\frac{1}{|E^D|} + \frac{1}{E^S}}.$$

Из этой формулы видно, что налоговая выручка возрастает с увеличением налоговой ставки только до тех пор, пока доля ставки налога в цене товара меньше суммы обратных эластичностей спроса и предложения. Это дает возможность устанавливать высокие ставки налогообложения (существенно превышающие цену товара) на товары, спрос на которые неэластичен (или предложение которых неэластично). Примером этому служат акцизы на винно-водочные и табачные изделия.

Таким образом, эластичность спроса важна при принятии ценовых решений производителями, бизнесменами, владельцами стадионов, кинотеатров и других заведений, разработчиками государственной политики и другими экономическими субъектами.

Вопросы для повторения и контроля :

1. Что называется эластичностью функции и чем обосновывается применение ее в экономике?
2. Какие свойства эластичности вы знаете, что такое совершенно эластичная функция и совершенно неэластичная функция?
3. Что вы знаете об эластичности спроса по цене (прямой), что такое эластичный спрос, совершенно эластичный спрос, неэластичный спрос, совершенно неэластичный спрос, спрос с единичной эластичностью?
4. Что вы знаете об эластичности спроса по доходу и о перекрестной эластичности спроса по цене?
5. Что вы знаете о ценовой эластичности ресурсов и об эластичности замещения одного ресурса другим?
6. В чем суть первых двух факторов, определяющих эластичность спроса?
7. В чем суть последних двух факторов, определяющих эластичность спроса?
8. На какие вопросы должно иметь ответы правительство, когда оно вводит те или иные налоги на какие-либо товары, и на кого, на первый взгляд, должно ложиться основное налоговое бремя?
9. Как определяется экономический агент, на которого ляжет основное налоговое бремя, в модели взимания налога, когда налог формально взимается с производителей?
10. Как определяется экономический агент, на которого ляжет основное налоговое бремя, в модели взимания налога, когда налог формально взимается с потребителей?
11. Какова формула, описывающая влияние величины налоговой ставки на величину налоговой выручки, и в чем ее суть?

Тема № 7

Модели потребительского спроса

План :

1. Функция полезности. Задача потребительского выбора.
2. Решение задачи потребительского выбора и его свойства.
3. Общая модель потребительского выбора.
4. Взаимозаменяемость товаров. Эффекты компенсации.

Пусть потребитель располагает доходом I , который он полностью тратит на приобретение товаров (продуктов), т.е. величина I — это не доход, а расход данного потребителя. Учитывая структуру цен, доход и собственные предпочтения, потребитель приобретает определенные количества товаров, и математическая модель такого его поведения называется *моделью потребительского выбора*.

Рассмотрим потребительские наборы из двух товаров. *Потребительский набор* (для краткости *набор*) — это вектор (x_1, x_2) , координата x_1 которого равна количеству единиц первого товара, а координата x_2 равна количеству единиц второго товара.

Выбор потребителя характеризуется отношением предпочтения, суть которого состоит в следующем. Считается, что потребитель про каждые 2 набора может сказать, что либо один из них более желателен, чем другой, либо потребитель не видит между ними разницы. Отношение предпочтения транзитивно, т.е. если набор $A = (a_1, a_2)$ предпочтительнее набора $B = (b_1, b_2)$, а набор B предпочтительнее набора $C = (c_1, c_2)$, то набор A предпочтительнее набора C .

Функцией полезности потребителя называется функция $u(x_1, x_2)$, определенная на множестве потребительских наборов (x_1, x_2) , значение $u(x_1, x_2)$ которой на потребительском наборе (x_1, x_2) равно потребительской оценке потребителя для этого набора. Потребительскую оценку $u(x_1, x_2)$ набора (x_1, x_2) принято называть *уровнем* (или *степенью*) удовлетворения

потребностей потребителя, если он приобретает или потребляет данный набор (x_1, x_2) . Каждый потребитель имеет, вообще говоря, свою функцию полезности. Если набор A предпочтительнее набора B , то $u(A) > u(B)$.

Функция полезности удовлетворяет следующим свойствам:

1. Возрастание потребления одного продукта при постоянном потреблении другого продукта ведет к росту потребительской оценки, т.е.

а) если $x_1^2 > x_1^1$, то $u(x_1^2, x_2) > u(x_1^1, x_2)$ или, другими словами, $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = u'_1 > 0$;

б) если $x_2^2 > x_2^1$, то $u(x_1, x_2^2) > u(x_1, x_2^1)$ или, другими словами, $\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u'_2 > 0$.

Первые частные производные называются *предельными полезностями* продуктов: u'_1 называется предельной полезностью первого продукта, а u'_2 — предельной полезностью второго продукта.

2. Предельная полезность каждого продукта уменьшается, если объем его потребления растёт (это свойство предельной полезности называется *законом убывания предельной полезности*), т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u''_{11} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u''_{22} < 0.$$

3. Предельная полезность каждого продукта увеличивается, если растёт количество другого продукта, т.е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = u''_{12} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} = u''_{21} > 0.$$

В этом случае продукт, количество которого фиксировано, оказывается относительно дефицитным. Поэтому дополнительная его единица приобретает большую ценность и может быть потреблена более эффективно. Данное свойство не столь очевидно, как свойства 1 и 2, и справедливо не для всех товаров: если товары могут полностью замещать друг друга в потреблении, свойство 3 не выполняется.

Примером функции полезности может служить функция

$$u(x_1, x_2) = a_1 \ln(x_1 - x_1^*) + a_2 \ln(x_2 - x_2^*),$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $x_1 > x_1^* \geq 0$, $x_2 > x_2^* \geq 0$.

Действительно, имеем

$$u'_1 = \frac{a_1}{x_1 - x_1^*} > 0, \quad u'_2 = \frac{a_2}{x_2 - x_2^*} > 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = -\frac{a_1}{(x_1 - x_1^*)^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{a_2}{(x_2 - x_2^*)^2} < 0,$$

т.е. выполнены свойства 1 и 2 функции полезности. Свойство 3 не выполнено, так как смешанные вторые частные производные функции $u(x_1, x_2)$ равны нулю.

Задача потребительского выбора (задача рационального поведения потребителя на рынке) заключается в выборе такого потребительского набора (x_1^0, x_2^0) , который максимизирует его функцию полезности при заданном бюджетном ограничении.

Бюджетное ограничение означает, что денежные расходы на продукты не могут превышать денежного дохода, т.е. $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$, где p_1 и p_2 — рыночные цены одной единицы соответственно первого и второго продуктов, а I — доход потребителя, который он готов потратить на приобретение первого и второго продуктов. Величины p_1 , p_2 и I заданы.

Формально задача потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1, x_2) \text{ (max)}$$

при условиях

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Набор (x_1^0, x_2^0) , который является решением задачи потребительского выбора, принято называть *оптимальным* для потребителя или *локальным рыночным равновесием* потребителя.

В приведенной постановке задача потребительского выбора является задачей нелинейного программирования. Однако если на каком-то потребительском наборе (x_1, x_2) бюджетное ограничение $p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I$ будет выполняться в виде строгого неравенства, то мы можем увеличить потребление какого-либо из

продуктов и тем самым увеличить функцию полезности. Следовательно, набор (x_1^0, x_2^0) , максимизирующий функцию полезности, должен обращать бюджетное ограничение в равенство, т.е. $p_1 x_1^0 + p_2 x_2^0 = I$.

Мы также будем считать, что в оптимальной точке (x_1^0, x_2^0) условия $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ выполняются автоматически, вытекая из свойств функции $u(x_1, x_2)$. Как правило, это действительно так. В то же время, если условия неотрицательности переменных не включать в явном виде в условие задачи, то она становится существенно проще с математической точки зрения.

Итак, задачу потребительского выбора можно заменить задачей на условный экстремум (ибо решение (x_1^0, x_2^0) этих двух задач одно и то же):

$$u(x_1, x_2) \text{ (max)}$$

при условии

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

Для решения этой задачи на условный экстремум применим метод Лагранжа.

Выписываем функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = u(x_1, x_2) + \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - I),$$

находим ее первые частные производные по переменным x_1, x_2, λ и приравниваем эти частные производные к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = u'_1 - \lambda \cdot p_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = u'_2 - \lambda \cdot p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - I = 0.$$

Исключив из полученной системы трех уравнений с тремя неизвестными неизвестную λ , получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_1, x_2

$$\frac{u'_1}{u'_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I,$$

из которой получим решение (x_1^0, x_2^0) задачи потребительского выбора.

Координаты x_1^0 и x_2^0 решения (x_1^0, x_2^0) задачи потребительского выбора есть функции параметров p_1, p_2 и I :

$$x_1^0 = x_1^0(p_1, p_2, I),$$

$$x_2^0 = x_2^0(p_1, p_2, I).$$

Полученные функции называются *функциями спроса* на первый и второй продукты. Важным свойством функций спроса является их однородность нулевой степени относительно цен и дохода, т.е. значения функций спроса инварианты по отношению к пропорциональным изменениям цен и дохода:

$$x_1^0(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_1^0(p_1, p_2, I),$$

$$x_2^0(\alpha p_1, \alpha p_2, \alpha I) = x_2^0(p_1, p_2, I)$$

для любого числа $\alpha > 0$. Это означает, что если все цены и доход изменяется в одно и то же число раз, величина спроса на продукт (первый или второй — безразлично) останется неизменной.

Решим одну простую задачу потребительского выбора с двумя товарами. Пусть неизвестные количества этих товаров равны x_1 и x_2 , а их рыночные цены — соответственно p_1 и p_2 . Рассматриваемая задача имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad (\max) \quad (7.1)$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I, \quad (7.2)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (7.3)$$

Как мы выяснили, бюджетное ограничение в оптимальной точке должно выполняться как равенство, и, поскольку оба товара жизненно необходимы (полезность равна нулю, если один из них отсутствует), требования неотрицательности переменных будут выполнены автоматически. Следовательно, решаемая задача математического программирования превращается в классическую задачу на условный экстремум. Записав необходимые условия экстремума (согласно которым, отношения предельных полезностей товаров должны равняться отношениям их рыночных цен, а бюджетное ограничение выполняется как равенство), получаем систему уравнений

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I.$$

Здесь первое условие означает, что в рассматриваемой задаче количества денег, затрачиваемые на оба товара, должны быть одинаковыми, то есть $x_2 \cdot p_2 = x_1 \cdot p_1$. Это вытекает из равенства «весов», или показателей степени у переменных x_1 и x_2 в функции полезности. Итак, $x_2 \cdot p_2 = x_1 \cdot p_1 = \frac{I}{2}$ и функции спроса приобретают вид

$$x_1 = \frac{I}{2 \cdot p_1}; \quad x_2 = \frac{I}{2 \cdot p_2}. \quad (7.4)$$

Таким образом, расход на каждый товар составляет половину общего дохода потребителя, и, чтобы найти необходимое количество каждого товара, следует разделить расходуемую на него сумму на его цену.

Теперь рассмотрим свойства задачи потребительского выбора с произвольным числом товаров и целевой функцией общего вида.

Пусть заданы целевая функция полезности потребителя $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (x_i — количество i -го товара), вектор цен $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ и доход I . Записав бюджетное ограничение и ограничения на неотрицательность, получаем задачу

$$u(\bar{x}) \text{ (max)}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \bar{p} \bar{x} &\leq I, \\ \bar{x} &\geq 0, \end{aligned}$$

где $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\bar{p} \bar{x} = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$.

Будем, как и ранее, считать, что неотрицательность переменных обеспечивается свойствами целевой функции и бюджетного ограничения. В этом случае можно записать функцию Лагранжа и исследовать ее на безусловный экстремум.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа $L(\bar{x}, \lambda) = u(\bar{x}) + \lambda(\bar{p} \bar{x} - I)$ — равенство нулю частных производных:

$$L'_i = u'_i + \lambda p_i = 0 \text{ для всех } i = 1, n \quad (7.5)$$

и

$$L'_\lambda = \bar{p} \bar{x} - I = 0.$$

Отсюда вытекает, что для всех i, j в точке $\bar{x}^0$ локального рыночного равновесия выполняется равенство

$$\frac{u'_i}{u'_j} = \frac{p_i}{p_j}, \quad (7.6)$$

которое получается после перенесения в правую часть вторых слагаемых в условиях (7.5) и деления i -го равенства на j -ое. Итак, в точке оптимума отношение предельных полезностей любых двух товаров равно отношению их рыночных цен. Равенство (7.6) можно переписать и в другой форме:

$$\frac{u'_i}{p_i} = \frac{u'_j}{p_j}.$$

Последнее означает, что дополнительная полезность, приходящая на дополнительную единицу денежных затрат, в точке оптимума одинакова по всем видам товаров. Если бы это было не так, то по крайней мере одну денежную единицу можно было бы перераспределить так, чтобы выросло благосостояние (значение функции полезности) потребителя. Если бы для некоторых i, j имело бы место $\frac{u'_i}{p_i} > \frac{u'_j}{p_j}$, то некоторое количество

денег можно было бы перераспределить от i -го товара к j -му, увеличив уровень благосостояния.

Если функция спроса имеет вид $x_i = \frac{I}{np_i}$, то спрос на i -й

товар не зависит от цены на любой j -й товар. Вообще говоря, перекрестные функции спроса от цен характеризуют такие свойства товаров, как взаимозаменяемость и взаимодополняемость. Если при росте цены и снижении спроса на i -й товар растет спрос на j -й товар — эти товары взаимозаменяемы. Наоборот, если спрос на j -й товар также падает, — они взаимодополняемы.

Заметим, что реальная взаимозаменяемость может искажаться общим снижением благосостояния при росте цены i -го товара: j -й товар может заменять i -й в потреблении, но спрос на него может не расти, поскольку снизилось общее

благосостояние потребителя. Для снятия этого искажения используются понятие *компенсированного изменения цены*, то есть такого, которое сопровождается увеличением дохода потребителя, позволяющим ему поддерживать прежний уровень благосостояния.

Для формального анализа компенсационных эффектов рассмотрим две задачи.

Сначала решим задачу (7.1) – (7.3) с ценами товаров $p_1 = 10$, $p_2 = 2$ и с доходом потребителя $I = 60$. Тогда, согласно

формуле (7.4), $x_1 = \frac{60}{2 \cdot 10} = 3$, $x_2 = \frac{60}{2 \cdot 2} = 15$ и $u(x_1, x_2) = 45$.

Пусть теперь p_2 меняется с 2 до 7. Каков необходимый размер компенсации? Чтобы приобрести прежний оптимальный набор, потребителю необходимо дополнительно $(7 - 2) \cdot 15 = 75$ денежных единиц. Однако прежняя структура потребления не будет оптимальной при новых ценах, так как в этом случае

$x_1 = \frac{60 + 75}{2 \cdot 10} = 6,75$, $x_2 = \frac{60 + 75}{2 \cdot 7} \approx 9,64$ и $u(x_1, x_2) \approx 65$.

Пусть для поддержания прежнего уровня благосостояния потребитель получает дополнительно M денежных единиц. Тогда при новых ценах его спрос на первый и второй товар будет

равен соответственно $x_1 = \frac{60 + M}{2 \cdot 10}$ и $x_2 = \frac{60 + M}{2 \cdot 7}$. Целевая

функция $x_1 \cdot x_2$ будет равна $\frac{(60 + M)^2}{10 \cdot 7 \cdot 4}$, и это выражение должно

равняться начальному $u(x_1, x_2) = 45$. Отсюда $M \approx 52,25$, что существенно меньше, чем 75.

Теперь решим задачу (7.1) – (7.3) в более общем виде. Очевидно, что

$$x_i = \frac{I}{2 p_i}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{I}{2 p_i^2}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial I} = \frac{1}{2 p_i}; \quad \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0 \quad (i, j = \overline{1, 2}).$$

Пусть теперь цена p_1 выросла в z раз ($z > 1$), и при этом потребитель получает необходимую компенсацию. Новый размер дохода обозначим через I^* , а спроса — x_1^* и x_2^* .

Очевидно, что

$$x_1^* = \frac{I^*}{2z p_1}; \quad x_2^* = \frac{I^*}{2 p_2},$$

а условие компенсации имеет вид

$$\frac{(I^*)^2}{4z p_1 p_2} = \frac{I^2}{4 p_1 p_2},$$

откуда

$$I^* = \sqrt{z} \cdot I; \quad x_1^* = \frac{x_1}{\sqrt{z}}; \quad x_2^* = x_2 \sqrt{z}.$$

Итак, спрос на первый товар в случае с компенсацией сократится в $\sqrt{z}$ раз (а не z раз, как без нее), а спрос на второй товар в $\sqrt{z}$ раз вырастет. В случае роста цены второго товара ситуация будет полностью симметричной.

Таким образом, $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right)_{comp} > 0$ при $i = 1, j = 2$ или при

$i = 2, j = 1$. Индекс *comp* означает, что перекрестная частная производная спроса рассчитывается при необходимой для поддержания прежнего уровня благосостояния компенсации дохода. Условие компенсации снимает «эффект дохода», оставляя лишь «эффект замены», что позволяет более точно определить понятие взаимозаменяемости и взаимодополняемости товаров и оценивать эти характеристики.

i -й и j -й товары называются *взаимозаменяемыми*, если $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right)_{comp} > 0$ и $\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \right)_{comp} > 0$ (эти два условия равносильны), и

взаимодополняемыми, если $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \right)_{comp} < 0$ и $\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \right)_{comp} < 0$.

Рассчитаем теперь эти частные производные для рассматриваемой задачи, когда p_1 растет в z раз. В этом случае приращения имеют вид

$$\Delta x_1 = \frac{x_1}{\sqrt{z}} - x_1; \quad \Delta x_2 = x_2 \sqrt{z} - x_2; \quad \Delta p_1 = z p_1 - p_1.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \right)_{comp} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{x_1 (1 - \sqrt{z})}{p_1 \sqrt{z} \cdot (z - 1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \left(- \frac{x_1}{p_1 \sqrt{z} (1 + \sqrt{z})} \right) =$$

$$= - \frac{x_1}{2} p_1 = - \frac{I}{4 p_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1} \right)_{comp} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{x_2 (\sqrt{z} - 1)}{p_1 \sqrt{z} \cdot (z - 1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{x_2}{p_1 \sqrt{z} (\sqrt{z} + 1)} = \frac{x_2}{2 p_2} = \frac{I}{4 p_1 p_2}.$$

Последняя величина положительна, что свидетельствует о взаимозаменяемости товаров в рассматриваемой задаче.

Вопросы для повторения и контроля :

1. Что называется моделью потребительского выбора и что такое потребительский набор?
2. В чем суть выбора потребителя, что называется функцией полезности потребителя и что такое уровень или степень удовлетворения потребностей потребителя?
3. Какими свойствами обладает функция полезности, что называется предельной полезностью продукта, что такое закон убывания предельной полезности?
4. Что такое задача потребительского выбора, бюджетное ограничение, локальное рыночное равновесие потребителя?
5. Какой задачей можно заменить задачу потребительского выбора и почему?
6. Как применяется метод Лагранжа для решения задачи потребительского выбора, что называется функцией спроса, каким важным свойством она обладает?
7. Каковы свойства задачи потребительского выбора с произвольным числом товаров и целевой функцией общего вида?
8. Что такое компенсированное изменение цены и для чего оно используется?
9. Что вы знаете об эффектах компенсации в задаче потребительского выбора, при каких условиях товары будут взаимозаменяемыми, а при каких — взаимодополняемыми?

Тема № 8

Производственные модели

План :

1. Производственные функции и их свойства.
2. Изокванты, изоклины и изокосты производственных функций.
3. Функция затрат. Средние и предельные затраты.

Моделирование всякого экономического производственного процесса, а также производственной технологии любой производственной единицы, независимо от того, будет ли это все народное хозяйство в целом, отрасль материального производства, экономическая территория, производственное объединение или отдельное предприятие, осуществляется на основе закономерностей и распределения материального производства, а также потребления. При достижении этой цели важную роль играют производственные функции.

Производственная функция есть экономико-математическое выражение зависимости результатов производственной деятельности от показателей-факторов, обусловивших эти результаты. В условиях экономической действительности результат процесса производства определяется действием большого количества различных факторов – технических, экономических, социальных, природных. Все эти факторы учесть в производственной функции невозможно, т.к. одни из факторов не поддаются количественному выражению, а воздействие других практически мало. Поэтому производственная функция включает в себя те факторы, которые оказывают решающее воздействие на изучаемый показатель.

Производственной функцией называется функция

$$y = f(\bar{x}, \bar{a}) = f(x_1, \dots, x_n, \bar{a}),$$

независимые переменные $x_1, \dots, x_n$ которой принимают значения объемов затрачиваемых или используемых ресурсов (факторов производства) (число переменных n равно числу ресурсов), а значение функции имеет смысл величин объемов выпуска. Здесь $\bar{a}$ — вектор параметров производственной функции (ПФ).

Пример 8.1. Возьмем ПФ f в виде $f(x, a, b) = ax^b$, где x — величина затрачиваемого ресурса (например, рабочего времени), $f(x, a, b)$ — объем выпускаемой продукции (например, число готовых к отправке холодильников). Величины $a > 0$ и $0 < b \leq 1$ — параметры ПФ f , вектор параметров есть двумерный вектор (a, b) .

Из свойств функции $y = ax^b$ вытекает, что с ростом величины затрачиваемого ресурса x объем выпуска y растет, однако при этом каждая дополнительная единица ресурса дает все меньший прирост объема y выпускаемой продукции. Отмеченное обстоятельство (рост объема y и уменьшение прироста объема y с ростом величины x) отражает фундаментальное положение экономической теории, называемое *законом убывающей эффективности*. ПФ $y = ax^b$ является типичным представителем широкого класса однофакторных производственных функций.

ПФ могут иметь разные области использования. Принцип «затраты – выпуск» может быть реализован как на микро-, так и на макроэкономическом уровне.

На микроэкономическом уровне в роли производственной системы могут выступать отдельное предприятие (фирма), отрасль, межотраслевой производственный комплекс. Здесь производственные функции строятся и используются в основном для решения задач анализа и планирования, а также задач прогнозирования.

На макроэкономическом же уровне в роли производственной системы выступает регион или страна в целом (точнее хозяйственная система региона или страны). Здесь производственные функции строятся и активно используются для решения всех трех типов задач (анализа, планирования и прогнозирования).

Производственные функции подразделяются на статические и динамические. В *статических производственных функциях* время не учитывается как фактор, изменяющий основные характеристики изучаемой зависимости. *Динамические производственные функции* включают фактор времени: время может в них рассматриваться как самостоятельная переменная,

влияющая на результат; параметры и показатели-факторы могут рассматриваться как функции времени.

Пример 8.2. Для моделирования отдельного региона или страны в целом (т.е. для решения задач на макроэкономическом, а также и на микроэкономическом уровне) часто используется ПФ вида $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$, где a_0, a_1, a_2 — параметры ПФ. Это положительные постоянные (часто a_1 и a_2 таковы, что $a_1 + a_2 = 1$). ПФ только что приведенного вида называется *производственной функцией Кобба-Дугласа* (ПФКД) по имени двух американских экономистов, предложивших ее использовать в 1929 г.

П.Дуглас и Д.Кобб на основе статистических данных построили математическую модель, отражающую связь между выпуском продукции в перерабатывающей промышленности и воздействующим на него капиталом и трудовыми затратами. ПФКД активно применяется для решения разнообразных теоретических и прикладных задач благодаря своей структурной простоте. В приложениях ПФКД, где $x_1 = K$ равно объему используемого основного капитала, а $x_2 = L$ — затратам живого труда, ПФКД приобретает вид, часто используемый в литературе:

$$Y = a_0 K^{a_1} L^{a_2}.$$

Производственные функции обладают рядом свойств, некоторые из которых выполняются не для всех ПФ. Рассмотрим эти свойства для двухфакторной ПФ. ПФ $f(x_1, x_2)$ определена для $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Свойство 8.1. При отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска:

$$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0.$$

Свойство 8.2. С ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет:

$$x_1 \leq z_1, x_2 \leq z_2 \Rightarrow f(x_1, x_2) \leq f(z_1, z_2).$$

Свойство 8.3. С ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса объем выпуска растет:

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} > 0, \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} > 0.$$

Свойство 8.4. С ростом затрат одного (i -го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу i -го ресурса не растет (*закон убывающей эффективности*):

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} \leq 0, \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} \leq 0.$$

Свойство 8.5. При росте затрат одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает:

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0.$$

Свойство 8.6. ПФ является однородной функцией степени $p > 0$:

$$f(tx_1, tx_2) = t^p \cdot f(x_1, x_2).$$

При $p > 1$ с ростом масштаба производства в $t > 1$ раз объем выпуска возрастает в $t^p (> t)$ раз, т.е. имеем рост эффективности производства от роста масштаба производства. При $p < 1$ имеем падение эффективности производства от роста масштаба производства. При $p = 1$ имеем постоянную эффективность производства при росте его масштаба.

Множество (линия) l_q уровня $q = f(x_1, x_2)$ ($q > 0$) ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется *изоквантой производственной функции*. Иначе говоря, линия l_q — это множество точек, в котором ПФ постоянна и равна q .

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых (используемых) ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q . Различные изокванты одной и той же ПФ не пересекаются.

Множество точек, принадлежащее семейству изоквант, касательные в которых взаимно параллельны, называется *изоклиной производственной функции*. Соответствующие параллельные касательные называются *изокостами производственной функции*.

Вопросы для повторения и контроля :

1. Что такое производственная функция и для чего она используется?
2. Что вы знаете об областях использования производственных функций, что такое статические и динамические производственные функции?
3. Что вы знаете о производственной функции Кобба-Дугласа?
4. Какими свойствами обладают производственные функции?
5. Что такое изокванты, изоклины и изокосты производственных функций?

Тема № 9

Задачи оптимизации в экономике

План :

1. Доход, издержки, прибыль, функции спроса.
2. Задачи оптимизации на максимум объёма выпуска или на минимум затрат.
3. Многокритериальные задачи оптимизации в экономике.
4. Оптимальность по Парето.

Доходом (выручкой) фирмы в определенном временном периоде (например, в определённом году) называется произведение $I = p_0 y$ общего объема y выпускаемой фирмой продукции на (рыночную) цену p_0 этой продукции.

Издержками фирмы называются общие выплаты $C = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ фирмы в определённом временном периоде за все виды затрат, где x_i — объёмы затрачиваемых (используемых) фирмой ресурсов (факторов производства), p_i — рыночные цены на эти ресурсы (факторы производства) ($i = 1, n$).

Прибылью фирмы в определённом временном периоде называется разность $PR = I - C$ между полученным фирмой доходом и ее издержками производства. Выражение прибыли фирмы в терминах затрачиваемых (используемых) ресурсов имеет вид

$$PR(x_1, \dots, x_n) = p_0 f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n p_i x_i,$$

где $y = f(x_1, \dots, x_n)$ — производственная функция фирмы, которая выражает общий объем y выпускаемой фирмой продукции через объёмы x_i затрачиваемых (используемых) ресурсов.

Основная цель фирмы заключается в максимизации прибыли путем оптимального распределения затрачиваемых

(используемых) ресурсов. Формально задача максимизации прибыли в определённом временном периоде имеет вид:

$$PR \rightarrow \max .$$

Такая постановка задачи максимизации зависит от того, какой конкретно (долговременный или краткосрочный) временной промежуток предшествует периоду, в котором фирма максимизирует свою прибыль. Без ущерба общности в дальнейшем рассмотрим двухфакторный случай.

Задача максимизации прибыли в случае долговременного промежутка имеет следующий вид:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \rightarrow \max \quad (9.1)$$

при условиях

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (9.2)$$

В связи с тем, что, как правило, $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$ (т.е., если хотя бы один ресурс не затрачивается (не используется), то объем выпускаемой продукции равен нулю), экономически осмысленными являются векторы (x_1, x_2) затрат ресурсов, для которых $x_1 > 0, \quad x_2 > 0$. Поэтому в случае долговременного промежутка задача максимизации прибыли представляет собой обычную задачу на глобальный абсолютный максимум при $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$.

Известно, что точки глобального абсолютного максимума следует искать только среди точек (x_1, x_2) , которые удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial PR(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial PR(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

или

$$p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = p_1, \quad p_0 \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = p_2. \quad (9.3)$$

Вектор (x_1^0, x_2^0) затрат ресурсов, который является решением задачи максимизации прибыли (9.1) – (9.2), называется *локальным рыночным равновесием* фирмы (в случае долговременного промежутка). Для этого вектора путем почленного деления в системе (9.3) первого уравнения на второе получаем соотношение

$$\frac{\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}}{\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}, \quad (9.4)$$

т.е. в точке (x_1^0, x_2^0) локального рыночного равновесия фирмы отношение предельной производительности первого ресурса к предельной производительности второго ресурса равно отношению рыночных цен на эти ресурсы.

Поскольку x_1^0 и x_2^0 получаются в виде решения системы уравнений (9.3), то они являются функциями цен (p_0, p_1, p_2) , т.е.

$$x_1^0 = d_1(p_0, p_1, p_2), \quad x_2^0 = d_2(p_0, p_1, p_2). \quad (9.5)$$

Эти выражения называются *функциями спроса на ресурсы (затраты)*. Их значения x_1^0 и x_2^0 выражают оптимальные выборы затрат (использования) ресурсов как функции цены выпускаемой продукции и цен на ресурсы.

Подставив функции (9.5) в производственную функцию $y = f(x_1, x_2)$, получим выражение

$$y^0 = f(d_1(p_0, p_1, p_2), d_2(p_0, p_1, p_2)) = s(p_0, p_1, p_2),$$

которое называется *функцией предложения выпуска*.

В случае краткосрочного промежутка фирма должна учитывать неизбежные лимиты на объемы затрачиваемых (используемых) ею ресурсов, которые формально могут быть записаны в виде нелинейного, вообще говоря, неравенства

$$g(x_1, x_2) \leq b.$$

Следовательно, задача максимизации прибыли для краткосрочного промежутка имеет вид задачи математического программирования:

$$p_0 f(x_1, x_2) - (p_1 x_1 + p_2 x_2) = PR(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &\leq b, \\ x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу максимизации объема выпускаемой продукции при ограничении затрат на приобретение ресурсов (факторов):

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \max \quad (9.6)$$

при условиях

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq V, \quad (9.7)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (9.8)$$

Так как решение (x_1^0, x_2^0) этой задачи обращает ограничение (9.7) в равенство, то вместо нее можно рассмотреть более простую задачу на условный экстремум:

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \max$$

при условиях

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = V,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Поскольку сумма $p_1 x_1 + p_2 x_2$ равна издержкам производства, то целесообразно заменить V на C и формально перейти к задаче максимизации объема выпускаемой продукции при фиксированных издержках производства C :

$$f(x_1, x_2) \rightarrow \max \quad (9.9)$$

при условиях

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = C, \quad (9.10)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \quad (9.11)$$

Решим задачу (9.9) – (9.11) с помощью функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(C - p_1 x_1 - p_2 x_2).$$

Для функции Лагранжа выписываем систему уравнений

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

или в развернутом виде

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \lambda p_1, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \lambda p_2, \quad C - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0. \quad (9.12)$$

Критическая точка $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ функции Лагранжа, удовлетворяющая системе (9.12) и взятая без последней координаты (множителя Лагранжа) λ^0 , т.е. точка (x_1^0, x_2^0) , и есть решение задачи (9.9) – (9.11) максимизации выпуска при данных фиксированных издержках производства C . Подставив точку $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ в первые два уравнения системы (9.12), получим два

тождества. Поделив почленно первое тождество на второе, получим выражение (9.4).

Обычная (однокритериальная) задача оптимизации состоит в нахождении такого $X \in D$, которое доставляет экстремальное значение функции $z = f(X)$. Здесь D — область допустимых решений, $f(X)$ отражает зависимость единственного критерия оптимальности от принимаемого решения X . Роль лица, принимающего решения (ЛПР), состоит в задании условий, определяющих множество D , и в описании целевой функции $f(X)$.

В задачах многокритериальной оптимизации ситуация другая — имеется несколько целевых функций $z_1 = f_1(X)$, ..., $z_m = f_m(X)$, которые могут достигать своих максимальных значений в различных точках области допустимых решений. В этом случае ЛПР должно не только описать допустимую область D , задать целевые функции, но и указать принцип окончательного решения. Поэтому в решении многокритериальных задач роль субъективного фактора, роль знаний и интуиции ЛПР возрастает по сравнению с однокритериальными задачами.

Вопросы для повторения и контроля :

12. Что такое доход (выручка), издержки и прибыль фирмы?
13. Как выглядит задача максимизации прибыли в случае долговременного промежутка, как она решается, какой вид имеет задача максимизации прибыли для краткосрочного промежутка?
14. Что называется локальным рыночным равновесием фирмы, какое для нее соотношение имеет место, что такое функции спроса на ресурсы (затраты) и функция предложения выпуска?
15. Что вы знаете о задаче максимизации объема выпускаемой продукции при ограничении затрат на приобретение ресурсов (факторов)?
16. Как решается задача максимизации объема выпускаемой продукции при фиксированных издержках производства?
17. Что такое однокритериальная и многокритериальная задачи оптимизации?

Список литературы

1. Ёофуров М., Холмуродов М., Ёусанов Ё. ИЁтисодий-математик усуллар ва моделлар. – Т.: MEDIA LAND, 2001.
2. Горстко А.Б. Познакомьтесъ с математическим моделированием. – М.: Знание, 1991.
3. Замков О.О. и др. Математические методы в экономике. – М.: ДИС, 2001.
4. Каршупова Н.И., Плясунова В.С. Математика в экономике. – М.: Вита-Пресс, 1996.
5. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математика в экономике. Математические методы и модели. – М.: Дело, 2006.
6. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели. – СПб.: Питер, 2006.
7. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика: Учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003.
8. Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: ИНФРА-М, 2002.
9. Райцкас Р.Л. и др. Количественный анализ в экономике. – М.: Мир, 1992.
10. Уотшем Т.Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Учебное пособие для вузов. – М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.
11. Четыркин Е.М. Финансовая математика. – М.: Дело, 2002.
12. Шелобаев С.И. Математические методы и модели. – М.: ЮНИТИ, 2000.
13. Эддоус М., Стенсфилд Р. Методы принятия решения. – М.: Аудит, 1997.
14. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие для вузов. / Под ред. С.И. Макарова, А.П. Сизикова, Б.П. Чупрынова. Самара: Изд-во Самарской государственной экономической академии, 2004.
15. Экономико-математические методы и прикладные модели. / Под ред. В.В. Федосеева. М.: ЮНИТИ, 1999.
16. Юдин Л.В. и др. Экстремальные модели в экономике. – М.: Экономика, 1993.