

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ХАЛҚ ТАЪЛИМИ
ВАЗИРЛИГИ**

**АБДУЛЛА ҚОДИРИЙ НОМИДАГИ ЖИЗЗАХ ДАВЛАТ
ПЕДАГОГИКА ИНСТИТУТИ**

Алимов Неъмат

**УЗЛУКСИЗ ТАЪЛИМ УЗВИЙЛИГИНИ
ТАЪМИНЛАШДА МАТЕМАТИК МЕТОДЛАР**

Бўлажак умумтаълим ўрта мактаблари математика-информатика
ўқитувчилари учун махсус курс

Т о ш к е н т - 2005

Титул варақ

Биз олдимизга =андай вазифа =ыймайлик, =андай муаммони ечиш зарурати ту\илмасин, гап охир – о=ибат, барибир кадрларга ва яна кадрларга бориб та=алаверади. Мубола\асиз айтиш мум- кинки, бизнинг келажагимиз, мамлакатимизнинг келажаги ырнимизга ким келишига ёки бош=ачаро= айтганда, кадрлар тайёрлашимизга бо\ли=.

Ислом Каримов

(Биринчи ча=ири= Ўзбекистон Республикаси Олий Мажлисининг ын тыртинчи сессиясидаги маърузадан)

Алимов Н. Узлуксиз таълим узвийлигини таъминлашда математик методлар. Умумтаълим ўрта мактаблари бўлажак математика-информатика ўқитувчилари учун махсус курс. – Жиззах, 2005. - 150 б.

И Л М И Й М У Ҳ А Р Р И Р:

педагогика фанлари доктори, профессор **Ж. ИКРОМОВ**

Т А Қ Р И З Ч И Л А Р:

педагогика фанлари доктори, профессор **М. ТОЖИЕВ**

физика-математика фанлари номзоди, доцент **М. МАМАТОВ**

педагогика фанлари номзоди, доцент **М. НОСИРОВА**

Умумий таълим ўрта мактаблари учун математика-информатика ўқитувчилари тайёрлайдиган олий ўқув юртлари талабаларига мўлжалланган мазкур махсус курсада:

узлуксиз таълим узвийлигини таъминлашда математик методларнинг роли ва ўрни кўрсатилган, махсус курснинг мазмуни, таркиби, дастури ва ўқув режаси аниқланди;

чизиқли дастурлаш методлари дарсликлар мавзулари орасидаги узвийликни ўрганишга татбиқ этилган ва педагогик жараёнларни ўрганишда қўллаш мумкин бўлган математик метод таклиф этилди;

корреляцион анализ ёрдамида мавзу ичидаги ва мавзулараро узвий-лик масалалари тадқиқ қилинган, шунингдек, узвийликни баҳолашда асосий мезон қилиб ўқувчиларнинг мавзуларни ўзлаштириш натижалари олинди;

ўйинлар назарияси мавзулар ва уларни мустаҳкамлаш учун берилган машқлар таркибини аниқлашга татбиқ қилинган ва зиддиятли педагогик жараёнларни ўрганишда қўллаш мумкин бўлган математик метод таклиф этилди.

ТУШУНТИРИШ ХАТИ

Бошқа фан ўқитувчиси каби, математика ўқитувчисининг ҳам учта бақувват илдизи бўлиши лозим: ҳуқуқий, демократик давлатнинг фуқароси сифатида **ижтимоий-сиёсий етуклик**, Давлат таълим стандартларига мос келадиган даражадаги ихтисослик - **математикани билиш, педагогик-психологик ва методик тайёргарликка** эга бўлиш. “Ўқитувчи – бакалаврлар тайёрлайдиган олий ўқув юртларида махсус курс ўқишдан мақсад нима?” деган саволнинг туғилиши табиий. Мақсад–бўлажак **ўқитувчиларнинг касбий-педагогик тайёргарликларини** янада такомиллаштириш.

Баъзан келажакда математика ўқитувчиси бўлиш орзуси билан олий ўқув юртига кирган талабаларга махсус курс ўқийдиган ўқитувчи, айниқса у математик таълим методикасидан эмас, балки соф математика бўйича маърузалар ўқиса, ўзининг илмий-тадқиқот йўналишига мослаб, математика назариясидан махсус курс режасини тузади ва шу асосда маърузалар ўқийди ҳамда амалий машғулотларни (“Қаерда?”) талабанинг келажакдаги педагогик фаолият макони бўлмиш мактабда эмас, балки одатда аудиторияда олиб боради). Ахир, бўлажак математика ўқитувчиси бакалавр сифатида тўрт йилдан кейин олий ўқув юртини тугатиб, умумтаълим мактабига боради-ку?! Гап шундаки, курс бўйича олинган билим, кўникма ва малакалар талаба мактабга борганида унинг иш фаолиятида керак бўладими ёки йўқми, масаланинг туб моҳиятини мана шунга қаратиш лозим. Шундагина махсус курс талабанинг касбий-педагогик маҳоратининг такомиллашувига ҳар томонлама кўмаклашади.

Иккинчи томондан, махсус курснинг самарали бўлиши уни ўқийдиган ўқитувчининг педагогик маҳоратига, унинг мазкур курсни баён қилиши жараёнида таълимнинг интерфаол ва инновацион методларидан, умуман, янги педагогик ва информацион технологиялардан оқилона фойдалана олишига боғлиқ.

Махсус курснинг самарали бўлиши:

бўлажак ўқитувчи-бакалаврларда шу махсус курсни ўрганиш уларнинг келажак педагогик фаолиятларида зарурлигига тўла ишонч ҳосил қилдириш орқали уларда қизиқиш уйғотишга, яъни талаба фаннинг мазкур соҳаси бўйича билимлари ҳали етарли эмаслигини англаган ҳолда янги материални ўрганишга иштиёқ билан киришиб кетишига;

ўқитувчи маъруза матнларини гуруҳдаги талабаларнинг тайёргарлик даражаларини, уларнинг билим савияларини эътиборга олган ҳолда тузишига;

курсни баён қилиш давомида муаммоли таълим методларидан фойдаланиб, турли муаммоли вазиятлар яратиш ва бундай вазиятлардан чиқиб кетишда талабаларнинг фаол иштирок этишларини таъминлашига;

ўрганилган билимлар мустаҳкамланишига ва уларни педагогик амалиётда қўллаш бўйича кўникма ва малакалар ҳосил қилинишига;.

илғор педагогик тажрибаларни ижодий ўрганиш мақсадида гуруҳ талабалари билан таянч(кўпинча педагогик амалиёт ўтказиладиган) мактабларда кўргазма ташкил қилиниб, у мактабларда кўчма машғулотлар ўтказилишига;.

ўрганилган билимларни турли вазият(ҳолат)ларда қўллаш, ҳосил қилинган кўникма ва малакаларни такомиллаштириш мақсадида рефератлар, турли оммавий тадбирлар(олимпиадалар, фан кечалари ва тўгараклар ва ҳоказолар)да иштирок этиш учун маъруза матнлари, битирув малакавий ишлар ёзишни ташкил қилинишига боғлиқ бўлади.

КИРИШ ЎРНИДА

УЗЛУКСИЗ ТАЪЛИМ ЖАРАЁНИДА УЗВИЙЛИКНИ АМАЛГА ОШИРИШДА МАТЕМАТИК МЕТОДЛАРНИНГ РОЛИ ВА ЎРНИ

0.1. Таълимни режалаштириш ва ташкиллаштиришдаги математик муаммолар

Ўқув-тарбия жараёнида энг мақбул(оптимал) йўлни танлашга ҳалақит берувчи омиллар бир қанча бўлиб, улар педагогик ҳолатларнинг ўта мураккаблиги ва тасодифий тусга эга бўлишлиги билан қийинчилик келтириб чиқаради. Шу сабабли ўқув жараёнини монанд ҳолда тасвирлаб берувчи ягона моделни куриш мумкин эмас.

Аммо ўқув жараёнини режали, **сифатли ва самарали** амалга ошириш учун унга **илмий-педагогик** жиҳатдан тўғри ёндашиш зарурияти туғилади. Бунинг учун педагогик ҳолатларда учраб турадиган барча омил(фактор)ларни ҳисобга олмаган ҳолда, ундан керакли, муҳимлари тажриба, корреляцион таҳлил, ўхшашлик, боғлиқлик ёки педагогик ҳолатларга хос томонларининг ифодаловчилари танлаб олинади. Бу омиллар эса, биз ўрганмоқчи бўлган **умумий педагогик жараённинг**, шунингдек, **ўқув жараёнининг** математик моделини куришда муҳим роль ўйнайди.

Бу ўринда қуйидаги саволларнинг туғилиши табиий ҳолдир:

“Хўш, “умумий педагогик жараён”, шунингдек, “ўқув жараёни” тушунчаларининг мазмун-моҳиятлари қандай? Уларнинг бир-бирларига нисбатан муносабатлари қанақа?”

Бу каби саволлар ўтган асрнинг 60-йилларида собиқ Иттифоқнинг йирик педагог олимлари муҳокамасига тушиб, унда яхшиси аввал ҳажм жиҳатидан кичикроқ бўлган “ўқув жараёни” тушунчасининг ўзи нималигини аниқлаб олиш, сўнгра “педагогик жараён” тушунчасининг мазмун-моҳиятини тадқиқ қилиш керак, деган хулосага келинган(1-расм):



1-расм.

Шу-шу бўлди-ю, барча йирик педагогик тадқиқотлар ўқув жараёнига қаратилди (Педагогика.Ю.К. Бабанскийнинг умумий таҳрири остида. – М.: Просвещение, 1983, 73-бет). Бунда энг муҳим жиҳатлардан бири шундан иборатки, танлаб олинган ва зарур деб ҳисобланган омиллар орасидаги боғланиш даражаларини, яъни уларнинг ўзаро функционал боғланишларини аниқлаш керак бўлади. Чунки, буларсиз ҳеч вақт жараённинг математик моделини яратиб бўлмайди. Борди-ю, мабодо, бу боғланишларнинг айримлари ҳисобга олинмаган ҳолда модель тузилса, у модель педагогик жараённи айнан акс эттирмаслиги мумкин. Бу эса қўйилган масаланинг тўла ечилишига олиб келмайди. Шу сабабли, ечилиши лозим бўлган педагогик масала аниқ қўйилиши билан бир қаторда, унда иштирок этувчи омилларнинг барчаси маълум ва аниқланган бўлиши зарур ва етарлидир.. Шу ҳолдагина уларнинг, яъни омилларнинг муҳимларини ажратиб олиш ва улар орасидаги боғлиқликларни аниқлаш имкони туғилади.

Бунда кўрилатган умумий педагогик жараёндаги барча омилларни ҳисобга олиш имкони йўқ, албатта. Шу сабабли энг муҳим деб ҳисобланган омилларнигина инобатга олинади ва улар иштирокида математик модель тузилади. Масалан, ўқувчиларга математика дарсида **янги ўқув материални баён қилиш** жараёнини кўриб чиқайлик. Бунда, албатта, педагогнинг асосий мақсади ўқувчиларга математикадан яхши билим бериш бўлиб, унда нафақат, ўқитувчининг билим савияси, ҳалоллиги, виждонлилиги ва малакаси, балки назарий қийинчиликлар билан ҳам боғлиқ. Бошқача айтганда тажрибада

текшириб кўрилган умумий талабларни қаноатлантирувчи ва қўйилган мақсадга олиб келувчи асосланган ёндашиш бўлиши зарур.

Бундай ёндашувни аниқлаш учун юқорида **санаб ўтилган омиллардан ташқари**, яна шундай омиллар мавжудки, уларни ҳам ҳисобга олиш муҳимдир. Булар, **ўқувчиларга дарс давомида тақдим этиладиган мисол, масала, назарий билим, тест ва бошқалар бўлиб, уларнинг берилиш частотаси, бир ёки ҳар хил туркумдан эканлиги, бажариш вақти қўйилган мақсадга қараб аниқланади.** Чунки асосий мақсадга эришишда юқоридаги омилларнинг **самаралилик даражалари** турлича бўлиб, улар фақат тажриба ва корреляцион таҳлиллар орқали аниқланиши мумкин. Бу эса, ўз навбатида, турли омиллар ўртасидаги ўзаро муносабатларни, боғланишларни ўрнатишда муҳим роль ўйнаши мумкин. Ўқув жараёнининг математик моделини тузишда яна бир жиҳат борки, усиз бирор натижага эришиб бўлмайди, бу – кўзланган асосий **мақсад.** Қўйилган **асосий мақсад натижанинг** сифатли ва самарали бўлишини кафолатлайди. Масалан, бундай мақсадлар бўлиши мумкин:

ўқувчиларнинг математик фикрлаш даражаларини ривожлантириш;

ўқувчиларнинг умумўқув ва математик(махсус) кўникмаларини шакллантириш ёки ривожлантириш ва бошқалар.

Бунда қўйилган мақсадга эришишда ҳар бир омилнинг таъсирини аниқлаш ва уни тенглама ёки функция орқали ифодалаш талаб этилади. Бунинг учун тажрибадан келиб чиққан ҳолда ўхшашликдан ёки бирор аналитик йўллардан фойдаланиш мумкин. Бунда аввал тўпланган маълумотлар ҳам қўл келиши мумкин.

Равшанки, бундай боғланишларни амалга ошириш учун юқоридаги **омилларнинг сонли ифодаси берилган** бўлиши керак. Бу эса **ўзгарувчилар** ёрдамида амалга оширилади. Шундан сўнг, юқоридаги **омиллар орасидаги боғланишлар мос ўзгарувчилар орасидаги боғланишлар** орқали берилади. Булар **функция кўринишида, тенглама ёки тенгсизликлар** кўринишида бўлиши мумкин. Бу ерда шуни ҳам таъкидлаш лозимки, бу боғланишлар ва мақсад функциясининг кўринишига қараб турли метод(усул)лар воситасида

ечилиши керак бўлган **математик моделлар**га келамиз. Булар ичида энг тўла ўрганилган ва самарали ечилиш методига эга бўлгани - бу **чизиқли дастурлаш** масаласидир. Бунда барча иштирок этувчи **шартлар: тенглама, тенгсизлик ва функциялар чизиқли кўринишда бўлиши** лозим. Чизиқли дастурлаш масалаларини ечишда қўлланиладиган **универсал методлардан бири – бу симплекс методдир**. Буни жараёнлар орасидаги боғланишлар тенглама, тенгсизлик кўринишида бўлганда ҳам қўллаш мумкин. Бу методнинг афзал томонларидан яна бири шундан иборатки, масала ечиш давомида **бир хил арифметик амаллар** бажарилади.

Юқоридаги, ўқувчиларга математика ўқитиш масаласига қайтадиган бўлсак ва муҳим омиллар сифатида масала, мисол ва тест ечишлар олинса, у ҳолда улар орасидаги боғланиш қуйидагича бўлиши мумкин. Бирор мақсадга эришиш учун, айтайлик, 10 та мисол ечиш керак бўлсин. Лекин, тажрибадан маълумки, мисолларни учдан биригача масала ечиб ҳам ёки мисолларнинг ярмигача тест ечиб ҳам мақсадга эришиш мумкин. Бу ерда муҳим омиллардан бири бўлган **вақт** ҳисобга олингани йўқ. Вақтнинг муҳимлиги шундан иборатки: масала, мисол ва тект ечиш учун, умуман, **турлича вақтлар** талаб қилинади. Чунки, битта масалани ечиш вақти битта мисолни ечиш вақтидан одатда кўпроқ бўлади. Демак, вақт омилини ҳам ҳар доим эътибордан четда қолдирмаслик керак. Машқларнинг ҳар бирини вақт билан боғлиқлик даражасини аниқлаш тажриба ёки корреляцион анализ орқали амалга ошириш мумкин. Бу жараён ҳисоб-китоб нуқтайи назардан унчалик қийинчилик туғдирмайди. Буларни ўқитувчи ўзи ҳам осонгина аниқлаб олиши мумкин. Бунинг яна бир эътиборли томони шундан иборатки, кўрилаётган ўқув жараёнида тасодифий миқдорлар ҳисобга олинмаяпти. Агар уларни ҳам ҳисобга олиш зарурияти туғилса, уларнинг ўртача қиймати (математик кутилмаси) аниқланади ва шу қийматлардан фойдаланилади. Бу тасодифий миқдорлардан қутилишнинг анъанавий усули ҳисобланади. Шу сабабли тасодифий миқдорларсиз, фақат аниқ сонлар ёрдамида қурилган математик моделлар **детерменик моделлар** деб аталади.

Демак, биз педагогик жараёнларнинг, аслида бу жараёнда тасодифий миқдорлар етарлича бўлса ҳам, детерменик математик моделлар билан иш кўрар эканмиз. Булар, масалан: синфдаги ўқувчиларнинг ҳолати, об-ҳаво, ўқувчиларнинг мавзуни ўрганишга бўлган мотиви(сабаби, интилиши), муносабати, ўқитувчининг ҳолати ва ҳоказолар бўлиши мумкин. Юқорида айтилганлардан келиб чиқадики, бу тасодифий миқдорлар математик модель тузишда ёки иштирок этмайди, ёки уларнинг керакли бўлган характеристик параметрлари маълум, фақат шу ҳолдагина детерменик модель тузиш имкони туғилади.

Юқоридаги мулоҳазалардан келиб чиқадики, педагогик жараён ўта мураккаб фаолиятли жараён бўлиб, ундаги барча параметрларни, омилларни ўз ичига олган монанд(адекват) математик моделни яратиш мумкин эмас. Шу сабабли ҳам, қурилаётган математик моделлар қаралаётган педагогик жараённинг аниқ ўзини акс эттирмайди, балки идеаллаштирилган ҳолда, айрим параметрлар ва омилларни ҳисобга олмаган ҳолда яратилади. Бу дегани модель педагогик жараёнга самараси тегмайди, дегани эмас. Аксинча, педагогик жараён қанчалик мураккаб бўлмасин, унга илмий жиҳатдан асосланган ҳолда ёндашиш ва ҳар бир ҳаракатнинг натижасини олдиндан билиш имконини фақат монанд ҳолда қурилган математик модель бериши мумкин. Демак, педагогик фаолиятда кўзланган мақсадга эришишнинг энг мақбул йўли - бу **математик моделни қуриш ва унинг ёрдамида ечим қабул қилишдир.**

Педагогик фаолиятда яна бир жиҳат борки, уни ҳам таъкидлаб ўтиш лозим. Бу - **кўп мезонлиликдир, яъни мақсадларнинг кўплигидир.** Ҳақиқатдан ҳам, масалан, математик таълим, ўқувчига **нафақат математикадан билим бериш**, шу билан бирга бошқа мақсадлар – **математик тафаккурларни ўстириш, мустақил фикрлашни шакллантириш ва ривожлантириш, умумўқув кўникма ва малакаларни шакллантириш ва ривожлантириш, математик амалларни тез ва қисқа йўллар билан бажариш ва ҳоказолар** бўлиши мумкин. “Буларни ва шунга ўхшаш бошқа мақсадларни ўз ичига олган математик модель тузиш мумкинми?” деган савол

ўз-ўзидан келиб чиқади. Бунинг учун, авваламбор, бу мақсадларнинг сонли ифодалари бўлиши зарур, бу одатда процентлар орқали берилади. Лекин, бу ерда ҳам бу процентларни ҳосил қилиш мезони муаммоси вужудга келиб, унинг мезонини аниқлаш, асослаш вазифаси келиб чиқади. Аммо математик моделда мезонлар сони битта бўлгани кўрилади, шу сабабли юқорида кўрилган ва муҳим деб ҳисобланган мақсад(мезон)ларни бирор “мулоҳаза” билан бирлаштириш муаммоси ҳам келиб чиқади. Шунини алоҳида таъкидлаб ўтиш зарурки, юқорида санаб ўтилган масалаларнинг ҳар бири кўрилаётган мезонларга ижобий таъсир этади.

Ҳулоса килиб айтганда, умумий педагогик жараён(фаолият)нинг мукаммал математик моделини қуриш(яратиш), ҳозирги замон таълим тараққиётининг долзарб муаммоларидан бири бўлиб, у таълимнинг фаол ва инновацион методларини, янги педагогик ва ахборот технологияларини ҳаётга жорий қилиш муаммолари билан уйғунлаштириб, комплекс равишда қаралгандагина сифатли ва самарали натижаларга олиб келиши мумкин.

0.2. Талабаларни математик методларни ўқув жараёнида қўллашга ўргатишнинг йўллари ва воситалари

Бўлажак математика ўқитувчилари—бакалаврларни математик методлардан педагогик фаолиятлари жараёнида фойдаланишга тайёрлаш ишларини талабанинг олий ўқув юртига қадам қўйган кунларданоқ бошлаб юбориш лозим. Бунинг учун талабага бериладиган ҳар қандай топшириқ аниқ мақсад сари йўналтирилган бўлиши керак. Лекин, тажрибаларнинг таҳлили талабага реферат учун бир мавзу, маъруза учун бошқа мавзу, курс иши учун учинчи мавзу ва, ниҳоят, битирув малакавий иши учун тўртинчи мавзу берилишини кўрсатмоқда. Мулоҳаза юритиб кўрайликчи, айтинг, қани бунда талабанинг илмий-тадқиқот ишига тизимли(системали) ёндашув? Бундай ҳолда талаба “Қандай қилиб бўлса ҳам, бир амаллаб зачёти ёки имтиҳондан ўтиб олсам бўлгани” қабилида иш олиб боради. Аслида эса талаба олий педагогик

маскандаги 4 йиллик ўқуви давомида айнан бир йўналиш бўйича илмий-тадқиқот ишларини олиб боргандагина, унда илмий-тадқиқот кўникмалари шаклланиб, ривожланиб, у малака даражасигача кўтарилиши мумкин. Бизнингча, аждодларимизнинг “устоз–шогирд” анъаналарини тиклаш мақсадида, талаба таълимнинг биринчи кунлариданок ўзининг устози кимлигини аниқ билиши ва таълимнинг охирги кунигача унинг қарамоғида бўлиши, бунинг учун унга тажрибали ўқитувчини бириктириб қўйилиши керак. Талаба бутун ўқуви давомида ҳар доим “Менинг Устозим” деб руҳан мағрурланиб юрсин.

0.3. “Ўзлуксиз таълим тизимида узвийликни таъминлашда математик методлар” мавзусидаги махсус курс, мазмуни, таркиби, ўқув дастури ва режаси

Махсус курс ўқув дастури ва режаси
(20 соат маъруза ва 10 соат амалий машғулот)

Чизиқли дастурлаш.

1-вариант. Математик моделлаштириш - чизиқли дастурлаш асоси: модель тушунчаси(термини)нинг мазмун-моҳияти, математик моделлаштириш босқичлари(математик модель қуриш, мазкур модель ичида математик масалани ечиш, моделдан ҳосил қилинган натижаларни талқин қилиш, моделнинг тенгкучлилигини текшириш, моделни модификация қилиш), математик моделлаштиришга доир типик мисоллар(снаряд ҳаракати ҳақидаги ҳақидаги масала, радиоактив парчаланиш ҳақидаги масала, транспорт масаласи, сайёҳ ҳақидаги масала), чизиқли дастурлаш тушунчаси, чизиқли дастурлаш масалаларини алгебраик метод билан ечиш алгоритми, чизиқли дастурлаш масалаларини геометрик метод билан ечиш.

2-вариант. Чизиқли дастурлаш масаласини ечиш методлари: чизиқли тенгламалар системасини ечиш, тўғри тўртбурчак қоидаси ёрдамида базис

ечимларни топиш, системанинг барча базис ечимларини топиш, чизиқли дастурлаш масаласини симплекс метод билан ечиш. Чизиқли дастурлаш методлари ёрдамида узлуксиз математик таълим узвийлигини таъминлаш.

Корреляцион анализ.

Олий ўқув юртларида функциялар узлуксизлиги мавзусини баён қилишда узвийликни таъминлаш: мавзулар орасидаги узвийликни баҳолаш, мавзунини мустаҳкамлашда омилларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш. Ўрта махсус таълим муассасалари ва номуахассислик йўналишидаги педагогика олий ўқув юртларида математика курсини ўқитишда узвийликни таъминлаш. Математика дарсликларида узвийликни таъминлашда омилларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш. Талабалар аудиториядан ташқари мустақил таълимнинг ўқув жараёнига таъсирининг статистик таҳлили.

Ўйинлар назарияси.

Ўйинлар назарияси элементлари. Антагонистик ўйинларни ечиш йўллари: соф стратегияларни таққослаш, жадвалли ўйинда мувозанат ҳолат. Таълимдаги айрим долзарб муаммоларни ҳал қилишда ўйинлар назарияси. Узлуксиз математик таълим жараёнида мавзулар ва машқлар орасидаги узвийликни амалга оширишда ўйинлар назарияси.

ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МЕТОДЛАРИ - УЗЛУКСИЗ МАТЕМАТИК

ТАЪЛИМ УЗВИЙЛИГИНИ АМАЛГА ОШИРИШ ВОСИТАСИ

1.1-в. Математик моделлаштириш - чизиқли дастурлаш асоси

1.1. Модель тушунчасининг мазмун-моҳияти

“Модель” термини(атамаси)нинг мазмун-моҳиятини англаб етиш учун ўзбек тилининг изоҳли луғатига мурожаат қиламиз. Чунки “Луғат – бу алифбо тартибидаги коинотдир”(Вольтер). Дарҳақиқат, сўз(термин)нинг том маъносини билмоқчи бўлган одам биринчи навбатда луғатларга мурожаат қилади:

“Ўзбек тилининг изоҳли луғати”(1-том):

Модель(ўзбек тилига рус тили орқали кириб келган) – бирор нарсанинг худди ўзидек ёки кичрайтириб, катталаштириб олинган нусхаси).

“Ўзбекистон миллий энциклопедияси”(6-жилд):

Модель(лот. *modulus* – ўлчов, меъёр) – математика ва мантикда – муайян аксиомалар системасининг модели объектлари бўлиб, хоссалари ва улар ўртасидаги муносабатлар муайян аксиомаларни(масалан, Евклид геометриясида: мустақиллик, зиддиятсизлик ва тўлалик – **А.Н.**) қаноатлантиради. Кенг маънода модель – бирор объект ёки объектлар тизимининг образи ёки намунаси. Масалан, Ернинг модели – глобус, осмон ва ундаги юлдузлар модели – планетарий. **Моделлаш** – физик ҳодиса ва жараёнларни модель ёрдамида татқиқ қилиш. Математик моделлашда берилган физик жараёнларнинг математик ифодалари моделланади.

“Фалсафа. Қомусий луғат”:

Моделлаштириш – борлиқни билвосита ўрганишга асосланган илмий усулдир. Бунда бирор объектнинг хусусиятларини уларни ўрганиш учун махсус равишда тузилган бошқа объектда қайта ҳосил қилиш тушунилади.

Қараб чиқилган манбаларни умумлаштириб айтадиган бўлсак, модель – бу реал дунёдаги бирор нарсанинг аслини кичиклаштириб (масалан, сайёраларнинг ҳаракатини) ёки катталаштириб(масалан, атом тузилишини) олинган нусхаси. Бунда ўша нарсанинг асли(оригинали)даги хоссаларни унинг нусхасидан аналогия бўйича хулоса чиқариш методидан фойдаланиб қидирилади. Оригинал билан модель ўртасида учраган ўхшаш хоссалар қанча кўп бўлса, хулоса шунча ҳақиқатга яқин(тўғри) бўлади.

Инсон ўзининг аниқ мақсад сари йўналтирилган фаолиятида ҳар қадамда мазмуни, мураккаблиги ва муҳимлиги жиҳатидан ҳар хил бўлган турли-туман **муаммо-масалаларга** дуч келади ва уни ҳал қилишнинг мақбул йўллари излайди. Фанда **масала** деганда одатда инсон меҳнати фаолиятида содир бўладиган бирор муаммоли вазиятнинг турли белгилар воситасида баён қилинган **модель** тушунилади. Масалан:

“Ораларидаги масофа ўн етти километр бўлган икки аҳоли пунктдан бир-бирларига қараб икки сайёҳ бир вақтда йўлга чиқишди. Улардан бирининг тезлиги соатига уч километрдан, иккинчисиники эса соатига тўрт километрдан. Улар неча соатдан кейин учрашадилар?”

Бу – масала матни она тилимизда қўлланилаётган алифбомиз ҳарфлари ва тиниш белгилари ёрдамида баён қилинган моделдир. Буни **1-модель** деб атайдик.

Ҳар бир матнли масалада шартлар(нималар маълум, яъни қандай катталиқ(миқдор)лар берилган ва талаблар(нималар номаълум, яъни қандай катталиқларни излаш кераклиги) кўрсатилади. Масалани ечишга имкон яратиш мақсадида маълум(берилган) катталиқлар билан номаълум(изланаётган) катталиқлар қандай қонуниятлар асосида ўзаро боғланишдалиги кўрсатилган бўлади. Масалан, юқорида баён қилинган масала “жисмнинг босиб ўтган йўли тезлиқнинг вақтга кўпайтмасига тенг” деган қонуниятга асосланган.

Масаланинг ечилиш жараёни турли белгилар системасидан фойдаланиб тузилган ҳар хил моделларни яратиш жараёнидан иборат. Масалан, юқорида жонли(сўзлашув) тилдаги моделдан, биров бўлса-да, математик тилда баён қилинган моделга ўтамиз:

“Ораларидаги масофа 17 км бўлган икки А ва В аҳоли пунктларидан бир-бирларига қараб икки сайёҳ бир вақтда йўлга чиқишди. Улардан бирининг тезлиги 3 км/соат, иккинчисиники эса 4 км/соат. Улар неча соатдан кейин учрашадилар?”

Буни берилган масаланинг **2-модел**и деб атаймиз.

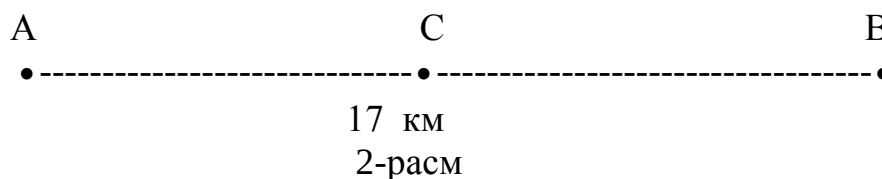
Бу моделдан 1-расмда тасвирланган қисқача ёзувга ўтамиз ва уни **3-модель** деб атаймиз.

Тезлик	Йўл	Вақт
1 - 3 км/соат	?	?
11 - 4 км/соат	?	?

1-расм

Улар неча соатдан кейин учрашадилар?

Масаланинг ечилиш методини ўзлаштириш босқичида маълумотларнинг кўрсатмали тасвири ниҳоятда муҳим аҳамиятга эга(2-расм). Буни **4-модель** деб атаймиз.



$$AB = AC + CB$$

Бу моделда масала таркибига кирувчи барча элементлар яққол намоён бўлган.

Арифметик модель янада абстрактроқ белгилар(рақамлар, ҳарфлар) системасидан фойдаланиб яратилади(3-расм). Ҳақиқатдан ҳам, бу модель сайёҳларнинг бир-бирларига яқинлашиш тезлигини яққол тасвирлайди. Буни **5-модель** деб атаймиз.

$$1) \quad 3 + 4 = 7 \text{ (яқинлашиш тезлиги),}$$

$$2) \quad 17 : 2\left(\frac{3}{7}\right).$$

Алгебраик модель эса йўл тезлики вақтга кўпайтмасига тенглиги ҳақидаги қонуниятни намоиш этади(4-расм). Буни **6-модель** деб атаймиз.

Сайёҳ	Йўл	Тезлик	Вақт
1	3х	3	х
11	4х	4	х

4-расм

$$3x + 4x = 17$$

$$7x = 17$$

$$x = 2\left(\frac{3}{7}\right)$$

Кўриниб турибдики, берилган матнли масалани ечиш учун ҳар бири ўз афзалликларига эга бўлган турлича моделлар яратишга тўғри келади. Муаммоли вазиятни оқилона ҳал қилиш кўп жиҳатдан масалага оид қулай математик модель яратишга боғлиқлигининг асосий сабаби ҳам ана шунда.

Бас шундай экан, математик модель нима?

Маълумки, ўтган асрнинг ўрталарида кишилиқ жамияти фаолиятининг турли соҳаларида математик метод ва электрон ҳисоблаш машиналари кенг қўламда қўлланила бошланди. Фаннинг математик иқтисодиёт, математик лингвистика, математик киме ва ҳоказо каби соҳалари пайдо бўлди. Улар реал дунёдаги нарса ва ҳодисаларга мос математик моделлар қуриш, шунингдек, мазкур моделларни ўрганиш билан шуғулландилар.

Математик модель – бу реал дунёдаги қандайдир нарсалар ва ҳодисалар синфини математика тилида тақрибий тавсифлаш демакдир.

Моделлаштиришнинг асосий мақсади – бу объектларни ўрганиш ва бўлажак кузатувларни олдиндан башорат қилишдан иборатдир. Лекин моделлаштириш – бу яна ҳақиқий дунёни билиш ва уни бошқаришга имкон берувчи метод ҳамдир.

Соф математик нуқтайи назардан қараганда, математик моделлаштиришнинг асосий босқичлари қуйидагиларни ўз ичига олади.

1. Математик модель қуриш(ясаш).

Бу босқичда қандайдир “номатематик” модель – табиат ҳодисаси, иқтисодий режа, ишлаб чиқариш жараёни ва шунга ўхшашлар муаммо

сифатида берилади. Буни энг аввало аниқ ва лўнда математик тилда ифодалаб олиш, яъни уни математик масалага келтириш керак.

2. Мазкур модель ичида математик масалани ечиш.

Бу босқичда фойдаланиш ёрдамида натижа зарур аниқлик билан ва тайинланган вақт оралигида топилиши мумкин бўлган алгоритмларга ва масалани компьютерда ечиш учун сонли методларни ишлаб чиқишга катта эътибор берилади.

3. Моделдан ҳосил қилинган натижаларни талқин қилиш.

Бу босқичда моделдан математик тилда ҳосил қилинган натижалар воқеликка оид соҳада қабул қилинган тилда талқин қилинади.

4. Моделнинг тенг кучли(адекват)лигини текшириш.

Бу босқичда эксперимент натижалари моделдан ҳосил қилинган назарий хулосалар билан маълум аниқликлар доирасида мос келиши аниқланади.

5. Моделни модификация қилиш.

Бу босқичда модель ёки ҳақиқатга кўпроқ мос келиши учун мураккаблаштирилади, ёки амалий жиҳатдан ҳал қилишга эришиш учун соддалаштирилади.

Моделларни ҳар хил меъёр(критерий)лар бўйича классификациялаш мумкин. Масалан, ҳал қилинаётган муаммонинг характериға қараб, моделлар **функционал ва структурали моделларга** бўлиниши мумкин.

Биринчи ҳолатда объект ёки ҳодисани характерловчи барча катталиклар миқдор жиҳатдан ифода қилинади. Бунда катталиклардан бири эркин ўзгарувчилар, қолганлари эса шу катталикларнинг функцияси (экрисиз ўзгарувчиси)сифатида қаралади. **Математик модель** кўпроқ ўзида қаралаётган катталиклар ўртасидаги миқдорий боғланишларни кўрсатувчи ҳар хил типдаги(алгебраик, дифференциал) **тенгламалар ва уларнинг системасини** гавдалантиради.

Иккинчи ҳолатда модель айрим қисмлари бир-бирлари билан маълум алоқада бўлган мураккаб объект таркиби(структураси)ни характерлайди. Бу алоқалар одатда миқдор жиҳатдан ўзгаришларни содир этмайди. Бундай моделларни қуриш(ясаш) учун графлар назариясидан фойдаланиш қулайлик туғдиради. **Граф** – бу баъзи чизик(қирра)лари ўзида текисликда ёки фазода қандайдир нукталар тўплами(учлар)ни акс эттирувчи математик объект бўлиб, бу учларнинг баъзилари чизик(қирра)лар билан бирлаштирилган бўлади.

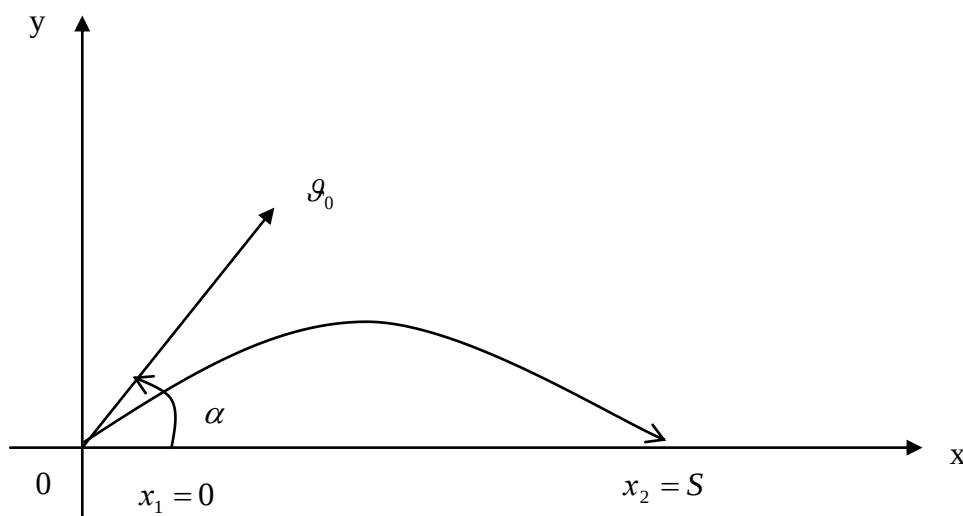
Дастлабки маълумотлар ва кутилиш характери бўйича моделлар **детерминистик ва эҳтимолий-статистик моделларга** бўлиниши мумкин. Биринчи типдаги моделлар аниқ, бир қийматли натижаларга олиб келади. Иккинчи типдаги моделлар эса статистик маълумотларга асосланган, улар ёрдамидаги кутилишлар эса эҳтимолий характерга эга бўлади.

1.2. Математик моделлаштиришга доир типик мисоллар

1. Снаряд ҳаракати ҳақидаги масала.

Снаряд дастлабки v_0 м/сек тезлик билан 45° бурчак остида Ердан юқорига отилган. Унинг ҳаракат траекториясини, траекториянинг дастлабки ва охириги нуқталари орсидagi масофани топиш талаб қилинади.

Ечиш. Снаряднинг ката-кичиклиги ва оғир-енгиллигини эътиборга олмасдан, уни моддий нуқта деб фараз қиламиз. XOy координаталар системасини олиб, O нуқтани снаряднинг дастлабки ҳолати деб қараймиз. Ox ўқи горизонтал, Oy ўқи эса вертикал ҳолатда йўналган деб ҳисоблаймиз (5-расм).



5-расм

Бу ҳолда снаряднинг ҳаракати, физика курсидан маълумки,

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$$

формулалар билан ифодаланади. Бунда:

t – снаряднинг учиб вақти.

$g = \frac{10 \text{ м}}{\text{сек}^2}$ - эркин тушиб тезланиши.

Бу формулалар масаланинг математик моделидир. Биринчи формуладан x орқали ифодалаб ва уни иккинчи тенгламага қўйиб, снаряднинг ҳаракат траекторияси тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2 g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Бу эгри чизик – парабола x ўқини икки нуқтада кесиб ўтади:

$x_1 = 0$ (траекториянинг бошланғич нуқтаси);

$x_2 = S = \left(\frac{g_0^2}{g} \right) \sin 2\alpha$ (снаряднинг Ерга тушган жойи – траекториянинг охирги нуқтаси).

Бу формулага g_0 ва α ларнинг масала шартида кўрсатилган қийматларини қўйиб, жавобни ҳосил қиламиз:

$$y = x - 90x_2, \quad S = 90m$$

Шуни таъкидлаб ўтамизки, мазкур моделни куришда бир қатор фаразлар майдонга ташланган, масалан: Ер сиртини текислик деб олинган; ҳаво ва Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши снаряд қаршилигига таъсир қилмайди деб ҳисобланган.

2. Радиоактив парчаланиш ҳақидаги масала.

Ечиш. Айтайлик, $N(0)$ - радиоактив модданинг дастлабки миқдори, $N(t)$ эса t вақт давомида парчаланмай қолган атомлар миқдори бўлсин. Экспериментал йўл билан бу атомларнинг миқдорининг $N^1(t)$ ўзгариш тезлиги $N(t)$ га пропорционал, яъни $N^1(t) = -\lambda N(t)$ эканлиги аниқланган. Бунда: $\lambda > 0$ - мазкур модданинг радиоактивлик доимийлиги (константаси). Математика курсидан маълумки, бу дифференциал тенглама қуйидаги кўринишга эга:

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

Дастлабки радиоактив атомлар сони икки марта камаядиган T вақт **ярим емирилиш даври** деб аталади ва у мода радиоактивлигининг муҳим характеристикаси ҳисобланади. T ни аниқлаш учун формулага $N(t) = N(0) = 0,5$ ни қўйиш керак. Бу ҳолда:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}$$

Масалан: радон учун $\lambda = 2,084 \cdot 10^{-6}$, демак: $T = 3,15$ сутка.

3. Транспорт масаласи.

Шаҳарда иккита ун омбори ва иккита нон заводи бор. Кунига 1-омбордан 50 т, 2-омбордан эса 70 т ун олиб чиқилиб, 1-заводга 40 т, 2-заводга эса 80 т ун келтирилади.

А орқали 1 т унни i -омбордан j -заводга (бунда $i, j = 1, 2$) ташиб келиш қийматини белгилаймиз. Айтайлик, $\alpha_{11} = 1,2$ пул бирлиги, $\alpha_{12} = 1,6$ пул бирлиги, $\alpha_{21} = 0,8$ пул бирлиги, $\alpha_{22} = 1$ пул бирлиги бўлсин.

Ташишни қандай режалаштирилса, уларнинг қиймати энг кам (минимал) бўлади?

Ечиш. Аввало масалани математика тилида ифодалайлик. x_1 ва x_2 орқали 1-омбордан 1- ва 2-заводларга келтириладиган унлар миқдорини, x_3 ва x_4 орқали эса 2-омбордан 1- ва 2-заводларга келтириладиган унлар миқдорини белгилаймиз. Бу ҳолда:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= 50 \\
x_3 + x_4 &= 70 \\
x_1 + x_3 &= 40 \\
x_2 + x_4 &= 80
\end{aligned}
\tag{1}$$

Барча ташишларнинг қиймати қуйидаги формула билан аниқланади:

$$f = 1,2x_1 + 1,6x_2 + 0,8x_3 + x_4$$

Математика нуқтайи назардан қараганда, масала шундай x_1, x_2, x_3, x_4 сонларни топишга келтириладики, улар барча берилган шартларни қаноатлантирсин ва f функциянинг энг кам(минимум) қийматини берсин.

(1) тенгламалар системасини x_i га нисбатан (бунда $i = 1, 2, 3, 4$) номаълумларни чиқариш йўли билан ечамиз:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_4 - 30 \\
x_2 &= 80 - x_4 \\
x_3 &= 70 - x_4
\end{aligned}
\tag{2}$$

(1) эса бир қийматли аниқланиши мумкин эмас. Чунки $x_i \geq 0$ (бунда $i = 1, 2, 3, 4$), у ҳолда (2) тенгламалардан $30 \leq x_4 \leq 70$ эканлиги келиб чиқади. x_1, x_2, x_3 учун ифодаларни формулага қўйсак:

$$f = 148 - 0,2x_4$$

Кўриниб туриптики, x_4 нинг мумкин бўлган имкониятли максимал қийматида, яъни $x_4 = 70$ бўлганда функция минимум қийматга эришади. Қолган номаълумларнинг мос келадиган қийматлари (2) формулалар бўйича топилади.

4. Сайёҳ ҳақидаги масала.

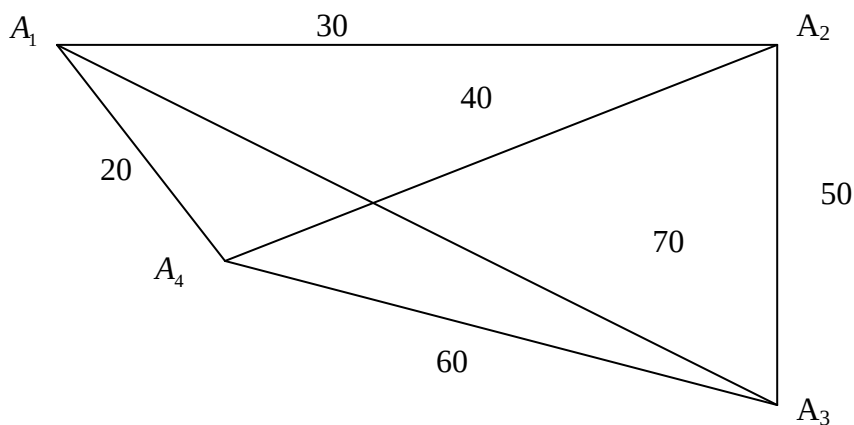
Сайёҳ A_1 шаҳардан чиқиб. A_2, A_3, A_4 шаҳарларга фақат бир мартадан бўлиб, сўнгра A_1 га қайтиб келиши керак. Ҳар бир шаҳар жуфти-жуфти билан тўғри чизик кесмалари шаклида ўзаро бирлаштирилган, бунда:

A_i ва A_j шаҳарлар орасидаги йўлнинг b_{ij} узунлиги қуйидагича:

$$b_{12} = 30, \quad b_{14} = 20, \quad b_{23} = 40, \quad b_{13} = 70, \quad b_{34} = 60$$

Йўл қисқа(минимал) бўлиши учун шаҳарларга бориш тартибини аниқлаш керак.

Ечиш. Ҳар бир шаҳарни текисликдан A_i (бунда $i = 1, 2, 3, 4$) нуқта сифатида тасвирлаймиз. Бу нукталарни тўғри чизик кесмаси сифатида бирлаштирамиз, улар шаҳарлар орасидаги йўл(масофа)ни тасвирлайди. Ҳар бир “йўл”нинг узунлигини километрларда кўрсатамиз(6-расм).



6-расм

Натижада граф – текисликда бир нечта нуқталар тўпламидан(улар графнинг учлари дейилади) ва бу нуқталарни жуфти-жуфти билан тўғри чизик кесмалари шаклида бирлаштирилган чизиклар тўпламидан(буларни графнинг қирралари дейилади) иборат математик объект ҳосил бўлади. Бундан ташқари, бундай граф белгили граф бўлади, чунки унинг учларига ва қирраларига қандайдир белгилар – сонлар(қирраларига) ва символлар(учларига) мос қилиб қўйилган. Графдаги цикл деган тушунчанинг маъноси қуйидагича: граф учлари, яъни $V_1, V_2, V_3, \dots, V_k, V_1$ нуқталарнинг истаган V_i, V_{i+1} (бунда $i = 1, 2, \dots, k - 1$) жуфтлиги ҳар хил ва V_1, V_k жуфтлиги, улар қирралар шаклида бирлаштирилган.

Шундай қилиб, қаралаётган масала графда қирралар йиғиндиси минимал бўладиган циклни топишга келтирилди. Графнинг A_1 дан бошланувчи тўртта учлардан ўтувчи барча ҳар хил цикллари ёзиб чиқамиз:

- 1) A_1, A_4, A_3, A_2, A_1 ;
- 2) A_1, A_3, A_2, A_4, A_1 ;
- 3) A_1, A_3, A_4, A_2, A_1 ;

Энди бу цикллarning узунликларини(км ларда) топамиз:

$$L_1 = 160, \quad L_2 = 180, \quad L_3 = 200, .$$

Шундай қилиб, энг қисқа узунликдаги маршрут – бу биринчи маршрутдир.

Сезилиб туриптики, агар рафда p та уч бўлса ва барча учлар жуфти-жуфти билан қирралар сифатида бирлаштирилган бўлса, барча учлардан ўтувчи цикллари сони $\frac{(n-1)}{2}$ га тенг бўлади. Шунинг учун биздаги ҳолатда 3 та цикл бор.

1.3. Чизикли дастурлаш тушунчасининг мазмун-моҳияти

Кейинги пайтларда барча имконитли ҳоллардан энг маъқулини топишга кўмаклашувчи амалий масалаларни ечишнинг математик методлари ишлаб

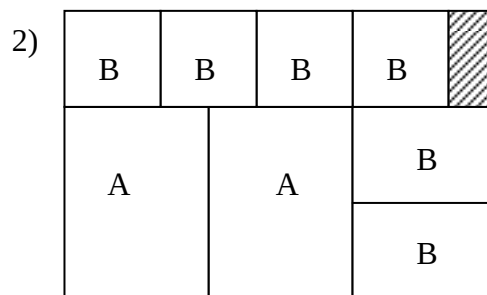
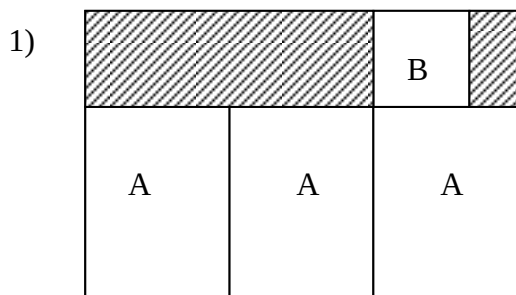
чиқилмоқда. Маълумки, математиканинг бу масалаларни ишлаб чиқиш билан шуғулланувчи бўлимини математик дастурлаш деб аталади. Математик дастурлаш иқтисодиёт, транспорт, саноатда, фанда ва шу кабиларда қўлланилиши муносабати билан унинг методлари кўпгина амалий масалаларни ечишда умумий бўлганлиги учун ҳам, табиийки, бу метод умумтаълим аҳамиятига эга билимлар комплекси бўлишга давогарлик қилмоқда. Математик дастурлашнинг таркибий қисми ҳисобланган чизикли дастурлаш элементлари эса аллақачонлари умумтаълим мактаблари, касб-хунар коллежлари ва академик лицейлар математика ўқув дастурларидан ўрин олган.

Гап шундаки, биз қайноқ ҳаётимизнинг жуда кўп соҳаларида ва яратувчилик фаолиятимизнинг ҳар турли қирраларида доимо бир хил масалалар синфларига дуч келамиз. Бизга вазиятлар маълум(тўла ёки қисман) бўлиши мумкин, лекин биз уларнинг орасидан олға қараб ҳаракат қилишимиз мумкин бўлган имкониятли вариантни топишимиз керак. Табиий равишда савол туғилади: “Вариантлардан қайсинисини олиш, қайсиларидан эса воз кечиш керак?”

Шундай қилиб, мумкин бўлган вариантлардан биттасига тўхталишимиз керак, у шундай бўлсинки, у энг маъқул вариант бўлиши билан бирга, энг кўп самара берсин. Бир ҳолатда қандайдир вариант энг маъқул бўлиши, иккинчи ҳолатда эса энг номаъқул бўлиши мумкин. Буларнинг барчаси асосий мақсад нимадан иборат эканлигига боғлиқ. Масалан, бир шаҳардан иккинчи шаҳарга бормоқчимиз. Бунда йўлқира ҳақи энг кам бўлиши ёки сарфланадиган вақт энг оз бўлиши ёки сафар қулай, кайфиятингизни кўтарадиган ва ҳоказо бўлиши мумкин. Хўжалик объектига нисбатан қарайдиган бўлсак, мақсад сифатида мавжуд ресурслар доирасида ишлаб чиқариладиган маҳсулотнинг энг кўп бўлиши олиниши мумкин. Таълим жараёнида эса энг катта самара деб, таълим олувчиларнинг ўзлаштириш даражаларининг энг юқори бўлиши асосий мақсад сифатида қаралиши мумкин.

Одатда энг маъқул вариантни танлаш масаласини ечиш жуда кўп сондаги ҳисоблашларни талаб қилади. Мисол сифатида қуйидаги икки масалани қарайлик:

1-масала. Қандайдир материалнинг стандарт листларини икки А ва В турдаги маҳсулотларга шундай қилиб қирқиш талаб этиладики, унда чиқинди энг кам бўлсин. Қуйидаги 7-расмда қирқишларнинг бир неча(4 та) вариантлари тасвирланган.



3)

	В	В	В	В
А	В	В	В	
	В	В	В	

4)

В	В	В	В	В
				В
В	В	В	В	В

7-расм

Масаланинг шартига кўра 4-вариант энг маъқул, чунки чиқинди чиқмаган. Лекин бу вариантда биринчи тур маҳсулот(яъни А) йўқ. Агар албатта биринчи тур маҳсулотлардан ҳам қирқиш талаб этилса, у ҳолда бошқа вариант энг маъқул бўлиши мумкин. Шундай қилиб, мумкин бўлган барча вариантларни қараб чиқиб, улар орасидан энг маъбул(оптимал) вариантни танлаш мумкин. Аммо, агар 20 турдаги маҳсулотларга оид масалани қаралса, у ҳолда вариантлар сони шундай кўпайиб кетадики, ҳатто уларни ЭҲМ ҳам уддасидан чиқиши амримаҳол бўлиши мумкин.

2-масала. Иккита чорвачилик фермаси ем-ҳашак тайёрлаш майдонларидан ҳар хил узокликдаги масофаларда жойлашган. Фермаларнинг ҳар бири минг тонна ҳисобида кўк озуқа тайёрлайди: 1-ферма – 40, 2-ферма эса 50. Кўк озукани иккала майдонда тайёрлаш ва улардан ташиб келиш мумкин. Лекин олинган ҳосил ҳисоб-китобларига кўра биринчи майдон 70 минг тонна, иккинчи майдон эса 30 минг тоннани ташкил қилади. Кўк озукани майдонлардан фермаларга ташиб келиш баҳоси(пул бирликларида) куйидаги 1-жадвалда келтирилган:

1-жа д в а л

Экин майдонлари	Ҳосилдорлик	Ф е р м а л а р	
		1-ферма	2-ферма
1-майдон	70	2	6
2-майдон	30	5	3
Кўк озуқага эҳтиёж		40	50

Кўк озукани энг кам харажат билан ташиб келишни режалаштириш керак. Жадвалда 2, 5, 6, 3 сонлари ташиб келишларнинг пул бирлигидаги баҳосини билдиради.

Кўк озукани шундай режалаштириш керакки, уни транспортда ташиб келиш қиймати минимал бўлсин. Шунинг учун бир тонна кўк озукани ташиб келишнинг энг кам қийматини излаймиз. Ташиб келишнинг энг қулай варианты бундай: биринчи майдондан биринчи фермага (баҳоси 2 пул бирлиги) 40 минг тоннанинг ҳаммасини). Иккинчи ферманинг эҳтиёжини(50 минг тонна) қондириш учун иккинчи майдондан 50 минг тонна ва биринчи дан 20 минг тонна озуқа ташиб келиш керак. Ташиб келишларнинг баҳоси

$$40.2 + 20 \cdot 3.30 = 290 (\text{пул бирлиги})$$

бўлади. Бу эса барча имкониятли вариантларнинг энг кичигидир.

Шундай қилиб, юқорида келтирилган 1-масала ҳам, 2-масала ҳам барча имкониятли вариантларни қараб чиқиш йўли билан ечилди.

Одатда чизикли дастурлашнинг кўпгина масалаларини ЭХМда ечадилар. Лекин деярли ҳар қадамда ўқувчиларга мактаб курсидан маълум бўлган математик аппарата ёрдамида ечиладиган сода масалалар учрайди. Бунга доир қуйидаги масалани қараймиз:

Стол ва шкаф тайёрлаш учун ташкилотда икки нав ёғоч бор. Маҳсулот тайёрлаш учун ҳар бир навнинг харажати 2-жадвалда келтирилган. Ташкилот битта стол тайёрлашдан 12 пул бирлиги, битта шкафдан эса 18 пул бирлиги микдорида фойда кўради. Ташкилот рентабеллиги (фойда кўриши) энг юқори бўлиши учун нечта стол ва нечта шкаф тайёрлашини аниқлаш керак. Унинг ихтиёрида 1-нав ёғочдан 60 м куб ва 2-нав ёғочдан эса 40 м куб бор. И з о ҳ. Стол ва шкаф тайёрлаш учун, албатта, бошқа материаллар ҳам керак, лекин биз уларнинг баҳосини унчалик аҳамиятга эга бўлмаганлиги учун ҳисобга олмаймиз.

2 – ж а д в а л

Маҳсулотлар	1-нав куб м	2-нав куб м
Стол	0,15	0,20
Шкаф	0,20	0,10

Фараз қлайлик, ташкилот x та стол ва y та шкаф тайёрлайди. Масала шартидан кўриниб турибдики, x ва y микдорлар – мусбат ёки нолга тенг (ташкилот бундай маҳсулот тайёрламаган ҳолда)

Агар битта стол тайёрлаш учун 0,15 м куб 1-нав ёғоч керак бўлса, x та стол тайёрлаш учун $0,15x$ м куб ёғоч керак бўлади. Шунга ўхшаш: агар бита шкаф тайёрлаш учун 0,20 м куб 1-нав ёғоч керак бўлса, y та шкаф тайёрлаш учун $0,20y$ м куб ёғоч керак бўлади. Бу ҳолда $Z = 0,15x + 0,20y$ – x та стол ва y та шкаф тайёрлаш учун сарфланадиган 1-нав ёғоч микдори бўлади. Масала шартидан маълумки, бу микдор 60 м кубдан ошиши мумкин эмас, яъни:

$$0,15x + 0,20y \leq 60$$

2-нав ёғоч учун худди шундай мулоҳаза юритиб, умумий сарф 40 м кубдан ошмаслиги кераклигини биламиз, яъни:

$$0,20x + 0,10y \leq 40$$

Ташкилотнинг x та стол тайёрлашидан тушадиган фойда $12x$ пул бирлиги, y та шкафдан эса $13y$ пул бирлиги бўлади. Ташкилотнинг барча

фойдаси қуйидагига тенг:

$$Z = 12x + 13y$$

Маҳсулот ресурси чегарасидан чиқиб кетмасдан энг кўп фойда олиш учун нечта стол ва нечта шкаф тайёрлаш кераклигини аниқлаш керак. Бу масалани математка тилида қуйидагича ифода қиламиз:

Ушбу

$$Z = 12x + 13y \quad (1)$$

функциянинг қуйида берилган

$$\begin{cases} 0,15x + 0,20y \leq 60; \\ 0,20x + 0,10y \leq 40; \\ x \geq 0; \\ y \geq 0; \end{cases} \quad (2)$$

чегараланишлар системасидаги максимумини топинг.

Бундай масалаларнинг батафсил таҳлили чизиқли дастурлаш масаласининг математик модели ўзида нимани гавдалантиришини тушунишга ёрдам беради. Моделнинг биринчи компоненти – қийматларини топиш керак бўлган ўзгарувчилар сони (x, y) бўлади. Иккинчиси – тенгсизликлар системаси (2), яъни ўзгарувчилар ўртасидаги мавжуд алоқаларни кўрсатувчи чегараланишлар системаси. Учинчиси эса берилган чегараланишлар системаси (2) доирасида максимумини топиш керак бўлган мақсад функцияси (1) бўлади.

Масаланинг шarti ва қўйилган мақсадларга боғлиқ равишда унинг математик ифодаси анча бошқача бўлиши мумкин. Чизиқли дастурлаш масаласини умумий кўринишда ифодалаш учун бир нечта масалаларни кўздан кечириш, уларнинг математик моделларини бир-бирларидан нималар билан фарқланишларини билиш учун таққослаш керак. Бунинг учун қуйидаи масалани қараймиз:

Фермада чорва молларини боқиш учун ҳар бир бошга бир кунда 6 озука моддаси бирлигидан кам бўлмаган миқдорда А, 12 озука моддаси бирлигидан кам бўлмаган миқдорда В ва 8 озука моддаси бирлигидан кам бўлмаган миқдорда С рацион сарф қилинади. Чорва молларини боқиш учун икки хил озука моддасидан фойдаланиш имконияти бор. Ҳар бир тур озука моддасининг бир килограммида қанча озука моддаси борлиги ҳақидаги маълумот 3-жадвалда келтирилган.

3-жа д в а л

	1-тур озука	2-тур озука
А	2	1
В	2	4
С	1	4

Биринчи тур озуқанинг бир килограмми 2 пул бирлиги, иккинчисиники эса 3 пул бирлиги туриши маълум. Шундай рацион тузиш керакки, у

озуқабопликнинг барча талабларига жавоб берсин ва энг арзон бўлсин.

Биринчи озуканинг керакли миқдорини x билан, иккинчисиникини y билан белгилаймиз.

Масаланинг шarti бўйича унинг математик моделини тузамиз, яъни:

$$Z = 2x + 3y \quad (3)$$

функциянинг

$$\begin{cases} 2x + y \geq 6 & (1) \\ 2x + 4y \geq 12 & (11) \\ x + 4y \geq 8 & (111) \\ x \geq 0 & (IV) \\ y \geq 0 & (V) \end{cases} \quad (4)$$

чегараланишлар системасидаги минимумини топинг.

Бу масаланинг математик моделини таҳлил қилиб, унинг олдинги масала билан ўхшаш ва фарқли томонларини аниқлаймиз. Икала ҳолда ҳам масаланинг конкрет(яққол) мазмунидан унинг математик моделига ўтишда чизиқли тенгсизликлар системасини(чегараланишлар системасини) ва берилган чегараланишлардаги(2) чизиқли тенгламани(мақсад функцияси деб аталувчи) ҳосил қиламиз.

(1 – 2), (3 – 4) муносабатлар билан берилган масаланинг математик модели «чизиқли модель» номини олган, чунки барча муносабатларда фақат чизиқли тенгламалар ва чизиқли тенгсизликлар ифодаланяпти. Бунга ўхшаш масалаларни “чизиқли дастурлаш масаласи” дейилади. Терминнинг иккинчи қисми, яъни “дастурлаш” сўзи тадқиқотнинг охириги мақсадини – ҳаракатнинг энг маъқул натижага олиб келадиган оптимал режасини ёки оптимал дастурини аниқлашни акс эттиради.

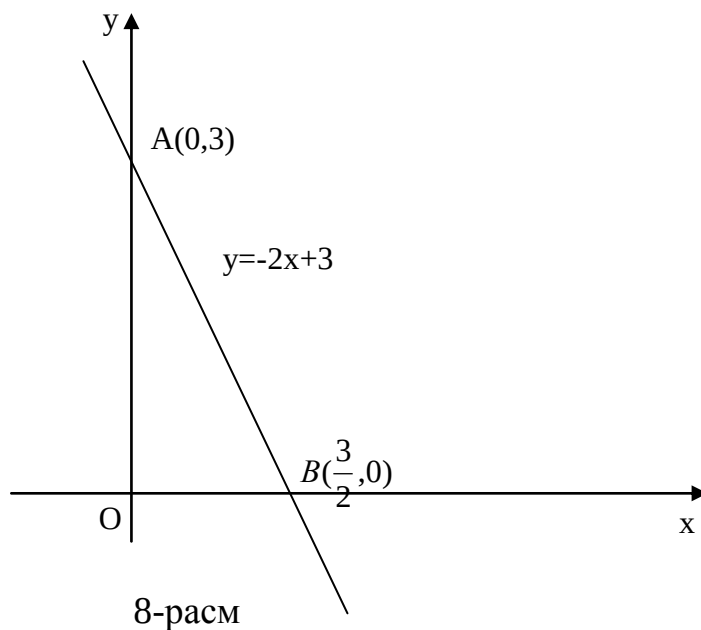
Чизиқли дастурлаш масаласининг икки ўзгарувчи бўлган ҳол учун умумий кўринишда ифодалаш мумкин.

1.4. Чизиқли дастурлаш масалаларини геометрик метод билан ечиш

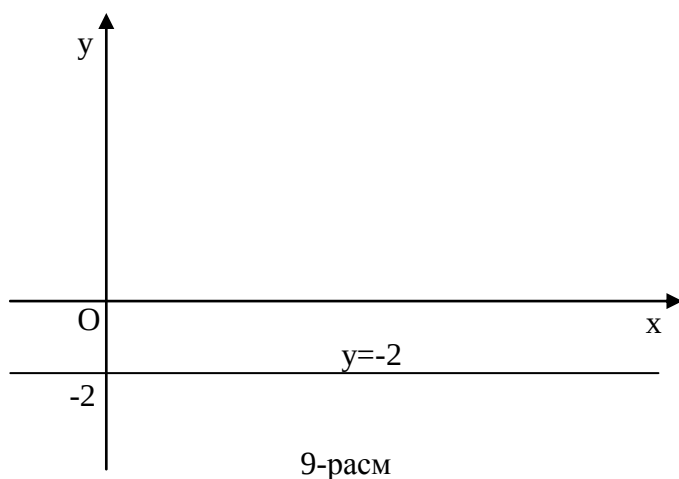
Маълумки, дифференциал ҳисоб методлари фақат қаралаётган соҳа ичида ётган экстремал нуқталарни топишга имкон беради. Чизиқли дастурлаш масалаларида эса функция ҳамма ҳолларда кўпбурчакнинг чегарасида экстремал қийматга эришади, балки унинг ичида ётган нуқталарда эмас. Функциянинг ҳосилалари ҳар қандай ҳолда ҳам ҳаммаси нолга тенг бўлмайди, яъни чизиқли функциянинг ҳусусий ҳосилалари ўзгарувчилар олдидаги коэффицентларга тенг, улар эса бир вақтда нолга айланмайдилар. Барча ҳосилаларнинг бир вақтда нолга айланиши мумкин эмаслиги шуни англатадики, шу соҳанинг барча ички нуқталарида экстремумга эришилмайди. Агар экстремум мавжуд бўлса, у фақат функциянинг қабул қилиши мумкин бўлган кўпбурчак чегарасидаги нуқтада эришади.

Шунинг учун экстремумга доир бундай масалаларни ечиш методлари дифференциал ҳисобдаги бизга маълум бўлган методлардан фарқ қилади. Ана шу методлардан баъзиларини қараб чиқамиз.

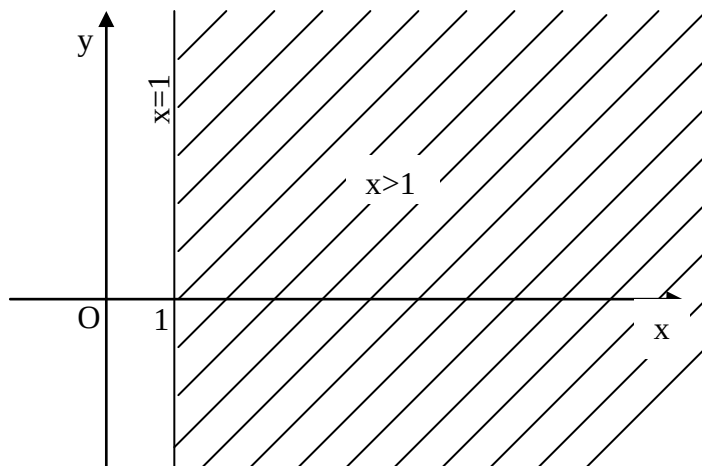
Юқорида қаралган масалани геометрик метод билан ечиш учун чизикли чегараланишлардаги функциянинг максимум ва минимум қийматларини топишни билиш зарур. Бунинг учун $y = kx + b$ функциянинг графиги қандайдир тўғри чизик эканлигини эслайлик. Масалан, $y = -2x + 3$ функциянинг графиги $A(0, 3)$ ва $B(\frac{3}{2}, 0)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик бўлади(8-расм):



Бу тенгламанинг ечими шу тўғри чизикқа тегишли бўлган истаган нуқтанинг координатлари бўлади. Тенгламанинг ечими – нисбий тушунча ва у қандай тўпلامда қаралаётганлигига боғлиқ. Масалан: $x - 1 = 0$ тенглама, агар унинг ечимини сон ўқида қаралса, биргина $x = 1$ илдизга эга, яъни ечим битта сондан иборат бўлади. Агар шу тенгламанинг ечимини координаталар текислигида қаралса, у ҳолда у $(1, 0)$ нуқтадан ўтиб, Оу ўқиға параллел бўлган тўғри чизик нуқталарининг координатлари бўлади. Шунга ўхшаш: $y = -2$ тенгламанинг ечими(координаталар текислигида) $(0, -2)$ нуқтадан ўтиб, Ох ўқиға параллел бўлган тўғри чизик нуқталарининг координатлари бўлади(9-расм):

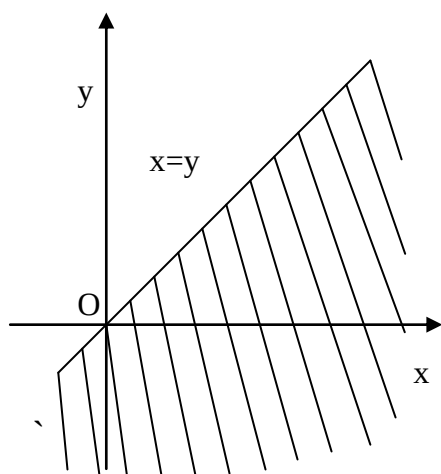


$x - 1 \geq 0$ тенгсизлик учун сон ўқида 1 дан катта ёки 1 га тенг сонлар тўплами, яъни $(1, \infty)$ ечим бўлади. Координаталар текислигида шу тенгсизликнинг ечими ўнг яримтекислик нуқталарининг координаталари бўлади, бунда $x - 1 = 0$ координаталар текислигини иккита яримтекисликка бўлувчи тўғри чизиқ – чегаравий бўлади(10-рasm):

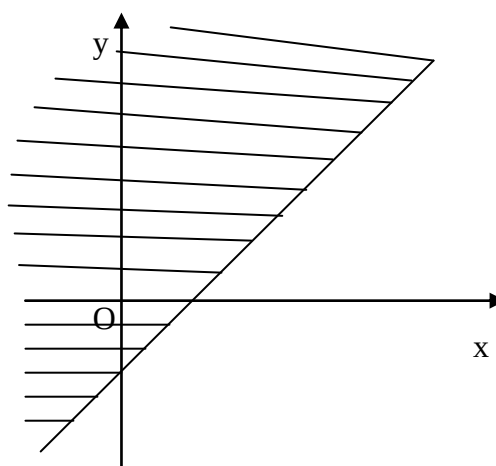


10-рasm

Кўрсатилган яримтекислик чегаравий тўғри чизиқдан қайси томон бўйичалигини аниқлаш учун ихтиёрий нуқтани(осонгина $O(0, 0)$ нуқтани) “синаб кўриш” етарли. Агар тўғри сонли тенгсизлик ҳосил қилсак, у ҳолда изланаётган яримтекислик чегаравий тўғри чизиқдан синалаётган нуқта ётган томонда жойлашади. Агар тенгсизлик нотўғри бўлса, у ҳолда изланаётган яримтекислик ва синалаётган нуқта бу тўғри чизиқнинг турли томонларида жойлашган бўлади. Қуйида(11-рasm) шундай тенгсизликларнинг координаталар текислигидаги ечимлари ясалган: $x \geq y$, $y \geq 1 - x$.



а)



б)

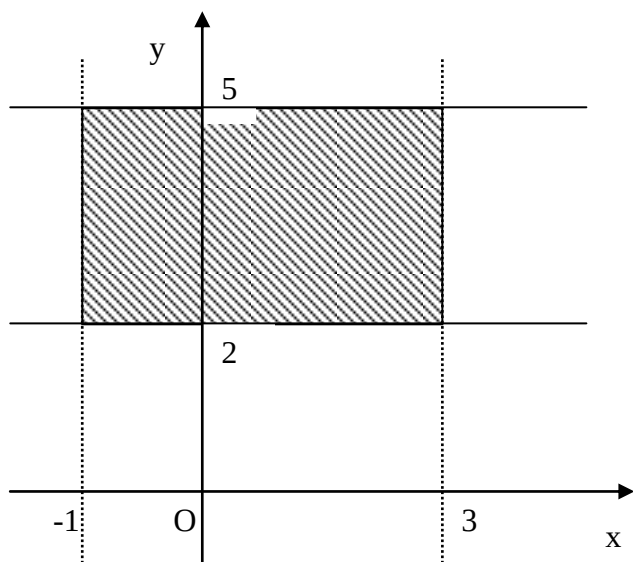
11-рasm

Чизиқли дастурлаш масалаларини геометрик метод билан ечишда “тенгсизликлар системасининг ечими” тушунчасидан фойдаланилади. Шундай тенгсизликлардан бир нечасини ечамиз:

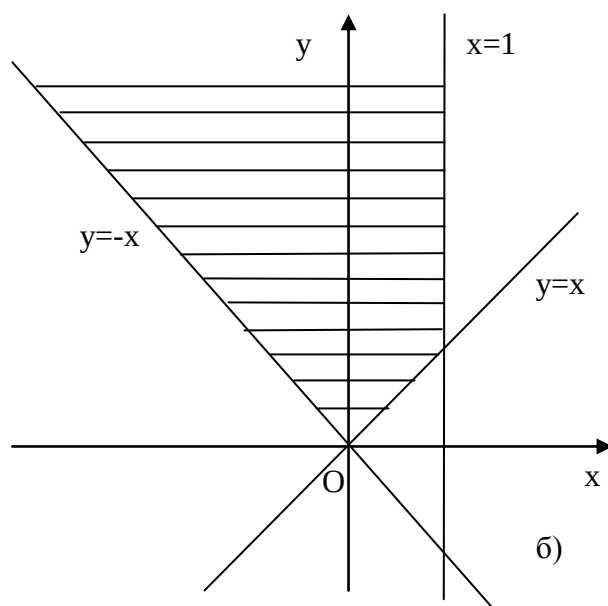
$$\text{а) } \begin{cases} -1 < x < 3; \\ 2 \leq y \leq 5. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y \geq 0; \\ x - y \leq 0; \\ x \leq 1. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x \geq 0; \\ y \geq 0; \\ x < y \leq x + 1. \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x + y \leq 4; \\ 3x + 5y \leq 15; \\ x \leq 3; \\ y \leq 2. \end{cases}$$

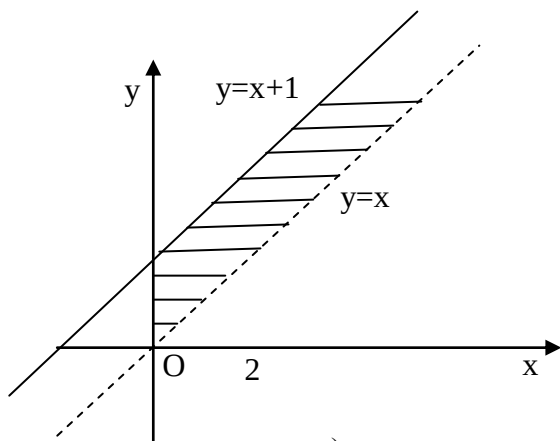
Бунда фигурали кавс барча шартлар бир вақтда бажарилишини билдиради. Системанинг ҳар бир ечими – системага кирувчи ҳар бир тенгсизликларнинг ечимлари тўпламларининг кесишмасидир (12-расм):



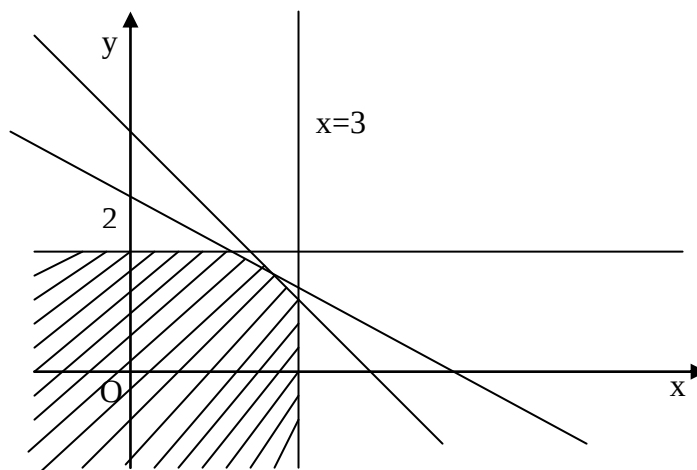
а)



б)



в)



г)

12-расм

Тенгсизликлар системасининг ечими – нуқталар координаталари, ечимлар тўплами эса кўпбурчак ташкил қилиши мумкин бўлган нуқталар тўпламини ҳосил қилади (баъзи ҳолларда бу – битта нуқта, тўғри чизиқ нуқталари тўплами, кесма ёки бўш тўплам бўлиши мумкин).

Энди бундай машқни қараймиз:

Ушбу

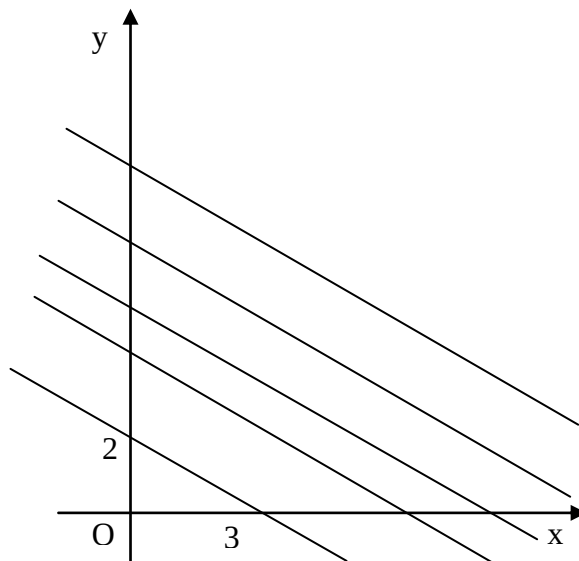
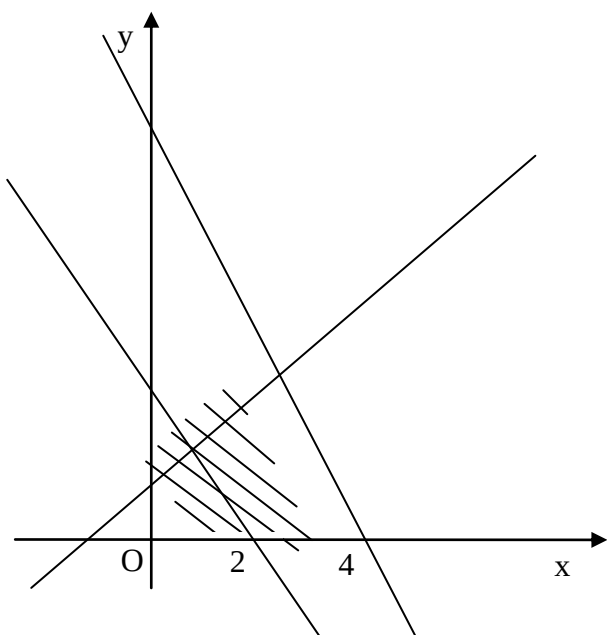
$$Z = 2x + 3y \quad (5)$$

функциянинг берилган:

$$\begin{cases} x - y \geq -1 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

чегаравий системадаги максимумини топинг.

Қуйида (13-расм) чегараланишлар системаси (6) бўлган ечим xOy координаталар системасида ясалган:



13-расм

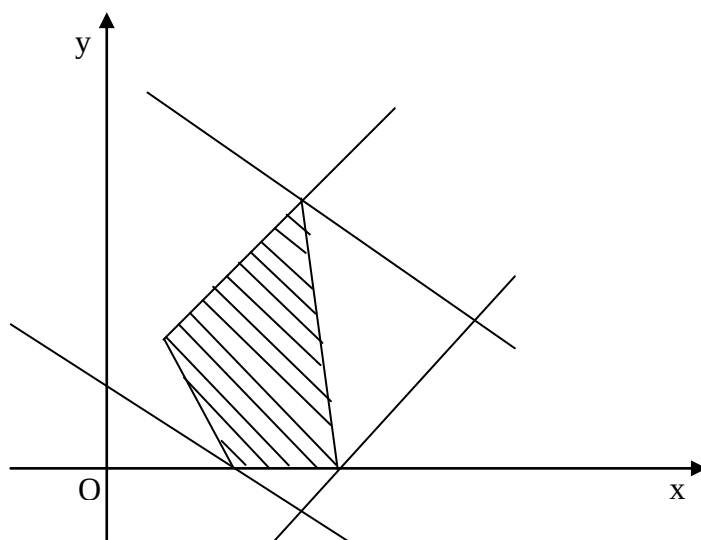
(5) тенглама Z нинг тайин қийматида тўғри чизиқни аниқлайди, Z нинг ўзгариши қатор параллел тўғри чизиқларни аниқлайди. 13-б расмда

$$Z = 6, 12, 14\left(\frac{2}{3}\right), 18, 24$$

бўлганда (5) тенгламага мос келувчи тўғри чизиқлар тасвирланган.

Мазкур машқнинг ечимини геометрик маъноси тўғри чизиклар тўплами (5) орасидан шундайини топишга келтириладики, у Z нинг энг ката қийматига мос келсин ва $ABCD$ кўпбурчак(13-а расм) орқали ўтсин. Равшанки, бу – кўпбурчакнинг учи бўлади(баъзи ҳолларда томони ҳам бўлиши мумкин).

13-а ва 13-б расмларни бирлаштириб, $ABCD$ кўпбурчакнинг шундай нуқтасини топамизки, ундан Z нинг энг катта қийматига мос келувчи (5) тўғри чизиклардан бири ўтади. Равшанки, бундай нуқта $ABCD$ кўпбурчакнинг координаталари берилган масаланинг ечими бўладиган C нуқтаси бўлади (14-расм):



14-расм

Чизикли дастурлаш масаласини икки ўзгарувчи бўлган ҳолда геометрик метод билан ечилиш алгоритмини(қонидасини) тузиш-ифодалаш учун “таянч тўғри чизик” ва “меъёрий тўғри чизик” тушунчаларини киритамиз. Таянч тўғри чизик деб, кўпбурчак билан ҳеч бўлмаганда битта умумий нуқтага эга бўлган, кўпбурчакнинг бошқа барча нуқталари ундан бир томонда ётувчи тўғри чизикка айтилади (15-расм):



15-расм

Меъёрий тўғри чизик деб, шундай тўғри чизикка айтиладики, унда Z функция бир хил қийматларга эга бўлади.

Масалан: $Z = 6$ бўлганда графиги меъёрий тўғри чизикдан иборат бўлган $6 = 2x + 3y$ тенгламага эга бўламиз(13-б расм).

13-б расмда функциянинг $Z = 6, 12, 14(\frac{2}{3}), 18, 24$ қийматларига мос келувчи меъёрий тўғри чизиклар тасвирланган. Уларнинг ҳаммаси ўзаро параллел. Бу тўғри чизиклар орасидан таянч тўғри чизикларни топамиз. Кўпбурчакнинг учи ўтадиган тўғри чизиклар, яъни координаталари мақсад функциясини экстремаллаштирадиган тўғри чизиклар таянч тўғри чизиклар бўлади.

14-расмда бундай таянч тўғри чизиклар ABCD кўпбурчакнинг A ва C учлари орқали ўтадиган k ва l тўғри чизиклар бўлади. Шу учларнинг координаталарини топамиз.

A уч – бу AB ва AD тўғри чизикларнинг кесишган нуқтаси:

$$\begin{cases} y = 0; \\ 3y + 2x = 6 \end{cases}$$

C учи – бу DC ва CB тўғри чизикларнинг кесишган нуқтаси:

$$\begin{cases} x - y = -1; \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Системанинг ҳар бирини ечиб, учларнинг изланаётган координаталарини топамиз:

$$A(2,0) \text{ ва } C(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}).$$

A ва C нуқталарнинг координаталарини (5) мақсад функциясига қўямиз:

$$Z(A) = 4; \quad Z(C) = 14(\frac{2}{3}).$$

Шундай қилиб, Z нинг максимуми C нуқтада бўлади. Агар ABCD кўпбурчакнинг бошқа учларини текширилса, у ҳолда Z нинг қиймати уларда $14(\frac{2}{3})$ га қараганда кичик бўлади.

Оптималь ечим бундай бўлади:

$$x = \frac{7}{3}; \quad y = \frac{10}{3}; \quad Z = 14(\frac{2}{3}).$$

Энди $Z = x - y$ функцияни худди ўша (6) чегараланишлар системасида қараймиз. Агар $Z = -1$ бўлса, у ҳолда

$$-1 = x - y$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Унинг графиги берилган кўпбурчак учун таянч бўлган ва DC томон орқали ўтувчи d тўғри чизик бўлади.

Бу ҳолда ДС кесманинг ихтиёрий нуқтасининг координаталарида Z функция -1 га тенг қийматга эга бўлади. Иккинчи e таянч тўғри чизик $B(4, 0)$ нуқтадан ўтади.

$Z = x - y$ функция B нуқтада максимумга эришади, унинг минимуми эса -1 га тенг ва унга СД кесманинг ихтиёрий нуқтасининг координаталарида эришади.

Охирги ҳолатда айтадиларки, масала шу маънода чексиз кўп ечимларга эга бўладиги x ва y нинг ҳар хил қийматлари мақсад функциясига ўша қийматни, яъни -1 ни беради.

Биз тажриба-синов ишлари давомида ўқувчи-талабаларнинг мустақил ишларини ташкил қилишда уларга юқорида аналитик-алгебраик метод билан ечилган чизикли дастурлашга доир масалаларни геометрик метод билан ечишни тавсия қилиш уларда катта қизиқиш уйғотишини гувоҳи бўлдик.

1.5. Чизикли дастурлаш масалаларини алгебраик метод билан ечиш алгоритми

1. *Чегараланиш системасини тенгламалар системаси кўринишида тасвирлаймиз.*

2. *Биринчи базис ечимни танлаймиз, уни ва мақсад функциясини қолган ўзгарувчилар орқали ифода қиламиз.*

3. *Чегараланишлар системасининг ва мақсад функциясининг координаталарини доимо жадвалга киритамиз.*

4. *Жадвалнинг Z мос келувчи қаторида манфий коэффицентларни топамиз(агар минимумни излаётган бўлсак), озод ҳадларни эътиборга олмаймиз.*

5. *Танланган коэффицент турган устунни кўздан кечирамиз. Озод ҳадларни танланган устуннинг мос мусбат коэффицентларига бўламиз(агар бу устунда мусбат коэффицентлар бўлмаса, у ҳолда улар бор бўлган ва берилган алгоритм шартларига мос келувчи устунни танлаймиз). Танланган сон турган қатор асосий, ўзгарувчи олдидаги коэффицент эса – рухсат этувчи коэффицент бўлади. Шу коэффицентга мос қаторни бўламиз ва янги жадвалга ёзамиз.*

6. *Рухсат этувчи коэффицент билан устун талабларига жавоб берувчи янги жадвалдаги ўзгарувчи базис ўзгарувчи бўлиб қолади ва биринчи устундаги эскисини ўрнига ёзилади. Янги жадвални тўлдириш учун шундай алмаштиришлардан фойдаламизки, рухсат этувчи коэффицент турган барча коэффицентлар нолга айлансин. Бунинг учун мос қаторни шундай сонга кўпайтирамизки, танланганга қўшганда ноль ҳосил бўлсин.*

7. *Ҳосил қилинган жадвалда худди олдиндагига ўхшаш алмаштиришларни бажарамиз. Бу жараёни охирги қатор коэффицентларининг ҳаммаси мусбат(максимум учун) ёки ҳаммаси манфий(минимум учун) бўлгунига қадар давом эттирамиз. Озод ҳадни эътиборга олмаймиз.*

8. *Жавоб ҳосил қилиш учун базис ўзгарувчиларни мос озод ҳадларга тенглаштирамиз.*

Бу алгоритмни ўзлаштириш учун ҳар хил соҳаларга доир масалалар ечиш ва бунда ўрганувчиларнинг мустақил ишларини ҳар хил кўринишларда ташкил қилиш мумкин.

1.2-в. Чизиқли дастурлаш масаласини ечиш методлари

1.2.1. Чизиқли тенгламалар системасини ечиш

Қуйидаги

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4.1)$$

кўринишдаги тенгламалар системасини қарайлик. Бу ерда тенгламалар сони m та ва номаълумлар сони n та.

Маълум таърифларни эслатиб ўтамиз:

1) (4.1) **системанинг ечими** деб, $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг шундай $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ қийматларига айтиладики, улар (4.1) системанинг ҳар бир тенгламасини қаноатлантиради. Масалан:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_1 + x_3 = 1 \end{cases}$$

системанинг $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0$ ечими бўлади.

2) Камида битта ечимга эга бўлган чизиқли тенгламалар системаси биргаликда бирорта ҳам ечимга эга бўлмаса, у ҳолда уни **биргаликда эмас**, деб аталади. Масалан, 1)даги система биргаликда, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$ система биргаликда эмас.

3) Агар система ягона ечимга эга бўлса, у ҳолда уни **аниқланган**, биттадан ортиқ ечимга эга бўлса, у ҳолда уни **аниқланмаган** деб аталади.

Масалан: $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ - бу аниқланган система, $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ 6x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$ - бу аниқланмаган,

чунки унинг ечими $(x_1, 2x_1 - 2)$, $-\infty < x_1 < \infty$, сонлар жуфтидан иборат.

Чизиқли дастурлаш масалаларида асосан аниқланмаган системалар кўрилади. Ўрта умумтаълим мактабининг алгебра курсида системаларнинг ечимини топишда ўрнига қўйиш ва қўйиш усуллари ўрганилганлиги учун биз бу ерда уларга тўхталмаймиз.

Системаларни ечишда умумий ҳисобланган номаълумларни тўла йўқотиш усули билан танишиб чиқамиз.

1-м и с о л.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

система ечилсин.

Системани қуйидаги жадвал кўринишида ёзиб олиш қулайлик туғдиради:

x_1	x_2	x_3	
2	-1	3	3
-2	-1	6	2
2	1	-2	3

Кўриниб туриптики, жадвал элементлари системадаги номаълумлар коэффициентлари ва озод ҳадлардан иборат. Жадвалдан нолдан фарқли бирор коэффициент, масалан, биринчи сатрдаги 3 танлаб олинади ва у ҳал қилувчи элемент, мос сатр ва устунлар ҳал қилувчи сатр ва устунлар деб аталади. Ҳал қилувчи сатрнинг ҳар бир элементи ҳал қилувчи элементга бўлиб чиқилади.

Натижада қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

x_1	x_2	x_3	
1	-1/2	3/2	3/2
-2	-1	6	2
2	1	-2	3

Ҳал қилувчи сатрни 2 ва -2 га кўпайтириб, мос равишда иккинчи ва учинчи сатрларга қўшамиз:

x_1	x_2	x_3	
1	$-1/2$	$3/2$	$3/2$
0	-2	9	5
0	2	-5	0

Иккинчи сатрдаги -2 сонини ҳал қилувчи элемент сифатида танлаб оламиз ва ҳал қилувчи сатрни -2 га бўламиз:

x_1	x_2	x_3	
1	$-1/2$	$3/2$	$3/2$
0	1	$-9/2$	$-5/2$
0	2	-5	0

Ҳал қилувчи сатр -2 ни -2 га кўпайтириб учинчи сатрга қўшамиз, натижада

x_1	x_2	x_3	
1	$-1/2$	$3/2$	$3/2$
0	1	$-9/2$	$-5/2$
0	0	4	4

Бундан 4 сони ҳал қилувчи элемент бўлади, шунинг учун учинчи сатрни 4 га бўламиз:

x_1	x_2	x_3	
1	$-1/2$	$3/2$	$3/2$
0	1	$-9/2$	$-5/2$
0	0	1	1

Охирги сатрни $9/2$ ва $-3/2$ га кўпайтириб мос равишда иккинчи ва биринчи сатрларга қўшамиз:

x_1	x_2	x_3	
1	$-1/2$	0	0
0	1	0	2
0	0	1	1

Энди иккинчи сатрни $\frac{1}{2}$ га кўпайтириб биринчи сатрга қўшсак, қуйидаги натижавий жадвалга эга бўламиз:

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	1
0	1	0	2
0	0	1	1

Бундан берилган тенгламанинг ечими $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$ бўлади. Демак, система биргаликда ва аниқланган экан. Охириги жадвалга мос келган системанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} 1 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 + 0 \bullet x_3 &= 1 \\ 0 \bullet x_1 + 1 \bullet x_2 + 0 \bullet x_3 &= 2 \\ 0 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 + 1 \bullet x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2-м и с о л. Қуйидаги тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} -3 \bullet x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$$

Бу системага ҳам юқоридаги номаълумларни йўқотиш усулини қўллаймиз. Унга(система)га мос келган бошланғич жадвал кўриниши қуйидагича бўлади:

x_1	x_2	x_3	
-3	3	1	4
4	-2	-1	-2
1	1	0	2

Аввалги мисолни ечишдаги амалларни қўллаш натижасида қуйидаги жадваллар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

X_1	x_2	x_3	
1	-1	-1/3	-4/3
4	-2	-1	-2
1	1	0	2

X_1	x_2	x_3	
1	-1	-1/3	-4/3
0	2	1/3	10/3
0	2	1/3	10/3

x_1	x_2	x_3	
1	-1	-1/3	-4/3
0	1	1/6	5/3
0	2	1/3	10/3

Бу жадвалнинг охирги сатри

$$0 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 + 0 \bullet x_3 = 0$$

тенглама мос келади. Демак, бу тенгламани, яъни жадвалнинг охирги сатрини ҳисобга олмасак ҳам бўлар экан. Унда қуйидаги жадвалларга эга бўламиз:

X_1	x_2	x_3	
1	-1	-1/3	-4/3
0	1	1/6	5/3

X_1	x_2	x_3	
1	0	-1/6	1/3
0	1	1/6	5/3

Охирги жадвалга қуйидаги система мос келади:

$$\begin{cases} 1 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 - \frac{1}{6} x_3 = \frac{1}{3} \\ 0 \bullet x_1 + 1 \bullet x_2 + \frac{1}{6} x_3 = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} x_3 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \frac{1}{6} x_3 \end{cases}$$

бу ерда x_3 – ихтиёрий ҳақиқий сонни қабул қилади. Демак, берилган система биргаликда, лекин аниқланмаган, яъни чексиз кўп ечимга эга.

3-м и с о л. Қуйидаги

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини ечиш талаб қилинган бўлсин. Унинг жадвал кўриниши қуйидагича бўлади:

x_1	x_2	x_3	
2	-1	1	4
-1	2	-3	1
2	-4	6	0

Юқоридаги номаълумларни йўқотиш усулини қўллаб, қуйидаги жадваллар кетма-кетлигини ҳосил қиламиз:

x_1	x_2	x_3	
1	-1/2	1/2	2
-1	2	-3	1
2	-4	6	0

x_1	x_2	x_3	
1	-1/2	1/2	2
0	3/2	-5/2	3
0	-3	5	-4

x_1	x_2	x_3	
1	-1/2	1/2	2
0	1	-5/3	2
0	-3	5	-4

x_1	x_2	x_3	
1	-1/2	1/2	2
0	1	-5/3	2
0	0	0	2

Охирги жадвалнинг охирги сатрига мос келган тенглама $0 \bullet x_1 + 0 \bullet x_2 + 0 \bullet x_3 = 2$ каби бўлади, яъни система биргаликда эмас(ечими йўқ).

Юқорида келтирилган мисоллардан кўриниб турибдики, номаълумларни тўла йўқотиш усули 2 кадамдан иборат бўлиб, биринчиси жадвални учбурчак ҳолатга келтириш, иккинчиси эса вертикал чизикдан чап тарафини бирлик жадвалга келтиришдан иборат.

Биз иккита кадамни умумий кўринишдаги

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

системага қўллаймиз. Бунинг учун, аввал системанинг мос жадвал кўринишини ёзиб оламиз.

x_1	x_2		x_n	
a_{11}	a_{12}		a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}		a_{2n}	b_2
-----				----
a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m

Ҳал қилувчи элементларни танлаш ва зарур бўлса, танграмаларнинг ўрнини алмаштириш ёрдамида ҳамда барча элементлар ноль бўлган сатрларни ташлаб юбориш ҳисобига қуйидаги жадвални ҳосил қиламиз:

x_1	x_2	x_3	...	x_r	...	x_n	
1	a'_{12}	a'_{13}	...	a'_{1r}	...	a'_{1n}	b'_1
0	1	a'_{23}	...	a'_{2r}	...	a'_{2n}	b'_2
0	0	1	...	a'_{3r}	...	a'_{3n}	b'_3
-----							----
0	0	0	...	1	...	a'_m	b'_r

Бу жараён давомида қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин.

1) бирор сатрнинг биринчи n та элементи ноль, қолган охирги элементи нолдан фарқли, бунда система биргаликда эмас (ечими йўқ);

2) $r = n$, бунда система аниқланган (ягона ечимга эга) бўлади, уни аниқлаш учун охирги сатрдан $x_n = b'_n$, ундан олдинги сатрдан $x_{n-1} = b'_{n-1} - a'_{n-1}b'_n$ ва ҳоказо давом эттирилади ва барча $x_1, x_2 \dots x_n$ ларнинг қийматлари топилади;

3) $r < n$, яъни ҳосил бўлган тенгламалар сони номаълумлар сонидан кам, у ҳолда қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 1x_1 + a_{12}^1x_2 + a_{13}^1x_3 + \dots + a_{1r}^1x_r + \dots + a_{1n}^1x_n = b_1^1 \\ 0x_1 + 1x_2 + a_{23}^1x_3 + \dots + a_{2r}^1x_r + \dots + a_{2n}^1x_n = b_2^1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + \dots + a_{3r}^1x_r + \dots + a_{3n}^1x_n = b_3^1 \\ \text{-----} \\ 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + \dots + 1x_r + \dots + a_{rn}^1x_n = b_r^1 \end{cases}$$

ёки уни $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ номаълумларга нисбатан ечиб, қуйидаги кўринишга эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 = b_1^{11} + a_{r+1}^{11}x_{r+1} + \dots + a_{1n}^{11}x_n \\ x_2 = b_2^{11} + a_{2r+1}^{11}x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{11}x_n \\ \text{-----} \\ x_r = b_r^{11} + a_{rr+1}^{11}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{11}x_n \end{cases}$$

яъни $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ ўзгарувчилар $x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_r$ ўзгарувчилар орқали ифодаланади. Демак, $x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_r$ ўзгарувчиларга қийматлар бериб, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ ўзгарувчиларнинг қийматларини аниқлаш мумкин, яъни система аниқланмаган (чексиз кўп ечимга эга).

Таъриф. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ ўзгарувчилар базис, $x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_r$ лар эркин ўзгарувчилар деб аталади. $x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \dots, x_r$ дан $(b_1^{11}, b_2^{11}, \dots, b_r^{11}, 0, \dots, 0)$ ечимни ҳосил қиламиз, бундай ечим $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ базисга мос келувчи базис ечим деб аталади.

1.2.2. Тўғри тўртбурчак қоидаси ёрдамида базис ечимларни топиш

Қуйидаги

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

системани ечиш талаб этилсин.

Бу системага мос келган жадвални ёзиб оламиз:

x_1	x_2	x_3	
2	-2	1	3
-1	1	-1	0
-1	2	2	7

Ҳал қилувчи элемент сифатида, масалан, биринчи тенгламада x_1 олдидаги 2 коэффициентни танлаб оламиз. Сўнгра номаълумларни йўқотиш усулини қўллаймиз:

x_1	x_2	x_3	
1	-1	1/2	3/2
0	3	-2	-3
0	1	5/2	17/2

Бунда ҳал қилувчи сатр элементлари ҳал қилувчи элементга бўлинади; ҳал қилувчи устунда эса 1 ва 0 лар пайдо бўлади. Ҳал қилувчи сатр ва устунда ётмаган элементларнинг қийматлари эса тўртбурчак қоидаси ёрдамида топилади. Яъни агар, a_{ij} ҳал қилувчи элемент бўлиб, a_{ek} элементнинг қийматини топиш керак бўлса, қуйидагича тўртбурчак тузиб олинади:

a_{ij}	a_{ik}
a_{ej}	a_{ek}

Буни пропорция деб ҳам олиш мумкин, у ҳолда a_{ek} “номаълум” ни топиш учун a_{ej} ни a_{ik} га ҳал қилувчи элемент a_{ij} га бўламиз ва a_{ek} нинг ўзидан айриб ташлаймиз. Ҳосил бўлган сонни a_{ek} нинг ўрнига ёзамиз, яъни:

$$a_{ek}^{11} = a_{ek} - \frac{a_{ij} \bullet a_{ik}}{a_{ij}}$$

Охирги жадвалда 3 сонини ҳал қилувчи элемент сифатида қабул қилиб, тўртбурчак қоидаси ёрдамида кейинги жадвалга ўтамыз:

x_1	x_2	x_3	
1	0	-1/6	1/2
0	1	-2/3	-1
0	0	19/6	19/2

Ҳосил бўлган жадвалда 19/6 сонини ҳал қилувчи элемент деб оламиз.

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	3

Бундан ечимни осонгина аниқлаш мумкин: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3$

1.2.3. Системанинг барча базис ечимларини топиш

Тўғри тўртбурчак қоидаси ёрдамида системанинг бирорта базис ечими аниқланган бўлсин. У ҳолда кейинги базис ечимни топиш учун бирорта базис ўзгарувчини бирорта базисни ўзгарувчи билан алмаштирилади ва шу ғоя такрорланиб, барча базис ечимлар топилади. Бунда кўрсатиш осонки, агар тенгламалар сони m та, ўзгарувчилар сони n та бўлса, базис ўзгарувчилар сони

$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ та бўлади. Айтилганларни қуйидаги мисолда кўрайлик:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}$$

Бу системанинг мос жадвалини қуриб, кетма-кет тўғри тўртбурчак қоидасини қўллаймиз:

X_1	x_2	x_3	x_4	
2	1	-2	3	4
-1	3	1	0	5
3	-2	-3	3	-1
1	1/2	-1	3/2	2
0	7/2	0	3/2	7
0	-7/2	0	-3/2	-7

Охирги жадвалнинг иккинчи ва учинчи сатрлари бир хил, шу сабабли уларнинг биттасини, масалан охирги сатрни ташлаб юбрамиз:

X_1	x_2	x_3	x_4		
1	1/2	-1	3/2	2	
0	7/2	0	3/2	7	
x_1 базис	1	0	-1	9/7	1
x_2	0	1	0	3/7	2

ечим: (1, 2, 0, 0)

Энди x_1 базис ўзгарувчини x_3 эркин(базисмас) ўзгарувчига алмаштирамиз.

x_3	X_1	x_2	x_3	x_4		базис ечим (0, 2, -1, 0)
x_2	-1	0	1	-9/7	-1	
x_4	0	1	0	3/7	2	базис ечим
(0,5/3,0,9/7)	7/9	0	-7/9	1	7/9	
x_2	-1/3	1	1/3	0	5/3	
x_4	0	7/3	0	1	14/3	базис ечим (-
5,0,0,14/3)	1	3	-1	0	-5	
x_1	0	7/3	0	1	14/3	
x_4	-1	-3	1	0	5	базис ечим
(0,0,5,14/3)						

Кўриниб турибдики, x_1 ва x_3 ни базис ўзгарувчи қилишнинг иложи йўқ. Бунинг сабаби шуки, системанинг ўзида x_1 ва x_2 ўзгарувчиларнинг ҳар бир тенгламада коэффицентлари пропорционалдир. Демак, берилган системанинг 5 та базис ечими мавжуд.

1.2.4. Чизикли дастурлаш масаласини симплекс метод билан ечиш

Чизикли дастурлаш масаласининг каноник кўриниши қуйидагича

$$Z = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \rightarrow \max \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (4.3)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

яъни (4.4) ва (4.5) шартларни қаноатлантирувчи $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ўзгарувчиларнинг шундай қиймат(лар)и топилсинки, унда (4.2)- Z функция максимум қийматга эришсин.

Борди-ю, чизикли дастурлаш масаласининг шартлари тенгсизликлар кўринишида берилган бўлса, уларнинг кичик томонларига номанфий қўшимча ўзгарувчилар қўшиш орқали тенгликка, демак, бу билан масалани каноник шаклга келтириб олиш мумкин. Лекин, ўзгарувчилар сони 2 та бўлиб, шартлар тенгсизлик кўринишида берилгани алоҳида кўрилиб, бундай масалаларни график усулда ечиш қулайдир.

а) Чизикли дастурлаш масаласини график усулда ечиш:

Бу усулни қуйидаги сонли мисолда намоёиш қиламиз:

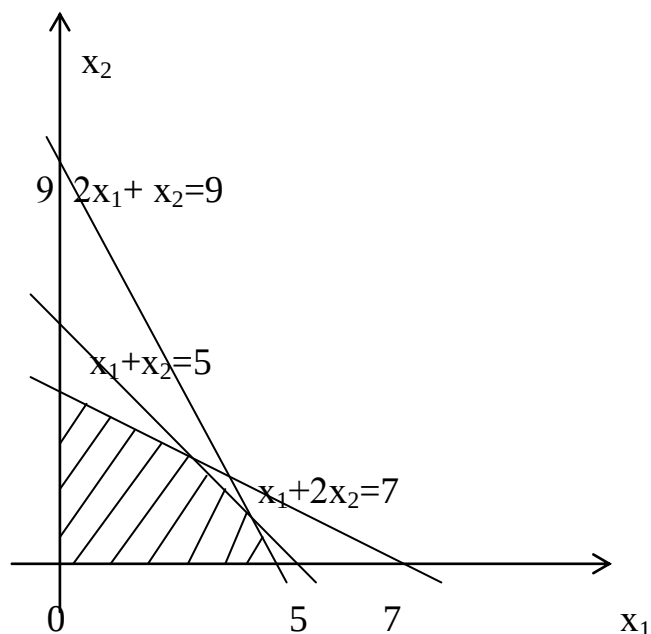
$$Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 2x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \end{cases} \quad (4.6)$$

$$x_1 \geq 0, \quad 2x_2 \geq 0 \quad (4.7)$$

Албатта, (4.6) нинг ҳар бир тенгсизлиги (x_1, x_2) текислигида яримтекисликларни, (4.7) эса биринчи чоракни аниқлайди. Бу ярим текисликлар ва биринчи чорак кесишмаси текисликда кўпбурчакни ифодалайди. Шу кўпбурчак учлари базис ечимларни бериб, (4.5) функция шу базис ечимларнинг бирида максимумга эришади. (4.6) тенгсизликлар билан аниқланган яримтекисликларни топиш учун, тенгсизликларни тенглик ҳолида ёзиб оламиз ва (x_1, x_2) координаталар текислигида бу тўғри чизиқларни чизамиз. Сўнгра бирор нуқтани (масалан: $(0,0)$) мос тенгсизликка қўйиб, тенгсизликнинг бажарилиши ёки бажарилмаслигига қараб, мос яримтекисликни аниқлаймиз.

4.1-расм



Базис ечимлар O, A, B, C, D нуқталардан иборат бўлиб, уларнинг координаталарини топиш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмайди: $O(0;0)$, $A(0;3)$, $B(3;2)$, $C(4;1)$, $D(4;5)$. B ва C нуқталарнинг координаталари мос равишда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases} \quad \text{системаларнинг ечимларидан иборат: } (3;2), (4;1).$$

Энди шу базис ечимларда Z функциянинг қийматларини аниқлаймиз:

$$Z(O) = 0, \quad Z(A) = 10,5, \quad Z(B) = 12, \quad Z(C) = 1, \quad Z(D) = 9$$

демак, Z функция энг катта қийматига B нуқтада эришар экан. Лекин ўзгарувчилар сони иккитадан ортиқ бўлганда, бу график усулни қўллаш, умуман, мумкин эмас. Шу сабабли, у ҳолда универсал бўлган симплекс метод қўлланилади. Бу итерацион метод(усул) ҳисобланиб, унинг базис ечимлар кетма-кетлигида зояси мақсад функциясининг (4.2) қиймати катталаштириб боришга асосланган.

Барча итерацион жараёнларга тааллуқли бўлган аломат, яъни бошланғич базис ечимни танлаб олиш бу усулда ҳам муҳим ҳисобланади. Бунда бир базис ечимдан иккинчисига ўтиш тенгламалар системасини ечишда қўлланилган тўғри тўртбурчак усули ёрдамида амалга оширилади. Бу усулни қуйидаги сонлар мисолида намоёиш этайлик :

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 7 \end{cases} \quad (4.9)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad (4.10)$$

Бу - юқорида график усулда ечилган мисолнинг ўзгартирилгани.

Аввал бу масалани каноник ҳолга келтириб оламиз, бунинг учун (4.9) тенгсизликларнинг ҳар бирини чап томонига x_3 , x_4 номанфий ўзгарувчиларни қўшамиз:

$$z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \quad (4.13)$$

Бу масалага мос жадвал қуйидаги кўринишда бўлади.

	C	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	5	2	1	1	0	2,5
x_4	0	7	1	2	0	1	7
Z-с	0		-2	-3	0	0	

Биринчи устунга базис ўзгарувчилар, иккинчи устунга (4.12) тенгламанинг ўнг томонидаги сонлар ва s устунга (4.11) мақсад функциянинг базис ўзгарувчилари коэффициентлари, x_1, x_2, x_3, x_4 устунларга эса (4.12) тенгламанинг коэффициентлари ёзилади. Z -с-сатр қуйидагича тўлдирилади: b -устун ва s -устун элементлари ҳадлаб кўпайтирилиб, қўшилади ва b -устуннинг охирига катагига ёзиб қўйилади. Бу Z функциянинг қийматини беради. Қолган каталар ҳам шунга ўхшаш тўлдирилади, яъни мос устун элементлари s -устун элементларига ҳадлаб кўпайтирилиб (4.11) мақсад функциянинг мос коэффициенти айирилади. Сўнгга охирига сатрнинг b -устунидан бошқа элементлари қаралади, агар манфий элемент бўлмаса, у ҳолда масала ечилган бўлади, акс ҳолда шу манфий сонларнинг энг кичиги(улар кўп бўлса, бирортаси) танлаб олинади. Бу устун ҳал қилувчи устун ҳисобланади. Шу устундаги мусбат элементларнинг бирортаси ҳал қилувчи элемент сифатида олинади (агар, бундай мусбат элемент бўлмаса, у ҳолда масаланинг ечими йўқ бўлади).

Энди, ҳал қилувчи элементни танлаш учун b -устундаги сонлар мос равишда ҳал қилувчи устуннинг мусбат элементларига бўлиб чиқилади ва бўлинмалар жадвалининг охирига устунига ёзиб қўйилади. Шу охирига устундаги энг кичик сон жойлашган сатр ҳал қилувчи сатр ҳисобланади. Ҳал қилувчи устун ва ҳал қилувчи сатр кесишган элемент, бизнинг мисолда бу x , ҳал қилувчи элемент бўлади.

Бу эса x_3 базис ўзгарувчини x_1 га алмаштириш кераклигини билдиради. Шу билан бирга s -устун элементи ҳам мос равишда ўзгартирилади ва қолган элементларни топиш учун юқорида қаралган тўғри тўртбурчак усули

	C	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	2	5/2	1	1/2	1/2	0	5
x_4	0	9/2	0	3/2	-1/2	1	3
Z-c		5	0	-2	1	0	

қўлланилади. Натижада қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

Охирги жадвалда ҳал қилувчи устун x_2 бўлиб, ҳал қилувчи сатр x_4 дир. Демак, ҳал қилувчи элемент $3/2$ бўлади.

	C	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	2	1	1	0	$2/3$	$-1/3$	
x_2	0	3	0	1	$-1/2$	$2/3$	
$z-C$	11		0	0	$1/3$	$4/3$	

Охирги сатрнинг b-устун катагидан бошқа катакларда манфий элементлар йўқ. Шу сабабли, биз оптимал ечимга келдик: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $z = 11$ буларнинг барчаси биринчи ва b-устундан аниқланади. Текшириб кўриш мумкинки, ҳосил қилинган ечим, ҳақиқатдан ҳам, (4.12) системанинг базис ечимини ташкил этади.

1.3. Математик таълим узвийлигини амалга оширишда чизиқли дастурлаш методлари

Математик таълим тажрибаларидан маълумки, машғулотнинг асоси ҳар хил машқ(мисол, масала, тест)лар бажаришш ва назарий қисмлардан иборат. Уларнинг барчаси қаралиши зарур бўлиши билан бирга, қўйилган мақсадларга турлича таъсир кўрсатади. Масалан: мақсад - математик фикрлашни ўстириш бўлса, у ҳолда табиийки, масала ечишнинг таъсири мисол ечишга қараганда бир мунча кучлироқ, ёки тест тузиш машқи масала ечишга қараганда устунроқ бўлади ва ҳоказо. Аммо ҳар бир машқнинг танланган мақсадга таъсир этиши, албатта, рўй беради ва шу таъсир этиш нисбатини (масалан: процентларда) билиш қаралаётган педагогик ҳолатнинг математик моделини мос равишда

қуришда жуда ҳам муҳим ҳисобланади. Бу нисбатлар одатда тажриба, корреляцион таҳлил ва ҳоказолар билан аниқланади.

Чизикли дастурлаш методлари билан ечиладиган қуйидаги педагогик масалаларни кўрайлик.

1-м и с о л. Математика ўқитувчиси мисол, масала ва тест ёрдамида ўқувчиларнинг математик фикрлаши ва математик кўникмасини ривожлантирмоқчи.

Фараз қилайлик, математик фикрлашни ривожлантиришга ҳар бир мисолнинг 30% , масаланинг 50% , тестнинг 60% и, математик кўникмани ривожлантиришга эса мисол, масала ва тестларнинг мос равишда 20%, 50%, 30% и ёрдам берсин.

Қандайдир мулоҳазага асосан математик фикрлашни 100%, математик кўникмани 80% ривожлантириш керак бўлсин.

С а в о л: “Мисол, масала ва тестларни қандай нисбатда олинса, юқоридаги ривожланишга эришиш мумкин бўлади?”

Қўйилган саволга жавоб топиш учун масаланинг математик моделини қурамыз. Бунинг учун қуйидаги белгилашларни киритайлик: x_1 - мисоллар сони, x_2 –масалалар сони, x_3 -тестлар сони. Шартга асосан, $\frac{30}{100}x_1$, $\frac{50}{100}x_2$, $\frac{60}{100}x_3$ қисм машқлар математик фикрлашни, $\frac{20}{100}x_1$, $\frac{50}{100}x_2$, $\frac{30}{100}x_3$ қисм машқлар эса математик кўникмани ривожлантиришга ёрдам беради. Демак, уларнинг йиғиндилари умумий ривожланишни бериб, шартга асосан: 100% ва 80% бўлиши кераклигидан:

$$\begin{cases} \frac{30}{100}x_1 + \frac{50}{100}x_2 + \frac{60}{100}x_3 = 100 \\ \frac{20}{100}x_1 + \frac{50}{100}x_2 + \frac{30}{100}x_3 = 80 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 1000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 800 \end{cases}$$

бу системанинг базис ечимларини аниқлаш учун тўғри тўртбурчак қондасидан фойдаланамиз.

	x_1	x_2	x_3		
	3	5	6	1000	
$x_1=$	2	5	3	800	$x_1=200, x_2=80, x_3=0$ - базис ечим
$x_2=$	1	$5/3$	2	$1000/3$	
$x_1=$	0	$5/3$	-1	$400/3$	$x_1=600, x_2=0, x_3=-400/3$ - базис
ечим	1	0	3	200	
$x_3=$	0	1	$-3/5$	80	
$x_1=$	1	5	0	600	$x_1=0, x_2=120, x_3=200/3$ - базис
ечим	0	$-5/3$	1	$-400/3$	
$x_2=$	$1/5$	1	0	120	
		0	1	$200/3$	

Агар яна бир қўшимча шарт бўлиб, у барча машқларнинг (мисол, масала, тест) иштирок этиши талаб қилинса, у ҳолда базис ечимларнинг биринчиси билан, учинчиси қўшилади: $x_1 = 200, x_2 = 200, x_3 = \frac{200}{3}$ ёки $x_1 : x_2 : x_3 = 3 : 3 : 1$ нисбатга эга бўламиз. Демак, қўйилган мақсадларга эришиш учун мисол, масала ва тестлар сонини 3: 3: 1 нисбатда олиш лозим.

Саволга жавоб топилди. Лекин таҳлилни яна давом эттирамиз. Процент ҳисобида қуйидаги натижаларга эга бўламиз, вақтнинг:

- 1) 42,9% и - мисол учун;
- 2) 42,9% и - масала учун;
- 3) 14,2% и - тест учун.

Агар бизга ҳар бир машқни бажариш учун кетган вақтнинг ўртача қиймати маълум бўлса, берилган вақт давомида нечта мисол, масала, тест бериш кераклигини топиш мумкин. Масалан: битта мисол, масала ва тест ечишга ўртача мос равишда 10 мин, 20 мин, 5 мин сарфлансин ва буларни амалга ошириш учун 80 соат вақт берилган бўлсин. 80 соатнинг неча минути

мисол, масала ва тестга сарфланишини аниқлаймиз. Бунинг учун уни 42,9 ва 14,2 % ини топамиз:

42,9% - 2060 мин

14,2% - 680 мин

бўлар экан.

Энди бу сонларни машқларни бажариш учун сарфланадиган ўртача вақтларга мос равишда бўлиб, машқларнинг сонларини аниқлаймиз:

$$x_1 = \frac{2060}{10} = 206 \quad \text{та мисол}$$

$$x_2 = \frac{2060}{20} = 103 \quad \text{та масала}$$

$$x_3 = \frac{680}{5} = 136 \quad \text{та тест}$$

t вақт давомида берилиши керак бўлган мисол, масала, тестлар сони мос равишда қуйидаги сонларга тенг

$$\frac{3}{t_1}t - \text{мисол}, \quad \frac{3}{7t_2}t - \text{масала}, \quad \frac{1}{7t_3}t - \text{тест}.$$

Демак, умумий машқлар сони :

$$N = \frac{1}{7} \left(\frac{3}{t_1} + \frac{3}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) t \quad \text{га тенг булиб},$$

t-умумий вақт t_1 , t_2 , t_3 лар машқларни биттасини бажариш учун кетган ўртача вақт (вақтлар соатларда ёки минутларда берилган).

2-м и с о л. Маълумки, математиканинг геометрия бўлимида, асосан, 2 та вазифа бўлиб, улар:

1) масала ечиш;

2) назарий саволларга жавоблардан иборат.

Ҳар бир масалани ечиш ва назарий саволларга жавоб бериш ўртача вақтлари мос равишда 10 ва 25 мин дан иборат бўлсин. Шу билан бирга, машқларга ажратилган умумий вақт 75 мин дан ошиб кетмаслиги, машқлар сони эса 6 тадан кўп бўлмаслиги лозим. Ҳар бир масала ва назарий саволдан олинадиган самара(натижа) мос равишда 4 ва 7 га тенг бўлсин.

1-с а в о л: “Нечта масала ва назарий саволлар таклиф қилинса, улардан келадиган умумий самара максимал бўлади?”

Бу мисолда ўзгарувчилар сони 2 та бўлганлиги сабабли, уни чизиқли дастурлашнинг график усулида ечиш қулайлик туғдиради. Бунинг учун аввал берилган мисолнинг математик моделини тузиб оламиз. x_1 , x_2 –берилиши мукин бўлган масалалар ва назарий саволлар сони бўлсин. У ҳолда $10x_1$, $25x_2$ лар кетган вақтни билдиради. Демак, умумий вақт $10x_1+25x_2$ га тенг бўлиб, шартга асосан:

$$10x_1 + 25x_2 \leq 75$$

$$\text{ёки} \quad 2x_1 + 5x_2 \leq 15 \quad (4.14)$$

x_1+x_2 – умумий машқлар сони, шарт

$$x_1 + x_2 \leq 6 \quad (4.15)$$

Масала ва назарий саволлардан олинadиган самаралар $4x_1$, $7x_2$ га тенг. Демак, умумий самара:

$$Z = 4x_1 + 7x_2 \quad (4.16) \text{ бўлади.}$$

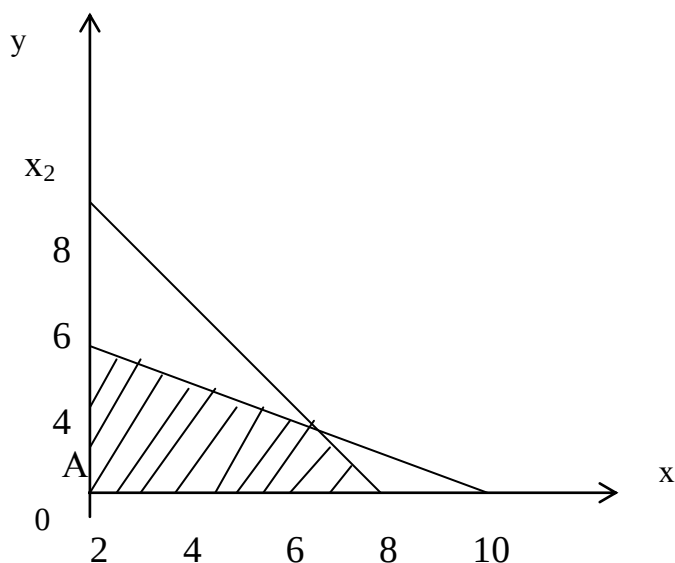
Шундай қилиб, (4.14) – (4.16) дан қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласига келдик:

$$z = 4x_1 + 7x_2 \rightarrow \max \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases} \quad (4.18)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (4.19)$$

Берилган мисолнинг математик модели бўлиб, уни график усулда ечамиз(4.2-расм):



4.2-расм

В нуқтанинг координатаси

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 15 \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

системанинг ечими (5;1) бўлади. Шундай қилиб, $O(0;0)$, $A(0;3)$, $B(5;1)$, $C(6;0)$ $B(5;1)$, $C(6;0)$ бўлади. Шу нуқталарда Z мақсад функциянинг қийматларини аниқлаймиз:

$$Z(0) = 0, \quad Z(A) = 21, \quad Z(B) = 27, \quad Z(C) = 24.$$

Демак, энг катта самарага 27 бўлганда эришилар экан. Агар масала $x_1=5$ та, назарий савол $x_2=1$ та бўлса, таъкидлаб ўтамиз, бунда ҳам (4.18) шартлар бажарилади.

3-м и с о л. Педагогик фаолиятдаги қуйидаги ҳолатни кўрайлик. Такдим этилаётган машқлар: мисол, масала, тест ва назарий саволлардан иборат бўлсин. Умумий машқлар сонига ажратилган вақт 280 бирлик вақтдан иборат, яъни шу вақт давомида берилган машқлар бажарилиши шарт. Ҳар бир машқнинг бажарилиш муддати ҳам аниқ бўлиб, улар мос равишда юқоридаги тартиб асосида 2, 1, 1, 1 бирлик вақтлар. Демак:

$$2x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 280 \quad (4.20)$$

бундан ташқари, масала ва назарий саволлар сони 80 тадан ошиб кетмаслиги керак, яъни:

$$x_1 + x_2 + x_4 \leq 80 \quad (4.21)$$

ҳамда мисоллар, масалаларнинг 2 бараваридан ва тестлар сони 250 тадан ошиб кетмаслиги керак. Демак:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 250 \quad (4.22)$$

ва охирги шарт шуки, мисоллар сони камида 5 тага тенг бўлсин, яъни:

$$x_1 \leq 5, \quad (4.23)$$

бу ерда x_1 , x_2 , x_3 , x_4 – ўзгарувчилар мисол, масала, тест ва назарий саволлар сонини аниқлайди. Ҳар бир мисол, масала, тест ва назарий саволлардан олинадиган самаралар мос равишда 4, 3, 6, 7 га тенг. Демак, умумий самара:

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 7x_4. \quad (4.24)$$

Шундай қилиб, (4.20) - (4.24) лар ёрдамида қуйидаги математик моделга эга бўлдик:

$$Z=4x_1+3x_2+6x_3+7x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 280 \\ x_1 + x_2 + x_4 \leq 80 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 250 \\ x_1 \geq 5 \end{cases} \quad (4.25)$$

$$x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0 \quad (4.26)$$

(4.24) – (4.26) масалани каноник шаклга келтирамиз. Бунинг учун (4.25) нинг, 1,2,3-тенгсизликларининг чап томонига мос равишда номанфий x_5, x_6, x_7 ўзгарувчиларни қўшиб ва 4-тенгсизликнинг чап томонидан x_8 ни айириб, тенглик ҳолига келтирамиз; яна 4 тенгсизликнинг чап томонига яна бир ўзгарувчи x_9 ни қўшамиз (таъкидлаб ўтамиз, агар тенгликнинг чап томонига янги номанфий ўзгарувчини ҳар вақт қўшиш мумкин, бу билан масала ечими ўзгармайди), натижада қуйидаги масала ҳосил бўлади.

$$Z=4x_1+3x_2+6x_3+7x_4 \rightarrow \max \quad (4.27)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 280 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_6 = 80 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_7 = 250 \\ x_1 - x_8 + x_9 = 5 \end{cases} \quad (4.28)$$

$$x_2, x_3, \dots, x_9 \geq 0 \quad (4.29)$$

Бу масалани ечиш учун симплекс методни қўллаймиз.

4 3 6 7 0 0 0 0 0

	с	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_5	0	280	2	0	1	1	1	0	0	0	0	280
x_6	0	80	1	1	0	1	0	1	0	0	0	80
x_7	0	250	1	2	1	0	0	0	1	0	0	
x_9	0	5	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	
Z-с		0	-4	-3	-6	-7	0	0	0	0	0	

Жадвалнинг юқори қисмида Z мақсад функцияси ўзгарувчиларининг мос коэффициентлари ёзилган. Охирги сатрдаги -7 сони бор устун ҳал қилувчи устун ҳисобланади ва охирги устун элементларининг энг кичиги 80 бўлган сатр ҳал қилувчи сатр бўлади. Ҳал қилувчи устун ва ҳал қилувчи сатр кесишган жойдаги элемент 1 ҳал қилувчи элемент ҳисобланади, унинг ёрдамида кейинги жадвалга ўтамиз (тўғри тўртбурчак қоидаси асосида):

4 3 6 7 0 0 0 0 0

	с	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_5	0	200	1	0	1	0	1	-1	0	0	0	280
x_4	0	80	1	1	0	1	0	1	0	0	0	250
x_7	0	250	1	2	1	0	0	0	1	0	0	
x_9	0	5	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	
Z-с		560	3	4	-6	0	0	7	0	0	0	

Қора қилинган 1 ҳал қилувчи элемент бўлиб, у x_5 базис ўзгарувчини x_3 га алмаштириш кераклигини билдиради.

4 3 6 7 0 0 0 0 0

	С	В	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_3	6	200	1	0	1	0	1	-1	0	0	0	80
x_4	7	80	1	1	0	1	0	1	0	0	0	
x_7	0	50	0	2	0	0	-1	1	1	0	0	
x_9	0	5	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	25
Z-с		1760	9	4	0	0	6	1	0	0	0	

Бу жадвалда қўшимча x_7 , x_9 ўзгарувчилар базис ўзгарувчилар бўлиб қолди, уларни x_1 , x_2 (асосий ўзгарувчилар)га алмаштириш учун, яна тўғри тўртбурчак усулини қўлаймиз, бунинг учун x_2 устундаги 2 сонини ҳал қилувчи элемент сифатида танланади ва кейинги жадвалга ўтилади.

4 3 6 7 0 0 0 0 0

	c	B	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	
x ₃	6	200	1	0	1	0	1	-1	0	0	0	200
x ₄	7	55	1	0	0	1	1/2	1/2	-1/2	0	0	55
x ₂	3	25	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/2	0	0	
x ₉	0	5	1	0	0	0	0	0	0	-1	1	5
Z-c		1660	9	0	0	0	8	-2	-2	0	0	

Охирги қўшимча x₉ базис ўзгарувчини x₁ га алмаштирамиз:

	C	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉
x ₃	6	195	0	0	1	0	1	-1	0	1	-1
x ₄	7	50	0	0	0	1	1/2	1/2	-1/2	1	-1
x ₂	3	25	0	1	0	0	-1/2	1/2	1/2	0	0
x ₁	4	5	1	0	0	0	0	0	0	-1	1
Z-c		1615	0	0	0	0	8	-2	-2	9	9

Бу жадвалдан келиб чиқадики, x₁ =5 мисол, x₂ =25 масала, x₃ =195 тест, x₄ =50 та назарий саволлар берилса, юқоридаги барча шартлар бажарилади ва бундан олинадиган самара энг катта бўлиб, у Z=1615 бўлади.

4-м и с о л. Муносиб дарсликни танлаш масаласи.

Маълумки, ўқитувчи математик таълим(дарс ўтиш) жараёнида бир нечта (аниқлик учун 2 та бўлсин) дарсликлардан фойдаланишига тўғри келади. Аммо, одатда дарсликлар ҳар хил муаллифлар томонидан тузилганлиги сабабли, уларда мисол, масала, тест ва ҳоказоларнинг сифат даражалари ҳам турлича бўлади. Биринчи дарсликнинг битта масаласи ва мисолини ечишга мос равишда ўртача 2 ва 1 мин сарфлансин. Иккинчи дарсликдаги битта масала ва мисолни ечиш учун мос равишда 3 ва 1 мин сарфлансин. Умумий берилган вақт 15 мин. Биринчи дарсликнинг масалалар сони билан иккинчи дарсликнинг масалалар сони йиғиндиси 6 тадан ошиб кетмаслиги керак. Уларнинг мисоллар сони эса 3

тадан ошиб кетмаслиги керак. Бундан ташқари, биринчи дарсликнинг мисоли сони кўпи билан 2 та бўлсин.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

x_{11} , x_{12} — биринчи дарсликдан олиниши керак бўлган масалалар ва мисоллар сони;

x_{21} , x_{22} — иккинчи дарсликдан олиниши керак бўлган масалалар ва мисоллар сони.

Уларни ечиш учун сарфланган вақт 15 билан чегараланган. Демак:

$$2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} \leq 15 \quad (4.30)$$

Иккинчи томондан, масала ва мисоллар сонига чегаралар қуйидагича ёзилади:

$$x_{11} + x_{21} \leq 6; \quad (4.31)$$

$$x_{12} + x_{22} \leq 3; \quad (4.32)$$

$$x_{12} \leq 2 \quad (4.33)$$

Биринчи дарсликнинг ҳар бир масаласи ва мисолидан олинадиган самара мос равишда 6, 8 ; иккинчи дарсликда худди шу кўрсаткичлар 4, 8 бўлсин. У ҳолда умумий самара(мақсад функцияси) қуйидаги кўринишда бўлади:

$$z = 6x_{11} + 8x_{12} + 4x_{21} + 9x_{22} \rightarrow \max \quad (4.34)$$

(3.16) - (3.19) тенгсизликларни тенглик ҳолига келтириб, масаланинг каноник шаклини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 2x_{11} + x_{12} + x_{21} + 3x_{22} + x_1 = 15 \\ x_{11} + x_{12} + x_2 = 6 \\ x_{12} + x_{22} + x_3 = 3 \\ x_{12} + x_4 = 2 \end{cases} \quad (4.35)$$

$$x_{11}, \dots, x_{22}, x_1, \dots, x_4 \geq 0 \quad (4.36)$$

Бу масала учун симплекс кейинги бетда келтирилган жадвалларни тузамиз.

Энди бундай натижавий жадвални ҳосил қиламиз:

Бундан натижавий жадвални ҳосил қиламиз:

6 8 4 9 0 0 0 0

	c	B	x ₁₁	x ₁₂	x ₂	x ₂₂	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	
x ₁₁	6	4	1	0	0	0	1	-1	-3	2	
x ₂₁	4	2	0	0	1	0	-1	2	3	-1/2	
x ₂₂	9	1	0	0	0	1	0	0	1	-1/2	
x ₁₂	8	2	0	1	0	0	0	0	0	1	
Z-c		57	0	0	0	0	2	1/2	3	3	

6 8 4 9 0 0 0 0

	c	B	x ₁₁	x ₁₂	x ₂	x ₂₂	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	
x ₁	0	15	2	1	1	3	1	0	0	0	5
x ₂	0	6	1	0	1	0	0	1	0	0	
x ₃	0	3	0	1	0	1	0	0	1	0	3
x ₄	0	2	0	1	0	0	0	0	0	1	
Z-c		0	-6	-8	-4	-9	0	0	0	0	
x ₁	0	6	2	-2	1	0	1	0	-3	0	3
x ₂	0	6	1	0	1	0	0	1	0	0	6
x ₂₂	9	3	0	1	0	1	0	0	1	0	
x ₄	0	2	0	1	0	0	0	0	0	1	
Z-c		27	-6	1	-4	0	0	0	9	0	
x ₁₁	6	3	1	-1	1/2	0	1/2	0	-3/2	0	
x ₂	0	3	0	1	1/2	0	-1/2	1	1/2	0	3
x ₂₂	9	3	0	1	0	1	0	0	1	0	3
x ₄	0	2	0	1	0	0	0	0	0	1	2
Z-c		45	0	-5	-1	0	3	0	0	0	

x_{11}	6	5	1	0	1/2	0	1/2	0	-3/2	0	10
x_2	7	1	1	0	1/2	0	-1/2	1	3/2	-1	2
x_{22}	9	1	0	0	0	1	0	0	0	0	
x_{12}	8	2	0	1	0	0	0	0	0	1	
Z-c		55	0	0	-1	0	3	0	0	5	

Бундан натижавий жадвални ҳосил қиламиз:

6 8 4 9 0 0 0 0

	C	B	x_{11}	x_{12}	x_2	x_{22}	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_{11}	6	4	1	0	0	0	1	-1	-3	2	
x_{21}	4	2	0	0	1	0	-1	2	3	-1/2	
x_{22}	9	1	0	0	0	1	0	0	1	-1/2	
x_{12}	8	2	0	1	0	0	0	0	0	1	
Z-c		57	0	0	0	0	2	1/2	3	3	

Демак, максимал самара $Z=57$ га эришиш учун биринчи дарсликдан масала ва мисолларни мос равишда 4, 2 та; иккинчи дарсликдан 1,2 та олиш керак экан.

5-м и с о л. Муносиб дарсликни аниқлаш масаласи. Ҳар бир фандан бир қанча дарсликлар бўлиб, улардан муносибини танлаб олиш мураккабликларни келтириб чиқариши мумкин, чунки мавзуларни ёритишда ҳар бир дарслик муаллифининг ўзининг ижобий ва салбий томонлари бор. Шу сабабли бирор мезон орқали дарсликларни таққослаб бериш мақсадга мувофиқдир. Бунинг учун қуйидаги фаразий(гипотетик) муҳокамани кўрайлик.

Ўқувчиларнинг математик билимини ошириш учун мисол, масала, тест ва назарий саволлар иштирок этган машқ бўлиши шарт. Лекин буларнинг асосий, математик билимни оширишга таъсирлари турлича даражада, ҳатто бу таъсирлар дарсликларнинг ўзига ҳам боғлиқ. Бу масалани биз иккита

дарслик мисолида кўрайлик. Уларни қисқалик учун I ва II деб белгилаб оламиз.

I дарсликнинг биттадан масала, мисол, тест ва назарий саволлар таъсир этиш даражалари мос равишда 6, 5, 4, 3 .

II– дарсликники эса 5, 6, 5, 2 бўлсин.

Иккала дарсликда ҳам машқларнинг ҳар бирига сарфланадиган вақт бирликлари бир хил бўлиб, битта масала, мисол, тест ва назарий саволларга ўртача 3, 2, 1, 4 вақт бирликлари сарфлансин, машқларни бажариш вақти эса кўпи билан 8 вақт бирлиги. Олинадиган машқларнинг умумий сони 30 тадан ортиқ бўлмасин ҳамда масалалар сони 2 тадан, мисоллар сони 3 тадан ошиб кетмаслиги керак. Шу берилганлар асосида чизиқли дастурлашнинг симплекс методи ёрдамида қайси дарслик афзал эканлигини аниқлаймиз.

I дарслик учун қўйилган масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 58 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30 \\ x_1 \leq 2 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

ёки уни каноник шаклга келтирсак:

$$Z = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \rightarrow \max \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \leq 58 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 \leq 30 \\ x_1 + x_7 = 2 \\ x_2 + x_8 = 3 \\ x_1, \dots, x_8 \geq 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

$$x_1, \dots, x_8 \geq 0 \quad (4.39)$$

Бу (4.37)-(4.39) масаланинг мос бошланғич жадвали қуйидагича бўлади:

											6	5	4	3	0	0	0	0		
	c	B	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈										

x ₅	0	58	3	2	1	4	1	0	0	0	58/3
x ₆	0	30	1	1	1	1	0	1	0	0	
x ₇	0	2	1	0	0	0	0	0	1	0	
x ₈	0	3	0	1	0	0	0	0	0	1	
Z-c		0	-6	-5	-4	-3	0	0	0	0	

Тўғри тўртбурчак қондаси асосида кейинги жадвалларни қурамыз:

6 5 4 3 0 0 0 0

	c	B	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	
x ₅	0	52	0	2	1	4	1	0	-3	0	26
x ₆	0	28	0	1	1	1	0	1	-1	0	28
x ₁	6	2	1	0	0	0	0	0	1	0	
x ₈	0	3	0	1	0	0	0	0	0	1	3
Z-c		12	0	-5	-4	-3	0	0	6	0	
x ₅	0	46	0	0	1	4	1	0	-3	-2	46
x ₆	0	25	0	0	1	1	0	1	-1	-1	25
x ₁	6	2	1	0	0	0	0	0	1	0	
x ₂	5	3	0	1	0	0	0	0	0	1	
Z-c		27	0	0	-4	-3	0	0	6	5	
x ₅	0	21	0	0	0	3	1	-1	-2	-1	7
x ₃	4	25	0	0	1	1	0	1	-1	-1	25
x ₁	6	2	1	0	0	0	0	0	1	0	
x ₂	5	3	0	1	0	0	0	0	0	1	
Z-c		127	0	0	0	1	0	4	2	1	

x_4	3	7	0	0	0	1	1/3	-1/3	-2/3	-1/3	
x_3	4	18	0	0	1	0	-1/3	4/3	-1/3	-2/3	
x_1	6	2	1	0	0	0	0	0	1	0	
x_2	5	3	0	1	0	0	0	0	0	0	
Z-c		120	0	0	0	0	-1/3	13/3	8/3	4/3	

Демак, I дарсликдан $x_1 = 2$ та масала, $x_2 = 3$ та мисол, $x_3 = 18$ та тест, $x_4 = 7$ та назарий саволлар олинса, математик билим даражасини аниқлайдиган Z мақсад функциясининг қиймати $Z = 120$, яъни максимал бўлади.

II дарслик учун (4.38), (4.39) шартлар сақланиб қолган ҳолда (4.37) қуйидаги кўринишда бўлади:

$$Z = 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 \rightarrow \max \quad (4.40)$$

(4.40), (4.38), (4.39) масалага симплекс усулни қўллаш натижасида қуйидаги натижавий жадвалга эга бўламиз:

	c	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_4	2	7	0	0	0	1	1/3	-1/3	-2/3	-1/3	
x_3	5	18	0	0	1	0	-1/3	4/3	-1/3	-2/3	
x_1	5	2	1	0	0	0	0	0	1	0	
x_2	6	3	0	1	0	0	0	0	0	0	
Z-c		132	0	0	0	0	-1/3	13/3	8/3	4/3	

Демак, бу II дарслик учун мақсад функция Z нинг қиймати $Z = 132$ бўлиб, унинг I дарсликка қараганда муносиб эканлигини билдиради.

Шундай қилиб, юқорида айтилган шароитда II дарсликдан фойдаланиш мақсадга мувофиқ.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. “Модель” сўзи(термини)нинг луғавий маъноси нима?
2. “Моделлаштириш-чи?”
3. Соф математик нуқтайи назардан моделлаштириш босқичларини изоҳланг.
3. Функционал ва структурали моделлар ҳақида гапиринг.
4. Детерминистик ва эҳтимолий-статистик моделларнинг фарқи

- нимада?
5. Чизикли дастурлаш дейилишининг сабаби нимада?
 6. Чизикли дастурлаш масаласини ечишнинг алгебраик(аналитик) методини тушунтиринг.
 7. Чизикли дастурлаш масаласини ечишнинг геометрик методини тушунтиринг.
 8. Чизикли дастурлаш масаласини алгебраик метод билан ечиш алгоритмини тушунтиринг.
 8. Педагогик фаолиятда мақсад функция қандай талқин қилиниши мумкин?

Педагогик тадқиқотлар (рефератлар, маърузалар, курс ва битирув малавий ишлар) учун мавзулар

1. Мактаб математика курсида(бошланғич, У-У1 ва юқори синфлар учун алоҳида-алоҳида) математик моделлаштиришга доир татбиқий масалалар ва уларни ечиш методикаси.
2. Мактаб математика курсида тенгламалар ва тенгсизликларга доир мазмунли-методик йўналиш ва уларнинг компонентлари орасидаги узвий боғланишлар.
3. Мактаб математика курсида чизикли дастурлаш элементлари ва уларни ўргатиш методикаси.

Тавсия этилган адабиётлар рўйхати

1. Ительсон Л. Б. Математические кибернетические методы в педагогике. – М.: Просвещение. 1964. – 247 с.
2. Лебедева И. П. Математическое моделирование в педагогическом исследовании // Педагогика. – 2002. - №10. – с. 29-36.
3. Маматов М. Ш. Математика дарсларида иктисодиёт масалалари ва уларни гуруҳларга ажратиш // Uzluksiz ta'lim. -2002. – № 4. Б. 12–22.
4. Эрдниева П.М., Эрдниева Б.П. Синтез геометрического и алгебраического как средство достижения качественного математического знания // Математика в школе. – 2000. - № 8 .С.-32-34.

5. Горстко А.Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. – М. :
Знание, 1991.-160 с.

И к к и н ч и б о б

КОРЕЛЯЦИОН АНАЛИЗ ЁРДАМИДА УЗВИЙЛИКНИ ЎРГАНИШ

2.1.Олий ўқув юртларида функциялар узлуксизлигини баён қилишда узвийлик

Республикамизда таълим тизимини ислоҳ қилиш умумий ўрта, ўрта махсус , касб-ҳунар таълими ҳамда олий таълим тизими фанлари мазмунини янада такомиллаштириш, улар ўртасида узвийликни таъминлаш масаласини ўта жиддий ва муҳим м уаммо сифатида илгари сурмоқда. Бундай ёндашув жаҳондаги иқтисодий, ижтимоий, экологик, ҳудудий, маданий-маърифий муносабатларни бир бутун, ўзаро алоқадор воқеа ва ҳодисалар натижаси сифатида қабул қилишни назарда тутди.

Биз ушбу параграфда олий ўқув юртларида “функциялар узлуксизлиги” мавзусини ёритишда узвийликни таъминлаш масаласига тўхталамиз. Бу масалани ўрганиш учун А. Қодирий номидаги ЖДПИ “Олий математика курси” ўтиладиган факультетларининг бир нечта 1-курс гуруҳлари ажратиб олиниб, тажриба-синов ишлари олиб борилди. Унда “функциялар узлуксизлиги”

мавзусини ўтишда “функция”, “функция лимити”, “функция узлуксизлиги” каби тушунчалар алоҳида ва бир пайтда маълум сонда такрорлаб борилди. Бу тушунчалар умумий ўрта таълим мактабларининг юқори синфлари ҳамда академик лицей, касб-хунар коллежларида баён қилинганлиги ҳисобга олинди. Тажриба-синов ишлари натижасида юқорида эслатилган тушунчалар такрорланишларининг мақбул сони, маълум тушунчаларни керагидан ортиқча такрорлаш ҳам самарали натижа бермаслиги, яъни талабалар ўзлаштиришларига таъсир қилмаслиги аниқланди. Ҳар бир ҳолат бўйича кузатишлар натижалари такрорланишлар сони ва унга мос ўзлаштиришлар проценти ўзаро корреляцион боғлиқлиги нуқтайи назардан таҳлил қилинди. Асосан, чизиқли, баъзи ҳолларда чизиқли бўлмаган корреляцион боғланишларни ҳам ўрганишга тўғри келди. Қуйида “функциялар узлуксизлиги” мавзусини талабалар “функция узлуксизлиги” тушунчаси такрорланишларига боғлиқ ҳолда ўзлаштиришлари бўйича тажриба-синов ишлари натижалари таҳлилини берамиз.

Демак, кузатишда дастлаб ўндан ортиқ гуруҳ иштирок этган бўлиб, “функция узлуксизлиги” мавзуси юзасидан дастурда белгиланган тушунчаларни “функция узлуксизлиги” тушунчасини керагидан ортиқ такрорланганда гуруҳларда ўзлаштириш проценти ортмаслиги аниқлаб олинди.

Қуйидаги корреляция жадвалида “функция узлуксизлиги” тушунчасини такрорлашлар сони X ва унга мос ўртача ўзлаштириш даражаси, уларнинг ўзгариш интервал(оралик)лари келтирилган.

5.1-жадвал

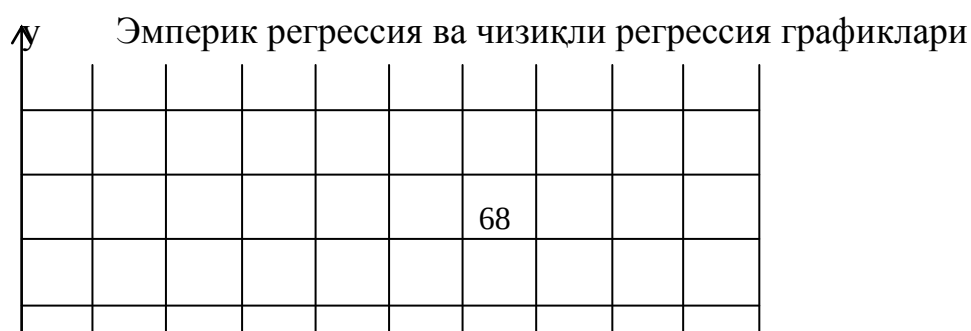
Такрорланишлар сони X интерваллари ва улар ўрталари	1÷2	2÷3	3÷4	4÷5	5÷6	6÷7	7÷8	8÷9	m_y
Ўзлаштириш Y интерваллари ва улар ўрталари (% да)	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	
(10÷20)% 15%	4	5							9
(20÷30)% 25%	1	3	1						5

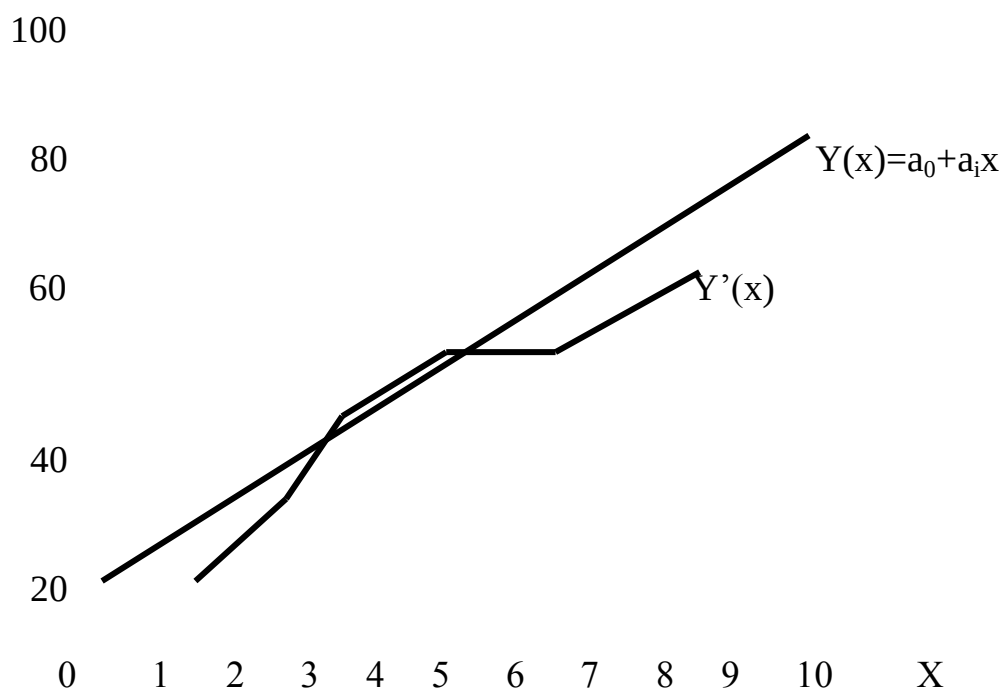
(30÷40)% 35%	2	3	6	5	3	1			20
(40÷50)% 45%		5	9	19	8	7	2	1	51
(50÷60)% 55%		1	2	7	16	9	4	2	41
(60÷70)% 65%			1	5	6	4	2	2	20
(70÷80)% 75%							1	3	4
m_x	7	17	19	36	33	21	9	8	150

Ушбу жадвалда m_{xy} лар орқали X нинг бирор интервалига Y нинг мос интервали катаклари кесишишидан ҳосил бўлган тўртбурчакка тушган (X,Y) жуфтликлар сони белгиланган. Масалан, X учун $4\div5$ ва Y учун $50\div60$ интервалларни олсак, $m_{xy}=7$ бўлади. 1-жадвалдаги 9-сатр ва 10-устунларда m_x ва m_y лар қийматлари келтирилган бўлиб, m_x сони m_{xy} ни мос устунлар бўйича ва m_y эса m_{xy} ни мос сатрлар бўйича йиғишдан иборатдир. Бу сонларни такрорланишлар ёки частоталар деб аталади.

Биз ушбу жадвалдаги сонли маълумотлар орқали корреляция майдонида X ва Y лар орасидаги эмпирик ёки тажрибадаги боғлиқлигини ифодалашимиз мумкин. 5.1-жадвалдан кўришиб турибдики, X қийматининг ортиши Y нинг ортишига олиб келар экан. Демак, X ва Y лар орасида мусбат боғлиқлик бор, деган ҳулосага келишимиз мумкин. Биз $\{Y_i(x); I=1, \dots, 8\}$ лар орқали X нинг аниқ бир интервалдаги Y ларнинг ўртача сонини белгилаймиз ва қуйидаги келтирилган 5.2-жадвални тузиб оламиз. Бу жадвалдаги $\{X_i, Y_i(x); I=1, \dots, 8\}$ нуқталарни туташтириб, 1-расмдаги эмпирик регрессия графигини чизиб оламиз.

5.1-расм





5.2-жадвал

X_i	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5
$Y'_i(x)$	22,14	31,47	42,9	48,3	52,58	52,62	57,22	63,75

5.2-жадвалдаги $Y'_i(x)$ лар қуйидагича ҳисобланган:

$$y'_1(x) = \frac{1}{7}(4 \bullet 15 + 25 + 2 \bullet 35) = \frac{155}{7} = 22,14;$$

$$y'_2(x) = \frac{1}{17}(5 \bullet 15 + 3 \bullet 25 + 3 \bullet 35 + 5 \bullet 45 + 55) = \frac{1}{17}(75 + 75 + 105 + 225 + 55) = \frac{535}{17} = 31,47;$$

$$y'_3(x) = \frac{1}{19}(25 + 6 \bullet 35 + 9 \bullet 45 + 2 \bullet 55 + 65) = \frac{1}{19}(25 + 210 + 405 + 110 + 65) = \frac{815}{19} = 42,9;$$

$$y'_4(x) = \frac{1}{36}(5 \bullet 35 + 19 \bullet 45 + 7 \bullet 55 + 5 \bullet 65) = \frac{1}{36}(175 + 855 + 385 + 325) = \frac{1740}{36} = 48,33;$$

$$y'_5(x) = \frac{1}{33}(3 \bullet 35 + 8 \bullet 45 + 16 \bullet 55 + 6 \bullet 65) = \frac{1}{33}(105 + 360 + 880 + 390) = \frac{1735}{33} = 52,58;$$

$$y'_6(x) = \frac{1}{21}(35 + 7 \bullet 45 + 9 \bullet 55 + 4 \bullet 65) = \frac{1}{21}(35 + 315 + 495 + 260) = \frac{1105}{21} = 52,62;$$

$$y'_7(x) = \frac{1}{9}(2 \bullet 45 + 4 \bullet 55 + 2 \bullet 65 + 75) = \frac{1}{9}(90 + 220 + 130 + 75) = \frac{515}{9} = 57,22;$$

$$y'_8(x) = \frac{1}{8}(45 + 2 \bullet 55 + 2 \bullet 65 + 3 \bullet 75) = \frac{1}{8}(45 + 110 + 130 + 225) = \frac{510}{8} = 63,75.$$

5.1-расмдан кўринадики, эмпирик регрессия синиқ чизиғини тўғри чизик билан яқинлаштириш (аппроксимация қилиш) мумкин. Шу сабабли, биз x ва y лар орасидаги изланаётган номаълум боғлиқлик чизиқли функция

$$Y(x) = a_0 + a_1x \quad (5.1)$$

Кўринишида деб танлаб, номаълум регрессия коэффициентлари a_0 ва a_1 ларни кичик квадратлар усулидан фойдаланиб топамиз. Бу усулни қўллаш мақсадида 5.1-жадвал ёрдамида қуйидаги 5.3-жадвални тузиб оламиз:

5.3-жадвал

Такрорланиш- лар сони X интерваллари ва улар ўрталари Ўзлаштириш Y интерваллари ва улар ўрталари (%да)	1÷2 1,5	2÷3 2,5	3÷4 3,5	4÷5 4,5	5÷6 5,5	6÷7 6,5	7÷8 7,5	8÷9 8,5	m_y	ym_y	Y^2m_y	Σyxm_{xy}
(10÷20)% 15%	4	5							9	135	2025	277,5
(20÷30)% 25%	1	3	1						5	125	3125	312,5
(30÷40)% 35%	2	3	6	5	3	1			20	700	24500	2695
(40÷50)% 45%		5	9	19	8	7	2	1	51	2295	103275	10912,5
(50÷60)% 55%		1	2	7	16	9	4	2	41	2255	124025	12897,5
(60÷70)% 65%			1	5	6	4	2	2	20	1300	84500	7605
(70÷80)% 75%							1	3	4	300	22500	2475
m_x	7	17	19	36	33	21	9	8	150	7110	353950	37175

xm_x	10,5	42,5	66,5	162	181,5	136,5	67,5	68	735			
x^2m_x	15,75	106,25	232,75	729	998,25	887,25	506,25	578	4053,5			

5.3-жадвал юқоридаги 5.1-жадвал остига 2 та сатр ва ўнг томонига 3 та устун қўшишдан ҳосил қилнган. Бунда 10-сатр элементлари xm_x лар қуйидагича ҳисобланган: x лар интерваллари ўрталари x_i лар мос такрорланишлар m_{x_i} ларга кўпайтирилгандир:

$$x_1m_{x_1}=1,5 \cdot 7=10,5; \quad x_2m_{x_2}=2,5 \cdot 17=42,5; \quad x_3m_{x_3}=3,5 \cdot 19=66,5; \quad x_4m_{x_4}=4,5 \cdot 36=162;$$

$$x_5m_{x_5}=5,5 \cdot 33=181,5; \quad x_6m_{x_6}=6,5 \cdot 21=136,5; \quad x_7m_{x_7}=7,5 \cdot 9=67,5; \quad x_8m_{x_8}=8,5 \cdot 8=68.$$

$$\sum_{i=1}^8 x_i m_{x_i} = 735;$$

11-сатр элементлари қуйидагича ҳисобланган:

$$x_1^2 m_{x_1} = (1,5)^2 \cdot 7 = 15,75; \quad x_2^2 m_{x_2} = (2,5)^2 \cdot 17 = 106,25; \quad x_3^2 m_{x_3} = (3,5)^2 \cdot 19 = 232,75;$$

$$x_4^2 m_{x_4} = (4,5)^2 \cdot 36 = 729; \quad x_5^2 m_{x_5} = (5,5)^2 \cdot 33 = 998,25; \quad x_6^2 m_{x_6} = (6,5)^2 \cdot 21 = 887,25;$$

$$x_7^2 m_{x_7} = (7,5)^2 \cdot 9 = 506,25; \quad x_8^2 m_{x_8} = (8,5)^2 \cdot 8 = 578; \quad \sum_{i=1}^8 x_i^2 m_{x_i} = 4053,5.$$

11-устун элементлари қуйидагича ҳисобланади:

$$y_1 m_{y_1} = 15 \cdot 9 = 135; \quad y_2 m_{y_2} = 25 \cdot 5 = 125; \quad y_3 m_{y_3} = 35 \cdot 20 = 700; \quad y_4 m_{y_4} = 45 \cdot 51 = 2295;$$

$$y_5 m_{y_5} = 55 \cdot 41 = 2255; \quad y_6 m_{y_6} = 65 \cdot 20 = 1300; \quad y_7 m_{y_7} = 75 \cdot 4 = 300; \quad \sum_{i=1}^7 y_i m_{y_i} = 7110.$$

12-устун элементлари қуйидагича ҳисоблаган:

$$y_1^2 m_{y_1} = (15)^2 \cdot 9 = 2025; \quad y_2^2 m_{y_2} = (25)^2 \cdot 5 = 3125; \quad y_3^2 m_{y_3} = (35)^2 \cdot 20 = 24500;$$

$$y_4^2 m_{y_4} = (45)^2 \cdot 51 = 103275; \quad y_5^2 m_{y_5} = (55)^2 \cdot 41 = 124025; \quad y_6^2 m_{y_6} = (65)^2 \cdot 20 = 84500;$$

$$y_7^2 m_{y_7} = (75)^2 \cdot 4 = 22500; \quad \sum_{i=1}^7 y_i^2 m_{y_i} = 363950.$$

13-устун элементлари қуйидагича ҳисобланган:

$$y_i x_i m_{x_i y_i} + y_1 x_2 m_{x_2 y_2} = 15 \cdot 1,5 \cdot 4 + 15 \cdot 2,5 \cdot 5 = 90 + 187,5 = 277,5;$$

$$y_2 x_1 m_{x_1 y_1} + y_2 x_2 m_{x_2 y_2} + y_2 x_3 m_{x_3 y_3} = 25 \cdot 1,5 \cdot 1 + 25 \cdot 2,5 \cdot 3 + 25 \cdot 3,5 \cdot 1 = 312,5;$$

$$y_3 \sum_{i=1}^6 x_i m_{x_i y_3} = 35(2 \cdot 1,5 + 3 \cdot 2,5 + 6 \cdot 3,5 + 5 \cdot 4,5 + 3 \cdot 5,5 + 1 \cdot 6,5) = 2695;$$

$$y_4 \sum_{i=2}^8 x_i m_{x_i y_4} = 45(5 \cdot 2,5 + 9 \cdot 3,5 + 19 \cdot 4,5 + 8 \cdot 5,5 + 7 \cdot 6,5 + 2 \cdot 7,5 + 1 \cdot 8,5) = 10912,5;$$

$$y_5 = \sum_{i=2}^8 x_i m_{x_i y_5} = 55(1 \cdot 2,5 + 2 \cdot 3,5 + 7 \cdot 4,5 + 16 \cdot 5,5 + 9 \cdot 6,5 + 4 \cdot 7,5 + 2 \cdot 8,5) = 12897,5;$$

$$y_6 \sum_{i=3}^8 x_i m_{x_i y_6} = 65(1 \cdot 3,5 + 5 \cdot 4,5 + 6 \cdot 5,5 + 4 \cdot 6,5 + 2 \cdot 7,5 + 2 \cdot 8,5) = 7605;$$

$$y_7 x_7 m_{x_7 y_7} + y_7 x_8 m_{x_8 y_7} = 75 \cdot 7,5 \cdot 1 + 75 \cdot 8,5 \cdot 3 = 2475;$$

$$\sum_{\substack{i=1,8 \\ j=1,7}} y_i x_i m_{x_i y_i} = 37175;$$

(5.1) тенгламадаги a_0 ва a_1 коэффициентларни аниқлаш мақсадида қуйидаги тенгламалар системасини тузиб оламиз:

$$\begin{cases} a_0 \sum_{\substack{i=1,8 \\ j=1,7}} m_{x_i y_j} + a_1 \sum_{i=1}^8 x_i m_{x_i} = \sum_{j=1}^7 y_j m_{y_j}; \\ a_0 \sum_{i=1}^8 x_i m_{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^8 x_i^2 m_{x_i} = \sum_{\substack{i=1,8 \\ j=1,7}} y_i x_i m_{x_i y_i}; \end{cases} \quad (5.2)$$

(5.2) тенгламалар системасиги юқоридаги 5.3-жадвалдаги сонли маълумотларни қўямиз:

$$\begin{cases} 150a_0 + 735a_1 = 7110; \\ 735a_0 + 4053,5a_1 = 37175 \end{cases} \quad (5.3)$$

(5.3)даги 1- тенгламани 150 га ва 2-тенгламани эса 735 га бўлиб қуйидаги системани ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} a_0 + 4,9a_1 = 47,4 \\ a_0 + 5,515a_1 = 50,578 \end{cases}$$

2-тенгламадан 1-ни айириб, a_1 ни аниқлаймиз:

$$0,615a_1 = 3,178; \quad a_1 = 5,167$$

буни 1-тенгламага қўйиб, a_0 ни топамиз:

$$a_0 = 47,4 - 4,9 \cdot 5,167 = 22,082$$

Демак, шуғулланаётган чизиқли регрессия тенгламаси (5.1-расмга қаранг):

$$y(x) = 22,082 + 5,167 \cdot x, \quad 0 \leq x \leq 15 \quad (5.4)$$

бўлиб, ўқувчиларнинг “функция узлуксизлиги” мавзуси бўйича ўртача ўзлаштириш кўрсаткичи $y(x)$ нинг шу мавзунини такрорланишлари сони x га боғлиқлик тенгламасини англатади. Кўриниб турибдики, x нинг ортиши y нинг ҳам ортишига олиб келар экан. Масалан, ўртача ўзлаштириш тақрибан 70%

бўлишлигини $x = \frac{70 - 22,082}{5,167} = 9,3$, яъни “функция узлуксизлиги” тушунчасини 9

марта такрорлашда эришиш мумкин экан. Аммо тажриба-синов ишлари шуни кўрсатдики, тушунчанинг керагидан ортиқ такрорланаверилиши ўқувчилар билимини нафақат ошмаслигига, балки унинг камайишига ҳам олиб келиши мумкин экан. 5.4-жадвалда “функция узлуксизлиги” тушунчаси 15 дан 29 гача такрорланганида ўртача ўзлаштириш кўрсаткичлари келтирилган:

5.4-жадвал

Такрорланиш- лар сони X интерваллари ва улар ўрталари Ўзлаштириш Y интерваллари ва улар ўрталари (%да)	14÷16 15	16÷18 17	18÷20 19	20÷22 21	22÷24 23	24÷26 25	26÷28 27	28÷30 29	m_y	ym_y	Y^2m_y	$\Sigma y/xm_{xy}$
51÷57 54							2	3	5	270	14580	9,5822
57÷63 60				1	1	3	2	1	8	480	28800	12,1538
63÷69 66			1	4	2	2			9	594	39204	27,0858
69÷75 72		3	1	3	3				10	720	51840	36,1775
75÷81 78		3	2						5	390	30420	21,9775
81÷87 84	2	2	2						5	420	35280	29,9298
87÷93 90	3		1						4	360	32400	22,7367

93÷99 96	3	1							4	384	36864	23,292
m_x	8	9	6	8	6	5	4	4	50	3618	269385	182,9393
m_x/x	0,53	0,53	0,32	0,38	0,26	0,2	0,15	0,14	2,5			
m_x /x²	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,004	0,13			
Y'_i(x)=Σym_{xy}/ m_x	90,75	79,35	78	67,5	67,95	62,4	57	55,5				

Ушбу жадвалдан кўриниб турибдики, тушунчанинг такрорланишлари сони x ортгани сари (15дан 29 гача) ўқувчиларнинг ушбу мавзу бўйича ўртача ўзлаштириш кўрсаткичи $y(x)$ ортмаяпти. Шу сабабли, биз $y(x)$ нинг x га боғлиқлигини

$$y(x) = a_0 + \frac{a_1}{x}, \quad 15 \leq x \leq 29. \quad (5.5)$$

кўринишида излаймиз ва шу муносабат билан 4-жадвалда охириги 3 сатр ва 3-устун киритилган. Улар қуйидагича ҳисобланган:

$$\begin{aligned} \frac{m_{x_1}}{x_1} &= \frac{8}{15} = 0,5333; & \frac{m_{x_2}}{x_2} &= \frac{9}{17} = 0,5294; & \frac{m_{x_3}}{x_3} &= \frac{6}{19} = 0,3158; & \frac{m_{x_4}}{x_4} &= \frac{8}{21} = 0,3809; \\ \frac{m_{x_5}}{x_5} &= \frac{6}{23} = 0,2603; & \frac{m_{x_6}}{x_6} &= \frac{5}{25} = 0,2; & \frac{m_{x_7}}{x_7} &= \frac{4}{27} = 0,1481; & \frac{m_{x_8}}{x_8} &= \frac{4}{29} = 0,1379; \\ \sum_{i=1}^8 \frac{m_{x_i}}{x_i} &= 2,5057; & \frac{m_{x_1}}{x_1^2} &= \frac{8}{(15)^2} = 0,0356; & \frac{m_{x_2}}{x_2^2} &= \frac{9}{(17)^2} = 0,0311; & \frac{m_{x_3}}{x_3^2} &= \frac{6}{(19)^2} = 0,0166; \\ \frac{m_{x_4}}{x_4^2} &= \frac{8}{(21)^2} = 0,0181; & \frac{m_{x_5}}{x_5^2} &= \frac{6}{(23)^2} = 0,0113; & \frac{m_{x_6}}{x_6^2} &= \frac{5}{(25)^2} = 0,2; & \frac{m_{x_7}}{x_7^2} &= \frac{4}{(27)^2} = 0,0055; \\ \frac{m_{x_8}}{x_8^2} &= \frac{4}{(29)^2} = 0,0048; & \sum_{i=1}^8 \frac{m_{x_i}}{x_i^2} &= 0,131. \end{aligned}$$

$$y_1(x) = \frac{1}{8}(2 \bullet 84 + 3 \bullet 90 + 3 \bullet 36) = 90,75;$$

$$y_2(x) = \frac{1}{9}(3 \bullet 72 + 3 \bullet 78 + 2 \bullet 84 + 96) = 79,35;$$

$$y_3(x) = \frac{1}{6}(66 + 72 + 2 \bullet 78 + 2 \bullet 84 + 90) = 78;$$

$$y_4(x) = \frac{1}{8}(60 + 4 \bullet 66 + 3 \bullet 72) = 67,5;$$

$$y_5(x) = \frac{1}{6}(60 + 2 \bullet 66 + 3 \bullet 72) = 67,95;$$

$$y_6(x) = \frac{1}{5}(3 \bullet 60 + 2 \bullet 66) = 62,4;$$

$$y_7(x) = \frac{1}{4}(2 \bullet 54 + 2 \bullet 60) = 57;$$

$$y_8(x) = \frac{1}{4}(3 \bullet 54 + 60) = 55,5$$

Эмпирик коррекция жадвали куйидагича экан:

5.5-жадвал

X_i	15	17	19	21	23	25	27	29
$Y'_i(x)$	90,75	79,35	78	67,5	67,95	62,4	57	55,5

Охирги 3-устун элементлари:

$$\begin{aligned}
y_1 m_{y_1} &= 54 \bullet 5 = 270; & y_2 m_{y_2} &= 60 \bullet 8 = 480; & y_3 m_{y_3} &= 66 \bullet 9 = 594; & y_4 m_{y_4} &= 72 \bullet 10 = 720; \\
y_5 m_{y_5} &= 78 \bullet 5 = 390; & y_6 m_{y_6} &= 84 \bullet 5 = 420; & y_7 m_{y_7} &= 90 \bullet 4 = 360; & y_8 m_{y_8} &= 96 \bullet 4 = 384; \\
y_1^2 m_{y_1} &= (54)^2 \bullet 5 = 14580; & y_2^2 m_{y_2} &= (60)^2 \bullet 8 = 28800; & y_3^2 m_{y_3} &= (66)^2 \bullet 9 = 39204; \\
y_4^2 m_{y_4} &= (72)^2 \bullet 10 = 51840; & y_5^2 m_{y_5} &= (78)^2 \bullet 5 = 30420; & y_6^2 m_{y_6} &= (84)^2 \bullet 5 = 35280; \\
y_7^2 m_{y_7} &= (90)^2 \bullet 4 = 32400; & y_8^2 m_{y_8} &= (96)^2 \bullet 4 = 36864; & \sum_{i=1}^8 y_i^2 m_{y_i} &= 369385.
\end{aligned}$$

$$y_1 \left(\frac{m_{x_7 y_1}}{x_7} + \frac{m_{x_8 y_1}}{x_8} \right) = 54 \left(\frac{2}{27} + \frac{3}{29} \right) = 54(0,074 + 0,1034) = 9,5822;$$

$$y_2 \left(\sum_{i=4}^8 \frac{m_{x_i y_2}}{x_i} \right) = 60 \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{23} + \frac{3}{25} + \frac{2}{27} + \frac{1}{29} \right) = 12,1538;$$

$$y_3 \left(\sum_{i=3}^6 \frac{m_{x_i y_3}}{x_i} \right) = 66 \left(\frac{1}{19} + \frac{4}{21} + \frac{2}{23} + \frac{2}{25} \right) = 27,0858;$$

$$y_4 \left(\sum_{i=2}^5 \frac{m_{x_i y_4}}{x_i} \right) = 72 \left(\frac{3}{17} + \frac{1}{19} + \frac{3}{21} + \frac{3}{23} \right) = 36,1775;$$

$$y_5 \left(\frac{m_{x_2 y_5}}{x_2} + \frac{m_{x_3 y_5}}{x_3} \right) = 78 \left(\frac{3}{17} + \frac{2}{19} \right) = 21,9775;$$

$$y_6 \left(\sum_{i=1,3} \frac{m_{x_i y_6}}{x_i} \right) = 84 \left(\frac{2}{15} + \frac{2}{17} + \frac{2}{19} \right) = 29,9298;$$

$$y_7 \left(\frac{m_{x_1 y_7}}{x_1} + \frac{m_{x_3 y_7}}{x_3} \right) = 90 \left(\frac{3}{15} + \frac{1}{19} \right) = 22,7367;$$

$$y_8 \left(\frac{m_{x_1 y_8}}{x_1} + \frac{m_{x_2 y_8}}{x_2} \right) = 96 \left(\frac{3}{15} + \frac{1}{17} \right) = 23,292;$$

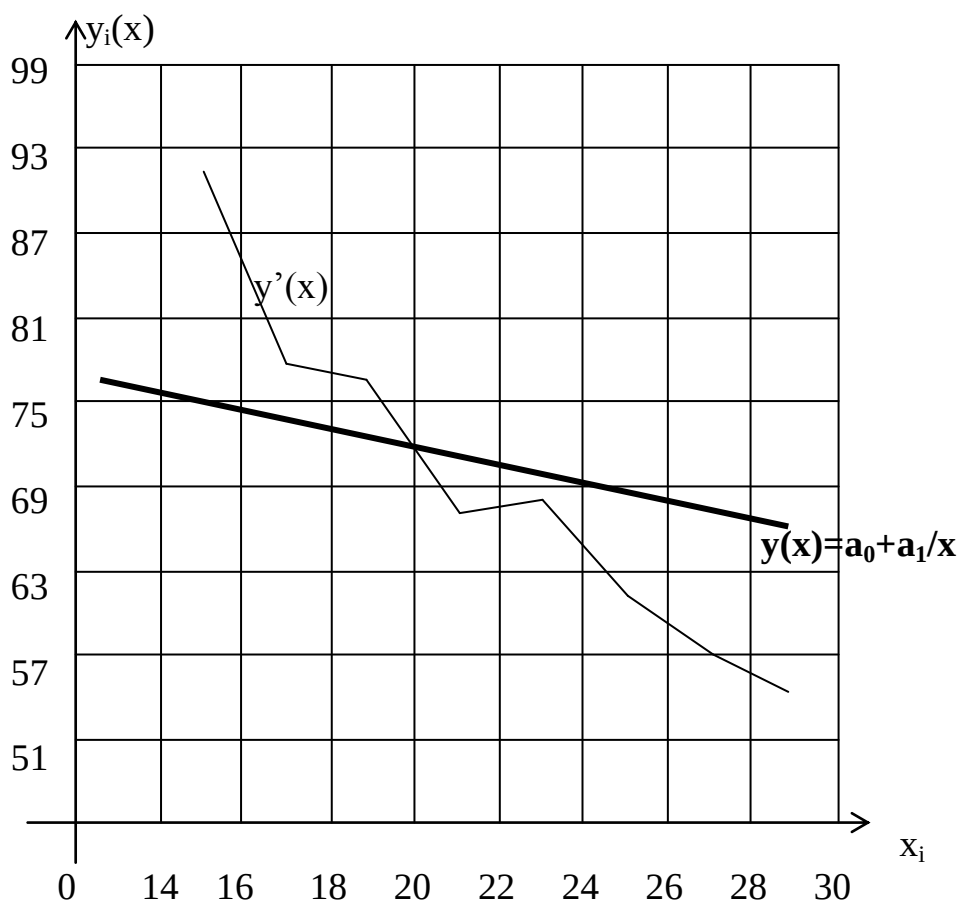
$$\sum_{\substack{i=1,8 \\ j=1,8}} y_j \frac{m_{x_i y_j}}{x_i} = 182,9393.$$

5.5- жадвал ёрдамида $y'(x)$ - эмпирик регрессия графигини 5.2-расмда кўрсатамиз.

Биз энди юқоридаги 5.4-жадвалда сонли маълумотлардан фойдаланиб, (5.5) формуладаги a_0 ва a_1 коэффицентларни қидирамиз. Шу мақсадда қуйидаги тенгламалар системасини тузиб оламиз:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^8 \frac{m_{x_i}}{x_i} = \sum_{i=1}^8 y_i m_{y_i}; \\ a_0 \sum_{i=1}^8 \frac{m_{x_i}}{x_i} + a_1 \sum_{i=1}^8 \frac{m_{x_i}}{x_i^2} = \sum_{i,j=1,8} \frac{y_j}{x_i} m_{x_i y_j} \end{cases} \quad (5.6)$$

Эмпирик ва гиперболик регрессия графиклари



5.2-расм

(5.6) системага асосан 5.4-жадвалдаги тегишли сонларни қўйсак:

$$\begin{cases} 50a_0 + 2,5057a_1 = 3618 \\ 2,5057a_0 + 0,131a_1 = 182,9393 \end{cases} \quad (5.7)$$

(5.7) системадаги 1-тенгламани 50 га 2-сини эса 2,5057 га бўлиб юборамиз:

$$\begin{cases} a_0 + 0,05a_1 = 72,36 \\ a_0 + 0,05228a_1 = 73 \end{cases}$$

2-тенгламадан 1-ни айирсак: $0,00228a_1 = 0,64$;

Бундан $a_1 = \frac{0,64}{0,00228} = 280,7$ ва 1- тенгламадан эса $a_0 = 72,36 - 0,5 \cdot 280,7 = 58,33$.

Демак, изланаётган тенглама:

$$y(x) = 58,33 + \frac{280,7}{x}, \quad 15 \leq x \leq 29. \quad (5.8)$$

Бу регрессия графиги 5.2-расмда келтирилган. (5.8) нинг графигидан кўринадики, “функция узлуксизлиги” тушунчасини такрорланишлари сони x ортгани сари ўқувчиларнинг ўртача ўзлаштириши ортмас экан.

Юқоридагиларни эътиборга олган ҳолда биз назорат ва тажриба синфларида “функция узлуксизлиги” мавзусини ўтиш бўйича тажриба-синов ишлари олиб бордик. Ўқувчилар билими 5 баллик системада баҳоланди: “паст билим” - 3 балл, “ўртача билим” - 4 балл ва “юқори билим” - 5 балл. Тажриба синфларида “функция узлуксизлиги” тушунчаси 14,15 мартадан ортиқ такрорланмади. Натижада қуйидаги ўзлаштириш кўрсаткичларига эга бўлдик:

5.6-жадвал

Синфлар	баллар	“3”	“4”	“5”	Жаъми
Нazorat синфлари	% да	28%	49%	23%	100%
Тажриба синфлари	%да	16,9%	44,7%	38,4%	100%

5.6-жадвалдаги сонли маълумотларни қуйидаги 2 та танлама кўринишида ёзиб оламиз:

$$\begin{cases} x: & 3, & 4, & 5. \\ & p_1 + p_2 + p_3 = 1. \\ P_x: & p_1 = 0,169; & p_2 = 0,447; & p_3 = 0,384. \\ y: & 3, & 4, & 5. \\ Q_y: & q_1 = 0,28; & q_2 = 0,49; & q_3 = 0,23 \end{cases}$$

Тажриба синфи бўйича ўртача ўзлаштириш (x'), танлама дисперсияси (S_x^2), стандарт оғиш (S) ҳамда ўрта қиймат аниқлиги (V_x) катталикларини ҳисоблаймиз.

$$x' = \sum_{i=1}^3 p_i x_i = 0,169 \cdot 3 + 0,447 \cdot 4 + 0,384 \cdot 5 = 0,507 + 1,788 + 1,92 = 4,22$$

$$x'\% = \frac{4,22}{5} \cdot 100\% = 84\%$$

$$S_x^2 = \sum_{i=1}^3 p_i x_i^2 - (x')^2 = 0,169 \cdot 9 + 0,447 \cdot 16 + 0,384 \cdot 25 - (4,22)^2 = 1,521 + 7,152 + 9,6 - 17,81 = 0,463.$$

$$S_x = \sqrt{0,463} = 0,68 \quad V_x = \frac{S_x}{x'} \cdot 100\% = 16,11\%.$$

Юқоридаги кўрсаткичларни назорат синфлари бўйича ҳисоблаймиз:

$$y' = \sum_{i=1}^3 q_i y_i = 0,28 \cdot 3 + 0,49 \cdot 4 + 0,23 \cdot 5 = 0,84 + 1,96 + 1,15 = 3,95 \quad y'\% = \frac{3,95}{5} \cdot 100\% = 79\%$$

$$S_y^2 = \sum_{i=1}^3 q_i y_i^2 - (y')^2 = 0,28 \cdot 9 + 0,49 \cdot 16 + 0,23 \cdot 25 - (3,95)^2 = 7,2 + 7,84 + 5,75 - 15,6 = 5,19$$

$$S_y = \sqrt{5,19} = 2,28 \quad V_y = \frac{S_y}{y'} \cdot 100\% = 57,67\%$$

Бу ҳисоблардан кўринадики, $x' > y'$ ва $V_x < V_y$, яъни тажриба синфларидаги ўртача ўзлаштириш юқори бўлиб, унга мос вариация коэффиценти эса кам ($< 30\%$) экан. Бу эса, ўз навбатида, тажриба синфларида ўқувчиларнинг билими тўғри баҳоланганлигини англатади.

Энди биз F_x ва F_y орқали x ва y лар тасодикий миқдорларга мос келган тақсимот қонунларини белгилаб, бу тақсимот қонунлари устма-уст тушиши ҳақидаги

$$H_0 : F_x = F_y$$

гипотезани олдинга сурамиз. Бу гипотезани текшириш мақсодида Пирсон статистикаси

$$X_T^2 = \sum_{i=1}^3 \frac{(n_i - m_i)^2}{n_i + m_i}$$

дан фойдаланамиз. Бу ерда $n = m = 100$; $n_1 = 16,9$; $n_2 = 44,7$; $n_3 = 38,4$;

$m_1 = 28$; $m_2 = 49$; $m_3 = 23$ / X_T^2 ни ҳисоблаймиз:

$$X_T^2 = \left[\frac{(16,9 - 28)^2}{16,9 + 28} + \frac{(44,7 - 49)^2}{44,7 + 49} + \frac{(38,4 - 23)^2}{38,4 + 23} \right] = \frac{123,21}{44,9} + \frac{1,69}{93,7} + \frac{237,16}{61,6} = 2,74 + 0,02 + 3,85 = 6,61.$$

Пирсон мезони озод(эркин)лик даражаси $\nu = 3 - 1 = 2$ га тенг(чунки баҳолаш 3 баллик системада). $p = 0,95$ ишонч эҳтимоли ва даражаси $\nu = 2$ га мос келган критик нуқтани Пирсон Хи-квадрат тақсимоти жадвалидан аниқлаймиз: $t_y(0,95) = 5,99$. Аммо статистика қиймати $X_T^2 = 6,61 > 5,99 = t_y(0,95)$. Демак, биз 95% ишонч билан H_0 ни рад этар эканмиз. Бу эса, ўз навбатида тажриба ва назорат синфларида “функция узлуксизлиги” мавзусини баён қилиш ўқитиш услубиятлари бир-биридан тубдан фарқланишини англатади.

2.2. Математика ўқув қўлланма ва дарсликларида узвийликни таъминлашда омилларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш

2.2.1. Мавзулараро узвийликни баҳолаш

Биз ушбу бандда И.И.Нурминский, Н.К.Гладышева[136], шунингдек, Н.А.Ким [97]ларнинг ишларига асосланган ҳолда Ш.О.Алимов, М.А.Мирзааҳмедов, О.Р. Холмуҳамедовларнинг 9-синф учун “Алгебра” дарслиги [36] мавзулараро узвийлигини баҳолашнинг бир усулига тўхталамиз.

Педагогик тажрибаларнинг кўрсатишича, ўқувчиларнинг дарсликлар билан мустақил ишлаши, уларнинг ўқув материални ўзлаштиришларига катта таъсир қилади. Ўқувчиларнинг дарслик билан мустақил ишлашлари унинг компонентлари, яъни таркибий қисмлари билан ишлашда муваффақиятли амалга ошади. Таркибий қисмлар ёки бўлақлар тушунчалар, расмлар, схемалар, формулалар, формулаларнинг сўзлар билан тушунтирилиши, рангли расмлар, машқлардаги савол ва масалалар кабилар бўлиши мумкин. Ўқув материалининг маълум бир тушунчасини ўзлаштиришда дарслик таъсири ҳақида тўла маълумотга эга бўлиш учун ушбу тушунчани ўқувчи ўзлаштириб олишини уюштиришга, дарсликнинг у ёки бу таркибий қисми неча марта қўлланилганлигини ҳисобга олишимиз зарур.

Шунинг учун ўқув материалининг ажратиб олинган ҳар бир бўлаги дарсликда неча марта қўлланилиши санаб чиқилди ва қуйидаги белгилашлардан фойдаланилди:

Ушбу таркибий қисмининг оддий матнларда ишлатилиш сонини $N_{\text{кат}}$ ва қаторлар сонини $n_{\text{кат}}$; шунингдек, матннинг қалинлаштириб ёзилган қисмида мос равишда $N_{\text{қал}}$ ва $n_{\text{қал}}$; расмларда $n_{\text{расм}}$; алоҳида қаторларда формула кўринишида ажратилган бўлса, $n_{\text{ф}}$; агар худди шу тарзда матн ичида учраса, $n_{\text{ф.м}}$; формула сифатида рамка орқали ажратилган бўлса, $n_{\text{ф.аж}}$; “ўзингизни текшириб кўринг” рукни остида $n_{\text{ўз.т}}$; матн ичида масала ечиб кўрсатилган

бўлса, $\mathbf{n}_{\epsilon..k..m}$; машқлар бўлимидаги савол ва масалаларда учраса, $\mathbf{n}_{\epsilon..m}$; тарихий маълумотларда учраган бўлса, $\mathbf{n}_{t..m}$ билан белгиланди.

Ажратиб олинган ўқув материалидаги маълум бир тушунчани мустаҳкамлаш учун дарслик таркибий қисмларидан фойдаланиш частоталарини ҳисоблашда материаллар 3 гуруҳга бўлиб олинди.

Биринчи гуруҳ - берилган тушунчага ошкор кўринишда тааллуқли бўлган материал. Ушбу материални берилган тушунчага тааллуқли эканлигини дарсликни биринчи марта варақлаб турган ўқувчи ҳам дарҳол англаши мумкин.

Иккинчи гуруҳ - берилган тушунчага ошкор кўринишда тааллуқли эмас, лекин мазмунан бир хил.

Учинчи гуруҳ - берилган тушунчага бевосита тааллуқли бўлган материаллар.

Юқоридагиларга аниқлик киритиш учун қуйида дарслик[36]дан олинган парча[33-§] ни келтирамиз.

33-§. TESKARI FUNKSIYALAR

1-masala. Laboratoriyada yarim yemirilish davri taqriban 4 s bo'lgan lg aktinon radioktiv moddasi bor.

t s dan so'ng necha gramm aktinon qolishini aniqlang.

Quyidagi formulaga asosan

$$m=m(t)=(1/2)^{t/4}.$$

Teskari masalani qaraylik. Necha sekunddan so'ng, bir gramm aktinondan qoladi?

Logarifmlasak $t=4\log_{1/2} m$.

Hosil bo'lgan $t=4\log_{1/2} m$ funksiyani $m=(1/2)^{t/4}$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi.

Endi ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalarni qaraymiz. $f(x)$ bilan ko'rsatkichli funksiyani, $g(x)$ bilan esa logarifmik funksiyani belgilaymiz: $f(x)=a^x$, $g(x)=\log_a x$, bunda a - berilgan son, $a>0$, $a\neq 1$.

$a^x=y$ tenglamani x ga nisbatan yechamiz. Logarifmning ta'rifiga ko'ra $x=\log_a y$.

Bu tenglamada x va y ning o'rinlarini almashtirib,

$y=\log_a x$ logarifmik funksiyaga ega bo'lamiz. $y=\log_a x$ funksiya $f(x)=a^x$ funksiyaga teskari funksiya deb ataladi. Agar $y=\log_a x$ tenglikdan x ni topsak, u holda $x=a^y$ ga ega bo'lamiz, x va y ning o'rinlarini almashtirib esa $y=a^x$ ko'rsatkichli funksiyaga ega bo'lamiz. $y=a^x$ funksiya $y=\log_a x$ funksiyaga teskari funksiyalar deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Faraz qilaylik, har bir y uchun

$$f(x) = y$$

tenglama yagona echimga ega bo'lsin. Shunday qilib, y ning har bir qiymatiga x ning yagona qiymati mos keladi, ya'ni yangi $x=g(y)$

funksiya aniqlangan. Bu funksiya $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiyadir.

Demak, agar $y=f(x)$ funksiya formula bilan berilgan bo'lsa, u holda teskari funksiyani topish uchun $f(x)=y$ tenglamani x ga nisbatan yechish hamda x va y larning o'rinlarini almashtirish kerak.

Agar $f(x)=y$ tenglama bittadan ortiq ildizga ega bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya mavjud emas.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyaga teskari funksiya mavjud emas, chunki $x^2=y$ tenglama istalgan $y>0$ uchun ikkita: $x_{1,2}=\pm\sqrt{y}$ ildizga ega.

Agar $y=x^2$ funksiya faqat $x\geq 0$ oraliqda qaraladigan bo'lsa, u holda bu funksiyaga teskari $y=\sqrt{x}$ funksiya mavjud, chunki $y\geq 0$ da $x^2=y$ tenglama faqat bitta nomanfiy ildizga ega.

2-masala. $y=1/(x-2)$ funksiyaga teskari funksiyani toping.

Bu tenglamani x ga nisbatan yechib, $x=2+1/y$ ga ega bo'lamiz, x ni y ga va y ni x ga almashtirib, $y=2+1/x$ ni hosil qilamiz.

Bu masalada $y=1/(x-2)$ funksiyaning aniqlanish sohasi 2 ga teng bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plamidir, uning qiymatlar to'plami esa 0 ga teng bo'lmagan barcha haqiqiy sonlar to'plamidir. Bu funksiyaning grafigi 66-rasmda tasvirlangan.

$y=2+1/x$ teskari funksiya uchun uning aniqlanish sohasi esa 0 ga teng bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plami, qiymatlar to'plami esa 2 ga teng bo'lmagan barcha haqiqiy sonlar to'plami. Teskari funksiyaning grafigi 67-rasmda tasvirlangan.

Mashqlar

497. Berilgan funksiya teskari funksiyani toping:

- 1) $y=2x-1$; 2) $y=-5x+4$; 3) $y=1/3x-2/3$; 4) $y=(3x-1)/2$;
 5) $y=x^3+1$; 6) $y=x^3-3$; 7) $y=3^x$; 8) $y=\log_{0.5}x$.

498. Berilgan funksiya teskari funksiyaning aniqlanish sohasini va qiymatlar to'plamini toping:

- 1) $y=-2x+1$; 2) $y=1/4x-7$; 3) $y=x^3-1$;
 4) $y=(x-1)^3$; 5) $y=2/x$; 6) $y=3/(x-4)$.

499. Bitta rasmda berilgan funksiyaning grafigini va berilgan funksiya teskari funksiyaning grafigini yasang:

- 1) $y=3x-1$; 2) $y=(2x-1)$; 3) $y=x^2-1$,
 bunda $x \geq 0$; 4) $y=(x-1)^2$, bunda $x \geq 1$.

Тескари функциялар мавзусига бағишланган бу парчада:

Бир марта 11 қаторли оддий матн билан тескари функция ва уни аниқлашга таъриф берилган, демак: $N_{\text{кат}}=1$, $n_{\text{кат}}=11$;

Матн ичида 2 масала ечиб кўрсатилган, демак: $n_{\text{е.к..м}}=1$;

Бир марта 66, 67-расмларда тасвирланган, демак $n_{\text{расм}}=1$;

Бир марта G қаторли қалинлаштириб ёзилган матн билан тескари функция ва уни аниқлашга таъриф берилган, демак $N_{\text{қал}}=1$, $n_{\text{қал}}=6$;

497-машқда 8 та масала, демак $n_{\text{с..м}}=8$ лар – биринчи гуруҳ.

Матнни аниқлашда чапдан қалин чизиклар билан белгилаб қўйилган 7 қаторли матн, демак $N_{\text{кат}}=1$, $n_{\text{кат}}=7$;

498-машқда 6 та масала, демак $n_{\text{с..м}}=6$ лар иккинчи гуруҳ;

Матн ичида ечиб кўрсатилган 1 масала, демак: $n_{\text{е.к..м}}=1$;

Чап томонда тўлқинсимон чизик билан ажратиб қўйилган 12 қаторли матн, демак: $N_{\text{кат}}=1$, $n_{\text{кат}}=12$;

499-машқда 4 та масала, $n_{\text{с.м}}=4$ лар - учинчи гуруҳ материаллари.

Юқоридагилардан фойдаланиб, дарсликда қўлланган тушунчалар частоталарининг муқобил қийматларини аниқлаш мақсадида қуйидаги чизикли функция ўрганилди:

$$N_{\text{муқ}} = \sum \alpha_i n_i = \alpha_{\text{кат}} n_{\text{кат}} + \alpha_{\text{расм}} n_{\text{расм}} + \alpha_{\text{е.к.м}} n_{\text{е.к.м}} + \dots + \alpha_{\text{с.м}} n_{\text{с.м}}$$

бу ерда α_i – нормаллаштирувчи коэффициентлар бўлиб, кейинчалик аниқланади.

Бунинг учун (процентларда аниқланган) k – ўқув материалидаги тушунчаларни ўзлаштирган ўқувчиларнинг нисбий сони билан $N_{\text{муқ}}$ функция орасидаги функционал боғлиқлик аниқланди. Бунда қуйидаги типдаги жадваллардан фойдаланилди:

№	Тушунчалар	$N_{\text{кат}}$	$n_{\text{кат}}$	k (%)
1	Агар $y=f(x)$ funksiya formula bilan berilgn bo'lsa, u holda teskari funktsiyani topish uchun $f(x)=y$ tenglamani x ga nisbatan yechish hamda x va y larning o'rinlarini almashtirish kerak.	1	4	32
2	Агар $f(x)=y$ tenglama bittadan ortiq ildizga ega bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funktsiyaga teskari funksiya mavjud emas.	1	2	61
3	Umuman, teskari funktsiyaning aniqlanish sohasi dastlabki funktsiyaning qiymatlar to'plami bilan, teskari funktsiyaning qiymatlar to'plami esa dastlabki funktsiyaning aniqlanish sohasi bilan ustma-ust tushadi.	1	4	35
4	Агар berilgan funktsiyaga teskari funksiya mavjud bo'lsa, u holda teskari funktsiyaning grafigi berilgan funktsiyaning grafigiga $y=x$ o'qiga nisbatan simmetrik bo'lishini ko'rsatish mumkin.	1	3	47

Жадваллар эса Жиззах вилояти Ғаллаорол туманидаги махсус танлаб олинган мактабларнинг 9-синф ўқувчиларидан мазкур дарслик мавзулари юзасидан ўтказилган ёзма ишлар натижалари асосида тайёрланди. Ушбу жадваллар кетма-кет умумлаштириб борилиб, $\{k, N_{\text{кат}}\}$ ва $\{k, n_{\text{кат}}\}$

текисликларида регрессия чизикларининг хоссалари ўрганилди. Натижа сифатида α_i – нормаллаштирувчи коэффициентлар аниқланди.

2.2.2. Мавзуни мустаҳкамлашда омилларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш

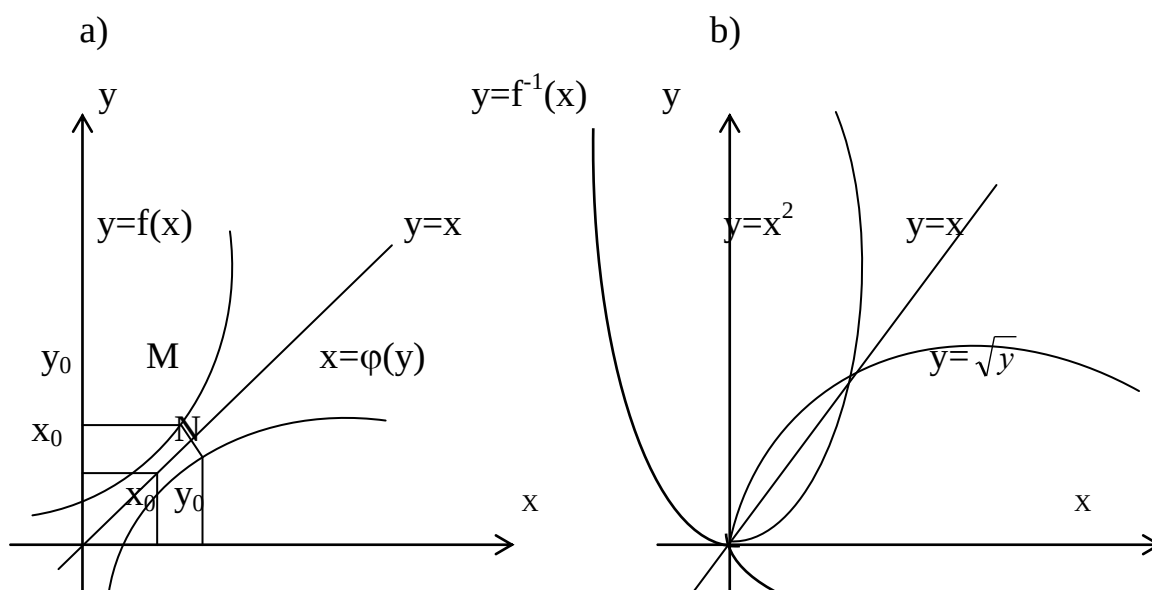
Биз ушбу бандда А.У.Абдуҳамидов, Ҳ.А.Насимов, У.М.Носиров, Ж.Ҳ.Хусановларнинг академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун “Алгебра ва математик анализ асослари”дан синов дарслиги[5,6]да мавзуларни мустаҳкамлашда омилларнинг нисбий афзаллигини баҳолашга тўхталамиз.

Юқорида қайд қилинган [5] синов дарсликдан фойдаланиш жараёнида мавзуларни мустаҳкамлаш учун берилган машқлар таркиби ўрганилди. Унда мавзуга доир масалалар, мисоллар, тестлар тузиш каби топшириқлар деярли берилмагани аниқланди. Мавзуларни мустаҳкамлашда тажриба тариқасида қўшимча равишда бундай топшириқлар бериб кўрилганда натижа кутилгандан ҳам яхши бўлди. Ушбу ҳолни илмий асослаш мақсадида турли мавзуларни мустаҳкамлашда А.Қодирий номидаги ЖДПИ қошидаги лицейдан аълоҳида ажратиб олинган гуруҳларда тажриба-синов ишлари ўтказилди. Бунинг учун мавзуларнинг мазмунига қараб қуйидаги типдаги икки гуруҳ маъноли элементлар ажратиб олинди. Уларнинг биринчисида маъноли элементлар мавзу бўйича дарс оддий матн ва мавзу охирида берилган машқлар ёрдамида олиб борилиши, иккинчисида эса айрим машқлар ўрнига “мавзуга доир масалалар, мисоллар, тестлар тузиш” каби топшириқларни киритилишига қараб танлаб олинган. Тушунарлики, ушбу элементлар учун матнда улар учраган қаторлар сони - $n_{кат} \neq 0$, машқлар бўлимидаги савол ва масалаларда учраган сони - $n_{с..м} > 0$; қолган барча маъноли элементлардан фойдаланиш частотаси нолга тенг деб олинди. Булар ёрдамида маъноли элементларнинг оддий матнларда қўлланиш сонлари биринчи ва иккинчи гуруҳлар учун мос равишда - $N_{кат,1} = n_{кат} + \alpha_{с..м,1}$ $n_{с..м,1}$, $N_{кат,2} = n_{кат} + \alpha_{с..м,2}$ $n_{с..м,2}$ каби аниқланди. Шундан сўнг, улар таққосланиб, иккинчи ҳол афзаллиги кўрсатилди.

Ўтказилган тажриба-синов ишлари натижаларини ([5], VII боб, 3-§) “Тескари функция” мавзуи мисолида келтирамиз. Таъкидланган синов дарслигида бу мавзу қуйидагича ёритилган:

4. Тескари функция. Агар $b=f(a)$ тенгликни қаноатлантирувчи $(a;b)$ қийматлар жуфти $a=\varphi(b)$ тенгликни ҳам қаноатлантирса, аксинча, $a=\varphi(b)$ ни қаноатлантирувчи шу жуфт $b=f(a)$ ни ҳам қаноатлантирса, $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функциялар ўзаро тескари функциялар дейилади. Бу икки функциядан ихтиёрий бирини тўғри функция, иккинчисини эса биринчисига нисбатан тескари функция дейилади. f функцияга тескари функция бундай: f^{-1} белгиланади. $f^{-1}(x)=g(x)$ ва $g^{-1}(x)=f(x)$.

Тўғри функция бўлсин $y=f(x)$ бўлсин. Уни x га нисбатан ечиб, $x=\varphi(y)$ кўринишга келтирамиз. $y=f(x)$ ва $x=\varphi(y)$ – тенг кучли муносабатлар, улар битта график билан тасвирланади (1-а расм).

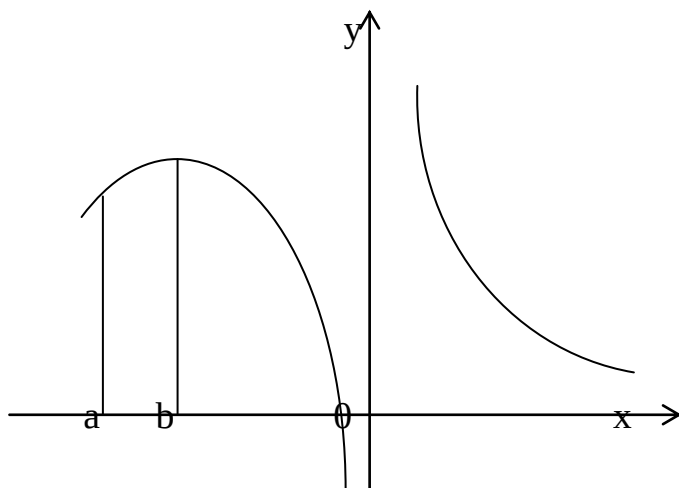


Одатга кўра, функцияни y оркали, аргументни x оркали белгиласак, $x=\varphi(y)$ боғланишда x ва y ларни алмаштириб, таърифда кўрсатилганидек, $y=f(x)$ ёзувни оламиз. Бу ҳолда f графигида ётган ҳар бир $M(x,y)$ нукта $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан ўзига симметрик ҳолатда φ графигида ётган $N(y;x)$ нуктага ўтади. Умуман, ўзаро тескари $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар графиклари $y=x$ биссектрисага нисбатан симметрик жойлашадилар. Лекин ҳар қандай функция тескари функцияга эга бўлавермайди. Масалан, $y=x^2$ функция бўйича

функционал боғланиш бўлмаган (ҳар бир $y > 0$ қийматга x нинг икки қиймати мос келадиган) $x = \pm\sqrt{y}$ муносабатга эга бўламиз. Лекин $y = x^2$, $0 \leq x < +\infty$ ва $x = \pm\sqrt{y}$ ёки $y = x^2$, $-\infty < x \leq 0$, ва $x = -\sqrt{y}$ лар ўзаро тескари боғланишлардир. $x = \sqrt{y}$ ни (ҳарфларни алмаштириб) $y = \sqrt{x}$ кўринишда ёзамиз. Уларнинг графиклари 1-б расмда тасвирланган.

с)

1-расм



Агар X тўпламга қарашли $x_1 \neq x_2$ қийматларда функциянинг мос қийматлари $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлса, f функция X тўпламда *тескариланувчи функция* дейилади.

Агар $f(x)$ функция X тўпламда *монотон* бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция тескариланувчи функция бўлади. Ҳақиқатан, f функция X да ўсувчи бўлсин. У ҳолда $x_1 < x_2$ ларда $f(x_1) < f(x_2)$, яъни $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлади. Бундай ҳол f функция X тўпламда камаювчи бўлганда ҳам ўринли. f функциянинг монотонлигидан унга тескари f^{-1} функциянинг мавжудлиги келиб чиқади. Агар f функция $[a; b]$ ораликда ўсса (ёки камайса) ва узлуксиз бўлса, $y[f(a); f(b)]$ ораликда (камаювчи бўлганда $y[f(b); f(a)]$ ораликда) f^{-1} тескари функцияга эга бўлади.

М а ш қ л а р

7.201. 67-с расмда f функция графиги тасвирланган. Шу функция $(-\infty; +\infty)$ интервалда тескари функцияга эга бўла оладими? Қандай ораликларда тескари

функцияга эга ва нима учун? Тескари функциялар графикларининг эскизларини чизинг.

7.202. Функцияга тескари функцияни топинг:

a) $f(x)=2x+3$;

b) $f(x)=x^2, x \in [0; +\infty]$;

c) $f(x)=x^2, x \in (-\infty; 0]$;

d) $f(x)=-x^2, x \in (-\infty; 0]$;

e) $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$

g) $f(x) = x$, агар $x \in [0; 1)$

$3-x$, агар $x \in [1; 2)$

7.203. Функция тескариланувчими:

a) $f(x)=3x^2+1$;

b) $f(x)=3x+4$;

c) $f(x)=4x-5$;

d) $f(x)=\frac{3x+1}{4x-2}$;

e) $f(x) = \frac{7x-4}{3x+5}$;

f) $f(x) = \frac{dx+b}{cx+d}$;

g) $f(x) = x^2$, агар $x \in [0; 1)$

$x-1$, агар $x \in [1; 2]$;

k) $f(x) = 3x+1, x \in [0; 1)$

$-3x+1, x \in [1; 2]$;

m) $f(x) = x^3, x \leq 0$ бўлса,

$x, x \neq 0$ бўлса;

t) $f(x) = \frac{3x^2}{1-3x}$?

Ушбу мавзу юқорида эслатилганидек, лицейнинг турли гуруҳларида биринчи ҳолда дарсликдагидек, иккинчи ҳолда эса **7.203**-машқдаги 10та а)-к)

мисоллар “4 та тескариланувчи функцияга мисол келтиринг” каби топшириққа ўзгартирилди. Мавзу юқоридаги материаллар асосида ўтиб бўлингандан сўнг, талабалардан ўзлаштиришни аниқлаш мақсадида ягона вариант асосида ёзма иш олинди ва натижаларга кўра $\alpha_{с..м.1}$, $\alpha_{с..м.2}$ аниқланиб, $\{k, n_{кат}\}$ регрессия чизиқлари ясалди. Ўзлаштириш синов ўтказилган барча гуруҳларда деярли бир хил эканлиги аниқланди. Шундай қилиб, 7.203-машқдаги 10 та мисолни ечиш ўз самарадорлигига кўра юқорида берилган ўзгартирилган кўринишдаги 4 та мисолга тенг кучли эканлиги кўрсатилди.

Албатта, дарсликнинг турли компонентлари ўқувчиларнинг фикрлаш қобилиятларига таъсир қилувчи ўз соҳаларига эга: ўрганилаётган объект ва жараёнлардаги расмлар ўқувчининг кўриш қобилиятини шакллантирса, матнлар эса мантиқий фикрлаш, тафаккурни ривожлантириш, илмий тушунча ва қонуниятлар ҳақида тасаввур қилиш имконини беради. Демак, дарсликлар ёзишда мавзуларни ўзлаштиришга самарали ёрдам берувчи барча омилларга эътибор қаратиш зарур.

2.2.3. Касб-хунар коллежлари ва педагогика олий ўқув юртларининг номутахассис йўналишидаги математика курсида узвийлик

Амалдаги ўқув дастурлари таҳлили шуни кўрсатадики, бу таълим муассасаларида бир қатор, жумладан, интеграл ва унинг тадбиқларига оид мавзулар деярли тўлалигича, айнан такрорланади. Ушбу ўринда олий ўқув юртларида мавзулар чуқурроқ ўтилади, деган юзаки жавоб асос бўла олмайди.

Ўз-ўзидан аёнки, академик лицей ёки касб-хунар коллежида ўрганилган ўқув материалларининг кейинги таълим босқичида қайта баён қилиниши талабаларнинг математикага бўлган қизиқишини пасайтиради, таълим самарадорлигини камайтириб, таълимнинг ривожлантирувчи таъсирини сусайтиради. Чунки, кибернетиклар таъкидлаганидек, қуруқ такрорлаш жараёнида ахборот коэффиценти нолга тенг бўлиб, талаба янги билим олмайди.

Тажрибаларнинг кўрсатишича, юқоридаги ҳолат туфайли математика фанига ўз қизиқишларини йўқотадиган талабалар кейинроқ ўқув материали мураккаблашганда турли қийинчиликларга дуч келади. Шунинг учун ўрта махсус ва олий таълим босқичларида математика курсини ўқитишда узвийликни таъминлаш муҳим аҳамият касб этади.

Ушбу вазиятда номутахассис йўналишидаги педагогика олий ўқув юртларида математиканинг маълум бир боб ёки бўлимини ўрганишдан олдин талабанинг ўрта махсус таълим муассасасида эгаллаган билим, кўникма ва малакалари қай даражада эканлигини аниқлаш мақсадга мувофиқдир. Шу ниятда академик лицей ва касб-хунар коллежлари учун мўлжалланган математика бўйича давлат таълим стандарти ва намунавий ўқув дастурида белгиланган билим, кўникма ва малакалар ҳажмида компьютерга киритилган тест топшириқларидан фойдаланилади. Сўнгра шу топшириқларнинг ўзи ёзма иш тариқасида батафсил бажарилади.

Компьютер орқали бажарилган назорат ишини “қатъий” назорат, ёзма иш бажариш тарзида ўтказилган назоратни “анъанавий” назорат деб атаيمиз. Маълум бир вақтдан кейин (вақт ўқитувчи томонидан белгиланиб, кўпи билан бир ҳафта бўлиши мумкин) бу жараён яна такрорланади. Албатта, бу ишлар боб ёки бўлимни ўрганишдан олдин амалга оширилиши керак.

Айталик, назорат ўтказилаётган гуруҳда n нафар талаба бўлсин. “Анъанавий” усулда ўтказилган назорат бўйича биринчи ва иккинчи уринишларда топшириқларни тўлиқ бажарган талабалар сонини n_1^a, n_2^a , “қатъий” назорат усулида бажарилган назорат бўйича эса мос равишда n_1^r, n_2^r орқали белгилаймиз.

Ҳар иккала назорат бўйича биринчи ва иккинчи уринишларда топшириқларни тўлиқ бажарган талабалар сонини мос равишда N_1 ва N_2 деб кўрсатамиз.

Энди $n_1^a, n_2^a, n_1^k, n_2^k, N_1$ ва N_2 ларга асосланиб талабаларнинг ўрта махсус ўқув юртида математиканинг бирор боб ёки бўлими бўйича ўзлаштириш

даражасини тавсифловчи қуйидаги мезонлар ва тузатиш коэффициентларини аниқлаймиз.

Мезонлар:

1. “Қатъий” назоратда талабалар билим ҳамда топшириқларни ниҳоясига етказиш кўникмалари қандайлигини кўрсатувчи ритмлилиқ мезони. Бу мезон қуйидаги формула билан аниқланади:

$$K_p = \frac{n_1^K}{N_1}. \quad (5.9)$$

2. Икки марта ўтказилган “анъанавий” назоратдан сўнг, талабанинг ўқув материални қандай ўзлаштирганлиги ҳақида фикр юритишига имкон берувчи ўзлаштириш мезони. Бу мезон қуйидаги формула орқали келтириб чиқарилади:

$$K_y = \frac{n_1^a + n_2^a}{N_1}. \quad (5.10)$$

Тузатиш коэффициентлари:

1. Биринчи тузатиш коэффициенти (у коррекция коэффициенти деб юритилади)

$$K_M = \frac{n_1^a}{n_1 k} \quad (5.11)$$

формула билан аниқланади ва “қатъий” усулда ўтказилган назоратда ўқитувчи аралашувидан кейин қай миқдорда иккинчи даражали хатоликларга йўл қўйилганлигини кўрсатади.

2. Иккинчи тузатиш коэффициенти – бу “улгура олиш” коэффициенти

бўлиб, у
$$K_y = \frac{n_1^a + n_2^a}{n_1^a}$$

формула ёрдамида топилади ва у талабаларга топшириқларни бажариш жараёнида йўл қўйган хатолари кўрсатилган ва бу хатоларни тузатиш учун маълум вақт берилгандан сўнг ўзлаштириш даражаси қанчага ўсганлиги тўғрисида тасаввур ҳосил қилиш имконини беради.

Юқоридаги мезонлар ва коэффициентлар ёрдамида талабалар ўрта махсус ўқув юртида математиканинг қаралаётган боб ёки бўлими бўйича қайси ўқув материалларини иккинчи даражали хатоликлар билан ўрганганлиги ва шу боб

ёки бўлимнинг қайси ўқув материални олий ўқув юртида қандай ўрганиш лозимлигини аниқлашига ёрдам берувчи ўзлаштириш коэффициентини аниқлаймиз. Бу коэффициент

$$K_y = K_p K_m K_y \quad (5.12) \quad \text{формуласи орқали аниқланади.}$$

Нихоят, ўрганилаётган боб ёки бўлим бўйича ритмлилиқ мезонининг (K_p) шу боб ёки бўлимни ташкил этувчи мавзулар ритмлилиқ мезонларига (K_{pb}) нисбати орқали аниқланувчи ва мавзунинг мураккаблиқ коэффициенти деб аталувчи қуйидаги коэффициентни киритамиз:

$$K_m = \frac{K_p}{K_{pb}}.$$

K_m қанчалик катта бўлса, мавзуни ўрганиш шунчалик қийин ҳисобланади.

Бундан ташқари мазкур коэффициент ўқув соатларини мавзулар бўйича тақсимлаш, мавзуни баён қилиш методикасига зарурий ўзгаришлар киритиш имконини беради. Энди ушбу технология асосида ўрта махсус ўқув юртларида “Интеграл ва унинг тадбиқлари” бобини ўқитиш жараёнида талабаларнинг билим кўникма ва малакаларини ошириш мақсадида ўтказилган тажриба-синов ишлари натижасини келтирамиз.

Тажриба-синов ишлари А.Қодирий номидаги ЖДПИ касб таълими, биология ва ҳаёт хавфсизлиги, кимё ва экология мутахассисликлари 1-курс талабалари учун “Интеграл ва унинг тадбиқлари бобини ўрганишдан олдин ўтказилди. Талабаларнинг шу бобни қандай ўзлаштирганлигини аниқлашга ёрдам берадиган тажриба-синов ишлари натижалари ритмлилиқ ва ўзлаштириш мезонлари бўйича 5.7-жадвалда, мавзунинг мураккаблиқ коэффициенти бўйича 5.8-жадвалда келтирилган.

Олинган маълумотлар таҳлили қуйидагиларни аниқлашга ёрдам беради.

1. Ўрганилиши керак бўлган боб ёки бўлимни ташкил этувчи мавзулар бўйича шу боб ёки бўлим учун ажратилган ўқув соатини тақсимлашга аниқлик киритиш ёки олий ўқув юртида ўрганилиши керак бўлган у ёки бу мавзуни баён этиш мазмунини қай даражада бойитиш зарурлиги маълум бўлади.

2. “Ритмлик” мезони орқали олий ўқув юртларида автоматлаштирилган ёки марказлаштирилган ҳолда фан бўйича алоҳида гуруҳдаги жорий ўзлаштириш қай даражада эканлигига оид кўрсаткичга эга бўлинади.

3. Мавзунинг мураккаблик коэффициентидан эса талабанинг ўрта махсус ўқув юртида мавзуларни қай даражада ўзлаштирилганлигини билиш ва шу асосда кенгроқ баён қилиниши керак бўлган мавзуларни ажратиш мумкин бўлади.

5.7-жадвал

Мавзу 1-жадвал	Биология ва ҳаёт хавфсизлиги		Касб таълими		Кимё ва экология	
	К _р	К _у	К _р	К _у	К _р	К _у
Боб бўйича , шу жумладан:	0.25	0.67	0.27	0.68	0.24	0.56
а) юзани ҳисоблаш;	0.30	0.70	0.32	0.70	0.29	0.62
б)ҳажмни ҳисоблаш	0.24	0.65	0.25	0.66	0.24	0.54

5.8-жадвал

Мавзу	Биология ва ҳаёт хавфсизлиги	Касб таълими	Кимё ва экология
	К _М	К _М	К _М
“Аниқ интеграл ёрдамида юза ва ҳажмларни ҳисоблаш”, шу жумладан:	0.88	0.71	0.84
1) тўғри бурчакли координаталар системасида юзани ҳисоблаш;	1.21	1.90	0.95
2) қутб координаталар системасида юзани ҳисоблаш;	0.60	0.60	0.65
3) тўғри бурчакли координата системасида ёй узунлиги;	1.09	0.97	0.86
4)Қутб координаталар системасида ёй узунлиги;	0.69	0.65	0.66
5) айланма жисм ҳажми.	0.57	0.55	0.51

2.3. Талабалар аудиториядан ташқари мустақил таълимнинг ўқув жараёнига таъсири

“Таълим тўғрисида” ги қонун ва “Кадрлар тайёрлаш миллий дастури” [45] талаблари асосида маънавий етук ва жаҳон андозалари талабларига жавоб бера оладиган кадрлар тайёрлаш учун олий ўқув юртларида талабаларни мустақил ишлашга йўналтириш ва уни ташкил этиш масаласи таълим тизимини ислоҳ қилишнинг асосий шартларидан биридир. Бу талаблар олий ўқув юртларида тайёрланаётган мутахассис кадрларнинг мустақил фикрлаши ва ўз соҳаси бўйича мустақил қарорлар қабул қилиши учун ўта муҳим аҳамиятга эга.

Дидактик нуқтайи назардан талабаларнинг мустақил таълимини ташкил этиш мураккаб педагогик жараён бўлиб, талабанинг ақлий меҳнат қила олиши, дарсдан ташқари бўш вақтини тўғри тақсимлаши ва ундан самарали фойдаланиши, ўз ишига ижодий ва тўғри ёндоша олиши, танлаган мутахассислиги бўйича муаммоларни яхши тушуна билиши ва бошқа шу каби бир қатор шахс хусусиятлари билан боғлиқ жиҳатларни ўз ичига олади.

Олий ўқув юртларида мустақил таълимни ташкил этишга оид илмий педагогик манбалар тахлили шуни кўрсатадики, талабаларнинг мустақил ишини ташкил этиш муаммоси педагогик-психологик нуқтайи назардан етарли даражада бир мунча пухта ишланган. Лекин фан ва технологиялар жадал ривожланаётган бугунги кунда ижтимоий-иқтисодий соҳаларда бўлаётган туб ўзгаришлар ҳар бир соҳа бўйича таълим олувчиларнинг ўз мутахассисликлари бўйича билим савияларини узлуксиз ошириб боришини талаб этади. Шу нуқтайи назардан таълим йўналиши бўйича ўқитувчи кадрлар тайёрлашда мустақил таълим ва уни ташкил этиш муаммоси биргина дидактик масала бўлмасдан, балки кадрлар тайёрлашнинг долзарб муаммоларидан бири ҳисобланади.

Ўқитувчи кадрлар тайёрлаш жараёнида талабалар мустақил таълимини ташкил қилиш икки ёқлама, ҳам тарбиявий, ҳам таълимий, яъни таҳсил олувчининг билим олишга бўлган қизиқишини кучайтириш хусусиятига эга бўлиши лозим. Тарбиявийлик хусусияти шундан иборатки, бунда талаба ўз билимини ошириш ва мустаҳкамлаш учун ўзини-ўзи тарбиялаб боради, яъни мутахассис сифатида шаклланиши учун билим олишнинг янги қирраларини

тушуниб етади. Билим олишга бўлган қизиқишни кучайтириш хусусиятига эса талабада бўш вақтдан самарали фойдаланган ҳолда мустақил таълим жараёнининг шаклланишига олиб келади. Шунинг учун ҳам мустақил таълим ўқитишнинг барча кўринишлари ва ўқув жараёнининг муҳим қисми ҳисобланади.

Психолог олимлар фикрига кўра, талаба у ёки бу муаммони маъруза ва амалий машғулотларда олган назарий ва амалий билимларига асосланиб ўрганса, ўрганилаётган муаммонинг 70-80% и узок вақт унинг хотирасида сақланиб қолади. Аммо олий ўқув юртларида, асосан аудитория таълимига, яъни маъруза ва амалий машғулотларга кўпроқ эътибор берилиб, аудиториядан ташқари мустақил таълимга етарлича эътибор берилмас эди.

Мустақил таълимнинг хусусиятларини ўрганиш борасида олиб борилган педагогик тадқиқотлар шуни кўрсатадики, таълим оловчининг ижодий фикрлаш қобилиятини шакллантириш ва ривожлантириш, унинг билим олишга бўлган қизиқишини тарбиялаш ва ривожлантириш, муаммолар бўйича илмий фикрлай олишини ривожлантириш, объектив борлиқни тасаввур эта олишига у ёки бу шаклда ташкил этилган мустақил таълим ижобий таъсир кўрсатар экан. Лекин, аудиториядан ташқари мустақил таълимни ташкил қилиш бирмунча мураккаб жараён. Чунки, бу жараёнда талаба мустақил ҳолда фанлар бўйича илмий-методик ва ўқув адабиётларидан фойдаланган ҳолда, ўз билимини ошириб боради. Олий таълим тизимида 1998/99 ўқув йилидан бошлаб мустақил таълим жорий этилди ва унга бўлган эътибор кучая бор. **Мустақил таълим ўқув режасига киритилган фанга ажратилган ўқув соатининг маълум бир қисми бўлиб, унда белгиланган материалларни талабалар томонидан мустақил ўзлаштиришига мўлжалланган.** Ўзбекистон Республикаси олий таълим тизимини ислоҳ қилиш бўйича меъёрий ҳужжатларда мустақил таълим ўқув жараёнининг аудиториядан ташқари шакли эканлиги ва у тегишли кафедра томонидан назарий ёки амалий кўринишда ташкил этилиши мумкинлиги қайд этилган.

1999 йилда тасдиқланган олий педагогик таълимнинг 24 йўналиши бўйича бакалаврият намунавий ўқув режалари таҳлили шуни кўрсатадики, мустақил таълимга ажратилган ўқув соати умумий ўқув соатининг 11-25% ини ташкил этади (В 140100, В 140200, В 142200 ва бошқа ўқув режалар).

2002 йилда тасдиқланган ҳозирги кунда амалда бўлган ушбу ўқув режаларда эса аудиториядан ташқари мустақил таълим учун вақт бюджети 1:0,5 каби нисбатда, яъни барча блоклардаги фанлар учун бир хил, мустақил таълим учун ажратилган ўқув соати шу фан бўйича амалий машғулот учун ажратилган ўқув соатига тенг қилиб олинган. Гуманитар ва ижтимоий фанлар блокидаги фанларга мустақил таълим учун ажратилган ўқув соати 24-30 соатни ташкил этади. Ушбу ажратилган ўқув соатларда талабалар фан ўқув дастурига кўра 15-20 тадан ўқув адабиётларини ишлаб чиқиши керак. Бундай ҳолат, албатта, ўқув дараёнини оптимал ташкил қилишга ва таълим олувчилар билим сифатига салбий таъсир кўрсатиши мутахассислар томонидан қайд этилган.

Биз олий ўқув юртлирида талабаларнинг аудиториядан ташқари мустақил таълимини ташкил қилишнинг амалдаги шаклининг ўқув жараёни сифатига таъсирини ўрганиш муаммолари билан шуғулландик. Тадқиқот объекти сифатида Абдулла Қодирий номидаги ЖДПИ физика-математика факультетида 150 талаба иштирок этди. Дастлаб, ҳар бир талабанинг семестр давомида фанлар бўйича рейтинг тизими асосида ўзлаштириши тўғрисидаги маълумотлар тўпланди. Сўнгра анкета сўрови асосида талабалардан ҳар бир талабанинг семестр давомида шу фанларга сарфлаган аудиториядан ташқари кунлик, ҳафталик ва семестр давомидаги вақт бюджети тўғрисидаги маълумотлар тўпланди.

Фалсафа фани бўйича тўпланган статистик маълумотлар 5.9- жадвалда ва математик анализ фани бўйича тўпланган статистик маълумотлар эса 5.10- жадвалда келтирилган.

5.9-жадвал

№	Талабалар	Аудиториядан	Хафталик	Семестр давомидаги	Ўзлаштириш
---	-----------	--------------	----------	--------------------	------------

	сони	ташқари вақт бюджети	ўртача вақт бюджети	ўртача вақт бюджети	(%)
1	50	0.5	3	60	56
2	25	1	4	80	62
3	25	2	10	200	70
4	45	2.5	12	250	76

5.10-жадвал

№	Талабалар сони	Аудиториядан ташқари вақт бюджети	Хафталик ўртача вақт бюджети	Семестр давомидаги ўртача вақт бюджети	Ўзлаштириш (%)
1	50	0.5	3	60	48
2	25	1	4	80	52
3	25	2	10	200	60
4	45	2.5	12	250	68

Бошқа фанлар учун ҳам худди шундай маълумотлар тўпланган. Тўпланган маълумотларга статистик жиҳатдан ишлов бериш учун дастлаб корреляцион муносабат орқали талаба ўзлаштиришининг унинг аудиториядан ташқари вақтига боғлиқлик даражаси ўрганилди. Корреляция коэффиценти

$$r = \frac{(y_1 - y)(t_1 - t)}{\sqrt{(y_1 - y)^2 (t_1 - t)^2}} \quad (5.13)$$

формулага асосан топилди.

Математик анализ учун $r = 0,75$ ва фалсафа учун $r = 0,82$ бўлиб, бу ўзлаштириш ва мустақил таълим учун ажратилган вақт бюджетининг бири-бирига бевосита боғлиқлигини кўрсатди. Бошқа фанлар бўйича ҳам худди шундай коэффицент топилган.

Бу ерда y – талабанинг муайян фан бўйича ўзлаштириш даражаси, t – унинг шу ўзлаштиришга эришиши учун аудиториядан ташқари мустақил таълим учун сарфлаган вақти. Сўнгра эса талабанинг фанни ўзлаштириш учун аудиториядан ташқари мустақил таълим давомида сарфлаган вақтининг ўзлаштиришга таъсири регрессион муносабат орқали ўрганиб чиқилди. Бунинг

учун тўпланган маълумотлар асосида қуйидаги кўринишдаги регрессион тенглама қаралди:

$$y = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots \quad (5.14)$$

Математик анализ бўйича ўзлаштиришни аниқлаш учун қурилган регрессия тенгламаси:

$$y = 40 + 1,75t \quad (5.15)$$

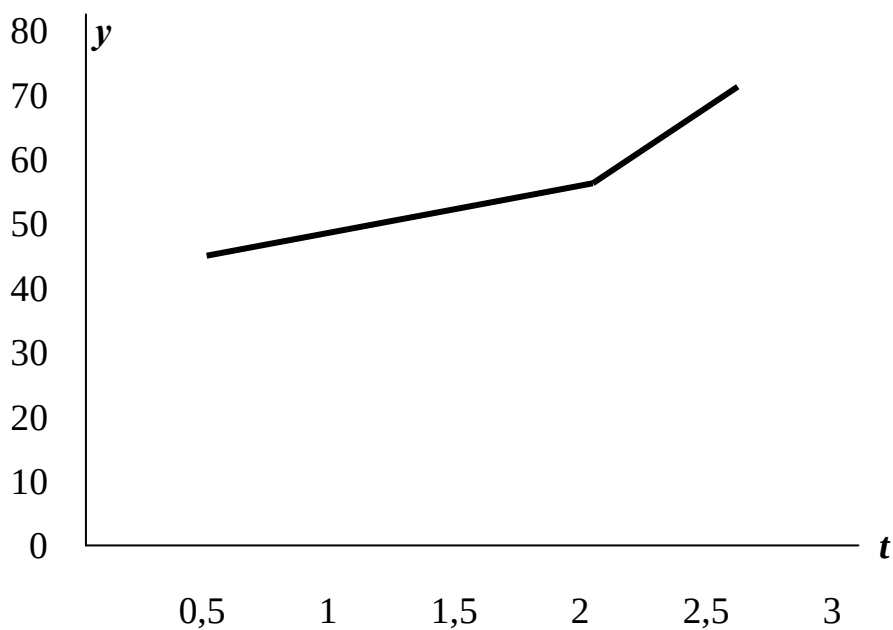
фалсафа учун қурилган регрессия тенгламаси эса:

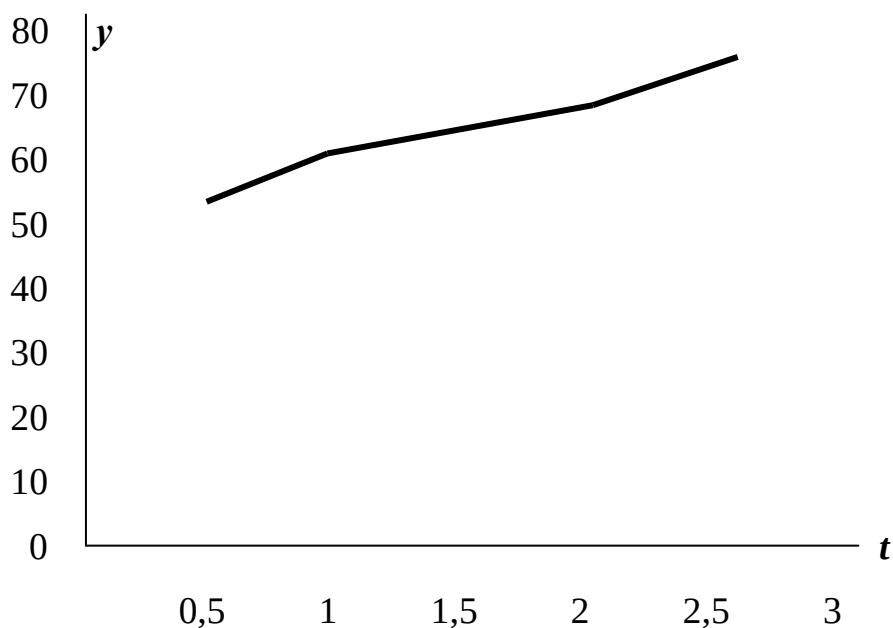
$$y = 60 + 2,05t \quad (5.16)$$

каби кўринишда.

Уларнинг график девициялари 5.3-расм(математик анализ бўйича) ва 5.4-расм(фалсафа учун)да келтирилган.

5.3-расм





Кўрилган регрессион муносабат шу нарсани кўрсатдики, мустақил таълим учун ўртача бир кунда 1 соат вақт сарфлаган талабаларнинг ўзлаштириши анча паст, ўртача 2-2,5 соат вақт сарфлаган талабаларнинг ўзлаштириши эса бир мунча юқори.

Бу ҳолат мустақил таълим талаба билими сифатига таъсир қилувчи муҳим омиллардан бири эканлигини тасдиқлайди.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Корреляция сўзи(термини)нинг луғавий маъносини айтинг.
2. Корреляцион анализ методининг туб моҳияти нимада?
3. Регрессия тенгламаси нимани ифода қилади?
4. “Анъанавий” ва “қатъий” назоратлар қандай фарқланади?
5. Мураккаблик коэффициенти қандай имкониятларни беради?

Педагогик тадқиқотлар(рефератлар, маърузалар, курс ва битирув малакавий ишлар) учун мавзулар

1. Мактаб алгебра курсида функциялар ва графиклар мазмунли-методик йўналишини баён қилишда узвийлик.
2. Функциянинг лимити ва унинг масалалар ечишга қўллашда узвийлик.
3. Мавзулар ўртасидаги узвийликни баҳолаш(ҳар бир синф учун алоҳида-алоҳида).

4. Мавзуни мустаҳкамлашда омилларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш(ҳар бир синф учун алоҳида-алоҳида).

5. Номутахассислик йўналишидаги академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари математика курсида узвийлик(ихтисослик соҳалари бўйича).

6. Мактаб математикасидан синфдан ташқари ишларни ўтказишда узвийлик(вертикал ва горизонтал йўналишлар бўйича).

Тавсия этилган адабиётлар рўйхати

1. Психолого-педагогические проблемы высшей школы. Вып. 4. – Л., 1973.

2. Глас Дж., Стенли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии.-М.: Прогресс . – 1976.-495 с.

3. Преемственность в обучении математике. Пособие для учителей. Сборник статей // Просвещение – 1978.- 239с.

4. Алимов Н.А. Математик таълим турлари орасидаги узвийликни таъминлаш // Халк таълими. -2002. -№5.- Б.76-78.

5. Алимов Н.А. Математика дарслигида мавзулараро узвийликни таъминлашда факторларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш // Халк таълими.- 2004.-№3-Б.83-86.

6. Алимов Н.А. Мавзуни мустаҳкамлашда факторларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш // Халк таълими-2004.№6-Б.72-74.

У ч и н ч и б о б

ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ ЁРДАМИДА ТАЪЛИМДАГИ УЗВИЙЛИКНИ АМАЛГА ОШИРИШ

3.1.Ўйинлар назарияси элементлари

Табиат ва жамиятда, хусусан, педагогик фаолиятда шундай ҳодисалар учраб турадики, унда иштирок этувчи томонларнинг мақсадлари турлича бўлиб, улар мақсадаларига эришиш учун ҳар хил йўл тутадилар. Бундай ҳолатлар зиддиятли ҳолатлар деб аталади ва улар билан ўйинлар назарияси шуғулланади. Зиддиятли ҳолатларда, унда иштирок этувчи томонлар, уларнинг мақсадлари ва унга эришиш йўллари ҳамда улардан келиб чиқадиган натижалар аниқланган бўлиши керак. Албатта, бунда зиддиятли ҳолат қандай натижага олиб келиши, унда иштирок этувчи томонларнинг ўз мақсадларига эришишдаги фойдаланадиган йўллари (стратегияларига) боғлиқ. Демак, томонлар ўз мақсадларига эришиш учун ўзларига мақбул йўлни танлашади. Лекин, натижа бошқа иштирок этувчи томонларга ҳам боғлиқ бўлганлиги сабабли, улар ўртасида қарама-қаршилик вужудга келиши мумкин. Одатда бу қарама-қаршилик томонлар танлаган йўллари (стратегиялари) натижаси бўлган, уларни сон билан ифодаланган ютуқлари орқали аниқланади. Бу эса ҳар бир томоннинг бошқа томонлар билан боғлиқ бўлмаган ҳолда йўл тутишига тўғри келади. Шундай зиддиятли ҳолатлар бўлиши мумкинки, бунда бошқа томон (томонлар)нинг қандай йўл тутганлигини билиш муҳим, баъзи ҳолларда бунинг аҳамияти йўқ бўлиши мумкин. Албатта, бунда биринчи ҳолат маъқул бўлиб, унда мақсадга эришиш осонликча амалга оширилади. Иккинчи ҳолатда эса кафолатланган ютуққа олиб келувчи йўлни топиш муҳимдир. Бу мулоҳазалар ҳар бир томонга тааллуқли бўлиб, уни аниқлаб бериш асосий вазифа ҳисобланади.

Ўйинлар назариясида иккинчи, яъни томонлар бир-биридан беҳабар бўлган ҳолат ўрганилади. Демак, бунда асосий масала, томонларнинг кафолатланган ютуғини таъминлаб берувчи йўлларини (стратегияларини)

аниқлаб беришдан иборатдир. Бунинг учун берилган зиддиятли ҳолатнинг математик модели (яъни, микдорий ўлчовлари) тузилади ва кейинчалик шу модел асосида иш кўрилади, яъни кўрилган модель ёрдамида юқоридаги барча саволларга деярли жавоб берилади. Юқорида таъкидлаб ўтилганидек, олинadиган натижа томонларнинг танлаган йўлларига боғлиқ бўлиб, бунда бирор томоннинг натижаси бошқа томоннинг танлаган йўлларига бевосита боғлиқ бўлиб қолади. Бу эса аниқ бир қафолатланган натижани (ютуқни) тайинлашга имкон туғдирмайди. Бундай ҳолатларда табиийки, танланиши мумкин бўлган йўллари бирор частота (эҳтимоллик) билан танлашга тўғри келади. Бундай усул билан танлашлар ўйинлар назариясида **аралаш стратегиялар** деб аталади. Бунинг натижасида (аралаш стратегия киритилиши) томонларнинг ютуқлари ўртача кутилма кўринишида бўлади, яъни бу ютуқ реал мавжуд бўлмаслиги мумкин, лекин математик(ўйин) нуқтайи назардан қафолатланган ютуқ ҳисобланади. Шу қафолатланган ютуқни таъминловчи аралаш стратегиялар оптимал (мукаммал) йўл ҳисобланади. Шу айтилган маълумотларга эга бўлишлик ўйинлар назарияси нуқтайи назардан берилган зиддиятли ҳолат тўла ҳал қилинган ҳисобланади. Лекин бу ечимни амалиётга татбиқ этиш алоҳида мавзу. У билан кейинчалик мисоллар орқали танишиб чиқамиз.

Таъкидлаш жоизки, ўйинлар назариясига аралаш стратегия тушунчаси киритилгандан сўнг зиддиятли ҳолатларни ҳал қилиш масаласи тўла ҳал этилган(у **минимакс** ҳақидаги теорема деб аталади).

3.1.2. Антагонистик ўйинлар

Биз аввалги пунктда зиддиятли ҳолатлар, уларнинг моделлари ва бу билан ўйин тушунчасига келишни қараб чиқдик. Шу моделларнинг бир кўриниши бўлган антагонистик ўйин билан танишиб чиқамиз. Бу ўйин қуйидагилар билан **тавсифланади**:

1) *ўйинчилар (томонлар) сони иккита;*

2) *ўйинчиларнинг стратегиялари (танлаш йўллари) сони чекли сондадир;*

4) ўйин охирида ўйинчилар эришадиган ютуқлар йиғиндисини нолга тенг.

Фараз қилайлик, биринчи ўйинчи i -стратегиясини, иккинчи ўйинчи эса j -стратегиясини танлашган бўлсин. У ҳолда (i, j) жуфтлик ўйин ҳолати деб аталади. Шу билан бирга i ва j сонлари ўйинчиларнинг соф стратегияларини (аралаш стратегиядан фарқини) аниқлайди.

Агар a_{ij} сонлари қуйидаги тартибда

$$\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\\ \vdots\\ a_{m1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{mn} \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

103

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

А жадвалнинг i –сатри ва j –устуни кесишган жойда a_{ij} –биринчи ўйинчининг ютуқ миқдори туради. Шунинг учун А жадвалнинг сатрлари тартиб рақамини биринчи ўйинчининг мос стратегияси деб, худди шундай, А жадвалнинг устун тартиб рақамларини иккинчи ўйинчининг мос стратегиялари дейиш мумкин. Демак, биринчи ўйинчининг i –соф стратегиясига ва иккинчи ўйинчининг j – соф стратегиясига А жадвалнинг i – сатри ва j –устунлари мос келади.

Булардан келиб чиқадики ихтиёрий антагонистик ўйинга бирор жадвални мос қўйиш мумкин экан. Бундай жадвал мос антагонистик ўйиннинг модели бўлиб ҳисобланади. Шу сабабли антагонистик ўйинлар назариясининг асосий натижалари жадвалга боғлиқ бўлиб, бу орқали унга мос зиддиятли ҳолатлар тадқиқоти тўла ҳал бўлади.

3.2. Антагонистик ўйинларни ечиш

Биз юқорида кўрдикки, ихтиёрий антагонистик ўйинга бирор А жадвали мос қўйиш мумкин ва у **ютуқлар жадвали** деб аталади. Шу билан берилган антагонистик ўйинни ечиш жадвали тадқиқ қилишга келтирилади. Бундан кейинги олинadиган барча натижалар фақат жадвалларга тааллуқли бўлиб, бу билан антагонистик ўйинлар ҳам тадқиқ этилган бўлади.

1. Соф стратегияларни таққослаш.

Бизга қуйидаги А жадвалли ўйин берилган бўлсин:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1j}...a_{1e}...a_{1n} \\ \text{---} \\ a_{i1}a_{i2}...a_{ij}...a_{ie}...a_{in} \\ \text{---} \\ a_{k1}a_{k2}...a_{kj}...a_{ke}...a_{kn} \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mj}...a_{me}...a_{mn} \end{pmatrix}$$

1-таъриф. Агар

$$a_{ij} \geq a_{kj} \quad (6.2)$$

тенгсизлик барча $i=1, 2, \dots, n$ ларда ўринли бўлиб, бирорта i -да қатъий бўлса, у ҳолда биринчи ўйинчининг i - стратегияси k -стратегиясидан афзал (устун) дейилади ва $i \propto k$ кўринишида ёзилади.

2-таъриф. Агар

$$a_{ij} \geq a_{ie} \quad (6.3)$$

тенгсизлик барча $i=1, 2, \dots, m$ ларда ўринли бўлиб, бирорта i -да қатъий бўлса, у ҳолда иккинчи ўйинчининг j -стратегияси e -стратегиясидан афзал (устун) дейилади ва $j \propto e$ кўринишида ёзилади.

Айтайлик, $i \propto k$ бўлсин. У ҳолда (6.2) тенгсизлик бажарилади, яъни биринчи ўйинчи i -стратегияси ёрдамида оладиган ютуқлари кам эмас (иккинчи ўйинчи ихтиёрий стратегиясини қўлласа ҳам). Бу дегани биринчи ўйинчи k -стратегиясини қўллаш мақсадга мувофиқ эмас, чунки бунда унинг ютуғи камайиб кетиши мумкин. Шу маънода биринчи ўйинчи k -стратегиясини танламайди. Иккинчи ўйинчи стратегияларига нисбатан ҳам худди шундай мулоҳазаларни айтиш мумкин мумкин.

Қуйидаги мисолни кўрайлик:

1 2 3 4

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.4)$$

Бу жадвали ўйинда биринчи ўйинчининг 3 та $i=1, 2, 3$; иккинчи ўйинчининг эса 4 та $j=1, 2, 3$ стратегиялари бор. Аммо жадвалдан кўриниб турибдики, 2-сатр элементлари 1-сатр элементларидан кичик эмас. Демак, 1-таърифга асосан, га асосан биринчи ўйинчининг иккинчи стратегияси биринчи стратегиясидан афзал, яъни $2 \propto 1$. Шу сабабли биринчи ўйинчи биринчи стратегиясини танламайди, яъни:

$$A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Охирги жадвалда учинчи устун элементлари биринчи устун элементларидан кам эмас, демак 2-таърифга асосан, $1 \leq 4$, яъни:

$$A'' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Бу жадвалнинг охирги устун элементлари биринчи устун элементларидан катта эмас, демак $4 \leq 1$, яъни:

$$A''' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6.5)$$

Охирги (6.5) жадвалда иккала ўйинчилар учун ҳам афзал стратегиялар йўқ.

2. Жадвалли ўйинда мувозанатли ҳолат.

3-таъриф. Агар

$$a_{ijo} \leq a_{iojo} \leq a_{ioj} \quad (6.6)$$

тенгсизликлар барча $i=1, 2, \dots, m$ ва $j=1, 2, 3, \dots, n$ ларда бажарилса, у ҳолда $(i_o; j_o)$ ҳолат A жадвалли ўйиннинг мувозанат ҳолати, a_{iojo} — сони **ўйиннинг баҳоси** деб аталади.

Мувозанат ҳолат шундай ҳолатки, қайси ўйинчи ундан четга чиқса, унинг ютуғи фақат камайиши мумкин. Демак, ўйинчилар учун мувозанат ҳолатни ташкил этувчи стратегияни танлаш мақсадга мувофиқдир.

Исботсиз қуйидаги тасдиқни келтирамиз.

1-тасдиқ. $(i_o; j_o)$ A жадвалли ўйиннинг мувозанат ҳолати бўлишлиги учун

$$a_{i0j0} = \min(1 \leq j \leq n) \max(1 \leq i \leq m) a_{ij} = \max(1 \leq i \leq m) \min(1 \leq j \leq n) a_{ij}$$

тенгсизликларнинг бажарилиши зарур.

Бу тасдиқдан фойдаланиш учун қуйидаги сонларни аниқлаймиз: ҳар бир $i(=1, 2, \dots, m)$ ва $j(=1, 2, 3, \dots, n)$ учун:

$$a_i = \min(1 \leq j \leq n) a_{ij};$$

$$b_i = \min(1 \leq i \leq m) a_{ij}$$

Шундан сўнг

$$V' = \max(1 \leq i \leq m) a_i \text{ ва } V'' = \min(1 \leq j \leq n) b_i$$

сонлари аниқланади. Агар $V' = V''$ тенглик ўринли бўлса, мувозанат ҳолат бор, акс ҳолда ($V' < V''$) мувозанат ҳолат йўқ.

1-мисол.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

жадвалли ўйин берилган бўлсин. Бунда: $a_1 = \min(-1, 0, -2, 3) = -2$, $a_2 = \min(4, 1, 1, 2) = 1$ $V' = \max(-2, 1) = 1$ ва $b_1 = \max(-1, 4) = 4$, $b_2 = \max(0, 1) = 1$, $b_3 = \max(-2, 1) = 1$, $b_4 = \max(3, 2) = 3$, $V'' = \min(4, 1, 1, 3) = 1$ бўлади, яъни $V' = V'' = 1$ бўлиб, бу 1 сони ўйин баҳоси бўлиб, у жойлашган сатр рақами 2 ва устун рақами 3. Демак, (2, 3) кўрилатаётган жадвалли ўйиннинг мувозанат ҳолатидир. Шундай қилиб, бу ўйин ечимга эга ва ўйинчиларнинг оптимал стратегиялари мос равишда 2 ва 3 дир.

2-мисол 2. (2,3) жадвалли ўйин учун

$$a_1 = \min(-3, 0, 4, 2) = -3, \quad a_2 = \min(3, 1, 5, 2) = 1$$

$$a_3 = \min(2, 3, 4, -1) = -1, \quad b_1 = \max(-3, 3, 2) = 3$$

$$b_2 = \max(0, 1, 3) = 3, \quad b_3 = \max(4, 5, 4) = 4$$

$$b_4 = \max(2, 2, -1) = 2, \quad V' = \max(-3, 1, -1) = 1, \quad V'' = \min(3, 3, 4, 2) = 2$$

Демак, $V' < V''$, бундан тасдиқларга асосан (2,3) ўйинда мувозанат ҳолати мавжуд эмас.

Изоҳ. Жадвалли ўйинда мувозанат ҳолати битта ва ундан ҳам кўпроқ бўлиши мумкин.

3. Аралаш стратегия. Ўртача ютуқ.

Биз юқорида кўрдикки, айрим жадвалли ўйинларда мувозанат ҳолати мавжуд бўлмаслиги мумкин экан. Яъни сатр бўйича минимум, устун бўйича максимум жадвал элементи йўқ. Бу ҳолда аралаш стратегия тушунчаси киритилиши орқали масала ечилади.

4-таъриф. Соф стратегиялар устида тақсимланган тўла эҳтимоллик аралаш стратегия деб аталади.

Агар биринчи ўйинчининг аралаш стратегиялари тўпламини S_m билан белгиласак, 4-таърифга асосан:

$$S_m = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\}$$

Худди шундай, иккинчи ўйинчининг аралаш стратегиялари тўпламини S_n билан белгиласак:

$$S_n = \left\{ y = (y_1, y_2, \dots, y_n) : y_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n y_j = 1 \right\} \text{ бўлади.}$$

Таъкидлаб ўтамизки, аралаш стратегиялар тўпламида барча соф стратегиялар ҳам бор. Масалан, биринчи ўйинчининг i -соф стратегияси $x=(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ кўринишда бўлади, бу ерда 1 сони x векторнинг i -компоненти, яъни i -сатр 1 эҳтимоллик билан танланади (эҳтимоллик назарияси тили билан айтганда i -сатрни танлаш муқаррар ҳодисадир).

Фараз қилайлик, биринчи ўйинчи $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ аралаш стратегиясини, иккинчи ўйинчи эса $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ аралаш стратегиясини қўллаган бўлсин, у ҳолда биринчи ўйинчининг ўртача (математик кутилма) ютуғи

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

орқали аниқланади.

Биринчи ўйинчи ютуғи бўлган $v(x, y)$ ни ўз стратегияси x орқали максимум қилишга, иккинчи ўйинчи ютқизиши бўлган $v(x, y)$ ни ўз стратегияси y бўйича минимум қилишга ҳаракат қилишади.

5-таъриф Агар $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$ лар учун

$$v(x, y^*) \leq v(x^*, y^*) \leq v(x^*, y) \quad (6.7)$$

тенгсизликлар барча $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$ лар учун ўринли бўлса, у ҳолда (x^*, y^*) ҳолат $v(x^*, y^*)$ ўйиннинг баҳоси деб аталади.

(6.7) тенгсизликлардан кўриниб турибдики, қайси ўйинчи мувозанат ҳолатини таъминловчи стратегиядан четга чиқса, унинг ютуғи фақат камайиши мумкин.

Ўйинлар назариясида муҳим ва асосий бўлган қуйидаги тасдиқни исботсиз келтирамиз.

2-тасдиқ. Ихтиёрий жадвалли ўйин аралаш стратегиялар тўпламида мувозанат ҳолатга эга.

Ўйинлар назариясида шу нарса аёнки, агар биринчи ўйинчининг i -стратегияси k -стратегиясидан афзал бўлса, мувозанат ҳолатини ташкил этувчи $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*)$ аралаш стратегияда $x_k^* = 0$ бўлади, яъни биринчи ўйинчи ютуқни кам таъминлайдиган стратегияни танламайди ($x_k^* = 0$ бўлса, k -соф стратегия 0 эҳтимоллик билан танланади, яъни умуман у танланмайди дегани).

Ҳудди шунга ўхшаш мулоҳаза иккинчи ўйинчи учун ҳам ўринлидир.

Охирги мулоҳазалардан келиб чиқадики, A жадвалли ўйинда мувозанат ҳолатни (ҳолатлар)ни топиш учун, аввал унинг афзал стратегиларига мос келувчи сатр ва устунларини қолдириш керак экан. Шундан сўнг охирги ҳосил бўлган жадвалли ўйиннинг мувозанат ҳолати (ҳолатлари)ни топиб, етишмаётган компонентларни ноллар билан тўлдириш керак. Бу билан биз бошланғич жадвалли ўйиннинг мувозанат ҳолати (ҳолатлари)ни топган бўламиз.

3-мисол. (6.4) орқали берилган жадвалли ўйинни қарайлик. Ундаги биринчи ва иккинчи ўйинчиларга мос афзал стратегиялар 2,3 ва 2,4 бўлган эди ((2,4) га қаранг).

Агар охирги ((2,4)) A''' жадвалли ўйиннинг мувозанат ҳолати (x^*, y^*) бўлса, улар $x^* = (x_2^*, x_3^*)$, $y^* = (y_2^*, y_4^*)$ кўринишда бўлади. Юқоридаги хулосага асосан бошланғич A жадвалли ўйиннинг мувозанат ҳолати эса $x^* = (0, x_2^*, x_3^*)$, $y^* = (0, y_2^*, 0, y_4^*)$ кўринишга келади.

4. 2×2 – жадвалли ўйини.

Биз бу ерда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

кўринишдаги жадвалли ўйинни кўриб чиқамиз. Демак, бу ўйинда ҳар бир ўйинчининг иккитадан соф стратегиялари бор.

Маботдо

$$\max\{\min(a_{11}, a_{12}), \min(a_{21}, a_{22})\} = \min\{\max(a_{11}, a_{12}), \max(a_{21}, a_{22})\} \quad (6.8)$$

тенглик бажарилса, у ҳолда тасдиқларга асосан берилган ўйиннинг мувозанат ҳолати бор ва ўйин ечилган ҳисобланади. Шунинг учун да фараз қиламиз, (6.8) тенглик ўринли бўлмасин ($V' < V''$).

2-тасдиққа асосан, аралаш стратегиялар тўпламидан мувозанат ҳолатини ташкил этувчи (x, y) жуфтлик топилади ва унга мос келувчи ўйин баҳоси V аниқланади.

Энди биз $x=(x_1, x_2)$ ва $y=(y_1, y_2)$ векторларни топиш билан шуғулланамиз.

Бунинг учун

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = v$$

тенгликдан, унинг ёйилмаси бўлган

$$(a_{11}y_1 + a_{12}y_2)x_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)x_2 = v \quad (6.9)$$

тенгликдан фойдаланамиз. Афзал стратегиялар йўқ бўлганлиги сабабли $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ бўлади.

Агар

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \geq v;$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \geq v;$$

тенгсизликларнинг бирортаси қатъий бўлганда эди, мос равишда ёки $x_1=1$ ёки $x_2=1$ деб биринчи ўйинчи v дан катта ютуққа эга бўлган бўлар эди. Бу эса v ўйин баҳоси эканлигига зид, шу сабабли $a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \geq v$; ва $a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \geq v$;

бўлади. Бу ерда ҳам агар бирорта тенгсизлик қатъий бўлганда тенгсизликларни мос равишда x_1 ва x_2 мусбат сонларига кўпайтириб ва қўшиб (6.9) –тенгликка нисбатан карама-қаршиликка келган бўлар эдик. Демак:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 &\geq v; \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 &\geq v; \end{aligned} \quad (6.10)$$

тенгламалар системасига эга бўламиз.

$$y_2 = 1 - y_1 \quad (6.11)$$

эканлигидан фойдаланиб, (6.10) , (6.11) дан y_1 , y_2 ва ўйин баҳоси v ни аниқлаймиз.

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (6.12)$$

Худди шунга ўхшаш мулоҳаза юритиб, $x=(x_1, x_2)$ ни аниқлаймиз.

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \quad (6.13)$$

Шундай қилиб қуйидаги тасдиққа эга бўламиз:

3-тасдиқ. 2×2 жадвалли A ўйинда ўйинчиларнинг оптимал стратегиялари (мувозанат ҳолати) ва ўйин баҳоси (6.11), (6.12) формулалар орқали аниқланади.

5. 2×2 ва $m \times 2$ жадвалли ўйинлар.

Биз $2 \times n$ жадвалли ўйинни ечиш билан шуғулланамиз, $m \times 2$ жадвалли ўйин ҳам юқоридагига ўхшаш мулоҳазалар орқали ўрганилади.

Бизга

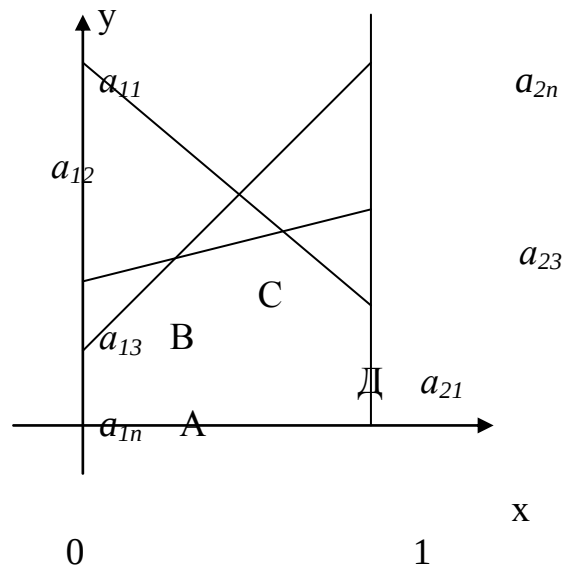
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

кўринишдаги жадвалли ўйин берилган бўлсин. Демак, биринчи ўйинчида 2 та иккинчи ўйинчида n та соф стратегиялар бор.

Фараз қилайлик, бу кўринишда ўйинчиларнинг афзал стратегиялари бўлмасин. Бундай ўйинларни ҳал қилиш(ечиш)да график усул қулайлик туғдиради, яъни, $x=0$ ва $x=1$ вертикал тўғри чизиқларини xOy Декарт координаталар системасида чизиб олинади. Шундан сўнг $x=0$ ва $x=1$ тўғри

чизиклардан мос равишда a_{11} , a_{21} ; a_{12} , a_{22} ; a_{1n} , a_{2n} нуқталар олиниб, улар кесмалар билан туташтирилади(6.1-расм).

6.1-расм



Бу кесмаларнинг пастки қисми бўлган ABCD синиқ чизикнинг энг юқори нуқтаси C танлаб олинади. Шу C нуқтадан ўтувчи кесмаларнинг учларига мос қўйилган сонлар ёрдамида 2x2 жадвалли ўйин A' тузилади.

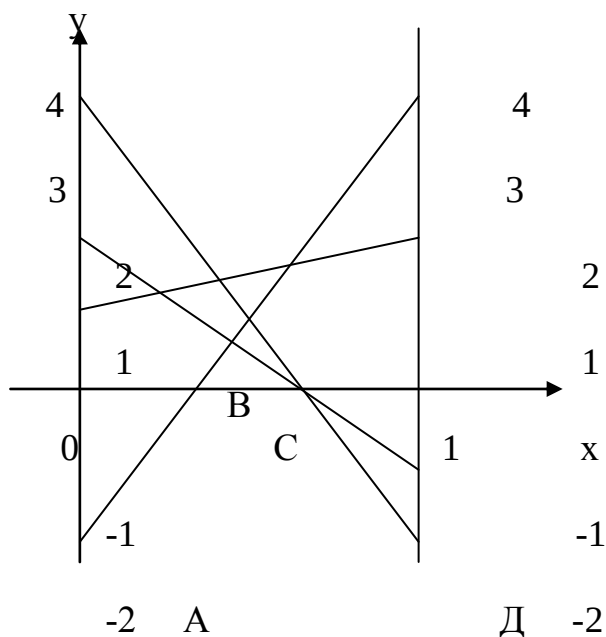
$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Бу жадвалли ўйин юқоридаги 4-пунктдаги усул билан ечилади ва иккинчининг стратегияси мос компонентларини ноллар билан тўлдириб кенгайтирилади.

4-мисол. Бизга

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-2 & 4 \\ 2-1 & 4-2 & \end{pmatrix}$$

жадвалли ўйин берилган бўлсин. Бу ўйинни график усулда ечамиз (6.2-расм).



2-расмдан кўриниб турибдики, С нукта $(-2,4)$ ва $(2,-1)$ кесмаларнинг кесишиш нуктасидир. Шу сабабли

$$A' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

2x2 жадвалли ўйинга эга бўламиз. (6.11) ва (6.12) формулага асосан ўйинчиларнинг оптимал стратегиялари ва ўйин баҳоси v ни аниқлаймиз

$$x_1 = \frac{5}{9}, \quad x_2 = \frac{4}{9}, \quad y_1 = \frac{2}{3}, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad v = \frac{2}{3},$$

бунда А жадвалли ўйин учун мувозанат ҳолатини ташкил этувчи оптимал стратегиялар ҳамда ўйин баҳоси қуйидагича бўлади.

$$x = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right), \quad y = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad v = \frac{2}{3}.$$

3.3. Ўйинлар назариясини таълим жараёнида қўллашнинг айрим муаммолари

Педагогик фаолиятда нафақат тарбия ва таълим қонун-қоидалари, балки уларни муваффақият билан қўллаш ҳам, албатта, муҳим ҳисобланади. Бу

ўқитувчининг билими, маҳорати, куч-қуввати, ҳалоллиги ва виждонлилигига боғлиқ.

Ҳақиқатда эса ўқитувчининг энг яхши педагогик қарор, усул ва йўл тутиши одатда педагогик ҳолатларнинг мураккаблиги ва уларнинг тасодифий ходисалар бўлишлиги билан мураккаблашади.

Бу муаммоларга илмий жиҳатдан ёндошишда биз уларни сунъий равишда тажриба, корреляцион таҳлил ёки кибернетик ўхшашлик томонларини, хоссаларини ёки боғланишларини ажратиб ўрганамиз. Аслида эса булар ўзаро жуда ҳам бир-бири билан боғланган ва зиддиятли ҳолатларда бўлади. Бундан шундай муаммо келиб чиқади: салбий натижаларни камайтириш учун тарбиявий ўқиш тизимини қандай режалаштириш лозим.

Охирги пайтларгача бундай масалаларни ечиш фақат субъектив қараш, ахборотлар орқали, мутахассислар маслаҳати, ўз мантиқига, интуиция ва тажрибаларига асосланиб олиб борилар эди. Бундай ечим қабул қилувчининг савиясига қараб, озми-кўпми тўғри, озми-кўпми ҳақиқий энг яхши ечимга эга бўлиши мумкин эди. Қабул қилинган ечимни баҳолаш натижага қараб аниқланар эди. Лекин натижани баҳолай оладиган мезоннинг йўқлиги сабабли баҳолаш ҳар вақт ҳам амалга оширилмас эди.

Педагогик фаолиятнинг мураккаблиги, айниқса “информацион портлаш” жараёнида ахборотлар оқимининг сезиларли даражада ўсганлиги, режаларни сифат орқали, яъни мантиқ, интуиция ва тажрибага асосланиб баҳолаш ишонарли бўлмай қолди. Шу сабабли, бундай масалаларни ечиш учун илмий асосланган усул(метод)лар яратиш давр тақозоси бўлиб қолди.

Бундай заруриятни ўзида акс эттирган математиканинг янги соҳаси – **жараёнларни тадқиқлаш фани** вужудга келди. Бу фан яратган сонли моделлар ва методлар илмий режалаштириш ва турли ҳаракат фаолиятларини тартибга солишда муҳим роль ўйнайди.

Бу фаннинг таъсир доирасидан фақат педагогик фаолият четда қолиб кетди. Лекин унинг моделлари ва методларини тарбия ва таълим жараёнларини ташкиллаштиришга татбиқ этилиши муҳим аҳамиятга эга бўлиб, кўп

муаммоларни ижобий ҳал этилишига олиб келди. Бу иш юқорида айтиб ўтилган камчиликни бартараф этишга бағишланган.

Албатта, бирор ўқув усулини қўллаш натижаси ўқувчилар таркибига боғлиқ равишда турлича бўлади. Масалан, машқларни ўзлаштириш ўқувчиларнинг хотирасига боғлиқ бўлиб, хотираси кучли ва кучсиз ўқувчиларда натижалар мос равишда яхши ва ёмон бўлиши мумкин.

Статистик таҳлил бу омилнинг таъсирини сонли ифодалашга имкон беради. Яъни айнан шу нарса аён бўлдики, бирор материални (маълумотни) ўзлаштириш учун маълум сондаги такрорланишлардан сўнг хотирага 25%, машқлар сонига 56% боғлиқ бўлар экан. Бундан келиб чиқадики, хотираси кучсиз ўқувчиларни етарли билимга эга қилиш учун бир хил типдаги машқларни етарлича такрорлаш зарур.

Аммо ҳар вақт ҳам бундай йўл тутиш айрим тоифадаги ўқувчиларга салбий таъсир этиб, уларнинг ўқишга бўлган қизиқишини сўндириши мумкин ва бу билан унинг, синфнинг ўзлаштириш натижалари пасайиб кетади.

Шундай қилиб, бунда ўзига хос қарама-қаршилик ёки ўйинлар назарияси атамаси билан айтиладиган бўлса, зиддият пайдо бўлади. Демак, бунда машқларни такрорлаш усули айрим ҳолларда (такрорлашни ёқтирадиган ўқувчилар етарли бўлган синфда) умумий натижани яхшилайти, бошқа ҳолларда (такрорлашни ёқтирмайдиган ўқувчилар етарли бўлган синфларда) натижа салбий бўлиши мумкин.

Педагог учун бундай зиддиятли ҳолатларда шундай йўлни стратегияни аниқлаб бериш лозимки бу билан у кафолатланган ўртача яхши натижага эришсин. Шу ўхшаш масалаларни ечиш усуллари ўйинлар назарияси аниқлаб беради.

Юқорида биз танишиб чиқдикки, ўйинда қарама-қарши томонлар бўлиб, улар бирор зиддиятли ҳолатда иштирок этувчилар (томонлар)дир. Томонларнинг ихтиёрий танлаган йўллари стратегиялар деб аталади. томонларнинг ҳар бир танлаган стратегияларида бирор томон ютса, иккинчи томон ютқазади. Бу ютуқ ва ютқазиш катталиги **тўлов** деб аталади. Зиддиятда

қатнашувчи томонларнинг кафолатланган ютуқ ва ютқазишлари **ўйин баҳоси** деб аталади.

Биз юқорида кўрган ўқучиларга билим бериш билан яхши натижага эришиш жараёнини ўйин нуқтайи назардан кўриб чиқиш мумкин. Бунинг учун биринчи ўйинчи сифатида ўқитувчини, иккинчи ўйинчи сифатида ўқувчилар(синф)ни олиш мумкин. Бунда ўқитувчи (биринчи ўйинчи) ўз усуллари ёрдамида билимни мустаҳкамлашга ўқувчилар (иккинчи ўйинчи) эса турли тоифадан эканликлари билан, бунга қаршилиқ кўрсатишади, яъни бундан зиддият ҳолати вужудга келади.

3.4. Мавзулар ва машқлар узвийлиги

Масалан, ўқитувчи билимни мустаҳкамлаш учун бир хил туркумдаги машқлардан фойдаланиши мумкин, бу унинг биринчи соф стратегияси бўлади. Иккинчи томондан ўқитувчи ўқувчиларнинг билимини мустаҳкамлаш учун фақат турли туркумдаги машқлардан фойдаланиши мумкин, бу унинг иккинчи соф стратегияси бўлади.

Бунда ҳар бир ўқувчининг оладиган билим даражаси, унинг қайси тоифага тегишли эканлигига боғлиқ. Айтайлик, барча ўқувчиларга ўтилган мавзунини ўзлаштириш учун ўртача 12 та машқ бажариш етарли бўлсин. Агар ўқитувчи биринчи соф стратегияни танласа, яъни мавзунини мустаҳкамлаш 12 та бир туркумдаги машқларни бажариш орқали амалга оширилса, тажрибалар шуни кўрсатадики, ёд олишга мойил ўқувчилар мавзунини тўла ўзлаштиради. Лекин бир хиллиликни ёқтирмайдиган тоифадаги ўқувчилар эса мавзунини ўртача 80% га ўзлаштирадилар.

Агар ўқитувчи иккинчи соф стратегияни танласа, яъни мавзунини мустаҳкамлашни 12 та турли туркумдаги масалаларни ечиш орқали амалга оширилса, биринчи тоифадаги ўқувчиларга зиён етказди. Улар бу каби тезкор ўзгаришларга бардош беролмайдилар. Ушбу усулда биринчи тоифадаги ўқувчиларнинг мавзунини ўртача ўзлаштириши 60% ни , иккинчи тоифадаги

ўқувчиларники эса 100% ни ташкил этади. Биз юқоридагиларни бир жадвалга келтирсак, қуйидагига эга бўламиз:

Ўқувчилар

		1	2
Ўқитувчи	1	100	70
	2	60	100

Бу жадвал юқорида баён қилинган ҳолатда ўқитишни режалаштиришда ўқитувчи дуч келган зиддиятли ҳолатни моделлаштиради. Ундан кўриниб турибдики, биринчи ва иккинчи тоифали ўқувчилар сони нисбати ўқитувчи танлаган стратегия натижасига таъсир кўрсатади. Масалан, агар синфда 25 нафар биринчи тоифали ва 10 нафар иккинчи тоифали ўқувчи бўлса, ўқитувчининг биринчи стратегияси 35 нафар ўқувчидан $\frac{25 \cdot 100 + 10 \cdot 70}{100} = 32$ нафари ўзлаштирувчи, иккинчи стратегияси эса 35 нафари ўқувчидан $\frac{25 \cdot 60 + 10 \cdot 100}{100} = 25$ нафар ўзлаштирувчи натижаларни беради. Ўз-ўзидан тушунарлики, бу ҳолда ўқитувчининг биринчи стратегияси яхши натижа бермоқда.

Агар синфда 5 нафар биринчи ва 30 нафар иккинчи тоифали ўқувчилар бўлса, натижа бутунлай бошқача бўлади: ўқитувчининг биринчи стратегиясида 35 нафар ўқувчидан 26 нафар ўзлаштирувчи, иккинчи стратегиясида 35 нафар ўқувчидан 33 нафар ўзлаштирувчи бўлади. Бу ерда албатта иккинчи стратегия самаралироқ. Демак, биринчи ва иккинчи тоифали ўқувчиларнинг турли нисбатларида самарали усуллар ҳам турлича бўлиб чиқмоқда.

Ўқитувчига турли синфларда дарс ўтишга тўғри келади. Демак, биринчи ва иккинчи тоифали ўқувчилар сони ҳам турлича. Шундай экан, ўз навбатида, дарсни режалаштириш ҳам турлича бўлади. Буни амалга ошириш ҳамма ўқитувчининг ҳам қўлидан келавермайди. Шу муносабат билан қуйидаги масалани ечиш зарурати туғилади. Биринчи ва иккинчи стратегияларнинг шундай бирга олиб бориш(яъни, уйғунлигини таъминлаш) усули топилсаки,

Ўқитувчи уни ихтиёрий синфга қўллаганда етарли даражада яхши натижа берсин. Ўйинлар назарияси айнан шундай масалаларни ечиш имкониятини беради. Агар биринчи ва иккинчи стратегияларни бирга қўшиб олиб борилиши аралаш стратегия деб аталишини эсласак, юқоридаги масала қуйидаги кўринишни олади: ўқитувчига ўқувчиларнинг мумкин бўлган ихтиёрий аралаш стратегиялари учун шундай оптимал аралаш стратегия топилсинки, у энг яхши натижани таъминласин.

Бу масалага (6.13) формулани қўллаш орқали қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$x_1 = \frac{4}{7}, \quad x_2 = \frac{3}{7}, \quad v = 82,8.$$

x_1 ва x_2 частоталарнинг нисбатини оламиз $\frac{4}{7} : \frac{3}{7} = 4:3$, бу учта турли туркумдаги машқларнинг ҳар бирини бир хил туркумдаги 4 та машқ ёрдамида беришни англатади. Яъни бу учта турли туркумдаги машқларнинг ҳар бирини 4 мартадан такрорлаб бериш керак дегани. Бу ерда ўқитувчининг биринчи тоифадаги ўқувчиларга мос натижаси $\frac{4 \cdot 70 + 3 \cdot 100}{100} = 82,8\%$ ни, иккинчи тоифадаги ўқувчиларга мос натижаси ҳам $\frac{4 \cdot 70 + 3 \cdot 100}{100} = 82,8\%$ ни ташкил этади. Булардан келиб чиқадики, мақсадга эришилди. Яъни ҳар иккала тоифадаги ўқувчиларда бир хил, яъни 82,8% ўзлаштиришга эришилди.

Агар ушбу стратегияни 40% биринчи, 60% иккинчи тоифадаги ўқувчилари бўлган синфга қўлланса натижа қуйидагича бўлади:

$$\frac{40 \cdot 4 + 20 \cdot 3}{4 + 3} = 31,4\%, \quad \frac{48 \cdot 4 + 60 \cdot 3}{4 + 3} = 51,4\%, \quad 31,4 + 51,4 = 82,8\%$$

ва демак, умумий ўзлаштириш бу ҳолда ҳам 82,8% ни беради.

Энди қуйидаги мисолни қарайлик. Ўқитувчида юқоридаги иккита соф стратегия бўлиб, ўқувчилар уч тоифага бўлинсин.

Корреляцион таҳлил шуни аниқладики, агар ўқитувчи ўзининг соф стратегияларини қўлласа, уч тоифадаги ўқувчиларнинг ўзлаштириш кўрсаткичи қуйидагича бўлади.

		Ўқувчилар		
		1	2	3
Ўқитувчи	1	100	70	80
	2	60	100	70

Юқоридагига ўхшаш, бу жадвал ўқитишни режалаштиришда вужудга келадиган ҳолатни моделлаштиради. Ўқитувчи танлаган стратегиянинг натижаси ўқувчиларнинг таркибига боғлиқ. Масалан, агар синфда 15 нафар биринчи, 10 нафар иккинчи ва 10 нафар учинчи тоифали ўқувчилар бўлса, ўқитувчининг биринчи стратегияси 35 нафар ўқувчидан $\frac{15 \cdot 100 + 10 \cdot 70 + 10 \cdot 80}{100} = 30$ нафар ўзлаштирувчи, 2-стратегияси эса 35 нафар ўқувчидан $\frac{15 \cdot 60 + 10 \cdot 100 + 10 \cdot 70}{100} = 26$ нафар ўзлаштирувчилар бўлган натижани беради. Кўриниб турибдики, бунда ўқитувчининг биринчи стратегияси яхшироқ натижа берар экан. Агар синфдаги ўқувчилар таркиби 5 нафар биринчи, 20 нафар иккинчи, 10 нафар учинчи тоифадаги ўқувчилардан иборат бўлса, ўқитувчининг биринчи стратегияси 35 нафар ўқувчидан $\frac{5 \cdot 100 + 20 \cdot 70 + 10 \cdot 80}{100} = 27$ нафар ўзлаштирувчи, иккинчи стратегияси эса, 35 нафар ўқувчидан $\frac{5 \cdot 60 + 20 \cdot 100 + 10 \cdot 70}{100} = 30$ нафар ўзлаштирувчилар натижаларини беради. Энди бу ерда ўқитувчининг иккинчи стратегияси яхшироқ натижа беради.

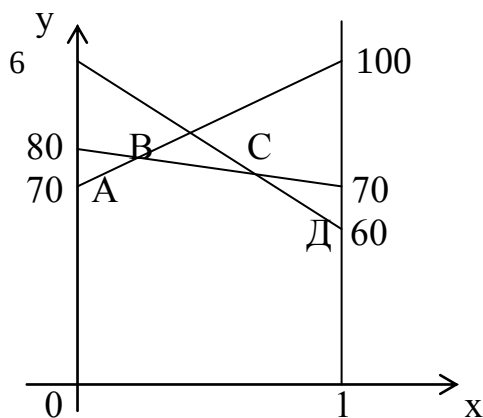
Демак, биринчи, иккинчи ва учинчи тоифадаги ўқувчиларнинг сони нисбатига кўра самарали усуллар турлича бўлар экан.

Албатта, синфлардаги ўқувчилар таркиби турли синфларда турлича бўлади. Демак, ўз навбатида, дарсни режалаштириш ҳам турлича бўлади. Буни амалга ошириш ҳар бир ўқитувчининг ҳам қўлидан келавермайди. Шу сабабли, қуйидаги масала туғилади: биринчи ва иккинчи стратегияларни шундай уйғунликда олиб бориш лозимки, бу билан ўқитувчи ихтиёрий таркибдаги синфдан етарли яхши кафолатланган натижага эришсин. Ўйинлар назарияси

айнан шунга ўхшаш масалаларни ечиш билан шуғулланади. Бу ерда биринчи ва иккинчи стратегияларни бирга қўллашни ўқитувчининг аралаш стратегияси деб атасак, кўрилатган масала қуйидагича бўлади. Ўқитувчи шундай стратегияни (оптимал) қўлласинки, ўқувчилар ихтиёрий аралаш стратегияларни қўлласа ҳам натижа яхши бўлиб, у кафолатланган бўлсин. Бу ерда ўқувчиларнинг аралаш стратегияси уларнинг синфдаги таркиби (тоифаларини нисбати) билан аниқланади.

Биз кўраётган сонли мисолимиз юқоридаги $(2 \times n)$ кўринишдаги жадвалли ўйин масаласига тўғри келади. Уни ечишда биз график усулдан фойдаланган эдик. Бизнинг мисол учун у қуйидаги кўринишда бўлади(6.3-расм):

6.3-расм



Бу ерда $x=0$ ва $x=1$ ўқлари $(100,60)$, $(70,100)$ ва $(80,70)$ кесмалар билан туташтирилиб, бу қисмларнинг энг пастки қисмлари алоҳида ажратиб чизилган, у ABCD синик чизиқдан иборат. Бу ABCD синик чизиқнинг энг юқори нуқтаси бўлган В нуқта ажратилади. Шу В нуқтадан ўтувчи кесмалар $(70,100)$ ва $(80,70)$ чизиқларга бўлиб, улар ёрдамида янги

	6	2
1	70	80
2	100	70

жадвал тузилади. Бундай жадвалли ўйиннинг ечимини тузишни биламиз. У 6.2 параграф 4-пунктдаги (6.12) ва (6.13) формулалар орқали берилган. Демак,

(6.13) формула орқали ўқитувчининг оптимал аралаш стратегиясини аниқлаймиз:

$$x_1 = \frac{70-100}{70+70-100-80} = \frac{-30}{-40} = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{70-80}{70+70-100-80} = \frac{-10}{-40} = \frac{1}{4} \quad (6.13)$$

(10) формуладан кафолатланган нуқта v ни аниқлаймиз:

$$v = \frac{70 \bullet 70 - 80 \bullet 100}{70 + 70 - 100 - 80} = \frac{4900 - 8000}{-40} = \frac{3100}{40} = 77,25 \quad (6.14)$$

Шундай қилиб, ўқитувчи (1) аралаш стратегияни қўлласа, ўқувчилар қандай стратегияни қўллашдан қатъий назар кафолатланган ютуқ (натижа) 77,25 дан камайиб кетмайди. Бошқача айтганда, биринчи стратегия ёрдамида ихтиёрийсинфнинг ўзлаштириши камида 77,25 % ни ташкил қилади. Агар (1) даги софстратегияларни қабу қилиш частотасининг нисбати $x_1: x_2$ ни ҳисобласак, 3:1 келиб чиқади, бу нисбат билдирадики: бир туркумдан 3 тадан қилиб масалалар тузиш керак ёки $3:1 = 6:2$ эканлигидан келиб чиқсак, иккинчи туркумнинг ҳар биридан 6 тадан олиб, масалалар тузиш керак. Нечта масала олинишини ўқитувчи дарсга берилган вақт ва масалаларнинг сода-мураккаблигига боғлиқ ҳолда аниқлайди. Энди қуйидаги масалани кўрайлик. Ўқитувчида 3 та соф стратегия бўлиб, улар:

1) масала бериш; 2) мисол бериш; 3) тест бериш

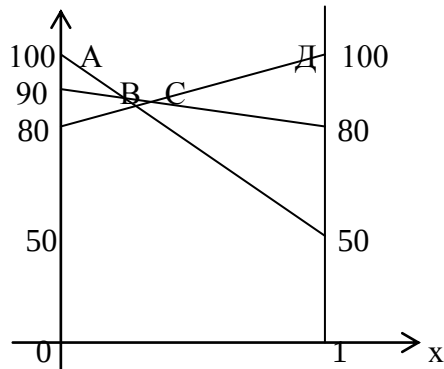
билан белгилансин. Ўқитувчилар эса икки тоифага бўлинган, уларнинг бу стратегиялари муносабатлари қуйидаги жадвал асосида аниқланади:

	6	2
1	100	50
2	80	100
3	90	80

Ўқитувчининг бирор кафолатланган ютуғини таъминлаб берадиган аралаш стратегиясини аниқлаб бериши керак.

Бу ўйинлар назарияси бўйича $m \times 2$ ўйини деб аталади. Бундай ўйинларнинг ечилиш усулига кўра $x=0$ ва $x=1$ тўғри чизиқларини туташтирувчи $(100,50)$, $(80,100)$ ва $(90,60)$ кесмалари ясаб чиқилади.

6.4-расм



Шундан сўнг энг юқори қисми бўлган ABCD синиқ чизиқ алоҳида ажратилиб, унинг энг пастки C нуқтаси танлаб олинади. Бу C нуқта $(90,80)$ ва $(80,100)$ кесмаларнинг кесишиш нуқтаси, шу сабабли уларга мос:

	1	2
2	80	100
3	90	80

жадвал тузиб олинади. Бу энди (2×2) жадвалли ўйин бўлиб, унинг ечими 2-§ нинг 4-пунктдаги (10) ва (11) формулалар орқали берилган. Шундан фойдаланиб, қуйидаги ечимни ҳосил қиламиз:

$$x_2 = \frac{80 - 90}{80 + 80 - 90 - 100} = \frac{-10}{-30} = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{80 - 100}{80 + 80 - 90 - 100} = \frac{-20}{-30} = \frac{2}{3}$$

Демак, аралаш стратегия $x = (0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ кўринишида бўлиб, бундай ҳолда масалалар ечиш мақсадга мувофиқ эмас экан. x – оптимал стратегияни қўллаш орқали ўқитувчи ўртача:

$$v = \frac{80 \cdot 80 - 90 \cdot 100}{80 + 80 - 90 - 100} = \frac{6400 - 9000}{-30} = \frac{-2600}{-30} = 86,7$$

ютуққа эга бўлади. Бу дегани, ўқитувчи оптимал стратегияси х ни қўллаш орқали, синфдаги ўқувчилар қандай тоифада бўлишлардан қатъий назар, ўзлаштиришни 86,7% дан кам қилмайди. х – оптимал стратегиянинг маъноси шундан иборатки, ўқитувчи масалалардан умуман олмайди, мисоллардан 1 та, тестлардан 2 та ёки шу сонларга нисбатан пропорционал сондаги машқлар олиш лозим.

Ўз-ўзини текшириш учун саволлар

1. Ўйинлар назарияси элементларини характерланг.
2. Антагонистик ўйинларни тавифланг.
3. Соф стратегияларни таққослаш нима?
4. Жадвалли ўйинда мувозанат ҳолат нима?
5. Аралаш стратегия нима?
6. Ўртача ютуқ нима?

Педагогик тадқиқотлар(рефератлар, маърузалар, курс ва битирув малавий ишлар) мавзулари

1. Ишчанлик ўйинларини умумий ўрта таълимнинг турли босқичларида қўллаш(бошланғич, У-У1, юқори синфлар учун алоҳида-алоҳида).
2. Муайян мавзу учун машқлар узвийлигини ўйинлар назарияси ёрдамида таъминлан.

Тавсия этилган адабиётлар рўйхати

1. Горстко А. Б. Познакомьтесь с математическим моделированием. –М.: Знание.:Знание, 1991. – 160 с.
2. Лебедева И. П. Математическое моделирование в педагогическом исследовании // Педагогика. – 2002. – № 10. – С. 29–36.
3. Алимов Н.А. Математика ўқитишдаги зиддиятли ҳолатлар ва уларни бартараф қилиш усуллари // Педагогик маҳорат. 2004 й. № 4. Б. 54 – 57.

МУНДАРИЖА

ТУШУНТИРИШ ХАТИ-----

Кириш ўрнида

УЗЛУКСИЗ ТАЪЛИМ ЖАРАЁНИДА УЗВИЙЛИКНИ АМАЛГА ОШИРИШДА МАТЕМАТИК МЕТОДЛАРНИНГ РОЛИ ВА ЎРНИ

- 0.1. Таълимни режалаштириш ва ташкиллаштиришдаги математик муаммолар.....
- 0.2. Талабаларни математик методларни ўқув жараёнида қўллашга ўргатишнинг йўллари ва воситалари.....
03. “Узлуксиз таълим тизимида узвийликни таъминлашда математик методлар” махсус курси режаси, мазмуни ва таркиби.....

I - Б О Б. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МЕТОДЛАРИ - УЗЛУКСИЗ МАТЕМАТИК ТАЪЛИМ УЗВИЙЛИГИНИ АМАЛГА ОШИРИШ ВОСИТАСИ

- 1.1-в. Математик моделлаштириш - чизиқли дастурлаш асоси.....
- 1.1.1. Модель тушунчаси.....
- 1.1.2. Математик моделлаштириш босқичлари.....
- 1.1.3. Чизиқли дастурлаш тушунчаси.....
- 1.1.4. Чизиқли дастурлаш масалаларини алгебраик метод билан ечиш..
- 1.1.5. Чизиқли дастурлаш масалаларини геометрик метод билан ечиш...
- 1.2-в. Чизиқли дастурлаш масалаларини ечиш методлари.....
- А. Чизиқли тенгламалар системасини ечиш.....
- Б. Тўғри тўртбурчак қондаси ёрдамида базис ечимларни топиш.....
- В. Системанинг барча базис ечимларини топиш.....
- Г. Чизиқли дастурлаш масаласини симплекс метод билан ечиш.....
- 2.3. Чизиқли дастурлаш методлари ёрдамида узлуксиз математик таълим узвийлигини таъминлаш.....
- Ўз-ўзини текшириш учун саволлар.....

II - Б О Б. КОРЕЛЯЦИОН АНАЛИЗ - УЗЛУКСИЗ МАТЕМАТИК ТАЪЛИМДАГИ УЗВИЙЛИКНИ АМАЛГА ОШИРИШ ВОСИТАСИ

- 2.1. Олий ўқув юртларида функциялар узлуксизлигини баён

- қилишда узвийликни таъминлаш.....
- А. Мавзулар ўртасидаги узвийликни баҳолаш.....
- Б. Мавзунини мустаҳкамлашда омилларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш.....
- В. Ўрта махсус таълим муассасалари ва номуахассислик йўналишидаги педагогика олий ўқув юрларида математика курсини ўқитишда узвийликни таъминлаш.....
- 2.2. Математика ўқув қўлланма ва дарсликларида узвийликни таъминлашда омилларнинг нисбий афзаллигини баҳолаш.....
- 2.3. Талабалар аудиториядан ташқари мустақил таълимни ўқув жараёнига таъсирининг статистик таҳлили.....
- Ўз-ўзини текшириш учун саволлар.....

III-БОБ ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ - УЗЛУКСИЗ МАТЕМАТИК ТАЪЛИМДАГИ УЗВИЙЛИКНИ АМАЛГА ОШИРИШ ВОСИТАСИ

- 3.1. Ўйинлар назарияси элементлари
- 3.2. Антагонистик ўйинларни ечиш йўллари.....
- 3.2.1. Соф стратегияларни таққослаш.....
- 3.2.2. Жадвалли ўйинда мувозанат ҳолат.....
- 3.3. Таълимдаги айрим долзарб муаммоларни ҳал қилишда ўйинлар назарияси.....
- 3.4. Узлуксиз математик таълим жараёнида мавзулар ва машқлар орасидаги узвийликни амалга оширишда ўйинлар назарияси.....
- Ўз-ўзини текшириш учун саволлар.....
- Педагогик илмий-тадқиқот ишлари(рефератлар, маърузалар, курс ва битирув малакавий ишлар) мавзулари.....
- Тавсия этилган адабиётлар рўйхати.....