

(3) - тенгликни a_{i1} - га кўпайтириб (4) – системанинг i -тенгламасидан айирамиз,

$i=2,3,\dots,n$. Натижада

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1j}x_j + \dots + c_{1n}x_n &= y_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2j}^{(1)}x_j + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nj}^{(1)}x_j + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n = f_n^{(1)},$$

тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Бу ерда

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - c_{1j}a_{i1}, \quad f_i^{(1)} = f_i - y_1 a_{i1}, \quad i, j = 2, 3, \dots, n. \quad (6)$$

(5)- системанинг матрицаси

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

кўринишга эга.

Бундай кўринишли матрицани

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & \times & \dots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \times & \dots & \times \end{bmatrix}$$

каби белгилаш қабул қилинган.

Бу ерда "x" белги билан нол бўлмаган элементлар белгиланган. (5) - системада x_1 - номаълум фақат 1-тенгламада бор бўлиб, бошқа тенгламалардан йўқотилган. Бундан сўнг

$$\begin{aligned} a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2j}^{(1)}x_j + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= f_2^{(1)} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{nj}^{(1)}x_j + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= f_n^{(1)} \end{aligned} \quad (7)$$

система билан ишлаймиз.

Шундай қилиб Гаусс методининг биринчи қадами амалга оширилди. Агар $a_{22}^{(1)} \neq 0$, бўлса, унда (7) - системадан худди биринчи кадамдагидек x_2 - ни йўқотиб, (2) - системага эквивалент бўлган матрицаси

$$\begin{bmatrix} 1 & \times & \times & \dots & \times \\ 0 & 1 & \times & \dots & \times \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \times & \dots & \times \end{bmatrix}$$

кўринишли системага келамиз.

Бунда (5) - системанинг биринчи тенгламаси ўзгаришсиз қолади. Худди шундай $x_3, x_4, \dots, x_n$ ўзгарувчиларни йўқотиб, (2) - системага эквивалент бўлган

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n &= y_1, \\ x_2 + \dots + c_{2n}x_n &= y_2, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n &= y_{n-1}, \\ x_n &= y_n. \end{aligned} \tag{8}$$

системага эга бўламиз .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

бош диагоналидан пастдаги барча элементлари нолдан иборат.

Ҳақиқатан ҳам $x_n = y_n$, $x_{n-1} = y_{n-1} - c_{n-1}y_n$ ва $x_0 = 0$.

$$x_n = y_n - \sum_{j=i+1}^n c_{ij} x_j, \quad i=n-1, n-2, \dots, 1. \quad (10)$$

каби ёзиладилар.

ЭХМ ёрдамида системани ечиш учун дастлабки А матрицани (9)-
кўринишдаги учбурчак матрицага алмаштирадиган ва ўнг томонларни
алмаштирадиган алгоритмни кўрсатиш етарли.

Фараз қиламиз, тўғри йўлнинг $k-1$ қадами бажарилган бўлсин. Унда система қуйидагича кўринишга эга бўлади:

Бу системанинг

к- тенгламасини қараймиз ва $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ деб фараз қиламиз.

$$\mathbf{x}_k \mathbf{c}_{k,k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \dots + \mathbf{c}_{kn} \mathbf{x}_n = \mathbf{y}_k \quad (12)$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бу ерда

$$c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j=k+1, k+2, \dots, n$$

$$y_k = \frac{f_k^{(k+1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}$$

Бундан сўнг (12) - тенгламани навбат билан $a_{ik}^{(k-1)}$, $i=k+1, k+2, \dots, n$ коэффициентларга кўпайтириб ҳосил бўлган тенгламани i -тенгламадан айирамиз. Натижада (11) - системанинг кейинги тенгламалар гуруҳи қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{kn}x_n &= y_k, \\ a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n &= f_{k+1}^{(k)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{n,n}^{(k)}x_n &= f_n^{(k)}, \end{aligned}$$

бу ерда

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - c_{kj}a_{ik}^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, \dots, n, \\ f_i^{(k)} &= f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}y_k, \quad i = k+1, k+2, \dots, n. \end{aligned}$$

Шундай қилиб Гаусс методининг тўғри йўлида коэффициентлар қуйидагича алмашадилар:

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(0)} &= a_{kj}, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad k=1, 2, \dots, n, \\ c_{kj} &= \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad j=k+1, k+2, \dots, n, \quad k=1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (13)$$

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - c_{kj}a_{ik}^{(k-1)}, \quad i, j = k+1, k+2, \dots, n, \quad k=1, 2, \dots, n-1. \quad (14)$$

Ўнг томонлар

$$f_k^{(0)} = f_k, \quad y_k = \frac{f_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad (15)$$

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)}y_k, \quad i=k+1, k+2, \dots, n, \quad (16)$$

каби алмашадилар.

c_{ij} $i=1, 2, \dots, m$, $j=i+1, i+2, \dots, n$ коэффициентлар ва y_i ўнг томонлар (10) - формулалар ёрдамида тесқари ҳаракатни амалга оширишда фойдаланиш учун ЭХМ хотирасида сақланишлари керак.

Гаусс методини қўлланишга қўйиладиган шарт $a_{kk}^{(k-1)}$ - ларнинг нолга тенг эмасликларидадир.

$a_{kk}^{(k-1)}$ - етакчи элемент дейилади.

Агар бирор - бир қадамда етакчи элемент нольга тенг бўлмасдан унга яқин бўлса ҳам хатоликларнинг йиғилиб бориши натижасида асл ечимдан узоклашиб бориш содир бўлиши мумкин. Бу вазиятдан чиқиш учун $a_{kk}^{(k-1)}$ - элементни $a_{ij}^{(k-1)}$

1) $i=k+1, \dots, n$ коэффициентларнинг бошқаси билан алмаштириш лозим.

3. Амаллар сонини ҳисоблаш.

1)(13)- формулалар ёрдамида c_{kj} - коэффициентларни ҳисоблаш $k=1, 2, \dots, n$,
 $j=k+1, k+2, \dots, n$

$$\sum_{k=1}^n (n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$$

марта бўлиш амалини бажаришни талаб қилади.

2) (14) - формулалар ёрдамида $a_{ij}^{(k)}$ - ларни ҳисоблаш

$$\sum_{k=1}^n (n-k)^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

марта кўпайтиришни талаб этади.

Шундай қилиб C - матрицанинг нолга тенг бўлмаган c_{ij} элементларини топиш

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = \frac{(n^2-1)n}{3}$$

марта кўпайтириш ва бўлиш амалларини бажаришни талаб этади. Кўпайтириш ва бўлиш, кўшиш ва айиришга нисбатан кўп вақтни талаб қиладиган бўлганлиги учун биз бу ерда кўпайтириш ва бўлиш амаллари сонини ҳисоблаш билан шуғулланамиз. Кўшиш ва айириш амаллари сони худди шунингдек ҳисобланади.

(15) - формулалар ёрдамида u_k ўнг томонларни ҳисоблаш n та бўлишни ва (16)- формула орқали $f_i^{(k)}$ -ларни ҳисоблаб топиш

$$\sum_{k=1}^n (n-k) = \frac{n(n-1)}{2}$$

кўпайтиришни талаб этади.

Шундай қилиб (8) - система ўнг томонини ҳисоблаш

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

бўлиш ва кўпайтиришларни талаб этади.

Гаусс методининг тўғри йўлини амалга ошириш учун

$$\frac{(n^2-1)n}{3} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

кўпайтириш ва бўлиш амалларини бажариш зарур. (10) - формулалар ёрдамида Гаусс методининг тескари йўлини бажариш учун

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) = \frac{n(n-1)}{2}$$

кўпайтиришни бажариш керак.

Шундай қилиб Гаусс методини амалга ошириш учун

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n^2+3n-1)}{3}$$

кўпайтириш ва бўлишларни бажариш лозим.

4. Гаусс методининг қўлланиш шарт.

1) Гаусс методининг матрицани кўпайтувчиларга ажратиш билан боғлиқлиги.

Биз юқорида Гаусс методи

$$Ax=f$$

системани эквивалент бўлган

$$Cx=y,$$

системага алмаштиришини кўрсатдик.

f ва y векторларнинг боғланишини аниқлаймиз. Бунинг учун (16) - формулаларга мурожаат қиламиз.

Бу формулалардан :

$$f_1 = a_{11}y_1, f_2 = a_{21}y_1 + a_{22}^{(1)}y_2$$

умуман

$$f_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2 + \dots + b_{ij}y_j, i=1,2,\dots,n \quad (17)$$

эканлигин кўриш осон.

Бу ердаги b_{ij} - лар сонли коэффициентлар бўлиб, $b_{jj} = a_{jj}^{(j-1)}$.

(17)-муносабатни

$$f = By \quad (18)$$

кўринишида ёзиш мумкин. Бу ерда B -куйи учбурчакли матрица бўлиб, бош диагонал элементлари

$$a_{jj}^{(j-1)}, j=1,2,\dots,n, (a_{11}^{(0)} = a_{11})$$

сонлардан иборат. Гаусс методидagi фарзга кўра $a_{jj}^{j-1} \neq 0$. Шу сабабли B^{-1} мавжуддир. (18)-муносабатдан $y = B^{-1} f$ - ни топиб $x = C^{-1} B^{-1} f$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бундан

$$BCx=f \quad (19)$$

келиб чиқади.

Бу тенгламани (1)- тенглама билан таққослаб қуйидаги хулосага келамиз. Гаусс методи қўлланилганда A матрицани иккита учбурчакли матрицалар кўпайтмаси кўринишида тасвирланганлигини кўрамиз:

$$A=BC. \quad (20)$$

Бу ердаги C бош диагоналидаги элементлари бирга тенг бўлган юқори учбурчакли матрица бўлиб, B - эса бош диагоналидаги элементлар нолдан фарқли бўлган қуйи учбурчакли матрицадир. Энди Гаусс методини қуйидагича талқин қилиш мумкин. Фараз қиламиз A матрица ва f вектор берилган бўлсинлар. Аввал A матрицани иккита учбурчак матрицалар кўпайтмаси кўринишига келтириб, ундан сўнг

$$By=f \quad (21)$$

$$Cx=y \quad (22)$$

системаларни ечадилар. $A=BC$ кўпайтувчиларга ажратиш Гаусс методининг тўғри йўлига, (21), (22)- системаларни ечиш Гаусс методининг тескари йўлига мос келади.

Шундай қилиб Гаусс методи ёрдамида қандай шартлар бажарилганда (1)-системани ечиш мумкин деган савол туғилади.

Бунга жавоб қуйидагича бўлади.

А матрицани (20) кўринишда ёзиб бўлганда Гаусс методини қўллаш мумкин деган хулосага келамиз. Лекин қайси шартлар бажарилганда А матрицани (20) кўринишида ёзиш мумкин деган савол туғилади. Бу саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. Агар А матрицанинг Δ_j бурчак минорлари нолдан фарқли бўлсалар; $\Delta_j \neq 0, j=1,2,\dots,n$, унда А матрицани бирдан-бир $A=LU$ кўринишида тасвирлаш мумкин.

Бу ердаги бурчак минорлар қуйидагилардан иборат:

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \dots, \Delta_n = \det A$$

L - диагонал элементлари ноль бўлмаган куйи учбурчакли матрица, U- бош диагонали элементлари бирга тенг бўлган юқори учбурчакли матрицадир. Бу теореманинг исботини, математик индукция методидан фойдаланиб исбот қилиш ўқувчига ҳавола этилади.

Натижа. А матрицанинг ҳамма бурчак минорлари нолдан фарқли бўлганда ва фақат шундагина Гаусс методини қўллаш мумкин.

5. Гаусснинг бош элементни танлаш методи

1) Методнинг асосий ғояси.

$$Ax=f \quad (1)$$

система ягона ечимга эга бўлиб, бурчак минорлари нолга тенг бўлиши мумкин. Ундан ташқари, олдиндан ҳамма минорларнинг нолга тенг эмаслиги маълум эмас. Бундай ҳолларда Гаусснинг оддий методи системани ечишга қўл келмаслиги мумкин. Бу қийинчиликларни енгишда Гаусснинг бош элементни танлаш методи қўл келади. Бу методнинг асосий ғояси, кейинги қадамда оддий йўқотиш эмас, балки коэффициентнинг модули энг катта бўлган номаълумни йўқотишдан иборат.

Шунда $\det A \neq 0$ бўлганда, ҳисоблаш жараёнида нолга бўлиш содир бўлмайди.

Гаусснинг бош элементни танлаш усулининг турли хилларини

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= f_2, \end{aligned} \quad (2)$$

икки номаълумли система мисолида намойиш қиламиз.

Фараз қиламиз $|a_{12}| > |a_{11}|$ бўлсин.

Унда биринчи қадамда x_2 - ни йўқотамиз.

Бу усул (2)-системани

$$\begin{aligned} a_{12}x_2 + a_{11}x_1 &= f_1, \\ a_{22}x_2 + a_{21}x_1 &= f_2, \end{aligned} \quad (3)$$

система кўринишида ёзишга эквивалент. Ундан сўнг (3) - системани ечишга оддий Гаусс методини қўллаш лозим. Кўрсатилган усул Гаусснинг бош элементни сатр бўйича танлаш методи деб айтилади. Бу ҳар бир қадамда ўзгарувчиларни қайта

белгилаб системага оддий Гаусс методини қўллаш билан тенг кучлидир.

Яна бош элементни устун бўйича танлаш усули ҳам қўлланилади.

Фараз қиламиз, $|a_{21}| > |a_{11}|$ бўлсин.

(2) - системани

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2,$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1,$$

кўринишда қайта ёзиб биринчи кадамда оддий Гаусс методини қўллашдан иборат. Баъзи ҳолларда бош элемент бутун матрица бўйича танланади. Бунда етакчи элемент сифатида абсолют қиймат жиҳатдан энг катта бўлган матрица элементи танланади.

6. Детерминантни ҳисоблаш.

Фараз қилайлик Гаусс методининг тўғри йўлида A матрица $A=LU$ кўринишда тасвирланган бўлсин. Унда

$$\det A = \det (L \cdot U) = \det L \cdot \det U = \det L$$

7. Тескари матрицани топиш.

Тескари матрицани топиш

$$AX = E \quad (1)$$

системани ечишга эквивалент. Бу ерда E - бирлик матрица, X - A матрицага тескари бўлган матрицани белгилайди.

(1) - системани

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

бу ерда $\delta_{ij} = 1$, агар $i=j$ бўлса, акс холда $\delta_{ij} = 0$ кўринишида ёзиш мумкин.

Бу система бир хил A матрицали, лекин ҳар хил ўнг томонли n -та системадан иборат.

Бу системалар

$$AX^{(j)} = \delta^{(j)}, \quad j=1, 2, \dots, n, \\ x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{nj})^T \text{ ва } \delta^{(j)} \quad (3)$$

j -элементи бирга тенг бўлиб, қолганлари ноллардан иборат вектордир. Тескари матрицани топиш учун n^3 -та кўпайтириш ва бўлишни бажариш керак бўлади.

8. Чизиқли тенгламалар системасининг бошланғич шартларининг ўзгаришга нисбатан сезгирлиги (шартланганлик).

1) Чизиқли тенгламалар системасининг турғунлиги.

Масалалар ечишда сонли методлардан фойдаланиш учун масаланинг хусусиятларини ва уни ечиш учун мўлжалланган алгоритм хоссаларини бири-биридан фарқ қилиш керак. Ҳар қандай математик масалани ечишдан олдин унинг корректлиги билан қизиқиш керак.

Масала коррект қўйилган дейилади, агар масала ечими мавжуд, ягона ва бошланғич берилганларга узлуксиз боғлиқ бўлса. Охирги хосса турғунлик хоссаси деб айтилади. Масаланинг корректлиги унинг ечиш методининг яхши бўлишига кафолат эмас. Шу сабабли ечиш методининг хоссалари алоҳида тадқиқ қилиниши лозим.

Кўп ҳолларда нокоррект масалаларни ҳам ечишга тўғри келади.

Бу ерда масаланинг ва уни ечиш методларининг корректлиги n -тартибли A матрицали

$$Ax=f \quad (1)$$

чизикли тенгламалар системасини ечиш мисолида кўриб чиқилади.

$\det A \neq 0$ бўлганда ва фақат шундагина (1) - ситеманинг ечими мавжуд ва ягоналиги маълум. Бундай ҳолда A^{-1} мавжуд бўлиб, ечим

$$x=A^{-1} f \quad (2)$$

каби топилади.

(1) - масаланинг коррект бўлиши учун яна ечимнинг бошланғич берилганларга узлуксиз боғлиқлигини аниқлаш керак.

Шу муносабат билан иккита савол туғилади. Биринчиси : (1) - масаланинг бошланғич берилганлари нималар ва иккинчиси: узлуксиз боғланишни қандай тушуниш керак?

Биринчи саволга жавоб бериш осон: бошланғич берилганлар A матрицанинг a_{ij} элементлари ва f - ўнг томондан иборат. Шуларга мос ўнг томонга нисбатан (фақат f - ўнг томон ўзгариб A ўзгаришсиз қолади) турғунлик ва коэффициентларга нисбатан турғунлик (фақат A матрицанинг a_{ij} - коэффициентлари ўзгариб f -ўнг томон ўзгаришсиз қолади) ва умумий ҳолдаги турғунлик ҳолларини қараш мумкин.

Узлуксиз боғланиш ҳақида гапириш учун n - ўлчовли векторлар фазосида бирор-бир нормани киритиш лозим. n - ўлчовли вектор фазода кўпинча норма уч хил аниқланади.

$$1) \|x\|_I = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (3)$$

$$2) \|x\|_{II} = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (4)$$

$$3) \|x\|_{III} = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Шу нормалаштиришга мос A матрицанинг нормаси аниқланади:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad (6)$$

(1) - система билан бирга ўзгарган, ўнг томони билан фарқ қиладиган

$$A\tilde{x} = \tilde{f} \quad (7)$$

системани қараймиз.

Биз ўнг томоннинг ўзгариши ечимни қанчалик ўзгартириши билан қизиқамиз. Бунинг учун

$$\delta x = \tilde{x} - x, \quad \delta f = \tilde{f} - f$$

белгилашларни киритамиз.

Агар

$$\|\delta x\| \leq M \|\delta f\| \quad (8)$$

бўлса, унда (1) - система ўнг томонга нисбатан турғун деб айтилади.

Бу ерда $M > 0$, f ва $\tilde{f}$ ларга боғлиқ бўлмаган доимий сондир. (8) – баҳо ечимининг ўнг томонга узлуксиз боғлиқлигини ифодалайди, яъни $\|\delta f\| \rightarrow 0$ бўлганда, $\|\delta x\| \rightarrow 0$ бўлишини кўрсатади.

Масаланинг турғунлиги уни сонли ечишда муҳим ҳисобланади, чунки кўп ҳолларда ўнг томон $\tilde{f}$ тақрибий бўлиб, уни аниқ топишга имконият бўлмайди.

Масалан: $\delta f = \tilde{f} - f$ хатолик, яхлитлаш хатолиги натижасида пайдо бўлиши мумкин.

Агар $\det A \neq 0$ бўлса, унда (1) - система ўнг томонга нисбатан турғун бўлади. Ҳақиқатан ҳам (1) ва (7) – дан $A(\delta x) = \delta f$. Бундан

$$\delta x = A^{-1}(\delta f), \quad \|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \|\delta f\| \quad (9)$$

яъни $M = \|A^{-1}\|$, (8) - тенгсизлик келиб чиқади. Бу ердан шуни пайқаймизки $\det A$ қанча нолга яқин бўлса, ўнг томоннинг хатолиги ечим хатолигидан шунча кўп фарқ қилади.

2.Сезгирлик сони.(Шартланганлик сони).

(8) – баҳода ечим хатолиги ва ўнг томон хатолиги қатнашаяпти. (1) - системани вергули сирпанувчи ЭХМ лар ёрдамида ечилаётган пайтда

$$\frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \quad \frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

нисбий хатоликлар, масала турғунлигининг хусусиятини кўрсатиб турадилар.

(1) - дан

$$\|f\| \leq \|A\| \|x\| \quad (10)$$

(9) ва (10) кўпайтирсак

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M_A \frac{\|\delta f\|}{\|f\|}, \quad (11)$$

бу ерда

$$M_A = \|A^{-1}\| \|A\| \quad (12)$$

ҳосил бўлади.

Бу баҳода қатнашаётган M_A сезгирлик сони деб айтилади ва ечим нисбий хатолигининг ўнг томон нисбий хатолигидан боғлиқлик даражасини аниқлайди. M_A сони катта бўлган матрицалар сезгирлиги кучли матрицалар деб юритилади.

Матрицаси сезгир системаларни ечишда хатоликлар йиғилади.

Сезгирлик сонининг хоссаларини келтирамиз:

$$1^{\circ}. M_A \geq 1.$$

$$2^{\circ}. M_A \geq \frac{|\lambda_{\max}(A)|}{|\lambda_{\min}(A)|}, \text{ бу ерда } \lambda_{\max} \text{ ва } \lambda_{\min} \text{ } A \text{ матрицанинг абсолю қиймати}$$

жихатдан энг катта ва энг кичик хос қийматлари .

$$3^{\circ}. M_{AB} \leq M_A \cdot M_B.$$

Бу хоссаларнинг исботи алгебра курсидан маълум.

3) Тўла нисбий хатолик баҳоси.

(1)- системанинг ҳам ўнг томони, ҳам коэффициентлари ўзгарган бўлсин.

(1)- система билан бирга

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f} \quad (13)$$

системани қараймиз.

$$\delta A = \tilde{A} - A, \quad \delta x = \tilde{x} - x, \quad \delta f = \tilde{f} - f$$

қилиб белгилаймиз.

1-теорема. А матрицага тескари матрица мавжуд бўлиб

$$\|\delta A\| < \|A^{-1}\|^{-1}$$

бўлсин.

Унда $\tilde{A} = A + \delta A$ тескари матрицага эга бўлиб, нисбий хатолик қуйидаги баҳога эга:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{M_A}{1 - M_A \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta f\|}{\|f\|} \right). \quad (14)$$

4) Чизикли алгебраик тенгламалар системасини Гаусс методи билан ечишда яхлитлаш хатолигининг ечимга таъсири.

Гаусс методи аниқ методларга мансуб бўлиб, чекли сондаги амаллар бажариш натижасида ечимнинг аниқ қийматини топишга имкон беради.. Аммо бошланғич информацияни ЭХМ га киритилганда улар яхлитланиб хатолик билан киритиладилар. Шу сабабли ҳисоблашларни ЭХМ ёрдамида бажарганда аниқ ечимни деярли топиб бўлмайди. Матрица тартиби қанча катта бўлса охириги хатолик шунча катта бўлади. Ундан ташқари хатолик матрицанинг элементларига ҳам боғлиқ. Масалан, агар унинг детерминанти нолга яқин бўлса система ечимининг хатолиги катта бўлади.

Аммо, яхлитлаш хатоликларининг йиғилиб бориши Гаусс ёки бошқа сонли методларни ишга яроқсиз қилиб қўяди деб ўйламаслик керак. Чунки, одатда ечимни аниқ топиш талаб қилинмасдан, уни бирор бир аниқлик билан топиш талаб қилинади. Бунда хатолик талаб қилинган чегаралардан ташқарига чиқмаслиги муҳимдир. Бунинг учун яхлитлаш хатоликлари ечимнинг аниқлигига таъсирини таҳлил қилиш лозим. Кўпгина ҳисоблаш алгоритмларида яхлитлаш хатолиги

таъсирини $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f}$ системани қараб ҳисобга олиш керак. Бунда яхлитлаш хатоликлари таъсири остида

(1)-системанинг ечими $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f}$ системанинг аниқ ечими деб ҳисобланади. Бошқача қилиб айтилганда (1) - системани яхлитлаш хатоликларини ҳисобга олган ҳолда ечиш жараёни $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f}$ системани аниқ ечишга эквивалентдир.

Фараз қиламиз f ўнг томон аниқ берилган бўлсин. Фараз қиламиз, (1) - системани яхлитлашлар хатоликларини ҳисобга олиб ечиш ўрнига

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{f} \quad (15)$$

системанинг аниқ ечими топилган бўлсин.

Бундай ҳолда $\delta A = \tilde{A} - A$ матрица эквивалент қўзғашлар матрицаси деб айтилади. Ҳар бир ҳисоблаш алгоритми учун ўзининг эквивалент қўзғашлар матрицаси мавжуд, агар δA матрица нормасининг баҳоси мавжуд бўлса, унда яхлитлаш хатоликлари натижасида ҳосил бўлган хатоликни (14) – мувофиқ баҳолаш мумкин, яъни

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{M_A}{1 - M_A \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)} \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \quad (16)$$

муносабат ўринли бўлади.

Бундан кўриниб турибдики ечим аниқлигига икки нарса: A матрицанинг сезгирлик сони ва эквивалент қўзғаш таъсир киладилар. Шунини таъкидлаймизки, сезгирлик сони алгоритмга боғлиқ эмас, балки у (1)-система хусусиятини акс эттиради холос. Эквивалент қўзғаш катталигини сонли алгоритм аниқлайди. Шунинг учун маълум алгоритм билан иш кўрганда эквивалент қўзғашни баҳолаш лозим. Масалан Гаусс методи ёрдамида A матрицани кўпайтувчиларга ажратиш натижасида (1)-системани ечиш, иккита

$$Ly=f, \quad Ux=y$$

матрицалари учбурчакли системаларни ечишга олиб келинади.

Яхлитлаш хатоликлари $Ux=y$ системани X ечими ўрнига қўзғалган $\tilde{U}\tilde{x} = \tilde{y}$ системанинг $\tilde{x}$ ечимини топишга олиб келади. Худди шундай $Ly=f$ системанинг y ечими урнига $\tilde{L}\tilde{y} = f$ қўзғалган система ечими $\tilde{y}$ топилади. Шундай қилиб (1) - система ўрнига $\tilde{A}\tilde{x} = f$ ($\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{U}$) қўзғотилган система аниқ ечилади деб ҳисоблаш мумкин. $\tilde{A}$ матрицани топиш учун Гаусс методидаги барча формулаларга яхлитлаш хатоликларини киритиб $\tilde{L}$ ва $\tilde{U}$ матрицаларни топиш лозим. Бундан кейин $\delta A = LU - \tilde{L}\tilde{U}$ матрица нормасини аниқлаш керак. Биз бу ерда ҳисоблашларни бажармасдан охириги натижани келтираемиз.

Фараз қиламиз, сонларни ЭХМ да иккилик санок системасида тасвирлагандаги мантиссанинг хоналар сони t - га тенг бўлсин, унда соннинг яхлитлаш хатолигининг нисбий хатолик катталигининг тартиби 2^{-t} бўлади. Унда Гаусс методи эквивалент қўзғалиш матрицаси учун

$$\frac{\|\tilde{A} - A\|}{\|A\|} = O(n2^{-t}),$$

муносабат ўринли бўлади.

Шундай қилиб чизикли алгебраик тенгламалар системасини Гаусс методи ёрдамида вергули кўзгалувчи ЭХМ да ечганда, яхлитлаш хатоликлари йиғилиб ечимни

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} = O(M_A n 2^{-t}) \quad (17)$$

нисбий хатолиги билан топишга олиб келади.

Таянч иборалар :

1. Аниқ метод .
2. Ечиш .
3. Тақрибий ечиш .
4. Сызгирлик (шартланганлик) .
5. Сызгирлик сони .
6. Туғри ҳаракат йўли .
7. Тескари ҳаракат йўли .
8. Амаллар сони .
9. Қўлланиш шрти .
10. Бош элементни танлаш методи .
11. Турғунлик .
12. Хатолик .

Текшириш учун саволлар :

1. Гаусс методининг асосий ғояси нимадан иборат ?
2. Гаусс методининг туғри ва тескари йўллари нимадан иборат ?
3. Гаусс методининг ҳисоблаш формулалари нимадан иборат ?
4. Гаусс методи ёрдамида системани ечиш амаллар сони система тартибига боғлиқлиги қандай ?
5. Гаусс методидан фойдаланиб матрица детерминантининг ҳисоблаш ва тескари матрицани топиш афзаллиги нимадан иборат ?
6. Чизикли алгебраик тенгламалар системасининг турғунлиги қандай ифодаланади?
7. Матрицанинг сызгирлик сони қандай ҳисобланади ?
8. Яхлитлаш хатолигининг ечимга таъсири қандай ҳисобга олинади?

Адабиётлар :

1. А.А. Самарский , А.В. Гулин , «Численные методы» . Ўқ. Қўлланма, М . , Наука , 1989.
2. М.И. Исраилов . , Ҳисоблаш методлари . , Тошкент , Ўқитувчи 1988 .