ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Ал-Хоразмий номли Урганч Давлат университети

Қулёзма ҳуқуқида

Матёқубов Муҳаммад Махсудович

ярим ўқда берилган чексиз зонали штурм ливилл оператори учун тескари масалани ечиш.

Мутахассислик: 5А 460102 – «Дифференциал тенгламалар»

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

"Математика магистри" академик даражасини олиш учун

Иш кўриб чиқилди ва ҳимояга рухсат берилди
«Математик физика ва амалий математика»
кафедраси мудири:
_______ ф.-м.ф.н., доц. Уразбоев Г.У.
«_25_»__май_____2006 й.

Илмий раҳбар:
_____ ф.-м.ф.д., проф. Ҳасанов А.Б.
Илмий консультант:
______ ф.-м.ф.н., доц. Яхшимуратов А.Б.

Урганч – 2006 й.

М У Н Д А Р И Ж А

Кириш

Ярим ўқда берилган даврий чекли зонали ва даврий бўлмаган чекли зонали потенциалли Штурм – Лиувилл оператори учун тескари масалалар Н.И.Ахиезер [1], Х.Хохштадт, В.Гольдберг [2], Б.М.Левитан, А.В.Савин [3] лар томонидан яхши ўрганилган. Бутун ўқда берилган даврий ёки чекли зонали потенциалли Штурм – Лиувилл оператори учун эса тескари масалалар В.А.Марченко, И.В.Островский [4], А.Р.Итс, В.Б.Матвеев [5], Е.Трубовиц [6], Б.А.Дубровин [7], С.П.Новиков [8] ва бошқа олимлар томонидан етарлича тўлиқ тадқиқ қилинган.

Ярим ўқда тескари масалани ечишда чегаравий шартни спектрал берилганлар орқали топиш ҳам талаб қилинади. Чунки чегаравий шартдаги $ctg\,\alpha$ Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасида ҳам қатнашади.

Б.М.Левитан [9] томонидан чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл операторларининг айрим синфлари ўрганилган.

Мазкур магистрлик диссертациясида ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл чегаравий масаласи учун чегаравий шартни спектрал берилганлар орқали ифодалайдиган формула ҳамда Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системаси келтириб чиқарилган. Бу ишда қараладиган чексиз зонали потенциалга мос келувчи лакуналар фақат чексизликда қуюқлашади, яъни лакуналар сони чексизта бўлиб ихтиёрий чегараланган интервалда фақат чеклита лакуна бўлади.

1-§. Спектрдаги лакуналар сони чексизта бўлган ҳолда тескари масала

1. Чекли зонали Штурм-Лиувилл оператори учун олинган ушбу

$$q_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \left[\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t)\right], \tag{1.1}$$

$$q_N(t) - \frac{1}{2} q''_N(t) = \sum_{k=1}^{N} \left[\lambda_k^2 + \mu_k^2 - 2\xi_k^2(t)\right] \tag{1.2}$$

излар формулалари, чексиз зонали Штурм – Лиувилл оператори учун тескари масалаларни ўрганиш имконини беради.

Ушбу

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \ldots < \lambda_k < \mu_k < \ldots \tag{1.3}$$

сонлар кетма – кетлиги учун қуйидаги шартлар бажарилсин:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k) = a_1 < \infty, \tag{1.4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \cdot (\mu_k - \lambda_k) = a_2 < \infty. \tag{1.5}$$

Ушбу $(-\infty, 0)$, (λ_k, μ_k), $k = \overline{1, \infty}$ интервалларни лакуналар деб атаймиз.

$$\xi_k \in (\lambda_k, \mu_k), \ k = \overline{1, \infty}$$

ихтиёрий сонлар ва $\sigma_k = \pm 1, \ k = \overline{1, \infty}$ ихтиёрий ишоралар бўлсин.

N орқали ихтиёрий натурал сонни белгилаймиз, $q_N(x)$ орқали эса, $(\lambda_1, \mu_1), \ldots, (\lambda_N, \mu_N)$ лакуналар ва $\eta_k = \{\xi_k, \sigma_k\}, \ k = \overline{1, N}$ спектрал параметрлар бўйича бир қийматли тузиладиган N - зонали потенциални белгилаймиз.

Лемма 1.1. Агар (1.4), (1.5) шартлар бажарилса, у ҳолда ушбу

$$|q_N(x)| < a_1, \ x \in R^1 \tag{1.1′}$$

$$|q'_N(x)| < 2a_1^2 + 4a_2 + 2a_1, \ x \in R^1 \tag{1.2′}$$

$$|q''_N(x)| < 2a_1^2 + 4a_2, \ x \in R^1 \tag{1.3′}$$

баҳолашлар ўринли бўлади.

Исбот: Аввало ($1.1'$) ва ($1.3'$) тенгсизликларни исбот қиламиз. Бунинг учун (1.1), (1.2) излар формулаларидан (Б.М.Левитан [9]) фойдаланамиз. $\xi_k(t) \in [\lambda_k, \mu_k]$ бўлгани учун

$$\left|q_N(t)\right| \le \sum_{k=1}^{N} \left|\xi_k(t) - \lambda_k\right| + \sum_{k=1}^{N} \left|\mu_k - \xi_k(t)\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (\xi_k(t) - \lambda_k) + \sum_{k=1}^{N} (\mu_k - \xi_k(t)) = \sum_{k=1}^{N} (\mu_k - \lambda_k) < \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k) = a_1 , \qquad (1.6)$$

бўлади. Худди шундай

$$\left|q''_N(t)\right| \le 2\left|q_N^2(t)\right| + 2\sum_{k=1}^{N} (\mu_k^2 - \lambda_k^2) <$$

$$< 2a^2{}_1 + 4\sum_{k=1}^{N} \mu_k(\mu_k - \lambda_k) < 2a_1^2 + 4a_2 . \qquad (1.7)$$

Энди эса, (1.1`) ва (1.3`) дан (1.2`) ни келтириб чиқарамиз.Аввало қуйидаги баҳолашни келтириб чиқарамиз:

$$\left|q'_N(x)\right| = \left|\int_0^x q''_N(t)dt + q'_N(0)\right| \le (2a_1^2 + 4a_2)\left|x\right| + \left|q'_N(0)\right|. \qquad (1.4`)$$

1-ҳол. $x > 0$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$(e^{-t}(q'_N(t) + q_N(t)))' = -e^{-t} \cdot (q'_N(t) + q_N(t)) + e^{-t}(q''_N(t) + q'_N(t)) =$$
$$= e^{-t} \cdot (q''_N(t) - q_N(t))$$

айниятни $[x;\infty)$ оралиқда интегралласак, (1.4`) га асосан

$$-e^{-x} \cdot (q'_N(x) + q_N(x)) = \int_x^{\infty} e^{-t}(q''_N(t) - q_N(t))\,dt \qquad (1.5`)$$

келиб чиқади, чунки

$$\left|e^{-t}(q'_N(t) + q_N(t))\right| \le e^{-t}((2a_1^2 + 4a_2)\left|t\right| + \left|q'_N(0)\right| + a_1) \to 0, \quad (t \to \infty).$$

(1.5`) га биноан ушбу

$$q'_N(x) = -q_N(x) - e^x \cdot \int_x^{\infty} e^{-t}(q''_N(t) - q_N(t))dt \qquad (1.6`)$$

айният ўринли бўлади. Бунга кўра

$$\left|q'_N(x)\right| < a_1 + e^x \cdot \int_x^{\infty} e^{-t} \cdot (2a_1^2 + 4a_2 + a_1)dt = 2a_1^2 + 4a_2 + 2a_1 .$$

Лемма 1.1 исботланди.

Арцел теоремасига кўра $\{q_N(x)\}_{N=1}^{\infty}$ функциялар тўплами ҳар бир чегараланган кесмада предкомпакт тўплам бўлади. Демак, бу тўпламдан шундай $q_{N_k}(x)$ қисмий кетма – кетлик ажратиш мумкинки, бунда

$$q_{N_k}(x) \underset{\rightarrow}{\overset{\rightarrow}{}} q(x), \ (k \to \infty), \quad x \in [a,b] \tag{1.8}$$

ўринли бўлади. $[a,b]$ кесма ихтиёрий.

Лемма 1.1 га асосан ҳар бир лимитни функция $q(x)$ учун

$$\left|q(x)\right| \leq a_1$$

тенгсизлик ўринли.

Қуйидаги

$$-y''+q_{N_k}(x)y = \lambda y, \ (-\infty < x < \infty), \ k = 1,2,... \tag{1.9}$$

$$-y''+q(x)y = \lambda y, \ (-\infty < x < \infty), \tag{1.10}$$

тенгламаларни қўриб чиқамиз. Бу ердаги $q(x)$ функция (1.8) дан олинди.

(1.9) ва (1.10) тенгламаларга мос келувчи Вейл – Титчмарш функцияларини мос равишда $m_k^+(z), \ m_k^+(z)$ ва $m^+(z), \ m^-(z)$ орқали белгилаймиз.

Лемма 1.2. z нинг юқори (пастки) ярим текисликда ётадиган қийматлари учун

$$\lim_{k \to \infty} m_k^+(z) = m^+(z), \quad \lim_{k \to \infty} m_k^-(z) = m^-(z) .$$

Исбот. Биринчи тенгликни исботлаймиз (иккинчиси шунга ўхшаш тарзда исбот қилинади). (1.9) тенгламанинг ушбу

$$\begin{cases} \theta_k(0,\lambda) = 1 \\ \theta'_k(0,\lambda) = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \varphi_k(0,\lambda) = 0 \\ \varphi'_k(0,\lambda) = 1 \end{cases}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини $\theta_k(x,\lambda), \ \varphi_k(x,\lambda)$ орқали белгилаймиз.Ушбу

$$\psi_k^+(x,z) = \theta_k(x,z) + m_k^+(z)\varphi_k(x,z)$$

функция орқали (1.9) тенгламаларнинг $+\infty$ га мос келувчи Вейл ечимларини белгилаймиз.

z нинг ҳар бир тайинланган қийматида

$$\theta_k(x,z) \underset{\to}{\overset{\to}{}} \theta(x,z), \quad \varphi_k(x,z) \underset{\to}{\overset{\to}{}} \varphi(x,z), \ (k\to\infty), \ x\in[a;b]$$

ўринли. Бу ерда $[a,b]$ ихтиёрий кесма.

Вейл – Титчмарш функциясининг ва Вейл ечимининг асимптотикаларидан ([9], 2-боб) $0<\varepsilon<\arg z<\pi-\varepsilon$ соҳада ушбу

$$\left|m_k^+(z)\right| \quad \text{ва} \quad \int_0^\infty \left|\psi_k^+(x,z)\right|^2 dx$$

функциялар k га нисбатан текис чегараланганлиги келиб чиқади.Шунинг учун z нинг тайинланган қийматида Больцано-Вейерштрасс теоремасига асосан $\{N_{k_m}\}$ қисмий кетма – кетлик топилиб,

$$m_{k_m}^+(z)\to m^+(z) \quad (m\to\infty)$$

ва

$$\int_0^\infty \left|\psi^+(x,z)\right|^2 dx < \infty$$

бўлади, яъни

$$\psi^+(x,z)=\theta(x,z)+m^+(z)\varphi(x,z)$$

функция (1.10) тенгламанинг $+\infty$ га мос келувчи Вейл ечими бўлади. $q(x)$ чегараланганлиги учун $\psi^+(x,z)$ Вейл ечими ягона бўлади, яъни Вейл – Титчмарш функцияси $m^+(z)$ ягона бўлади, бошқача қилиб айтганда $\{m_k^+(z)\}$ кетма – кетликнинг лимитик нуқталари устма – уст тушади, улар фақат $m^+(z)$ дан иборат бўлади. Демак, N_{k_m} қисмий кетма – кетликнинг танланиши шарт эмас экан. **Лемма 1.2** исботланди.

Энди (1.4) ва (1.5) шартларга қўшимча равишда қуйидаги

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}<\infty, \tag{1.11}$$

шарт ҳам бажарилади деб ҳисоблаймиз.

Мисоллар. (1.3), (1.4), (1.5), (1.11) шартларни қаноатлантирадиган λ_n, μ_n кетма-кетликларга мисоллар келтирамиз:

1. $$\begin{cases} \lambda_n = n^2 + \dfrac{1}{n^4} \\ \mu_n = n^2 + \dfrac{2}{n^4} \end{cases}, \qquad n = 1,2,...$$

2. $$\begin{cases} \lambda_n = n^2 + \dfrac{a}{n^4} \\ \mu_n = n^2 + \dfrac{a+\varepsilon}{n^4} \end{cases}, \quad a > 0,\ 0 < \varepsilon < 1,\ n = 1,2,...$$

3. $$\begin{cases} \lambda_n = n^2 + \dfrac{1}{n^4 + 2\varepsilon} \\ \mu_n = n^2 + \dfrac{1}{n^4 + \varepsilon} \end{cases}, \ 0 < \varepsilon < 1, \quad n = 1,2,...$$

4. $$\begin{cases} \lambda_n = n^2 + \dfrac{1}{n^4 + 2a} \\ \mu_n = n^2 + \dfrac{1}{n^4 + a} \end{cases}, \quad a > 0 \quad n = 1,2,... \ .$$

1-мисолни кўриб чиқамиз, яъни (1.3), (1.4), (1.5), (1.11) шартларни бажарилишини кўрсатамиз:

1) $\lambda_n < \mu_n < \lambda_{n+1}$,

$$n^2 + \frac{1}{n^4} < n^2 + \frac{2}{n^4} < (n+1)^2 + \frac{1}{(n+1)^4},$$

$$n^2 + \frac{2}{n^4} < n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{(n+1)^4},$$

$$\mu_n = n^2 + \frac{2}{n^2} \le n^2 + 2 \le n^2 + 2n \le n^2 + 2n + 1 + \frac{1}{(n+1)^4} = \lambda_{n+1};$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^4} < \infty$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n (\mu_n - \lambda_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2 + \dfrac{2}{n^2}) \cdot \dfrac{1}{n^4} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^6}) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^6} < \infty$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+\frac{1}{n^4}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$.

Демак, юқоридаги шартларнинг ҳаммаси бажарилар экан.

(1.11) шартдан ушбу

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-z}{\lambda_k},\qquad \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-z}{\lambda_k}\cdot\frac{\mu_k-z}{\lambda_k}$$

чексиз кўпайтмалар яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.Ҳақиқатан ҳам

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-z}{\lambda_k}=\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{\xi_k-\lambda_k-z}{\lambda_k})=e^{\ln\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{\xi_k-\lambda_k-z}{\lambda_k})}=e^{\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\frac{\xi_k-\lambda_k-z}{\lambda_k})},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1+\frac{\xi_k-\lambda_k-z}{\lambda_k})\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda_k-z}{\lambda_k}\sim c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k},\qquad |z|\le M$$

ва охирги қатор яқинлашувчи бўлгани учун ушбу

$$\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-z}{\lambda_k}$$

чексиз кўпайтма ҳам яқинлашувчи бўлади.

Қуйидаги белгилашларни киритиб оламиз:

$$g(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-z}{\lambda_k},\qquad f(z)=z\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k-z}{\lambda_k}\cdot\frac{\mu_k-z}{\lambda_k} .$$

Чекли зонали потенциаллар назариясида қуйидаги кўпҳадлар киритилган эди ([9], 8-боб, 1-§):

$$R_N(z)=z(z-\lambda_1)(z-\mu_1)...(z-\lambda_N)(z-\mu_N),$$

$$P_N(z)=(z-\xi_1)(z-\xi_2)...(z-\xi_N),$$

$$Q_N(z)=P_N(z)\cdot\sum_{j=1}^{N}\frac{\sigma_j\sqrt{-R_N(\xi_j)}}{P_N'(\xi_j)\cdot(z-\xi_j)},\sigma_j=\pm1,$$

$$S_N(z)=\frac{P_N(z)+Q_N^2(z)}{P_N(z)}=(z-\tau_0^{(N)})(z-\tau_1^{(N)})...(z-\tau_N^{(N)}),$$

$$\tau_0^{(N)}\in(-\infty,0],\quad \tau_k^{(N)}\in[\lambda_k,\mu_k],\quad k=1,2,...,N .$$

Қуйидаги

$$P_N(z)S_N(z) - Q_N^2(z) = R_N(z)$$

айниятнинг иккала томонини ҳам $\prod_{k=1}^{N} \lambda_k^2$ га бўлсак,

$$g_N(z)h_N(z) - k_N^2(z) = f_N(z) \tag{1.12}$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$f_N(z) = z\prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k - z}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - z}{\lambda_k},$$

$$g_N(z) = \prod_{k=1}^{N} \frac{\xi_k - z}{\lambda_k},$$

$$h_N(z) = (z - \tau_0^{(N)})\prod_{k=1}^{N} \frac{\tau_k^{(N)} - z}{\lambda_k},$$

$$k_N(z) = g_N(z)\sum_{j=1}^{N} \frac{\sigma_j\sqrt{-f_N(\xi_j)}}{g'_N(\xi_j)(z - \xi_j)}.$$

(1.11) шартдан комплекс текисликдаги ихтиёрий компакт тўпламда

$$g_N(z) \underset{\to}{\overset{\to}{}} g(z), \quad f_N(z) \underset{\to}{\overset{\to}{}} f(z), \quad (N \to \infty)$$

ўринли бўлиши келиб чиқади.

$\{h_N(z)\}$ функциялар тўплами ҳар бир компакт тўпламда чегараланганлигини кўрсатиш мақсадида аввало, $\{\tau_0^{(N)}\}$ сонларнинг чегараланганлигини кўрсатамиз . $\tau_0^{(N)}$ сон

$$\begin{cases} -y'' + q_N(x)y = \lambda y, & (-\infty < x \le 0) \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

ёки

$$\begin{cases} -y'' + q_N(x)y = \lambda y, & (0 \le x < \infty) \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

масаланинг хос қиймати бўлиши бизга маълум ([9], 8-боб). $q_N(x)$ текис чегараланганлиги учун (1.13) ва (1.14) масалаларнинг спектрлари қуйидан текис чегараланган. Демак, $\{\tau_0^{(N)}\}$, $(\tau_0^{(N)} \in (-\infty; 0])$ сонлар чегараланган экан.

Ушбу

$$\left|h_N(z)\right| \le \left\|z\right| + \left|\tau_0^{(N)}\right\| \prod_{k=1}^{N} \frac{\left|\tau_k^{(N)} - z\right|}{\lambda_k} \le$$

$$\le \left\|z\right| + \left|\tau_0^{(N)}\right\| \prod_{k=1}^{N} \left|\frac{\tau_k^{(N)} - \lambda_k - z}{\lambda_k} + 1\right| \le$$

$$\le \left\|z\right| + \left|\tau_0^{(N)}\right\| \prod_{k=1}^{N} \left(1 + \frac{\mu_k - \lambda_k + \left|z\right|}{\lambda_k}\right)$$

баҳолашлардан ва (1.11) шартдан $\{h_N(z)\}$ функцияларнинг ҳар бир компакт тўпламда текис чегараланганлиги келиб чиқади.

$\{f_N(z)\}$, $\{g_N(z)\}$, $\{h_N(z)\}$ функцияларнинг чегараланганлигидан ва (1.12) айниятдан $\{k_N(z)\}$ функцияларнинг ҳар бир компакт тўпламда текис чегараланганлиги келиб чиқади.

Шунинг учун шундай $\{N_k\}$ қисмий кетма – кетлик топиладики, бунда

$$\lim_{k\to\infty} h_{N_k}(z) = h(z), \quad \lim_{k\to\infty} k_{N_k}(z) = k(z)$$

бўлади. (1.12) айниятда лимитга ўтсак,

$$g(z)h(z) - k^2(z) = f(z) \tag{1.15}$$

айният келиб чиқади. (1.15) да $z = \xi_k$ десак,

$$k(\xi_k) = \sigma_k \sqrt{-f(\xi_k)}, \quad \sigma_k = \pm 1 \tag{1.16}$$

ҳосил бўлади.

Чекли зонали потенциалларни Вейл - Титчмарш функциялари учун олинган тасвирга кўра

$$m_k^+(z) = \frac{k_{N_k}(z)}{g_{N_k}(z)} + i\frac{\sqrt{f_{N_k}(z)}}{g_{N_k}(z)},$$

$$m_k^-(z) = \frac{k_{N_k}(z)}{g_{N_k}(z)} - i\frac{\sqrt{f_{N_k}(z)}}{g_{N_k}(z)},$$

бўлади. Бу тенгликларда лемма 1.1 га асосланиб, лимитга ўтсак,

$$m^{+}(z)=\frac{k(z)}{g(z)}+i\frac{\sqrt{f(z)}}{g(z)},$$

$$m^{-}(z)=\frac{k(z)}{g(z)}-i\frac{\sqrt{f(z)}}{g(z)} \qquad (1.17)$$

келиб чиқади. Ушбу

$$\xi(\lambda)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}-\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{m^{+}(x+iy)-m^{-}(x+iy)}\right\}dx,$$

$$\eta(\lambda)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}\operatorname{Im}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{m^{+}(x+iy)+m^{-}(x+iy)}{m^{+}(x+iy)-m^{-}(x+iy)}\right\}dx,$$

$$\zeta(\lambda)=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\pi}\int_0^{\lambda}-\operatorname{Im}\left\{\frac{m^{+}(x+iy)\cdot m^{-}(x+iy)}{m^{+}(x+iy)-m^{-}(x+iy)}\right\}dx$$

формулаларга (1.17) ларни қўйсак, (1.10) лимитик масаланинг спектрал матрица – функцияси учун қуйидаги

$$\frac{d\xi(\lambda)}{d\lambda}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{g(\lambda)}{\pm\sqrt{f(\lambda)}}, & \lambda\in E\\ 0, & \lambda\notin E\end{cases}$$

$$\frac{d\eta(\lambda)}{d\lambda}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{k(\lambda)}{\pm\sqrt{f(\lambda)}}, & \lambda\in E\\ 0, & \lambda\notin E\end{cases}$$

$$\frac{d\zeta(\lambda)}{d\lambda}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{h(\lambda)}{\pm\sqrt{f(\lambda)}}, & \lambda\in E\\ 0, & \lambda\notin E\end{cases}$$

формулаларни оламиз.Бу ердаги $\pm$ ишоралар $\dfrac{d\xi(\lambda)}{d\lambda}\geq 0$ шарт ёрдамида аниқланади.

Теорема 1.1.1 (1.1), (1.2), (1.11) шартлар бажарилсин. У ҳолда

$$\lim_{N\to\infty}h_N(z)=h(z),\quad \lim_{N\to\infty}k_N(z)=k(z). \qquad (1.18)$$

Исбот. Қуйидаги

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\qquad 0\leq x<\infty \qquad (1.19)$$

$$y(0) = 0 \tag{1.20}$$

масаланинг $\rho_+(\lambda)$ спектрал функцияси учун ушбу

$$\rho_+(\lambda) = \lim_{v \to o} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} - \operatorname{Im}\{ m^+(u + iv)\} du$$

формула ўринли ([10], 2-боб, 5-§). (1.21) формулага (1.17) ни қўйсак ва

$$\lambda \in \overset{\circ}{E} = (0, \lambda_1) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mu_k, \lambda_{k+1})$$

деб олсак,

$$\frac{d\rho_+(\lambda)}{d\lambda} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)} \tag{1.22}$$

келиб чиқади. (1.19)+(1.20) чегаравий масала дискрет спектрга ҳам эга бўлиши мумкин. Дискрет спектр $g(z)$ функция илдизларидан айримлари билан устма – уст тушади, яъни у $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сонлар орасида бўлади. Ушбу

$$\rho_+(\xi_k + 0) - \rho_+(\xi_k - 0) = \operatorname*{res}_{\xi_k} \left\{ m^+(z) \right\} = \frac{\sigma_k \sqrt{-f(\xi_k)} + \sqrt{-f(\xi_k)}}{g'(\xi_k)} \tag{1.23}$$

тенглик ўринли бўлади. (1.22) ва (1.23) формулаларга кўра, лимитик потенциалларнинг барчаси учун $\rho_+(\lambda)$ спектрал функция битта бўлади. $\rho_+(\lambda)$ орқали потенциал ягона аниқланганлиги учун лимитик потенциаллар бир – бири билан устма – уст тушади. Демак, $x \geq 0$ бўлганда $q_N(x)$ аниқ битта потенциалга интилади. Худди шу тарзда $x \leq 0$ бўлган ҳолда ҳам шу фикр тўђрилиги кўрсатилади. Бундан ташқари лимитик потенциал чегараланган бўлади. Демак, унга фақат битта спектрал матрица – функция мос келади. Бундан эса (1.18) лимитларнинг мавжуд бўлиши келиб чиқади. **Теорема 1.1.1 исботланди.**

(1.1) ва (1.2) формулаларда $N \to \infty$ да лимитга ўтсак,

$$q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t) \right], \tag{1.24}$$

$$q^2(t) - \frac{1}{2} q''(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_k^2 + \mu_k^2 - 2\xi_k^2(t) \right] \tag{1.25}$$

излар формулалари келиб чиқади. Бу ерда $\xi_k(t)$, $k=\overline{1,\infty}$ лар $q(x+t)$ потенциалга мос келувчи спектрал параметрлардир.

2-§. Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқариш

Аввало биз ушбу

$$-y''+q(x+t)y=\lambda y,\qquad (-\infty<x\le 0),\quad t\in R^1 \tag{2.1}$$

$$y(0)=0 \tag{2.1'}$$

масаланинг Вейл – Титчмарш функциясини ҳисоблаймиз. Бу ерда $q(x)$ 1-§ да тузиб олинган чексиз зонали потенциал. $q(x)$ чегаралланганлиги учун ушбу

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\qquad \infty<x\le 0 \tag{2.2}$$

$$y(0)=0 \tag{2.2'}$$

масаланинг Вейл – Титчмарш функцияси ягона бўлади. $\theta(x,\lambda)$ ва $\varphi(x,\lambda)$ орқали (2.2) тенгламанинг

$$\begin{cases}\theta(0,\lambda)=1\\ \theta'(0,\lambda)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\varphi(0,\lambda)=0\\ \varphi'(0,\lambda)=1\end{cases} \tag{2.3}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини, $u(x,\lambda)$ ва $v(x,\lambda)$ орқали эса (2.1) тенгламанинг

$$\begin{cases}u(0,\lambda)=1\\ u'(0,\lambda)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}v(0,\lambda)=0\\ v'(0,\lambda)=1\end{cases} \tag{2.4}$$

бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз.

$\theta(x+t,\lambda)$ ва $\varphi(x+t,\lambda)$ функциялар (2.1) тенгламанинг ечимлари бўлиши равшан. Демак, улар $u(x,\lambda)$ ва $v(x,\lambda)$ орқали чизиқли ифодаланади:

$$\theta(x+t,\lambda)=A_1u(x,\lambda)+A_2v(x,\lambda), \tag{2.5}$$

$$\varphi(x+t,\lambda)=B_1u(x,\lambda)+B_2v(x,\lambda). \tag{2.6}$$

(2.5) ва (2.6) тенгликларда $x=0$ десак,

$$A_1=\theta(t,\lambda), \tag{2.7}$$

$$B_1=\varphi(t,\lambda) \tag{2.8}$$

келиб чиқади. (2.5) ва (2.6) тенгликлардан x бўйича ҳосила олиб $x=0$ десак,

$$A_2 = \theta'(t,\lambda)\,, \tag{2.9}$$

$$B_2 = \varphi'(t,\lambda) \tag{2.10}$$

келиб чиқади. (2.7) – (2.10) ифодаларни (2.5) ва (2.6) тенгламаларга қўйиб, ушбу

$$\theta(x+t,\lambda) = u(x,\lambda)\theta(t,\lambda) + v(x,\lambda)\theta'(t,\lambda) \tag{2.11}$$

$$\varphi(x+t,\lambda) = u(x,\lambda)\,\varphi(t,\lambda) + v(x,t)\,\varphi'(t,\lambda) \tag{2.12}$$

айниятларга эга бўламиз.Булардан эса

$$\begin{gathered}\psi^+(x+t,\lambda) = \theta(x+t,\lambda) + m^+(\lambda)\varphi(x+t,\lambda) = \\ = u(x,\lambda)\left[\theta(t,\lambda) + m^+(\lambda)\varphi(t,\lambda)\right] + \\ + v(x,\lambda)\times\left[\theta'(t,\lambda) + m^+(\lambda)\varphi'(t,\lambda)\right] \in L_2(0;\infty)\end{gathered} \tag{2.13}$$

келиб чиқади. Вейл – Титчмарш функцияси ягона бўлганлиги учун

$$m^+(\lambda,t) = \frac{\theta'(t,\lambda) + m^+(\lambda)\varphi(t,\lambda)}{\theta(t,\lambda) + m^+(\lambda)\varphi(t,\lambda)} \tag{2.14}$$

формула ўринли бўлади.

Олдинги параграфда $m^+(\lambda)$ учун олинган ушбу

$$m^+(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{g(\lambda)} + i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)} \tag{2.15}$$

формулани (2.14) га қўйсак, қуйидаги

$$m^+(\lambda,t) = \frac{g(\lambda)\theta'(t,\lambda) + k(\lambda)\varphi'(t,\lambda) + i\sqrt{f(\lambda)}\varphi'(t,\lambda)}{g(\lambda)\theta(t,\lambda) + k(\lambda)\varphi(t,\lambda) + i\sqrt{f(\lambda)}\varphi(t,\lambda)} \tag{2.16}$$

формула ҳосил бўлади.Бу тенгликда махражни иррационалликдан қутқарсак ва олдинги параграфда олинган ушбу

$$g(\lambda)h(\lambda) - k^2(\lambda) = f(\lambda) \tag{2.17}$$

айниятни ҳисобга олсак,

$$m^+(\lambda) = \frac{k(\lambda,t)}{g(\lambda,t)} + i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda,t)} \tag{2.18}$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$g(\lambda,t) = g(\lambda)\theta^2(t,\lambda) + 2k(\lambda)\theta(t,\lambda)\varphi(t,\lambda) + h(\lambda)\varphi^2(t,\lambda)\,, \tag{2.19}$$

$$k(\lambda,t) = g(\lambda)\theta(t,\lambda)\theta'(t,\lambda) + k(\lambda)\left[\theta'(t,\lambda)\lambda(t,\lambda) + \theta(t,\lambda)\varphi'(t,\lambda)\right] +$$

$$+ h(\lambda)\phi(t,\lambda)\phi'(t,\lambda)\,. \tag{2.20}$$

Буларга қўшимча қилиб, ушбу

$$h(\lambda,t) = g(\lambda)\theta'^2(t,\lambda) + 2k(\lambda)\theta'(t,\lambda)\varphi'(t,\lambda) + h(\lambda)\varphi'^2(t,\lambda) \tag{2.21}$$

функцияни киритамиз. У ҳолда (2.19), (2.20), (2.21) тенгликларни битта матрицавий тенглик кўринишида ёзиш мумкин бўлади:

$$\begin{pmatrix} g(\lambda,t) & k(\lambda,t) \\ k(\lambda,t) & h(\lambda,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(t,\lambda) & \varphi(t,\lambda) \\ \theta'(t,\lambda) & \varphi'(t,\lambda) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta(t,\lambda) & \theta'(t,\lambda) \\ \phi(t,\lambda) & \phi'(t,\lambda) \end{pmatrix}\,. \tag{2.22}$$

(2.22) тенгликда детерминантларга ўтсак ва матрицалар кўпайтмасининг детерминанти, детерминантлар кўпайтмасига тенг бўлишини ҳамда ушбу

$$\theta(t,\lambda)\phi'(t,\lambda) - \phi(t,\lambda)\theta'(t,\lambda) = 1 \tag{2.23}$$

айниятни ҳисобга олсак,

$$g(\lambda,t)h(\lambda,t) - k^2(\lambda,t) = g(\lambda)h(\lambda) - k^2(\lambda) \tag{2.24}$$

келиб чиқади. (2.17) ва (2.24) га кўра

$$g(\lambda,t)h(\lambda,t) - k^2(\lambda,t) = f(\lambda) \tag{2.25}$$

бўлади.

Лемма 2.1. $g(\lambda,t),\ h(\lambda,t),\ k(\lambda,t)$ функциялар учун ушбу

$$k(\lambda,t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial g(\lambda,t)}{\partial t}, \tag{2.26}$$

$$h(\lambda,t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 g(\lambda,t)}{\partial t^2} + (\lambda - q(t))\,g(\lambda,t) \tag{2.27}$$

айниятлар ўринли.

Исбот. (2.19) дан t бўйича ҳосила олсак ва (2.20) ни ҳисобга олсак, (2.26) дарҳол келиб чиқади. (2.19) дан

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 g(\lambda,t)}{\partial t^2} = g(\lambda)\theta'^2 + g(\lambda)\theta\theta'' +$$

$$+ k(\lambda)\cdot\left[\theta''\varphi + 2\theta'\varphi' + \theta\varphi''\right] + h(\lambda)\varphi'^2 + h(\lambda)\varphi\varphi'' \qquad (2.28)$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\theta'' = [q(t) - \lambda]\theta, \quad \varphi'' = [q(t) - \lambda]\varphi \qquad (2.29)$$

эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 g(\lambda,t)}{\partial t^2} = h(\lambda,t) + [q(t) - \lambda]g(\lambda,t) \qquad (2.30)$$

хосил бўлади. **Лемма 2.1 исботланди.**

Лемма 2.2. Агар $\lambda \in \overset{0}{E}$ бўлса,

$$sign g(\lambda,t) = sign h(\lambda,t) = sign g(\lambda) = sign h(\lambda) \qquad (2.31)$$

тенгликлар ўринли бўлади.

Исбот. (2.25) га кўра

$$g(\lambda,t)h(\lambda,t) = f(\lambda) + k^2(\lambda,t)\,. \qquad (2.32)$$

$\lambda \in \overset{0}{E}$ бўлгани учун $f(\lambda) > 0$ бўлади. Бундан $g(\lambda,t)h(\lambda,t) > 0$ келиб чиқади, яъни

$$sign g(\lambda,t) = sign h(\lambda,t)$$

тенглик ўринли. Бу ерда $t = 0$ десак,

$$sign g(\lambda) = sign h(\lambda)$$

келиб чиқади. (2.19) тенгликка кўра

$$g(\lambda)g(\lambda,t) = \left[g(\lambda)\theta(t,\lambda) + k(\lambda)\varphi(t,\lambda)\right]^2 + f(\lambda)\varphi^2(t,\lambda)$$

бўлади. Бунда эса, $\lambda \in \overset{0}{E}$ бўлгани учун $g(\lambda)g(\lambda,t) > 0$, яъни

$$sign g(\lambda,t) = sign g(\lambda)$$

келиб чиқади. **Лемма 2.2 исботланди.**

Натижа. $g(\lambda,t)$ функция хар бир $[\lambda_k, \mu_k]$ лакунада камида битта илдизга эга.

Лемма 2.3. $g(\lambda,t)$ функциянинг (λ га нисбатан) барча илдизлари ҳақиқий.

Исбот. $\lambda_0 \in C / R^1$ сон учун $g(\lambda_0, t) = 0$ бўлсин деб фараз қилайлик. Қуйидаги

$$m^+(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{g(\lambda)} + i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)}$$

$$m^-(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{g(\lambda)} - i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)}$$

ифодага кўра

$$g(\lambda)\psi^+(t,\lambda) = g(\lambda)\theta(t,\lambda) + k(\lambda)\varphi(t,\lambda) + i\sqrt{f(\lambda)}\varphi(t,\lambda)$$

$$g(\lambda)\psi^-(t,\lambda) = g(\lambda)\theta(t,\lambda) + k(\lambda)\varphi(t,\lambda) - i\sqrt{f(\lambda)}\varphi(t,\lambda)$$

бўлади. Буларни бир – бирига кўпайтирсак,

$$g^2(\lambda)\psi^+(t,\lambda)\psi^-(t,\lambda) = g(\lambda)g(t,\lambda)$$

бўлади. Бу ерда $\lambda = \lambda_0$ десак ва $g(\lambda) \neq 0$ ни ҳисобга олсак,

$$\psi^+(t,\lambda_0)\psi^-(t,\lambda_0) = 0$$

келиб чиқади. Демак,

$$\psi^+(t,\lambda_0) = 0 \quad \text{ёки} \quad \psi^-(t,\lambda_0) = 0$$

бўлади. Айтайлик $\psi^+(t,\lambda_0) = 0$ бўлсин. У ҳолда ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q(x+t)y = \lambda y, \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad -\infty < x \leq 0 \tag{2.33}$$

чегаравий масала учун $y(x) = \psi^+(x+t,\lambda_0) \neq 0$ функция $\lambda = \lambda_0$ хос қийматга мос келувчи хос функция бўлади. (2.33) комплекс хос қийматга эга бўлмаслиги бизни зиддиятга келтиради, чунки $\lambda_0 \notin R^1$. **Лемма 2.3 исботланди.**

(2.19) – (2.21) тенгликларга мувофиқ $g(\lambda,t)$, $k(\lambda,t)$, $h(\lambda,t)$ функциялар λ га нисбатан бутун функциялар бўлади. Руше теоремасидан фойдаланиб, $g(\lambda,t)$ функция ҳар бир $[\lambda_k, \mu_k]$ лакунада фақат биттадан илдизга эга бўлишини кўрсатиш мумкин. $g(\lambda,t)$ нинг илдизларини $\xi(t)\in[\lambda_k,\mu_k]$ орқали белгилаймиз. Ушбу

$$g(\lambda,t)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\lambda}{\lambda_k} \tag{2.34}$$

ёйилма ўринли бўлишини Лиувилл теоремасидан фойдаланиб кўрсатиш мумкин. Бунинг учун (2.19) тенглик ва биринчи параграфдаги $g(\lambda)$ учун ёзилган чексиз кўпайтмани ишлатиб (2.34) тенглик чап томонининг ўнг томонга нисбати чегараланган голоморф функция бўлишини кўрсатиш кифоя. Энди Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз. (2.34) га кўра

$$\left.\frac{g(\lambda,t)}{\partial t}\right|_{\lambda=\xi_j(t)}=\frac{\xi'_j(t)}{\lambda_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\xi_j(t)}{\lambda_k} \tag{2.35}$$

бўлади. (2.25) тенгликда $\lambda=\xi_j(t)$ десак,

$$-k^2(\xi_j(t),t)=f(\xi_j(t)),$$

$$k(\xi_j(t),t)=\sigma_j(t)\sqrt{-f(\xi_j(t))} \tag{2.36}$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$\sigma_j(t)=signk\ (\xi_j(t),t). \tag{2.37}$$

(2.26) тенгликда $\lambda=\xi_j(t)$ десак,

$$\left.\frac{\partial g(\lambda,t)}{\partial t}\right|_{\lambda=\xi_j(t)}=2k(\xi_j(t),t) \tag{2.38}$$

келиб чиқади. (2.38) га (2.36) ни қўйсак,

$$\frac{\xi'_{kj}(t)}{\lambda_j}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\xi_{kj}(t)}{\lambda_k}=2\sigma_j(t)\sqrt{-f(\xi_j(t))} \tag{2.39}$$

бўлади. Бунга кўра

$$\xi'_{kj}(t) = \frac{2\lambda_j \sigma_j(t)\sqrt{-f(\xi_j(t))}}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_j(t)}{\lambda_k}}, \quad j = 1, 2, \ldots \qquad (2.40)$$

бўлади.

II БОБ. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм-Лиувилл оператори учун тескари масала.

1-§. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл масаласининг чегарвий шартини спектрал берилганлар орқали ифодалаш

Ярим ўқда берилган қуйидаги

$$Hy = -y''+q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty \tag{3.1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \alpha \in (0,\pi) \tag{3.2}$$

Штурм – Лиувилл чегаравий масаласини кўриб чиқамиз. Бу ерда $q(x)$ коэффициент 1-§ да киритилган чексиз зонали потенциал. $\theta_\alpha(x,\lambda)$ ва $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ орқали (3.1) тенгламанинг қуйидаги бошланђич шартларни қаноатлантирувчи ечимларини белгилаймиз:

$$\theta_\alpha(0,\lambda) - \cos\alpha, \ \theta'_\alpha(0,\lambda) = \sin\alpha,$$

$$\varphi_\alpha(0,\lambda) = -\sin\alpha, \ \varphi'_\alpha(0,\lambda) = \cos\alpha \ .$$

(3.1)+(3.2) масаланинг Вейл – Титчмарш функцияси $m_\alpha(\lambda)$ қуйидаги

$$\theta_\alpha(x,\lambda) + m_\alpha(\lambda)\varphi_\alpha(x,\lambda) \in L_2(0,\infty), \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0 \tag{3.3}$$

муносабатдан бир қийматли аниқланади, чунки $q(x)$ чегараланган функция 1-§ нинг натижаларига кўра

$$\theta(x,\lambda) + m^+(\lambda)\varphi(x,\lambda) \in L_2(0,\infty), \quad \mathrm{Im}\,\lambda \neq 0 \tag{3.4}$$

$$m^+(\lambda) = \frac{k(\lambda)}{g(\lambda)} + i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{g(\lambda)}. \tag{3.5}$$

(3.4) муносабатига ушбу

$$\theta(x,\lambda) = \theta_\alpha(x,\lambda)\cos\alpha - \varphi_\alpha(x,\lambda)\sin\alpha \tag{3.6}$$

$$\varphi(x,\lambda) = \theta_\alpha(x,\lambda)\sin\alpha + \varphi_\alpha(x,\lambda)\cos\alpha \tag{3.7}$$

ифодаларни қўямиз:

$$\theta_\alpha(x,\lambda)[\cos\alpha + m^+(\lambda)\sin\alpha] +$$
$$+\varphi_\alpha(x,\lambda)[-\sin\alpha + m^+(\lambda)\cos\alpha] \in L_2(0,\infty)\,. \tag{3.8}$$

(3.8) муносабатдан

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{-\sin\alpha + m^+(\lambda)\cos\alpha}{\cos\alpha + m^+(\lambda)\sin\alpha} \tag{3.9}$$

бўлиши келиб чиқади. (3.9) формулага (3,5) ифодани қўйиб

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{-g(\lambda)\sin\alpha + k(\lambda)\cos\alpha + i\sqrt{f(\lambda)}\cos\alpha}{g(\lambda)\cos\alpha + k(\lambda)\sin\alpha + i\sqrt{f(\lambda)}\sin\alpha} \tag{3,10}$$

бўлишини топамиз.

(3,10) тенгликда махражни иррационалликдан қутқарсак ва ушбу

$$g(\lambda)h(\lambda) - k^2(\lambda) = f(\lambda)$$

айнияти ҳисобга олсак,

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{[-g\sin\alpha + k\cos\alpha + i\sqrt{f}\cos\alpha][g\cos\alpha + k\sin\alpha - i\sqrt{f}\sin\alpha]}{(g\cos\alpha + k\sin\alpha)^2 + f\sin^2\alpha}\,, \tag{3.11}$$

яъни

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{-\frac{1}{2}g(\lambda)\sin 2\alpha + k(\lambda)\cos 2\alpha + h(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha + i\sqrt{f(\lambda)}}{(g\cos\alpha + k\sin\alpha)^2 + f\sin^2\lambda) : g} \tag{3.12}$$

келиб чиқади.

Вейл – Титчмарш функциясининг (3.12) кўринишига асосланган ҳолда қуйидаги функцияларни киритиб оламиз:

$$A(\lambda) = h(\lambda)\sin^2\alpha + g(\lambda)\cos^2\alpha + 2k(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{3.13}$$

$$C(\lambda) = h(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha - g(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha + k(\lambda)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,. \tag{3.14}$$

Агар буларга қўшимча қилиб ушбу

$$B(\lambda) = h(\lambda)\cos^2\alpha + g(\lambda)\sin^2\alpha - 2k(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha\,, \tag{3.15}$$

функцияни киритсак, (3.13), (3.14), (3.15) тенгликларни битта матрицавий тенглик кўринишида ёзиш мумкин бўлади:

$$\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \qquad (3.16)$$

(3.16) тенгликда детерминантларга ўтсак, ушбу

$$A(\lambda)B(\lambda) - C^2(\lambda) = f(\lambda) \qquad (3.17)$$

айният келиб чиқади.

Киритган белгилашлардан сўнг (3.12) қуйидаги кўринишни олади:

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} + i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{A(\lambda)}. \qquad (3.18)$$

(3.18) га асосан (3.1)+(3.2) масаланинг узлуксиз спектри

$$E_{ess} = R^1 \setminus \left\{ (-\infty, 0) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_k, \mu_k) \right\} \qquad (3.19)$$

тўпламдан иборат бўлади.

$\xi_n,\ n = 0,1,2,...$

орқали $A(\lambda)$

$$g(\lambda)A(\lambda) = (g(\lambda)\cos\alpha + k(\lambda)\sin\alpha)^2 + f(\lambda)\sin^2\alpha$$

функциянинг илдизларини белгилаймиз. Ушбу

тенгликдан $\lambda \in \overset{0}{E}_{ess}$ бўлганда $g(\lambda)A(\lambda) > 0$ бўлиши келиб чиқади, чунки $\lambda \in \overset{0}{E}_{ess}$ бўлганда $f(\lambda) > 0$ бўлиши бизга маълум. $g(\lambda)$ функция спектрнинг бўлакларида ўз ишорасини сақлаганлиги ва бир бўлакдан бошқа бўлакка ўтганда ишорасини қарама – қаршисига ўзгартириш сабабли $A(\lambda)$ функция лакуналарда камида биттадан илдизга эга бўлиши келиб чиқади. Агар (3.13) ифодадан фойдаланиб, ушбу

$$f_1(\lambda) = h(\lambda)\sin^2\alpha,\ f_2(\lambda) = g(\lambda)\cos^2\alpha + 2k(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha$$

функцияларни киритсак ва Руше теоремасини қўлласак, $A(\lambda)$ функция ҳар бир лакунада фақат биттадан илдизга эга бўлиши келиб чиқади, яъни

$$\xi_0 \in (-\infty, 0], \quad \xi_n \in [\lambda_n, \mu_n], \; n = 1,2,...$$

муносабатлар ўринли бўлади.

Таъриф – 1. $A(\lambda) = 0$ тенгламанинг илдизлари бўлган ушбу $\xi_n, \; n = 0,1,2,...$ сонларга ва ушбу $\sigma_n = signC \; (\xi_n), \; n = 0,1,2,...$ ишорларга (3.1)+(3.2) чегаравий масаланинг спектрал параметрлари дейилади.

Таъриф – 2. $\xi_n, \quad \sigma_n, \; n = 0,1,2,...$ спектрал параметрларга ва $\lambda_0, \lambda_n, \mu_n, n = 1,2,...$ узлуксиз спектрнинг четки нуқталарига (3.1)+(3.2) чегаравий масаланинг спектрал берилганлари дейилади.

(3.1)+(3.2) чегаравий масаланинг спектрал берилганларини топиш масаласига тўђри масала дейилади. Аксинча, спектрал берилганлар бўйича (3.1)+(3.2) масаладаги $q(x)$ коэффициентни ва $ctg\,\alpha$ ни топиш масаласига тескари масала дейилади.

Теорема 2.1.1 Қуйидаги тенгликлар ўринли

$$ctg\,\alpha = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{-f(\xi_n)}}{A_1'(\xi_n)}, \tag{3.20}$$

$$q(t) = 2ctg^2\alpha + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t)), \tag{3.21}$$

бу ерда

$$f(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k}, \tag{3.21}$$

$$A_1(\lambda) = (\lambda - \xi_0) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k} \tag{3.2}$$

ва $\xi_k(t), \; k = 0,1,2,...$ лар ушбу

$$-y'' + q(x+t)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty \tag{3.23}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \tag{3.24}$$

масаланинг спектрал параметрларидир. (t – хақийқий параметр).

Исбот. (3.1)+(3.2) масаланинг (3.18) Вейл-Титчмарш функцияси учун асимптотик формула олиб, уни классик асимптотик формула билан солиштирамиз. Шу мақсадда қуйидаги асимптотикаларни келтириб чиқарамиз.

$$\frac{g(\lambda)}{h(\lambda)} = \frac{1}{\lambda-\tau_0}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{\tau_k-\lambda} = \frac{1}{\lambda-\tau_0}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi_k-\tau_k}{\tau_k-\lambda}\right) = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda|\to\infty \quad, \qquad (3.25)$$

$$\frac{k(\lambda)}{h(\lambda)} = \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_k\sqrt{-f(\xi_k)}}{g'(\xi_k)(\lambda-\xi_k)} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \qquad |\lambda|\to\infty\,. \qquad (3.26)$$

Буларга кўра

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = \frac{h(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha - g(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha + k(\lambda)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{h(\lambda)\sin^2\alpha + g(\lambda)\cos^2\alpha + 2k(\lambda)\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - \dfrac{k(\lambda)}{h(\lambda)}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) - \dfrac{g(\lambda)}{2h(\lambda)}\cdot\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha + \dfrac{g(\lambda)}{h(\lambda)}\cos^2\alpha + 2\dfrac{k(\lambda)}{h(\lambda)}\sin\alpha\cos\alpha} = ctg\,\alpha + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda|\to\infty\,\cdot$$

(3.27)

(3.27) тенгликка асосланиб $\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)}$ функцияга Миттаг-Леффлер теоремасини қулласак, ушбу

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = ctg\,\alpha + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C(\xi_n)}{A_1'(\xi_n)(\lambda-\xi_n)} \qquad (3.28)$$

тенглик хосил бўлади. Қуйидаги

$$A(\lambda)B(\lambda) - C^2(\lambda) = f(\lambda)$$

айниятда $\lambda=\xi_n$ десак ва $\sigma_n = signC\,(\xi_n)$ эканини хисобга олсак,

$$C(\xi_n) = \sigma_n\sqrt{-f(\xi_n)} \qquad (3.29)$$

келиб чиқади.

$A(\lambda)$ бутун функция ўзинингноллари $\xi_n, n=0,1,2,...$ ва асимптотикаси

$$\frac{A(\lambda)}{h(\lambda)} = \sin^2\alpha + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad |\lambda|\to\infty$$

орқали бир қийматли аниқланади:

$$A(\lambda) = \sin^2\alpha(\lambda-\xi_0)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k-\lambda}{\lambda_k} \qquad (3.30)$$

Қулайлик учун

$$A_1(\lambda) = (\lambda - \xi_0)\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k} \tag{3.31}$$

функцияни киритиб оламиз.

(3.29), (3.30), (3.31) дан фойдаланиб, (3.28) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} = ctg\,\alpha + \frac{1}{\lambda \sin^2 \alpha}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n \sqrt{-f(\xi_n)}}{A_1'(\xi_n)} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to \infty \tag{3.32}$$

Энди эса ушбу $\dfrac{\sqrt{f(\lambda)}}{A_1(\lambda)}$ функциянинг асимптотикасини ўрганамиз:

$$\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{A_1(\lambda)} = \frac{\sqrt{\lambda \prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \dfrac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k}}}{(\lambda - \xi_0)\prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0}\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\xi_k - \lambda} \cdot \frac{\mu_k - \lambda}{\xi_k - \lambda}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0}\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda_k - \xi_k}{\xi_k - \lambda}\right)\cdot\left(1 + \frac{\mu_k - \xi_k}{\xi_k - \lambda}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0}\sqrt{\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{2\xi_k - \lambda_k - \mu_k}{\lambda - \xi_k} + \frac{(\xi_k - \lambda_k)(\xi_k - \mu_k)}{(\lambda - \xi_k)^2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0}\sqrt{\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{\lambda}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right)\right\}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda - \xi_0}\exp\left\{-\frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k\right) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{1}{1 - \dfrac{\xi_0}{\lambda}}\cdot\left\{1 - \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{1 + \frac{\xi_0}{\lambda} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}\cdot\left\{1 - \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left\{1 - \frac{1}{2\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) + \frac{\xi_0}{\lambda} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}}\left\{-2\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k)\right\} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}\right).$$

Демак, ушбу

$$\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{A_1(\lambda)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} - \frac{1}{2\lambda\sqrt{\lambda}}\left\{-2\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k)\right\} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2\sqrt{\lambda}}\right), \quad |\lambda| \to \infty \qquad (3.33)$$

асимптотик формула бажарилади. Ушбу

$$m_\alpha(\lambda) = \frac{C(\lambda)}{A(\lambda)} + i\frac{\sqrt{f(\lambda)}}{\sin^2\alpha A_1(\lambda)}$$

формулага (3.32) ва (3.33) ги ифодаларни қўйиб, қуйидаги асимптотикага эга бўламиз:

$$m_\alpha(\lambda) = ctg\,\alpha + \frac{i}{\sqrt{\lambda}\sin^2\alpha} + \frac{1}{\lambda\sin^2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n\sqrt{-f(\xi_n)}}{A_1'(\xi_n)} - \qquad (3.34)$$

$$-\frac{i}{2\lambda\sqrt{\lambda}\sin^2\alpha}\left\{-2\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k)\right\} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \qquad |\lambda| \to \infty .$$

Энди эса, $m_\alpha(\lambda)$ функция учун бошқа усул билан асимптотик формула оламиз. Аввало ушбу

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, \\ y'(0) = 0 \end{cases} \qquad 0 < x < \infty$$

масаланинг $m(\lambda)$ Вейл-Титчмарш функциясининг асимптотикасини келтириб чиқарамиз. В.А.Марченконинг [11] ишида Штурм-Лиувилл тенгламасининг қуйидаги ечимлар мавжуд бўлиши кўрсатилган:

$$y_1(x,\lambda) = \exp\left\{i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \sigma_1(t,\lambda)dt\right\} \in L_2(0,\infty)\ , \qquad \operatorname{Im}\lambda \neq 0$$

$$y_2(x,\lambda) = \exp\left\{-i\sqrt{\lambda}x + \int_0^x \sigma_2(t,\lambda)dt\right\} \notin L_2(-\infty,0)\ , \qquad \operatorname{Im}\lambda \neq 0$$

Бу ердаги $\sigma_1(t,\lambda)$ учун $q(x) \in C^1[0,\infty)$ бўлганда ушбу

$$\sigma_1(0,\lambda) = \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\cdot q(0) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda}\right), \qquad |\lambda| \to \infty \qquad (3.36)$$

асимптотика ўринли бўлади.

Штурм-Лиувилл тенгламасининг ушбу $\varphi(0,\lambda)=0,\quad \varphi'(0,\lambda)=1,\quad \theta(0,\lambda)=1,$ $\theta'(0,\lambda)=0$ бошланђич шартларни қаноатлантирувчи $\varphi(x,\lambda)$ ва $\theta(x,\lambda)$ ечимларни $y_1(x,\lambda)$ ва $y_2(x,\lambda)$ ечимлар орқали ифодалаймиз:

$$\theta(x,\lambda)=\frac{i\sqrt{\lambda}-\sigma_2(0,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)+\sigma_2(0,\lambda)}\cdot y_1(x,\lambda)-$$

$$-\frac{i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)-\sigma_2(0,\lambda)}\cdot y_2(x,\lambda)\ ,$$

$$\varphi(x,\lambda)=\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)+\sigma_2(0,\lambda)}\cdot y_1(x,\lambda)-$$

$$-\frac{1}{2i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)-\sigma_2(0,\lambda)}\cdot y_2(x,\lambda)\ .$$

Буларга кўра

$$\psi(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+m(\lambda)\theta(x,\lambda)=y_1(x,\lambda)\cdot\frac{1+m(\lambda)(i\sqrt{\lambda}-\sigma_2(0,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)-\sigma_2(0,\lambda)}+$$
$$+\ y_2(x,\lambda)\cdot\frac{-1+m(\lambda)(i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)}{2i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)-\sigma_2(0,\lambda)} \tag{3.37}$$

бўлади.

$y_1(x,\lambda)\in L_2(0,\infty),\quad \psi(x,\lambda)\in L_2(0,\infty),\ y_2(x,\lambda)\notin \mathrm{L}_2(0,\infty)\ ,(\operatorname{Im}\ \lambda\neq 0)$

бўлгани учун (3.36) даги охирги ҳад нолга айланиши зарур. Бунга кўра ушбу

$$m(\lambda)=\frac{1}{i\sqrt{\lambda}+\sigma_1(0,\lambda)} \tag{3.38}$$

тенглик ўринли бўлади. $\sigma_1(0,\lambda)$ функциянинг (3.36) асимптотасига биноан

$$m(\lambda)=\frac{1}{i\sqrt{\lambda}+\dfrac{1}{2i\sqrt{\lambda}}\cdot q(0)+\underline{\underline{O}}(\dfrac{1}{\lambda})}=\frac{1}{i\sqrt{\lambda}}\frac{1}{1-\dfrac{1}{2\lambda}\cdot q(0)+\underline{\underline{O}}(\dfrac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}})}=$$
$$=\frac{1}{i\sqrt{\lambda}}\left\{1+\frac{1}{2\lambda}q(0)+\underline{\underline{O}}(\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}})\right\}=-\frac{i}{\sqrt{\lambda}}+\frac{1}{2i\lambda\sqrt{\lambda}}\cdot q(0)+\underline{\underline{O}}(\frac{1}{\lambda^2}). \tag{3.39}$$

(3.39) асимптотикани ушбу

$$m_\alpha(\lambda)=\frac{\cos\ \alpha-m(\lambda)\sin\ \alpha}{\sin\ \alpha+m(\lambda)\cos\ \alpha}$$

тенгликка қўйиб, қуйидаги

$$m_{\alpha}(\lambda) = ctg\,\alpha + \frac{i}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{ctg\,\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2\sin^2\alpha}(q(0) - 2ctg^2\alpha) \cdot \frac{i}{\lambda\sqrt{\lambda}} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \to \infty \qquad (3.40)$$

формулани келтириб чиқарамиз.

Ниҳоят, (3.34) билан (3.40) ни таққосласак (3.20) ва ушбу

$$q(0) = 2ctg^2\alpha + 2\xi_0 - \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k) \qquad (3.41)$$

тенглик келиб чиқади. Агар биз $q(x)$ потенциал ўрнида $q(x+t)$ потенциални қарайдиган бўлсак (3.41) тенглик (3.21) кўринишни олади. **Теорема 2.1.1 исботланди**.

2-§. Ярим ўқда берилган чексиз зонали потенциалли Штурм – Лиувилл чегаравий масаласи учун Дубровин – Трубовиц системаси

(3.1)+(3.2) масала учун Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун қуйидаги айниятлардан фойдаланамиз:

$$\begin{pmatrix} g(\lambda,t) & k(\lambda,t) \\ k(\lambda,t) & h(\lambda,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta(\lambda,t) & \varphi(\lambda,t) \\ \theta'(\lambda,t) & \varphi'(\lambda,t) \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta(\lambda,t) & \varphi(\lambda,t) \\ \theta'(\lambda,t) & \varphi'(\lambda,t) \end{pmatrix}^T, \tag{4.1}$$

$$\begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T. \tag{4.2}$$

Агар биз $q(x)$ ўрнида $q(x+t)$ ни олсак, (4.2) тенглик ушбу

$$\begin{pmatrix} A(\lambda,t) & C(\lambda,t) \\ C(\lambda,t) & B(\lambda,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \times$$

$$\times\begin{pmatrix} g(\lambda,t) & k(\lambda,t) \\ k(\lambda,t) & h(\lambda,t) \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T \tag{4.3}$$

кўринишни олади. (4.2) дан

$$\begin{pmatrix} g(\lambda) & k(\lambda) \\ k(\lambda) & h(\lambda) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^T\times$$

$$\times\begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

келиб чиқади.

(4.4) ни (4.1) га қўямиз ва ҳосил бўлган ифодани (4.3) га қўямиз, натижада

$$\begin{pmatrix} A(\lambda,t) & C(\lambda,t) \\ C(\lambda,t) & B(\lambda,t) \end{pmatrix}=G\cdot\begin{pmatrix} A(\lambda) & C(\lambda) \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{pmatrix}\cdot G^T \tag{4.5}$$

келиб чиқади. Бу ерда

$$G=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \theta & \varphi \\ \theta' & \varphi' \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \theta\cos\alpha+\varphi\sin\alpha & -\theta\sin\alpha+\varphi\cos\alpha \\ \theta'\cos\alpha+\varphi'\sin\alpha & -\theta'\sin\alpha+\varphi'\cos\alpha \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \theta_\alpha & \varphi_\alpha \\ \theta'_\alpha & \varphi'_\alpha \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \theta_\alpha\cos\alpha+\theta'_\alpha\sin\alpha & \varphi_\alpha\cos\alpha+\varphi'_\alpha\sin\alpha \\ -\theta_\alpha\sin\alpha+\theta'_\alpha\cos\alpha & -\varphi_\alpha\sin\alpha+\varphi'_\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

(4.6) ифодани (4.5) тенгликка қўямиз, ўнг томондаги кўпайтмани ҳисобласак ва мос элементларни бир – бирига тенгласак, қуйидаги айниятлар келиб чиқади:

$$A(\lambda,t)=A(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha+\theta_\alpha\sin\alpha)^2+2C(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha+\theta_\alpha\sin\alpha)\cdot$$

$$\cdot(\varphi_\alpha\cos\alpha+\varphi'_\alpha\sin\alpha)+B(\lambda)(\varphi_\alpha\cos\alpha+\varphi'_\alpha\sin\alpha)^2, \tag{4.7}$$

$$C(\lambda,t)=A(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha+\theta'_\alpha\sin\alpha)(-\theta_\alpha\sin\alpha+\theta'_\alpha\cos\alpha)+$$

$$+C(\lambda)(\phi_\alpha\cos\alpha+\phi'_\alpha\sin\alpha)(-\theta_\alpha\sin\alpha+\theta'_\alpha\cos\alpha)+$$

$$+C(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha+\theta'_\alpha\sin\alpha)(-\phi_\alpha\sin\alpha+\phi'_\alpha\cos\alpha)+$$

$$+B(\lambda)(\phi_\alpha\cos\alpha+\phi'_\alpha\sin\alpha)(-\phi_\alpha\sin\alpha+\phi'_\alpha\cos\alpha), \tag{4.8}$$

$$B(\lambda,t)=A(\lambda)(-\theta_\alpha \sin\alpha+\theta'_\alpha\cos\alpha)^2+$$

$$+2C(\lambda)(-\phi_\alpha\sin\alpha+\phi'_\alpha\cos\alpha)(-\theta_\alpha\sin\alpha+\theta'_\alpha\cos\alpha)+$$

$$+B(\lambda)(-\phi_\alpha\sin\alpha+\phi'_\alpha\cos\alpha)^2. \qquad (4.9)$$

(4.7) ва (4.8) формулаларга асосан ушбу

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial A(\lambda,t)}{\partial t}=A(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha+\theta'_\alpha\sin\alpha)(\theta'_\alpha\cos\alpha+(q(t)-\lambda)\theta_\alpha\sin\alpha)+$$

$$+C(\lambda)(\theta'_\alpha\cos\alpha+(q(t)-\lambda)\theta_\alpha\sin\alpha)(\phi_\alpha\cos\alpha+\phi'_\alpha\sin\alpha)+$$

$$+C(\lambda)(\theta_\alpha\cos\alpha+\theta'_\alpha\sin\alpha)(\phi'_\alpha\cos\alpha+(q(t)-\lambda)\phi_\alpha\sin\alpha)+$$

$$+B(\lambda)(\phi_\alpha\cos\alpha+\phi'_\alpha\sin\alpha)(\phi'_\alpha\cos\alpha+(q(t)-\lambda)\phi_\alpha\sin\alpha)=$$

$$=C(\lambda,t)+(q(t)-\lambda+1)\sin\alpha[A(\lambda,t)\cos\alpha-C(\lambda,t)\sin\alpha]. \qquad (4.10)$$

тенгликлар ўринли. (4.10) айниятни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\frac{\partial A(\lambda,t)}{\partial t}=2C(\lambda,t)[\cos^2\alpha+(\lambda-q(t))\sin^2\alpha]+$$

$$+A(\lambda,t)(q(t)-\lambda+1)\sin 2\alpha. \qquad (4.11)$$

Энди эса (4.11) айниятдан ва ушбу

$$A(\lambda,t)=-\sin^2\alpha(\xi_0(t)-\lambda)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\lambda}{\lambda_k}, \qquad (4.12)$$

$$A(\lambda,t)B(\lambda,t)-C^2(\lambda,t)=f(\lambda) \qquad (4.13)$$

айниятлардан фойдаланиб Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасини келтириб чиқарамиз. (4.12) га биноан

$$\left.\frac{\partial A(\lambda,t)}{\partial t}\right|_{\lambda=\xi_0(t)}=-\sin^2\alpha\cdot\xi'_0(t)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\xi_0(t)}{\lambda_k}, \qquad (4.14)$$

$$\left.\frac{\partial A(\lambda,t)}{\partial t}\right|_{\lambda=\xi_n(t)}=-\sin^2\alpha\cdot(\xi_0(t)-\xi_n(t))\cdot\frac{\xi'_n(t)}{\lambda_n}\cdot\prod_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\xi_k(t)-\xi_n(t)}{\lambda_k},$$

$$n=1,2,\ldots\,. \qquad (4.15)$$

(4.13) тенгликда $\lambda=\xi_n(t)$ десак,

$$C(\xi_n(t),t)=\sigma_n(t)\sqrt{-f(\xi_n(t))},\quad n=0,1,2,\ldots \qquad (4.16)$$

келиб чиқади. (4.11) айниятда $\lambda = \xi_n(t)$ деймиз ва (4.15), (4.16) тенгликларни ҳисобга оламиз:

$$\xi_0'(t) = \frac{-2[ctg^2\alpha + \xi_0(t) - q(t)]\sigma_0(t)\sqrt{-f(\xi_0(t))}}{\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_0(t)}{\lambda_k}}, \qquad (4.17)$$

$$\xi_n'(t) = \frac{-2\lambda_n[ctg^2\alpha + \xi_n(t) - q(t)]\sigma_n(t)\sqrt{-f(\xi_n(t))}}{(\xi_0(t) - \xi_n(t)) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \xi_n(t)}{\lambda_k}}, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (4.18)$$

(4.17), (4.18) системага Дубровин – Трубовиц дифференциал тенгламалар системасии дейилади.

Адабиётлар

[1]. Архиезер Н.И. «Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов». // ДАН СССР, 1961, Т.141, «№2, стр. 262-266.

[2]. Hochstadt H., Goldberg W. «An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum». // J.Math.Anal. and Appl. 1985, 105, 206-221.

[3]. Левитан Б.М., Савин А.В. «Обратная задача на полупрямой для конечнозанных потенциалов». // Вестн. Моск. Ун-та, сер.1, математика, механика. 1988, «№1, стр. 21-28.

[4]. Марченко В.А., Островский И.В. «Характеристика спектра оператора Хилла». // Мат. сб. 1975, 97, вып. 4, стр. 540-606.

[5]. Итс А.Р., Матвеев В.Б. «Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N - солитонные решения уравнения Кортевега – де Фриза». // Теор. и мат. физика, 1975, Т.23, №1, стр. 51-68.

[6]. Trubowitz E. «The inverse problem for periodic potentials». // Comm. Pure Appl. Math., 1977, v. 30, p. 321-337.

[7]. Дубровин Б.А. «Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриза в классе конечнозонных потенциалов». // Функ. анал. и прилож., 1975, Т.9, «№3, стр. 41-51.

[8]. Новиков С.П. «Периодическая задача Кортевега – де Фриза I». //. Функ. анал. и прилож. 1974, Т.8, №3, стр. 54-66.

[9]. Левитан Б.М. «Обратные задаче Штурма – Лиувилля». М.: «Наука», 1984, стр. 240.

[10]. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Москва, "Наука", 1970, 672 стр.

[11]. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977, 332 стр.

[12]. Блох А.Ш. Об определения дифференциального уравнения по его спектральной матрице-функции. -ДАН СССР, 1953, 42, № 2, с. 209-213.

[13]. Gardner G., Creen I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteveg-de Vries equation.// Phys. Rev. Lett., 1967 , v.19, p.1095-1098.

[14]. Ибрагимов А.М., Яхшимуратов А.Б. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом на полуоси. Узбекский математический журнал, 2001, № 5-6, стр. 20-24.

[15]. Левитан Б.М. Почти-периодичность бесконечнозонных потенциалов.// Изв. АН СССР, сер. Матем. 1981, т. 45, № 2, с. 291-320.

[16]. Левитан Б.М. Обратная задача Штурма-Лиувилля для конечнозонных и бесконечнозонных потенциалов.// Труды Москов. Мат. Общества, 1982, т. 45, с. 3-36.

[17]. Левитан Б.М. О замыкании множества конечнозонных потенциалов.// Мат. сб., 1984, 123. (165), № 1, с. 69-91.

[18]. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака. М.: “Наука” 1988 г.

[19]. Magnus W., Winkler W. Hill’s equation. - New.York: Interscience wiley, 1966.

[20]. Маматов А.Э. Обратная задача на полупрямой для оператора Дирака в случае конечнозонных потенциалов. // УзМЖ, 1991, № 5, с. 44-49.

[21]. Рофе-Бекетов Ф.С. Спектральная матрица и обратная задача Штурма-Лиувилля на всей оси. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1967, № 4, с. 189-197.

[22]. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: “Наука”, 1969.