

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС  
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**БУХОРО ОЗИҚ-ОВҚАТ ВА ЕНГИЛ САНОАТ  
ТЕХНОЛОГИЯСИ ИНСТИТУТИ**

**"КАСБИЙ ТАЪЛИМ" ФАКУЛЬТЕТИ**

**«ИНФОРМАТИКА ВА АХБОРОТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРИ»  
КАФЕДРАСИ**

**«МАТЕМАТИК ДАСТУРЛАШ» фанидан**

**МАЪРУЗАЛАР МАТНИ**

**("МААТ" МУТАХАССИСЛИГИ ВА "ИҚТИСОД" ЙЎНАЛИШИНING  
БАРЧА МУТАХАССИСЛИГИДАГИ ТАЛАБАЛАР УЧУН)**

**Тузувчи:**

**катта ўқитувчи ЮНУСОВА М.Д.**

***Бухоро – 2006***

В169900 – «Информатика ва ахборотлар технологияси» ҳамда “Иқтисод”  
йўналишидаги барча талабалар учун «Математик дастурлаш»  
фанидан маърузалар матни

Тузувчи: М.Д.Юнусова

Такризчилар:

«Ахборот технологиялари» кафедраси доценти Солиева О. К.

Бух ДУ «Информатика ва амалий математика» кафедраси доценти  
Жумаев Ж.

Маъруза матнлари 2006 йил 8 июл « Информатика ва ахборот  
технологиялари» кафедраси 13 - сонли мажлисида муҳокама қилинди ва  
маъқулланди.

Институт Ўқув Услубий Кенгашида тасдиқланди. (Баён № 2006й)

## **1-маъруза. «Математик дастурлаш» фанининг предмети. Энг содда масалаларнинг математик моделлари**

### **Дарс режаси:**

1. «Математик дастурлаш » фанининг яратилиш тарихидан
2. Математик дастурлашнинг предмети.
3. Иқтисодий масаланинг математик модели ва унинг тузилиши.
4. Математик модел тузиш жараёни.
5. Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция маъноси.
6. «Истеъмол савати» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функцияларнинг маъноси.
7. «Оптимал бичиш» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функцияларнинг маъноси.

### **Адабиётлар**

Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 4-13-бетлар

Ўтган асрнинг ўрталарига қадар ҳозирги даврдаги ривожланган мамлакатларда қишлоқ хўжалик ва саноат корхоналари майда устахоналардан иборат бўлиб, уларда ишловчилар сони 40-50 кишидан ошмас эди. Бундай корхоналарни бир киши бемалол бошқара оларди.

Ҳозирги кундаги корхоналар, илмий текшириш институтлари, саноат тармоқлари, ишлаб чиқариш бирлашмалари ва ҳоказолар одамларнинг катта жамоасини ўзида мужассам этган ва мураккаб асбоб-ускуналар билан жиҳозланган мураккаб комплекслардан иборат бўлганлиги сабабли, корхоналарни бошқариш учун бутун бир аппаратнинг ишлаши талаб қилинади. Бу аппарат корхонанинг мақсадга мувофиқ ишлашини бошқариши керак. Бундай вазифани бажариш эса ўз ўрнида аниқ, математик усуллардан ва замонавий компьютер технологияларидан кенг фойдаланишни тақозо қилади. Шундай қилиб, даврнинг талабига мувофиқ XX асрнинг ўрталарида «Операцияларни текшириш» деб аталувчи фан вужудга келди. Бу фаннинг «Операцияларни текшириш» деб аталишига сабаб шуки, у бошқарувчи аппаратга, корхона олдида қўйилган мақсадга эришиш йўлидаги ҳар бир ҳаракатини (операцияни) таҳлил қилиб, улардан тўғри хулоса чиқаришга асос берувчи илмий назариядан иборатдир. Рус математик-иқтисодчиси Канторович Л.В.нинг фикрича, «Операцияларни текшириш» ишлаб чиқариш жараёнларини тўғри бошқариш йўллариини ўргатувчи фаннинг бир тармоғидир.

Операцияларни текширишда қўлланиладиган математик усуллардан бири ва энг асосийси математик дастурлашдир.

Математик дастурлаш математика сингари қадимий бўлиб, унинг ноклассик тармоқлари 30-40 йилларда шаклланди. У математиканинг бир йўналиши бўлиб, асосан кўп вариантли ечимга эга бўлган иқтисодий масалаларнинг энг яхши, мақсадга мувофиқ (оптимал) ечимини топишга ёрдам беради.

Ҳар қандай ривожланган жамиятда, шу жумладан, Ўзбекистон Республикасида ҳам иқтисодиётни янада ривожлантиришнинг асосий шартларидан бири – унда математик усуллар ва янги компьютер технологияларига асосланган сонли таҳлилни амалга ошириш ва шу асосда иқтисодий ечимлар қабул қилишдир. Ана шундай вазифаларни амалга оширишда кўл келадиган усулларни ўргатадиган фан математик дастурлашдир.

Математик дастурлаш фанининг ривожланишида Л.В.Канторович, В.С.Немчинов, А.Л.Лурье, Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн, Д.Данциг, Г.Купманс, Р.Беллман, Л.Форд, С.Гасс ва бошқалар катта ҳисса қўшганлар.

Математик дастурлашнинг предмети корхона, фирма, бозор, ишлаб чиқариш бирлашмаси, халқ хўжалик тармоқлари, бутун халқ хўжалигига доир иқтисодий жараёнларни тасвиловчи математик моделлардир.

Математик моделлар кўп даврлардан буён иқтисодиётда ишлатилмоқда. Масалан, иқтисодиётда қўлланилган, Ф.Кене (1758 й.) томонидан яратилган модел такрор ишлаб чиқариш моделидир.

«Иқтисодий масаланинг математик модели» деганда бу масаланинг асосий шартлари ва мақсадининг математик формулалар ёрдамидаги тасвирига айтилади.

Умумий ҳолда математик дастурлаш масаласининг математик модели куйидаги кўринишда бўлади:

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

шартларни қаноатлантирувчи  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциянинг экстремуми топилсин.

Бу ерда:  $f, g_i$  – берилган функциялар,  $b_i$  – ихтиёрий ҳақиқий сонлар.

Агар  $f, g_i$  функцияларнинг ҳаммаси чизикли функциялардан иборат бўлса, берилган масала чизикли дастурлаш масаласи бўлади.

Агар  $f$  ва  $g_i$  функциялардан бирортаси нечизик функция бўлса, у ҳолда берилган модел чизиксиз дастурлаш масаласини ифодалайди.

Агар  $f$  ёки  $g_i$  функциялар тасодифий миқдорларни ўз ичига олсалар, у ҳолда модел стохастик дастурлаш масаласини ифодалайди.

Агар  $f$  ва  $g_i$  функциялар вақтга боғлиқ бўлиб, масалани ечиш кўп босқичли жараён сифатида қаралса, у ҳолда берилган модел динамик дастурлаш масаласидан иборат бўлади.

Математик дастурлаш масалалари ичида энг яхши ўрганилгани чизикли дастурлашдир. Чизикли дастурлаш усуллари билан ишлаб чиқаришни режалаштириш, ишлаб чиқарилган маҳсулотларни оптимал тақсимлаш, оптимал аралашмалар тайёрлаш, оптимал бичиш, саноат

корхоналарини оптимал жойлаштириш ва ҳоказо бошқа кўплаб масалаларни ечиш мумкин.

Ҳар қандай иқтисодий масалани математик дастурлаш усулларини кўллаб ечишдан аввал, уларнинг математик моделини тузиш керак; бошқача айтганда берилган иқтисодий масаланинг чегараловчи шартларини ва мақсадини математик формулалар орқали ифодалаб олиш керак. Ҳар қандай масаланинг математик моделини тузиш учун:

- масаланинг иқтисодий маъносини ўрганиб, ундаги асосий шарт ва мақсадни аниқлаш;
- масаладаги номаълумларни белгилаш;
- масаланинг шартларини алгебраик тенгламалар ёки тенгсизликлар орқали ифодалаш;
- масаланинг мақсадини функция орқали ифодалаш керак.

Мисол учун бир нечта энг содда иқтисодий масалаларнинг математик моделини тузиш жараёни билан танишамиз.

#### Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи

Фараз қилайлик, корхонада  $m$  хил маҳсулот ишлаб чиқарилсин; улардан ихтиёрий бирини  $i$  ( $i=1,...,m$ ) билан белгилаймиз. Бу маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун  $n$  хил ишлаб чиқариш факторлари зарур бўлсин. Улардан ихтиёрий бирини  $j$  ( $j=1,...,n$ ) билан белгилаймиз.

Ҳар бир ишлаб чиқариш факторининг умумий миқдори ва бир бирлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган нормаси куйидаги жадвалда берилган

| и/ч факторлари<br>и/ч маҳсулот<br>турлари | 1        | 2        | 3        | ... | n        | Даромад |
|-------------------------------------------|----------|----------|----------|-----|----------|---------|
| 1                                         | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | ... | $a_{1n}$ | $C_1$   |
| 2                                         | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | ... | $a_{2n}$ | $C_2$   |
| ...                                       | ...      | ...      | ...      | ... | ...      | ...     |
| m                                         | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $a_{m3}$ | ... | $a_{mn}$ | $C_m$   |
| и/ч факторининг захираси                  | $b_1$    | $b_2$    | $b_3$    | ... | $b_n$    |         |

Жадвалдаги ҳар бир  $b_j$  –  $j$ -ишлаб чиқариш факторининг умумий миқдори (заҳираси)ни;  $a_{ij}$  –  $i$ -маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган  $j$ -факторнинг миқдори;  $C_i$ –корхонанинг  $i$ -маҳсулотнинг бир бирлигини реализация қилишдан оладиган даромади.

Масаланинг иқтисодий маъноси: корхонанинг ишини шундай режалаштириш керакки: а) ҳамма маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган ҳар бир ишлаб чиқариш факторининг миқдори уларнинг умумий миқдоридан ошмасин; б) маҳсулотларни реализация қилишдан корхонанинг оладиган даромади максимал бўлсин.

Режалаштирилган давр ичида ишлаб чиқариладиган  $i$ -маҳсулотнинг миқдори  $x_i$  билан белгилаймиз. У ҳолда масаладаги а) шарт қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m \leq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m \leq b_2 \\ \text{--- --- --- --- ---} \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m \leq b_n \end{cases} \quad (1)$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра ҳамма номаълумлар манфий бўлмаслиги керак, яъни:

$$x_i \geq 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (2)$$

Масаладаги б) шарт унинг мақсадини аниқлайди. Демак масаланинг мақсади маҳсулотларни реализация қилишдан корхонанинг оладиган умумий даромадини максималлаштиришдан иборат ва уни

$$y = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \quad (3)$$

чизикли функция орқали ифодалаш мумкин. Шартга кўра  $y \rightarrow \max$ . Бу шартни  $Y_{\max}$  кўринишда белгилаймиз.

Шундай қилиб ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласининг

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m1} \mathbf{x}_m \leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{12} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22} \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{m2} \mathbf{x}_m \leq \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{1n} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{2n} \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn} \mathbf{x}_m \leq \mathbf{b} \end{array} \right.$$

математик модели куйидаги кўрнишда бўлади

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_m \geq 0,$$

$$\mathbf{Y}_{\max} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_m \mathbf{x}_m$$

## Истеъмол савати масаласи

Фараз қилайлик, киши организми учун бир суткада  $n$  хил  $A_1, A_2, \dots, A_n$  озуқа моддалари керак бўлсин, жумладан  $A_1$  озуқа моддасидан бир суткада  $b_1$  миқдорда,  $A_2$  озуқа моддасидан  $b_2$  миқдорда,  $A_3$  озуқа моддасидан  $b_3$  миқдорда ва ҳоказо  $A_n$  дан  $b_n$  миқдорда зарур бўлсин ва уларни  $m$  та  $B_1, B_2, \dots, B_m$  маҳсулотлар таркибидан олиш мумкин бўлсин. Ҳар бир  $B_i$  маҳсулот таркибидаги  $A_j$  озуқа моддасининг миқдори  $a_{ji}$  бирликни ташкил қилсин.

Масаланинг берилган параметрларини қуйидаги жадвалга жойлаштириш мумкин.

| озука<br>моддалари<br>маҳсулотлар | $A_1$    | $A_2$    | ... | $A_n$    | маҳсулот<br>баҳоси |
|-----------------------------------|----------|----------|-----|----------|--------------------|
| $B_1$                             | $a_{11}$ | $A_{12}$ | ... | $a_{1n}$ | $C_1$              |
| $B_2$                             | $a_{21}$ | $A_{22}$ | ... | $a_{2n}$ | $C_2$              |
| ...                               | ...      | ...      | ... | ...      | ...                |
| $B_m$                             | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mn}$ | $C_m$              |
| озука модда нормаси               | $b_1$    | $B_2$    | ... | $b_n$    |                    |

Масаланинг иқтисодий маъноси: истеъмол саватига қандай маҳсулотлардан қанча киритиш керакки, натижада: а) одам организми қабул қиладиган озука моддаси белгиланган миқдордан кам бўлмасин; б) истеъмол саватининг умумий баҳоси минимал бўлсин.

Истеъмол саватига киритиладиган  $i$ -маҳсулотнинг миқдорини  $x_i$  билан белгилаймиз. У ҳолда масаланинг а) шарти қуйидаги тенгсизликлар системаси орқали ифодаланади.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq b_2 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq b_n \end{cases} \quad (4)$$

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра, ундаги номаълумлар манфий бўла олмайди, яъни

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0 \quad (5)$$

Масаланинг б) шарти унинг мақсадини ифодалайди. Демак, масаланинг мақсади истеъмол саватига киритиладиган маҳсулотларнинг умумий баҳосини минималлаштиришдан иборат бўлиб, уни қуйидаги чизикли функция кўринишида ифодалаш мумкин.

$$Y_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \quad (6)$$

Шундай қилиб «истеъмол савати» масаласининг математик моделини

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \geq b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \geq b_2 \\ \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \geq b_n \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_m \geq 0, \\ Y_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_mx_m \end{cases}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

## Оптимальный вариант задачи

Фараз қилайлик корхонада  $m$  хил маҳсулотлар тайёрлаш (бичиш) керак бўлсин ҳамда ҳар бир  $i$ -маҳсулотдан  $a_i$  миқдорда тайёрлаш режалаштирилган бўлсин. Бу маҳсулотларни тайёрлаш учун  $n$  хил хом-ашё материаллар мавжуд бўлиб, ҳар бир  $j$ -хом-ашё материалнинг миқдори  $b_j$  бирликни ташкил қилсин. Хом-ашё материаллардан тайёр маҳсулотлар ишлаб чиқариш учун  $l$  хил бичиш усулларини қўллаш мумкин бўлсин ҳамда ҳар бир хом-ашё материални  $k$ -усул билан бичганда ҳосил бўладиган  $i$ -маҳсулот миқдори  $a_{ijk}$ , чиқинди эса  $C_{jk}$  бирликларни ташкил қилсин, деб фараз қиламиз.

Хом-ашё материалларни қайси усул билан бичганда ҳосил бўлган тайёр маҳсулотлар миқдори режадагига тенг бўлади, сарф қилинган хом-ашё материаллар миқдори уларнинг заҳирасидан ошмайди ҳамда ҳосил бўлган чиқиндиларнинг умумий миқдори минимал бўлади.

Масаладаги номаълумлар  $x_{jk}$  –  $k$ -усул билан бичиладиган  $j$ -хом-ашё материаллар микдорини билдиради.

Ушбу белгилашларда оптимал бичиш масаласининг математик модели қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_{11} + \mathbf{x}_{12} + \cdots + \mathbf{x}_{1l} \leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x}_{21} + \mathbf{x}_{22} + \cdots + \mathbf{x}_{2l} \leq \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{n1} + \mathbf{x}_{n2} + \cdots + \mathbf{x}_{nl} \leq \mathbf{b}_n \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{111}\mathbf{x}_{11} + \mathbf{a}_{112}\mathbf{x}_{12} + \cdots + \mathbf{a}_{1nl}\mathbf{x}_{nl} = \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_{211}\mathbf{x}_{11} + \mathbf{a}_{212}\mathbf{x}_{12} + \cdots + \mathbf{a}_{2nl}\mathbf{x}_{nl} = \mathbf{a}_2 \\ \text{--- --- ---} \\ \mathbf{a}_{m11}\mathbf{x}_{11} + \mathbf{a}_{m12}\mathbf{x}_{12} + \cdots + \mathbf{a}_{mnl}\mathbf{x}_{nl} = \mathbf{a}_m \end{array} \right. \quad (8)$$

$$x_{jk} \geq 0, \quad (j=1, \dots, n; \quad k=1, \dots, l) \quad (9)$$

шартлар бажарилганда қўйидаги

$$\mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^l \mathbf{C}_{jk} \mathbf{x}_{jk} \quad (10)$$

функциянинг минимум қиймати топилсин. Бу ерда (7) шарт сарф қилинган хом-ашё материалларнинг миқдори уларнинг захираларидан ошмаслиги кераклигини, (8) шарт маҳсулотлар ишлаб чиқариш бўйича режани тўла бажариш зарурлигини кўрсатади.

Масаланинг иқтисодий маъносига кўра номаълумларнинг номанфий эканлигини (9) шарт ифодалайди.

Масаланинг мақсади – умумий чиқиндиларни минималлаштиришдан иборат бўлиб, у (10) функция кўринишида ёзилади.

## Назорат саволлари

1. Математик дастурлашнинг предмети нимадан иборат?
2. Иқтисодий масаланинг математик модели нима ва у қандай тузилади?
3. Чизикли дастурлаш масаласининг чегараловчи шартлари қандай кўринишда бўлиши мумкин?
4. Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?
5. «Истеъмол савати» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?
6. «Оптимал бичиш» масаласидаги номаълумлар, асосий шартлар ва мақсад функция қандай маънони билдиради?

# Таянч иборалар

Оптимал ечим, математик дастурлаш предмети, математик модел, экстремум, мақсад функция, иқтисодий шартлар, чизикли дастурлаш, чизиксиз дастурлаш, стохастик дастурлаш, динамик дастурлаш, ишлаб чиқаришни оптимал режалаштириш масаласи, истеъмол савати масаласи, оптимал бичиш масаласи.

**2-март. Чизикли дастурлаш масаласининг умумий қўйилиши ва унинг турли формада ифодаланиши**

## Дарс режаси:

1. Чизиқли дастурлаш масаласининг умумий қўйилиши.
2. Чизиқли дастурлаш масаласининг турли формада ифодаланиши.
3. Чизиқли дастурлаш масаласининг мумкин бўлган ечимлари. Таянч ечим.
4. Тенг кучли алмаштиришлар.
5. Мумкин бўлган ечимлар тўпламининг кавариклиги.

## Адабиётлар

Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое  
программирование». 14-23, 32-44-бетлар

Чизикли дастурлаш масаласи умумий ҳолда қуйидагича ифодаланади:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n \geq (\leq) \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2m}\mathbf{x}_m \geq (\leq) \mathbf{b}_2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n \geq (\leq) \mathbf{b}_m \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{Y}_{\min(\max)} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \quad (3)$$

(1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи номаълумларнинг шундай қийматларини топиш керакки, улар (3) чизиқли функцияга минимал

Конкрет масалаларда (1) шарт тенгламалар системасидан, « $\geq$ » ёки « $\leq$ » кўринишдаги тенгсизликлар системасидан ёки аралаш системадан иборат бўлиши мумкин. Лекин кўрсатиш мумкинки, (1)–(3) кўринишдаги масалани осонлик билан қуйидаги кўринишга келтириш мумкин.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12} \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n} \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22} \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n} \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ \text{---} \\ \mathbf{a}_{m1} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2} \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn} \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \quad (6)$$

(4)–(6) масалани векторлар ёрдамида қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\mathbf{P}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{P}_n\mathbf{x}_n = \mathbf{P}_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0} \quad (8)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (9)$$

бу ерда

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} \\ \mathbf{a}_{21} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{22} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{2n} \\ \dots \\ \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix},$$

$C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  – вектор-қатар.

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n) - \text{вектор-устун.}$$

(4)-(6) масаланинг матрица кўринишдаги ифодаси куйидагича ёзилади:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{P}_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{X} \geq \mathbf{0}, \quad (11)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \quad (12)$$

бу ерда  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  – қатор вектор,  $A = (a_{ij})$  – (4) система коэффициентларидан ташкил топган матрица;

$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  ва  $P_\theta = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  – устун векторлар.

(4)-(6) масалани ййгиндилар ёрдамида ҳам ифодалаш мумкин:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad (i = 1, \dots, m) \quad (13)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, \dots, n) \quad (14)$$

$$Y_{\min} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (15)$$

1-таъриф. Берилган (4)–(6) масаланинг мумкин бўлган ечими ёки режаси деб, унинг (4) ва (5) шартларни қаноатлантирувчи  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  векторга айтилади.

2-таъриф. Агар (7) ёйилмадаги мусбат  $x_i$  коэффициентли  $P_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) векторлар ўзаро чизикли боғиқ бўлмаса, у олда  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  режа таянч режа деб аталади.

3-таъриф. Агар  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  таянч режадаги мусбат компоненталар сони  $m$  га тенг бўлса, у ҳода бу режа айнимаган таянч режа, акс ҳолда айниган таянч режа дейилади.

4-таъриф. Чизикли функция (6) га энг кичик қиймат берувчи  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  таянч режа масаланинг оптимал режаси ёки оптимал ечими дейилади.

Чизикли дастурлаш масаласи устида қуйидаги тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин.

1)  $Y_{\max}$  ни  $Y_{\min}$  га айлантириш. Ҳар қандай чизикли дастурлаш масаласини (4)–(6) кўринишга келтириш учун (1) тенгсизликлар системасини тенгламалар системасига ва  $Y_{\max}$  ни  $Y_{\min}$  га айлантириш керак.  $Y_{\max}$  ни  $Y_{\min}$  га келтириш учун  $Y_{\max}$  ни тескари ишора билан олиш, яъни -  $Y_{\max} = Y_{\min}$  ёки  $Y_{\max} = - Y_{\min}$  кўринишда олиш етарлидир.

Ҳақиқатдан ҳам, ҳар қандай  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциянинг минимуми тескари ишора билан олинган шу функция максимумининг қийматига тенг, яъни

$$\min f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ва } -\max[f(x_1, x_2, \dots, x_n)],$$

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ва } -\min[f(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

ифодалар номаълумларнинг бир хил қийматларидагина ўзаро тенг бўлишини кўрсатиш мумкин.

2) Тенгсизликларни тенгламага айлантириш.  $n$  номаълумли

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b \quad (16)$$

чизикли тенгсизликни қараймиз. Бу тенгсизликни тенгламага айлантириш учун унинг кичик томонига номанфий номаълум сонни, яъни  $x_{n+1} \geq 0$  ни кушамиз.

Натижада  $n+1$  номаълумли чизикли тенгламага эга бўламиз:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n + x_{n+1} = b \quad (17)$$



айлантириш мумкин. Бу ўзгарувчилар  $Y_{min}$  га 0 коэффициент билан киритилади. Натижада берилган (18)–(20) масала қуйидаги кўринишга келади.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{b}_2 \\ \text{--- --- ---} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+m} = \mathbf{b}_m \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_n \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_n \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_{n+1} \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_{n+m} \geq \mathbf{0}, \quad (22)$$

$$\mathbf{Y}_{\max} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n + \mathbf{O}(\mathbf{x}_{n+1} + \dots + \mathbf{x}_{n+m}) \quad (23)$$

Худди шунингдек,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n \geq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n \geq \mathbf{b}_2 \\ \text{--- --- ---} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n \geq \mathbf{b}_m \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq 0, \mathbf{x}_2 \geq 0, \dots, \mathbf{x}_n \geq 0 \quad (25)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \quad (26)$$

кўринишда берилган чизиqli дастурлаш масаласини каноник кўринишга келтириш мумкин. Бунинг учун қўшимча  $\mathbf{x}_{n+1} \geq 0$ ,  $\mathbf{x}_{n+2} \geq 0$ , ...,  $\mathbf{x}_{n+m} \geq 0$  ўзгарувчилар тенгсизликларнинг катта томонидан айрилади. Натижада қуйидаги масала ҳосил бўлади:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+m} = \mathbf{b}_m \end{array} \right. \quad (27)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \quad (28)$$

$$Y_{\min} = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + O(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \quad (29)$$

Энди чизиқли дастурлаш масаласи ечимларининг хоссалари билан танишамиз. Бунинг учун энг аввал қавариқ комбинация ва қавариқ тўплам тушунчасини эслатиб ўтамыз.

5-таъриф.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  векторларнинг каварик комбинацияси деб

$$\alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

шартларни қаноатлантирувчи

$$\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{A}_n$$

векторга айтилади.  $n$ -ўлчовли фазодаги ҳар бир  $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$  векторга координаталари  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  бўлган нуқта мос келади. Шунинг

учун бундан кейин  $A=(a_1, a_2, \dots, a_n)$  векторни  $n$ -ўлчовли фазодаги нукта деб қараймиз.

6-таъриф. Агар  $n$ -ўлчовли вектор фазодаги  $C$  тўпلام ўзининг ихтиёрий  $A_1$  ва  $A_2$  нукталари билан бир каторда бу нукталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган  $A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$  ( $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ) нуктани ҳам ўз ичига олса, яъни  $A_1, A_2 \in C \Rightarrow A \in C$  бўлса, бу тўпلام қавариқ тўпلام деб аталади.

2-теорема. Чизикли дастурлаш масаласининг ечимларидан ташкил топган тўпلام қавариқ тўпلام бўлади.

Исботи. Чизикли дастурлаш масаласининг ихтиёрий иккита ечимининг қавариқ комбинацияси ҳам ечим эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик,  $x_1$  ва  $x_2$  берилган чизикли дастурлаш масаласининг ечимлари бўлсин. У ҳолда

$$AX_1 = P_0, \quad X_1 \geq 0, \quad (30)$$

$$\text{ва} \quad AX_2 = P_0, \quad X_2 \geq 0, \quad (31)$$

муносабатлар ўринли бўлади. Энди  $x_1$  ва  $x_2$  ечимларнинг қавариқ комбинациясини тузамиз.

$$X = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Ҳамда уни ечим эканлигини кўрсатамиз:

$$AX = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] = \alpha Ax_1 + (1-\alpha)Ax_2$$

Энди (30) ва (31) тенгламаларни инобатга олиб топамиз.

$$AX = \alpha P_0 + (1-\alpha)P_0 = P_0.$$

Бу муносабат  $X$  вектор ҳам ечим эканлигини кўрсатади.

3-теорема. Чизикли дастурлаш масаласининг чизикли функцияси ўзининг оптимал қийматига шу масаланинг ечимларидан ташкил топган қавариқ тўпلامнинг четки нуктасида эришади.

Агар чизикли функция  $K$  қавариқ тўпلامнинг бирдан ортиқ четки нуктасида оптимал қийматга эришса, у шу нукталарнинг қавариқ комбинациясидан иборат бўлган ихтиёрий нуктада ҳам ўзининг оптимал қийматига эришади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

4-теорема. Агар  $k$  та ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаган  $P_1, P_2, \dots, P_k$  векторлар берилган бўлиб, улар учун

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_k x_k = P_0$$

тенглик барча  $x_i \geq 0$  лар учун ўринли бўлса, у ҳолда  $X = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  вектор  $K$  қавариқ тўпلامнинг четки нуктаси бўлади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

5-теорема. Агар  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  четки нукта бўлса, у ҳолда мусбат  $x_i$ ларга мос келувчи векторлар ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаган векторлар системасини ташкил қилади (теоремани исботсиз қабул қиламиз).

Юқорида келтирилган теоремалардан қуйидаги хулосаларни чиқариш мумкин.

1-хулоса.  $K$  тўпلامнинг ҳар бир четки нуктасига  $P_1, P_2, \dots, P_n$  векторлар системасига  $m$  та ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаган векторлар системаси мос келади.

2-хулоса.  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $K$  тўпламнинг четки нуқтаси бўлиши учун мусбат  $x_i$  компоненталар

$$P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n = P_0$$

ёйилмада ўзаро чизикли боғлиқ бўлмаган  $P_i$  векторларнинг коэффицентларидан иборат бўлиши зарур ва етарли.

3-хулоса. Чизикли дастурлаш масаласи таянч ечимларидан ташкил топган тўплам  $K$  кавариқ тўпламнинг четки нуқталар тўпламига мос келади ва аксинча, ҳар бир таянч ечим  $K$  тўпламнинг бирор четки нуқтасига мос келади.

4-хулоса. Чизикли дастурлаш масаласининг оптимал ечимини  $K$  тўпламнинг четки нуқталари орасидан қидириш керак.

### Назорат саволлари:

1. Чизикли дастурлаш масаласининг вектор формадаги умумий кўриниши қандай ёзилади?
2. Чизикли дастурлаш масаласи матрица кўринишидаги ифодаси қандай ёзилади?
3. Чизикли дастурлаш масаласини йиғиндилар ёрдамидаги ифодасини ёзинг.
4. «Чизикли дастурлаш масаласининг мумкин бўлган ечими» деганда нимани тушунаси?
5. Чизикли дастурлаш масаласининг таянч ечими нима?
6. Айниган ва айнамаган таянч ечимларни таърифланг.
7. Чизикли дастурлаш масаласининг оптимал ечими нима?
8. Чизикли дастурлаш масаласида қандай тенг кучли алмаштиришларни бажариш мумкин?
9. «Векторларнинг кавариқ комбинацияси» деганда нимани тушунаси?
10. Қавариқ тўпламни таърифланг.
11. Чизикли дастурлаш масаласи ечимларидан ташкил топган тўплам қандай тўплам бўлади?
12. Ечимлардан ташкил топган кавариқ тўпламнинг четки нуқтаси билан таянч ечим орасида қандай боғланиш бор?
13. Мақсад функция ўзининг оптимал қийматига қандай нуқтада эришади?

### Таянч иборалар

Чегаравий шартлар, масала мақсади (мақсад функция), чизикли дастурлаш масаласининг каноник кўриниши, вектор катор, вектор устун, масаланинг йиғиндилар ёрдамидаги кўриниши, масаланинг матрицавий кўриниши, масаланинг мумкин бўлган ечими (режаси), таянч режа, айнамаган таянч режа, айниган таянч режа, оптимал режа (ечим), қўшимча ўзгарувчи, кавариқ комбинация, кавариқ тўплам.

### 3-маъруза. Чизикли дастурлаш масаласининг геометрик талқини.

#### Дарс режаси:

1. Чизикли дастурлаш масаласининг геометрик талқини.
2. Гипертекисликлар ҳақида тушунчалар.
3. Геометрик нуқтаи назардан чизикли дастурлаш масаласининг таърифи.
4. Чегараланган қавариқ тўплам ҳосил қилувчи иқтисодий масалани график усулда ечишнинг умумий ҳоли.
5. Чегараланмаган қавариқ кўпбурчакни ечиш ҳоллари.

#### Адабиётлар

Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 44-51-бетлар

Қуйидаги кўринишда ёзилган чизикли дастурлаш масаласини кўрамиз:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq a_i \quad (i = \overline{1, m}) \quad (1)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}) \quad (2)$$

$$Y_{\max(\min)} = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3)$$

Ушбу чизикли дастурлаш масаласининг геометрик талқини билан танишамиз.

Маълумки,  $n$  та тартиблишган  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сонлар  $n$ -лиги (бирлашмаси)  $n$  ўлчовли фазонинг нуқтаси бўлади. Шунинг учун (1)-(3) чизикли дастурлаш масаласининг режасини  $n$  ўлчовли фазонинг нуқтаси деб қараш мумкин. Бизга маълумки, бундай нуқталар тўплами қавариқ тўпландан иборат бўлади. Қавариқ тўплам чегараланган (қавариқ кўпбурчак), чегараланмаган (қавариқ кўп қиррали соҳа) бўлиши, битта нуқтадан иборат бўлиши ёки бўш тўплам бўлиши ҳам мумкин.

Координатлари

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = a$$

тенгламани қаноатлантирувчи  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  нуқталар тўплами гипертекислик деб аталади. Шу сабабли

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = Y$$

кўринишда ёзилган мақсад функцияни  $Y$  функциянинг турли  $P$  қийматларига мос келувчи ўзаро параллел гипертекисликлар оиласи деб қараш мумкин.

Ҳар бир гипертекисликнинг ихтиёрий нуқтасида  $Y$  функция бир хил қийматни қабул қилади (демак, ўзгармас сатҳда сақланади). Шунинг учун улар «сатҳ текисликлари» дейилади. Геометрик нуқтаи назардан чизикли дастурлаш масаласини қуйидагича таърифлаш мумкин:

(1) ва (2) шартларни қаноатлантирувчи ечимлар кўпбурчагига тегишли бўлган шундай  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  нуқтани топиш керакки, бу нуқтада  $Y$  мақсад функция максимум (минимум) қиймат берувчи (3)



Натижада

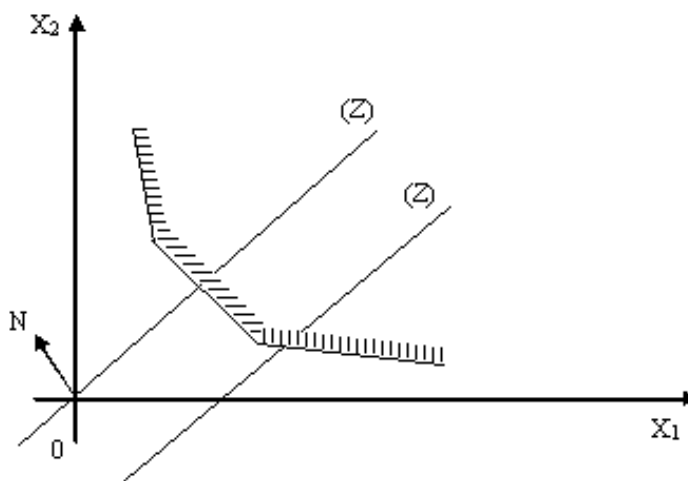
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0 = \text{const}$$

тўғри чизик ҳосил бўлади. Бу тўғри чизикни  $N(c_1, c_2)$  вектор йўналишида ёки унга тескари йўналишда ўзига параллел суриб бориб, қавариқ кўпбурчакнинг чизикли функциясига энг кичик ёки энг катта қиймат берувчи нукталарни аниқлаймиз.

1-шаклдан кўриниб турибдики, чизикли функция ўзининг минимал қийматига қавариқ кўпбурчакнинг  $A$  нуктасида эришади.  $C$  нуктада эса, у ўзининг максимал (энг катта) қийматига эришади. Биринчи ҳолда  $A(x_1, x_2)$  нуктанинг координаталари масаланинг чизикли функцияга минимал қиймат берувчи оптимал ечими бўлади. Унинг координаталари  $AB$  ва  $AE$  тўғри чизикларни ифодаланувчи тенгламалар орқали аниқланади.

Агар ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчак чегараланмаган бўлса, икки ҳол бўлиши мумкин.

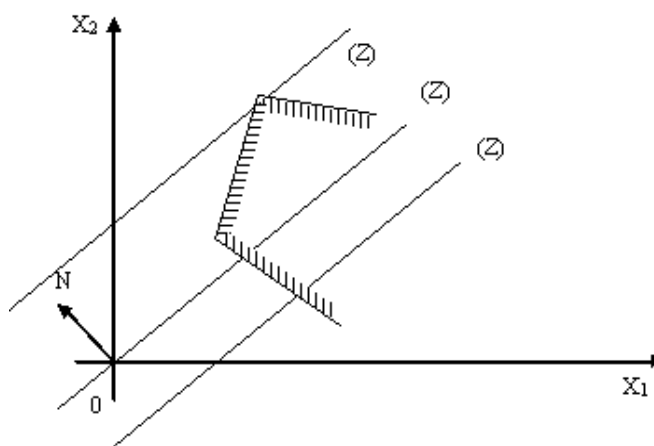
1- ҳол.  $c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$  тўғри чизик  $N$  вектор бўйича ёки унга қарама-қарши йўналишда силжиб бориб, қавариқ кўпбурчакни кесиб ўтади. Аммо на минимал, на максимал қийматга эришмайди. Бу ҳолда чизикли функция қуйидан ва юқоридан чегараланмаган бўлади:



2-шакл

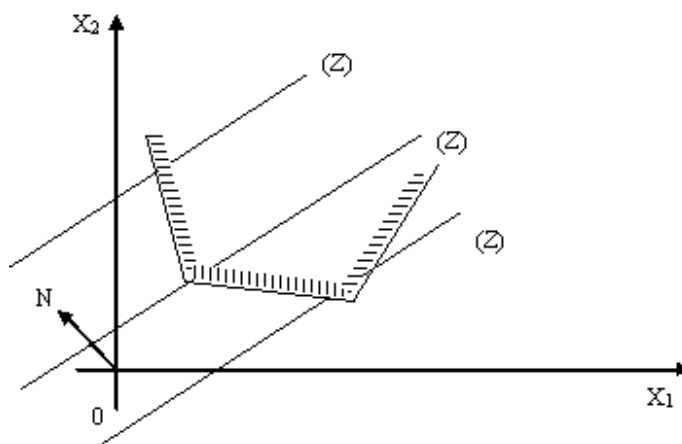
$$c_1x_1 + c_2x_2 = C_0$$

Тўғри чизик  $N$  вектор бўйича силжиб бориб қавариқ кўпбурчакнинг бирорта четки нуктасида ўзининг минимал ёки максимум қийматига эришади. Бундай ҳолда чизикли функция юқоридан чегараланган, қуйидан эса чегараланмаган:



3-шакл

ёки қуйидан чегаланган, юқоридан эса чегараланмаган бўлиши мумкин:



4-шакл

### Назорат саволлари

1. Чизикли дастурлаш масаласининг геометрик талқини қандай?
2. Гипертекисликлар нима?
3. Геометрик нуқтаи назардан чизикли дастурлаш масаласининг таърифи?
4. Чизикли дастурлаш масаласи режаларидан ташкил топган қавариқ тўплам қандай бўлиши мумкин?
5. Чегараланган қавариқ тупламларда оптимал нуқталар?
6. Қавариқ кўпбурчакларнинг чегараланмаган ҳоллари?

### Таянч иборалар

$n$ -улчовли фазо нуқтаси, гипертекислик, гипертекисликлар оиласи, «сатҳ» текисликлари, ечимлар туртбурчаги, минимал ва максимал нуқталар, юқоридан чегараланмаган қавариқ кўпбурчак, чегараланган қавариқ кўпбурчак, қуйидан чегараланмаган қавариқ кўпбурчак, актив шартлар, пассив шартлар.

#### 4-маъруза. Чизиқли дастурлаш масаласининг график усули. Иқтисодий масалани график усулда ечиш.

##### Дарс режаси:

1. Ечимлар кўпбурчаги чегараланган ҳол.
2. Ечимлар кўпбурчаги юқоридан чегараланмаган ҳол.
3. График ёрдамида иқтисодий масалани ечиш.
4. График ёрдамида иқтисодий масала ечимининг тахлили.

##### Адабиётлар

Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 44-51-бетлар

Ҳар хил иқтисодий масалаларнинг ечимларини график усулни қўллаб ҳосил қиламиз

1-мисол. Масалани график усулда ечинг.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

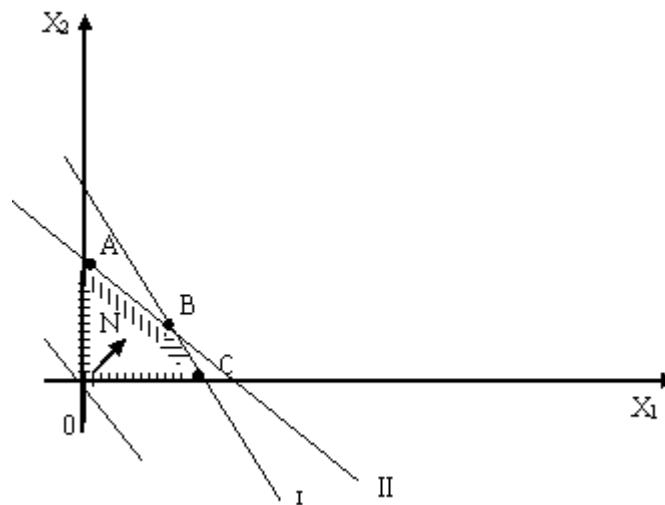
$$Y_{\max} = 2x_1 - 5x_2$$

Ечиш. Ечимлардан ташкил топган қавариқ кўпбурчак яшаш учун координатлар системасида

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 12 & (L_1) \\ 3x_1 + 4x_2 = 12 & (L_2) \end{cases}$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0,$$

чизиқлар ясаймиз:



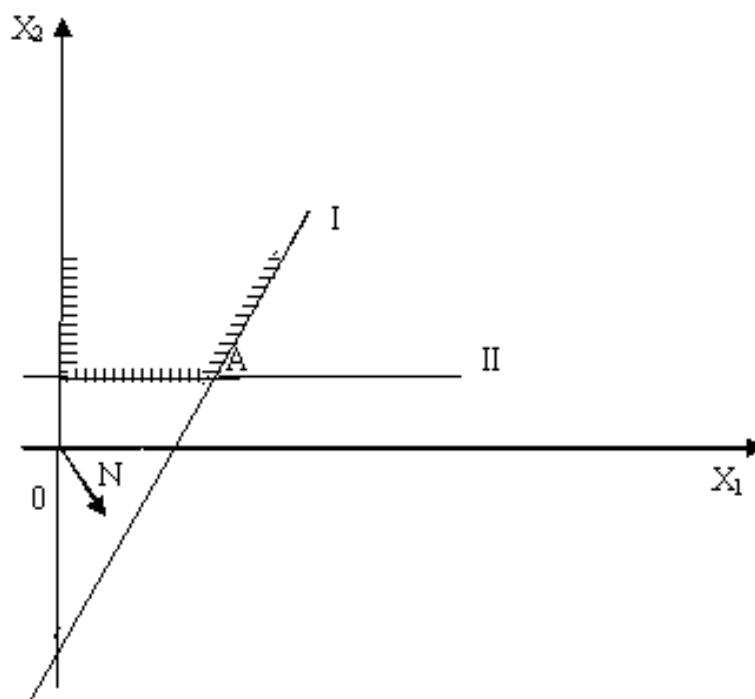
5-шакл



3-мисол. Масалани график усулда ечинг.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 1, \end{cases}$$
$$Y_{\max} = x_1 - 2x_2$$

Масалани юқоридаги усул билан ечиб қуйидаги шаклга эга бўламиз:



7-шакл

Шаклдан кўринадики, ечимлар тўплами чегараланмаган, лекин оптимал ечим мавжуд ва у **A** нукта координаталаридан иборат.

График усул ёрдами билан иқтисодий масалаларни ечиш ва ечимни таҳлил қилиш мумкин. Буни қуйидаги иқтисодий масала мисолида кўрамиз.

Фараз қилайлик, корхонада икки хил бўёқ ишлаб чиқарилсин. Бу бўёқларни ишлаб чиқариш учун 2 хил хом-ашёдан фойдаланилсин. Хом-ашёларнинг захираси берилган ва улар 6 ва 8 бирликни ташкил қилади. Иккинчи хом-ашёга талаб эса 2 бирликни ташкил қилади ва у биринчи бўёққа бўлган талабдан 1 бирликка катта.

Ҳар бир бўёқнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун керак бўлган хом-ашёлар миқдори (нормаси) ҳамда корхонанинг ҳар бир бўёқдан оладиган даромади қуйидаги жадвалда келтирилган.

| хом-ашёлар<br>бўёқлар | 1 | 2 | маҳсулотлар<br>баҳоси |
|-----------------------|---|---|-----------------------|
| I                     | 1 | 2 | 3                     |
| II                    | 2 | 1 | 2                     |
| хом-ашё<br>заҳираси   | 6 | 8 |                       |

Масаланинг иқтисодий маъноси:

Ҳар бир бўёқдан қанча ишлаб чиқарилганда уларга сарф қилинган хом-ашёлар миқдори уларнинг заҳираларидан ошмайди ҳамда талаб бўйича шартлар ҳам бажарилади?

$$x_1 = 3\frac{1}{3}; \quad x_2 = 1\frac{1}{3}; \quad Y_{\max} = 12\frac{2}{3}$$

Масаладаги номаълумларни белгилаймиз:  $x_1$ —ишлаб чиқаришга режалаштирилган I-маҳсулотнинг миқдори,

$x_2$ — II маҳсулот миқдори.

У ҳолда масаланинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади

Масалани график усулда ечамиз. Ҳамда оптимал нуқта эканлигини аниқлаймиз.

Демак, оптимал ечим қуйидагича бўлади

Демак, корхона биринчи бўёқдан  $3\frac{1}{3}$  бирлик, иккинчисидан  $1\frac{1}{3}$  бирлик ишлаб чиқариши керак. Бу ҳолда унинг оладиган даромади  $12\frac{2}{3}$  бирликка тенг бўлади.

$$D(3\frac{1}{3}, 1\frac{1}{3})$$

Энди график ёрдамида иқтисодий масала ечимини таҳлил қилиш мумкин эканлигини кўрсатамиз (8-расм). Бунинг учун оптимал D нуқтага қараймиз. Бу нуқта  $2x_1 + x_2 = 8$  ва  $x_1 + 2x_2 = 6$  тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси эканлигидан берилган иқтисодий масаланинг (1) ва (2) чегараловчи шартлари D нуқтада тенгламага айланишини кўрсатади. Бу эса буюқ ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган иккала хом-ашёнинг ҳам камёб (дефицит) эканлигини кўрсатади. Оптимал нуқта билан боғлиқ бўлган шартлар актив шартлар. Унга боғлиқ бўлмаган шартлар эса пассив шартлар деб аталади. Биз кўраётган масалада маҳсулотларга бўлган талабга қўйилган  $-x_1 + x_2 \leq 1$  ва  $x_2 \leq 2$  шартлар оптимал нуқтага боғлиқ эмаслигини ва шу сабабли бу шартлар пассив шартлар эканлигини аниқлаймиз.

Пассив шартларга мос келувчи ресурслар камёб бўлмайди ва уларнинг маълум даражада ўзгариши оптимал ечимга таъсир қилмайди. Аксинча, актив шартларга мос келувчи ресурсларни бир бирликка оширилиши оптимал ечимнинг ўзгаришига олиб келади.

Масалан, 1-хом-ашё заҳирасини бир бирликка оширилиши оптимал ечимга қандай таъсир кўрсатишини кўриш учун уни 7 га тенг деб оламиз. У ҳолда CD кесма ўзига параллел равишда юқорига кўтарилади ва DCK учбурчак ҳосил бўлади. Энди K нуқта оптимал нуқтага айланади.

Бу нуқтада  $x_2 = 2$  ва  $2x_1 + x_2 = 8$  тўғри чизиклар кесишади. Шунинг учун энди масаланинг (2) ва (4) шартлари актив шартларга, (1) ва (3) шартлари эса пассив шартларга айланади. **К** нуқтанинг координаталари  $x_2 = 2$   $x_1 = 3$ . Демак, янги оптимал ечим

$$x_1 = 3 \quad x_2 = 2 \quad Y_{\max} = 13$$

бўлади.

Оптимал ечимда 1-хом-ашёга доир (1) чегаравий шарт

$$x_1 + 2x_2 = 3 + 2 \cdot 2 = 7$$

га тенг бўлади. Демак, 1-хом-ашёнинг энг кўп мумкин бўлган захираси 7 га тенг бўлиши кераклигини кўрсатади.

Худди шундай йўл билан 2-хом-ашёни бир бирликка ошириш оптимал ечимни қандай ўзгартиришини кўрсатиш мумкин.

Бундан ташқари камёб бўлмаган хом-ашёлар миқдорини, оптимал ечимга таъсир қилмаган даражада, қанчалик камайтириш мумкинлигини ҳам кўрсатиш мумкин.

Юқоридаги 8-шаклда **ВС** кесма  $x_2 = 2$  чизикни, яъни масаланинг 4 шартини ифодалайди. Бу – пассив шарт. Мақсад функция қийматини ўзгартирмаган ҳолда пассив шартни қанчалик ўзгартириш мумкин эканлигини аниқлаш учун **ВС** кесмани ўзига параллел равишда пастга то **D** нуқта билан  $x_2 = 1 \frac{1}{3}$  кесишгунча силжитамиз. Бу нуқтада бўлади.

Демак, иккинчи бўёққа бўлган талабни оптимал ечимга таъсир қилмасдан 1бутун  $1/3$  гача камайтириш мумкин экан.

Шундай йўл билан масаланинг оптимал ечимига таъсир этмасдан унинг (3) – пассив шартнинг ўнг томонини қанчага камайтириш мумкин эканлигини кўрсатиш мумкин.

### Назорат саволлари

1. Иқтисодий масалани график усулда ечганда хом-ашёларнинг камёб ёки камёб эмаслигини қандай аниқлаш мумкин?
2. Пассив ва актив чегараловчи шартлар нима?
3. Актив шартларни (камёб хом-ашёларни) бир бирликка оширганда оптимал ечим қандай ўзгаради?
4. Оптимал ечимни ўзгартирмаган ҳолда пассив шартларни қанчалик ўзгартириш мумкин?

### Таянч иборалар

п-улчовли фазо нуқтаси, гипертекислик, гипертекисликлар оиласи, «сатҳ» текисликлари, ечимлар тўртбурчаги, минимал ва максимал нуқталар, юқоридан чегараланмаган қавариқ кўпбурчак, чегараланган қавариқ кўпбурчак, қуйидан чегараланмаган қавариқ кўпбурчак, актив шартлар, пассив шартлар.

### Дарс режаси:

Агар масала каноник формада бўлмаса, у бу кўринишга келтирилади. Бунинг учун (1) системада тенгсизликлар қатнашса, тенгсизликнинг кичик томонига қўшимча номанфий ўзгарувчи қўшиш ёрдамида, у тенгламага айлантирилади. Агар чизикли функция  $Y_{\max}$  кўринишида бўлса, ундаги ишораларни алмаштириб  $Y_{\min}$  га айлантирилади, яъни -  $Y_{\max} = Y_{\min}$

(1)-(3) масалани ечишдан аввал, (1) системанинг ечими мавжуд эмаслиқ шarti ҳамда унинг номанфий ечими мавжуд эмаслиқ шартларининг бажарилиши текширилади.

а) Агар бирорта тенглама  $0x_1+0x_2+...+0x_n = b$  ( $b \neq 0$ ) кўринишда бўлса, у ҳолда (1) система биргалашмаган бўлади ва у умуман ечимга эга бўлмайди.

б) Агар (1) системадаги бирор тенглама  $a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n = b$  кўринишда бўлиб  $a_1, a_2, ..., a_n$  коэффициентлар бир хил ишорали ва уларнинг ишораси  $b$  нинг ишорасига тескари бўлса, система мусбат ечимга эга бўлмайди.

Агар а) ва б) шартлардан бирортаси бажарилса масала ечимга эга бўлмайди. Агар бу шартлардан бирортаси ҳам бажарилмаса масаланинг берилганлари қуйидаги кўринишдаги жадвалга жойлаштирилади.

| J          | $X_1$    | $X_2$    | ... | $X_j$    | ... | $X_n$    | B     | A.K. |
|------------|----------|----------|-----|----------|-----|----------|-------|------|
| I          |          |          |     |          |     |          |       |      |
| 1          | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $A_{1j}$ | ... | $a_{1n}$ | $b_1$ |      |
| 2          | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $A_{2j}$ | ... | $a_{2n}$ | $b_2$ |      |
| ...        | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...   |      |
| I          | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | ... | $a_{ij}$ | ... | $a_{in}$ | $b_i$ |      |
| ...        | ...      | ...      | ... | ...      | ... | ...      | ...   |      |
| m          | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mj}$ | ... | $a_{mn}$ | $b_m$ |      |
| H.T.       | $S_1$    | $S_2$    | ... | $S_j$    | ... | $S_n$    | $S$   |      |
| $Y_{\min}$ | $C_1$    | $C_2$    | ... | $C_j$    | ... | $C_n$    | 0     |      |

бу ерда

$$S_1 = \sum_{i=1}^m a_{i1}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^m a_{i2}, \quad S_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}, \quad S_n = \sum_{i=1}^m a_{in}, \quad S = \sum_{i=1}^m b_i$$

Жадвалдаги  $m+1$  қатор назорат тенглама дейилади (H.T.). Бу тенгламадан ажратилиши керак бўлган номаълум танланади. Одатда  $\max (\sum a_{ij})$  га мос келувчи устун танланади.

Танланган номаълумни қайси тенгламадан ажратиш кераклигини аниқлаш учун аниқловчи коэффициент ҳисобланади.  $i$ -қаторга мос келувчи (A.K.)  $i$  қуйидагича топилади:

$$(A.K.)_i = \min_{a_{ij} > 0} (b_i / a_{ij}) \quad (i = 1, m)$$

Шартни қаноатлантирувчи қатор билан танланган  $j$ -устун учрашган жойдаги  $a_{ij}$  элемент ҳал қилувчи элемент сифатида рамка ичига олинади (белгиланади). Сўнгра Жордан-Гаусс усули ёрдамида  $x_j$  номаълум  $i$ -тенгламадан ажратилади ва бошқа тенгламалардан, шу жумладан Н.Т. дан,  $Y_{\min}$  дан йўқ қилинади. Ушбу жараён ҳар бир тенгламадан биттадан номаълум ажрагунча, яъни Н.Т.  $0=0$  кўринишга келгунча такрорланади.

Н.Т.  $0=0$  кўринишга келганда берилган масаланинг бошланғич ечими топилади.

Агар топилган ечимдаги  $Y_{\min}$ нинг коэффициентлари  $C'_j \geq 0$  шартни қаноатлантирса ( $j=1, \dots, n$ ), топилган ечим оптимал ечим бўлади.

Акс ҳолда масаланинг оптимал ечими қуйидаги йўл билан топилади: Фараз қилайлик,  $Y_{\min}$ даги  $C'_j < 0$  бўлсин. Бу ҳолда барча  $a'_{ij} \leq 0$  бўлса, масала чекли оптимал ечимга эга бўлмайди.

Агар бирорта  $a_{ij} > 0$  бўлса у ҳолда  $j$ -устуннинг мусбат элементлари

$$\min_{a_{ij} > 0} (b'_i / a'_{ij})$$

учун А.К. ҳисобланади ва муносабатни қаноатлантирувчи  $a'_{ij}$  бошловчи элемент сифатида белгиланади ва яна Жордан-Гаусс усули ёрдамида симплекс жадвал алмаштирилади. Бу жараён оптимал ечим топилгунча такрорланади.

Ҳар бир ажратилган номаълум ўз қаторидаги озод ҳадга тенглаштирилади. Ажралмаган ўзгарувчилар эса нолга тенглаштирилади. Натижада берилган масаланинг оптимал базис ечими ҳосил бўлади. Топилган номаълумларнинг қийматини  $Y_{\min}$  га қўйиб унинг қиймати ва сўнгра  $Y_{\max}$ нинг қиймати топилади.

1-мисол. Масалани таянч ечимини топинг ва уни оптимал ечимга айлантинг.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 5)$$

$$Y_{\min} = -x_1 + x_2$$

| $X_j$<br>$X_i$          | $X_1$               | $X_2$                | $X_3$              | $X_4$            | $X_5$           | $B$         | А.К.                                          |
|-------------------------|---------------------|----------------------|--------------------|------------------|-----------------|-------------|-----------------------------------------------|
|                         | -2<br>1<br>1        | 1<br>-2<br>1         | 1<br>0<br>0        | 0<br>1<br>0      | 0<br>0<br>1     | 2<br>2<br>5 |                                               |
| Н.Т.                    | 0                   | 0                    | 1                  | 1                | 1               | 9           |                                               |
| $Y_{\min}$              | $Y_{\min}$          | -1                   | 1                  | 0                | 0               | 0           |                                               |
| $X_3$                   | -2<br><u>1</u><br>1 | 1<br>-2<br>1         | 1<br>0<br>0        | 0<br>1<br>0      | 0<br>0<br>1     | 2<br>2<br>5 | 2<br><br>5                                    |
| Н.Т.                    | 2                   | -1                   | 0                  | 1                | 1               | 7           |                                               |
| $Y_{\min}$              | -1                  | 1                    | 0                  | 0                | 0               | 0           |                                               |
| $X_3$<br>$X_1$<br>---   | 0<br><u>1</u><br>0  | -3<br>-2<br><u>3</u> | 1<br>0<br>0        | 2<br>1<br>-1     | 0<br>0<br>1     | 6<br>2<br>3 | --<br><br>1                                   |
| Н.Т.                    | 0                   | 3                    | 0                  | -1               | 1               | 3           |                                               |
| $Y_{\min}$              | 0                   | -1                   | 0                  | 1                | 0               | 2           |                                               |
| $X_3$<br>$X_1$<br>$X_2$ | 0<br><u>1</u><br>0  | 0<br>0<br>1          | <u>1</u><br>0<br>0 | 1<br>1/3<br>-1/3 | 1<br>2/3<br>1/3 | 9<br>4<br>1 | Таянч ечим<br>$X=(4;1;9;0;0)$                 |
| Н.Т.                    | 0                   | 0                    | 0                  | 0                | 0               | 0           |                                               |
| $Y_{\min}$              | 0                   | 0                    | 0                  | 2/3              | 1/3             | 3           | Оптимал ечим<br>$X=(4;1;9;0;0)$ $Y_{\min}=-3$ |

### Назорат саволлари

1. Симплекс усулининг ғояси нимадан иборат?
2. Симплекс усули яратувчилари кимлар?
3. Эйдельмант усулида Н.Т. қандай ролни бажаради?
4. Аниқловчи коэффициент (АК) нима учун керак?
5. Бошланғич ечимнинг (режанинг) оптимал ечим бўлиш шarti нимадан иборат?

### Таянч иборалар

Бошланғич таянч ечим, оптималлик шarti, симплекс усули масаласининг каноник кўриниши, қўшимча номанфий ўзгарувчи, номанфий ечим мавжудмаслик шarti, системанинг биргаликда бўлмаслик шarti, назорат тенглама, аниқловчи коэффициент, чекли оптимал базис ечим, оптимал ечимнинг мавжудмаслик шarti, симплекс жадваллар.

## симплекс усул

### Дарс режаси:

1. Данциг усули қўлланиладиган ЧД масаласининг кўринишлари.

2. Бошланғич ечимнинг таянч ечим бўлиш шarti.

- ### 3. Симплекс жадвалда ҳисоблашларнинг бориши.

- #### 4. Мисол.

- ## 5. Сунъий базис усули.

- ## 6. Сунъий базис усулини мисол ечишга қўллаш.

## Адабиётлар

Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое  
программирование». 51-75-бетлар

Ўтган дарсда биз танишган симплекс усул билан ихтиёрий кўринишда берилган ЧП масаласини ечиш мумкин. Данциг яратган симплекс усул эса, ҳар бир тенгламада биттадан ажратилган номаълум (базис ўзгарувчи) қатнашиши шартига асосланган. Бошқача айтганда ЧП масаласи қуйидаги кўринишда берилгандагина Данциг усулини қўллаш мумкин:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{1m+1} \mathbf{x}_{m+1} + \cdots + \mathbf{a}_{1n} \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}_{2m+1} \mathbf{x}_{m+1} + \cdots + \mathbf{a}_{2n} \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m + \mathbf{a}_{mm+1} \mathbf{x}_{m+1} + \cdots + \mathbf{a}_{mn} \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_m \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_n \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \quad (3)$$

(1) системани вектор шаклида ёзиб олайлик

$$\mathbf{P}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{P}_m\mathbf{x}_m + \mathbf{P}_{m+1}\mathbf{x}_{m+1} + \dots + \mathbf{P}_n\mathbf{x}_n = \mathbf{P}_0$$

Бу ерда

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{p}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p}_{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1m+1} \\ \mathbf{a}_{2m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{mm+1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{p}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_m$  векторлар системаси  $\mathbf{m}$ -ўлчовли фазода ўзаро чизиқли эркин бўлган бирлик векторлар системасидан иборат. Улар  $\mathbf{m}$  ўлчовли

фазонинг базисини ташкил қилади. Ушбу векторларга мос келувчи  $x_1, x_2, \dots, x_m$  ўзгарувчиларни «базис ўзгарувчилар» деб атаймиз.

$x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$  – базис бўлмаган ўзгарувчилар. Агар базис бўлмаган ўзгарувчиларга  $0$  қиймат берсак, базис ўзгарувчилар озод ҳадларга тенг бўлади. Натижада  $x_0 = (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$  ечим ҳосил бўлади. Бу ечим бошланғич ечим бўлади. Ушбу ечимга  $x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_m P_m = P_0$  ёйилма мос келади. Бу ёйилмадаги  $P_1, P_2, \dots, P_m$  векторлар ўзаро эркин бўлганлиги сабабли топилган бошланғич ечим таянч ечим бўлади.

Симплекс жадвал қуйидаги кўринишда бўлади

| Базис<br>вект.    | $C_{\text{баз}}$ | $P_0$                    | $C_1$          | $C_2$          | ... | $C_m$          | $C_{m+1}$                                       | ... | $C_k$                                 | ... | $C_n$                                 |
|-------------------|------------------|--------------------------|----------------|----------------|-----|----------------|-------------------------------------------------|-----|---------------------------------------|-----|---------------------------------------|
|                   |                  |                          | $P_1$          | $P_2$          | ... | $P_m$          | $P_{m+1}$                                       | ... | $P_k$                                 | ... | $P_n$                                 |
| $P_1$             | $C_1$            | $b_1$                    | 1              | 0              | ... | 0              | $A_{1m+1}$                                      | ... | $a_{1k}$                              | ... | $a_{1n}$                              |
| $P_2$             | $C_2$            | $b_2$                    | 0              | 1              | ... | 0              | $A_{2m+1}$                                      | ... | $a_{2k}$                              | ... | $a_{2n}$                              |
| ...               | ...              | ...                      | ...            | ...            | ... | ...            | ...                                             | ... | ...                                   | ... | ...                                   |
| $P_l$             | $C_l$            | $b_l$                    | 0              | 0              | ... | 0              | $a_{lm+1}$                                      | ... | $a_{lk}$                              | ... | $a_{ln}$                              |
| ...               | ...              | ...                      | ...            | ...            | ... | ...            | ...                                             | ... | ...                                   | ... | ...                                   |
| $P_m$             | $C_m$            | $b_m$                    | 0              | 0              | ... | 1              | $a_{mm+1}$                                      | ... | $a_{mk}$                              | ... | $a_{mn}$                              |
| $y_j = Z_j - C_j$ | ...              | $y_0 = \sum_{i=0}^m b_i$ | $\Delta_1 = 0$ | $\Delta_2 = 0$ | ... | $\Delta_m = 0$ | $\sum_{i=0}^m y_{m+1} = a_{im+1} C_i - C_{m+1}$ | ... | $\sum_{i=0}^m y_k = a_{ik} C_i - C_k$ | ... | $\sum_{i=0}^m y_n = a_{in} C_i - C_n$ |

Агар барча устунларда  $y_j \leq 0$  бўлса,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  ечим оптимал ечим бўлади. Бу ечимдаги чизиқли функциянинг қиймати  $y_0$  га тенг бўлади.

Агар камида битта  $j$  учун  $y_j \geq 0$  бўлса ҳам масаланинг оптимал ечими топилмаган бўлади. Шунинг учун топилган ечимни оптимал ечимга яқин бўлган ечимга алмаштириш мақсадида базисга

$$\max_{y_j > 0} (y_j) = y_k = \Delta_k$$

шартни қаноатлантирувчи  $P_k$  векторни киритиш керак. Агар  $P_k$  базисга киритилса, эски базис векторлардан бирортасини базисдан чиқариш керак. Базисдан

$$\min_{a_{ik} > 0} (b'_i / a'_{ij}) = b'_e / a'_{ek}$$

шарт ўринли бўлган  $P_e$  вектор чиқарилади. Бу ҳолда  $a_{ek}$  элемент ҳал қилувчи элемент сифатида белгиланди. Шу элемент жойлашган  $j$ -қатордаги  $P_e$  вектор

$$\begin{cases} b'_i = b_i - (b'_e / a'_{ek}) \cdot a_{ik} \\ b'_e = b'_e / a'_{ek} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x'_i = x_i - (x'_e / x'_{ek}) \cdot x_{ik} \\ x'_e = x'_e / x'_{ek} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - (a'_{ei} / a'_{ek}) \cdot a_{ik} \\ a'_{ej} = a'_{ej} / a'_{ek} \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x'_{ij} = x_{ij} - (x'_{ej} / x'_{ek}) \cdot x_{ik} \\ x'_{ej} = x'_{ej} / x'_{ek} \end{cases}$$

ўрнига у жойлашган устундаги  $P_k$  вектор базисга киритилади.  $P_e$  векторнинг ўрнига  $P_k$  векторни киритиш учун симплекс жадвал қуйидаги формулалар асосида алмаштирилади.

Симплекс жадвал алмашгандан сўнг яна қайтадан  $\Delta_j$  баҳолар аниқланади. Агар барча  $j$  лар учун  $\Delta_j$  бўлса, оптимал ечим топилган бўлади. Акс ҳолда топилган ечим бошқа ечим билан алмаштирилади. Умуман бу жараён оптимал ечим топилгунча ёки масаланинг чекли оптимал ечими мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади. Агар бирорта  $j$  учун  $\Delta_j > 0$  бўлиб, бу устундаги барча  $a_{ij}$  элементлар учун  $a_{ij} \leq 0$  ( $i=1, \dots, m$ ) шарт бажарилса, масаланинг мақсад функцияси чекли экстремумга эга бўлмайди.

Фараз қилайлик, симплекс жадвалда оптималлик шarti ( $\Delta_j \leq 0$   $i=1, \dots, n$ ) бажарилсин. Бу ҳолда ечим

$$X = B^{-1}P_0$$

формула орқали топилади. Бу ерда  $B = (P_1, P_2, \dots, P_m)$  матрица базис векторлардан ташкил топган матрицадир. (1)-(3) масала учун  $B$  матрица  $m$  ўлчовли бирлик матрица, ва  $J_m B^{-1}$  матрица ҳам бирлик матрица бўлганлиги сабабли  $X^0 = P^0 = (b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, \dots, 0)$  оптимал ечим бўлади.

1-мисол. Масалани симплекс усул билан ечинг

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$Y_{\min} = x_2 - 3x_3 + 2x_5$$

Ечиш. Белгилашлар киритамиз ва симплекс жадвални тўлдирамиз

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}, P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$C = (0; 1; -3; 0; 2)$$

|                      |                        |                        |                      |                      |                      |                      |                      |                      |                      |
|----------------------|------------------------|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <b>I</b>             | <b>Базис<br/>вект.</b> | <b>C<sub>баз</sub></b> | <b>P<sub>0</sub></b> | <b>0</b>             | <b>1</b>             | <b>-3</b>            | <b>0</b>             | <b>2</b>             | <b>0</b>             |
|                      |                        |                        |                      | <b>P<sub>1</sub></b> | <b>P<sub>2</sub></b> | <b>P<sub>3</sub></b> | <b>P<sub>4</sub></b> | <b>P<sub>5</sub></b> | <b>P<sub>6</sub></b> |
| <b>1</b>             | <b>P<sub>1</sub></b>   | <b>0</b>               | <b>7</b>             | <b>1</b>             | <b>3</b>             | <b>-1</b>            | <b>0</b>             | <b>-2</b>            | <b>0</b>             |
| <b>2</b>             | <b>P<sub>4</sub></b>   | <b>0</b>               | <b>12</b>            | <b>0</b>             | <b>-2</b>            | <b>14</b>            | <b>1</b>             | <b>0</b>             | <b>0</b>             |
| <b>3</b>             | <b>P<sub>6</sub></b>   | <b>0</b>               | <b>10</b>            | <b>0</b>             | <b>-4</b>            | <b>3</b>             | <b>0</b>             | <b>8</b>             | <b>1</b>             |
| <b>Δ<sub>j</sub></b> |                        |                        | <b>0</b>             | <b>0</b>             | <b>-1</b>            | <b>3</b>             | <b>0</b>             | <b>-2</b>            | <b>0</b>             |
| <b>1</b>             | <b>P<sub>1</sub></b>   | <b>0</b>               | <b>10</b>            | <b>1</b>             | <b>5/2</b>           | <b>0</b>             | <b>1/4</b>           | <b>-2</b>            | <b>0</b>             |
| <b>2</b>             | <b>P<sub>3</sub></b>   | <b>-3</b>              | <b>3</b>             | <b>0</b>             | <b>-1/2</b>          | <b>0</b>             | <b>1/4</b>           | <b>0</b>             | <b>0</b>             |
| <b>3</b>             | <b>P<sub>6</sub></b>   | <b>10</b>              | <b>1</b>             | <b>0</b>             | <b>-5/2</b>          | <b>0</b>             | <b>-3/4</b>          | <b>8</b>             | <b>1</b>             |
| <b>Δ<sub>j</sub></b> |                        |                        | <b>-9</b>            | <b>0</b>             | <b>½</b>             | <b>0</b>             | <b>-3/4</b>          | <b>-2</b>            | <b>0</b>             |
| <b>1</b>             | <b>P<sub>2</sub></b>   | <b>1</b>               | <b>4</b>             | <b>2/5</b>           | <b>1</b>             | <b>0</b>             | <b>1/1</b>           | <b>-4/5</b>          | <b>0</b>             |
| <b>2</b>             | <b>P<sub>3</sub></b>   | <b>-3</b>              | <b>5</b>             | <b>1/5</b>           | <b>0</b>             | <b>1</b>             | <b>3/1</b>           | <b>-2/5</b>          | <b>0</b>             |
| <b>3</b>             | <b>P<sub>6</sub></b>   | <b>10</b>              | <b>11</b>            | <b>1</b>             | <b>0</b>             | <b>0</b>             | <b>-1/2</b>          | <b>6</b>             | <b>1</b>             |
| <b>Δ<sub>j</sub></b> |                        |                        | <b>-11</b>           | <b>-1/5</b>          | <b>0</b>             | <b>0</b>             | <b>-1/2</b>          | <b>-8/5</b>          | <b>0</b>             |

$$\Delta_i \leq 0 \text{ . Оптимальный } x = (0; 4; 5; 0; 0; 11) \text{ } Y_{\min} = -11.$$

## Сунъий базис усули.

Агар масаланинг шартларида ўзаро эркин бўлган  $m$  та бирлик векторлар (базис векторлар) қатнашмаса, улар сунъий равишда киритилади. Масалан, масала кўидаги кўринишда берилган бўлсин:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_m \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_n \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$Y_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3)$$

Бу масалага  $\mathbf{x}_{n+1} \geq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_{n+2} \geq \mathbf{0}$ , ...,  $\mathbf{x}_{n+m} \geq \mathbf{0}$  қўшимча ўзгарувчилар киритилса, қуйидаги кегайтирилган масала ҳосил бўлади

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+2} = \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n + \mathbf{x}_{n+m} = \mathbf{b}_m \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_n \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_{n+m} \geq \mathbf{0}, \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_{\min} = -c_1 \mathbf{x}_1 - c_2 \mathbf{x}_2 - \dots - c_n \mathbf{x}_n + 0(\mathbf{x}_{n+1} + \dots + \mathbf{x}_{n+m}) \quad (6)$$

Бу ҳолда  $\mathbf{P}_{n+1}, \mathbf{P}_{n+2}, \dots, \mathbf{P}_{n+m}$  векторлар базис векторлар ва  $\mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+2}, \dots, \mathbf{x}_{n+m}$  ўзгарувчилар «базис ўзгарувчилар» деб қабул қилинади.

Агар берилган масала қуйидаги кўринишда бўлса:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (7)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \quad (8)$$

$$Y_{\min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (9)$$

бу масалага сунъий  $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$  ўзгарувчилар киритиб қуйидаги кенгайтирилган масала ҳосил қилинади:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \quad (10)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_{n+1} \geq 0, \dots, x_{n+m} \geq 0, \quad (11)$$

$$Y_{\min} = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n + M(x_{n+1} + \dots + x_{n+m}) \quad (12)$$

бу ерда:  $M$  – етарлича катта мусбат сон.

Сунъий базис ўзгарувчиларига мос келувчи  $P_{n+1}, P_{n+2}, \dots, P_{n+m}$  векторлар «сунъий базис векторлар» деб аталади.

Берилган (7)-(9) масаланинг оптимал ечими қуйидаги теоремага асосланиб топилади.

Теорема: Агар кенгайтирилган (10)-(12) масаланинг оптимал ечимида сунъий базис ўзгарувчилари нолга тенг бўлса, яъни:

$$x_{n+i} = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда бу ечим берилган (7)-(9) масаланинг ҳам оптимал ечими бўлади.

Кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимида камида битта сунъий базис ўзгарувчи нолдан фарқли бўлса, унда масала ечимга эга бўлмайди.

2-мисол. Масалани сунъий базис усули билан ечинг

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 4)$$

$$Z_{\max} = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$$

Ечиш. Масалага сунъий  $x_5 \geq 0, x_6 \geq 0$  ўзгарувчилар киритамиз ва уни нормал кўринишга келтирамиз.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$Z_{\min} = -5x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6)$$

Ҳосил бўлган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз.

| i              | Базис<br>с<br>вект. | C <sub>баз</sub> | P <sub>0</sub> | -5             | -3             | -4             | 1              | M              | M              | A.K |
|----------------|---------------------|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
|                |                     |                  |                | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> | P <sub>5</sub> | P <sub>6</sub> |     |
| 1              | P <sub>5</sub>      | M                | 3              | 1              | 3              | 2              | 2              | 1              | 0              | 1   |
| 2              | P <sub>6</sub>      | M                | 3              | 2              | 2              | 1              | 1              | 0              | 1              | 1,5 |
| Δ <sub>i</sub> |                     |                  | 6m             | 3m+5           | 5m+3           | 3m+4           | 3m-1           | 0              | 0              |     |
| 1              | P <sub>2</sub>      | -3               | 1              | 1/3            | 1              | 2/3            | 2/3            | 1/3            | 0              | 3   |
| 2              | P <sub>6</sub>      | M                | 1              | 4/3            | 0              | -1/3           | -1/3           | -2/3           | 1              | s   |
| Δ <sub>i</sub> |                     |                  | M-3            | M+4            | 0              | M+3            | M-2            | M-1            | 0              |     |
| 1              | P <sub>2</sub>      | -3               | 3/4            | 0              | 1              | 3/4            | 3/4            | 1/2            | -1/4           | 1   |
| 2              | P <sub>1</sub>      | -5               | 3/4            | 1              | 0              | -1/4           | -1/4           | -1/2           | 3/4            | -   |
| Δ <sub>i</sub> |                     |                  | -6             | 0              | 0              | 3              | -2             | 1-M            | -3-M           |     |
| 1              | P <sub>3</sub>      | -4               | 1              | 0              | 4/3            | 1              | 1              | 2/3            | -1/3           |     |
| 2              | P <sub>1</sub>      | -5               | 1              | 1              | 1/3            | 0              | 0              | -1/3           | 2/3            |     |
| Δ <sub>i</sub> |                     |                  | 9              | 0              | -4             | 0              | -5             | -1-M           | -2-M           |     |

Шундай қилиб, симплекс усул бўйича 4 та қадамдан иборат яқинлашишда оптимал ечим топилди.  $\Delta_j \leq 0$ . Оптимал ечим  $x=(1;0;1;0;0;0)$   $Y_{\min}=-9$ .

Кенгайтирилган масаланинг оптимал ечимидаги сунъий ўзгарувчилар 0га тенг ( $x_5=0$ ,  $x_6=0$ ). Шунинг учун (теоремага асосан) берилган масаланинг оптимал ечими:

$$x=(1;0;1;0;0;0); \quad Z_{\min}=-9; \quad Z_{\max}=9; \quad \text{бўлади.}$$

### Назорат саволлари

1. Данциг яратган симплекс усул қандай шартга асосланган?
2. Данциг усули жадвалида қандай ечим бошланғич бўла олади?
3. Данциг жадвалида ҳисоблаш жараёни қандай боради?
4. Сунъий базис усули қачон қўлланилади?
5. «Сунъий базис векторлар» нима?

### Таянч иборалар

Базис ўзгарувчи, n-улчовли фазо, векторлар системаси, бошланғич ечим, таянч ечим, оптимал ечим, базис векторлар, симплекс жадваллар, мақсад функциянинг чекли экстремумга эришиш шarti, бирлик матрица, сунъий базис векторлар.

# назарияси

### Дарс режаси:

1. Берилган ва унга иккиламчи масалаларнинг умумий қўйилиши ва турли формада ёзилиши.
2. Берилган ва унга иккиламчи масалаларнинг иқтисодий маъноси.
3. Симметрик бўлмаган берилган ва унга иккиламчи масалаларнинг кўринишлари.
4. Иккиланиш назариясининг асосий теоремаси.
5. Мисол.
6. Сунъий базис вектор усули билан ечилганда ЧД масаласининг ечимга эга бўлмаслик ҳоллари.

## Адабиётлар

1. Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 84-92-бетлар
2. М.И.Эйдельмант, М.И.Джемилев, В.Б.Шапиро «Сборник задач по курсу математического программирования». 68-72-бетлар

### Асосий тушунчалар.

Ҳар бир чизиқли дастурлаш масаласига унга нисбатан иккиламчи масала деб аталувчи бошқа масалани мос қўйиш мумкин. Берилган масаладаги мақсад функция ва номаълумларга қўйилган чегаравий шартлар орқали иккиламчи масаланинг мақсад функциясини ва чегаравий шартларини тўла аниқлаш мумкин.

Берилган масала ва унга иккиламчи масалалар биргаликда ўзаро иккиламчи (қўшма) масалалар деб аталади. Агар берилган масала ёки унга иккиламчи масалалардан бирортаси ечимга эга бўлса, уларнинг иккинчиси ҳам оптимал ечимга эга бўлади.

Ўзаро иккиламчи масалаларни кўз олдига келтириш ва уларни иқтисодий маъноларини таҳлил қилиш учун қуйидаги ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласини кўрамиз.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_2 \\ \text{--- --- --- --- ---} \\ \mathbf{a}_{m1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{m2}\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{a}_{mn}\mathbf{x}_n \leq \mathbf{b}_m \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}, \dots, \mathbf{x}_n \geq \mathbf{0}, \quad (2)$$

$$Y_{\max} = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3)$$

Масаланинг (1) шarti махсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган  $m$  хил хом-ашёнинг ҳар бири чегараланган эканлигини ва уларни қандай меъёрларда сарф қилиш кераклигини кўрсатади. Бу ерда:  $x_j$  ( $j=1,...,n$ ) ишлаб чиқариладиган  $j$ -махсулот миқдори,  $x_i$  ( $i=1,...,n$ )  $i$ -хом-ашёнинг захираси (запаси)  $a_{ij}$  коэффициентлар  $j$ -махсулотнинг  $I$  бирлигини

$$\begin{aligned} \mathbf{AX} &\leq \mathbf{B} & (4) \\ \mathbf{X} &\geq \mathbf{0} & (5) \\ \mathbf{Y}_{\max} &= \mathbf{CX} & (6) \end{aligned}$$

$$X \geq 0 \quad (5)$$

$$\mathbf{Y}_{\max} = \mathbf{C}\mathbf{X} \quad (6)$$

Математик нуқтаи назардан иккиламчи масалани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$W_1 \geq 0, W_2 \geq 0, \dots, W_m \geq 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_{\min} = \mathbf{b}_1 \mathbf{W}_1 + \mathbf{b}_2 \mathbf{W}_2 + \dots + \mathbf{b}_m \mathbf{W}_m \quad (9)$$

Иккиламчи масала вектор формада қуйидагича ёзилади:

$$W_A \leq C \quad (10)$$

$$W \geq 0 \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_{\min} = \mathbf{W}\mathbf{B} \quad (12)$$

(1)-(3) масал [(4)-(6)] ва (7)-(9) [(10)-(12)] масалалар «ўзаро симметрик бўлган иккиламчи масалалар» дейилади. Бу масалаларда чегаравий шартлар тенгсизликлардан иборат бўлади ҳамда номаълумларнинг манфий бўлмаслиги талаб қилинади. Симметрик бўлмаган иккиламчи масалалар кўйидаги кўринишда бўлиши мумкин:

Берилган масала:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \mathbf{AX} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{Y}_{\max} = \mathbf{CX} \\ \text{II.} \quad & \mathbf{AX} = \mathbf{B} \\ & \mathbf{X} \geq \mathbf{0} \\ & \mathbf{Y}_{\min} = \mathbf{CX} \end{aligned}$$

Иккиламчи масала:

$$\begin{aligned} & \mathbf{WA} \geq \mathbf{C} \\ & \mathbf{F}_{\min} = \mathbf{WB} \\ & \mathbf{WA} \leq \mathbf{C} \\ & \mathbf{F}_{\max} = \mathbf{WB} \end{aligned}$$

Бу масалалардан кўринадик, агар берилган масаладаги чегаравий шартлар тенглама кўринишда бўлиб, мақсад функция эса  $\mathbf{Y}_{\max}$  ёки  $\mathbf{Y}_{\min}$  кўринишда бўлса, иккиламчи масаладаги чегаравий шартлар тенгсизлик кўринишида бўлиб, унинг « $\leq$ » ёки « $\geq$ » кўринишда бўлиши берилган масаланинг мақсад функциясининг  $\mathbf{Y}_{\min}$  ёки  $\mathbf{Y}_{\max}$  бўлишига боғлиқ. Иккиламчи масаланинг мақсад функцияси берилган масала мақсад функциясига тескари бўлади, яъни агар берилган масала мақсад функцияси  $\mathbf{Y}_{\max}$  бўлса, иккиламчи масалада у  $\mathbf{F}_{\min}$  бўлади ва аксинча  $\mathbf{Y}_{\min}$  бўлса,  $\mathbf{F}_{\max}$  бўлади.

2. Берилган масаладаги технологик коэффициентлардан ташкил топган матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \dots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлса, иккиламчи масаладаги технологик коэффициентлар матрицаси (технологик матрица)

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{21} & \dots & \mathbf{a}_{n1} \\ \mathbf{a}_{12} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{1n} & \mathbf{a}_{2n} & \dots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишда, яъни  $\mathbf{A}$  матрицага транспонирланган матрица бўлади.

3. Иккиламчи масаладаги номаълумлар сони берилган масаланинг чегаравий шартларидаги тенгламалар (тенгсизликлар) сонига тенг. Иккиламчи масала чегаравий шартларидаги тенгламалар (тенгсизликлар) сони берилган масаладаги номаълумлар сонига тенг бўлади.

4. Иккиламчи масала мақсад функциядаги коэффициентлар берилган масаладаги озод ҳадлардан иборат бўлади. Иккиламчи масаладаги озод ҳадлар эса берилган масала мақсад функция коэффициентларидан иборат бўлади.

5. Агар берилган масаладаги  $\mathbf{x}_j$  номаълум мусбат бўлса, ( $\mathbf{x}_j \geq 0$ ) у ҳолда иккиламчи масаладаги  $j$ -шарт « $\geq$ » кўринишдаги тенгсизликдан иборат бўлади. Агар  $\mathbf{x}_j$  номаълум мусбат ҳам, манфий ҳам қийматларини қабул

килиши мумкин бўлса, у ҳолда иккиламчи масаладаги  $j$ -шарт тенгламадан иборат бўлади.

6. Агар берилган масаладаги  $i$ -шарт тенгсизликдан иборат бўлса, иккиламчи масаладаги  $W_i$  номаълум мусбат бўлади, яъни  $W_i \geq 0$ .

Агар (1)-(3) масаладаги  $i$ -шарт тенгсизликдан иборат бўлса,  $W_i \geq 0$  мусбат ҳам, манфий ҳам бўлиши мумкин.

1-мисол. Берилган масалага иккиламчи масала тузинг.

Берилган масала:

$$-x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 12$$

$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 24$$

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$F_{\max} = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

Иккиламчи масала:

$$-W_1 + 2W_2 + 3W_3 \geq 2$$

$$3W_1 - W_2 + W_3 \geq 1$$

$$-5W_1 + 4W_2 + W_3 \geq 3$$

$$W_1 \geq 0, W_3 \geq 0, W_2 \geq 0$$

$$Z_{\min} = 12W_1 + 24W_2 + 18W_3$$

2-мисол. Берилган масалага иккиламчи масала тузинг.

Берилган масала:

$$x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13$$

$$x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$F_{\max} = 4x_1 + x_2 + 4x_3$$

Иккиламчи масала:

$$W_1 + W_2 + W_3 \geq 4$$

$$-W_1 + 3W_2 + 5W_3 \geq 1$$

$$4W_1 - 2W_2 - 6W_3 \geq 4$$

$$W_1 \geq 0, W_3 \geq 0$$

$$Z_{\min} = 12W_1 + 13W_2 + 11W_3$$

Берилган ва унга иккиламчи масалалар ечимлари орасидаги боғланиш  
Иккиламчи масаланинг асосий теоремаси ёрдамида қуйидагича изоҳланади.

Теорема. Агар берилган масала ёки унга иккиламчи масаладан бирортаси оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам ечимга эга бўлади ҳамда бу масалалардаги мақсад функцияларнинг экстремал қийматлари ўзаро тенг бўлади, яъни  $Y_{\max} = F_{\min}$ . Агар бу масалалардан бирининг чизиқли функцияси чегараланмаган бўлса, у ҳолда иккинчи масала ҳеч қандай ечимга эга бўлмайди.

Теоремани исботсиз қабул қиламиз.

**Хулоса.** Агар берилган масала ечимга эга бўлса, у ҳолда иккиламчи масаланинг ечими  $W^0 = B^{-1}C^0$  формула орқали топилади. Худди шунингдек, агар иккиламчи масала оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда берилган масаланинг оптимал ечими  $X^0 = b^0 B^{-1}$  формула орқали топилади. Бу формулаларда  $C^0$  – охириги симплекс жадвалдаги базис векторларга мос келувчи  $C$  вектор элементлари  $B^0$ -иккиламчи масала оптимал ечимга мос келувчи мақсад функция  $F$  нинг коэффициентларидан ташкил топган вектор;  $B^{-1}$  матрица биринчи симплекс жадвалдаги базис векторларининг охириги симплекс жадвалдаги кўринишидан ташкил топган матрица.

3-мисол. Берилган масала ва унга иккиламчи масаланинг ечимини топинг:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7 \\ -2x_1 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ -4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=1, 2, \dots, 6)$$

$$Y_{\min} = x_2 - 3x_3 + 3x_5$$

Ечиш. Масалага иккиламчи масалани тузамиз:

$$\begin{aligned} W_1 &\leq 0, & 3W_1 - 2W_2 - 4W_3 &\leq 1 \\ & & -W_1 + 4W_2 + 5W_3 &\leq 1 \\ W_2 &\leq 0, & 2W_1 + 8W_3 &\leq 2 \\ W_3 &\leq 0, & F_{\max} &= 7W_1 + 12W_2 + 10W_3 \end{aligned}$$

| Базис<br>вект. | $C_{\text{баз}}$ | $P_0$ | 0     | 1     | -3    | 0     | 2     | 0     |
|----------------|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                |                  |       | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ |
| $P_1$          | 0                | 7     | 1     | 3     | -1    | 0     | 2     | 0     |
| $P_4$          | 0                | 12    | 0     | -2    | 4     | 1     | 0     | 0     |
| $P_6$          | 0                | 10    | 0     | -4    | 3     | 0     | 8     | 1     |
| $\Delta_j$     |                  | 0     | 0     | -1    | 3     | 0     | -2    | 0     |
| $P_1$          | 0                | 10    | 1     | 5/2   | 0     | 1/4   | 0     | 0     |
| $P_3$          | -3               | 3     | 0     | -1/2  | 1     | 1/4   | 0     | 0     |
| $P_6$          | 0                | 1     | 0     | -5/2  | 0     | -3/4  | 8     | 1     |
| $\Delta_j$     |                  | 9     | 0     | 1/2   | 0     | -3/4  | -2    | 0     |
| $P_2$          | 1                | 4     | 2/5   | 1     | 0     | 1/10  | 4/5   | 0     |
| $P_3$          | -3               | 5     | 1/5   | 0     | 1     | 3/10  | 2/5   | 0     |
| $P_6$          | 0                | 4     | 1     | 0     | 0     | -1/2  | 10    | 1     |
| $\Delta_j$     |                  | -11   | 1/5   | 0     | 0     | -4/5  | -12/5 | -     |

Оптимал ечим

$$X^0 = (0; 4; 5; 0; 0; 1)$$

$$C^0 = (1; -3; 0)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 115 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W^0 = C^0 B^{-1} = (1; -3; 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 115 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left( -\frac{1}{5}; -\frac{4}{5}; 0 \right)$$

Жадвалдан кўринадикки иккиламчи масаланинг ечимини ҳисоблаб ўтирмаслик ҳам мумкин. Охирги симплекс жадвалда  $\mathbf{B}^{-1}$  матрица кирувчи ( $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_4, \mathbf{P}_6$ ) векторларга мос келувчи  $\mathbf{m}+1$  қатор элементлари  $\mathbf{W}^0$  векторнинг (иккиламчи масала ечимининг) элементларини беради.  $\mathbf{m}+1$  қаторнинг  $\mathbf{P}^0$  векторга мос келган элемент эса оптимал ечимга мос келувчи  $\mathbf{Y}_{\min}$  ва  $\mathbf{F}_{\max}$  функцияларнинг

$$\mathbf{Y}_{\min}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{F}_{\max}(\mathbf{W}^0) = -11$$

қийматини беради. Шундай қилиб айтиш мумкинки, оптимал ечимда иккиламчи масалалар мақсад функцияларининг оптимал қийматлари ўзаро тенг бўлади.

### Назорат саволлари

1. Берилган масаланинг умумий қўйилиши ва унинг иқтисодий маъноси?
2. Иккиламчи масалаларнинг умумий қўйилиши ва унинг иқтисодий маъноси?
3. Берилган ва унга иккиламчи масалаларнинг мақсад функциялари орасида боғланиши.
4. Берилган масала ва унга иккиламчи масала шартлари орасида қандай боғланиш бор?
5. Иккиланишнинг асосий теоремаси қандай таърифланади?

### Таянч иборалар

Иккиламчи масала, қўшма масала, берилган масала вектор формаси, иккиланмаган масала вектор формаси, симметрик масалалар, симметрикмас масалалар, технологик коэффициентлар матрицаси, транспонирланган матрица, иккиламчи мақсад функция, иккиламчи масала чегаравий шартлари.

## 8-маъруза.

### Бирламчи ва иккиламчи масалалар ечимларининг таҳлили

#### Дарс режаси:

1. Иккиланиш назариясидан фойдаланиш ҳоллари.
2. Иккиланиш назариясининг иккинчи асосий теоремасининг таърифи ва унинг иқтисодий маъноси.
3. Масала.
4. Иккиланиш назарияси 3-теоремасининг таърифи ва унинг иқтисодий маъноси.
5. Масала.
6. Ечим таҳлили.

### Адабиётлар

1. Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 84-92-бетлар
2. М.И.Эйдельмант, М.И.Джемилев, В.Б.Шапиро «Сборник задач по курсу математического программирования». 68-72-бетлар

Маълумки, чизикли дастурлаш усуллари ва, жумладан, симплекс усул иқтисодий масалаларнинг энг яхши (оптимал) ечимини топишга ёрдам беради. Лекин бунинг ўзи кифоя эмас. Оптимал ечим топилгандан сўнг иқтисодий объектлар (завод, фабрика, фирма) бошлиқлари олдида қуйидагига ўхшаш муаммоларни ечишга тўғри келади:

2. Хом- ашёларнинг баъзиларини ошириб, баъзиларини қисқартириб сарф қилинса оптимал ечим қандай ўзгаради?
3. Оптимал ечимни ўзгартирмасдан хом-ашёлар сарфини қандай даражага ўзгартириш (камайтириш) мумкин?
4. Маҳсулотга бўлган талаб бир бирликка камайганда (ошганда) оптимал ечим қандай ўзгаради?

Шунга ўхшаш бошқа муаммоларни ҳал қилишда икки тарафламалик назариясидан фойдаланилади. Бунда назариянинг қуйидаги теоремаларига асосланилади.

#### Иккиламчи назариясининг иккинчи асосий теоремаси

Берилган масаланинг мумкин бўлган ечими  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  ва иккиламчи масаланинг мумкин бўлган ечими  $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  оптимал бўлишлари учун қуйидаги шартларнинг бажарилиши зарур ва етарлидир.

$$x_j^* \left( \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (1)$$

$$y_i^* \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

Бу шартларни қуйидагича талқин қилиш мумкин: агар иккиламчи масалалардан бирининг чегараловчи шартлари оптимал ечимда қатъий тенгсизликка айланса, у ҳолда иккинчи масаланинг оптимал ечимидаги тегишли ўзгарувчи 0 га тенг бўлади; агар биринчи масала ечимидаги номаълум мусбат қийматга эга бўлса у ҳолда иккинчи масалада тегишли шартлар оптимал режада тенгликка айланади:

$$\text{агар } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* > b_i, \quad \text{у ҳолда } y_i^* = 0$$

$$\text{агар } y_i^* > 0, \quad \text{у ҳолда } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i$$

худди шунингдек:

$$\text{агар } x_j^* > 0 \text{ бўлса, у ҳолда } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* = c_j$$

$$\text{агар } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* > c_j \text{ бўлса, у ҳолда } x_j^* = 0$$

Бундан кўринадики: оптимал ечимнинг баҳоси – ресурслар танқислиги даражасининг ўлчовидир. Маҳсулот ишлаб чиқаришда тўла ишлатиладиган хом-ашё «танқис (дефицит) хом-ашё» дейилади. Бундай хом-ашёни ошириб сарф қилиш корхонада маҳсулот ишлаб чиқариш даражасини оширади. Маҳсулот ишлаб чиқаришда тўла ишлатилмайдиган хом-ашё «нотанқис (камёб бўлмаган) хом-ашё» ҳисобланади. Бундай хом-ашёларни иккиламчи

баҳоси нолга тенг бўлади. Уларнинг миқдорини ошириш ишлаб чиқариш режасини оширишга таъсир қилмайди.

Бу айтганларни қуйидаги оптимал технологияни танлаш масаласининг ечимини таҳлил қилиш жараёнида кўрамиз.

1-масала. Фараз қилайлик, корхонада бир хил маҳсулот 3 та технология асосида ишлаб чиқарилсин. Ҳар бир технологияга I бирлик вақт ичида сарф қилинадиган хом-ашёларнинг миқдори, уларнинг захираси, ҳар бир технологиянинг унумдорлиги қуйидаги жадвалда келтирилган.

Ҳар бир технология бўйича корхонанинг ишлаш вақтини шундай топиш керакки, натижада корхонада ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг миқдори максимал бўлсин.

| хом-ашё                             | Технологиялар |       |       | хом-ашёлар<br>запаси |
|-------------------------------------|---------------|-------|-------|----------------------|
|                                     | T1            | T2    | T3    |                      |
| Иш кучи (ишчи/соат)                 | 15            | 20    | 25    | 1200                 |
| Бирламчи хом-ашё (т)                | 2             | 3     | 2,5   | 150                  |
| Электроэнергия (КВТ/ч)              | 35            | 60    | 60    | 3000                 |
| Технологиянинг<br>унумдорлиги       | 300           | 250   | 450   |                      |
| Технологияларни<br>ишлатиш режалари | $X_1$         | $X_2$ | $X_3$ | $Z_{\max}$           |

Масаланинг математик модели:

$$15 x_1 + 20 x_2 + 25 x_3 \leq 1200$$

$$2 x_1 + 3 x_2 + 2,5 x_3 \leq 150$$

$$35 x_1 + 60 x_2 + 60 x_3 \leq 3000$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$z_{\max} = 300 x_1 + 250 x_2 + 450 x_3$$

Масалани нормал ҳолга келтириб симплекс усул билан ечамиз.

|                |     |       |                |                |                |                |                |                |
|----------------|-----|-------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Б.у.           | Сб. | в     | 300            | 2500           | 450            | 0              | 0              | 0              |
|                |     |       | X <sub>1</sub> | X <sub>2</sub> | X <sub>3</sub> | X <sub>4</sub> | X <sub>5</sub> | X <sub>6</sub> |
| X <sub>4</sub> | 0   | 1200  | 15             | 20             | 25             | 1              | 0              | 0              |
| X <sub>5</sub> | 0   | 150   | 2              | 3              | 2,5            | 0              | 1              | 0              |
| X <sub>6</sub> | 0   | 3000  | 35             | 60             | 60             | 0              | 0              | 1              |
| Δ <sub>i</sub> |     | 0     | -300           | -250           | -450           | 0              | 0              | 0              |
| X <sub>3</sub> | 450 | 48    | 0,6            | 0,8            | 1              | 0,04           | 0              | 0              |
| X <sub>5</sub> | 0   | 30    | 0,5            | 1              | 0              | -0,1           | 1              | 0              |
| X <sub>6</sub> | 0   | 120   | -1             | 12             | 0              | -2,4           | 0              | 1              |
| Δ <sub>i</sub> |     | 21600 | -30            | 110            | 0              | 18             | 0              | 0              |
| X <sub>3</sub> | 450 | 12    | 0              | -0,4           | 1              | 0,16           | -1,2           | 0              |
| X <sub>1</sub> | 300 | 60    | 1              | 2              | 0              | -0,2           | 2              | 0              |
| X <sub>6</sub> | 0   | 180   | 0              | 14             | 0              | -2,6           | 2              | 1              |
| Δ <sub>i</sub> |     | 23400 | 0              | 170            | 0              | 12             | 60             | 0              |

Жадвалдан кўринадики, берилган масаланинг ечими:

$$x^* = (60; 0; 12; 0; 0; 0; 180).$$

$$Z(x^*) = 23400$$

Жумладан, Т-1технологияни 60 соат, Т-3 ни 12 соат қўллаш керак. Т-2 ни эса умуман қўлламаслик керак. Иккиламчи масаланинг ечими:

$$y^* = (12; 60; 0). f(y^*) = 23400$$

Масаланинг ечимидан кўринадики,  $y_1^* = 12 > 0$ ,  $y_1^* = 60 > 0$ .

Демак, 1-ва 2-(иш кучи ва бирламчи хом-ашё) тўла ишлатилади. Демак, улар камёб ресурслардир. 3-ресурс (электроэнергия) камёб эмас. Унинг иккиламчи баҳоси  $y_1^* = 0$ .

Берилган масала ечимини унинг шартларига қўйганда 1-ва 2-шартлар тенгламага айланади. Шунинг учун иккиламчи масалага тегишли ўзгарувчилар ( $y_1^*$ ,  $y_2^*$ ) мусбат қийматга эга бўлади. 3-шарт қатъий тенгсизликка айланади, шунинг учун иккиламчи масалани тегишли ўзгарувчиси ( $y_3^*$ ) 0 га тенг бўлади, бу эса электроэнергиянинг ортиқча эканлигини кўрсатди.

Икки тарафламалик назариясининг учинчи асосий теоремаси.

$$\partial z_{\max} / \partial b_i = y_i^* \quad (3)$$

Оптимал ечимдаги  $y_i^*$  ўзгарувчиларининг қиймати хом-ашёлар миқдорини кичик миқдорга ўзгартиргандаги мақсад функциянинг ўзгаришига тенг бўлади. Агар (3) да  $\partial b_i = \Delta b_i$ ,  $\partial z_{\max} = \Delta z_{\max}$  деб қабул қилсак,  $\Delta z_{\max} = y_i^* \Delta b_i$  ҳосил бўлади.

Бундан, агар  $\Delta b_i = 1$  бўлса,  $z_{\max} = y_i^*$  бўлади, яъни иккиламчи масаланинг оптимал ечими хом-ашёлар миқдорини 1 бирликка ошириб сарф қилинганда мақсад функциянинг қанча миқдорга ўзгаришини кўрсатади. Юқоридаги масаладан кўринадики, иш кучини I бирликка ошириш натижасида мақсад функция 12 бирликка, бирламчи хом-ашёни I бирликка ошириш натижасида эса мақсад функция 60 бирликка ошади. Электроэнергияси эса ортиқча;

шунинг учун электро энергия миқдорини ошириш мақсад функциянинг қийматига таъсир қилмайди.

2-мисол: Ишлаб чиқаришни режалаштириш масаласи ечимини таҳлил қиламиз.

Масала: 3 та **A, B, C**, маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун 3 хил хом-ашёлар (ресурслар) ишлатилсин, I тур хом-ашёнинг захираси 180 кг, II тур хом-ашёнинг захираси 210 кг ва III хом-ашёнинг захираси 244 кг бўлсин. Ҳар бир маҳсулотнинг 1 бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинадиган турли хом-ашёнинг миқдори (нормаси) ва маҳсулот бирлигининг баҳоси (нархи) қуйидаги жадвалда жойлаштирилган.

| хом-ашё<br>маҳсулот | I   | II  | III | маҳсулот бирлиги<br>баҳоси |
|---------------------|-----|-----|-----|----------------------------|
| <b>A</b>            | 4   | 3   | 1   | 10                         |
| <b>B</b>            | 2   | 1   | 2   | 14                         |
| <b>C</b>            | 1   | 3   | 5   | 12                         |
| хом-ашё<br>захираси | 180 | 210 | 244 |                            |

Бу масала бор ресурслардан оптимал фойдаланиш масаласи бўлиб, унинг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 180$$

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 210$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 244$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$z_{\max} = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3$$

Бу ерда  $X = (x_1, x_2, x_3)$  ишлаб чиқариш режасини кўрсатади. Бу масалага иккиламчи масалани тузамиз

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 = 10$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 = 14$$

$$y_1 + 3y_2 + 5y_3 = 12$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$$

$$f_{\min} = 180y_1 + 210y_2 + 244y_3$$

Бу ерда  $Y = (y_1, y_2, y_3)$  – хом-ашёлар баҳосидан иборат вектор-қатор. Иккиламчи масаланинг иқтисодий маъноси: хом-ашёлар баҳосини шундай танлаш керакки, натижада 1 бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом-ашёнинг умумий баҳоси маҳсулот баҳосидан кам бўлмасин, ҳамда сарф қилинган барча хом-ашёларнинг умумий баҳоси минимал бўлсин.

Маълумки, агар берилган масала оптимал ечимга эга бўлса, у ҳолда иккиламчи масала ечимга эга бўлади ва бу ечим

$$Y^* = C^0 B^{-1}$$

формула орқали топилади. Бу ерда  $C^0$  охирги симплекс жадвалда оптимал ечимга мос келувчи мақсад функция коэффициентларидан ташкил топган вектор-қатор.  $B$ -дастлабки симплекс жадвалидаги базис векторлардан ташкил топган матрица.  $B^{-1}$ – охирги симплекс жадвалда  $B$  матрица ўрнида ҳосил бўлган тескари матрица.

Берилган масалани симплекс жадвалга жойлаштириб, уни симплекс усул билан ечамиз

| Т –<br>малар | Б.у.  | Сб. | 10    | 14    | 12    | 0     | 0     | 0     | $X_0$ |
|--------------|-------|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|              |       |     | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ |       |
| 1            | $X_4$ | 0   | 4     | 2     | 1     | 1     | 0     | 0     | 180   |
| 2            | $X_5$ | 0   | 1     | 1     | 3     | 0     | 1     | 0     | 210   |
| 3            | $X_6$ | 0   | 1     | 2     | 5     | 0     | 0     | 1     | 2/4   |
|              |       |     | -10   | -14   | -12   | 0     | 0     | 0     |       |
| 1            | $X_1$ | 14  | 2     | 1     | 1/2   | 1/2   | 0     | 0     | 90    |
| 2            | $X_5$ | 0   | 1     | 0     | 5/2   | -1/2  | 1     | 0     | 120   |
| 3            | $X_6$ | 0   | -3    | 0     | 4     | -1    | 0     | 1     | 64    |
|              |       |     | 18    | 0     | -5    | 7     | 0     | 0     | 1260  |
| 1            | $X_1$ | 14  | 19/8  | 1     | 0     | 5/8   | 0     | -1/8  | 82    |
| 2            | $X_5$ | 0   | 28/8  | 0     | 0     | 1/8   | 1     | -5/8  | 80    |
| 3            | $X_3$ | 12  | -13   | 0     | 1     | -1/4  | 0     | -1/4  | 16    |
|              |       |     | 37/4  | 0     | 0     | 23/4  | 0     | 4/5   | 1340  |

Натижада иккала масала учун оптимал ечимни топамиз.

Оптимал ечим берилган масала учун

$$X^* = (0; 82; 16) \quad z_{\max} = 1340$$

иккиламчи масала учун

$$Y^* = (23/4; 0; 5/4) \quad f_{\min} = 1340$$

Энди берилган масала ечимини таҳлил қиламиз. Иккиламчи масала ечимида  $y_1=23/4$  ва  $y_3=5/4$  нолга тенг эмас, демак I ва III тур хом-ашёларнинг тўла ишлатилганлигини, яъни уларни камёб эканлигини кўрсатади.  $y_2 = 0$ , демак II хом-ашё тўла ишлатилмаганлигини, демак, унинг ортиқча эканлигини (камёб эмасилигини) кўрсатади.

Иккиламчи масаланинг ечими «шартли оптимал ечим» дейилади. Улар ёрдамида хом-ашёларни 1 бирлик миқдорида ортиқча сарф қилинганда мақсад функциянинг қиймати, яъни ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг пул миқдори қанчага ўзгаришини кўрсатади. Масалан, 1-тур ресурсларни 1 кг ортиқча сарф қилиш натижасида мақсад функциянинг қиймати  $23/4 = 5,75$  бирликка ошади. Агар 1 тур ресурсдан ишлаб чиқаришда 1 кг. ортиқча сарф қилинса, унинг ишлаб чиқариш режаси ўзгаради. Бу янги режага мувофиқ ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул миқдори 5,75 кўпроқ бўлади. Жадвалдаги  $x_4$  устунга қараб қуйидагиларни аниқлаймиз. Янги режада  $B$  маҳсулотни ишлаб чиқариш  $5/8$  бирликка ошади ва  $C$  маҳсулотни ишлаб

чиқариш  $1/4$  бирликка камаяди. Бунинг натижасида 2-тур хом-ашёни сарф қилиш  $1/8$  бирликка камаяди.

$$(5/8 \cdot 1 - 3 \cdot 1/4 = 5/8 - 6/8 = -1/8)$$

Худди шунингдек  $x_6$  устунга қараймиз. 3 тур хом-ашё харажати 1 кг га ошириб сарф қилиш натижасида янги режа топилади ва бу режага кўра ишлаб чиқарилган маҳсулотларнинг пул қиймати  $5/4 = 1,25$  сўмга ошади ва  $1340 + 1,25 = 1341,25$  сўмни ташкил қилади. Бу натижа **В** маҳсулот ишлаб чиқаришни  $1/8$  бирликка камайтириш, **С** маҳсулот ишлаб чиқаришни  $1/4$  бирликка ошириш ҳисобига бўлади. Бу ҳолда 2 тур ресурс  $5/8$  кг. кўпроқ сарф қилинади.

Иккиламчи оптимал баҳоларни иккиламчи масала шартларига қўйиб, қуйидагиларни аниқлаймиз.

$$23 + 5/4 > 10$$

$$23/2 + 5/2 = 14$$

$$23/4 + 25/4 = 12$$

Бундан кўринадики, иккиламчи масаланинг биринчи шарти қатъий тенгсизликдан иборат бўлаяпти. Бу ҳол **А** маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом-ашёларнинг баҳоси бу маҳсулот баҳосидан кўп бўлаяпти. Шунинг учун **А** маҳсулотни ишлаб чиқариш корхона учун фойдали эмас. Иккиламчи масаладаги 2-ва 3-шартлар оптимал ечимида тенгликка айланади. Бу ҳол **В** ва **С** маҳсулотларни 1 бирлигини ишлаб чиқариш учун сарф қилинган хом-ашёларнинг баҳоси маҳсулот баҳосига тенг эканлигини кўрсатади. Демак, **В** ва **С** маҳсулотларни ишлаб чиқариш корхона учун фойдали бўлади.

Шундай қилиб, шартли оптимал баҳолар берилган масаланинг оптимал режаси билан чамбарчас боғланган. Берилган масаладаги параметрларнинг ҳар қандай ўзгариши унинг оптимал ечимига таъсир қилади, демак улар шартли оптимал баҳоларнинг ўзгаришига ҳам сабаб бўлади.

### Назорат саволлари:

1. Иккиланиш назарияси қандай муаммоларни ҳал қилади?
2. Иккиланиш назариясининг иккинчи асосий теоремасини таърифланг ва унинг иқтисодий маъносини изоланг.
3. Камёб булмаган хом-ашё нима?
4. Иккиланиш назариясининг 3-теоремасини таърифланг ва унинг иқтисодий маъносини изоҳланг.
5. Нега иккиламчи масаланинг ечими «шартли оптимал ечим» дейилади?

### Таянч иборалар

Оптимал ечим, оптимал ечим баҳоси, «танқис хом-ашё», «нотанқис хом-ашё», дастлабки ва охириги симплекс жадваллар, шартли оптимал ечим

## 9-маъруза. Бутун сонли дастурлаш.

### Дарс режаси:

1. Бутун сонли дастурлаш, масаласининг умумий қўйилиши.
2. Гомори усулининг ғояси.
3. Кесувчи тенглама ва уни тузиш.
4. Масала бутун сонли ечимининг мавжуд эмаслиги шarti.
5. Мисол.

### Адабиётлар

1. Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 97-105-бетлар

Ўзгарувчиларига бутун бўлишлик шarti қўйилган чизикли программалаш масалалари катта амалий аҳамиятга эгадир. Бундай масалалар бутун сонли дастурлаш масалалари деб аталади. Бутун сонли программалаш масалаларига сайёҳ ҳақидаги масала, оптимал жадвал тузиш, оптимал бичиш, транспорт воситаларини маршрутларга оптимал тақсимлаш, бўлинмайдиган маҳсулот ишлаб чиқарувчи корхонанинг ишини оптимал режалаштириш масалалари ва ҳоказолар мисол бўла олади.

Бутун сонли программалаш масаласини умумий ҳолда қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,m) \quad (1)$$

$$x_j \geq 0 \quad \text{ва бутун,} \quad j=1,n \quad (2)$$

$$Y_{\min} = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

ёки вектор формада

$$AX = B \quad (1)$$

$$X \geq 0 \quad \text{бутун} \quad (2)$$

$$Y_{\min} = CX \quad (3)$$

Бутун сонли программалаш масалаларидаги номаълумларнинг ҳаммаси ёки уларнинг айрим қисми бутун бўлишлиги талаб қилинганлигига кўра бутун сонли программалаш масаласи тўла бутун сонли программалаш ёки қисман бутун сонли программалаш деб аталади. Агар бутун сонли программалашдаги номаълумларнинг ноль ёки бирга тенг бўлишлиги талаб қилинган бўлса бундай масала «Буль программалаш масаласи» деб аталади.

Номаълумларга бутун бўлишлик шarti қўйилганлиги сабабли чизикли программалаш масалаларини ечиш усуллари бутун сонли программалаш масалаларини ечиш учун қўллаб бўлмайди.

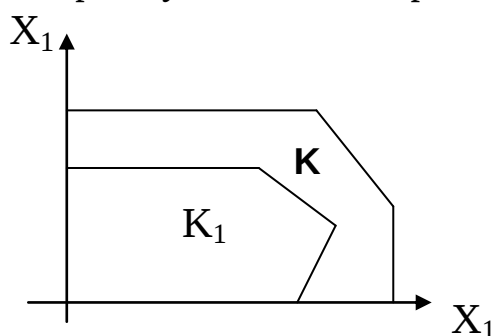
Бутун сонли программалаш масалаларини ечиш учун уларнинг хусусиятларини назарга олувчи усуллар яратилган бўлиб, улар орасида Америка олими Р.Гомори яратган усул оптимал бутун сонли ечимни берувчи

энг аниқ усул ҳисобланади. Гомори усули ёрдами билан тўла бутун сонли ҳамда қисман бутун сонли масалаларни ечиш мумкин.

Қуйида биз Р.Гомори усули билан тўла бутун сонли программалаш масаласини ечиш жараёни билан танишамиз.

Бу усулнинг ғояси қуйидагидан иборат бўлиб, берилган бутун сонли программалаш масаласини номаълумларнинг бутун бўлишлик шартига эътибор бермасдан, уни оддий чизикли программалаш масаласи сифатида симплекс усулдан фойдаланиб ечамиз. Агар топилган ечим бутун сонли бўлса, у ҳолда у бутун сонли программалаш масаласининг ҳам ечими бўлади. Акс ҳолда номаълумларнинг бутун сонли бўлишлик шартини эътиборга олувчи ва «кесувчи тенглама» деб аталувчи қўшимча тенглама тузилади. Бу тенглама асосий тенгламалар системасига киритиб ёзилади ва базис ечим алмаштирилади. Бунинг учун номаълум кесувчи тенгламадан ажратилади ва унинг қиймати бошқа тенгламаларга қўйиб чиқилади. Бундай ишлар масаланинг бутун сонли ечими топилгунча ёки унинг мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорланади.

Ҳар бир босқичда тузилган қўшимча тенглама кесувчи тенглама деб аталишига сабаб, бу тенглама ёрдамида берилган бутун сонли программалаш масаласи ечимидаги каср сонли ечимни ўз ичига олувчи қисми кесиб борилади. Бу айтилганларни қуйидаги шакл орқали тасвирлаш мумкин.



Кесиш жараёни  $K$  тўпламининг фақат бутун сонли ечимларни ўз ичига олувчи қисми  $K_1$  топилгунча такрорланади.  $K_1$  тўпламининг четки нуқталарининг координаталари бутун сондан иборат бўлади.

### КЕСУВЧИ ТЕНГЛАМАНИ ТУЗИШ

1. Фараз қилайлик юқорида берилган (1)-(3) бутун сонли программалаш масаласидаги номаълумларнинг бутун сон бўлишлик шартига эътибор берилмасдан унинг оптимал ечими топилган бўлсин ва бу оптимал ечим  $X=(x_1, x_2, x_j, \dots, x_n)$  бўлсин. Охирги симплекс жадвалдаги базис векторлар  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_m$  лардан иборат бўлсин. У ҳолда бу симплекс жадвал қуйидаги кўринишда бўлади.

$$X = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{1m+1} & \dots & x_{1j} & \dots & x_{1n} \\ x_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & x_{2m+1} & \dots & x_{2j} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & x_{im+1} & \dots & x_{ij} & \dots & x_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & x_{mm+1} & \dots & x_{mj} & \dots & x_{mn} \end{vmatrix}$$

Агар барча  $X_i$  лар бутун сонлар бўлса, у ҳолда топилган ечим бутун сонли программалаш масаласининг ечими бўлади.

2. Фараз қилайлик, баъзи  $X_i$  лар каср сонлардан иборат бўлсин, ҳамда баъзи  $X_{ij}$  лар ҳам каср сонлардан иборат бўлсин  $X_i$  ва  $X_{ij}$  ларнинг бутун қисмини мос равишда  $[X_i]$  ва  $[X_{ij}]$  билан белгилаймиз. У ҳолда бу сонларнинг каср қисмларини қуйидагича аниқлаш мумкин.

$$\left. \begin{aligned} q_i &= x_i - [x_i] \\ q_{ij} &= x_{ij} - [x_{ij}] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Фараз қилайлик, баъзи  $q_i \neq 0$  бўлсин. У ҳолда  $x$  матрицанинг  $\max q_i = q_k$   $q_i \neq 0$  тенгликни қаноатлантирувчи  $k$ -қатори учун кесувчи тенглама тузилади. Бунинг учун энг аввало

$$q_{k1}x_1 + q_{k2}x_2 + \dots + q_{kn}x_n \geq q_k \quad (6)$$

тенгсизлик тузилади, сўнгра уни  $(-1)$ га кўпайтириб қўшимча ўзгарувчи киритилади. Натижада қуйидаги тенглама ҳосил бўлади.

$$-q_{k1}x_1 - q_{k2}x_2 - \dots - q_{kn}x_n + x_{n+1} = -q_k \quad (7)$$

(7) тенглама кесувчи тенглама деб аталади.

3. Кесувчи тенгламани симплекс жадвалнинг  $m+2$  қаторига жойлаштирамиз. Бу тенгламадаги  $x_{n+1}$  ўзгарувчига мос келувчи  $P_{n+1}$  векторни «базис вектор» деб қабул қиламиз. Бу базис векторга мос келувчи  $X_i$  озод ҳад манфий ишорали. Шунинг учун иккиланган симплекс усулни қўллаб вектор базисдан чиқарилади ва унинг ўрнига

$$\min_{q_{kj} < 0} \left( \frac{\Delta_j}{q_{kj}} \right) = \frac{\Delta_l}{q_{kl}}$$

шартни қаноатлантирувчи  $P_e$  вектор киритилади ва симплекс жадвал алмаштирилади.

Агар ҳосил бўлган янги симплекс жадвалдаги барча  $X_j'$  озод ҳадлар бутун сонли бўлса, у ҳолда топилган ечим бутун сонли программалаш масаласининг ечими бўлади.

Акс ҳолда юқоридаги 2-3 пунктларда қилинган ишларни яна қайтадан такрорлаш керак. Умуман бу ишларни масаланинг бутун сонли ечими топилгунча, ёки унинг бутун сонли ечимини мавжуд эмаслиги аниқлангунча такрорлаш керак. Агар каср сонни  $X_i$  га мос келувчи қаторда барча  $X_{ij}$  лар бутун сонли бўлса, у ҳолда масала бутун сонли ечимга эга бўлмайди.

Мисол: Қуйидаги чизикли программалаш масаласининг бутун сонли ечимини топинг

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ бутун } Y_{\min} = 8 - 3x_1 - x_2$$

Ечиш. Энг аввал масалани нормал ҳолга келтирамиз:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \text{ бутун } Y_{\min} = 8 - 3x_1 - x_2$$

Ушбу масалани симплекс жадвалга жойлаштирамиз ҳамда ундаги номаълумларнинг бутун бўлишлик шартига эътибор бермай уни оддий симплекс усул билан ечамиз. Ечиш жараёнининг III-босқичида қуйидаги оптимал ечим топилади.

| Базис<br>векторлар | C  | P <sub>0</sub> | -3             | -1             | 0              | 0              |
|--------------------|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                    |    |                | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> |
| P <sub>2</sub>     | -1 | S              | 0              | 1              | 1/6            | -1/6           |
| P <sub>i</sub>     | -3 | 9/4            | 1              | 0              | j              | j              |
| Δj                 |    | S              | 0              | 0              | -11/12         | -7/12          |

Жадвалдан кўринадикки, топилган ечим бутун сонли программалаш масаласининг ечими бўлмайди. Бу ечимни бутун сонли ечимга айлантириш учун жадвалнинг I-қаторига нисбатан кесувчи тенглама тузамиз. Унинг учун энг аввал қуйидаги тенгсизликни ҳосил қиламиз.

$$\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

Тенгсизликнинг икки томонини (-1)га кўпайтирамиз ва қўшимча номаълумни киритиб қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз.

$$-\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{6}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

Бу тенгламани симплекс жадвалининг 4-қаторига жойлаштирамиз.

| Базис<br>векторлар | C  | P <sub>0</sub> | -3             | -1             | 0              | 0              | 0              |
|--------------------|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                    |    |                | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> | P <sub>5</sub> |
| P <sub>2</sub>     | -1 | 1/2            | 0              | 1              | 1/6            | -1/6           | 0              |
| P <sub>1</sub>     | -3 | 9/4            | 1              | 0              | 1/4            | 1/4            | 0              |
| Δj                 |    | 3/4            | 0              | 0              | -11/12         | -7/12          | 0              |
| P <sub>5</sub>     | 0  | -1/2           | 0              | 0              | -1/6           | 1/6            | 1              |

Базисдан P<sub>5</sub>ни чиқариб ўрнига P<sub>3</sub>ни киритамиз. Натижада симплекс жадвал алмашади ва қуйидаги кўринишга келади.

| Базис<br>векторлар | C  | P <sub>0</sub> | -3             | -1             | 0              | 0              | 0              |
|--------------------|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                    |    |                | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> | P <sub>5</sub> |
| P <sub>2</sub>     | -1 | 0              | 0              | 1              | 0              | 0              | 0              |
| P <sub>1</sub>     | -3 | 3/2            | 1              | 0              | 0              | 1/2            | 0              |
| m+1                |    | 7/2            | 0              | 0              | 0              | -3/2           | 0              |
| P <sub>6</sub>     | 0  | -1/2           | 0              | 0              | 0              | -1/2           | 1              |

Энди янги симплекс жадвалнинг 2-қаторига нисбатан кесувчи тенглама тузамиз. Унинг учун аввал

$$\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

тенгсизликни тузамиз ва ундан қуйидаги кесувчи тенгламани ҳосил қиламиз.

$$-\frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

Бу тенгламани симплекс жадвалнинг 6-қаторига жойлаштирамиз.

| Базис<br>векторлар | C  | P <sub>0</sub> | -3             | -1             | 0              | 0              | 0              |
|--------------------|----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                    |    |                | P <sub>1</sub> | P <sub>2</sub> | P <sub>3</sub> | P <sub>4</sub> | P <sub>5</sub> |
| P <sub>2</sub>     | -1 | 0              | 0              | 1              | 0              | 0              | 0              |
| P <sub>1</sub>     | -3 | 1              | 1              | 0              | 0              | 0              | 1              |
| P <sub>3</sub>     | 0  | 4              | 0              | 0              | 1              | 0              | 1              |
| P <sub>4</sub>     | 0  | 1              | 0              | 0              | 0              | 1              | -2             |
| Δj                 |    | 8-3=5          | 0              | 0              | 0              | 0              | -3             |

Ҳосил бўлган симплекс жадвалдаги P<sub>0</sub> векторнинг барча элементлари бутун сонлардан иборат. Демак, бутун сонли программалаш масаласининг ечими топилган ва у қуйидагига тенг.

$$X=(1;0;4;1) \quad Y_{\min}=5$$

#### Назорат саволлари

1. Қандай масалалар бутун сонли дастурлаш масалаларига киради?
2. Буль дастурлаш масаласининг моҳияти нимада?
3. Гомори усули гоёси нимадан иборат?
4. Кесувчи тенглама қандай тузилади?
5. Бутун оптимал ечим қачон топилган бўлади?
6. Бутун оптимал ечимга эга бўлмаслик шarti нимадан иборат?

#### Таянч иборалар

Ечимнинг бутун бўлиш шarti, бутун сонли дастурлаш, дастурлашнинг математик модели, Буль дастурлаш масаласи, Гомори усули, кесувчи тенглама, бутун оптимал ечим.

## 10-март. Чизикли дастурлашнинг транспорт масаласи

### Дарс режаси:

1. Транспорт масаласининг қўйилиши ва унинг математик модели.
2. Ёпиқ транспорт масаласи
3. Бошланғич режалар тузиш усуллари.
4. Шимолий -Ғарбий усул.
5. Минимал қиймат усули

### Адабиётлар

1. Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 106-124-бетлар

Транспорт масаласи – чизикли дастурлашнинг алоҳида хусусиятли масаласи бўлиб бир жинсли юк ташишнинг энг тежамли режасини тузиш масаласидир. Бу масала хусусийлигига қарамай қўлланиш соҳаси жуда кенгдир. Масаланинг қўйилиши ва унинг математик модели

$m$ -та  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) таъминотчиларда йиғилиб қолган бир жинсли  $a_i$  миқдордаги маҳсулотни  $n$ -та  $B_j$  истеъмолчиларга мос равишда  $b_j$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) миқдорда етказиб бериш талаб қилинади.

Ҳар бир  $i$ -таъминотчидан ҳар бир  $j$ -истеъмолчига бир бирлик юк ташиш йўл харажати маълум ва у  $c_{ij}$  – сўмни ташкил қилади.

Юк ташишнинг шундай режасини тузиш керакки, таъминотчилардаги барча юклар олиб чиқиб кетилсин, истеъмолчиларнинг барча талаблари қондирилсин ва шу билан бирга йўл харажатларининг умумий қиймати энг кичик бўлсин.

Масаланинг математик моделини тузиш учун  $i$ -таъминотчидан  $j$ -истеъмолчига етказиб бериш учун режалаштирилган юк миқдорини  $x_{ij}$  орқали белгилаймиз, у ҳолда масаланинг шартларини қуйидаги жадвал кўринишда ёзиш мумкин:

| Таъминотчила<br>$p$ | Истеъмолчилар        |                      |     |                      | Заҳиралар                 |
|---------------------|----------------------|----------------------|-----|----------------------|---------------------------|
|                     | $B_1$                | $B_2$                | ... | $B_n$                |                           |
| $A_1$               | $c_{11}$<br>$x_{11}$ | $c_{12}$<br>$x_{12}$ | ... | $c_{1n}$<br>$x_{1n}$ | $a_1$                     |
| $A_2$               | $c_{21}$<br>$x_{21}$ | $c_{22}$<br>$x_{22}$ | ... | $c_{2n}$<br>$x_{2n}$ | $a_2$                     |
| ...                 | ...                  | ...                  | ... | ...                  | ...                       |
| $A_m$               | $c_{m1}$<br>$x_{m1}$ | $c_{m2}$<br>$x_{m2}$ | ... | $c_{mn}$<br>$x_{mn}$ | $a_m$                     |
| Талаблар            | $b_1$                | $b_1$                | ... | $b_1$                | $\Sigma a_i = \Sigma b_j$ |

Жадвалдан кўринадик,  $i$ -таъминотчидан  $j$ -истеъмолчига режадаги  $x_{ij}$  – бирлик юк етказиб бериш йўл харажати  $c_{ij}$   $x_{ij}$  – сўмни ташкил қилади. Режанинг умумий қиймати эса,

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

га тенг бўлади.

Масаланинг биринчи шартига кўра, яъни барча юклар олиб чиқиб кетилиши шarti учун

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

тенгликларга эга бўламиз;

иккинчи шартга кўра, яъни барча талаблар тўла қондирилиши учун

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n})$$

тенгликларга эга бўламиз;

Шундай қилиб масаланинг математик модели қуйидаги кўринишни олади:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

чизикли тенгламалар системасининг

$$(3) \quad x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n$$

шартларни қаноатлантирувчи шундай ечимини топиш керакки, бу

ечим (3) 
$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

чизикли функцияга энг кичик қиймат берсин.

Бу моделда

$$(5) \quad \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

тенглик ўринли деб фарз қилинади. Бундай масалалар «ёпиқ модели транспорт масаласи» дейилади.

Теорема. Талаблар ҳажми захиралар ҳажмига тенг бўлган исталган транспорт масаласининг оптимал ечими мавжуд бўлади.

Бошланғич таянч ечимни қуриш.

Маълумки, ихтиёрий чизикли дастурлаш масаласининг оптимал ечимини топиш жараёни бошланғич таянч ечимини кўришдан бошланади.

Масаланинг (1) ва (2) системалари биргаликда  $m \cdot n$  – та номаълумли  $m+n$  – та тенгламаларда иборат. Агар (1) системанинг тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшсак, ва алоҳида (2) системанинг тенгламаларини ҳадма-ҳад қўшсак,

иккита бир хил тенглама ҳосил бўлади. Бу эса (1) ва (2) дан иборат системада битта чизиқли боғлиқ тенглама борлигини кўрсатади. Бу тенглама умумий системадан чиқариб ташланса, масала  $m+n-1$  та чизиқли боғлиқ бўлмаган тенграмалар системасидан иборат бўлиб қолади. Демак, масаланинг бузилмайдиган таянч ечими  $m+n-1$  та мусбат компоненталардан иборат бўлади.

Шундай қилиб, транспорт масаласининг бошланғич таянч ечими бирор усул билан топилган бўлса,  $(x_{ij})$  – матрицанинг  $m+n-1$  та компоненталари мусбат бўлиб, қолганлари нолга тенг бўлади. Агар транспорт масаласининг шартлари ва унинг таянч ечими юқоридаги жадвал кўринишда берилган бўлса, нолдан фарқли  $x_{ij}$  – лар жойлашган катаклар «банд катаклар», қолганлари «бўш катаклар» дейилади.

Агар банд катакларни вертикал ёки горизонтал кесмалар билан туташтирилганда ёпиқ кўпбурчак ҳосил бўлса, бундай ҳол циклланиш дейилади ва ечим таянч ечим бўлмайди. Демак, бирорта ечим таянч ечим бўлиши учун банд катаклар сони  $m+n-1$  та бўлиб циклланиш рўй бермаслиги керак.

#### Шимолий-ғарб усули.

Транспорт масаласи жадвал кўринишида берилган бўлсин. Йўл харажатларини ҳисобга олмай  $B_1$  истеъмолчининг талабини  $A_1$  таъминотчи ҳисобига қондиришга киришамиз. Бунинг учун  $a_1$  ва  $b_1$  юк бирликларида кичигини  $A_1B_1$  катакнинг чап пастки бурчагига ёзамиз. Агар  $a_1 < b_1$  бўлса,  $B_1$  нинг эҳтиёжини тўла қондириш учун  $A_2B_1$  катакка етишмайдиган юк бирлигини  $A_2$  дан олиб ёзамиз ва ҳ. к. Бу жараёни  $A_mB_n$  катакка етгунча давом этдирамиз. Агар (5) шарт ўринли бўлса, бу усулда тузилган ечим албатта таянч ечим бўлади.

1-мисол. Транспорт масаласининг бошланғич ечимини топинг.

| Таъминотчи<br>р | Истеъмолчилар |          |          |          |           | Заҳира<br>ҳажми |
|-----------------|---------------|----------|----------|----------|-----------|-----------------|
|                 | $B_1$         | $B_2$    | $B_3$    | $B_4$    | $B_5$     |                 |
| $A_1$           | 10<br>100     | 7        | 4        | 1        | 4         | 100             |
| $A_2$           | 2<br>100      | 7<br>150 | 10       | 6        | 11        | 250             |
| $A_3$           | 8             | 5<br>50  | 3<br>100 | 2<br>50  | 2         | 200             |
| $A_4$           | 11            | 8        | 12       | 16<br>50 | 13<br>250 | 300             |
| Талаб ҳажми     | 200           | 200      | 100      | 100      | 250       |                 |

### Минимал қиймат усули.

Бу усулда бошланғич ечим қуриш учун аввал йўл харажати энг кичик бўлган катакка  $a_i$  ва  $b_j$  лардан кичиги ёзилади ва кейинги энг кичик қийматли катакка ўтилади ва ҳ. к. Бу усулда тузилган бошланғич ечимни бузилмаслик ва циклланишга текшириш шарт.

2-Мисол. Минимал қиймат усули билан бошланғич ечимини топинг.

| Таъминотчи<br>р | Истеъмолчилар |          |           |          |          | Заҳира<br>ҳажми |
|-----------------|---------------|----------|-----------|----------|----------|-----------------|
|                 | $B_1$         | $B_2$    | $B_3$     | $B_4$    | $B_5$    |                 |
| $A_1$           | 10            | 7        | 4         | 1<br>100 | 4        | 100             |
| $A_2$           | 2<br>200      | 7<br>50  | 10        | 6        | 11       | 250             |
| $A_3$           | 8             | 5        | 3         | 2        | 2<br>200 | 200             |
| $A_4$           | 11            | 8<br>150 | 12<br>100 | 16       | 13<br>50 | 300             |
| Талаб ҳажми     | 200           | 200      | 100       | 100      | 250      |                 |

### **Назорат саволлари:**

1. Транспорт масаласининг қўйилиши?
2. Транспорт масаласининг иқтисодий-математик модели?
3. «Ёпиқ модел» қандай модел?
4. Бошланғич таянч ечим қандай қўрилади?
5. «Шимолий-ғарбий» усулнинг моҳияти нимада?
6. Минимал қиймат усулининг моҳияти нимада?

### **Таянч иборалар:**

Транспорт масаласи, тежамли режа, таъминотчи, истеъмолчи, математик модел, очик модел, ёпиқ модел, заҳиралар, талаблар, бошланғич таянч ечим, чизикли боғлиқмас тенгламалар, бўш катак, банд катак, «шимолий- ғарбий» усул, минимал қиймат усули.

## **11 – маъруза. Транспорт масаласини ечишнинг такрибий усуллари.**

### **ДАРС РЕЖАСИ:**

1. Транспорт масаласининг такрибий усуллари тўғрисида маълумот.
2. Фогел усули алгоритми.
3. Фогел усулида мисол ечиш намунаси.
4. Икки марта афзаллик усули алгоритми.
5. Икки марта афзаллик усули билан ечилган мисол.
6. Делта ( ) усул алгоритми.
7. Делта усули билан ечилган мисол.

### **АДАБИЁТЛАР:**

М.И. Эйдельмант, Н.И. Джемилев, В.Б. Шапиро «Сборник задач по курсу математического программирования», 110-117 бетлар.

Такрибий усуллар ҳосил бўлган ечимнинг оптималлигига кафолат бермайди. Аммо улар матрица ўлчами жуда катта бўлганда ёки қўл остида ЭХМ бўлмаганда жуда қўл келади.

Қуйида шу усулларнинг баъзи бирларининг алгоритмларини келтирамиз.

#### Фогел усули алгоритми.

1. Маълумотларни тайёрлаш.

Транспорт масаласи шартларининг одатда келтириладиган матрица ифодасига қўшимча иккита устун ва иккита сатр киритилади.

2. Ҳар бир устун ва сатр бўйича шу устун ва сатрдаги энг кичик қийматлар ўртасидаги айирма топилади ва у қўшимча 1-устун ва 1-сатрнинг мос катакларига ёзиб чиқилади.

3. Қўшимча 1-устун ва 1-сатрдаги айирмалар қийматларидан энг каттаси аниқланади ва унга (\*) белги қўйилади.

4. Энг катта айирмани устун ёки сатрнинг (\* ли) энг кичик транспорт харажатли катагига максимал тақсимот миқдори ёзилади.

5. Қўшимча 2-устун ва 2-сатрга шу устун ва шу сатрдаги ортиқча сифим ва қувватлар ёзилади.

Агар ортиқча сифим ва қувватларнинг қиймати ҳамма устун ва сатр катакларида нолга тенг бўлса, ечим олинган бўлади, акс ҳолда ҳисоблашни яна 1-босқичдан бошлаш керак. Кейинги босқичларда банд катаклар энг кичик қийматлар орасидаги фарқли ҳисоблашда иштирок этмайди.

Мисол:

I-босқич:

| Қувватлар    | Сиғымлар |                |    | Айирма | Қолдиқ қувват |
|--------------|----------|----------------|----|--------|---------------|
|              | 11       | 24             | 32 |        |               |
| 15           | 2        | 5              | 2  | 0      | 15            |
| 22           | 4        | 1<br><u>22</u> | 5  | 3      | 0             |
| 14           | 3        | 6              | 8  | 3      | 14            |
| 16           | 5        | 6              | 7  | 1      | 16            |
| Айирма       | 1        | *              | 3  |        |               |
| Қолдиқ сиғим | 11       | 2              | 32 |        |               |

II -босқич.

| Қувватлар    | Сиғымлар |                |                | Айирма | Қолдиқ қувват |
|--------------|----------|----------------|----------------|--------|---------------|
|              | 11       | 24             | 32             |        |               |
| 15           | 2        | 5              | 2<br><u>15</u> | 0      | 0             |
| 22           | 4        | 1<br><u>22</u> | 5              | -      | 0             |
| 14           | 3        | 6              | 8              | 3      | 14            |
| 16           | 5        | 6              | 7              |        | 16            |
| Айирма       | 1        | 1              | *              |        |               |
| Қолдиқ сиғим | 11       | 2              | 17             |        |               |

III -босқич.

| Қувватлар    | Сиғимлар             |                      |                      | Айирма            | Қолдиқ қувват |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|---------------|
|              | 11                   | 24                   | 32                   |                   |               |
| 15           | <sup>2</sup><br>-    | <sup>5</sup><br>-    | <sup>2</sup><br>(15) | -                 | 0             |
| 22           | <sup>4</sup><br>-    | <sup>1</sup><br>(22) | <sup>5</sup><br>-    | -                 | 0             |
| 14           | <sup>3</sup><br>(11) | <sup>6</sup>         | <sup>8</sup>         | <sup>*</sup><br>3 | 3             |
| 16           | <sup>5</sup><br>-    | <sup>6</sup>         | <sup>7</sup>         | 1                 | 16            |
| Айирма       | 2                    | 0                    | 1                    |                   |               |
| Қолдиқ сиғим | 0                    | 2                    | 17                   |                   |               |

IV -босқич.

| Қувватлар    | Сиғимлар             |                      |                      | Айирма            | Қолдиқ қувват |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|---------------|
|              | 11                   | 24                   | 32                   |                   |               |
| 15           | <sup>2</sup><br>-    | <sup>5</sup><br>-    | <sup>2</sup><br>(15) | -                 | 0             |
| 22           | <sup>4</sup><br>-    | <sup>1</sup><br>(22) | <sup>5</sup><br>-    | -                 | 0             |
| 14           | <sup>3</sup><br>(11) | <sup>6</sup><br>(2)  | <sup>8</sup>         | <sup>*</sup><br>2 | 1             |
| 16           | <sup>5</sup><br>-    | <sup>6</sup><br>-    | <sup>7</sup>         | 1                 | 16            |
| Айирма       | -                    | 0                    | 1                    |                   |               |
| Қолдиқ сиғим | 0                    | 0                    | 17                   |                   |               |

V -босқич.

| Қувватлар    | Сиғымлар             |                      |                      | Айирма | Қолдиқ қувват |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------|--------|---------------|
|              | 11                   | 24                   | 32                   |        |               |
| 15           | <sup>2</sup><br>-    | <sup>5</sup><br>-    | <sup>2</sup><br>(15) | -      | 0             |
| 22           | <sup>4</sup><br>-    | <sup>1</sup><br>(22) | <sup>5</sup><br>-    | -      | 0             |
| 14           | <sup>3</sup><br>(11) | <sup>6</sup><br>(2)  | <sup>8</sup>         | 0      | 1             |
| 16           | <sup>5</sup><br>-    | <sup>6</sup><br>-    | <sup>7</sup><br>(16) |        | 0             |
| Айирма       | -                    | -                    | <sup>*</sup><br>1    |        |               |
| Қолдиқ сиғим | 0                    | 0                    | 1                    |        |               |

VI -босқич.

| Қувватлар    | Сиғымлар             |                      |                      | Айирма            | Қолдиқ қувват |
|--------------|----------------------|----------------------|----------------------|-------------------|---------------|
|              | 11                   | 24                   | 32                   |                   |               |
| 15           | <sup>2</sup><br>-    | <sup>5</sup><br>-    | <sup>2</sup><br>(15) | -                 | 0             |
| 22           | <sup>4</sup><br>-    | <sup>1</sup><br>(22) | <sup>5</sup><br>-    | -                 | 0             |
| 14           | <sup>3</sup><br>(11) | <sup>6</sup><br>(2)  | <sup>8</sup><br>(1)  | <sup>*</sup><br>0 | 0             |
| 16           | <sup>5</sup><br>-    | <sup>6</sup><br>-    | <sup>7</sup><br>(16) | -                 | 0             |
| Айирма       | -                    | -                    | 0                    |                   |               |
| Қолдиқ сиғим | 0                    | 0                    | 0                    |                   |               |

$$F = 2*15 + 1*22 + 3*11 + 6*2 + 8*1 + 7*16 = 30 + 22 + 33 + 12 + 8 + 112 = 217 \text{ (пул бирлиги).}$$

Икки марта афзаллик усули. Усул алгоритми.

1. Транспорт масаласининг шарти берилган матрица жадвалининг бирлик маҳсулотга бўладиган транспорт харажатларининг қийматлари устунлар ва сатрлар бўйича кўриб чиқилади. Бу қийматларга (\*) белги қўйилади.

2. Баъзи бир катаклар иккитадан (\*) белгига эга бўлиб қолади. Шунга кўра тақсимот аввал иккита (\*) ли катакларда, улар тугагач, битта (\*) ли катакларда, кейин эса белгисиз катакларнинг энг кичик элементли катакларига максимал тақсимотни киритиш билан қувватлар тугагунча амалга оширилади.

**Мисол.**

| Кувватлар | Сигимлар  |                 |                |    |     |   |
|-----------|-----------|-----------------|----------------|----|-----|---|
|           | 11        | 24              | 32             | 1  | 2   | 3 |
| 15        | 0 2<br>11 | 4 5             | 0 2<br>4<br>32 | 43 | -28 | 0 |
| 22        | 2 4       | 0 1<br>22<br>24 | 3 5<br>↓       | 24 | -2  | 0 |
| 14        | 1 3       | 5 6<br>2        | 6 8<br>12      | 0  | +14 | 0 |
| 16        | 3 5       | 5 6             | 5 7<br>16      | 0  | +16 | 0 |
| 1         |           | 5               | 5              |    |     |   |
| 2         |           | 1               | 2              |    |     |   |

$$F = 2 * 11 + 2 * 4 + 1 * 22 + 6 * 2 + 8 * 12 + 7 * 16 = 22+8+22+12+96+112 = 272 \text{ (пул бирлиги).}$$

Делта усули. Усул алгоритми.

1. Транспорт масаласи матрицасининг стандарт жадвалига ёрдамчи учта устун ва иккита сатр чизилади.

2. Ҳар бир катакнинг чап томонига шу катак транспорт харажати элементида устундаги энг кичик қийматга тенг элемент айирмаси ( $\Delta_{i,j}$ ) ёзилади.

3. Ҳар бир устун бўйича  $\Delta_{i,j}=0$  бўлган катакка мос таъминотчида мавжуд қувватларнинг миқдорига қарамасдан, шу устун талабини тўла қаноатлантирадиган тақсимот киритилади. Агар бу устунда бир  $\Delta_{i,j}=0$  катак бўлса, у қайта тақсимот фақат уларнинг биттасига киритилади.

4. 1-ёрдамчи устунга мос сатрлар бўйича тақсимланган маҳсулотларнинг жами йиғиндиси ёзилади.

5. 2-ёрдамчи устунга мос равишда шу сатрнинг қувватидан 1-ёрдамчи устундаги тақсимот миқдори айрилиб, ишорасини ҳисобга олган ҳолда ёзиб чиқилади.

6. Тақсимотлари нолдан фарқ қилувчи ва манфий ишорали фарқланишли сатрда ётган матрица жадвалининг тегишли устунлари теппасига (V) белги қўйилади.

7. 1-ёрдамчи сатрга (V) белгилари устунларнинг мусбат ишорали сатрларида ётган  $\Delta_{ij}$  ларнинг энг кичик қиймати ёзилади.

8. Бу сатрда ҳосил бўлган қийматларнинг ўсиб бориши тарзида рақамланган тартиб рақами 2-ёрдамчи сатрга киритилади.

9. Иккинчи ёрдамчи сатрда биринчи рақамга эга бўлган устундан бошлаб, сўнгга навбатдаги тартиб рақамига ўтиб, қайта тақсимот амалга оширилади, яъни 2-ёрдамчи устунда манфий фарқланиш тўғри келган катакдан шу устундаги мусбат фарқланишли сатр катагига тақсимот киритилади. Бундай қайта тақсимот, фарқланишлар устундаги ҳамма фарқланишлар нол бўлгунча давом эттирилади. Ечим жараёни тўлиқ тасаввур қилиш учун бу ноллар ёрдамчи 3-устунга ёзилади.

Мисол.

| Қувватлар | Сигимлар                |                                     |                                         |    |     |   |
|-----------|-------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------------|----|-----|---|
|           | 11                      | 24                                  | 32                                      | 1  | 2   | 3 |
| 15        | <sup>0</sup><br>2<br>11 | <sup>4</sup>                        | <sup>0</sup><br>2<br>4<br><del>32</del> | 43 | -28 | 0 |
| 22        | <sup>2</sup><br>4       | <sup>0</sup><br>22<br><del>24</del> | <sup>3</sup><br>5<br>↓                  | 24 | -2  | 0 |
| 14        | <sup>1</sup><br>3       | <sup>5</sup><br>2                   | <sup>6</sup><br>8<br>12                 | 0  | +14 | 0 |
| 16        | <sup>3</sup><br>5       | <sup>5</sup>                        | <sup>5</sup><br>7<br>16                 | 0  | +16 | 0 |
| 1         |                         | 5                                   | 5                                       |    |     |   |
| 2         |                         | 1                                   | 2                                       |    |     |   |

$$F = 2 * 11 + 2 * 4 + 1 * 22 + 6 * 2 + 8 * 12 + 7 * 16 = 22+8+22+12+96+112 = 272 \text{ (пул бирлиги).}$$

### **Назорат саволлари:**

1. Транспорт масаласининг такрибий усуллари қачон ишлатилади?
2. Фогел усулида бажариладиган ишлар кетма-кетлиги қандай?
3. Икки марта афзаллик усулида бажариладиган ишлар қандай кетма-кетликда келади?
4. Дельта усулда бажариладиган ишлар кетма-кетлиги қандай тартибда келади?

### **Таянч иборалар:**

Такрибий оптимал ечим, такрибий усуллар транспорт масаласи матрицасининг стандарт жадвали, Фогел усули, икки марта афзаллик усули, Дельта усули.

## **12 - Маъруза. Транспорт масаласининг оптимал ечимини топишнинг потенциаллар усули**

### **Дарс режаси:**

1. Бошланғич таянч ечимнинг оптималлик шарти теоремаси.
2. Потенциаллар усули алгоритми.
3. Мисол.
4. Оқиқ модели транспорт масаласи
5. Мисол.

### **Адабиетлар:**

1. Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 106-124-бетлар

**Теорема:** Агар транспорт масаласининг  $X^*=(x^*_{ij})$  ечими оптимал бўлса, унга қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи  $m+n$ -та сонлар системаси мос келади:

$$\begin{array}{ll} X^*_{ij} > 0 & \text{лар учун} & U^*_i + V^*_j = C_{ij} \\ X^*_{ij} = 0 & \text{лар учун} & U^*_i + V^*_j \leq C_{ij} \end{array}$$

$$i=1,2,\dots,m; \quad j=1,2,\dots,n.$$

$U^*_i$  ва  $V^*_j$  сонлар мос равишда «таъминотчи ва истеъмолчиларнинг потенциаллари» дейилади.

Бу теоремага кўра бошланғич таянч ечим оптимал бўлиши учун қуйидаги икки шарт бажарилиши керак:

а) ҳар бир банд катак учун мос потенциаллар йиғиндиси шу катакдаги йўл харажати қийматига тенг бўлиши керак:

$$U^*_i + V^*_j = C_{ij} \quad (6)$$

б) ҳар бир бўш катак учун мос потенциаллар йиғиндиси шу катакдаги йўл харажати қийматидан катта бўлмаслиги керак:

$$U_i^* + V_j^* \leq C_{ij} \quad (7)$$

Агар камида битта бўш катак учун (7) шарт бажарилмаса, кўрилатган ечим оптимал бўлмайди ва бу ечимни базисга (7) шарт бузилган катакдаги номаълумни киритиш билан яхшилаш мумкин.

Шундай қилиб, навбатдаги таянч ечимни оптималликка текшириш учун аввал (6) шарт ёрдамида потенциаллар системаси кўрилади ва сўнгра (7) шартнинг бажарилиши текширилади.

### ***Потенциаллар усулининг алгоритми***

1. Бошланғич таянч ечимни қуриш;
2. (6) шарт асосида потенциаллар системасини қуриш; бунда  **$m+n-1$**  та банд катак учун  **$m+n$** -та чизикли тенглама ҳосил бўлади. Номаълумлар сони тенграмалар сонидан битта ортиқ бўлгани учун битта номаълум эркин бўлиб унга ихтиёрий қиймат, масалан ноль қиймати берилиб қолганлари мос тенграмалардан топилади;
3. Бўш катаклар учун (7) шарт текширилади;
  - а) бу шарт барча бўш катаклар учун бажарилса, ечим оптимал бўлади ва ечиш жараёни тугайди;
  - б) акс ҳолда ечим оптимал бўлмайди ва кейинги ечимга ўтишга киришилади;
4. Кейинги ечимга ўтиш учун (7) шарт бузилган катакларнинг ўнг паст бурчагига  $t_{ij} = U_i + V_j - C_{ij}$  қийматлар ёзиб чиқилади ва бу қийматларнинг энг каттаси мос келган катакка «+» ишора қўйилади. «+» ишора қўйилган катакдан бошлаб банд катаклар орқали цикл қурилади, яъни учлари банд катакларда ётган ёпиқ кўпбурчак ҳосил қилинади. Бу кўпбурчакнинг учларига бўш катакдаги «+» дан ихтиёрий йўналишда «-» ва «+» ишоралари қўйиб чиқилади. «-» ишорали катаклардаги юк бирликларидан энг ками танланади ва шу миқдор барча «-» ишорали катаклардан айирилиб, «+» ишорали катакларга қўшилади, натижада янги таянч ечим ҳосил бўлади.

Бу жараён чекли сонда қайтарилгандан сўнг албатта оптимал ечим ҳосил бўлади.

Бу алгоритмни қуйидаги мисолда батафсил кўриб чиқамиз:

Мисол:

1- босқич

| Ишлаб чиқарув-<br>чилар ва маҳсу-<br>лот миқдори | Истеъмолчилар ва истеъмол миқдорлари |                 |                |               |            | U <sub>i</sub> |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------|-----------------|----------------|---------------|------------|----------------|
|                                                  | 200                                  | 200             | 100            | 100           | 250        |                |
| 100                                              | 2<br><b>100</b>                      | 5 2             | 3 3            | 2 7           | 6 4        | <b>0</b>       |
| 250                                              | 4 1                                  | 1<br><b>200</b> | 2<br><b>50</b> | 5 6           | 4 3        | <b>-1</b>      |
| 200                                              | 5 1                                  | 3 1             | 3 2            | 6<br>- 100    | 3<br>+ 100 | <b>-1</b>      |
| 300                                              | 3<br><b>100</b>                      | 4 3             | 4<br><b>50</b> | 3 8<br>+<br>5 | 5<br>- 150 | <b>1</b>       |
| V <sub>j</sub>                                   | <b>2</b>                             | <b>2</b>        | <b>3</b>       | <b>7</b>      | <b>4</b>   |                |

2- босқич

| Ишлаб чиқарув-<br>чилар ва маҳсу-<br>лот миқдори | Истеъмолчилар ва истеъмол миқдорлари |                 |                |                 |                 | U <sub>i</sub> |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|
|                                                  | 200                                  | 200             | 100            | 100             | 250             |                |
| 100                                              | 2<br><b>100</b>                      | 5 2             | 3 3            | 2 2             | 6 4             | <b>0</b>       |
| 250                                              | 4 1                                  | 1<br><b>200</b> | 2<br><b>50</b> | 5 1             | 4 3             | <b>-1</b>      |
| 200                                              | 5 1                                  | 3 1             | 3 2            | 6 1             | 3<br><b>200</b> | <b>-1</b>      |
| 300                                              | 3<br><b>100</b>                      | 4 3             | 4<br><b>50</b> | 3<br><b>100</b> | 5<br><b>50</b>  | <b>1</b>       |
| V <sub>j</sub>                                   | <b>2</b>                             | <b>2</b>        | <b>3</b>       | <b>2</b>        | <b>4</b>        |                |

Оптимал ечим ҳосил бўлди:

$$X_{11} = 100; X_{22} = 200; X_{23} = 50; X_{35} = 200$$

$$X_{41} = 100; X_{43} = 50; X_{44} = 100; X_{45} = 50$$

$$F = 2 \cdot 100 + 1 \cdot 200 + 2 \cdot 50 + 3 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 50 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 50 = 2350$$

(пул бирлиги).

### Очиқ моделли транспорт масаласи

Юқорида талаб ва таклифларнинг умумий миқдорлари тенг бўлганда масала «ёпиқ моделли транспорт масаласи» дейилади, деган эдик. Акс ҳолда масала очиқ моделли бўлиб унинг оптимал ечимини топиш учун ёпиқ моделга келтирилади ва потенциаллар усули қўлланилади.

Очиқ моделли масалани ёпиқ моделга келтириш учун қўшимча «сохта» таъминотчи ёки истеъмолчи киритилади, уларнинг захираси ёки талаб ҳажми

$a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$  ёки  $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$  бўлади. Сохта таъминотчидан реал истеъмолчиларга ёки реал таъминотчилардан сохта истеъмолчиларга амалда юк ташилмагани учун йўл харажатлари нолга тенг қилиб олинади ( $C_{i,n+1} = 0$ ;  $C_{m+1,j} = 0$ ).

Натижада ёпиқ моделли масала ҳосил бўлади.

3-мисол:  $\sum a_i > \sum b_j$  – бўлган ҳол, учун масалани ечинг.

| Таъминотчи-лар | Истеъмолчилар |       |       |       |       |           | Заҳира ҳажми |
|----------------|---------------|-------|-------|-------|-------|-----------|--------------|
|                | $B_1$         | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_{n+1}$ |              |
| $A_1$          | 10            | 7     | 4     | 1     | 4     | 0         | 100          |
| $A_2$          | 2             | 7     | 10    | 6     | 11    | 0         | 250          |
| $A_3$          | 8             | 5     | 3     | 2     | 2     | 0         | 200          |
| $A_4$          | 11            | 8     | 12    | 16    | 13    | 0         | 300          |
| Талаб ҳажми    | 200           | 150   | 100   | 100   | 200   | 100       |              |

### **Назорат саволлари:**

1. Қайси сонлар таъминотчи ва истеъмолчиларнинг потенциаллари ?
2. Ҳар бир банд катак учун қандай шарт бажарилиши керак?
3. Ҳар бир бўш катак учун қандай шарт бажарилиши керак?
4. Қачон ечим оптимал бўлади?

5. Навбатдаги ечимга қандай утилади?

6. Очик модели ТМ қандай қилиб ёпиқ модели масалага айлантирилади?

### **Таянч иборалар**

Транспорт масаласининг математик модели, бошланғич таянч ечим, цикланиш, чизикли боғлиқ бўлмаган тенгламалар, транспорт масаласининг бошланғич ечими, Шимолий-Ғарбий усул, минимал қиймат усули, таъминотчи ва истеъмолчи потенциаллари, алгоритм, потенциаллар усули, очик, ёпиқ модел.

### **14 – маъруза. Танлов масаласининг қўйилиши. Мак усули.**

#### **Маърузалар режаси:**

1. Танлов масаласининг қўйилиши.
2. Транспорт масаласининг амалий масала мисолида математик модели.
3. Танлов масаласининг ўзига хос хусусиятлари.
4. Мак усули моҳияти.
5. Мак усулини амалий мисолни ечиш билан тушунтириш.

#### **Адабиетлар:**

Б. Банди «Основы линейного программирования», Москва, «Радио и связь»,  
1989 (112 – 123 бетлар)

Танлов масаласи транспорт масаласи каби чизикли программалаш масаласига киради, лекин у махсус кўринишга эга. Хусусан, чекликлардаги коэффициентлар 0 ёки 1 коэффициентга эга, ҳар бир ўзгарувчи эса фақат иккита чекликда иштирок этади.

Мазкур мавзуда ўрганиладиган масала транспорт масаласининг танлов характериға эга бўлган хусусий кўринишидир.

Бу усулнинг моҳиятини қуйидаги масаланинг мазмуниға боғлаб тушунтирамиз.

$R_1, R_2, \dots, R_5$  - рақамли 5 киши  $t_1, t_2, \dots, t_5$  рақамли топшириқларни бажара олади. Касбий маҳоратиға боғлиқ равишда бу топшириқларни бажариш учун ҳар хил вақт миқдори керак. Одамларни топшириқлар бўйича шундай тақсимлаш керакки, натижада вақт миқдори энг кам сарфлансин. Вақт миқдори соатларда жадвалда келтирилган.

| Одамлар        | Топшириқлар    |                |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
|                | T <sub>1</sub> | T <sub>2</sub> | T <sub>3</sub> | T <sub>4</sub> | T <sub>5</sub> |
| M <sub>1</sub> | 10             | 5              | 9              | 18             | 11             |
| M <sub>2</sub> | 13             | 19             | 6              | 12             | 14             |
| M <sub>3</sub> | 3              | 2              | 4              | 4              | 5              |
| M <sub>4</sub> | 18             | 9              | 12             | 17             | 15             |
| M <sub>5</sub> | 11             | 6              | 14             | 19             | 10             |

$X_{ij}$  –  $i$  - одамнинг  $j$  - топшириқни бажариши учун кетган вақти.

Масаланинг математик модели қуйидаги шартлардан иборат.  $X_{ij}$ - манфиймас сон, чунки ҳар бир одам ишга тўла иштирок этиши, ҳар бир топшириқ тўла бажарилиши керак, яъни  $X_{ij}$ - миқдор қуйидаги шартларга жавоб бериши керак.

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = 1$$

Шу шартларнинг бажарилишида жами сарфланадиган вақт энг кичик сонга тенг бўлиши керак:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n b_{ij} X_{ij} \longrightarrow \min$$

Бу ерда  $b_{ij}$  -  $i$ - одамнинг  $j$ - топшириқни бажариш учун сарфлайдиган иш вақти.

Шундай қилиб, бу чизиқли программалашнинг масаласи "транспорт" турига эга. Чунки сатрлар ва устунлар бўйича йиғиндилар 1 га тенг. У ифодаланган, шунинг учун транспорт масаласини ечиш алгоритмини бу масалани ечиш учун ҳам қўллаш мумкин, лекин у самарали эмас. Чунки масаланинг оптимал бутун қийматли ечимининг бештаси  $X_{ij} = 1$  қолганлари 0 бўлади. Бошқа томондан караганда эса 5·5 ўлчамдаги вақт матрицасида ҳар бир устун ва ҳар бир сатрдан биттадан шундай бешта элементни топиш керакки, натижада танланган элементлар йиғиндиси минимум бўлсин.  $X_{ij}$  -

нинг 0 ёки 1 га тенг бўлиши, баъзи бир ҳолларда масала қўйилишига маъно бериш учун зарур.

Масалани  $n \cdot n$  ўлчамдаги матрица учун умумлаштириш мумкин.

Ҳар бир бундай матрица учун масалада ҳар бир сатр ва ҳар бир устундан биттадан  $n$  та элементни танлаш керакки, уларнинг йиғиндисини энг кичик бўлсин. Танланган элементларни  $X_{1i}, X_{2j}, \dots, X_{nt}$  деб белгилаймиз. Бу ерда  $i, j, \dots, t = 1, 2, \dots, n$  - элементларнинг баъзи бир ўрин алмаштиришидир. Бундай ўрин алмаштиришлар  $n$  та бўлади, демак ҳатто энг кам миқдордаги  $n$  та ечимни топиш учун ҳам ҳамма ечимларни кўриб чиқиш, мумкин бўлмаган даражада чўзилиб кетади. Шунинг учун бундай масалаларни, "транспорт" масаласининг хусусий ҳоли бўлса ҳам, "транспорт" усули билан ечиш мақсадга мувофиқ эмас. Унга бошқа усулни қўллаш керак.

Мак усули. Танлов масалаларини ечиш учун ҳозирги вақтгача иккита усул таклиф этилган. Иккала усул ҳам қандайдир сатр ёки қандайдир устуннинг элементига яна бир элементни қўшиш ёки айириш билан оптимал танлаш ҳолати ўзгармайди, деган фикрга таянган.

Венгер усули матрицанинг етарли даражадаги қийин ва нотривиал комбинатор хусусиятларига асосланган. Бу усул бўйича масалани ЭХМ да ечиш программасини тузиш жуда ҳам машаққатли. Шунинг учун мазкур ишда юқорида келтирилган масалани Мак усули билан ечишга батафсил тўхтаймиз. Бу усул венгер усулига қараганда анча оддий. Бу мантикий жараёндир. Бу такрорий жараён қадамларини баён этамиз. Бу усул ҳар сатр ва ҳар устундан энг кичик элементни танлаш фикрига асосланган. Умуман олганда сатрларнинг минимал элементлари матрицанинг ҳамма  $n$  устунлари бўйича тақсимланган. Бу ерда сатрларнинг минимал қийматларини устунлар бўйича тақсимлаш учун маълум бир қийматни сатр ёки устундаги ҳамма элементларга қўшиш (айириш) фикри қўлланилади.

Бу усулни  $n \cdot n$  ўлчамдаги масалани ечиш учун қўллаймиз.

Ҳар бир сатрдан минимал элементдан танлаймиз. Ҳар бир минимал элемент остига чизамиз. Агар ҳар бир устунда биттадан ости чизилган

элемент бўлса, бу ости чизилган элементлар базис - оптимал танловни билдиради.

#### Масала алгоритми.

Бошлаш: Устунлар тўпламини иккита  $A$  ва  $A'$  тўпламларга ажратамиз.  $A$  танланган тўплам,  $A'$  танланмаган тўплам. Бошида (бошланишга кейинги қайтишларда ҳам) танланган устунлар йўқ, шунинг учун  $A$  тўплам бўш,  $A'$  тўплам эса ҳамма устунларга эга.

Қадам 1:  $A'$  тўпламдан биттадан ортиқ остига чизилган элементларга эга бўлган устун танланади. Бу устун  $A'$  тўпламдан  $A$  тўпламга ўтказилади.

Қадам 2:  $i$ - сатрдаги  $A$  тўплам элементлари  $b_i$  га,  $A'$  тўпламнинг  $i$ - сатридаги минимал элементи эса  $a_i'$  га  $\min(a_i' - b_i) = a_r' - b_r$  бўлсин.

Қадам 3:  $A$  тўпламнинг ҳамма элементларини  $a_r' - b_r$  га ошириш керак.

Қадам 4:  $a_r'$  ни остки нуқталар билан белгилаймиз. Энди  $a_r'$  "нуқталар билан белгиланган" элемент.

Қадам 5:  $C$  -  $a_r'$  га эга бўлган устун бўлсин. Агар  $C$  да иккитадан ортиқ ости чизилган элемент бўлса,  $C$  ни  $A'$  тўпламдан  $A$  тўпламга ўтказиш ва Қадам 2 га қайтиш, акс ҳолда навбатдаги қадамга ўтиш керак.

Қадам 6: Охирги  $a_r'$  элементни тўла остига чизиш керак. Бу янги остига чизилган элементдир.

Қадам 7:  $a_r'$  жойлашган сатрдан бошланғич остига чизилган элементни топиш, остига чизилган чизиқни олиб ташлаш ва бу элемент жойлашган устунни  $D$  деб белгилаш керак.

Қадам 8: Агар  $D$  бошқа элементларга эга бўлмаса, у нуқталар билан белгиланган элементга эга бўлиши керак. Бу элементни  $a_r'$  билан белгилаб, Қадам 6 га қайтиш керак.

Агар  $D$  яна битта остига чизилган элементга эга бўлса, унда остига чизилган элементлар янги базисни ташкил қилади.

Агар элементлари остига чизилмаган яна бирорта устун қолса, иш бошланишига қайтиш керак.

Агар ҳар бир устунда остига чизилган элемент бўлса, унда

алгоритмнинг иши тугатилади. Оптимал танловга мос келган элементлар белгиланиши ва тегишли қиймат ҳисобланиши мумкин.

Агар Қадам 3 да  $A$  тўпламнинг фақат остига чизилган элементлари  $b_r$  ни  $a_r'$  га ошириб, йўналишнинг қолган элементларини оширишини Қадам 8 гача тўхтатиб турсак, ҳисоблашларни қискартириш мумкин. Бундай ҳолда устуннинг қолган элементлари остига чизилган элементлар канчага оширилган бўлса, шунчага оширилиши керак.

Қуйида бу усулнинг тўла баёнини юқорида келтирилган мисолни ечиш учун келтирамиз.

| Одамлар | Топшириқлар |       |       |       |       |
|---------|-------------|-------|-------|-------|-------|
|         | $T_1$       | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ |
| $M_1$   | 10          | 5     | 9     | 18    | 11    |
| $M_2$   | 13          | 19    | 6     | 12    | 14    |
| $M_3$   | 3           | 2     | 4     | 4     | 5     |
| $M_4$   | 18          | 9     | 12    | 17    | 15    |
| $M_5$   | 11          | 6     | 14    | 19    | 10    |

I босқич

| Бошлаш                                                                               |    |          |          |    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|----------|----------|----|----|
| <u>Қадам 1:</u> 2 – устун $A$ тўпламга ўтади.                                        | 10 | <u>5</u> | 9        | 18 | 11 |
| Қадам 2.<br>1-сатр: 5 нинг остига чизинг. $A'=9$ да минимум топилди, фарқ 4 га тенг  | 13 | 19       | <u>6</u> | 12 | 14 |
| <u>3-сатр:</u> 2 нинг остига чизинг, минимум $A'=3$ нуқтада топилди, фарқ 1 га тенг. | 3  | <u>2</u> | 4        | 4  | 5  |
| 4-сатр: 9 нинг остини чизинг, минимум $A'=12$ нуқтада топилди, фарқ 3 га тенг.       | 18 | <u>9</u> | 12       | 17 | 15 |
|                                                                                      |    |          |          |    |    |

|                                                                                                                                                                       |          |           |          |    |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|----------|----|----|
| 5-сатр: 6 нинг остини чизинг, минимум $A'=10$ нуктада топилган, фарқ 4 га тенг ( $a'_r - b_1$ ) minimum қиймат 1 га тенг, у 3-сатрдан топилди.                        | 11       | <u>6</u>  | 14       | 19 | 10 |
| <u>Қадам 3:</u> 2-устуннинг ҳамма элементларини 1 га оширамиз                                                                                                         | 10       | <u>6</u>  | 9        | 18 | 11 |
| <u>Қадам 4:</u> 3-сатр 3-элементи остини чизамиз.                                                                                                                     | 13       | 20        | <u>6</u> | 12 | 14 |
| <u>Қадам 5:</u> C (1-устун) остига чизилган элементга эга эмас, шунинг учун кейинги қадамга ўтамиз.                                                                   | <u>3</u> | <u>3</u>  | 4        | 4  | 5  |
| <u>Қадам 6:</u> 3-сатр, 1-устунида 3 элементнинг остини тўла чизамиз.                                                                                                 | 18       | <u>10</u> | 12       | 17 | 15 |
| <u>Қадам 7:</u> 3-сатр, 3-устундаги 4 элементининг остига чизилган чизиқни олиб ташлаймиз.                                                                            | 11       | <u>7</u>  | 14       | 19 | 10 |
| <u>Қадам 8:</u> (2-устун) устун бошқа остига чизилган элементларга эга, шунинг учун иш бошланишга қайтиш керак. Чунки остига чизилмаган элементларга эга устунлар бор |          |           |          |    |    |
| II босқич                                                                                                                                                             |          |           |          |    |    |
| Бошлаш                                                                                                                                                                |          |           |          |    |    |
| <u>Қадам 1:</u> 2-устунни A тўпламга ўтказамиз.                                                                                                                       |          |           |          |    |    |
| <u>Қадам 2:</u> $\min(a'-b_i) = 12 - 10 = 2$ 4-сатрда                                                                                                                 |          |           |          |    |    |
| <u>Қадам 3:</u> 2-устуннинг ҳамма элементларини 2 га ошир.                                                                                                            | 10       | <u>8</u>  | 9        | 18 | 11 |

|                                                                                                                                                  |          |           |          |         |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------|----------|---------|-----------|
| <u>Қадам 4:</u> 3- устун, 4- сатрдаги 12 элементини остига нуқталар билан белгилаймиз.                                                           | 13       | 22        | <u>6</u> | 12      | 14        |
| <u>Қадам 5:</u> C(3- устун)бошқа остига чизилган элементга эга, шунинг учун 3 - устунни A тўпламга ўтказамиз ва 2 – қадамга қайтамиз.            | <u>3</u> | 5<br>12   | 4<br>12  | 4<br>17 | 5<br>15   |
| <u>Қадам 2:</u> A тўплам энди 2 ва 3-устунлардан иборат $\min(a_r'-b_i)$ $10 - 9 = 1$ га, 5-сатрда, тенг                                         | 11       | <u>9</u>  | 14       | 19      | 10        |
| <u>Қадам 3:</u> 2 ва 3 устунлардаги ҳамма элементларни 1 га оширамиз.                                                                            | 10       | <u>9</u>  | 10       | 18      | 11        |
| <u>Қадам 4:</u> 5- сатр, 5-устундаги элементни нуқталар билан белгилаймиз.                                                                       | 13       | 23        | <u>7</u> | 12      | 14        |
| <u>Қадам 5:</u> C (5-устун) бошқа остига чизилган элемент-ларга эга эмас, шунинг учун кейинги қадамга ўтамиз.                                    | <u>3</u> | 6         | 5        | 4       | 5         |
| <u>Қадам 6:</u> 5-сатр, 5-устундаги 10 элементининг остини тўла чизамиз.                                                                         | 18       | <u>13</u> | 13       | 17      | 15        |
| <u>Қадам 7:</u> 5-сатр, 2-устундаги 10 элементи остидаги чизиқни бекор қиламиз                                                                   | 11       | 10        | 15       | 19      | <u>10</u> |
| <u>Қадам 8:</u> 0 (2- устун) бошқа остига чизилган элементларга эга, 4-устунда остига чизилган элементлар йўқ, шунинг учун бошланишига қайтамиз. |          |           |          |         |           |
| Бошланиш                                                                                                                                         |          |           |          |         |           |
| <u>Қадам 1:</u> 2- устун A тўпламда бор                                                                                                          | 10       | <u>9</u>  | 10       | 18      | 11        |
| <u>Қадам 2:</u> $\min(a_r' - b_i)$ $13 - 13 = 0$ га тенг                                                                                         | 13       | 23        | <u>7</u> | 12      | 14        |

|                                                                                                           |          |                 |          |          |                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-----------------|----------|----------|-----------------|
| <u>Қадам 3:</u> Ҳеч нарса ўзгармайди.                                                                     | <u>3</u> | 6               | 5        | 4        | 5               |
| <u>Қадам 4:</u> 4-сатр,3-устундаги 13 элементини нуқталар билан белгилаймиз.                              | 18       | <u>13</u>       | 13       | 17       | 15              |
| <u>Қадам 5:</u> С - бу 3 - устун, у остига чизилган элементга эга, кейинги қадамга ўтамыз.                | 11       | 10              | 15       | 19       | <u>10</u>       |
| <u>Қадам 2:</u> 2- ва 3 – устунлар А тўпламда бор<br>$\min(a_r' - b_j) = 10 - 9 = 1$                      |          |                 |          |          |                 |
| <u>Қадам 3:</u> 2 ва 3-устунларни 1 га оширамиз                                                           | 10       | <u>10</u>       | 11       | 18       | 11              |
| <u>Қадам 4:</u> 1-сатр ва 1-устундаги 10 элементини нуқталар билан белгилаймиз.                           | 13       | 24              | <u>8</u> | 12       | 14              |
| <u>Қадам 5:</u> С (1 – устун) бошқа остига чизилган элементга эга, шунинг учун навбатдаги қадамга ўтамыз. | <u>3</u> | 7               | 6        | 4        | 5               |
| <u>Қадам 2:</u> А бу 1,2 ва 3-устунлардир.<br>$\min(a_r' - b_j) = 11 - 10 = 4 - 3 = 15 - 14 = 1$          | 18<br>11 | <u>14</u><br>11 | 14<br>16 | 171<br>9 | 15<br><u>10</u> |
| <u>Қадам 3:</u> 1, 2 ва 3-устунларни 1га оширамиз                                                         | 11       | 11              | 12       | 18       | 11              |
| <u>Қадам 4:</u> 3 - сатр, 4 – устундаги 4 элементини нуқталар билан белгилаймиз.                          | 14       | 25              | <u>9</u> | 12       | 14              |
| <u>Қадам 5:</u> С (4-устун) остига чизилган элементларга эга эмас. Кейинги қадамга ўтамыз.                | 4        | 8               | 7        | 4        | 5               |
| <u>Қадам 6:</u> 3-сатр, 4- устундаги 4 элементининг ости тўла чизилган.                                   | 19       | <u>15</u>       | 15       | 17       | 15              |

|                                                                                                                                           |    |    |    |    |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|----|----|-----------|
| <u>Қадам 7:</u> 3-сатр, 1-устундаги 4<br>остидаги чизиқни олиб ташлаймиз.                                                                 | 12 | 12 | 17 | 19 | <u>10</u> |
| <u>Қадам 8:</u> D (1-устун) 1-сатрда остига<br>чизилган элементга эга, шунинг учун<br>кейинги қадамга ўтамыз.                             |    |    |    |    |           |
| <u>Қадам 6:</u> 1-сатр, 1-устундаги 11<br>элементи остини тўла чизамиз.                                                                   |    |    |    |    |           |
| <u>Қадам 7:</u> 1-сатр, 2-устундаги 11<br>элементи остидаги чизиқни олиб<br>ташлаймиз.                                                    |    |    |    |    |           |
| <u>Қадам 8:</u> D (2-устун) бошқа остига<br>чизилган элементга эга, остига чизилган<br>элементларнинг янги тўплами қуйида<br>келтирилган. |    |    |    |    |           |

Энди ҳар бир устунда роппа-роса биттадан остига чизилган элемент бор, демак сўнгги оптимал ечим топилди.

|           |           |          |          |           |
|-----------|-----------|----------|----------|-----------|
| <u>11</u> | 11        | 12       | 18       | 11        |
| 14        | 25        | <u>9</u> | 12       | 14        |
| 4         | 8         | 7        | <u>4</u> | 5         |
| 19        | <u>15</u> | 15       | 17       | 15        |
| 12        | 12        | 17       | 19       | <u>10</u> |

1 - киши 1 - топшириқни, 2 - киши 3- топшириқни, 3 - киши 4 - топшириқни, 4 - киши 2 - топшириқни, 5 - киши 5 - топшириқни бажариши керак. Бошланғич массивда вақтлар қуйидагича эди:

|           |          |          |          |           |
|-----------|----------|----------|----------|-----------|
| <u>10</u> | 5        | 9        | 18       | 11        |
| 13        | 19       | <u>6</u> | 12       | 14        |
| 3         | 2        | 4        | <u>4</u> | 5         |
| 18        | <u>9</u> | 12       | 17       | 15        |
| 11        | 6        | 14       | 19       | <u>10</u> |

Шуни эътиборга олиб ҳисоблаганда минимал, вақт 39 одам соатга тенг бўлади.

### **Назорат саволлари:**

1. Танлов масаласи қандай махсус кўринишга эга?
2. Транспорт масаласининг математик модели?
3. Танлов масаласининг  $n \times n$  ўлчамдаги матрица учун моҳияти?
4. Танлов масаласи усуллари ва венгер усулининг камчилиги?
5. Мак усули алгоритми?

### **Таянч иборалар:**

Транспорт масаласи, ишлаб чиқарувчи ва истеъмолчи, математик модел, тақсимот характеридаги масалалар, венгер усули, Мак усули, танланган ва танланмаган тўплам, бўш тўплам, белгиланган элемент, остига чизилган элемент, янги базис.

## 15-март. Чизиксиз дастурлаш масалалари.

### Чизиксиз дастурлаш масаласининг қўйилиши ва турлари.

### Чизиксиз дастурлаш масаласининг геометрик талқини.

#### Дарс режаси:

1. Чизиксиз дастурлаш масаласининг қўйилиши ва турлари.
2. Шартсиз оптималлаштириш масаласи.
3. Шартлари тенгламалардан иборат шартли максимум масаласи.
4. Тенгсизликларни бир хил қўринишга келтириш.
5. Локал ва глобал оптимал режа тушунчалари.
6. Қавариқ дастурлаш масаласи.
7. Квадратик ва сепарабел дастурлаш масаласи
8. Стохастик дастурлаш масаласи.

#### Адабиетлар:

Ю. Н. Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 163-165-бетлар

$$\text{Ушбу } q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, i=1, m \quad (1)$$

муносабатларни қаноатлантирувчи ва  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функцияни максимум (минимум)га айлантирувчи  $x_1, x_2, \dots, x_n$  номаълумларнинг қийматларини топиш математик дастурлаш масаласини ташкил этади. Бу масала шартларини қисқача қуйидагича ёзиш мумкин.

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \{ \leq, =, \geq \} b_i, i=1, m \quad (1)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min) \quad (2)$$

бу ерда  $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ва  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  берилган функциялар,  $b_i, i=1, m$  лар эса ўзгармас сонлар. (1) шартлар масаланинг чегаравий шартлари,  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функция эса «максимал функцияси» деб аталади. (1) даги ҳар бир муносабат учун  $\leq, =, \geq$ , белгилардан фақат биттаси ўринли бўлади ва шу билан бир қаторда турли муносабатларга турли белгилар мос бўлиши мумкин.

Айрим чизиксиз дастурлаш масалаларида.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ўзгарувчиларнинг баъзиларига ёки ҳаммасига манфий бўлмаслик шarti қўйилган бўлади. Баъзи масалаларда эса номаълумларнинг бир қисми ёки ҳаммаси бутун бўлишлиги талаб қилинади. (1)-(2) масаладаги ҳамма  $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ва  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциялар чизикли бўлса, ҳамда барча ўзгарувчиларнинг номанфий бўлишлиги талаб қилинса, бу масала чизикли дастурлаш масаласи бўлади.

Аксинча, агар бу функциялардан камида биттаси чизиксиз функция бўлса, масала «чизиксиз дастурлаш масаласи» дейилади. (1)-(2) масалада  $m=0$  бўлса, яъни чегаравий шартлар қатнашмаса, у «шартсиз оптималлаштириш масаласи» дейилади. Бу ҳолда масала қуйидагича ёзилади.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \max (\min)$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n \quad (3)$$

Бу ерда  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$  ўлчовли вектор (нуқта),  $E_n$   $n$  ўлчовли Евклид фазоси, яъни векторларни қўшиш,  $A$  сонга кўпайтириш ва икки векторнинг скаляр кўпайтмаси амаллари киритилган  $n$  ўлчовли  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  векторлар (нуқталар) тўплами.

Фараз қилайлик, (1) система фақат тенгламалар системасидан иборат бўлиб, номаълумларга номанфий бўлишлик шarti қўйилмасин, ҳамда  $m < n$  бўлиб,  $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ва  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциялар узлуксиз ва камида иккинчи тартибли хусусий ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳолда чизиқсиз дастурлаш масаласи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, (i=1, m) \quad (4)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min) \quad (2)$$

Бундай масала «чегаравий шартлари тенгламалардан иборат бўлган шартли максимум (минимум) масаласи» дейилади. (3), (4) ва (2) кўринишдаги масалаларни дифференциал ҳисобга асосланган классик усуллар билан ечиш мумкин бўлгани учун уларни «оптималлаштиришнинг классик масалалари» дейилади.

Агар (1) системадаги ҳамма муносабатлар тенгсизликлардан иборат бўлса, ҳамда уларнинг баъзиларига, « $\leq$ », баъзиларига эса « $\geq$ » белгилар мос келса, бу тенгсизликларни осонлик билан бир хил кўринишга келтириш мумкин. Бундан ташқари

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max \text{ шартни}$$

$$-f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min$$

кўринишда ёзиш мумкин, Шунинг учун, умумийликни бузмасдан, шартлари тенгсизликдан иборат бўлган чизиқсиз программалаш масаласини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, (i=1, m) \quad (5)$$

$$x_j \geq 0 (j=1, n) \quad (6)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (7)$$

Номаълумларнинг номанфийлик шarti (6) қатнашмаган масалаларга бундай шартни осонлик билан киритиш мумкин.

Баъзи ҳолларда масаланинг (1) шartiдаги айрим муносабатлар тенгламалардан, айримлари эса тенгсизликлардан иборат бўлиши мумкин, бундай масалаларни шартлари аралаш белгили бўлган минимум масаласи кўринишига келтириб ёзиш мумкин:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, (i=1, m_1) \quad (8)$$

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, (i= m_1+1, m) \quad (9)$$

$$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (10)$$

Бунда (8), (9) муносабатлар чегаравий шартлардан иборат бўлиб, номаълумларнинг номанфий бўлишлик шартини ўз ичига олади,

Энди қуйидаги кўринишда берилган масалани кўрамыз:

$$q_i(X) = q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, (i=1, m_1) \quad (11)$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in G \subset E_n \quad (12)$$

$$Z(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min(\max) \quad (13)$$

Бу масала чекли ўлчовли чизиксиз программалаш масаласининг умумий кўринишдан иборат бўлиб,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - мақсад функцияси,  $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - чегаравий функционал,  $G$  - масаланинг аниқланиш соҳаси,  $G$  тўпламининг нуқталари масаланинг режалари деб, (11) шартларни қаноатлантирувчи  $X \in G$  нуқталар эса, масаланинг мумкин бўлган режаси деб аталади,

Чизиксиз программалашда локал ва глобал оптимал режа тушунчаси мавжуд бўлиб, улар қуйидагича таърифланади,

Фараз қилайлик,  $X^*$  нуқта (11)-(13) масаланинг мумкин бўлган режаси ва унинг кичик  $\varepsilon$  атрофидаги ( $\varepsilon$  ихтиёрий кичик мусбат сон) нуқталар тўплами  $E(X^*) \in G$  дан иборат бўлсин,

$$\text{Агар} \quad f(X^*) \leq f(X) \quad [f(X^*) \geq f(X)] \quad (14)$$

тенгсизлик ихтиёрий  $X \in G$  ( $X^*$ ) учун ўринли бўлса,  $X^*$  режа (14) мақсад функцияга локал минимум (максимум) қиймат берувчи локал оптимал режа деб аталади.

Агар  $f(X^*) \leq f(X)$   $[f(X^*) \geq f(X)]$  тенгсизлик ихтиёрий  $X \in G$  учун ўринли бўлса,  $X^*$  план (14) мақсад функцияга глобал (абсолют) минимум (максимум) - қиймат берувчи глобал оптимал режа ёки глобал оптимал ечими деб аталади.

Юқоридаги (5)-(7) ва (8)-(10) масалаларни ечиш учун чизикли программалашдаги симплекс усулга ўхшаган универсал усул кашф қилинмаган.

Бу масалалар  $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ва  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  лар ихтиёрий чизиксиз функциялар бўлган ҳолларда жуда кам ўрганилган. Хозирги давргача энг яхши ўрганилган чизиксиз программалаш масалалари  $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ва  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциялар қаварик (ботик) бўлган масалалардир.

Бундай масалалар «қаварик программалаш масаласи» деб аталади. Қаварик программалаш масалаларининг асосий хусусиятлари шундан иборатки, уларнинг ҳар қандай локал оптимал ечими глобал ечимдан иборат бўлади.

Иқтисодий амалиётда учрайдиган кўп масалаларда  $q_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциялар чизикли бўлиб,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  мақсад функцияси квадратик формада

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j$$

бўлади. Бундай масалалар квадратик программалаш масалалари деб аталади.

Чегаравий шартлар ёки мақсад функцияси, ёки уларнинг ҳар иккиси  $n$  та функцияларнинг йиғиндисидан иборат, яъни:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = q_{i1}(x_1) + q_{i2}(x_2) + \dots + q_{in}(x_n) \quad (15) \text{ ва}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots + f_n(x_n) \quad (16)$$

бўлган масалалар «сепарабел программалаш масалалари» деб аталади. Квадратик ва сепарабел программалаш масалаларини ечиш учун симплекс усулга асосланган тақрибий усуллар яратилган.

Чизиқсиз программалашга доир бўлган ишлаб чиқаришни режалаштириш ва ресурсларни бошқаришда учрайдиган муҳим масалалардан бири стохастик программалаш масалаларидир. Бу масалаларда айрим параметрлар ноаниқ ёки тасодифий миқдорлардан иборат бўлади.

Чегаравий шартлари ҳақида тўлиқ маълумот бўлмаган оптималлаштириш масалалари «стохастик масалалар» деб аталади.

Параметрлари ўзгарувчан миқдор бўлиб, улар вақтнинг функцияси деб қаралган масалалар «динамик программалаш масаласи» дейилади.

### **Назорат саволлари:**

1. Математик дастурлаш масаласи шартлари?
2. Чизиқли дастурлаш масаласи шартлари?
3. Шартсиз оптималлаштириш масаласи?
4. Чегаравий шартлари тенгламалардан иборат шартли экстремум масаласи шартли?
5. Чизиқлимас дастурлаш масалаларида тенгсизликлар тенгликларга қандай айлантирилади?
6. Чекли улчовли чизиқсиз дастурлаш масаласининг умумий кўриниши қандай?
7. Локал ва глобал оптимал режа қандай режа?
8. Қавариқ дастурлаш масаласи қандай масала?
9. Квадратик дастурлаш масаласи қандай масала?
10. Сепарабел дастурлаш масаласи қандай масала?
11. Стохастик дастурлаш масаласи қандай масала?
12. Динамик дастурлаш масаласи қандай масала?

### **Таянч иборалар:**

Чизиқсиз дастурлаш масаласи, шартсиз оптималлаштириш масаласи, шартли экстремум масаласи, оптималлаштиришнинг классик масалалари, масала режаси, масаланинг мумкин бўлган режаси, локал оптимал режа, глобал оптимал режа, қавариқ (ботик) функция, квадратик дастурлаш, сепарабел дастурлаш, стохастик дастурлаш, динамик дастурлаш.

## **15 - маъруза**

### ***Чизиқсиз программалаш масаласининг геометрик талқини***

#### **Дарс режаси:**

1. Чизиқли дастурлаш масалаларининг хусусиятлари.
2. Чизиқсиз дастурлаш масаласининг чизиқли дастурлаш масаласидан фарқи.
3. Чизиқсиз дастурлаш масаласининг мумкин бўлган режалар тўплами қавариқ тўплам бўлмаган ҳолга мисол.
4. Чегаравий шартлари чизиқли ва мақсад функцияси чизиқсиз бўлган ҳолга мисол.

5. Умумий кўринишда берилган чизиксиз дастурлаш масаласининг геометрик талқини.
6. Геометрик интерпретациядан фойдаланиб ечилган мисол.

#### Адабиетлар:

Ю. Н. Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 163-165-бетлар

Чизикли программалаш масалаларининг хусусиятларидан бизга маълумки, биринчидан, унинг мумкин бўлган режалар тўплами, яъни масаланинг чегаравий шартларини ва номаълумларнинг номанфийлик шартларини қаноатлантирувчи  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  нукталар тўплами қавариқ бўлади. Иккинчидан,  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  мақсад функцияни берилган қийматга эриштирадиган  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  нукталар тўплами  $n$  ўлчовли фазонинг гипертекислигини ташкил этади. Бундан ташқари, мақсад функциянинг турли қийматларига мос келувчи гипертекисликлар ўзаро параллел бўлади. Учинчидан, мақсад функциянинг мумкин бўлган режалар тўпламидаги локал минимуми (максимуми) глобал (абсолют) минимумдан (максимумдан) иборат бўлади. Тўртинчидан, агар мақсад функция чекли оптимал қийматга эга бўлса, мумкин бўлган режалар тўпламини ифодаловчи кўпбурчакнинг камида бир учи оптимал ечимни беради. Мумкин бўлган режалар кўпбурчагининг учлари (четки нукталари) базис ечим деб аталади. Базис ечимдаги ҳамма номаълумлар (базис ўзгарувчилар) қатъий мусбат бўлган ҳолдаги ечим хосмас базис ечим ва агар улардан камида биттаси нолга тенг бўлса, хос базис ечим дейилади.

Ихтиёрий базис ечимдан бошлаб бошқа базис ечимга бирин-кетин ўтиб бориб, чекли сондаги қадамдан кейин функцияга экстремум қиймат берувчи базис ечим топилади.

Базис ечим оптимал ечим бўлиши учун мақсад функциянинг бу ечимдаги қиймати бошқа базис ечимлардаги қийматларидан кам (кўп) бўлмаслиги керак.

Чизиксиз программалаш масалаларида эса юқоридаги чизикли программалашга доир хусусиятларнинг айримлари (ёки ҳаммаси) бажарилмади. Масалан, чизиксиз программалаш масаласининг мумкин бўлган режалар тўплами қавариқ тўплам бўлмаслиги ҳам мумкин.

Буни чегаравий шартлари

$$\begin{cases} (x_1 - 1)x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 3,5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

муносабатлардан иборат бўлган масалаларда кўриш мумкин.

Масаланинг режалар тўплами иккита алоҳида қисмларга ажралган бўлиб, уларнинг биронтаси ҳам қавариқ эмас (1-расм). Агар мумкин бўлган режалар тўплами қавариқ бўлмаса, мақсад функция чизикли бўлган ҳолда ҳам масаланинг глобал оптимал ечимидан фарқ қилувчи локал ечимлари мавжуд бўлади.

Масалан, чегаравий шартлари чизикли ва мақсад функцияси чизиксиз бўлган қуйидаги масалани кўрамиз:

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 - x_2 \leq -2$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$$

$$Z = f(x_1, x_2) = 25(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \max$$

Бу масаланинг чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталар тўплами кавариқ **ABCD** тўртбурчакдан иборат бўлади (2-расм).

Масаладаги мақсад функция маркази (2,2) нуқтадан иборат бўлган эллипслар оиласидан ташкил топган.

Бу масаланинг оптимал ечими мумкин бўлган режалар тўпламининг **C** учидан иборат бўлади. Лекин, умумий ҳолда, чизиксиз программалаш масаласининг мақсад функциясига оптимал қиймат берувчи нуқта (базис ечим) мумкин бўлган режалар тўпламининг четки нуқтасида эмас, балки ички нуқтасидан ҳам, чегаравий нуқтасидан ҳам иборат бўлиши мумкин.

Умумий ҳолда (8)-(10) кўринишда берилган чизиксиз программалаш масаласини кўрамиз ва бу масаланинг геометрик талқини билан танишамиз, Масаладаги (8),(9) шартлар Евклид фазосида мумкин бўлган режалар тўпламини беради. Бу тўпламнинг нуқталари орасидан мақсад функцияга минимум қиймат берувчи нуқтани (оптимал нуқтани) топиш керак. Бунинг учун мумкин бўлган режалар тўпламининг энг паст сатҳли  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q$  гиперсирти билан кесилган нуқтасини топиш керак, Бу нуқта берилган (8)-(10) масаланинг оптимал ечимини беради.

(8)-(10) масаланинг оптимал ечимини геометрик талқиндан фойдаланиб топиш учун қуйидаги ишларни амалга ошириш керак.

1. Масаланинг (8). (9) чегаравий шартларини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламини, яъни мумкин бўлган режалар тўпламини яшаш керак.

2.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q$  гиперсиртни яшаш керак,

3.  $Q$  нинг қийматини ўзгартириб бориб, энг паст сатҳли гиперсирт топилади ёки функциянинг қуйидан чегараланмаган эканлиги аниқланади.

4. Мумкин бўлган режалар тўпламининг энг паст сатҳ гиперсирт билан кесилган нуқтаси аниқланади ва  $f$  функциянинг бу нуқтадаги қиймати топилади.

Қуйидаги масалани геометрик интерпретациядан фойдаланиб ечамиз.

Мисол:

$$x_1 x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 5$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$Z = x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \max(\min)$$

Ечими: Бу масаланинг мумкин бўлган режалар тўплами қаварик тўплам бўлмайди, аксинча, иккита айрим  $K_1$  ва  $K_2$  қисмлардан иборат бўлади (3-расм). Мақсад функция ўзининг минимал қиймати  $Z=17$ га  $A(1,4)$  ва  $J(4,1)$  нукталарда эришади.  $D(2/3,6)$  ва  $N(7,4/7)$  нукталарда эса функция локал максимум қийматларга эришади.  $Z(D)=328/9$ ;  $Z(N)=2417/49$ .

Локал максимум қийматларни таққослаш  $Z_k$  функция  $N$  нуктада глобал максимумга эришишни кўрсатади.  $D$  ва  $N$  нуктанинг координаталари ва улардаги  $Z$  функциянинг қиймати қуйидагича топилади:  $D(x_1^*, x_2^*)$  нукта  $x_2=6$  тўғри чизикда ва  $x_2=4/x_1$  эгри чизикда ётгани учун унинг координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириш керак, яъни:

$$\begin{cases} x_2^* = 6 \\ x_2^* = \frac{4}{x_1^*} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \frac{2}{3} \\ x_2^* = 6 \end{cases} \quad Z^* = x_1^{*2} + x_2^{*2} \quad Z^*=328/9=Z(D)$$

Худди шунингдек,  $N$  нукта  $x_1=7$  тўғри чизик ва  $x_2=4/x_1$  эгри чизикнинг кесишган нуктаси бўлгани учун унинг  $x_1^0$   $x_2^0$  координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши керак, яъни:

$$\begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \frac{4}{x_1^0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^0 = 7 \\ x_2^0 = \frac{4}{7} \end{cases} \quad Z^0 = x_1^{02} + x_2^{02} \quad Z^0 = \frac{2417}{49}$$

### Назорат саволлари

1. Чизиксиз дастурлаш масаласининг қўйилиши ва турлари.
2. Шартсиз оптималлаштириш масаласи.
3. Шартлари тенгламалардан иборат бўлган шартли максимум масаласи.
4. Локал ва глобал оптимал режа тушунчалари.
5. Чизиксиз дастурлаш масаласининг геометрик талқини.

### Таянч иборалар

Чизиксиз дастурлаш масаласи модели, шартли максимум (минимум), оптималлаштиришнинг классик масалалари, локал оптимал режа, глобал оптимал режа, қаварик дастурлаш масаласи, квадратик дастурлаш масаласи, сепарабел дастурлаш масаласи, стохастик дастурлаш масаласи, чизиксиз дастурлаш масаласининг геометрик талқини, гиперсирт.

## 16-март. Шартсиз оптималлаштириш ҳақида айрим тушунчалар.

### Шартсиз оптималлаштириш масаласи.

#### Дарс режаси:

1. Шартсиз оптималлаштириш масаласининг қўйилиши.
2. Стационар нукта тушунчаси.
3. Гессе матрицаси ва унинг экстремал нуктани аниқлашдаги роли.
4. Эгар нукта тушунчаси
5. Бир аргументли функция учун экстремум мавжудлигининг етарлилик шартлари.
6. Функция экстремумини топишга мисол.
7. Лагранж кўпайтувчилар усули.

#### Адабиётлар

Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 166-171-бетлар

Шартсиз экстремум масаласининг ечимини топиш талаб қилинган бўлсин, яъни:  $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

функциянинг максимумини (минимумини)  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E_n$  нукталарда кидириш мумкин бўлсин

$f(X)$  функция биринчи тартибли ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлса, унинг экстремуми қуйидаги системани қаноатлантиради:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n} \quad (1)$$

Демак, берилган  $f(X)$  функция  $X_0$  нуктада экстремумга эга бўлиши учун бу нукта (1) системанинг ечими бўлиши керак:

$$\frac{\partial f(X_0)}{\partial x_j} = 0, j = \overline{1, n} \quad (2)$$

(2) тенгликлар  $X_0$  нуктада  $f(X_0)$  функция локал максимум ёки минимумга эга бўлса, шу нуктада ундан  $n$  та  $x_1, x_2, \dots, x_n$  номаълумлар бўйича олинган хусусий ҳосилалар 0 га тенг бўлиш кераклигини кўрсатади. Лекин бундан (1) шартни қаноатлантирувчи ҳар қандай нукта ҳам функцияга локал максимум ёки минимум қиймат беради деган хулоса келиб чиқмайди.

(1) системасининг ечимларини стационар нукталар деб атаيمиз. Берилган  $f(X)$  функция экстремумга эришадиган нукта стационар нукта бўлади, лекин ҳар қандай стационар нуктада ҳам функция экстремумга эришавермайди.

Демак, (1) шарт функция экстремумининг мавжудлиги учун зарурий шарт, лекин у етарли эмас. Қуйидаги теорема стационар нуктанинг биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари узлуксиз бўлган  $n$  ўзгарувчили узлуксиз  $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциянинг экстремал нуктаси бўлиши учун етарли шартни кўрсатади. Теоремани исботсиз келтираимиз.

Теорема:  $X_0$  стационар нукта экстремал нукта бўлиши учун шу нуктада куйидаги Гессе матрицаси деб аталувчи

$$H[X_0] = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

матрица мусбат аниқланган (бу ҳолда  $X_0$ -минимум нукта), ёки манфий аниқланган (бу ҳолда  $X_0$ -максимум нукта) бўлиши етарлидир.

Демак,  $X_0$  стационар нукта минимум нукта бўлиши учун шу нуктадаги Гессе матрицаси мусбат аниқланган бўлиши етарли экан. Худди шундай йўл билан  $X_0$  стационар нуктанинг максимум нукта бўлиши учун  $H[X_0]$  нинг манфий аниқланган бўлиши етарли эканлиги кўрсатиш мумкин.

1-мисол. Берилган функцияга экстремал қиймат нукталари топилсин.

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_3 + x_2x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$$

Ечими: функция экстремуми мавжудлигининг зарурий шarti:

$$\nabla f(X_0) = \left( \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_2}, \frac{\partial f(X_0)}{\partial x_3} \right) = 0$$

$$\text{Бундан} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 - 2x_1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_3 - 2x_2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2 + x_2 - 2x_3 = 0$$

Бу тенгламадан тузилган система ечими  $X_0 = (1/2, 2/3, 4/3)$  стационар нукта бўлади.

Етарлилик шартининг бажарилишини текшириш учун Гессе матрицасини  $X_0$  нуктада тузамиз:

$$H[X_0] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Бу матрицанинг бош минорлари мос равишда - 2, 4, - 6. Маълумки, агар матрицанинг бош минорларидан тузилган сонлар кетма-кетлиги ишора алмашинувчи бўлса, берилган матрица манфий аниқланган бўлади. Демак,  $X_0$  нуктада  $f(x_1, x_2, x_3)$  функция максимумга эришади. Масалан, юқорида кўрилган мисолдаги  $f(x_1, x_2, x_3)$ ни -  $f(x_1, x_2, x_3)$ га алмаштириб,  $X_0 = (1/2, 2/3, 4/3)$  нуктани минимум нукта эканлигини кўрсатиш мумкин.

Агар  $H[X_0]$  ноаниқ матрица бўлса,  $X_0$  нукта эгар нукта бўлади, яъни бу нуктада функция экстремумга эришмайди.

2-мисол.  $f(x_1, x_2) = 8x_1x_2 + x_2^2$

функциянинг экстремуми топилсин.

Экстремум мавжудлигининг зарурий шартига кўра:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8x_2 = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_1 + 6x_2 = 0$$

Бу тенгламалардан тузилган системани ечиб,  $X_0=(0,0)$  стационар нуктани ҳосил қиламиз.

Энди стационар нуктанинг экстремал нукта бўлишлик шартини текшириш учун Гессе матрицасини тузамиз:  $H = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

Бу матрицанинг бош минорлари:  $M_{11}=6>0$ ,  $M_{22}=0$ . Матрица детерменанти эса -  $64<0$ . Бундан Гессе матрицасининг ишораси аниқланмаган. Бу ҳолда  $X_0=(0,0)$  нукта эгар нукта бўлади.

Юқорида кўрилган теоремадаги экстремум мавжудлигининг етарлиқ шартлари бир аргументли  $f(X)$  функция учун қуйидагича бўлади.

Фараз қилайлик,  $x_0$  стационар нукта бўлсин, у ҳолда  $f'(x_0)<0$  бўлса,  $x_0$  нуктада функция максимумга,  $f'(x_0)>0$  бўлганда эса минимумга эришади. Агар бир аргументли  $f(x)$  функция учун  $x_0$  стационар нуктада  $f'(x_0)=0$  бўлса, юқори тартибли ҳосилаларнинг  $x_0$  нуктадаги қийматларини текшириш керак. Бу ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

Теорема:  $x_0$  стационар нуктада  $f'(x_0)=0$ ,  $f''(x_0)=0, \dots, f^{(n-1)}(x_0)=0$  ва  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$  бўлса, бу нукта а)  $n$  тоқ сон бўлганда эгилиш нукта;

б)  $n$  жуфт сон бўлганда экстремал нукта бўлади ҳамда  $f^{(n)}(x_0)>0$  да минимумга эришади.

3-мисол. 1)  $f(x)=x^4$  функциянинг экстремуми топилсин.

$f'(x)=4x^3=0$ ,  $x=0$  стационар нукта бўлади.

$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$ ;  $f^{(4)}(0) \neq 0$ .

$n=4$  жуфт сон. Демак,  $x=0$  нукта функция учун экстремал нукта бўлади.

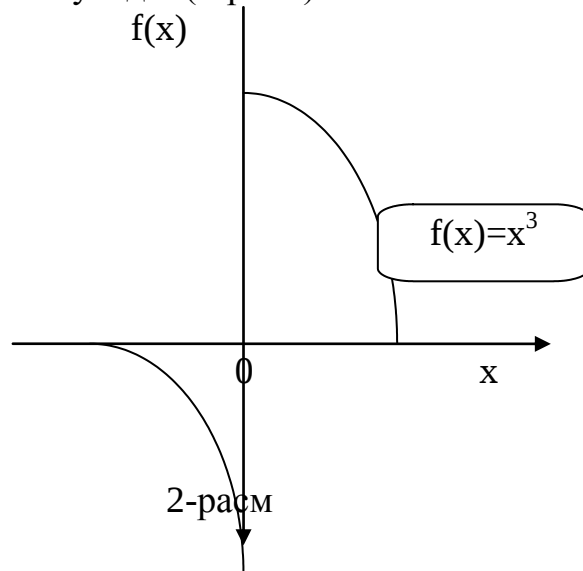
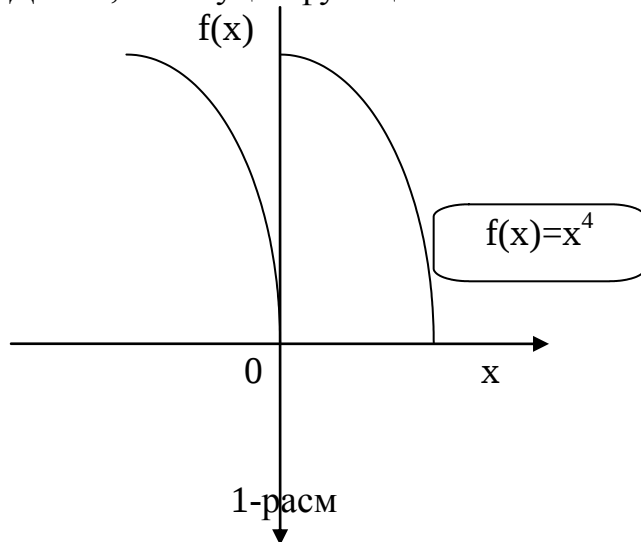
$f^{(4)}(0)=24>0$  бўлгани учун  $x=0$  нуктада берилган функция минимумга эришади. (1-расм)

2)  $g(x)=x^3$

$g'(x)=3x^2=0$ ,  $x=0$  стационар нукта,

$g'(0)=g''(0)=0$ ,  $g'''(0)=6 \neq 0$   $n=3$  тоқ сон.

Демак,  $x=0$  нукта функциянинг эгилиш нуктаси бўлади. (2-расм).



## Шартлари тенгликлардан иборат бўлган шартли экстремум масаласи. Лагранж усулининг кўпайтувчилар усули.

Фараз қилайлик,

$$\begin{aligned} Z=f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow \max(\min) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_i, (i = 1, m) \end{aligned}$$

масалани ечиш талаб қилинсин, яъни  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_i, (i = 1, m)$  тенгламалар системасини қаноатлантирувчи ва  $Z=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функцияга максимум (минимум) қиймат берувчи  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$  нуқтани топиш керак бўлсин.

$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ва  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  функциялар ва уларнинг ҳамма  $x_1, x_2, \dots, x_n$  номаълумлар бўйича олинган хусусий ҳосилалари узлуксиз деб фараз қилайлик. Номаълумларга номанфийлик шarti қўйилмаганда масалани Лагранжнинг аниқмас кўпайтувчилар усули билан ечиш мумкин.

Бунинг учун

$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda(b - g(x))$  функцияни тузамиз. Бу функциядан  $x_1, x_2$  лар бўйича хусусий ҳосилалар олиб, уларни нолга тенглаймиз.

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = b - g(X) = 0 \end{cases}$$

Бу ерда «F-Лагранж функцияси,  $\lambda$  - Лагранж кўпайтувчилари» деб аталади. Бу ерда Лагранж усулининг ғоясини хусусий ҳолда

$$g_i(x_1, x_2) = l$$

$$Z = f(x_1, x_2) \rightarrow \max(\min)$$

кўрдик.

Энди умумий ҳолни, яъни номаълумлар сони  $n$  та ва тенгламалар сони  $m (m < n)$  та бўлган масалани кўрамиз. Бу масала учун Лагранж функцияси:

$$F(X, \Lambda) = f(X) + \sum_{i=1}^m \Lambda_i (b - g_i(X))$$

кўринишида бўлади. Бу ерда  $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ . Локал экстримум мавжудлигининг зарурий шarti

$$\begin{cases} \frac{\partial F(X, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f(X)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial F(X, \lambda)}{\partial \lambda} = b_i - g_i(X) = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан иборат. Агар  $f(X)$  функция  $X^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  нуқтада экстремумга эга бўлса, шундай  $\lambda^0(\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$  вектор мавжуд бўладики, унинг учун  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$  нуқта юқорида келтирилган системанинг ечими бўлади.

Мисол. Лагранж усулидан фойдаланиб, қуйидаги чизиксиз дастурлаш масаласи ечилсин.  $x_1 + x_2 = 1$   $Z = x_1 x_2 \rightarrow \max$

Ечиш: Лагранж функциясини тузамиз:  $F(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1)$   
Бу функциядан  $x_1, x_2$  ва  $\lambda$  лар бўйича хусусий ҳосилаларни олиб, уларни нолга тенглаймиз. Натижада қуйидаги системага эга бўламиз.

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Системани ечиш натижасида берилган масаланинг оптимал ечимини аниқлаймиз:  $\lambda^* = -1/2$ ,  $x_1^* = x_2^* = \frac{1}{2}$ ;  $Z = 1/4$

### Назорат саволлари

1. Шартсиз оптималлаштириш масаласининг қўйилиши қандай?
2. Стационар нукта нима?
3. Гессе матрицасининг экстремал нуктани аниқлашдаги роли қандай?
4. Эгар нукта қандай нукта?
5. Шартлари тенгликлардан иборат шартли экстремум масаласининг қўйилиши қандай?
6. Лагранж кўпайтувчилари ва Лагранж функцияси нима?
7. Умумий ҳол учун Лагранж функцияси қандай бўлади?

### Таянч иборалар

Шартсиз экстремум, локал оптимал режа, стационар нукта, Тессе матрицаси, функция экстремумининг мавжудлик шарти, матрица бош минорлари, эгар нукта, хусусий ҳосилалар, Лагранж кўпайтувчилар усули, Лагранж функцияси, Лагранж кўпайтувчилари..

### 17-майруза.

### Динамик дастурлаш ҳақида тушунча. Оптималлик принципи.

#### Дарс режаси:

1. Динамик дастурлаш ҳақида тушунча.
2. Бошқарилувчи жараёнлар ҳақида тушунча.
3. Оптималлик принцип ива шартли оптимал ечим.
4. Динамик дастурлашга хос масаланинг қўйилиши, унинг ММ.
5. Динамик дастурлаш масаласининг умумий қўйилиши.

### Адабиётлар

Ю.Н.Кузнецов, В.И.Кузубов, А.Б.Волощенко «Математическое программирование». 231-236-бетлар

Чизиқли ва чизиқсиз дастурлаш масалаларида иқтисодий жараён вақтга боғлиқ эмас деб қаралади, шунинг учун масаланинг оптимал ечими режалаштиришнинг фақат бир даври учун топилади. Бундай масалалар бир босқичли масалалар номи билан аталади.

Динамик дастурлаш масалаларида иқтисодий жараён вақтга боғлиқ бўлади ҳамда бутун жараённинг оптимал ривожини таъминловчи бир қатор (кетма-кет ҳар бир вақт даври учун) оптимал ечимлар топилади. Динамик дастурлаш масалалари кўп босқичли ёки кўп қадамли деб аталади.

Динамик дастурлаш – вақтга боғлиқ ва кўп босқичли бошқарилувчи иқтисодий жараёнларни оптимал режалаштириш усулларини ўрганувчи математик дастурлашнинг бир бўлиmidир.

Агар иқтисодий жараённинг кечишига таъсир кўрсатиш мумкин бўлса, бундай жараён бошқарилувчи деб аталади. Жараёнинг кечишига таъсир этиш учун қабул қилинувчи қарорлар (ечимлар) тўпламига бошқариш деб аталади. Иқтисодий жараёнларда бошқариш режалаштиришнинг ҳар бир даврида воситаларни тақсимлаш, маблағ ажратиш, директив ҳужжатлар қабул қилиш ва шу кабилар билан ифодаланиши мумкин. Масалан, ихтиёрий корхонанинг ишлаб чиқариш-бошқарилувчи жараёндир, чунки у ишлаб чиқариш воситаларининг таркиби, хом ашё таъминоти ҳажми, молиявий маблағлар миқдори ва ҳоказо билан аниқланади. Режалаштириш давридаги ҳар бир йил бошида хом ашё билан таъминлаш, ишлаб чиқариш жиҳозларини алмаштириш, кўшимча маблағлар миқдори ҳақида қарорлар тўплами бошқаришдан иборатдир. Бир қарашда, энг кўп миқдорда маҳсулот ишлаб чиқариш учун корхонага мумкин бўлган воситаларнинг ҳаммасини бериш ва ишлаб чиқариш жиҳозларидан (станокларидан, техникадан ва ҳ.к. лардан) тўла фойдаланиш зарурдек туюлади. Лекин, бу жиҳозларни тезда эскиришига (ишдан чиқишга) ва натижада маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажмининг камайишига олиб келиши мумкин. Демак, корхонанинг фаолиятини, номаъкул эффектлардан ҳоли бўлган равишда эскирган жиҳозларни алмаштириш ёки ўрнини тўлдириш чоралари белгиланиши лозим бўлади. Бу эса дастлабки даврда маҳсулот камайтирса, кейинги даврларда корхонанинг бутун ишлаб чиқариш фаолиятини кучайишига олиб келиши мумкин. Шундай қилиб, юқоридаги иқтисодий жараён, ҳар бир даврда унинг ривожланишига таъсир этувчи, бир қанча даврлардан иборат деб қаралиши мумкин. Одатда давр сифатида ҳўжалик йили олинади.

Кўп босқичли иқтисодий жараёнларни режалаштиришда, ҳар бир алоҳида оралиқ босқичда қарор қабул қилишда, бутун жараённинг туб мақсади кўзланади. Бутун жараённинг ечими ўзаро боғланган ечимлар кетма-кетлигидан иборат бўлади. Ўзаро боғланган бундай ечимлар кетма-кетлиги стратегия деб аталади. Олдиндан танланган критерийга нисбатан энг яхши натижани таъминловчи стратегия оптимал стратегия деб аталади. Кўп босқичли режалаштиришда ҳар бир оралиқ режалаштиришда ечимини танлашда бутун жараённинг туб мақсадини кўзлаб ечимни танлаш принципи оптималлик принципи деб аталади.

Оптималлаштириш масалаларини динамик дастурлаш усуллари билан ечишдан ҳар бир оралиқ босқичда қабул қилинган ечим бутун жараённинг келажакдаги ҳолатига қандай таъсир кўрсатишини ҳисобга олиш зарурдир. Ҳар бир босқичда олдинги босқич бирор ҳолатда бўлганлиги шартида ҳисобланган оптимал ечим шартли оптимал деб аталади.

Динамик дастурлашга хос бўлган қуйидаги мисолни кўрамиз. Мисол. Айтайлик,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  саноат корхоналарнинг  $S$  системадан иборат фаолиятини  $k$  та  $t_1, t_2, \dots, t_k$  хўжалик йилидан иборат

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^k \mathbf{t}_i$$

даврга мўлжаллаб режалаштириладиган бўлсин.  $T$  даврининг бошидан корхоналарга  $F$  миқдордаги фондлар ажратилган. Ҳар бир хўжалик йилининг бошланишида корхоналарнинг барча  $S$  системалари маблағ билан таъминланади, яъни  $F$  фонддан улуш ажратилади.  $S_0$  – корхоналарга ажратилган маблағлар билан фойдаланувчи системанинг дастлабки ҳолати ва  $S_k$  – корхоналарга берилган барча қўшимча  $F$  маблағлар билан фойдаланувчи охирги ҳолатлари маълум дейлик. Даврнинг охирида корхоналардан олинadиган жамъи  $W$  фойда энг кўп бўлиши учун мавжуд  $F$  фондларни йиллар бўйича корхоналар ўртасида қандай тақсимлаш мақсадга мувофиқ эканлигини топиш талаб қилинади. Масаланинг математик моделини тузиш мақсадида қуйидаги белгилашларни киритамиз.

$x_{ij}$  –  $i$  – йил  $j$  – корхоналарга ажратилган маблағ сўммаси

$\mathbf{u}_i - \mathbf{i}$  – давр мобайнидаги бошқарув (бу маблағлар миқдори ва ҳ. к. орқали ифодаланиш мумкин). У ҳолда  $\mathbf{U}_i = (\mathbf{x}_{i1}, \mathbf{x}_{i2}, \dots, \mathbf{x}_{in})$  вектор  $\mathbf{i}$  – босқичдаги воситалар тақсимотининг йиғиндиси эса қуйидаги векторлар системаси орқали ифодаланади.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}_1 = (\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, ..., \mathbf{x}_{1n}) \\ \mathbf{U}_2 = (\mathbf{x}_{21}, \mathbf{x}_{22}, ..., \mathbf{x}_{2n}) \\ ..... \\ \mathbf{U}_k = (\mathbf{x}_{k1}, \mathbf{x}_{k2}, ..., \mathbf{x}_{kn}) \end{array} \right.$$

**k** йил давомидаги жаъми даромад эса  $U_1, U_2, \dots, U_k$  бошқарувларга боғлиқ, яъни  $W = W(U_1, U_2, \dots, U_k)$

Масала қўйидагича қўйилади:

Ҳар бир босқичда шундай бошқарувни танлаш керакки, корхоналардан олинадиган жаъми даромад максимал бўлсин.

## Динамик дастурлаш масаласининг умумий қўйилиши.

Умумий ҳолда системанинг бошланғич  $S_0$  ҳолати ва охириги  $S_k$  ҳолати аниқ берилмайди, ҳамда бошланғич ҳолатнинг бутун бир  $S_0^*$  соҳаси ва охириги ҳолатларнинг  $S_0^*$  соҳаси кўрсатилади.

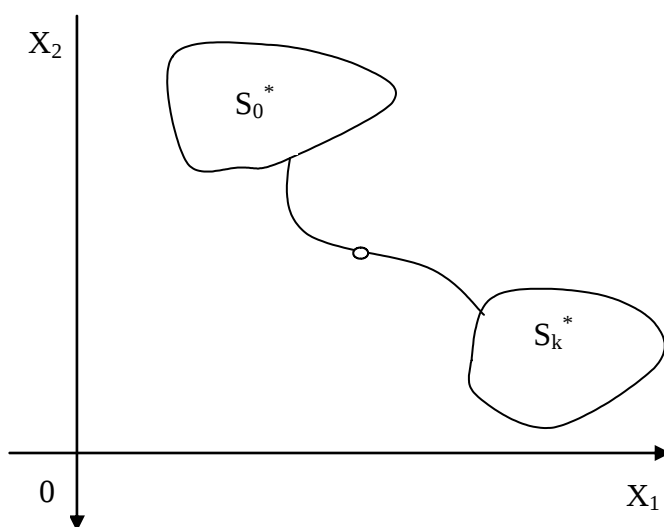
Умумий ҳолда динамик дастурлаш масаласи қуйидагича таърифланади:

Бирор бошқарилувчи  $S$  система бошланғич  $S_0 \in S_0^*$  ҳолатда бўлсин. Вақт ўтиши билан системанинг ҳолати ўзгаради ва у  $S_k \in S_0^*$  охириги ҳолатга ўтади, деб ҳисоблайлик. Система ҳолатларининг ўзгариши бирор микдорий

**W**-мезон (критерий) билан боғлиқ дейлик. Системанинг ўзгариш жараёнини шундай ташкил этиш керакки, бунда **W**-мезон ўзининг оптимал қийматига эришсин.

**Y**-мумкин бўлган бошқарувлар тўплами бўлсин. У ҳолда, масала **S** системани  $S_0 \in S_0^*$  ҳолатдан  $S_k \in S_0^*$  ҳолатга ўтказишга имкон берувчи шундай  $Y^* \in Y$  бошқарувни топишдан иборатки, бунда **W**(**Y**) мезон ўзининг  $W^* = W(Y^*)$  оптимал қийматига эришсин.

Одатда системанинг  $S_0$  ҳолатини сонли параметрлар билан, масалан ажратилган фондлар миқдори, жалб қилинган инвестициялар миқдори, сарфланган ёнилғи миқдори ва ҳ.к. билан ифодалаш мумкин. Бу параметрларни системанинг координаталари деб атаймиз. У ҳолда системанинг ҳолатини **S** нуқта билан ва унинг бир  $S_1$  ҳолатдан  $S_2$  ҳолатга ўтишини эса **S** нуқтанинг траекторияси билан тасвирлаш мумкин.



### Назорат саволлари:

1. Динамик дастурлаш масалаларининг чизиқли дастурлашдан фарқи нимада?
2. Динамик дастурлашни таърифланг.
3. Бошқариловчи жараён қандай жараён?
4. Оптималлик принципининг моҳияти нимада?
5. Шартли оптимал ечим қандай ечим?
6. Динамик дастурлаш масаласи умумий ҳолда қандай қўйилади?
7. Динамик дастурлаш масаласи қандай геометрик талқин қилинади?

### Таянч иборалар

Бир босқичли масалалар, кўп босқичли масалалар, динамик дастурлаш масаласи, бошқариловчи жараён, бошқариш, стратегия, оптимал стратегия, оптималлик принципи, шартли оптимал ечим, бошқарувлар тўплами, система координаталари, нуқта траекторияси.

## **18 - маъруза. Динамик дастурлаш усуллари билан ечиладиган баъзи иқтисодий масалалар.**

### **Дарс режаси:**

1. Корхона жиҳозларини оптимал алмаштириш масаласининг қўйилиши.
2. Биринчи йил учун ажратилган маблағлар йиғиндиси.
3. Иккинчи йил учун ажратиладиган маблағлар.
4. Қолган йиллар учун маблағларни ажратиш тартиби.
5. Масаланинг математик модели.
6. Масалани ечиш босқичларининг кетма- кетлиги
7. Масаланинг энг яхши ечими.
8. Иккинчи йилнинг бошида жиҳозларни алмаштириш учун 1 – йилнинг охирида Янги жиҳозлардан олинган барча қўшимча даромад ишлатилган ҳолл.
9. Жиҳозларни аомаштиришнинг 3 – ҳоли.
- 10.Оптималлик принципини мисолда тушунтириш.

### **А Д А Б И Е Т Л А Р:**

1. Воронин В.П. "Экономико-математические методы", Москва 1984 г.

#### Ишлаб чиқариш жиҳозларини янгилаш масаласи.

Корхона 5 йил ичида ишлаб чиқариш жиҳозларини янгилаши керак. Корхона беш йилликнинг биринчи йилида бу иш учун  $S$  сўм маблағ ажратади. Эски бирта жиҳозни янгиси билан алмаштириш харажатлари ўртача 1500 сўм бўлсин. Ҳар бир янги жиҳозни қўллашдан корхона бир йилда 600 сўм фойда олсин. Кейинчалик, беш йилликнинг 2-йилидан бошлаб корхонадаги эски жиҳозларни янгиси билан алмаштириш янги жиҳоздан келадиган қўшимча фойданинг қандайдир улуши ҳисобига олиб бориш мўлжалланган бўлсин. Эски жиҳозларни янгиси билан алмаштиришнинг шундай режаси тузилиши керакки, бунда 5 йил давомида олинадиган жами қўшимча фойда энг кўп бўлсин.

Биринчи йил учун ажратилган маблағлар йиғиндиси  $p_1$  бирлик эски жиҳозни янгиси билан алмаштириш имконини берсин. Бу сон

$$n_1 = S/1500 \quad (1)$$

Агар ҳар бир янги жиҳоз 600 сўм фойда келтирса, йиллик жами фойда  $600n_1$  сўм бўлади. Масала шартига кўра бу фойданинг  $0 \leq X_1 \leq 1$  қиймат қабул қилувчи қандайдир қисми беш йилликнинг 2 - йилида эски жиҳозни янгиси билан алмаштириш учун ишлатилади, бунда қолдиқ фойда қисми  $1-X_1$  бўлади.  $W_1$  орқали қолган 2-йил бошида ишлатилмай қолган фойда йиғиндиси белгиланса, қуйидагини ёзиш мумкин:

$$W_1 = 600 n_1 (1 - X_1); \quad (2)$$

$$0 \leq X_1 \leq 1 \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

Иккинчи йилдан бошлаб эски жиҳозни янгиси билан алмаштиришни олдинги йилдан олинган қўшимча фойда ҳисобига олиб бориш мумкин. Бунда  $X_1$  ( $0 \leq X_1 \leq 1$ ) га тенг бўлган фойда қисми ишлатилса, унинг йиғиндиси  $600n_1 X_1$  га тенг бўлади. Бунинг ҳисобига 2-йилда қандайдир миқдордаги эски жиҳозларни янгиси билан алмаштириш имкони бўлади:

$$(600n_1 X_1) / 1500 = 0,4n_1 X_1$$

Иккинчи йилда айнан ана шу сонга янги жиҳозлар сони 1-йилдагига караганда кўп бўлади.

$$\text{Демак,} \quad n_2 = n_1 + 0,4n_1 X_1 = n_1 (1 + 0,4X_1) \quad (3)$$

Агар кейинги йилда жиҳозларни алмаштириш учун фойданинг  $X_1$  ( $0 \leq X_2 \leq 1$ ) қисми ишлатиладиган бўлса, шу йил учун қолдиқ фойда йиғиндиси қуйидагига тенг бўлади:

$$\left. \begin{aligned} W_2 &= 600 n_2 (1 - X_2) \\ 0 &\leq X_2 \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3 - ва 4 - йиллар учун миқдорлар худди шундай ёзилади:

$$\left. \begin{aligned} n_3 &= n_2 (1 + 0,4 X_2) \\ W_3 &= 600 n_2 (1 - X_3) \\ 0 &\leq X_2 \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} n_4 &= n_3 (1 + 0,4 X_3) \\ W_4 &= 600 n_4 (1 - X_4) \\ 0 &\leq X_2 \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Бешинчи йил учун янги жиҳозлар сони худди олдинги йиллардаги каби

$$\text{ҳисобланади: } n_5 = n_4 (1 + 0,4X_4) \quad (7)$$

Қолган фойда йиғиндиси бошқа хил ифодага эга бўлади. Бешинчи йил режалаштирилган модернизациянинг охирги йили бўлгани учун, бу йилда фойдадан янги жиҳоз учун маблағ ажратиш кўзда тутилмайди. Бу қуйидаги ифодада ўз аксини топади:  $W_5 = 600 n_5$  (8)

Беш йил учун жами фойда (мақсад функция)

$$F = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + W_5 \quad (9)$$

бўлади. (1) - (7) ифодалардан кўриниб турибдики, (9) тенглама билан ёзилган жами фойда миқдори  $X_1, X_2, X_3, X_4$  ўзгарувчи қийматларига боғлиқ. Бу ҳолда кўрсатилган ўзгарувчиларнинг шундай қийматларини танлаб олиш керакки, натижада эски жиҳозларни янгиси билан алмаштиригандаги жами фойда (мақсад функция) энг кўп бўлсин, яъни

$$F = \max (X_1, X_2, X_3, X_4) \quad (10)$$

$$0 < X_i < 1 \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

Қўйилган масалани ечиш учун ўзгарувчи қийматларини босқичма-босқич аниқлаш йўлини тўтамиз. Шу мақсадда  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  орқали корхонанинг 1-йил, 2, 3, 3,4 йиллар ва 5 йилда оладиган фойдасини ўсиб бориш тартибида белгилаймиз. Ечимни охирги йилдан бошлаймиз ва тескари йўналиш бўйича ҳар бир даврдан ундан олдингисига караб ҳисоблаб борамиз.

(8)- ифодадан кўриниб турибдики, режа даврининг бешинчи йилида фойда йиғиндиси  $W_5 = 600n_5$  га тенг. Олдинги 4 йилда олинган жами фойдани  $F_4$  деб белгилаб, беш йилликдаги жами фойдани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$F_5 = F_4 + W_5 = F_4 + 600 n_5 \quad (11)$$

(7) тенгламадаги  $n_5$  қийматини (11) тенгламага қўямиз:

$$F_5 = F_4 + 600 n_4 (1 + 0,4X_4) \quad (12)$$

Энди 4 йиллик жами фойдани  $F_4$  ни қараймиз. У олдинги 3 йиллик фойда йиғиндисидан ва 4 йил фойдасини қўшишдан ҳосил бўлади:

$$F_4 = F_3 + W_4 \quad (13)$$

(6) ифодадаги  $W_4$  қийматни (13) га қўямиз:

$$F_4 = F_3 + 600 n_4 (1 - X_4) \quad (14)$$

Ҳосил бўлган  $F_4$  қийматни (12) ифодага қуйиб, ҳосил киламиз:

$$F_5 + F_3 + 600n_4 (1 - X_4) + 600n_4 (1 + 0,4X_4) = F_3 + 1200n_4 - 360n_4 X_4 \quad (13)$$

Ечимнинг бу босқичида  $X_4$  ўзгарувчи қийматини аниқлаш мумкин.  $X_4$  ўзгарувчи 4-йил фойдасининг 5-йилда жиҳозларни алмаштириш учун ажратилган бир қисми, деб қабул қилинган эди. (13) тенгламадан маълумки,  $X_4$  нинг қиймати қанча кичик бўлса,  $F_5$  мақсад функциянинг қиймати шунча катта бўлади. Демак, бу босқичда энг яхши ечим  $X_4$  ўзгарувчи энг кичик қийматни қабул қилганда ҳосил қилинади.  $X_4$  ўзгарувчининг қийматлар соҳаси  $0 \leq X_4 \leq 1$  бўлгани учун  $X_4 = 0$ , деб олиш мумкин.

Бу ҳолда жами фойда:  $F_5 = F_3 + 1200n_4$  (14) бўлади.

Кейинги даврга, яъни уч йилдаги фойда миқдорини аниқлашга ўтамиз. У олдинги икки йил фойдаси ва учинчи йил фойдаси йиғиндисидан ( $F_2$ ) иборат бўлади:  $F_3 = F_2 + W_3$ , (15)

ёки (5) ифодадаги  $W_3$  қийматни (15) келтириб қўйсак.

$$F_3 = F_2 + 600n_3 (1 - X_3) \quad (16)$$

$F_3$  ифодани (16) тенглама орқали ифодалаб, уни (14) ифодага қўйсак, қуйидагини ҳосил киламиз:  $F_5 = F_2 + 600n_3 (1 - X_3) + 1200n_4$  (17)

(6) ифодадаги  $n_4$  қиймат қўйилгач, тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$F_5 = F_2 + 600n_3 (1 - X_3) + 1200n_3 (1 + 0,4X_3) = F_2 + 1800n_3 - 1200n_3 X_3 \quad (18)$$

(18) тенгламанинг таҳлили шуни кўрсатадики,  $X_3$  ўзгарувчи энг кичик қийматга эга бўлса, мақсад функция ўзининг энг катта натижасига эга бўлади. Демак, ечимнинг бу босқичида  $X_3 = 0$  деб олиш мумкин.

Унда жами фойда  $F_5 = F_2 + 1800n_3$  (19)

Навбатдаги босқичда икки йиллик жами фойда аниқланади, яъни

$$F_2 = F_1 + W_2 \quad (20)$$

Бу ифодага  $W_2$  қийматни (4) тенгламадан олиб қўямиз:

$$F_2 = F_1 + 600n_2 (1 - X_2) \quad (21)$$

Кейин (19) тенгламага (21) ифодадаги  $F_2$  қийматни ва (5) тенгламадаги

$n_3$  қийматни қуйиб, қуйидагини ҳосил киламиз:

$$F_5 = F_1 + 600n_2(1 - X_2) + 1800n_2(1 + 0,4X_2) = F_1 + 2400n_2 + 120n_2X_2 \quad (22)$$

Олдинги ҳоллардаги каби  $X_2$  нинг қийматини излаймиз, (22) ифодадан кўриниб турибдики,  $X_2$  нинг қиймати қанча катта бўлса, жами фойда ( $F_5$ ) шунча катта бўлади.

Демак, энг яхши ечим  $X_2$  ўзгарувчининг  $0 \leq X_2 \leq 1$  қийматлар соҳасидаги энг катта ( $X_2 = 1$ ) қийматни қабул қилиши билан олинади.

(22) ифодага  $X_2 = 1$  қийматни қуйиб, ҳосил киламиз:

$$F_5 = F_1 + 2400n_2 + 120n_2 = F_1 + 2520n_2 \quad (23)$$

Охирги босқичда режа даврининг 1- йилидаги жами фойдаси каралади, у  $F_1$  мақсад функция билан ифодаланган,  $W_1 = 600n_1(1 - X_1)$  ифода биринчи йил охирида олинadиган фойдани билдиради. Демак, шу даврдаги жами фойда :

$$F_1 = 600N_1(1 - X_1) \quad (24)$$

(23) формулага  $F_1$  қийматни ва (3) ифодани қўйиб, қуйидагини ҳосил киламиз :

$$F_5 = 600n_1(1 - X_1) + 2520n_1(1 + 0,4X_1) = 3120n_1 + 408n_1X_1 \quad (25)$$

(25) ифодадан кўриниб турибдики, агар  $X_1$  қиймат энг катта қийматни қабул қилса ( $X_1 = 1$ ), мақсад функция ҳам ўзининг энг катта қийматига эришади :

$$F_5 = 3120n_1 + 408n_1 = 3528n_1 \quad (26)$$

Масалани ечилди, деб ҳисоблаш мумкин, ўзгарувчиларнинг изланаётган қийматлари топилди:  $X_1=1$ ,  $X_2=1$ ,  $X_3=0$ ,  $X_4=0$  мақсад функция қиймати:

$$F = \max F_5(X_1, X_2, X_3, X_4) = 3528n_1 \quad (27)$$

Агар  $n_1$  ўрнига унинг қиймати (1) дан олиб қўйилса, сўнгги натижани оламиз:

$$F = 34285 / 1500 = 2,3525 \quad (29)$$

### Динамик дастурлаш масаласининг таҳлили.

Олинган ечимни қуйидагича таҳлил қилиш мумкин. Корхона эскирган жиҳозларни янгилари билан қуйидаги тарихда алмаштирса, режа оптимал бўлади:

Биринчи йилнинг бошида алмаштириш, шу мақсадда ажратилган, маблағлар ҳисобига олиб борилади:

Иккинчи йил бошида жиҳозларни алмаштириш учун биринчи йилнинг охирида янги жиҳозлардан олинган барча қўшимча даромад ишлатилади:

Учинчи йил бошида эски жиҳозларни янгилари билан алмаштириш учун иккинчи йилнинг охирида олинган барча қўшимча фойда ишлатилади:

Тўртинчи ва бешинчи йилларда эски жиҳозларни янгилари билан алмаштиришдан дастлабки уч йил давомида олинган фойда реконструкция мақсадларида сарфланмайди.

Масала ечимининг таҳлили, агар талаб қилинса, қўшимча маълумот олишга имкон беради. Хусусан, реконструкция мақсадларига дастлабки икки йилда олинган фойда эмас, балки кейинги йил фойдаларидан ҳам фойдаланилса, қанча жами фойда олинган бўлар эди? Бу ҳолда барча  $X_i=1$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) бўлади.

Бу ўзгарувчиларнинг қийматларини кетма - кет ўрнига қўйиб, ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned}F_5 &= F_3 + 1200n_4 - 360n_3 = F_4 + 840n_4 \\F_5 &= F_2 + 1440n_3 - 336n_3 = F_2 + 1176n_3 \\F_5 &= F_1 + 1776n_2 - 129,6n_2 = F_1 + 1646,4n_2 \\F_5 &= 2246,4n_2 - 58,56n_2 = 2304,96n_2\end{aligned}\quad (4.30)$$

Функция индекси беш йиллик жами фойдани билдиради. Сўнгги натижа қуйидагича бўлади:  $F_5 = 2304,965 / 1500 = 1,536645$  (4.31)

(4.29) ва (4.31) ифодаларидаги натижаларни таққослаб, иккинчи ҳолда бутун режа даврида олинадиган қўшимча фойда реконструкциянинг оптимал режасидан деярли 82% га  $(2,352-1,53664) = 0,81536$  кам бўлишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Учинчи ҳолда ҳамма ўзгарувчилар қийматини нолга тенглаб, яъни  $X_i=0$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) худди шундай тарзда жами фойдани ҳисоблаш мумкин. Бу ҳолда босқич натижалари қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned}F_5 &= F_3 + 1200n_4 \\F_5 &= F_2 + 1800n_3 \\F_5 &= F_1 + 2400n_2 \\F_5 &= 3000n_1\end{aligned}\quad (4.32)$$

Режалаштирилган давр жами фойдаси

$$F_5 = 30005 / 1500 = 25 \text{ бўлади.}$$

Бу 35,2 % (2,352 - 2,0) га реконструкциянинг оптимал режасидан камдир.

Агар жиҳозлар дастлабки икки йилда алмаштирилса, фойда оптимал режадан худди шунча фоизга (35,2%) кам бўлади.

Айтилганлардан шундай хулоса келиб чиқадики, динамик программалаш масаласининг бошқалардан фарқли хусусияти шундан иборатки, уларда ўрганилаётган жараёнларнинг динамикаси, ривожланиши ва кўп босқичли характери ифодаланади. Жиҳозларни алмаштириш масаласини ечишда бутун режалаштириш даврида ўзгарувчи шартлар, таъсир этувчи жами фойда динамикаси кўрилади.

Жами фойданинг ўзгариши босқичларда кўрилди. Босқич сифатида маълум вақт оралиғи қабул қилинди, бу вақт оралиғи учун навбатдаги ўзгарувчи миқдорнинг қиймати топиб борилди.

Динамик программалаш масалаларини маълум вақт оралиқларида кўп босқичли ечиш одатдаги ҳолдир, лекин бир қатор масалаларда босқичлар бошқа маънога ҳам эга бўлиши мумкин.

Шундай қилиб, динамик программалаш масалалари кўп босқичли жараёни ифодалайди. Бундай масалаларни ечишнинг маъноси, ҳар бир босқичда  $X_i$  ўзгарувчининг мақсад функцияга экстремал натижа берувчи қийматларини танлашдан иборатдир. Бунда ўзгарувчилар қиймати курилатган даврга нисбатан тескари йўналишда кетма - кет, босқичма - босқич аниқлаб борилади.

Кўп босқичли масалаларни ечиш динамик программалаш назариясининг муҳим принципи - оптималлик принципига асосан амалга оширилади. Оптималлик принципини Р. Беллманга тегишли бўлган ибора билан тавсифлаш қабул қилинган:

"Оптималлик шундай хусусиятга эгаки, дастлабки ҳолат ва бошланғич дақиқалардаги ечим қандай бўлишидан катъий назар, кейинги ечимлар

биринчи ечим натижасида олинган ҳолатга нисбатан оптимал бўлиши керак".

Буни кўрилган мисол орқали тушунтирамиз. Фараз қиламиз, ечимнинг биринчи босқичида  $X_4 = 1$  деб қабул қилинди. Бу, тўртинчи йилда янги жихозларни ишлатишдан олинган қўшимча фойданинг ҳаммаси бешинчи йилда жихозларни алмаштиришга ишлатилади, деган маънони билдиради. Бунинг натижасида шу ва кейинги босқичларда қуйидаги натижалар олинди:

$$F_5 = F_3 + 1200n_4 - 360n_4X_4 = F_3 + 840n_4 \quad (X_4=1),$$

$$F_5 = F_2 + 1440n_3 - 260n_3X_3 = F_2 + 1440n_3 \quad (X_3=0),$$

$$F_5 = F_1 + 2040n_2 - 216n_2X_2 = F_1 + 2040n_2 \quad (X_2=0),$$

$$F_5 = 2640n_1 + 216n_1X_1 = 2856n_1 \quad (X_1=1),$$

Ўзгарувчиларнинг бу қийматларида жами фойда қуйидагига тенг:

$$F = 2856n, S / 1500 = 1,9045$$

Фойданинг бу қиймати дастлабки оптимал ечимдан (2,3525) 0,448 га камдир (2,3525-1,9045). Фойданинг камайиши биринчи босқичда қабул қилинган ҳатто қарор ҳисобига бўлди.

Амалиётда кўпбосқичли жараёнли масалалар кўп, лекин уларни ечиш учун динамик программалаш усуллари етарли даражада кенг ишлатилмайди. Буни кўп босқичли масалаларни ечишнинг бир қатор ҳолларида мураккаб ҳисоблашларнинг юзага келиши билан тушунтириш мумкин. Бу қийинчиликларни эса ЭХМ лар ёрдамида ҳал қилиб бўлади.

### **Назорат саволлари.**

1. Ишлаб чиқариш жихозларини янгилаш масаласининг талаби қандай?
2. Ишлаб чиқариш жихозларини янгилаш масаласининг математик модели?
3. Ишлаб чиқариш жихозларини янгилаш масаласини ечиш тартиби қандай?
4. Корхона жихозларини оптимал алмаштириш масаласининг таҳлили қандай?
6. Реконструкция мақсадларига ҳамма даврларда маблағ ажратилмаганда жами фойда қандай олинади?

5. Реконструкция мақсадларига ҳамма йилларда олинган фойда ҳиссасидан фойдаланилганда фойда қандай олинади?
6. Динамик программалаш қандай масалаларни ечиш билан шуғулланади?
7. Оптималлик принципини реконструкция масаласи орқали қандай тушунтирилади?

### **Таянч иборалар:**

Динамик программалаш, алоҳида босқичлардан иборат масалалар, кўп босқичли ҳисоблаш жараёни, ҳар бир қадамда оптимал ечимни топиш, умумий оптимал ечим, бир нечта ўзгарувчи масалани бир ўзгарувчини ўзаро боғлиқ бир нечта масалалар кўринишида ифодалаш, жиҳозларни янгилаш, ресурсларни тақсимлаш масалалари, жами қўшимча фойда, қолдиқ фойда, қолган фойда йиғиндиси, жами фойда, динамик программалаш масаласи таҳлили.

## АДАБИЕТЛАР:

1. Коршунов Ю.М. "Математические основы кибернетики", Москва 1980
2. Шорин Н.В. "Введение в асу", Москва 1980 г.
3. Кузубов А.С., Волошин А.Д. "Математическое программирование" Москва 1986 г.
4. Воронин В.П. "Экономико-математические методы" Москва 1984 г.
5. Воронин В.П. "Экономико-математические методы планирования в торговле" Москва 1984 г.
6. Эйдельмант М.П. "Сборник задач по курсу математического программирования", Тошкент 1978 й.
7. Б. Банди «Основы линейного программирования», Москва, «Радио и связь», 1989 й.

## МУНДАРИЖА

|                                                                                                                                                   |                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| 1-МАЪРУЗА. «МАТЕМАТИК ДАСТУРЛАШ» ФАНИНИНГ ПРЕДМЕТИ. ЭНГ СОДДА МАСАЛАЛАРНИНГ МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАРИ.....                                              | 3                               |
| 2-МАЪРУЗА. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАСИНИНГ УМУМИЙ ҚЎЙИЛИШИ ВА УНИНГ ТУРЛИ ФОРМАДА ИФОДАЛАНИШИ.....                                                 | 9                               |
| 3-МАЪРУЗА. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАСИНИНГ ГЕОМЕТРИК ТАЛҚИНИ. ГРАФИК УСУЛ. ИҚТИСОДИЙ МАСАЛАНИ ГРАФИК УСУЛДА ЕЧИШ. .ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА. |                                 |
| 4-МАЪРУЗА. ЧИЗИҚЛИ СИСТЕМАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АЙРИМ ТУШУНЧАЛАРИ. .ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.                                                   |                                 |
| 5-МАЪРУЗА. ТАЯНЧ ЕЧИМНИНГ ОПТИМАЛЛИК ШАРТИ. ....                                                                                                  | 25                              |
| 6-МАЪРУЗА. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАСИНИ ЕЧИШ УЧУН СИМПЛЕКС УСУЛ.....                                                                              | 29                              |
| 7-МАЪРУЗА. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШДА ИККИЛАНИШ НАЗАРИЯСИ.....                                                                                           | 35                              |
| 8-МАЪРУЗА. ИҚТИСОДИЙ МАСАЛАЛАР ЕЧИМЛАРИНИНГ ТАҲЛИЛИ.....                                                                                          | 40                              |
| 9-МАЪРУЗА. ИККИЛАНГАН СИМПЛЕКС УСУЛ. ....ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.                                                                          |                                 |
| 10-МАЪРУЗА. ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШНИНГ ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ.....                                                                                         | 51                              |
| 11-МАЪРУЗА. БУТУН СОНЛИ ДАСТУРЛАШ.....                                                                                                            | 1                               |
| 12-МАЪРУЗА. ЧИЗИҚСИЗ ДАСТУРЛАШ МАСАЛАЛАРИ. ....                                                                                                   | 76                              |
| 13-МАЪРУЗА. ШАРТСИЗ ОПТИМАЛЛАШТИРИШ ҲАҚИДА АЙРИМ ТУШУНЧАЛАР.....                                                                                  | 83                              |
| 14-МАЪРУЗА. ҚАВАРИҚ ДАСТУРЛАШ. ....ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.                                                                                |                                 |
| 15-МАЪРУЗА. ЛАГРАНЖ ФУНКЦИЯСИНИНГ ЭГАР НУҚТАСИ. .... ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.                                                              |                                 |
| 16-МАЪРУЗА. ДИНАМИК ДАСТУРЛАШ УСУЛЛАРИ БИЛАН ЕЧИЛАДИГАН ИҚТИСОДИЙ МАСАЛАЛАР.....                                                                  | 87                              |
| 17-МАЪРУЗА. ДИНАМИК ДАСТУРЛАШ УСУЛЛАРИ БИЛАН ЕЧИЛАДИГАН БАЪЗИ ИҚТИСОДИЙ МАСАЛАЛАР. ....                                                           | 91                              |
| 18-МАЪРУЗА. КАПИТАЛ МАБЛАҒЛАРНИ ОПТИМАЛ ТАҚСИМЛАШ МАСАЛАСИ .....ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.                                                   |                                 |
| 19-МАЪРУЗА. ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ.ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИ БИЛАН ЧИЗИҚЛИ ДАСТУРЛАШ ОРАСИДАГИ БОҒЛАНИШ.....ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА.                    |                                 |
| 20-МАЪРУЗА. НОНИҚЛИК ШАРОИТИДА ЕЧИМЛАР ҚАБУЛ ҚИЛИШ. ТАБИАТГА ҚАРШИ ЎЙИН .....                                                                     | ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА. |
| ҚЎШИМЧА АДАБИЁТЛАР: .....                                                                                                                         | ОШИБКА! ЗАКЛАДКА НЕ ОПРЕДЕЛЕНА. |