

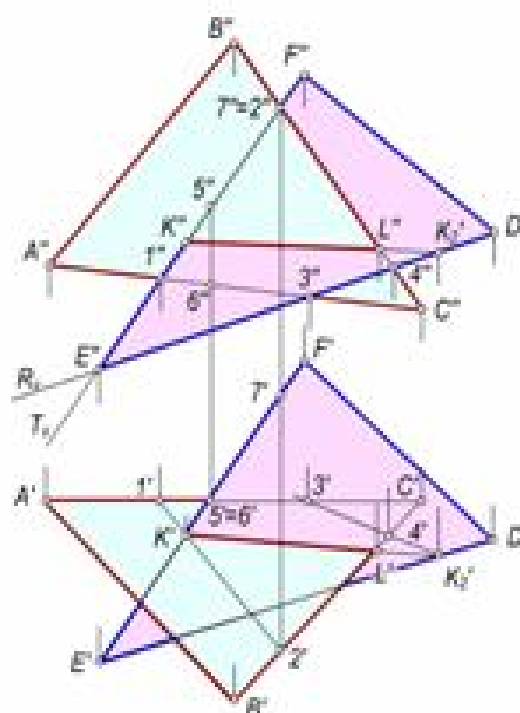


TOSHKENT AVTOMOBIL YO'LLAR INSTITUTI CHIZMA GEOMETRIYA VA GRAFIKA KAFEDRASI

Hakimov L. Jumayev M. To'xtayev A.

CHIZMA GEOMETRIYA

1-qism
ma'ruzalar matni



Toshkent -2005

Chizma geometriya fani. Proyeksiyalash metodlari

Chizma geometriya fani, uning mutaxassislar tayyorlashdagi ahamiyati.

Chizma geometriya kursida qo'llaniladigan shartli belgilashlar.

Terminlar va simvollar.

Yevklid fazosi va uni xosmas elementlar bilan to'ldirish.

Proyeksiyalash metodi. Ikki tasvirlash usuli.

Markaziy va parallel proyeksiyalash. Asosiy xossalari.

Chizma geometriyaning qaytarilma masalalari.

Tayanch iboralar va tushunchalar.

Nuqta, to'g'ri chiziq, tekislik, fazo, proyeksiya, geometrik shakl, xos nuqta, xosmas nuqta, markaziy proyeksiyalash, parallel proyeksiyalash, proyeksiyalar markazi, proyeksiyalar tekisligi, proyeksiya chiziqlari

Chizma geometriyada fazodagi shakllar markaziy yoki parallel proyeksiyalash usullari bilan biror tekislikda tasvirlanadi. Bu tekislikni proyeksiyalar tekisligi deb yuritiladi. Shakllarning proyeksiyalar tekisligidagi tasvirini yasash esa ma'lum qonun va qoidalarga asoslanib bajariladi.

1.1-§. Markaziy proyeksiyalash usuli

Markaziy proyeksiyalash usuli geometrik shakllarni tekislikda proyeksiyalashning umumiy holdidir.

Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalar markazi S va proyeksiyalar tekisligi P beriladi (1.1-rasm). S va P sistemasida fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin. A nuqtani S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Buning uchun S markaz bilan A nuqtani to'g'ri chiziq orqali birlashtirib, uni davom ettiramiz. Hosil bo'lgan SA proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligi P bilan A_p nuqtada kesishadi. Bunda A_p nuqta A nuqtaning S markaz bo'yicha proyeksiyalar tekisligidagi markaziy proyeksiyasi deb yuritiladi.

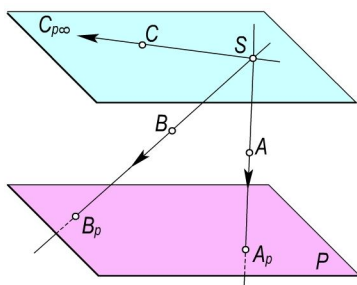
Fazodagi ikkinchi biror ixtiyoriy B nuqta ham A nuqta singari proyeksiyalanib, B_p nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi vaziyati aniqlanadi. Agar biror S nuqtani P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalovchi SC nur P tekislikka parallel bo'lsa, u holda bu nur P tekisligi bilan cheksiz uzoqlikda kesishib, $C_{p\infty}$ xosmas nuqtani hosil qiladi. $SA, SB, SC, \dots$ to'g'ri chiziqlar proyeksiyalovchi nurlar deb yuritiladi.

Fazodagi biror nuqtalar to'plamini proyeksiyalash markazi S orqali P proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalanganda S markazli to'g'ri chiziqlar dastasi hosil bo'ladi. Bu dastani proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan hosil bo'lgan nuqtalar to'plami fazodagi ma'lum bir nuqtalar to'plamining tasviri bo'ladi. Masalan, ABD uchburchakning markaziy proyeksiyasi $A_pB_pD_p$ uchburchak bo'ladi (1.2-rasm).

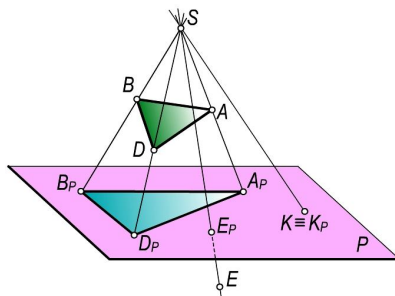
Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan E nuqtaning E_p proyeksiyasi $SE \cap P$ bilan aniqlanadi. Proyeksiyalar tekisligida yotgan K nuqtaning K_p markaziy proyeksiyasi nuqtaning o'zi bilan ustma-ust ($K \equiv K_p$) tushadi.

Markaziy proyeksiyalash konusli yoki qutbli proyeksiyalash, yoxud perspektiva deb ham yuritiladi. Masalan, markaziy proyeksiyalash apparatida biror m egri chiziq berilgan bo'lsin (1.3-rasm). m egri chiziqning nuqtalari to'plamini proyeksiyalar tekisligiga S markaz orqali proyeksiyalansa, uning proyeksiyasi m_p egri chiziq hosil bo'ladi. U holda S markazdan o'tuvchi proyeksiyalovchi nurlar to'plami konus sirtini hosil qiladi.

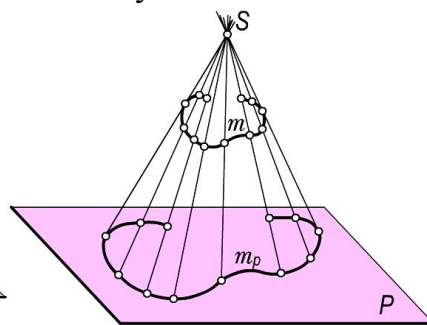
Markaziy proyeksiyalashda proyeksiyalash markazi va buyumning proyeksiyasiga qarab uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo'lmaydi.



1.1-rasm.



1.2-rasm.



1.3-rasm

Markaziy proyeksiyalashning xossalari

Markaziy proyeksiyalashda geometrik shakllar quyidagicha tasvirlanadi.

1-xossa. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi.

2-xossa. SA nurda yotuvchi $A, A_1, A_2, A_3, \dots$ nuqtalarning markaziy proyeksiyalari A_p nuqta bilan ustma-ust tushadi.

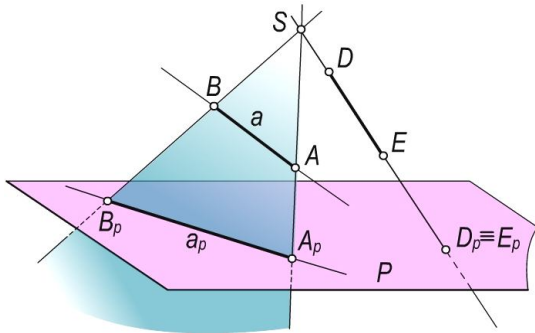
3-xossa. Proyeksiyalash markazidan o'tmaydigan to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi kesma bo'ladi.

Biror a to'g'ri chiziq AB kesmasi orqali berilgan bo'lsin (1.4-rasm) AB kesma S markaz orqali proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda SAB proyeksiyalovchi tekislik hosil bo'ladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik P bilan A_pB_p kesma bo'yicha kesishadi.

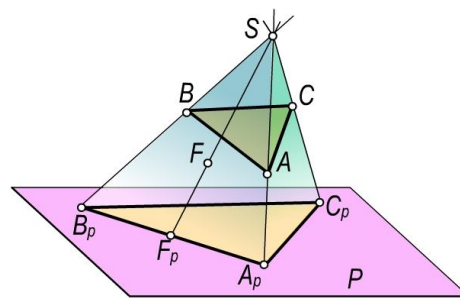
Proyeksiyalash markazi S dan o'tuvchi to'g'ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi. (1.4-rasm).

ABS uchburchak tekisligining nuqtalar to'plamini S markaz bo'yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalanganda (1.5-rasm) SABS proyeksiyalovchi piramida xosil bo'ladi. Bu piramidaning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishuvidan $A_pB_pS_p$ uchburchak hosil bo'ladi.

S markazdan o'tuvchi tekislik va unga tegishli geometrik shakllarning markaziy proyeksiyalari bitta to'g'ri chiziqqa proyeksiyalanadi. Masalan, SAB tekisligi va unga tegishli F nuqtaning proyeksiyasi $A_pF_pB_p$ kesmada bo'ladi (1.5-shakl).



1.4-rasm.



1.5-rasm

1.2-§. Parallel proyeksiyalash usuli

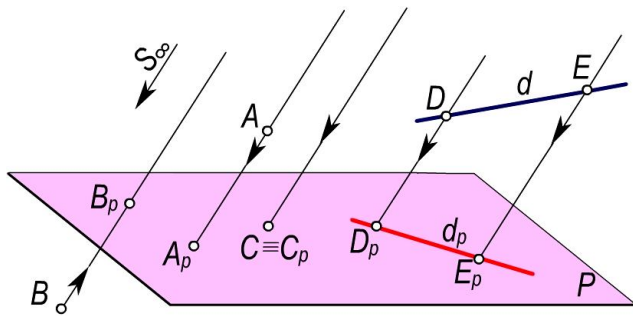
Markaziy proyeksiyalashdagi S markazni biror yo'nalish bo'yicha cheksiz uzoqlashtirilsa, u holda $SA, SB, \dots$ proyeksiyalovchi nurlar o'zaro parallel bo'ladilar (1.6-rasm). Bunday proyeksiyalash parallel proyeksiyalash deb yuritiladi. Demak, parallel proyeksiyalashni markaziy proyeksiyalashning xususiy holi deb qarash mumkin.

Parallel proyeksiyalashda proyeksiyalar tekisligi P va proyeksiyalash yo'nalishi beriladi. P va S sistemasida fazodagi biror A nuqta berilgan bo'lsin (1.6-rasm). Bu nuqtaning proyeksiyasini yasash uchun A nuqtadan s yo'nalishga parallel qilib nur o'tkaziladi. Bu nurning proyeksiyalar tekisligi P bilan kesishgan nuqtasi A_p bo'ladi. A_p nuqtani fazodagi A nuqtaning s yo'nalish bo'yicha P dagi parallel proyeksiyasi deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligining ostida joylashgan fazodagi ixtiyoriy biror B nuqtaning s yo'nalish bo'yicha parallel proyeksiyasi B_p bo'ladi. Bunda B va A nuqtalarning proyeksiyalovchi nurlari o'zaro parallel bo'lib, faqat ularning yo'nalishlari qarama-qarshidir. AA_p, BB_p to'g'ri chiziqlar proyeksiyalovchi nurlar deb yuritiladi. Proyeksiyalar tekisligi P ga tegishli S nuqtaning proyeksiyasi shu nuqtaning o'zida bo'ladi. Fazodagi ixtiyoriy d to'g'ri chiziqni proyeksiyalar tekisligi P ga s yo'nalish bo'yicha proyeksiyalash uchun shu to'g'ri chiziq ustidagi istalgan ikki D va E nuqtalar proyeksiyalari yasalsa kifoyadir (1.6-rasm). Bunda d to'g'ri chiziq nuqtalari orqali o'tuvchi parallel nurlar to'plami proyeksiyalovchi tekislikni hosil qiladi.

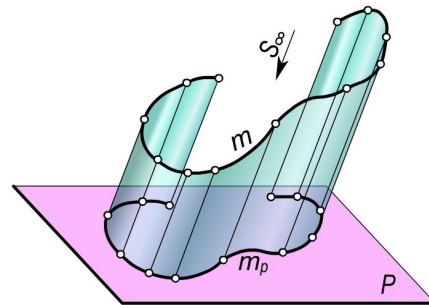
Parallel proyeksiyalashda s proyeksiyalash yo'nalishning berilishi shartdir. Chunki s proyeksiyalash yo'nalishi berilmagan holda ixtiyoriy A nuqtaning P proyeksiyalar tekisligidagi proyeksiyasini cheksiz ko'p hosil qilish mumkin.

Buyumning birgina parallel proyeksiyasi uning fazodagi ko'rinishi va uning o'lchamlari haqida to'liq ma'lumot bera olmaydi. Buning uchun qo'shimcha shartlar berilishi lozim.

Parallel proyeksiyalashni silindrik proyeksiyalash deb ham yuritiladi. Masalan, biror m egri chiziq berilgan bo'lsin (1.7-rasm). Bu egri chiziq nuqtalaridan o'tuvchi s proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lgan proyeksiyalovchi nurlar to'plami silindrik sirt hosil qiladi. Bu silindrik sirt proyeksiyalar tekisligi R bilan kesishib, m_p egri chiziqni hosil qiladi.



1.6-rasm .



1.7-rasm.

Parallel proyeksiyalash ikki xil bo'ladi:

- Qiyshiq burchakli parallel proyeksiyalash. Bunda S proyeksiyalash yo'nalishi P proyeksiyalar tekisligi bilan o'tkir burchak tashkil qiladi.
- To'g'ri burchakli parallel proyeksiyalash. Bunda proyeksiyalash yo'nalishi S proyeksiyalar tekisligi P ga perpendikulyar bo'ladi.

Parallel proyeksiyalashning xossalari

Geometrik shakllarni parallel proyeksiyalashning quyidagi xossalari mavjud.

1-xossa. Nuqtaning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi.

2-xossa. Proyeksiyalovchi nurda yotuvchi barcha nuqtalarning proyeksiyalari bitta nuqtada bo'ladi.

3-xossa. Proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lmagan to'g'ri chiziqning proyeksiyasi to'g'ri chiziq bo'ladi. 1.8-rasmda s proyeksiya yo'nalishiga parallel bo'lmagan AB to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligi P ga parallel proyeksiyalangan. Bunda AB kesma nuqtalaridan o'tuvchi nurlar proyeksiyalovchi Q tekislikni hosil qiladi. Bu proyeksiyalovchi tekislik bilan P proyeksiyalar tekisligi A_pB_p kesma bo'yicha kesishadi.

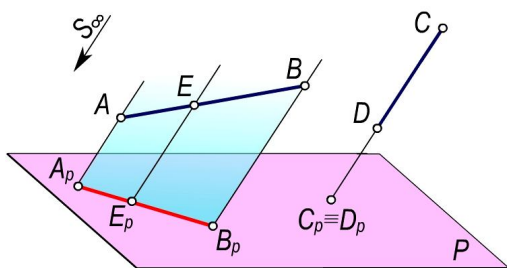
Proyeksiyalash yo'nalishiga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi. 1.8-rasmda CD to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiya yo'nalishi s ga parallel. Uning P dagi proyeksiyasi $S_p \equiv D_p$ nuqta bo'ladi.

4-xossa. AB to'g'ri chizig' kesmasiga tegishli E nuqtaning parallel proyeksiyasi E_p shu to'g'ri chiziq kesmasi A_pB_p ning ustida bo'ladi (1.8-rasm).

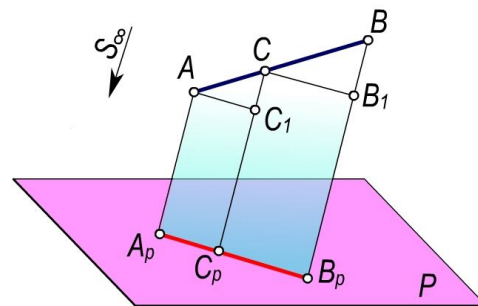
5-xossa. Agar nuqta to'g'ri chiziq kesmasini biror nisbatda bo'lsa, bu nuqtaning proyeksiyasi ham kesma proyeksiyasini shunday nisbatda bo'ladi.

Biror S nuqta AB kesmani $AC:CB$ nisbatda bo'lsa, unda C_p nuqta A_pB_p kesmani ham $A_pC_p:C_pB_p$ nisbatda bo'ladi (1.9-rasm).

AB to'g'ri chiziq kesmasini s yo'nalish bo'yicha proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Bunda proyeksiyalovchi tekislik bilan proyeksiyalar tekisligi P kesishib, A_pB_p kesmani hosil qiladi. Unda 4-xossaga asosan $C \in AB$ bo'lgani uchun $S_p \in A_pB_p$ bo'ladi.



1.8-rasm.



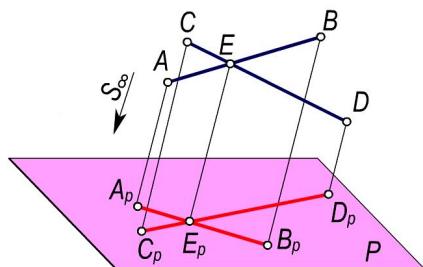
1.9-rasm

AB kesmaning proyeksiyalovchi tekislikdagi A va C nuqtalaridan $AC_1 \equiv A_pB_p$ va $CB_1 \equiv A_pB_p$ kesmalarni o'tkazamiz. Unda hosil bo'lgan ACC_1 va SBB_1 uchburchaklar o'zaro o'xshash bo'ladilar. Bu uchburchaklarning o'xshashligidan $AC:AC_1=CB:CB_1$ yoki $AC:CB=AC_1:SB_1$ bo'ladi. $AC_1=A_pC_p$ va $CB_1=C_pB_p$ bo'lgani uchun $AC:CB=A_pC_p:C_pB_p=r:q$ bo'ladi.

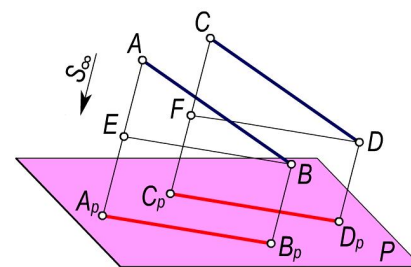
6-xossa. To'g'ri chiziqlarning kesishuv nuqtasining proyeksiyasi ularning proyeksiyalarining kesishish nuqtasida bo'ladi. Ya'ni $AB \cap CD = E$ bo'lsa, $A_pB_p \cap C_pD_p = E_p$ bo'ladi (1.10-rasm).

7-xossa. Parallel to'g'ri chiziqlarning tekislikdagi proyeksiyalari ham parallel bo'ladi. Agar $AB \parallel CD$ bo'lsa, $A_pB_p \parallel C_pD_p$ bo'ladi. 1.11-rasmda s yo'nalish bo'yicha AB va CD to'g'ri chiziq kesmalarining proyeksiyalar tekisligidagi A_pB_p va C_pD_p proyeksiyalari yasalgan.

8-xossa. Parallel to'g'ri chiziq kesmalarining nisbati bu kesmalar proyeksiyalarining nisbatiga teng bo'ladi. Ya'ni $AB \parallel CD$ bo'lib, $AB:CD=q$ bo'lsa, $A_pB_p:C_pD_p=q$ bo'ladi (1.11-rasm).



1.10-rasm



1.11-rasm

Parallel proyeksiyalashning yuqorida keltirilgan xossalaridan chizma geometriya kursining hamma boblarida keng foydalaniladi.

1.3-§. To'g'ri burchakli proyeksiyalash

Ta'rif. Proyeksiyalovchi nur proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lsa, bunday parallel proyeksiyalashni **to'g'ri burchakli proyeksiyalash** deyiladi.

To'g'ri burchakli proyeksiyalashni **ortogonal proyeksiyalash** deb ham yuritiladi.

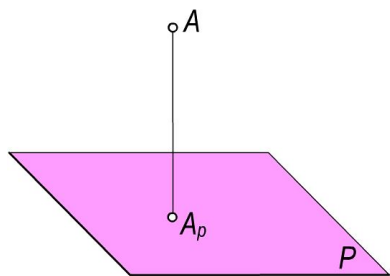
Ortogonal proyeksiyalashda proyeksiyalovchi nur yo'nalishi ko'rsatilmaydi. Masalan, A nuqtani P tekislikka ortogonal proyeksiyalash uchun A nuqtadan (1.12-

rasm) perpendikulyar tushiriladi. Bu perpendikulyarning R tekislikdagi asosi A_p nuqta fazodagi A nuqtaning ortogonal proyeksiyasi bo'ladi.

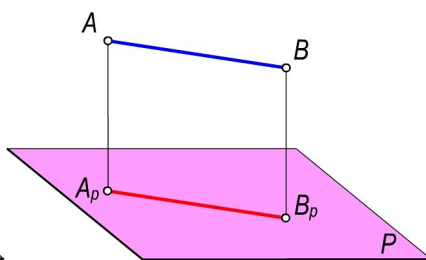
Geometrik shakllar proyeksiyalar tekisligiga qisqarib proyeksiyalanadi. Masalan, ortogonal proyeksiyalashda to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyasi o'zidan kichik yoki teng bo'ladi:

a) Agar to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, uning proyeksiyasining uzunligi kesmaning fazodagi uzunligiga teng bo'ladi (1.13-rasm).

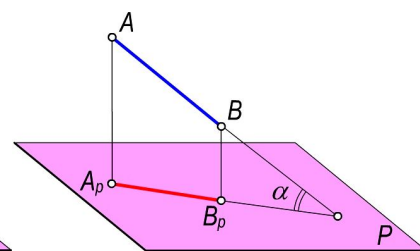
b) Agar to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lmasa, uning proyeksiyasining uzunligi o'zidan kichik bo'ladi, ya'ni $A_pB_p < AB$ bo'ladi. (1.14-rasm).



1.12-rasm



1.13-rasm



1.14-rasm

1.3-§ da keltirilgan parallel proyeksiyalarning barcha xossalari ortogonal proyeksiyalar uchun ham o'rinalidir.

Ortogonal proyeksiyalashda biror shaklni barcha nuqtalaridan o'tuvchi nurlar o'zaro parallel bo'lib, ular berilgan geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalaydi. Buyumning bitta ortogonal proyeksiyasi bilan uning fazodagi vaziyatini aniqlab bo'lmaydi. Buning uchun biror qo'shimcha shart kiritish zarur. Bunday qo'shimcha shart sifatida birinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan ikkinchi tekislikka buyumning tasvirini olish mumkin. Bu ikki proyeksiyalar tekisligidagi tasvirlar buyumning fazodagi vaziyatini aniqlaydi.

Ortogonal proyeksiyalash usuli texnik chizmalarni chizishda, inshootlarni loyihalashda eng ko'p qo'llaniladi.

Nazorat savollari

1. Nuqtaning markaziy proyeksiyasi qanday yasaladi?
2. Qanday holda to'g'ri chiziqning markaziy proyeksiyasi nuqta bo'ladi?
3. Parallel proyeksiyalash usuli qanday bajariladi?
4. To'g'ri chiziqning parallel proyeksiyasi qanday yasaladi?
5. «Monj usuli» qanday usul?
6. Qanday holda to'g'ri chiziqning parallel proyeksiyasi nuqta bo'ladi?
7. «Ortogonal» so'zi nimani anglatadi?

Nuqta to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lsa, uning va to'g'ri chizig'ning proyeksiyasi qanday joylashgan bo'ladi?

2-ma'ruza - 2 soat.
Nuqta. To'g'ri chiziq va tekislik.

Ikki tasvirlash usuli.

To'g'ri burchakli (ortogonal) proyeksiyalash usuli.

G. Monj chizmasi.

Nuqtaning koordinatalar tekisliklardagi chizmalari.

Tayanch iboralar va tushunchalar.

Proyeksiyalash markazi, ortogonal proyeksiyalash, koordinatalar tekislik, frontal proyeksiyalar tekisligi, gorizontal proyeksiyalar tekisligi, proyeksiyalar o'qi, kompleks chizma.

2.1– §. Nuqtaning ikki tekislikdagi proyeksiyalari

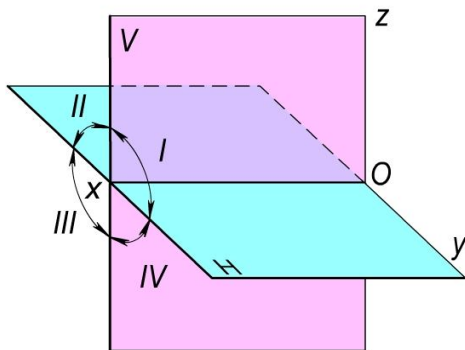
O'zaro perpendikulyar bo'lgan ikki tekislik bir–biri bilan kesishib fazoni to'rt qismga – kvadrantlarga (choraklarga) bo'ladi. Fazoda gorizontal vaziyatda joylashgan rgjr

(2.1–rasm) **H** tekislik *gorizontal proyeksiyalar tekisligi*, vertikal joylashgan **V** tekislik *frontal proyeksiyalari tekisligi* deb ataladi. **H** va **V** proyeksiyalar tekisliklari o'zaro kesishgan **Ox** chizig'i proyeksiyalar o'qi deyiladi.

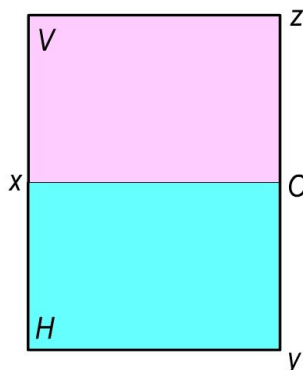
Proyeksiyalar tekisliklari sistemasining bunday fazoviy modelida turli geometrik shakllar, shuningdek, detallar, mashina va inshootlarni joylashtirib, so'ngra ularning chizmalarini yasash katta noqulayliklar tug'diradi va zaruriyati ham bo'lmaydi.

Konstruktorlik hujjatlarini bajarishda bu tekisliklarning bir tekislikka joylashtirilgan (jipslashtirilgan) tekis tasvirlaridan foydalaniladi. Shu maqsadda **H** gorizontal proyeksiyalar tekisligini **Ox** proyeksiyalar o'qi atrofida aylantirib, **V** tekislik bilan ustma–ust tushirib jipslashtiriladi (2.2–rasm). Natijada, **H** va **V** tekisliklarda bajarilgan barcha yasashlar asosiy chizma tekisligi sifatida qabul qilingan **V** frontal proyeksiyalar tekisligiga joylashtiriladi. Bunda nuqta yoki geometrik shaklning bitta tekislikda joylashtirilgan ikki – gorizontal va frontal tasvirlari – Monj chizmasi (yoki *kompleks chizma*) hosil qilinadi.

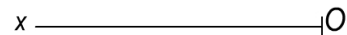
Amalda geometrik shakllarning to'g'ri burchakli proyeksiyalarini yasashda asosan proyeksiyalar o'qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarining konturini tasvirlash shart emas (2.3–rasm).



2.1-rasm



2.2-rasm



2.3-rasm

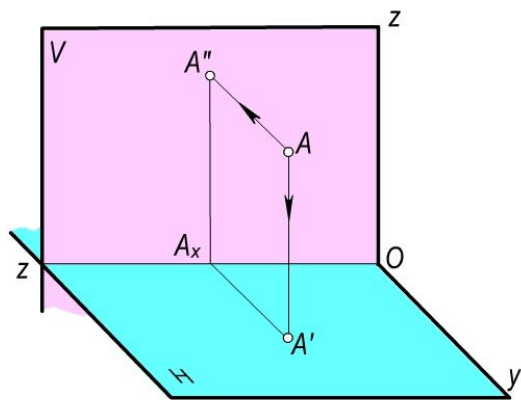
Nuqta yoki geometrik shakl fazoning turli choraklarida joylashuvi mumkin. Quyida I–IV choraklarda joylashgan nuqtalarini ko'rib chiqamiz.

Birinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi

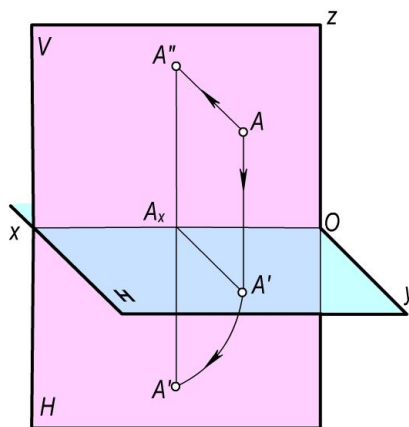
A nuqtaning (2.4–rasm) H va V tekisliklardagi proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan mazkur tekisliklarga perpendikulyar o'tkazamiz va ularning bu tekisliklar bilan kesishish nuqtalarini aniqlaymiz. Faraz qilaylik, A nuqtadan H tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A' bo'lsin. A nuqtadan V tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi A'' ni aniqlash uchun A' dan Ox o'qiga perpendikulyar o'tkazamiz va A_x nuqtani aniqlaymiz. V tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan Ox o'qidagi A_x nuqtadan ko'tarilgan vertikal bilan kesishtirib A'' nuqtasini topamiz.

A nuqtadan H va V tekisliklarga o'tkazilgan perpendikulyarlarning A' va A'' asoslari A nuqtaning *to'g'ri burchakli proyeksiyalari* deyiladi. Bu yerda A' – A nuqtaning *gorizontal proyeksiyasi*, A'' – uning *frontal proyeksiyasi* deb ataladi. Shakldagi AA' va AA'' chiziqlar *proyeksiyalovchi nurlar* yoki *proyeksiyalovchi chiziqlar* deyiladi.

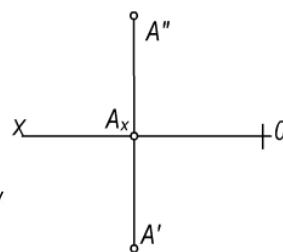
A nuqtaning chizmasini tuzish uchun tekisliklarning fazoviy modelini yuqorida qayd qilingan qoidaga muvofiq V tekislikka jipslashtiramiz (2.5–rasm). Bunda A nuqtaning A'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Gorizontal A' proyeksiyasi H tekislik bilan Ox o'qi atrofida pastga 90° ga buriladi va V tekislikning davomida jipslashadi. Natijada, A nuqtaning A' gorizontal hamda A'' frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda joylashadi (2.6–rasm).



2.4-rasm



2.5-rasm



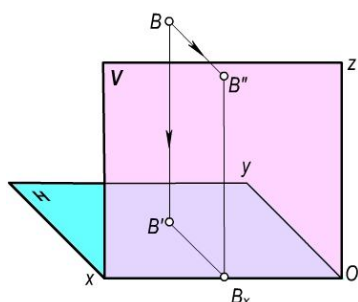
2.6-rasm

Demak, *I chorakda joylashgan har qanday nuqtaning gorizontal proyeksiyasi Ox o'qining ostida, frontal proyeksiyasi uning yuqorisida, Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda joylashadi.*

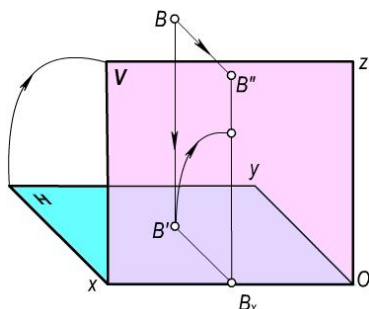
Ikkinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi

Fazoda berilgan B nuqtaning (2.7–rasm) proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H va V tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz, bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B' va B'' asoslari B nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. B nuqtaning chizmasini tuzish uchun H tekislikni 2.8–rasmda ko'rsatilganidek V tekislikka jipslashtiramiz. B

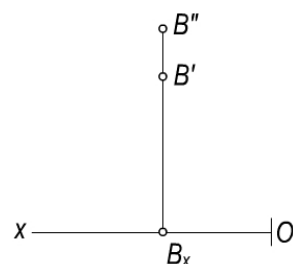
nuqtaning **B''** frontal proyeksiyasining vaziyati o'zgarmay qoladi. Uning **B'** gorizontaal proyeksiyasi esa **H** tekislik bilan **V** tekislikka jipslashadi va Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan, chiziqda bo'ladi (2.9–rasm).



2.7-rasm



2.8-rasm

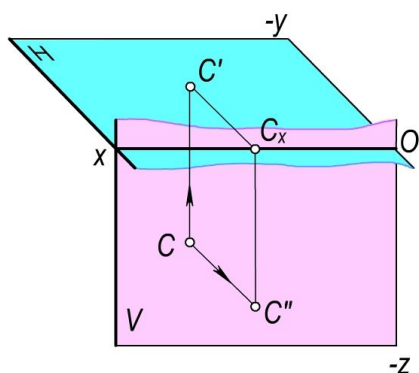


2.9-rasm

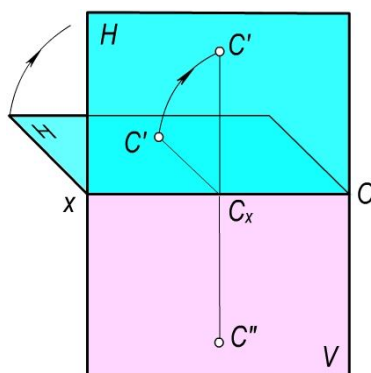
Demak, *II chorakda joylashgan har qanday nuqtaning gorizontaal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda va Ox o'qining yuqorisida joylashadi.*

Uchinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi

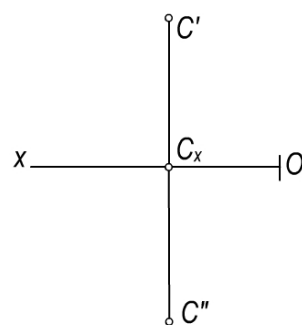
Fazodagi **C** nuqta III chorakda joylashgan (2.10–rasm). Bu nuqtaning gorizontaal va frontal proyeksiyalarini yasash uchun **H** va **V** tekisliklarga perpendikulyar tushiramiz. Bu perpendikulyarlarning **H** va **V** tekisliklardagi **C'** va **C''** asoslari **C** nuqtaning gorizontaal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. Nuqtaning epyurini yasash uchun **H** tekislikni qabul qilingan qoidaga muvofiq **V** tekislikning davomi bilan jipslashtiramiz (2.11–rasm). Bunda **H** tekislik yuqorida joylashadi. **C** nuqtaning **C''** frontal proyeksiyasi **V** tekislikda bo'lgani uchun vaziyati o'zgarmay qoladi, **C'** gorizontaal proyeksiyasi esa **H** tekislik bilan birga **V** tekislikka jipslashadi va 2.12–rasmida ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.



2.10-rasm



2.11-rasm



2.12-rasm

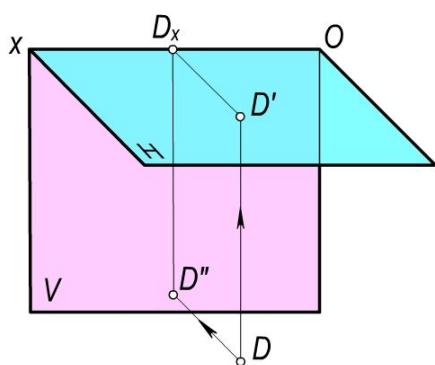
Demak, *III chorakda joylashgan har qanday nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi Ox o'qining yuqorisida, frontal proyeksiyasi esa uning ostida, Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda joylashadi.*

To'rtinchi chorakda joylashgan nuqtaning chizmasi

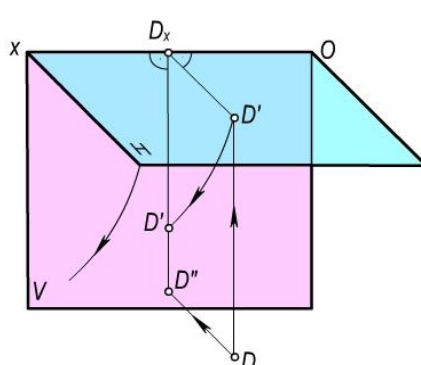
D nuqta fazoda IV chorakda joylashgan (2.13–rasm). Uning **H** va **V** tekisliklardagi proyeksiyalarini yasash uchun **D** nuqtadan bu tekisliklarga perpendikulyar o'tkazamiz.

Perpendikulyarlarning **H** va **V** tekisliklar bilan kesishgan **D'** va **D''** asoslari **D** nuqtaning gorizont va frontal proyeksiyalari bo'ladi.

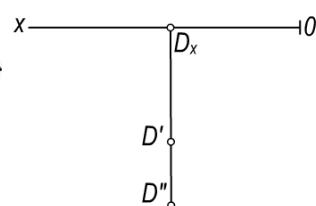
D nuqtaning epyurini tuzish uchun **H** tekislikni **Ox** o'qi atrofida pastga 90° ga aylantiramiz va **V** tekislik bilan jipslashtiramiz (2.14–rasm). **D** nuqtaning **D''** frontal proyeksiyasining vaziyati o'zgarmaydi. Gorizont **D'** proyeksiyasi esa **H** tekislik bilan harakatlanib, **Ox** o'qiga perpendikulyar bo'lgan, bog'lovchi chiziqda bo'ladi (2.15–rasm).



2.13-rasm



2.14-rasm



2.15-rasm

Shunday qilib, *IV chorakda joylashgan har qanday nuqtaning gorizont va frontal proyeksiyalari **Ox** o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda va **Ox** o'qining ostida bo'ladi.*

Bissektor tekisliklarda joylashgan nuqtalarning chizmalari

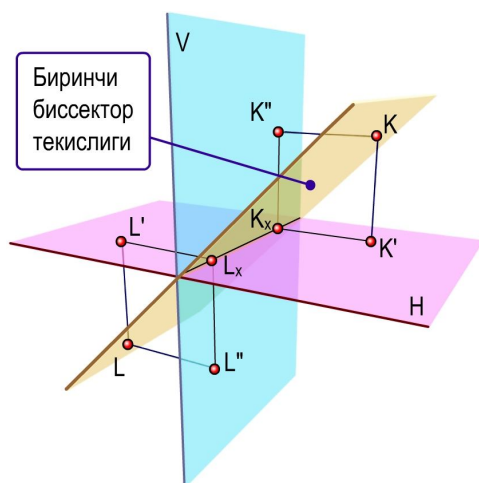
Fazoning birinchi va uchinchi choraklarini teng ikkiga bo'luvchi tekislik *birinchi bissektor tekisligi*, shuningdek, ikkinchi va to'rtinchi choraklarini teng ikkiga bo'luvchi tekislik *ikkinchi bissektor tekisligi* deb ataladi.

Agar fazodagi nuqtalar proyeksiyalar tekisliklaridan teng uzoqlikda joylashgan bo'lsa, bunday nuqtalar bissektor tekisliklarga tegishli nuqtalar bo'ladi. 2.16–rasmda birinchi bissektor tekislikda joylashgan **K** va **L** nuqtalarning, 2.17–rasmda esa ikkinchi bissektor tekislikda joylashgan **E** va **F** nuqtalarning fazodagi vaziyati va epyurlari ko'rsatilgan. Epyurda birinchi bissektor tekislikda joylashgan nuqtalarning proyeksiyalari (**K'**, **K''** va **L'**, **L''**) **Ox** o'qidan baravar uzoqlikda bo'ladi (2.18–rasm). Ikkinchi bissektor tekislikda joylashgan **E** va **F** nuqtalarning proyeksiyalari (**E'**, **E''** va **F'**, **F''**) epyurda ustma–ust tushadi (2.19–rasm).

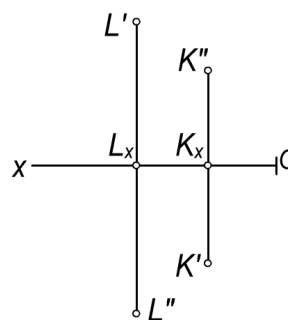
Proyeksiyalar tekisligida va koordinatlar o'qida joylashgan nuqtalarning chizmalari

Fazoda nuqta proyeksiyalar tekisligida yoki proyeksiyalar o'qida joylashishi mumkin. Masalan, $A \in H$ bo'lsin (2.20–rasm). Bu nuqtaning **A'** gorizont proyeksiyasi **A** nuqtaning o'ziga ($A \equiv A'$), frontal proyeksiyasi esa **Ox** o'qiga proyeksiyalanadi (2.21–rasm). Shuningdek, nuqta **Ox** proyeksiyalar o'qida ham

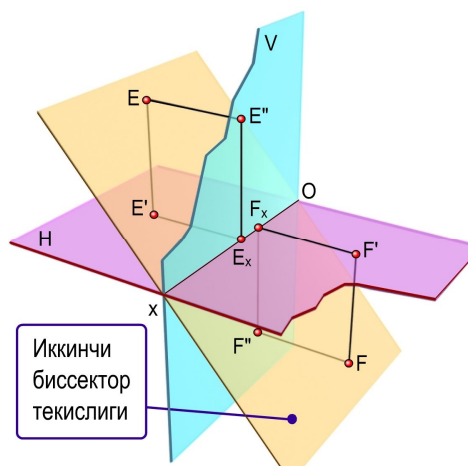
joylashgan masalan, $B \in Ox$ bo'lsa, bu nuqtaning B' gorizont va B'' frontal proyeksiyalari shu B nuqtaning o'ziga proyeksiylanadi ($B' \equiv B'' \equiv B$).



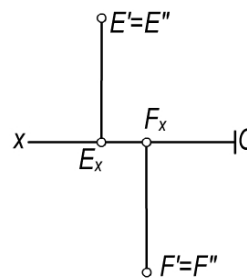
2.16-rasm



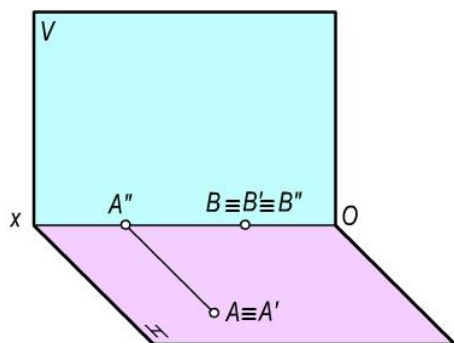
2.17-rasm



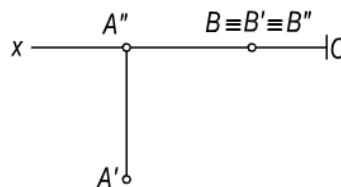
2.18-rasm



2.19-rasm



2.20-rasm



2.21-rasm

Turli choraklarda joylashgan nuqtalarni H va V proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va ularning chizmalarini tuzishdan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

- Nuqtaning fazodagi vaziyatini uning ikki ortogonal proyeksiyasi to'la aniqlaydi.

- Har qanday nuqtaning gorizontal va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda joylashadi.
- Fazodagi har qanday nuqtaning H va V proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqliklarini nuqta gorizontal va frontal proyeksiyalarining Ox o'qigacha bo'lgan masofalari aniqlaydi.

2.2–§. Nuqtaning uchta tekislikdagi ortogonal proyeksiyalari

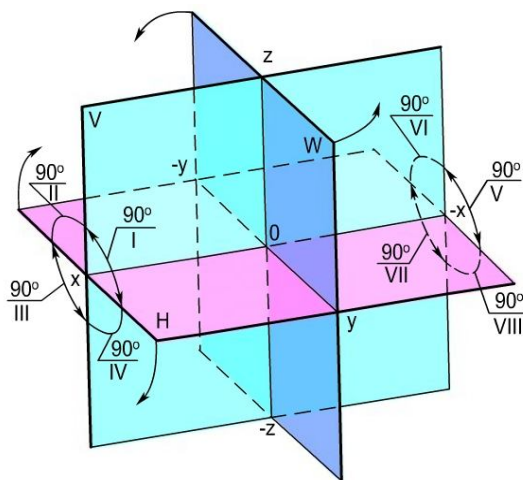
O'zaro perpendikulyar bo'lgan uchta proyeksiyalar tekisligi kesishib, fazoni 8 qismga – oktantlarga bo'ladi (2.22–rasm). Ma'lumki, H tekislik – gorizontal proeksiyalar tekisligi, V – frontal proyeksiyalar tekisligi deyiladi. Tasvirdagi W tekislik *profil proyeksiyalar tekisligi* deb ataladi.

Tekisliklarning o'zaro kesishishi natijasida hosil bo'lgan to'g'ri chiziqlar proyeksiyalar yoki koordinata o'qlari deyiladi va Ox , Oy , Oz harflari bilan belgilanadi. Proyeksiyalar o'qlarini tashkil qiluvchi Ox – *abssissalar o'qi*, Oy – *ordinatalar o'qi* va Oz – *applikatalar o'qi* deb ataladi.

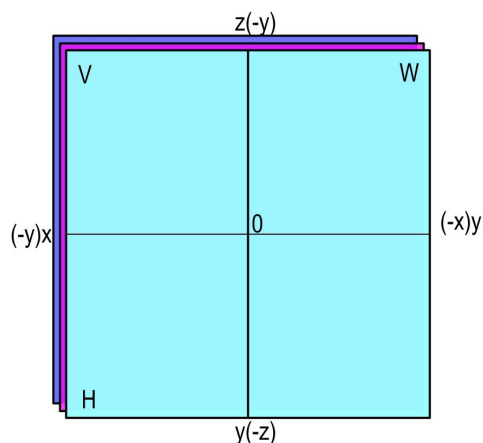
Uchta proyeksiyalar tekisligining o'zaro kesishish nuqtasi O koordinatlar boshi deyiladi.

Bu sistemada musbat miqdor Ox o'qiga (2.22–rasm) koordinatlar boshi O dan chapga, Oy o'qiga kuzatuvchi tomonga va Oz o'qiga yuqoriga qaratib qo'yiladi. Bu o'qlarning qarama–qarshi tomonlari manfiy miqdor yo'nalishi bo'lib hisoblanadi.

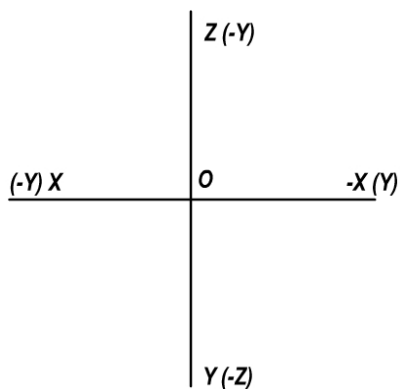
Proyeksiyalar tekisliklarida geometrik shakllarning ortogonal proyeksiyalarini yasashni osonlashtirish uchun, odatda, bu tekisliklarning bir tekislikka jipslashtirilgan tekis tasviridan foydalaniladi. Shu maqsadda H tekislikni Ox o'qi atrofida pastga va W tekislikni Oz o'qi atrofida o'ngga (ko'rsatkichlar bo'yicha) aylantirib, V tekislikka jipslashtiriladi (2.23–rasm). H va W proyeksiyalar tekisliklari frontal proyeksiyalar tekisligi V ga jipslashtirilganda Ox va Oz proyeksiyalar o'qlarining vaziyati o'zgarmay qoladi (2.24–rasm). H tekislik V tekislikka jipslashtirilganda Oy o'qining musbat yo'nalishi Oz o'qining manfiy yo'nalishi bilan, Oy o'qining manfiy yo'nalishi esa Oz o'qining musbat yo'nalishi ustma–ust tushadi. Shuningdek, profil proyeksiyalar tekisligi W frontal proyeksiyalar tekisligi V bilan jipslashtirilganda Oy o'qining musbat yo'nalishi Ox o'qining manfiy yo'nalishi bilan, uning manfiy yo'nalishi Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan ustma–ust joylashadi.



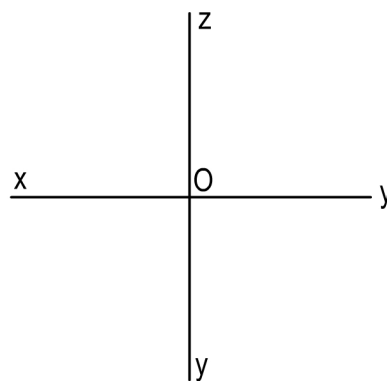
2.22–rasm.



2.23–rasm



2.24-rasm



2.25-rasm

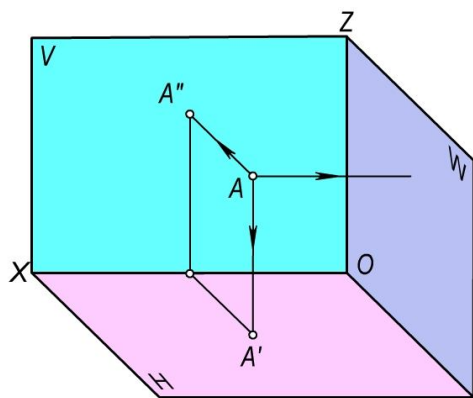
Geometrik shaklning ortogonal proyeksiyalari tuzilganda asosan proyeksiyalar tekisliklari sistemasining koordinatalar o'qlaridan foydalaniladi. Shuning uchun chizmada proyeksiyalar tekisliklarini tasvirlash shart emas (2.25–rasm). Shuningdek, tasvirni soddalashtirish uchun koordinata o'qlarining manfiy yo'nalishlarini epyurda ko'rsatilmaydi. Ammo proyeksiyalar tekisliklarining joylashuvi va koordinata o'qlarining manfiy yo'nalishlari o'quvchi yodida qolishi lozim.

Amaliyotda nuqta va geometrik figuralarning fazoviy vaziyati va ularning ortogonal proyeksiyalariga oid masalalarni asosan I–IV oktantlarda yechish bilan chegaralaniladi. Nuqtaning proyeksiyalari, uning fazoni qaysi oktantida joylashuviga qarab, proyeksiyalar o'qlariga nisbatan turlicha joylashadi. Quyida I–IV oktantlarda joylashgan nuqtalarning ortogonal proyeksiyalarini ko'rib chiqamiz.

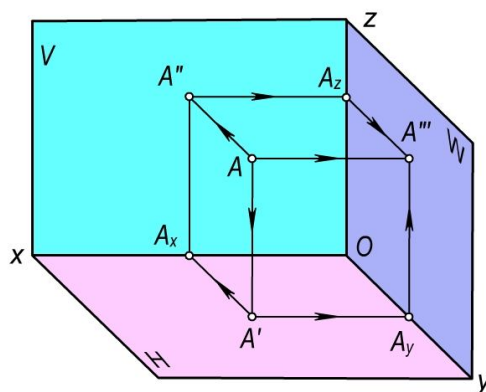
Birinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi

Fazoda I oktantda joylashgan **A** nuqta va o'zaro perpendikulyar **H**, **V** va **W** proyeksiyalar tekisliklari sistemasi berilgan (2.26,a–rasm). **A** nuqtaning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz.

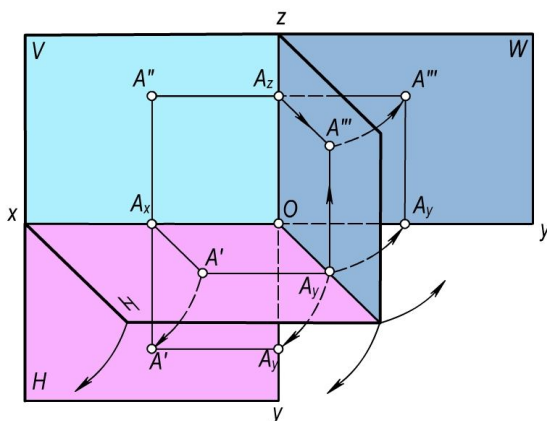
Faraz qilaylik, **A** nuqtadan **H** tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi **A'** bo'lsin. Mazkur nuqtadan **V** tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini aniqlash uchun **A'** dan **Ox** ga perpendikulyar o'tkazamiz va bu o'qda **A_x** ni topamiz. So'ngra **A_x** dan **Ox** ga perpendikulyar qilib o'tkazilgan chiziqlarning **A** nuqtadan **V** tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan **A''** nuqtasini topamiz.



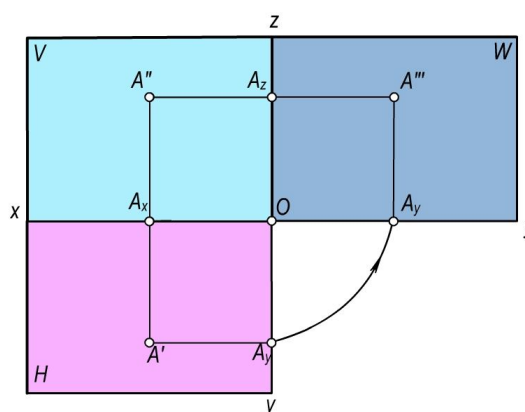
a)



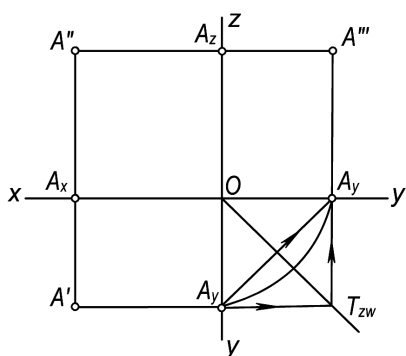
b)



v)



g)



d)

2.26-rasm

A nuqtadan **W** tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosini (2.26,b–rasm) aniqlash uchun **A'** dan **Oy** o'qiga perpendikulyarning asosidan perpendikulyar qilib o'tkazilgan chiziqning **A** nuqtadan **W** ga tushirilgan perpendikulyar bilan kesishgan **A'''** nuqtasini topamiz. **A** nuqtadan **W** tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi **A'''** ni **A''** dan **Oz** o'qigacha o'tkazilgan perpendikulyar

orqali ham aniqlash mumkin.

A nuqtadan **H**, **V** va **W** tekisliklariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning asoslari **A'**, **A'''** va **A''** nuqtaning ortogonal proyeksiyalari deyiladi. Bunda **A'**– nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi, **A''**– frontal proyeksiyasi va **A'''** – profil proyeksiyasi deyiladi. **A** nuqtaning chizmasini tuzish uchun **H** va **W** proyeksiyalar tekisliklarini (yuqorida qayd qilingan qoidaga muvofiq) **V** tekislikka jipslashtiramiz (2.26,v–rasm). **A** nuqtaning **A''** frontal proyeksiyasi **V** tekislikka tegishli bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Gorizontaal **A'** va profil **A'''** proyeksiyalari **H** va **W** tekisliklariga tegishli bo'lgani uchun bu tekisliklar bilan **Ox** va **Oz** o'qlar atrofida 90° ga buriladi va 2.26,v,g–rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.

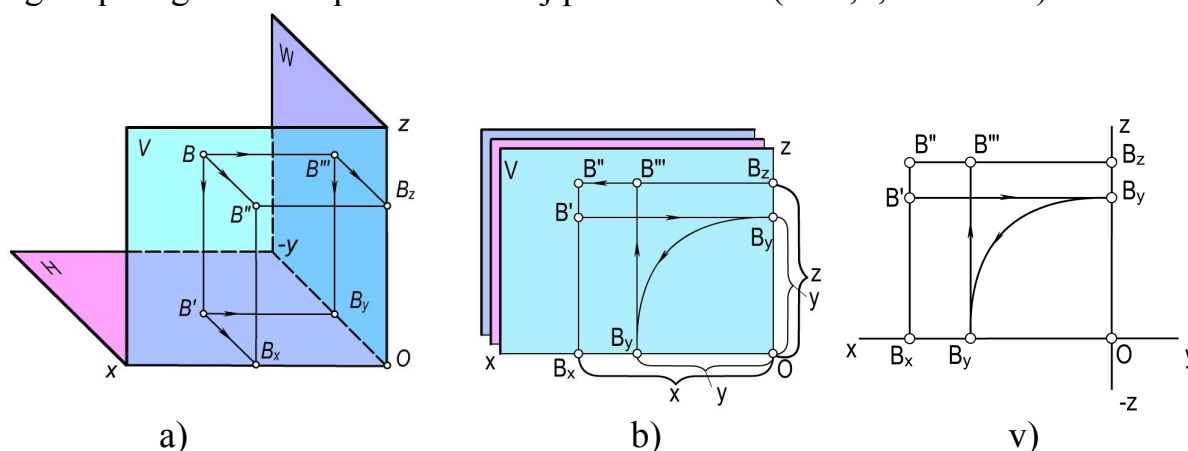
Shuningdek, 2.26–rasmdan $A_x A' = O A_y = A_z A''$ ekanligini aniqlash mumkin. Demak, chizmada **A** nuqtaning **A'** gorizontaal hamda **A'''** profil proyeksiyalari orasidagi proyeksion bog'lanish chizig'i, markazi **O** nuqtada bo'lgan va radiusi $O A_u$

ga teng bo'lgan yoy yoki A_u nuqtadan 45° da o'tkazilgan chiziq yordamida hosil qilinadi. Shuningdek, A' va A''' proyeksiyalar orasidagi proyeksion bog'lanishni chizmaning doimiy chizig'i $y \equiv y$ burchak bissektrisasi T_{zw} chiziq orqali ham hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, 2.26,d-rasmda hosil bo'lgan chizma A nuqtaning fazoviy vaziyati to'g'risida batafsil ma'lumot beradi.

Ikkinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi

Fazoning II oktantida joylashgan ixtiyoriy V nuqtaning proyeksiyalarini yasash uchun bu nuqtadan H , V va W proyeksiyalar tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz (2.27,a-rasm). Bu perpendikulyarlarning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan B' , B va B''' asoslari B nuqtaning gorizontal, frontal va profil proyeksiyalari bo'ladi. B nuqtaning epyurini tuzish uchun H va W tekisliklarni qabul qilingan qoidaga muvofiq V tekislikka jipslashtiramiz (2.27,b,v-rasmlar).

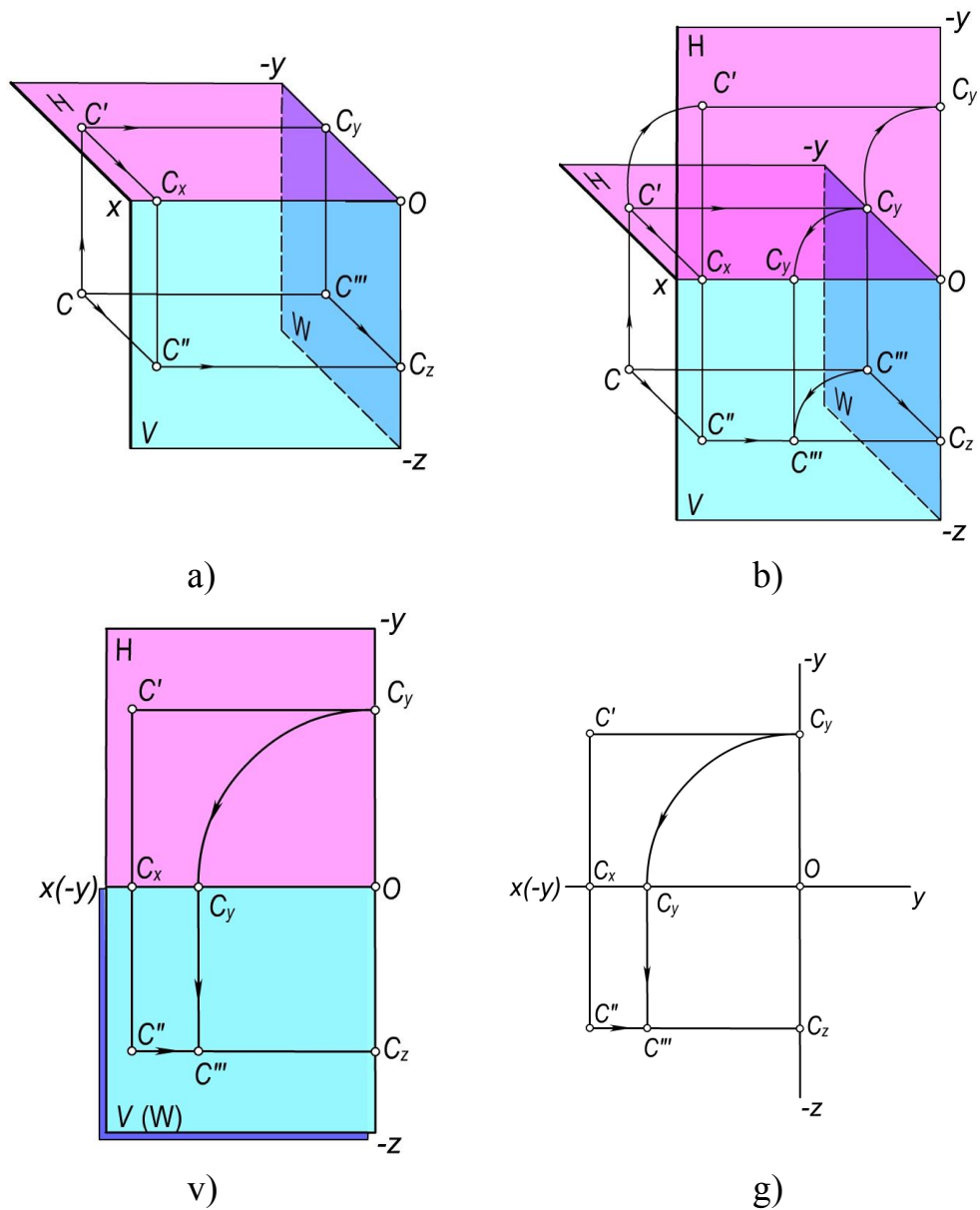


2.27-rasm.

B nuqtaning B'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi. Bu nuqtaning B' gorizontal va B''' profil proyeksiyalari H va W tekisliklariga tegishli bo'lgani uchun Ox va Oz o'qlari atrofida 90° ga harakatlanib, 2.27,g-rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.

Uchinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi

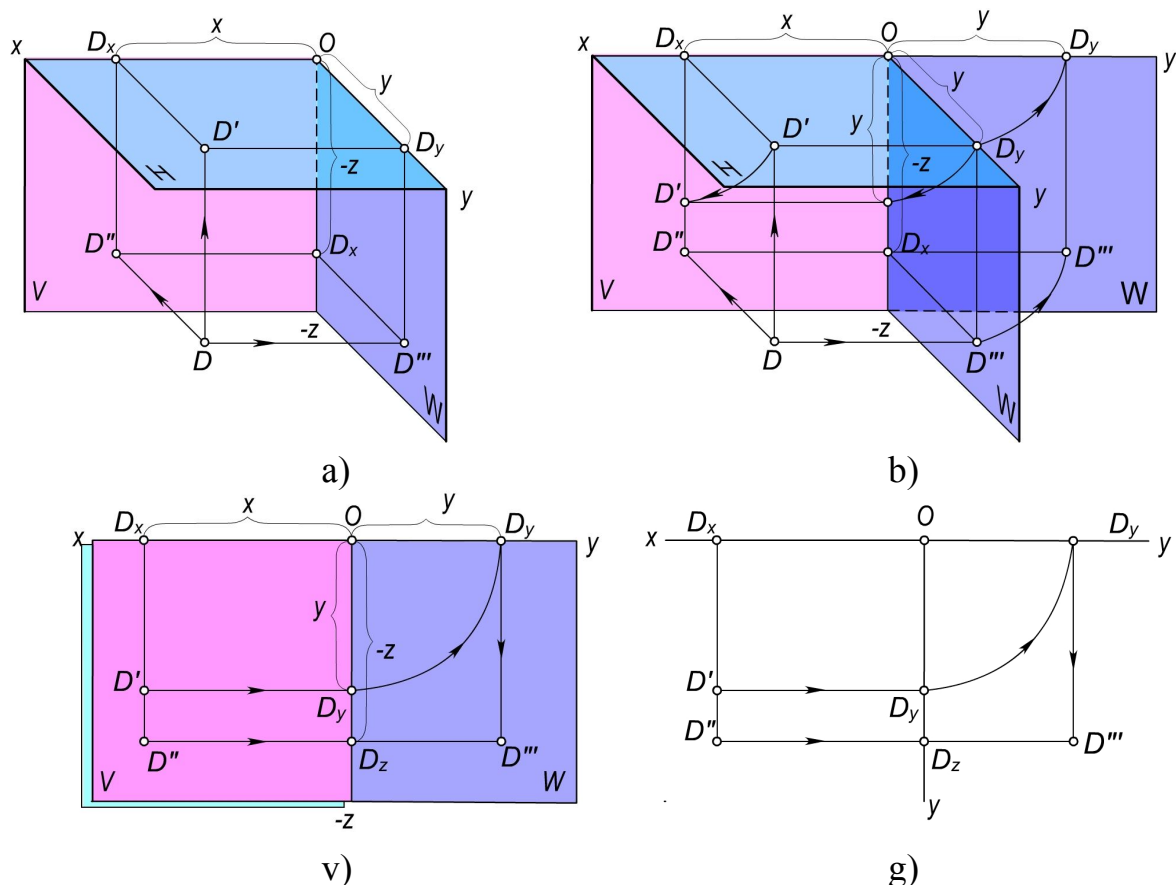
Fazoda berilgan C nuqta III oktantda joylashgan (2.28-rasm). Bu nuqtaning H , V va W tekisliklardagi proyeksiyalari C' , C'' va C''' bo'ladi. Nuqtaning epyurini yasash uchun H va W proyeksiyalar tekisliklarini V tekislik bilan jipslashtiramiz. Bunda H tekislik 90° yuqoriga, W tekislik esa Oz o'qi atrofida 90° ga soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda harakatlantirilib, V tekislikka jipslashtiriladi (2.28,b,v-rasmlar). C nuqtaning C'' frontal proyeksiyasi V tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmaydi. Gorizontal C' va profil C''' proyeksiyalari Ox va Oz o'qlari atrofida harakatlanib, 2.28,g-rasmda ko'rsatilgan vaziyatni egallaydi.



2.28–rasm.

To'rtinchi oktantda joylashgan nuqtaning chizmasi

D nuqta fazoda IV oktantda joylashgan (2.29,a–rasm). Mazkur nuqtaning **H**, **V** va **W** tekisliklardagi proyeksiyalari **D'**, **D''** va **D'''** bo'ladi. Nuqtaning epyurini yasash uchun **H** va **W** tekisliklarini **V** tekislik bilan jipslashtiramiz (2.29,b–rasm). **H** tekislik **Ox** o'qi atrofida 90° yuqoriga ko'tarilganda **V** tekislik bilan jipslashadi, **W** tekislik **Oz** o'qi atrofida 90° ga soat strelkasi yo'nalishiga teskari yo'nalishda harakatlantirib, **V** tekislik vaziyatiga keladi. **D** nuqtaning **D''** frontal proyeksiyasi **V** tekislikda bo'lgani uchun uning vaziyati o'zgarmay qoladi, uning **D** gorizont va **D'''** profil proyeksiyalari **Ox** va **Oz** o'qlari bo'yicha harakatlanib, 2.29,v–rasmda tasvirlangan vaziyatni egallaydi. IV oktantda joylashgan **D** nuqta proyeksiyalarining koordinata o'qlari sistemasiga nisbatan joylashuvi 2.29,g–rasmda tasvirlangan.



2.29–rasm.

Proyeksiyalar tekisligida va koordinata o'qida joylashgan nuqtalarning chizmalari

Nuqta proyeksiyalar tekisligida joylashuvi mumkin. Masalan, **E** nuqta **H** tekislikka tegishli bo'lsin (2.30,a–rasm). Bu nuqtaning bir proyeksiyasi mazkur nuqtada ($E' \equiv E$), ikkita proyeksiyasi esa proyeksiyalar o'qlariga proyeksiyalanadi (2.30–rasm, a, b)

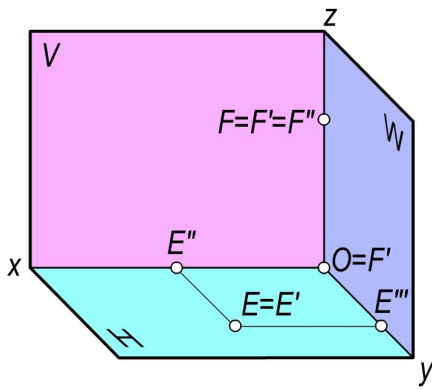
Shuningdek, nuqta koordinata o'qlarining birida joylashuvi mumkin. Masalan, **F** nuqta **Oz** koordinatlar o'qida joylashgan bo'lsa (2.30,a–rasm), chizmada uning frontal va profil proyeksiyalari shu nuqtaning o'zida, gorizontaal proyeksiyasi esa koordinata boshida bo'ladi (2.30,a,b–rasmlar)

Nuqtani **H**, **V** va **W** proyeksiyalar tekisliklariga proyeksiyalash va uning chizmasini tuzishdan quyidagi xulosalarga kelish mumkin.

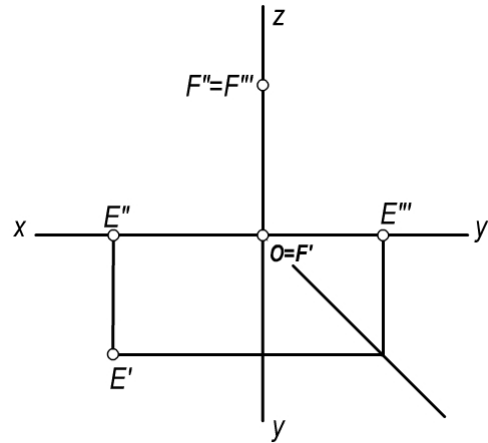
1. Fazoda berilgan har qanday nuqtaning:

- gorizontaal va frontal proyeksiyalari **Ox** o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqli joylashadi;
- gorizontaal va profil proyeksiyalari **Oy** o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqli joylashadi;
- frontal va profil proyeksiyalari **Oz** o'qiga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqli joylashadi;

2. Nuqtaning berilgan har qanday ikki ortogonal proyeksiyasi orqali uning uchinchi proyeksiyasini yasash mumkin.



a)



b)

2.30–rasm.

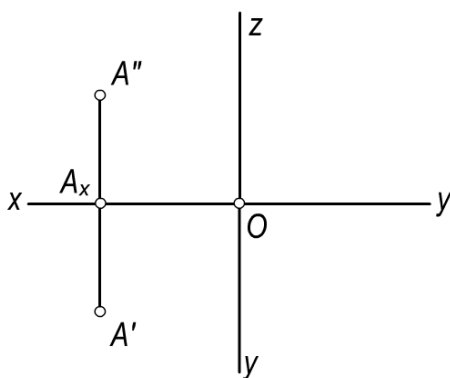
Nuqtaning ortogonal proyeksiyalarini yasashga oid bo'lgan quyidagi misollarni ko'rib chiqamiz.

1–misol. Birinchi oktantda joylashgan A nuqtaning A' gorizont va A'' frontal proyeksiyasi berilgan (2.31,a–rasm). Bu nuqtaning A''' profil proyeksiyasini yasash talab qilinadi.

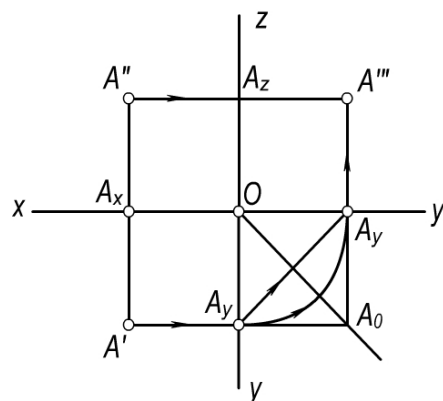
Nuqtaning profil proyeksiyasi uning gorizont va profil, frontal va profil proyeksiyalarini bog'lovchi chiziqlarning kesishish nuqtasida bo'ladi. (2.31,b–rasm).

Demak, A nuqtaning A''' proyeksiyasini yasash uchun A' dan Oy o'qiga perpendikulyar bog'lovchi chiziq o'tkazamiz. So'ngra bog'lovchi chiziqning bissektisa chiziqi T_w bilan kesishgan A_0 nuqtasidan Oz o'qiga parallel qilib, shuningdek, nuqtaning frontal A'' proyeksiyasidan Oz o'qiga perpendikulyar qilib o'tkazilgan bog'lovchi chiziq bilan kesishguncha davom ettiramiz.

Ikki bog'lovchi chiziqning kesishish nuqtasi A nuqtaning profil A''' proyeksiyasi bo'ladi. Shuningdek, A nuqtani koordinata boshi O ni markaz qilib OA_u radiusli yoy yoki A_u nuqtadan 45° burchak ostida chiziq o'tkazish yordamida ham aniqlash mumkin (2.31,b–rasm).



a)

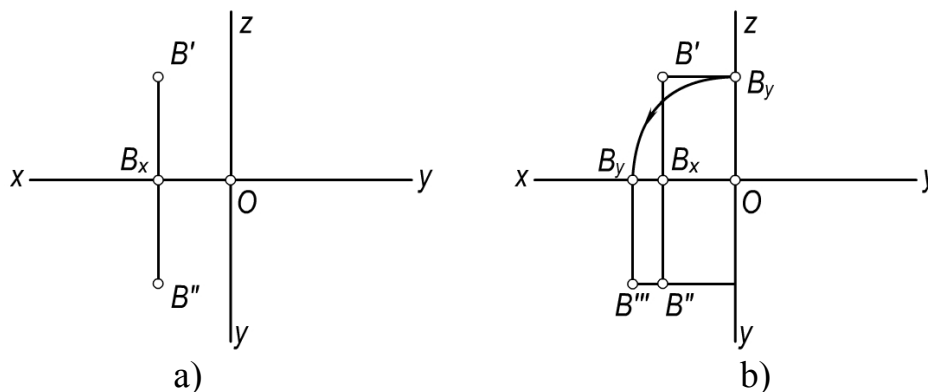


b)

2.31–rasm.

A nuqtaning profil proyeksiyasi uning frontal A'' proyeksiyasi bilan Oz ga perpendikulyar bo'lgan bir bog'lovchi chiziqda joylashgan va $A_x A' = A_z A'''$ bo'lgani uchun A'' dan Oz o'qiga tushirilgan perpendikulyarning davomida A_x nuqtasidan $A_x A'$ masofaga teng bo'lgan nuqta A nuqtaning profil proyeksiyasi A''' bo'ladi.

2–misol. Fazoda III oktantda joylashgan B nuqtaning gorizonttal B' va frontal B'' proyeksiyalari berilgan (2.32,a–rasm). Bu nuqtaning profil proyeksiyasi B''' yasalsin. Buning uchun (2.32,b–rasm) gorizonttal va profil proyeksiyalarini bog'lovchi chiziqni Oy ga perpendikulyar qilib o'tkazamiz va B_u nuqtani topamiz. So'ngra OB_u radiusli yoy bilan B_u nuqtani Ox o'qiga ko'chiramiz. Bu nuqtadan Oz o'qiga parallel qilib o'tkazilgan bog'lovchi chiziqning B nuqtaning frontal B'' proyeksiyasi bilan profil proyeksiyasini bog'lovchi chiziq kesishgan nuqtasini topamiz. Bu B nuqtaning profil proyeksiyasi B''' bo'ldi.



2.32–rasm.

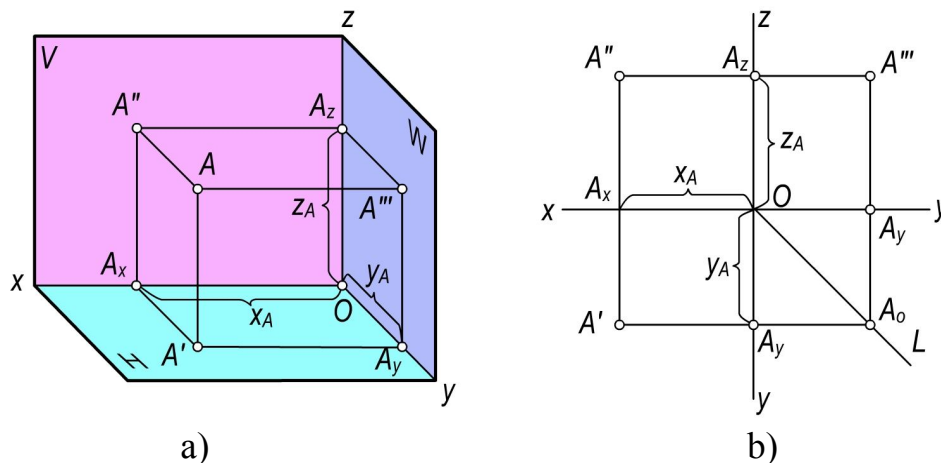
2.3–§. Nuqtaning to'g'ri burchakli koordinatalari va proyeksiyalari orasidagi bog'lanish

Geometriyada har qanday nuqta va figuralarning fazodagi vaziyatini o'zaro perpendikulyar uchta koordinatalar tekisliklari sistemasiga nisbatan aniqlash qabul qilingan. Bu metodni fransuz matematigi va faylasufi Rene Dekart (1506–1650yy) ixtiro qilgani uchun *dekart koordinatalar sistemasi* deb yuritiladi.

Bu sistemada nuqtaning fazodagi vaziyatini uning x , y va z koordinatalari aniqlaydi. Masalan, fazoda berilgan biror A nuqtaning koordinatalari x_A , y_A va z_A bo'ladi (2.33,a–rasm). Ammo dekart sistemasida stereometrik masalalarni geometrik yasashlar fikran bajariladi va chizma asboblari yordamida konkret geometrik figuralarni yasash va ularni grafik usullar bilan tahlil qilish imkoniyatini bermaydi.

Fransuz geometri va muxandisi G.Monj dekart koordinatalar sistemasi asosida fazodagi har qanday nuqtaning uchta koordinatasini proyeksiyalar tekisliklari sistemasida ortogonal proyeksiyalari bilan o'zaro grafik bog'ladi.

Haqiqatan, ortogonal proyeksiyalar sistemasida biror nuqtaning berilgan koordinatalari orqali uning proyeksiyalar tekisliklaridan uzoqligini aniqlash mumkin. Masalan A nuqtaning (2.33,a,b–rasmlar) W profil proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini x_A abssissasi, V frontal proyeksiyalar tekisligidan uzoqligini y_A ordinatasi va H gorizonttal proyeksiyalari tekisligidan uzoqligini z_A appilikatasi aniqlaydi.



2.33–rasm.

Nuqta fazoning oktantlarining har birida joylashishi mumkin. Nuqtaning qaysi oktantda joylashganligini aniqlash va uning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun koordinata o'qlarining yo'nalishiga qarab (2.22–rasmga qarang) qabul qilingan ishoralarga asosan tuzilgan quyidagi jadvaldan foydalanish mumkin:

1-jadval

Oktantlar	Koordinatalar		
	x	y	z
I	Q	Q	Q
II	Q	-	Q
III	Q	-	-
IV	Q	Q	-
V	-	Q	Q
VI	-	-	Q
VII	-	-	-
VIII	-	Q	-

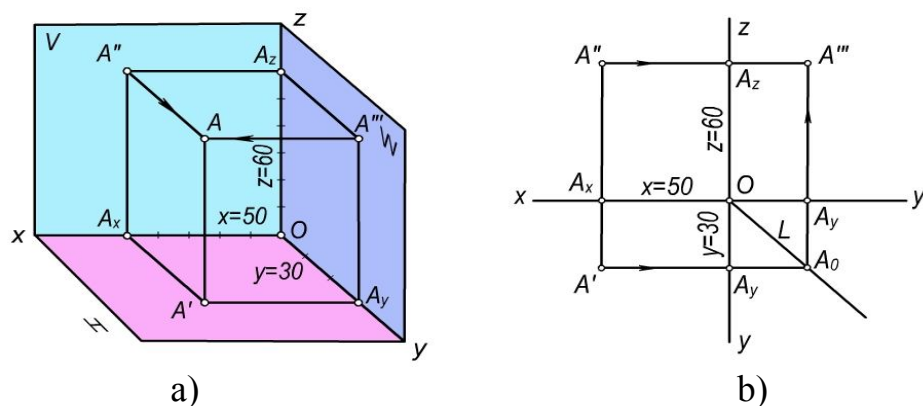
Bu jadvaldan foydalanib, nuqtaning berilgan koordinatalarining ishoralari orqali uning qaysi oktantda va proyeksiyalar tekisliklaridan qanday masofada joylashganligini aniqlash mumkin. Quyida koordinatalari bilan berilgan nuqtalarning fazodagi vaziyati va epyurini yasashni ko'rib chiqamiz.

1–misol. $A(50,30,60)$ nuqtaning berilgan koordinatalari bo'yicha uning fazoviy vaziyati va epyuri yasalsin. A nuqta I oktantda joylashgan (1-jadvalga qarang). Shuning uchun I oktantning proyeksiyalar tekisliklarining fazoviy modelini va proyeksiyalar o'qlari sistemasini chizamiz (2.34–rasm, a). Koordinata boshi O dan Ox o'qiga 50 mm, Oy o'qiga 30 mm va Oz o'qiga 60 mm o'lchab qo'yamiz (o'qlarda har 10 mm ni belgilaymiz) va A_x , A_y va A_z nuqtalarni belgilaymiz. A nuqtaning gorizont A' proyeksiyasini yasash uchun A_x va A_y nuqtalardan Ox va Oy o'qlarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning gorizont proyeksiyasi A' bo'ladi. Xuddi shuningdek, A_x va A_z nuqtalardan Ox va Oz o'qlariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A'' uning frontal proyeksiyasi A_y va A_z nuqtalardan Oy va Oz o'qlarga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi A nuqtaning profil proyeksiyasi A''' bo'ladi. A nuqtaning fazodagi vaziyatini aniqlash uchun uning A' , A'' va A''' proyeksiyalaridan H , V va W tekisliklariga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu

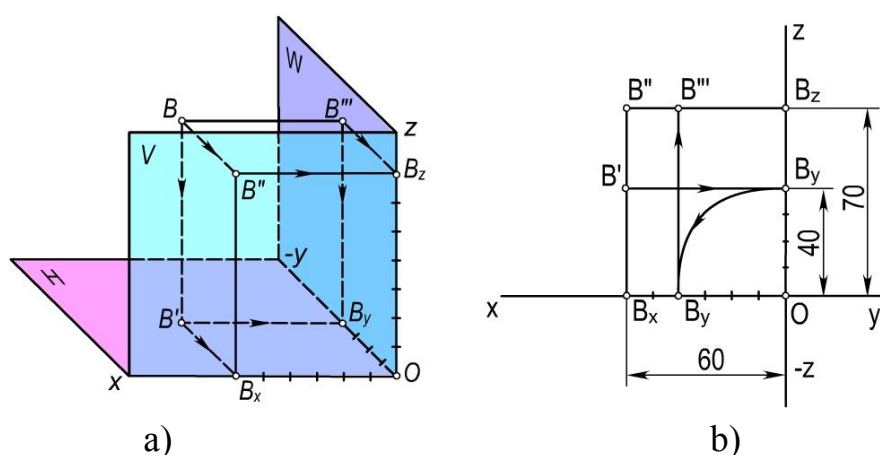
perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi **A** nuqtaning fazodagi o'rnini bo'ladi. Umuman **A** nuqtaning har qanday ikki proyeksiyasidan o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi **A** nuqtaning fazoviy o'rnini aniqlaydi.

A nuqtaning epyurini yasash uchun proyeksiyalar o'qlari sistemasida (2.34,b-rasm) **Ox** o'qiga 40 mm, **Oy** o'qiga 30 mm va **Oz** o'qiga 60 mm o'lchamlarni qo'yamiz va **A_x**, **A_y** va **A_z** nuqtalarga ega bo'lamiz. Bu nuqtalardan **Ox**, **Oy** va **Oz** proyeksiyalar o'qlariga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtalari **A** nuqtaning **A'**, **A''** va **A'''** proyeksiyalarini beradi.

2-misol. **B**(60, -40, 70) nuqtaning berilgan koordinatalari bo'yicha fazoviy vaziyati va epyuri yasalsin. **B** nuqta II oktantda joylashgan. Nuqtaning proyeksiyalarini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklarining fazoviy modelida (2.35,a-rasm) koordinata o'qlariga berilgan (**x**=60, **y**=-40, **z**=70) qiymatlarini qo'yamiz va hosil bo'lgan nuqtalarni **B_x**, **B_y** va **B_z** bilan belgilaymiz. So'ngra **B_x** va **B_y** nuqtalardan **Ox** va **Oy** o'qlarga, **B_x** va **B_z** dan **Ox** va **Oz** o'qlarga, **B_y** va **B_z** dan **Oy** va **Oz** o'qlarga perpendikulyarlar o'tkazamiz va ularning kesishgan **B'**, **B''** va **B'''** proyeksiyalaridan tegishli **H**, **V** va **W** tekisliklarga perpendikulyarlar o'tkazamiz. Bu perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi izlangan **B** nuqta bo'ladi.



2.34-rasm.



2.35-rasm.

Nuqtaning epyurini yasash uchun proyeksiyalar o'qlari sistemasini (koordinatalarning ishoralarini nazarda tutgan holda) chizamiz (2.35,b-rasm). Koordinata boshi **O** nuqtadan **Ox** o'qi bo'ylab 60 mm, **Oy** o'qi bo'ylab -40 mm va **Oz** o'qi bo'ylab 70 mm masofalarni o'lchab qo'yib, **B_x**, **B_y** va **B_z** nuqtalarga ega

bo'lamiz. So'ngra yuqorida qayd qilingan tartibda, B_x va B_y dan Ox va Oy o'qiga, B_x va B_y dan Ox va Oy o'qiga, B_x va B_z dan Ox va Oz o'qiga perpendikulyarlar o'tkazib, B' va B'' proyeksiyalarini aniqlaymiz.

Nuqtaning profil B''' proyeksiyasini yasash uchun B_y nuqtani Oz o'qiga jipslashgan Oy o'qidan Ox o'qiga jipslashgan Oy o'qiga ko'chiramiz. Bu B_y nuqtadan Oy o'qiga va B_y nuqtadan Oz o'qiga o'tkazilgan perpendikulyarlarning kesishish nuqtasi B''' bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Fazoning kvadrantlari va choraklari nima?
2. Kompleks chizma nima?
3. Birinchi, ikkinchi, uchinchi va to'rtinchi choraklarda joylashgan nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday joylashadi?
4. Bissektor tekisliklari nima va ularga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday joylashadi?
5. Proyeksiyalar tekisliklariga tegishli nuqtalarning proyeksiyalari chizmada qanday tasvirlanadi?
6. Nuqtaning berilgan ikki proyeksiyasiga asosan uchinchi proyeksiyasi qanday yasaladi?
7. Uchinchi, to'rtinchi, beshinchi, oltinchi oktantlarda joylashgan nuqtalarning koordinata qiymatlari ishorasi qanday bo'ladi?

To'g'ri chiziq. Umumiy va xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqning proyeksiyalari.

To'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi va uning proyeksiyalar tekisliklariga og'ish burchaklarini yasash.

To'g'ri chiziqning izlarini yasash.

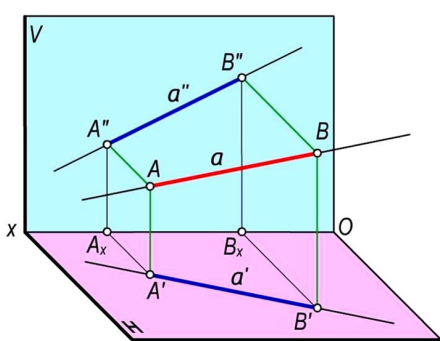
Tayanch iboralar va tushunchalar.

Og'ish burchagi, to'g'ri chiziq izi, gorizontal chiziq, frontal chiziq, profil chiziq.

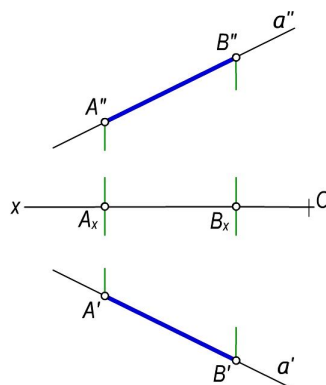
3.1-§. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalari

To'g'ri chiziq eng oddiy geometrik figura hisoblanadi. Fazodagi bir-biridan farqli ikkita A va B nuqtalarni o'zaro tutashtirib, uni ikki qarama-qarshi tomonga cheksiz davom ettirilsa, a to'g'ri chiziq hosil bo'ladi (3.1-rasm).

To'g'ri chiziqning ikki nuqta bilan chegaralangan qismi *to'g'ri chiziq kesmasi* deyiladi.



a)



b)

3.1-rasm

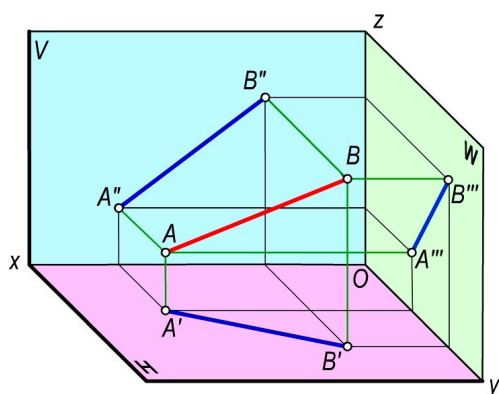
To'g'ri chiziqlar a , v , c kabi yozma harflar bilan belgilanadi. Agar to'g'ri chiziqlar chegaralangan bo'lsa, u holda AB , CD , EF ,... tarzida belgilanadi. To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklardagi proyeksiyalari holatini uning ikki ixtiyoriy nuqtasining proyeksiyalari aniqlaydi. Masalan, 3.1-rasmda berilgan a to'g'ri chiziqning ortogonal proyeksiyalarini yasash uchun bu chiziqqa tegishli ikki A va B nuqtalarning ortogonal A' , A'' va B' , B'' proyeksiyalari yasaladi. Bu ikki nuqtaning bir nomli proyeksiyalarini tutashtiruvchi a' va a'' chiziqlar fazoda berilgan a To'g'ri chiziqning gorizontal va frontal proyeksiyalari bo'ladi. Shuningdek, AB kesma va uning $A'B'$ va $A''B''$ proyeksiyalari a to'g'ri chiziqning fazodagi vaziyatini va uning a' , a'' proyeksiyalarini aniqlaydi.

Ta'rif. Proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga parallel yoki perpendikulyar bo'lmagan to'g'ri chiziq umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq deyiladi.

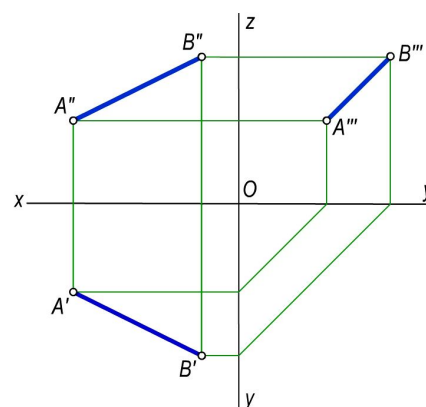
To'g'ri chiziqlarning gorizontaal va frontal proyeksiyalariga asosan uning profil proyeksiyasini yasash mumkin. Buning uchun uning tanlab olingan A va B nuqtalarning profil proyeksiyalari yasalanadi va ular o'zaro tutashtiriladi (3.2-rasm).

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarning ortogonal proyeksiyalari to'g'ri chiziqlar bo'lib, ular proyeksiyalar o'qlariga nisbatan o'tkir burchaklarni tashkil etadi. Bu burchaklarni α , β , γ xarflari bilan belgilanadi.

α , β , γ burchaklar AB kesmaning H , V , W proyeksiyalar tekisliklari bilan mos ravishda hosil qilgan burchaklaridir. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasi proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi. Uning haqiqiy uzunligini aniqlash keyingi paragraflarda ko'riladi.



a)



b)

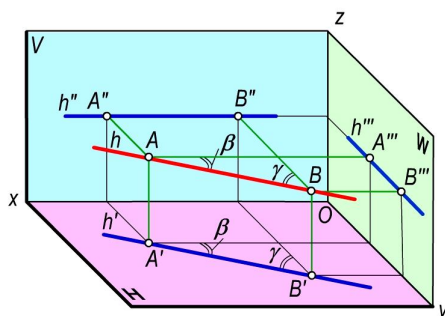
3.2-shakl

3.2–§. Xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari

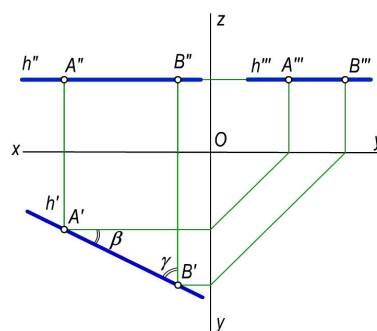
Ta'rif. Proyeksiyalar tekisligiga parallel, perpendikulyar bo'lgan yoki proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo'lgan to'g'ri chiziq xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq deyiladi.

Proyeksiyalar tekisligiga parallel to'g'ri chiziqlar

Gorizontaal to'g'ri chiziq. Gorizontaal proyeksiyalar tekisligi H ga parallel to'g'ri chiziq *gorizontaal chiziq* (yoki *gorizontaal*) deb ataladi (3.3-a,b rasm).



a)



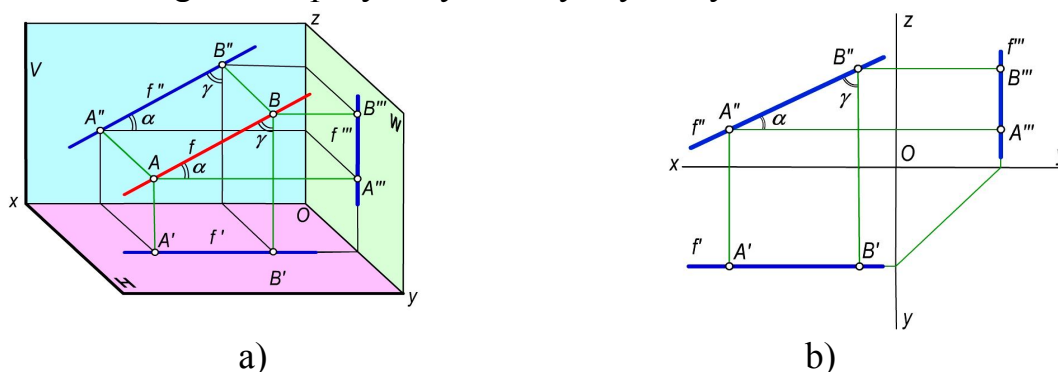
b)

3.3-rasm

Gorizontalning barcha nuqtalari H tekislikdan baravar masofada bo'lgani uchun chizmada uning h'' frontal proyeksiyasi Ox o'qiga, h''' profil proyeksiyasi esa Oy o'qiga parallel bo'ladi. Gorizontalning h' gorizontal proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo'ladi. Bu chiziq kesmasining gorizontal proyeksiyasi o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi β va γ burchaklar gorizontalning V va W tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo'ladi, ya'ni:

$$h \parallel H \Rightarrow h'' \parallel Ox \text{ va } h''' \parallel Oy, A'B' = |AB|, \beta = \hat{h}V \text{ va } \gamma = \hat{h}W \text{ bo'ladi.}$$

Frontal to'g'ri chiziq. Frontal proyeksiyalar tekisligi V ga parallel to'g'ri chiziq *frontal to'g'ri chiziq* (yoki *frontal*) (3.4-rasm) deb ataladi. Frontalning barcha nuqtalari V tekislikdan baravar masofada bo'lgani uchun chizmada uning f' gorizontal proyeksiyasi Ox o'qiga, f''' profil proyeksiyasi esa Oz o'qiga parallel bo'ladi. Frontalning frontal proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda bo'ladi.

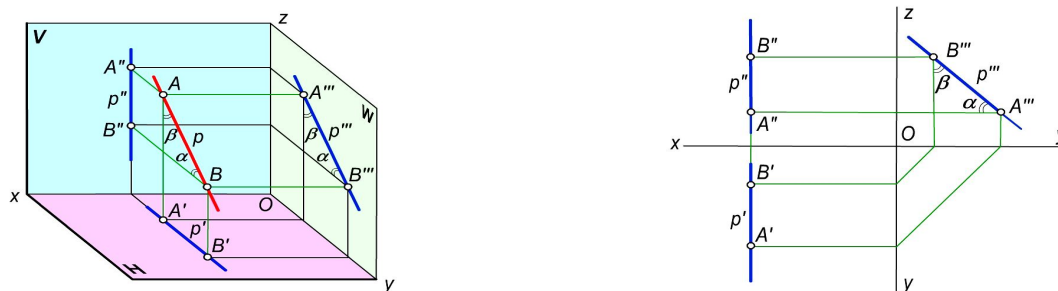


3.4-rasm

Mazkur chiziq kesmasining frontal proyeksiyasi uning haqiqiy o'lchamiga teng bo'lib proyeksiyalanadi. Chizmadagi α va β burchaklar frontalni H va W proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil etgan burchaklarning haqiqiy kattaligi bo'ladi, ya'ni:

$$F \parallel V \Rightarrow f' \parallel Ox \text{ va } f'' \parallel Oz, A''B'' = |AB|, \alpha = \hat{f'H} \text{ va } \gamma = \hat{f'W} \text{ bo'ladi.}$$

Profil to'g'ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligi W ga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq *profil to'g'ri chiziq* (yoki *profil*) deb ataladi (3.5-rasm). Profilning barcha nuqtalari W tekislikdan baravar masofada bo'lgani uchun chizmada uning gorizontal proyeksiyasi Oy o'qiga parallel, frontal proyeksiyasi Oz o'qiga parallel bo'ladi.



3.5-rasm

Profilning profil proyeksiyasi ixtiyoriy vaziyatda joylashgan bo'ladi. Mazkur, chiziq kesmasining profil proyeksiyasi o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.

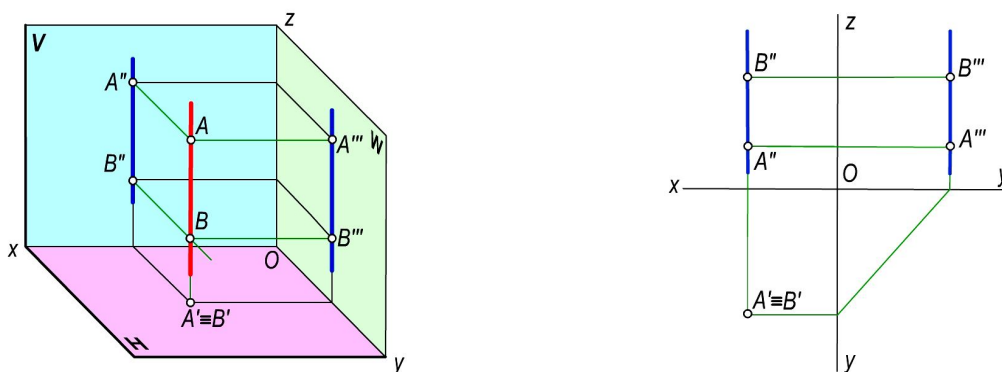
Chizmadagi α va β burchaklar profil chiziqning **H** va **V** tekisliklar bilan tashkil etgan burchaklarining haqiqiy kattaligi bo'ladi, ya'ni:

$$P \parallel WY \Rightarrow p' \parallel oy \text{ va } p'' \parallel oz, A'''B''' = |AB|, \alpha = \hat{p'H} \text{ va } \beta = \hat{p'V}, \text{ bo'ladi.}$$

Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar

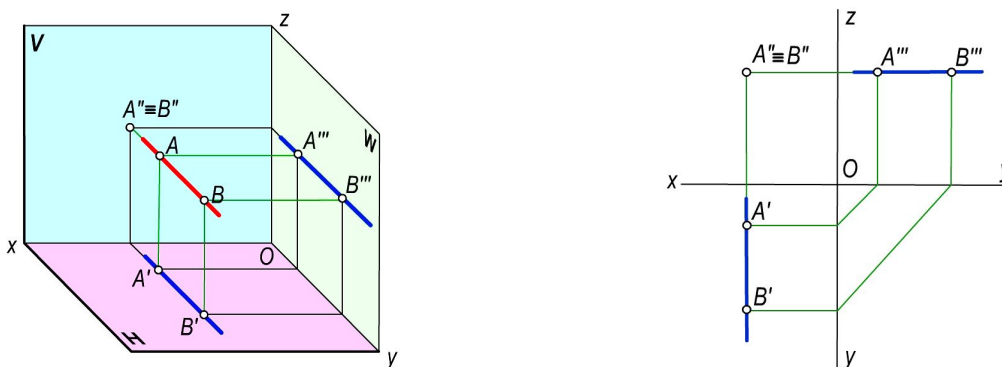
Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziqlar *proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq *gorizontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq* deb ataladi (3.6-rasm). Bu to'g'ri chiziq **H** tekislikka nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning frontal va profil proyeksiyalari **Oz** o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi **V** va **W** ga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.



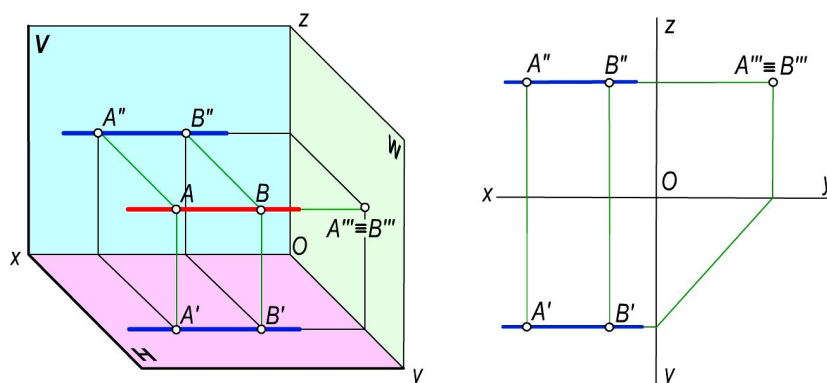
3.6-rasm.

Frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq *frontal proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi (3.7-rasm). Bunday to'g'ri chiziq **V** tekisligiga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning gorizontal va profil proyeksiyalari **Oy** o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi **H** va **W** proyeksiyalar tekisliklariga o'zining haqiqiy o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.



3.7-rasm

Profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziq. Profil proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar to'g'ri chiziq *profil proyeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar* deb ataladi (3.8-rasm). Bu to'g'ri chiziq profil tekisligiga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Uning gorizont va frontal proyeksiyalari Ox o'qiga parallel bo'ladi. Bu to'g'ri chiziq kesmasi H va V ga o'zining o'lchami bo'yicha proyeksiyalanadi.



3.8-rasm

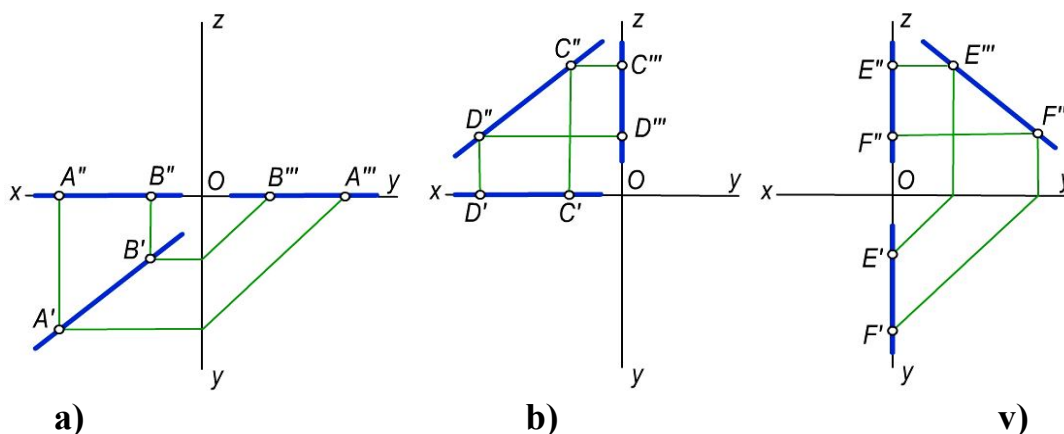
Proyeksiyalar tekisliklari va koordinata o'qlariga tegishli to'g'ri chiziqlar

To'g'ri chiziqlar H , V va W proyeksiyalar tekisliklariga va Ox , Oy , Oz proyeksiyalar o'qlariga tegishli bo'lishi mumkin.

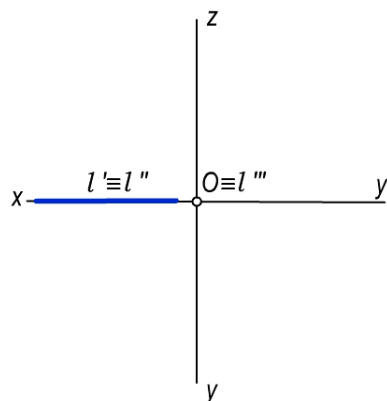
Agar to'g'ri chiziq biror proyeksiyalar tekisligiga tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning bir proyeksiyasi bevosita to'g'ri chiziqning o'ziga, qolgan ikki proyeksiyasi esa koordinatalar o'qiga proyeksiyalanadi. Masalan, $CD(C'D'', C''D''')$ to'g'ri chiziq frontal proyeksiyalar tekisligi V ga tegishli bo'lgani uchun (3.10,b-rasm), uning $C''D''$ frontal proyeksiyasi mazkur to'g'ri chiziqqa, gorizont $C'D'$ proyeksiyasi Ox o'qiga, profil $C'''D'''$ proyeksiyasi esa Oz o'qiga proyeksiyalanadi.

Shuningdek, 3.9,b-rasmda H tekislikka tegishli AB to'g'ri chiziqning, va 3.9,v-rasmda esa W tekislikka tegishli EF to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining joylashishi ko'rsatilgan.

To'g'ri chiziq koordinata o'qlariga tegishli bo'lsa, uning ikki proyeksiyasi shu o'qning o'ziga proyeksiyalanadi, bir proyeksiyasi esa koordinata boshi O ga nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Masalan, $L=ox$ to'g'ri chiziqning l' gorizont frontal proyeksiyalari Ox o'qida, uning l''' profil proyeksiyasi esa koordinata boshi O ga proyeksiyalanadi (3.10- rasm).



3.9-rasm



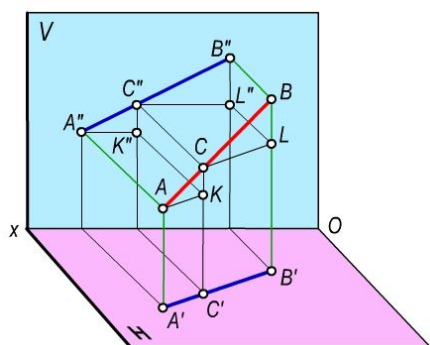
3.10-shakl

3.3–§. To'g'ri chiziq kesmasini berilgan nisbatda bo'lish

Parallel proyeksiyalashning xossasiga asosan biror nuqta fazodagi to'g'ri chiziq kesmasini qanday nisbatda bo'lsa, uning bir nomli proyeksiyalari to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalarini ham shunday nisbatlarga bo'ladi.

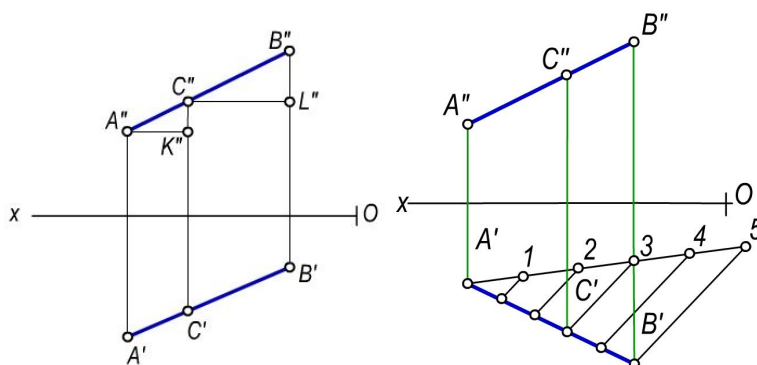
3.11-rasmda berilgan chizmaga asosan C nuqta AB kesmani $AC:CB$ nisbatda bo'lgan deb qabul qilinsin. Yuqoridagi xossaga binoan C nuqtani proyeksiyalari AB kesmaning proyeksiyalarini xuddi shunday nisbatlarda bo'ladi, ya'ni $AC:CB=A'C':C'B'=A''C'':C''B''$.

To'g'ri chiziqqa tegishli nuqtaning bunday xususiyatidan foydalanib, har qanday to'g'ri chiziq kesmasini ixtiyoriy nisbatda proporsional bo'laklarga bo'lish mumkin. Masalan 3.12-rasmda berilgan $AB(A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziq kesmasini teng 5 bo'lakka bo'lish uchun kesmaning ixtiyoriy, masalan, gorizontaal proyeksiyasining A' uchidan ixtiyoriy burchakda yordamchi a to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziqqa ixtiyoriy o'lchamga ega bo'lgan kesma tanlab, besh marta qo'yib chiqiladi. So'ngra 5 va B' nuqtalarni o'zaro tutashtirilib, 4, 3, 2 va 1 nuqtalardan $5B'$ chiziqqa parallel chiziqlar o'tkaziladi.



a)

3.11-rasm



b)

3.12-rasm

Natijada, $A'B'$ kesma 5 ta teng bo'lakka bo'linadi. To'g'ri chiziq kesmasining gorizontaal $A'B'$ proyeksiyasidagi bu nuqtalardan foydalanib kesmaning $A''B''$ frontal proyeksiyasini proyeksion bog'lanish chiziqlari yordamida teng 5 bo'lakka bo'lish

qiyin emas. Chizmadagi **C** nuqta **AB** to'g'ri chiziq kesmasini $AC:CB=3:2$ nisbatda bo'ladi.

3.4–§. To'g'ri chiziqning izlari

Ta'rif. To'g'ri chiziqning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish nuqtalari **to'g'ri chiziqning izlari** deyiladi.

Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq hamma proyeksiyalar tekisliklarini kesib o'tadi. Biror **a** to'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *gorizontal izi*, frontal proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi *frontal izi* deyiladi. Shuningdek, to'g'ri chiziqning profil proyeksiyalar tekisligi bilan kesishgan nuqtasi uning *profil izi* deyiladi:

$$a \cap H = M_H, a \cap V = N_V \text{ va } a \cap W = F_W.$$

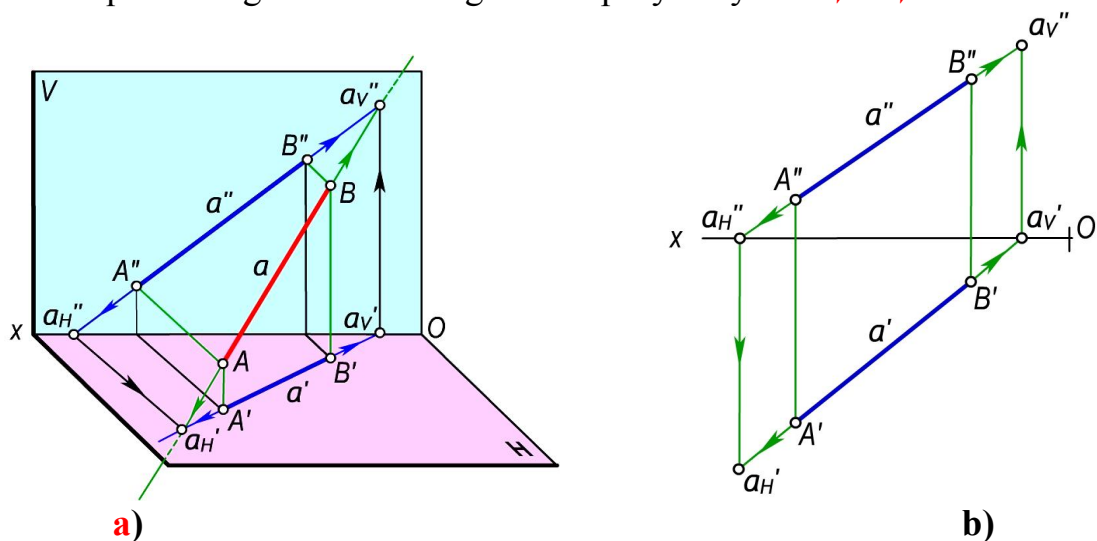
3.13,a-rasmda, **a** to'g'ri chiziq izlarini yasashning fazoviy modeli ko'rsatilgan.

To'g'ri chiziqning gorizontal izini proyeksiyalarini chizmada (3.12-b, rasm) aniqlash uchun:

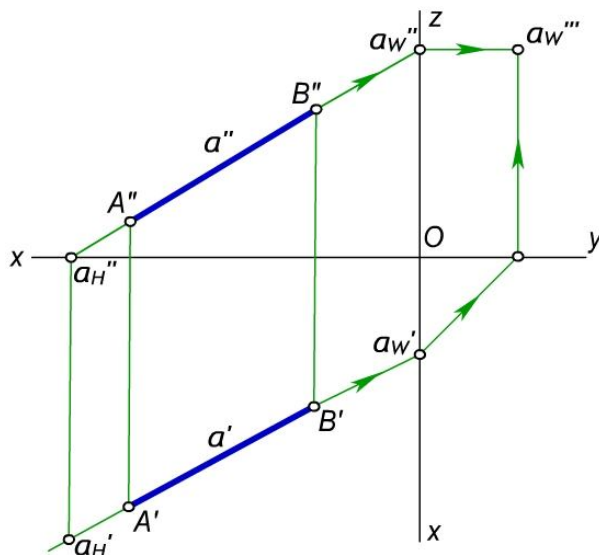
- To'g'ri chiziqni frontal proyeksiyasining **Ox** o'qi bilan kesishish nuqtasi $a_H'' = a'' \cap ox$ topiladi;
- a_H'' nuqtadan **Ox** o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;
- To'g'ri chiziqning gorizontal proyeksiyasi bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi to'g'ri chiziqning gorizontal izining gorizontal proyeksiyasi $a_H' \equiv a_H$ bo'ladi.

To'g'ri chiziq frontal izining proyeksiyalarini chizmada aniqlash uchun:

- To'g'ri chiziq gorizontal proyeksiyasining **Ox** o'qi bilan kesishish nuqtasi $a_V' = a' \cap ox$ topiladi;
- Bu nuqtadan **Ox** o'qiga perpendikulyar o'tkaziladi;
- To'g'ri chiziqning frontal proyeksiyasi bilan perpendikulyarning kesishish nuqtasi uning frontal izining frontal proyeksiyasi $a_V'' = a_V$ bo'ladi.



3.13-rasm



3.14-rasm

To'g'ri chiziqlarning profil izini yasash uchun: (3.14-rasm):

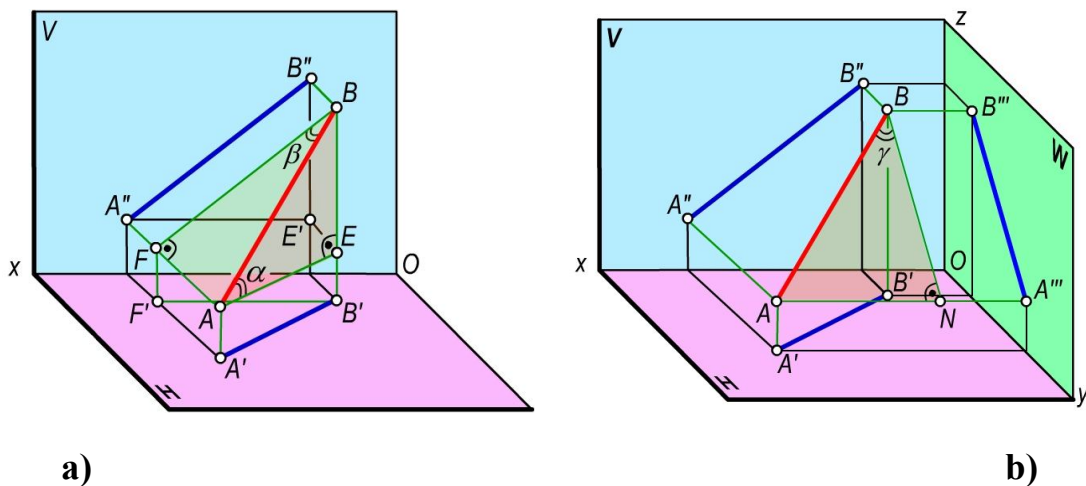
- Uning frontal proyeksiyasini Oz o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo'lgan nuqtadan Oz ga perpendikulyar chiqariladi.
- To'g'ri chiziqlarning gorizontaal proyeksiyasi Oy o'qi bilan kesishguncha davom ettiriladi.
- Hosil bo'lgan nuqtadan y o'qiga perpendikulyar chiqariladi.
- Ikki perpendikulyarning o'zaro kesishish nuqtasi a to'g'ri chiziqlarning profil izi va shu izning profil proyeksiyasi ham bo'ladi.

3.5–§. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligini va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash

Umumiy vaziyatda joylashgan to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari orqali uning haqiqiy o'lchamini aniqlash va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlash masalasi amaliyotda ko'p uchraydi.

AB to'g'ri chiziq kesmasi hamda uning H , V va W tekisliklardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsin (3.15-a,rasm). Kesmaning A nuqtasidan $AE \parallel A'B''$ to'g'ri chiziq o'tkaziladi va to'g'ri burchakli ABE ni hosil qilinadi. Bunda $BE = BB' - AA'$; bu yerda $AA' = EB'$ bo'lgani uchun $BE = BB' - EB' = \Delta z$ bo'ladi.

To'g'ri burchakli ABE uchburchakning AB gipotenuzasi AE katet bilan α burchak hosil qiladi. Bu burchak AB kesmaning H tekislik bilan hosil qilgan burchagi bo'ladi.



3.15-rasm

To'g'ri chiziq kesmasining V proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli ABF uchburchakdan foydalanamiz. Bu uchburchakning BF kateti AB kesmasining frontal proyeksiyasi $A''B''$ ga, ikkinchi AF kateti uning A va B uchlarning V tekislikdan uzoqliklarining ayirmasiga teng bo'ladi. Bunda $AF=AA''-BB''$, bo'lib, $BB''=FA''$ bo'lgani uchun $AF=AA''-FA''=\Delta y$ bo'ladi.

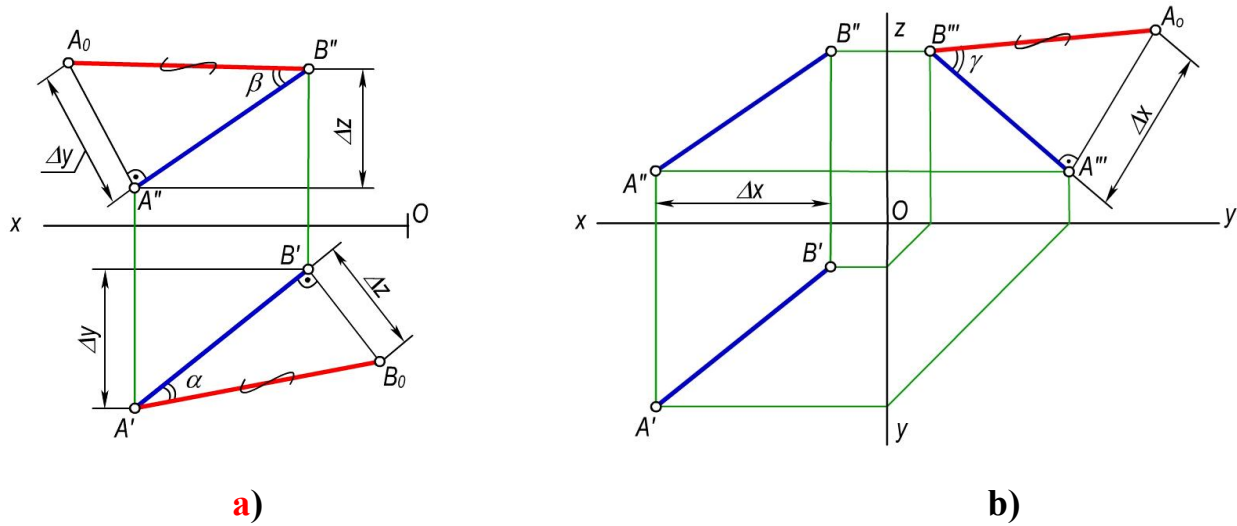
To'g'ri burchakli ABF ning AB gipotenuzasi BF katet bilan hosil qilgan β burchak AB kesmaning V tekislik hosil qilgan burchagi bo'ladi.

3.15-b, rasmda AB kesmaning W tekislik bilan hosil qilgan γ burchagini aniqlash ko'rsatilgan. Bu burchakni aniqlash uchun to'g'ri burchakli ABN dan foydalanamiz. Bu uchburchakning BN kateti AB kesmasining profil $A'''B'''$ proyeksiyasiga, ikkinchi AN kateti A va B uchlarning W tekislikdan uzoqliklari ayirmasiga teng bo'ladi.

Kesmaning berilgan proyeksiyalari orqali haqiqiy uzunligi va proyeksiyalar tekisliklari bilan hosil qilgan burchaklarini aniqlashning bu usuli **to'g'ri burchakli uchburchak usuli** deb yuritiladi.

Masalan, AB kesmaning $A'B'$, $A''B''$ va $A'''B'''$ proyeksiyalarga asosan uning (3.16-a, shakl) haqiqiy o'lchami va H bilan hosil qilgan α burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $A'B'B_0$ uchburchak yasiladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning gorizonttal proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa kesmaning A va B uchlarning applikatalari ayirmasi Δz ga teng bo'ladi. Bu uchburchakning $A'B_0$ gipotenuzasi AB kesmaning haqiqiy o'lchami, $A'B_0=AB$ bo'lib, $\angle B'A'B_0=\alpha$ bo'ladi.

Kesmaning V tekislik bilan hosil qilgan β burchagini aniqlash uchun to'g'ri burchakli $\Delta A''B''A_0$ ni yasiladi. Bu uchburchakning bir kateti kesmaning frontal $A''B''$ proyeksiyasiga, ikkinchi kateti esa AB kesma uchlari ordinatalari ayirmasi Δy ga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan $B''A_0=AB$ bo'lib, $\angle A''B''A_0=\beta$ bo'ladi.



3.16-rasm

3.16-rasmda AB kesmaning haqiqiy o'lchami va uning W tekislik bilan hosil etgan burchagini aniqlash ko'rsatilgan.

4-ma'ruza –2 soat
Ikki to'g'ri chiziq

Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashuvi
To'g'ri burchakning proyeksiyalanishi
Chizmalarda ko'rinishlikni aniqlash
Ortogonal proyeksiyalashning asosiy xossalari

Tayanch iboralar va tushunchalar

Parallel chiziqlar, kesishuvchi chiziqlar, uchrashmas chiziqlar, konkurent nuqtalar.

4.1–§. Ikki to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyatlari

Ikki to'g'ri chiziq fazoda o'zaro parallel, kesuvchi yoki ayqash vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

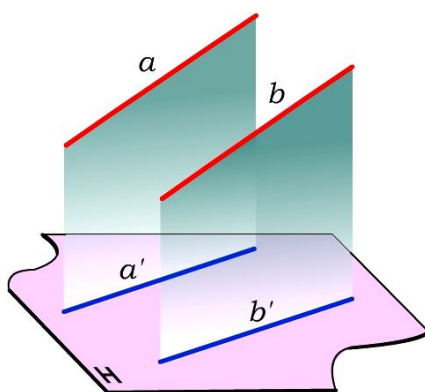
Parallel to'g'ri chiziqlar

Ta'rif. Agar ikki to'g'ri chiziq bir tekislikka tegishli bo'lib umumiy kesishuv nuqtasi bo'lmasa yoki cheksiz uzoq (xosmas) nuqtada kesishsa, ular o'zaro *parallel to'g'ri chiziqlar* deyiladi.

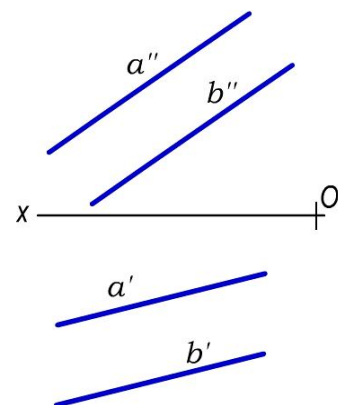
Parallel proyeksiyalarning xossasiga asosan parallel to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi (3.17-rasm), ya'ni $a \parallel b$ bo'lsa, u holda $a'' \parallel b''$, $a' \parallel b'$ va $a''' \parallel b'''$ bo'ladi.

Fazodagi umumiy vaziyatda joylashgan parallel to'g'ri chiziqlarning ikkita bir nomli proyeksiyalari o'zaro parallel bo'lsa, ularning uchinchi proyeksiyalari ham o'zaro parallel bo'ladi.

Ammo to'g'ri chiziqlar biror proyeksiyalar tekisligiga parallel va ularning shu tekislikdagi proyeksiyalari berilmagan bo'lsa, u holda yuqorida keltirilgan shart bajarilmaydi. Masalan, W tekislikka parallel bo'lgan profil to'g'ri chiziq kesmalarning bir nomli gorizontal va frontal proyeksiyalari (r_1 va r_2) ning o'zaro parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi (3.18,a-rasm). Bunday hollarda to'g'ri chiziqlarning profil proyeksiyalarini yasash va ularning paralleligini tekshirish zarur. Shuningdek, bu to'g'ri chiziqlarning o'zaro vaziyatini profil proyeksiyalaridan foydalanmasdan ham aniqlash mumkin.



a)

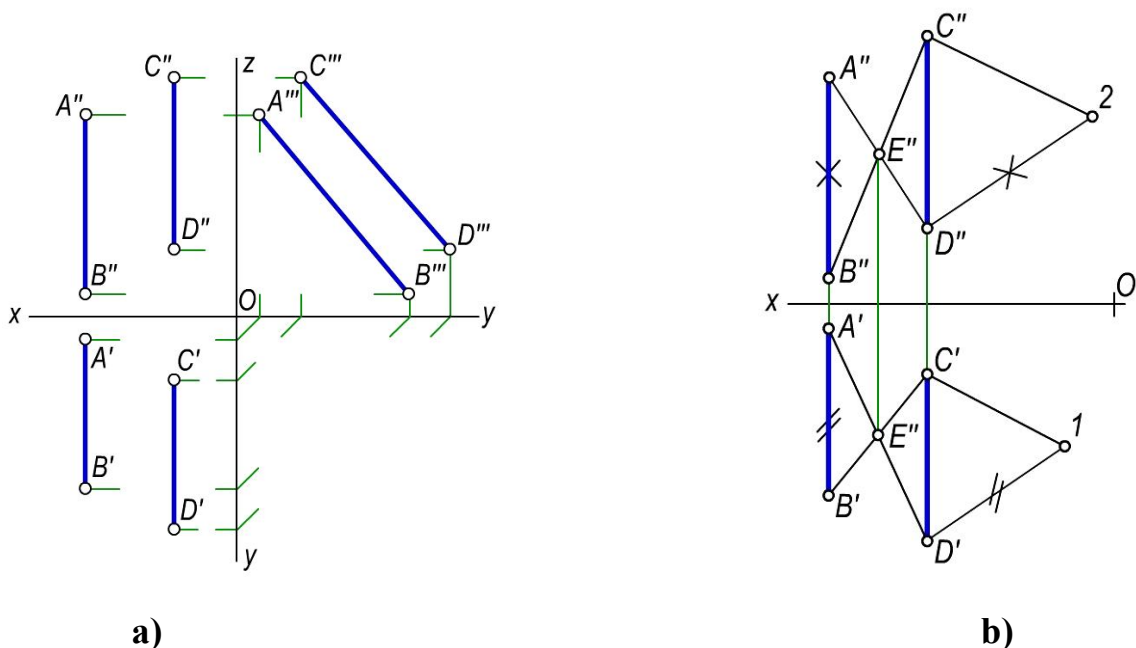


b)

3.17-rasm

Buning uchun:

- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli proyeksiyalarining nisbatlari tengligini aniqlaymiz. Kesmaning biror, masalan, D' , D'' nuqtasidan ixtiyoriy (o'tkir burchak ostida) parallel chiziqlar o'tkazib, $D'1=A'B'$ va $D''2=A''B''$ kesmalarni qo'yiladi (3.18-b,rasm). So'ngra 1 va 2 nuqtalarni C' va C'' bilan tutashtiramiz. Agar $C'1=C''2$ bo'lsa bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi. Aks holda bu to'g'ri chiziqlar uchrashmas to'g'ri chiziqlar ekanligini isbotlanadi;
- to'g'ri chiziq kesmalarining bir nomli nuqtalarini o'zaro kesishadigan qilib to'g'ri chiziqlar bilan tutashtiramiz (3.18-b,rasm). Agar chiziqlarning kesishish nuqtasining E' va E'' proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda bo'lsa, u holda AB va CD to'g'ri chiziqlar bir tekislikka tegishli va o'zaro parallel bo'ladi.



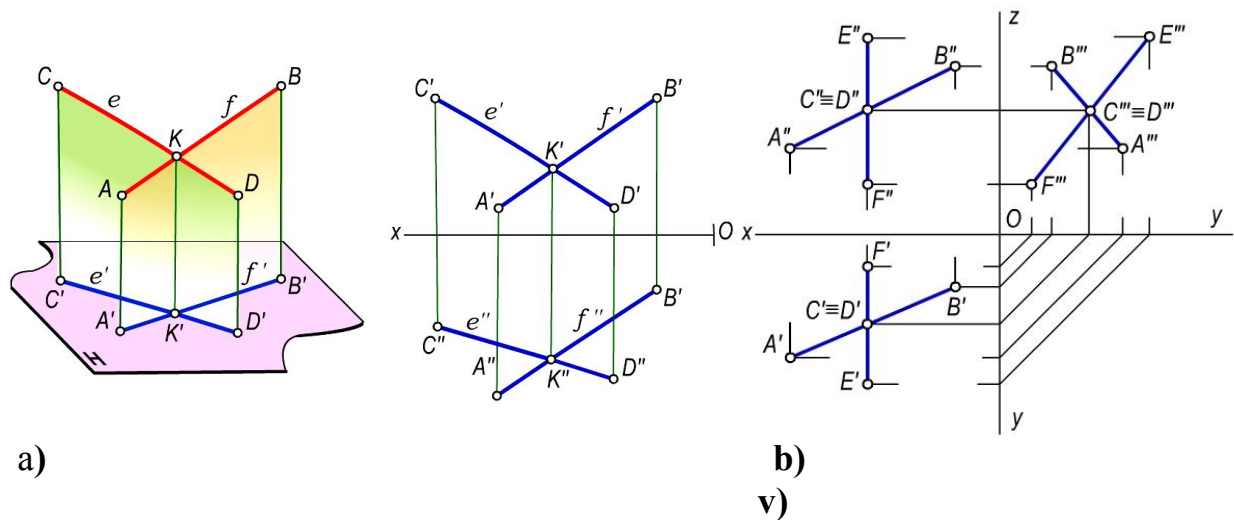
3.18-rasm

Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar

Ta'rif. Agar ikki to'g'ri chiziq fazoda umumiy bir (xos) nuqtaga ega bo'lsa, ularni **kesishuvchi to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining kesishish nuqtalari to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bo'ladi (3.19-rasm). Kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari ham chizmada o'zaro kesishadi va kesishish nuqta proyeksiyalari bir proyeksion bog'lovchi chiziqda bo'ladi.

Fazoda umumiy vaziyatda kesishuvchi to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarning faqat ikkita bir nomli proyeksiyalarining kesishishi kifoya qiladi.



3.19-rasm

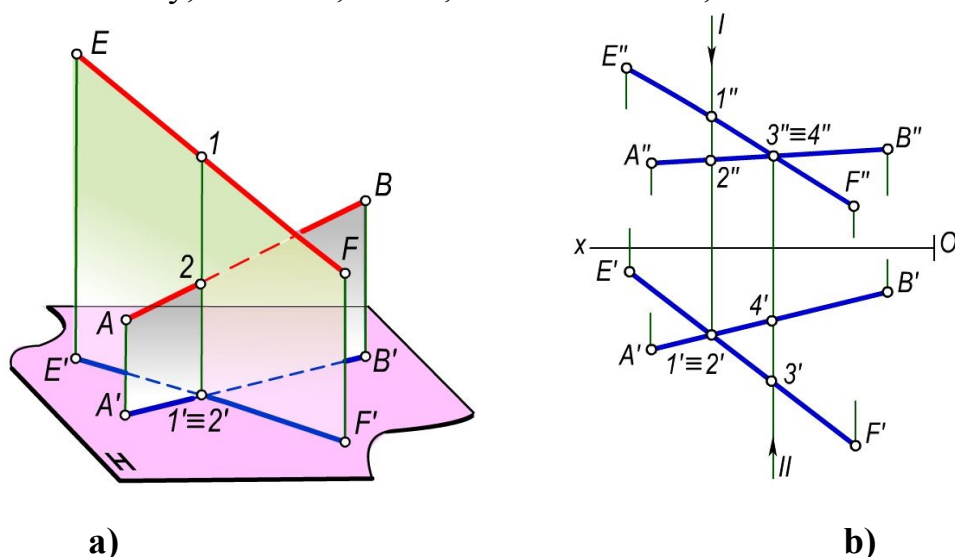
Agar kesishuvchi chiziqlarning biri proyeksiyalar tekisligining birortasiga parallel bo'lsa, u holda ularning ikkita bir nomli proyeksiyalarining o'zaro kesishuvi yetarli bo'lmaydi. Masalan, AB va EF (3.19,v-rasm) to'g'ri chiziqlar kesmalarining biri (EF) W tekislikka parallel joylashgan. Bu chiziqlarning o'zaro vaziyatini ularning profil proyeksiyalarini yasash bilan aniqlash mumkin. Agar kesishish nuqtasining proyeksiyalari bir bog'lovchi chiziqda joylashsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro kesishadi, aks holda to'g'ri chiziqlar kesishmaydi.

Uchrashmas (ayqash) to'g'ri chiziqlar

Ta'rif. Ikki to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lmasa yoki kesishmasa ular **uchrashmas (ayqash) to'g'ri chiziqlar** deyiladi.

Ma'lumki, parallel va kesuvchi to'g'ri chiziqlar bitta tekislikka tegishli bo'ladi (3.20,a,b-rasmlar). Uchrashmas to'g'ri chiziqlar esa bir tekislikda yotmaydi. Uchrashmas to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari chizmada o'zaro kesishsa ham, ammo kesishish nuqtalari bir bog'lovchi chiziqqa tegishli bo'lmaydi.

Masalan, 3.20-rasmda $AB(A'B', A''B'')$ va $EF(E'F', E''F'')$ uchrashmas chiziqlar berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlar proyeksiyalarining $1' \equiv 2'$ va $3'' \equiv 4''$ kesishish nuqtalari fazoda bu to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishli ikki nuqtaning proyeksiyalari bo'lmay, aksincha, $1 \in EF$, $2 \in AB$ va $3 \in EF$, $4 \in AB$ bo'ladi.

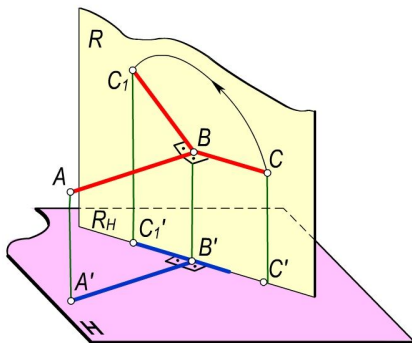


3.20-rasm

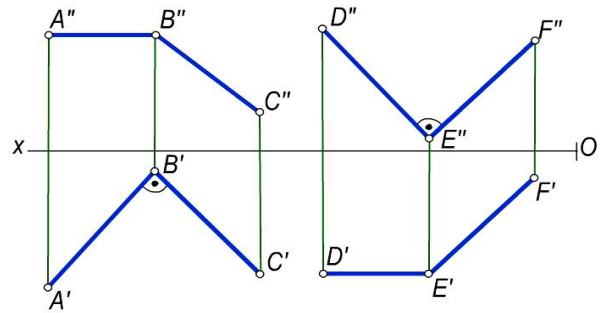
4.2–§. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatlari

Teorema. Agar to'g'ri burchakning bir tomoni tekislikka parallel bo'lib, ikkinchi tomoni bu tekislikka perpendikulyar bo'lmasa, mazkur to'g'ri burchak shu tekislikka haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.

Bu teoremani isbotlash uchun 3.21,a-rasmdan foydalanamiz. Shakldagi $\angle ABC = 90^\circ$ ga teng va uning ikkala tomoni ham H tekislikka parallel vaziyatda joylashgan deb faraz qilamiz. Bu vaziyatda uning gorizontaal proyeksiyasining qiymati o'ziga teng bo'lib proyeksiyalanadi, ya'ni $\angle A'B'C' = 90^\circ$ bo'ladi.



a)



b)

v)

3.21-rasm

To'g'ri burchakning BC tomonidan H tekislikka perpendikulyar qilib R tekislik o'tkazamiz. U holda $AB \perp R$ bo'lib, $H \cap R = R_H$ hosil bo'ladi. Agar to'g'ri burchakning BC tomonini AB tomoni atrofida aylantirib, ixtiyoriy BC_1 vaziyatga keltirsak ham uning bu tomonining proyeksiyasi R_H bilan ustma-ust tushadi. Shunga ko'ra $\angle ABC_1 = \angle A'B'C' = 90^\circ$ bo'ladi. Demak:

$$\angle ABC = 90^\circ, AB \parallel H \text{ va } BC \parallel H \Rightarrow \angle A'B'C' = 90^\circ.$$

Chizmada ($\angle ABC$ va $\angle DEF$) to'g'ri burchaklarning tasvirlanishi 3.21,b va 3.21,v-rasmlarda keltirilgan.

To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan chizma geometriyada metrik masalalarni yechishda keng foydalanadi.

4.3–§. Chizmalarda ko'rinishlikni aniqlash

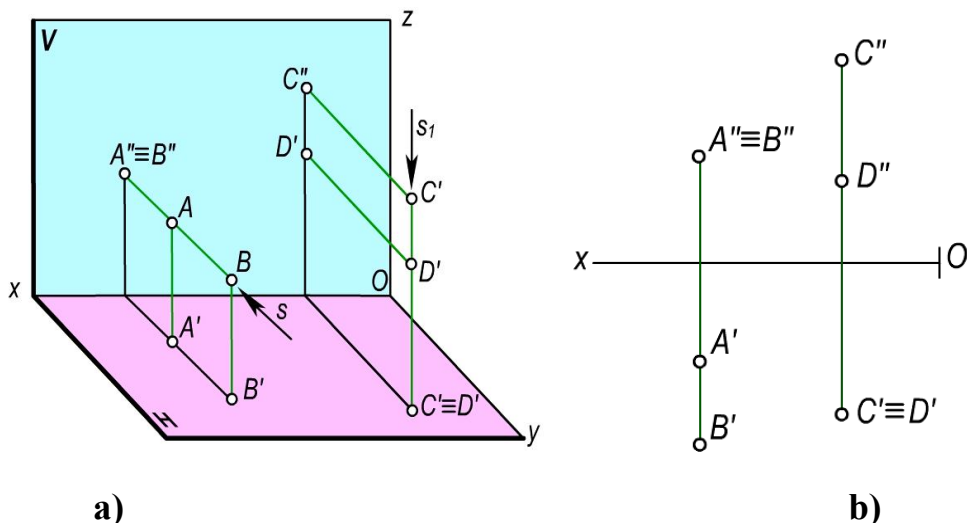
Geometrik figuraning fazodagi o'zaro vaziyatlariga oid masalalar yechishda tasvirlarni yaqqolashtirish maqsadida ularning ko'rinadigan va ko'rinmaydigan qismlarini aniqlashga to'g'ri keladi.

Geometrik figuralarning kuzatuvchiga nisbatan chizmada ko'rinishligi konkurent nuqtalardan foydalanib aniqlanadi.

Ta'rif. Bitta proyeksiyalovchi nurda (to'g'ri chiziqda) joylashgan nuqtalar **konkurent nuqtalar** deyiladi.

Agar kuzatuvchi proyeksiyalovchi nur yo'nalishida konkurent nuqtalarga qarasa, u o'ziga yaqin bo'lgan nuqtani yoki proyeksiyalar tekisligidan uzoqroq joylashgan nuqtani ko'radi.

Masalan, 3.22-rasmda berilgan bir proyeksiyalovchi chiziqda joylashgan va V ga nisbatan konkurent bo'lgan A va B nuqtalarga s yo'nalish bo'yicha qaralganda, kuzatuvchiga yaqin bo'lgan yoki V tekislikdan uzoqroq joylashgan A nuqta ko'rinadi. Shuningdek, H ga nisbatan konkurent bo'lgan C va D nuqtalarga s_1 yo'nalish bo'yicha qaralsa, H tekislikdan uzoqroq joylashgan C nuqta ko'rinadi.



3.22-rasm

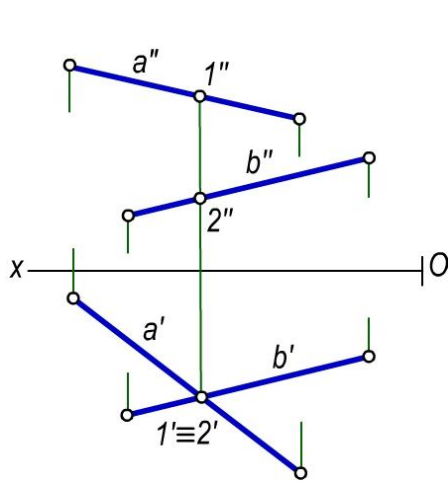
Chizmada konkurent nuqtalarning ko'rinishligini ularning koordinatalari orqali aniqlash ham mumkin. Konkurent nuqtalarning H tekislikka nisbatan ko'rinishligi z applikatasi, V tekislikka nisbatan y ordinatasi va W tekislikka nisbatan x absissasi aniqlaydi.

H tekislikka nisbatan applikatasi eng katta bo'lgan konkurent nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi.

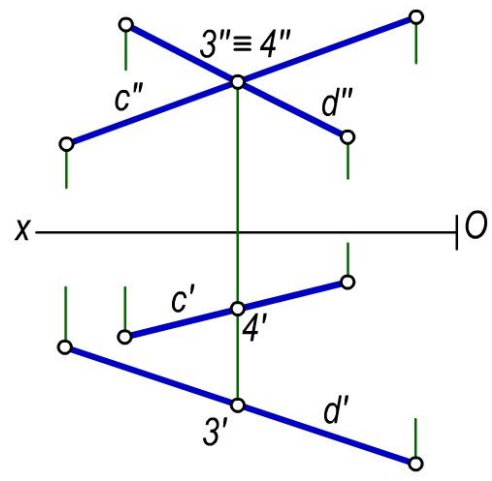
3.22,b-rasmda $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, va $C(C', C'')$, $D(D', D'')$ konkurent nuqtalarning proyeksiyalari berilgan. Bunda V tekislikka nisbatan B nuqta, H tekislikka nisbatan C nuqta ko'rinishchi nuqtalar bo'ladi, chunki $y_A < y_B$ va $z_S > z_D$.

Fazoda turli vaziyatlarda joylashgan geometrik shakllarning chizmada ko'rinishligi ularga tegishli bo'lgan ayrim konkurent nuqtalarning ko'rinishligini tekshirish yo'li bilan aniqlanadi.

3.23,a-rasmda $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ uchrashmas to'g'ri chiziqlar berilgan. To'g'ri chiziqlar gorizonttal proyeksiyalarning o'zaro kesishgan va H ga nisbatan konkurent bo'lgan nuqtasi $1' \equiv 2'$ ustma-ust proyeksiyalangan. Bu nuqtalardan qaysi birini ko'rinishligini aniqlash uchun ularning gorizonttal proyeksiyasidan proyeksiyalovchi chiziq o'tkazib, to'g'ri chiziqlarning frontal a'' va b'' proyeksiyalarida $1''$ va $2''$ nuqtalar belgilanadi va $z_1 > z_2$ ekanligi aniqlanadi. Natijada, a chiziqqa tegishli 1 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi, b chiziqqategishli 2 nuqta esa uning ostida bo'ladi. Demak, $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqlarga yuqoridan qaraganda a to'g'ri chiziq b to'g'ri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqin joylashgan.



a)



b)

3.23-rasm

3.23,b-rasmda ham $c(c', c'')$ va $d(d', d'')$ chiziqlarni V ga nisbatan qaraganda $y_3 > y_4$ bo'lgani uchun 3 nuqta kuzatuvchiga ko'rinadi. Shuning uchun $c(c', c'')$ va $d(d', d'')$ to'g'ri chiziqlarga oldidan qaraganimizda d to'g'ri chiziq c to'g'ri chiziqqa nisbatan kuzatuvchiga yaqinroq joylashgan.

Nazorat savollari

1. To'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday hosil bo'ladi?
2. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq nima?
3. To'g'ri chiziqning izlari nima?
4. qanday xususiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqlarni bilasiz?
5. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziq kesmasining haqiqiy uzunligi qanday yasaladi?
6. O'zaro parallel to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari qanday bo'ladi?
7. Kesishuvchi va ayqash to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bir-biridan qanday farqlanadi?
8. To'g'ri burchakning proyeksiyalanishi haqidagi ta'rifni tushuntirib bering.
9. Ko'rinishlikni aniqlashda ikkilangan nuqtalardan qanday foydalaniladi?

Tekislik

Tekislikning berilishi.

Tekislik va to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvi.

Tekislikning bosh chiziqlari.

Proyeksiyalovchi tekisliklarning xossalari.

Tayanch iboralar va tushunchalar

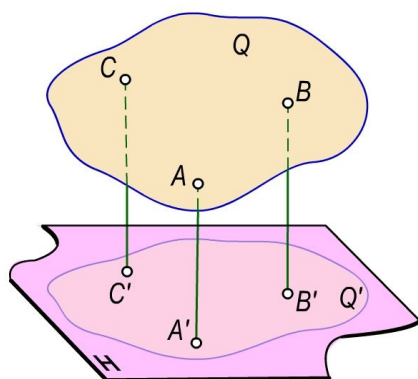
Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik, frontal proyeksiyalovchi tekislik, profil proyeksiyalovchi tekislik. Tekislikning gorizontali, tekislikning frontali, tekislikning eng katta og'ma chizig'i.

5.1-§. Tekislikning berilishi

Tekislik birinchi tartibli sirt hisoblanadi.

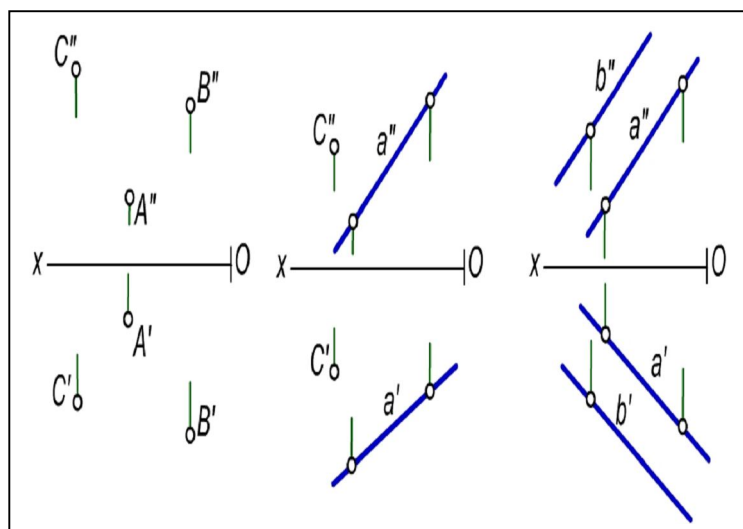
Umumiy holda tekislikning fazoviy vaziyatini bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqta aniqlaydi. Haqiqatdan, 4.1-rasmdagi *A*, *B* va *C* nuqtalar fazoda biror *Q* tekislikning vaziyatini aniqlaydi. Bu nuqtalardan har birining fazoviy o'rni o'zgarishi bilan tekislikning vaziyati ham fazoda o'zgaradi.

Chizma geometriyada tekisliklar quyidagi hollar bilan beriladi:



4.1-rasm

- bir to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lmagan uchta nuqta proyeksiyalari bilan (4.2–*a*, rasm);
- bir to'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta proyeksiyalari bilan (4.2–*b*, rasm);
- ikki parallel to'g'ri chiziq proyeksiyalari bilan (4.2 – *v*, rasm);
- ikki kesishuvchi to'g'ri chiziq proyeksiyalari bilan (4.2 – *g*, rasm);
- tekis geometrik figuralarning ortogonal proyeksiyalari orqali berilishi ham mumkin

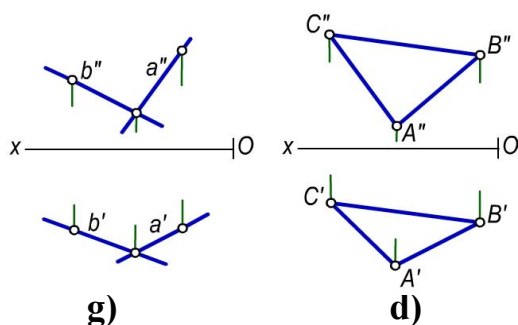


a)

b)

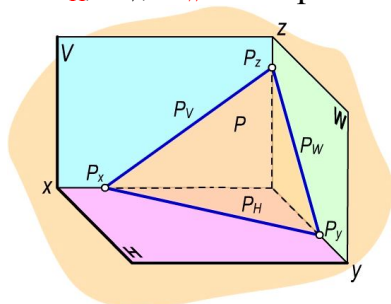
v)

(4.2a– rasm).



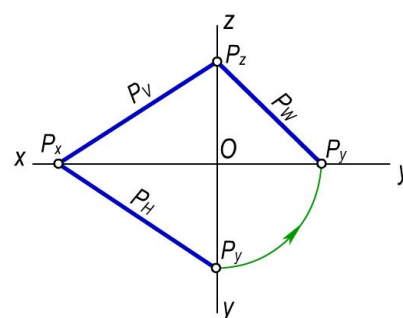
4.2-rasm

Shuningdek, tekislik proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishish chiziqlari orqali berilishi ham mumkin (4.3–rasm). Masalan, P tekislik H , V va W proyeksiyalar tekisliklarini P_H , P_V , P_W chiziqlar bo'yicha kesadi.



a)

4.3-rasm



b)

5.2-§. Tekislikning izlarini yasash

Ta'rif. Tekislikning proyeksiyalar tekisliklari bilan kesishgan chiziqlari tekislikning izlari deyiladi.

P tekislikning H tekislik bilan kesishgan $P_H = P \cap H$ chizig'i uning gorizontali izi, V tekislik bilan kesishgan $P_V = P \cap V$ chizig'i frontal izi va W tekislik bilan kesishgan $P_W = P \cap W$ chizig'i profil izi deb ataladi.

Tekislikni chizmada izlari bilan tasvirlash ancha qulay va afzaldir. Tekislikning Ox , Oy va Oz koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalari P_x , P_y , P_z izlarning uchrashuv nuqtalari deyiladi.

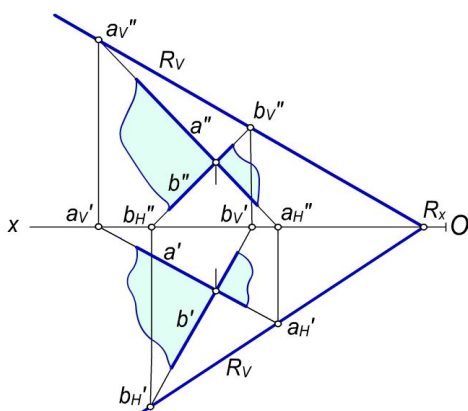
Tekislik qanday tarzda berilishidan qat'i nazar, uning izlarini ortogonal proyeksiyalarda yasash mumkin.

Har qanday geometrik figuralar orqali berilgan tekislikning izlarini yasash mazkur tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri chiziqlar izlarini yasash bilan bajariladi. Bunig uchun to'g'ri chiziqlarning tekislikka tegishlilik xususiyatidan foydalaniladi.

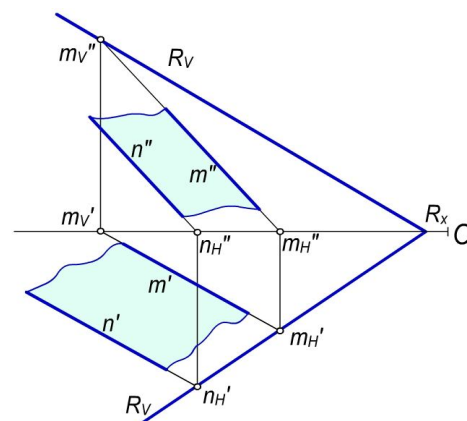
4.4-rasmda $a \cap b$ kesuvchi chiziqlar bilan berilgan tekislikning gorizontali izini yasash uchun to'g'ri chiziqlar gorizontali izlarining a'_H , a''_H , va b'_H , b''_H proyeksiyalarini topamiz. Agar to'g'ri chiziqlarning gorizontali izlarining gorizontali a'_H va b'_H proyeksiyalarini o'zaro tutashtirsak, tekislikning R_H gorizontali izini hosil qilamiz. Xuddi shu tarzda tekislikning R_V frontal izi yasaladi.

Ikki $m \parallel n$ parallel chiziqlar bilan berilgan R tekislikning R_H va R_V izlari ham to'g'ri chiziqlarining izlarini yasash yo'li bilan aniqlanadi (4.5-rasm). Umuman, turli geometrik shakllar bilan berilgan tekisliklarning izlari mazkur shaklga tegishli

bo'lgan ikki kesuvchi yoki parallel chiziqlarning izlarini yasash yo'li bilan aniqlanadi.



4.4-rasm



4.5-rasm

5.3-§. Tekisliklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan vaziyatlari

Tekislik fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan umumiy va xususiy vaziyatlarda joylashishi mumkin.

Umumiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisliklarining birortasiga parallel yoki perpendikulyar bo'lmasa, uni *umumiy vaziyatdagi tekislik* deyiladi (4.3, *a*-rasm). Chizmada umumiy vaziyatdagi tekislikning izlari proyeksiyalar o'qlari bilan ixtiyoriy burchak hosil qiladi (4.3, *b*-rasm).

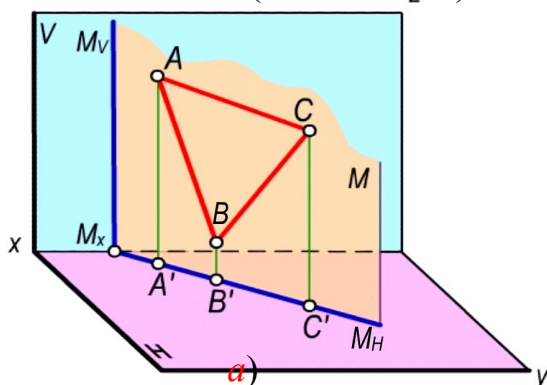
Xususiy vaziyatdagi tekisliklar. Agar tekislik proyeksiyalar tekisligining biriga perpendikulyar yoki parallel bo'lsa, uni *xususiy vaziyatdagi tekislik* deb ataladi.

Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekisliklar *proyeksiyalovchi tekisliklar* deyiladi.

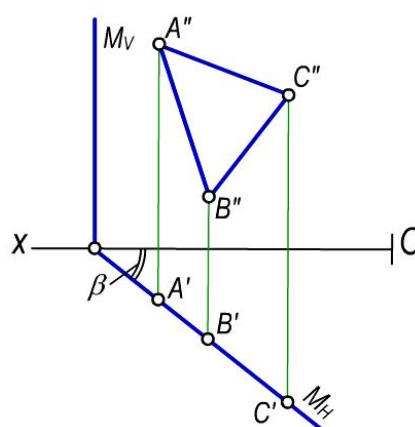
Gorizontal proyeksiyalovchi tekislik

Ta'rif. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik *gorizontal proyeksiyalovchi tekislik* deyiladi.

Gorizontal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislikning M_V frontal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi (4.6, *a*, *b*-rasm), M_H gorizontal izi esa Ox o'qiga nisbatan ixtiyoriy burchakda joylashgan bo'ladi. Bu tekislik gorizontal izi M_H va Ox o'q orasidagi β burchak, M va V tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng bo'ladi. Gorizontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli tekis geometrik figuralarning gorizontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va tekislikning gorizontal izi bilan ustma-ust tushadi (4.6 – *b*, rasm).



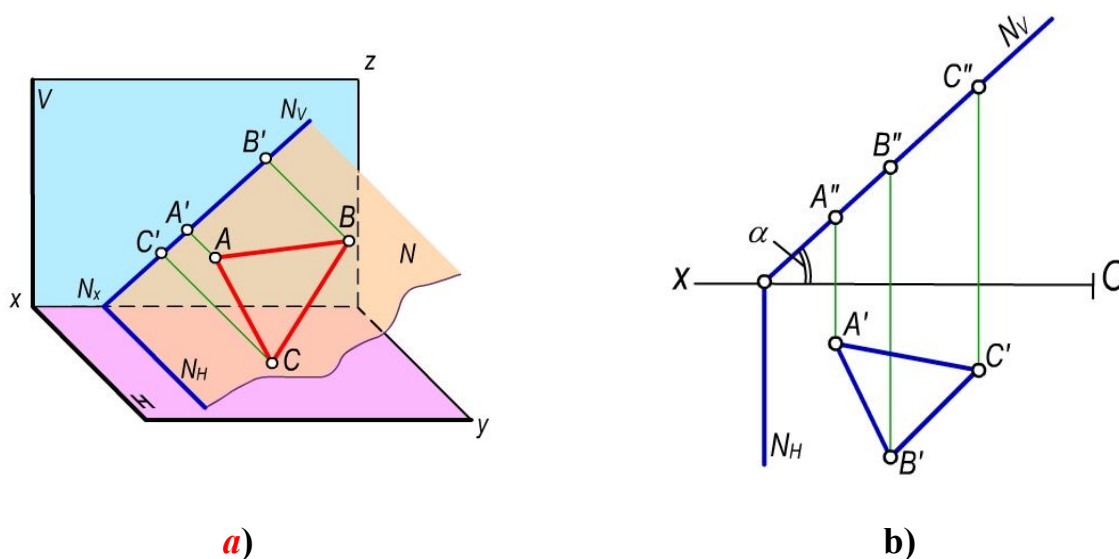
4.6-rasm



Frontal proyeksiyalovchi tekislik

Ta'rif. Frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lgan tekislik **frontal proyeksiyalovchi tekislik** deyiladi.

Frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislikning gorizonttal N_H izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi (4.7-*a*, rasm), frontal N_V izi esa ixtiyoriy burchakda joylashgan bo'ladi. Frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal N_V izining Ox o'qi bilan hosil qilgan α burchagi N va H tekisliklar orasidagi burchakning haqiqiy qiymatiga teng. Frontal proyeksiyalovchi tekislikka tegishli bo'lgan tekis figuralarning frontal proyeksiyalari to'g'ri chiziq bo'ladi va tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi (4.7-rasm).



4.7-rasm

Profil proyeksiyalovchi tekislik

Ta'rif. Profil proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar tekislik **profil proyeksiyalovchi tekislik** deb ataladi.

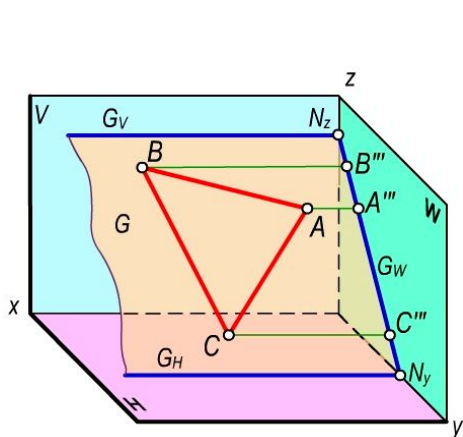
Bu tekislikning gorizonttal G_H va frontal G_V izlari Ox o'qiga parallel bo'ladi (4.8-*a*, rasm).

G profil proyeksiyalovchi tekislikning H va V tekisliklar bilan hosil qilgan α va β burchaklari 4.8-*b*, rasmda ko'rsatilganidek haqiqiy kattalikda proyeksiyalanadi.

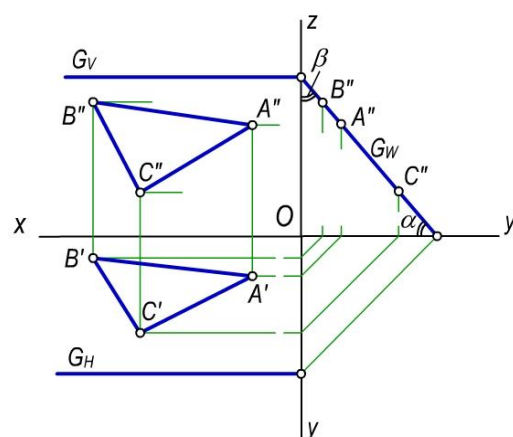
Shuningdek, profil proyeksiyalovchi tekislik proyeksiyalar o'qi Ox dan ham o'tishi mumkin (4.9-*a*-rasm). U holda G tekislikning gorizonttal G_H va frontal G_V izlari Ox o'qida bo'ladi va tekislikning fazoviy vaziyatini aniqlab bo'lmaydi. Shuning uchun bunday hollarda mazkur tekislikning profil izi yoki shu tekislikka tegishli bo'lgan biror $A(A', A'')$ nuqtaning ikki proyeksiyasi beriladi (4.9-*b* rasm). Bu nuqtaning A''' proyeksiyasi orqali tekislikning profil izini yasash mumkin (4.10-rasm).

Proyeksiyalovchi tekislikning ikkita izini chizmada tasvirlash shart emas. Tekislikning bitta izi, aynan gorizonttal proyeksiyalovchi tekislikning gorizonttal izi M_H , frontal proyeksiyalovchi tekislikning frontal izi N_V , profil proyeksiyalovchi

tekislikning profil izi G_W , orqali ham ularning vaziyatini aniqlash mumkin (4.11-rasm).

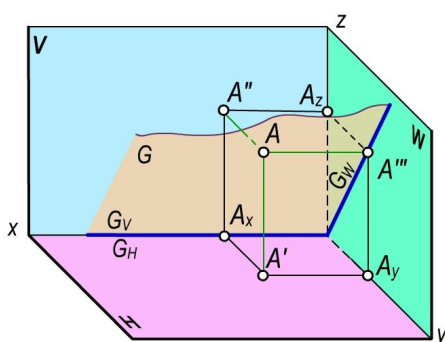


a)

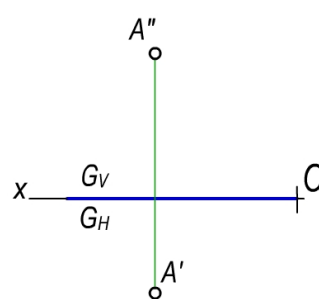


b)

4.8-rasm

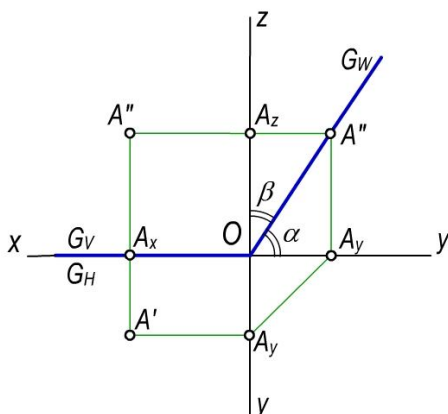


a)

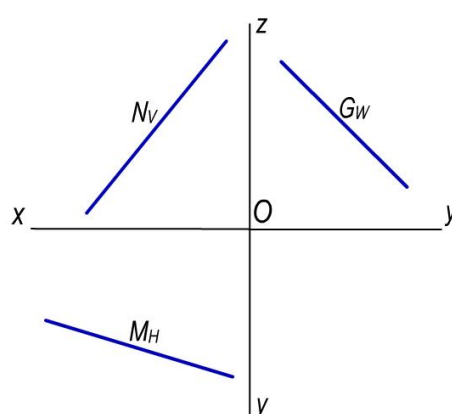


b)

4.9-rasm



4.10-rasm



4.11-rasm

5.4-§. Proyeksiyalar tekisligiga parallel tekisliklar

Gorizontal tekislik

Ta'rif. Gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik **gorizontal tekislik** deyiladi.

Bu tekislik bir vaqtda V va W tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal H_{IV} izi aniqlaydi (4.12- a, b , rasm).

Frontal tekislik

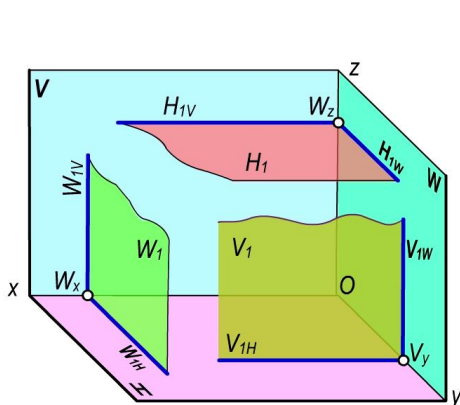
Ta'rif. Frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik **frontal tekislik** deyiladi.

Bu tekislik bir vaqtda H va W tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning vaziyatini uning frontal V_{IH} izi aniqlaydi (4.12- a, b , rasm).

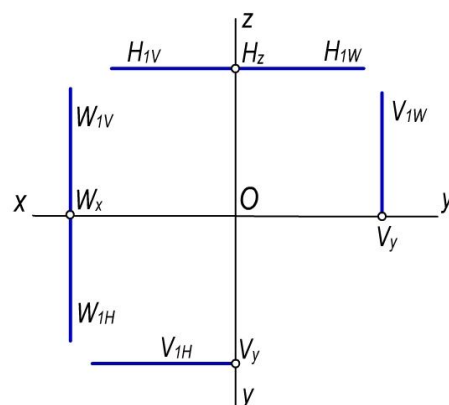
Profil tekislik

Ta'rif. Profil proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislik **profil tekislik** deyiladi.

Profil W_1 tekislik bir vaqtda H gorizontal va V frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'ladi. Tekislikning fazoviy vaziyatini uning W_{IH} gorizontal va W_{IV} frontal izlari aniqlaydi (4.12- a, b , rasm).



a)



b)

4.12-rasm

5.5-§. Tekislik va to'g'ri chiziqlarning o'zaro joylashuvi

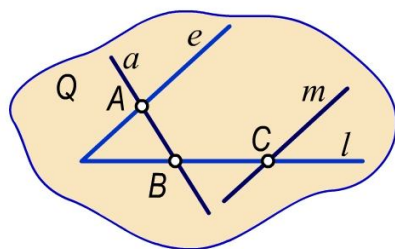
To'g'ri chiziq va tekislik fazoda o'zaro quyidagi vaziyatlarda bo'lishi mumkin:

- to'g'ri chiziq tekislikka tegishli ($a \subset P$),
- to'g'ri chiziq tekislik bilan kesishadi ($a \cap P$),
- to'g'ri chiziq tekislikka parallel ($a \parallel P$),
- to'g'ri chiziq tekislikka perpendikulyar ($a \perp P$).

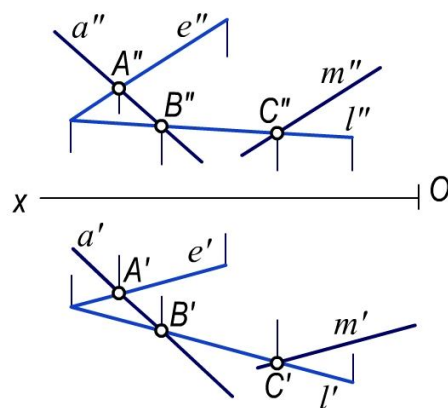
Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq va nuqta. Quyidagi xollarda to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi:

- agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi. Masalan, a to'g'ri chiziqning A va B nuqtalari (4.13-rasm) Q tekislikka tegishli bo'lganligi uchun a to'g'ri chiziq Q tekislikka tegishli bo'ladi;
- agar m to'g'ri chiziqning bir nuqtasi tekislikka tegishli bo'lib, mazkur tekislikka tegishli yoki unga parallel biror to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'ladi. Masalan, m to'g'ri chiziqning C nuqtasi Q tekislikka tegishli va bu to'g'ri chiziq mazkur tekislikka

tegishli to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda m to'g'ri chiziq Q tekislikka tegishli bo'ladi.



a)

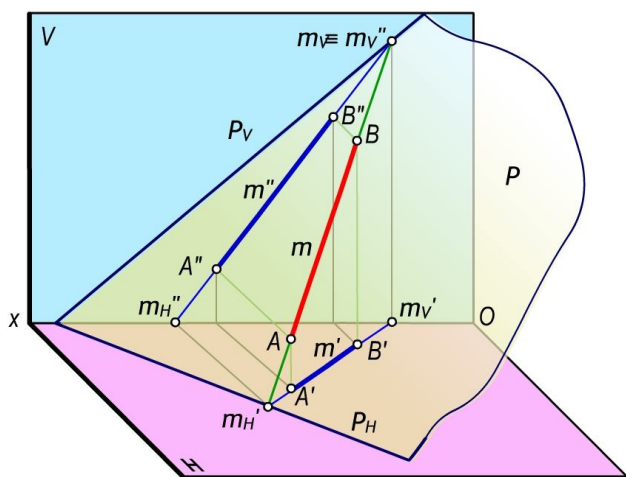


b)

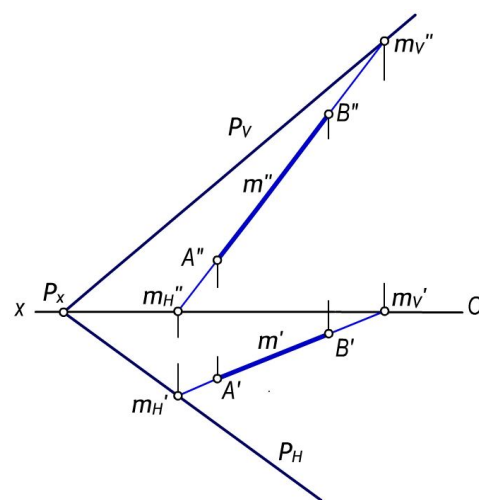
4.13-rasm

To'g'ri chiziqning tekislikka tegishli bo'lish shartlaridan quyidagi xulosaga kelish mumkin.

Agar to'g'ri chiziq tekislikka tegishli bo'lsa, bu to'g'ri chiziqning bir nomli izlari tekislikning bir nomli izlariga tegishli bo'ladi (4.14-rasm). P tekislikka tegishli m to'g'ri chiziqning M_H horizontal izi tekislikning P_H horizontal izida, to'g'ri chiziqning M_V frontal izi tekislikning P_V frontal izida joylashgan. Demak, m to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli bo'ladi, ya'ni $m \subset P$.



a)



b)

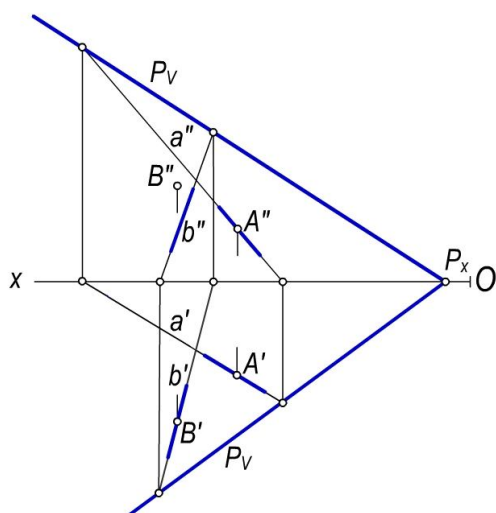
4.14-rasm

Agar nuqta tekislikka tegishli bo'lsa, bu nuqta tekislikning biror to'g'ri chizig'iga tegishli bo'ladi. Masalan, 4.15-rasmida $P(P_H, P_V)$ tekislik, $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalarning proyeksiyalari berilgan. Tekislik va nuqtalarning o'zaro joylashuvini aniqlash ko'rsatilgan.

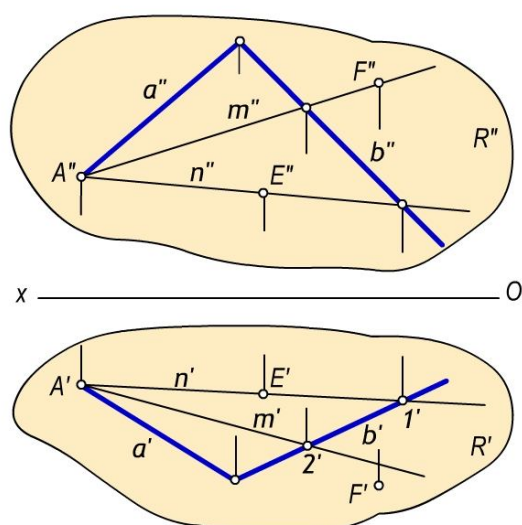
4.16-rasmida a va b kesishuvchi chiziqlar orqali berilgan R tekislik bilan E va F nuqtalarning o'zaro vaziyati m va n chiziqlar yordami bilan aniqlangan:

1. $E' \in n'$ va $E'' \in n''$ bo'lgani uchun $E \in R$.

2. $F' \notin m'$ va $F'' \in m''$ bo'lgani uchun esa $F \notin R$.



4.15-rasm



4.16-rasm

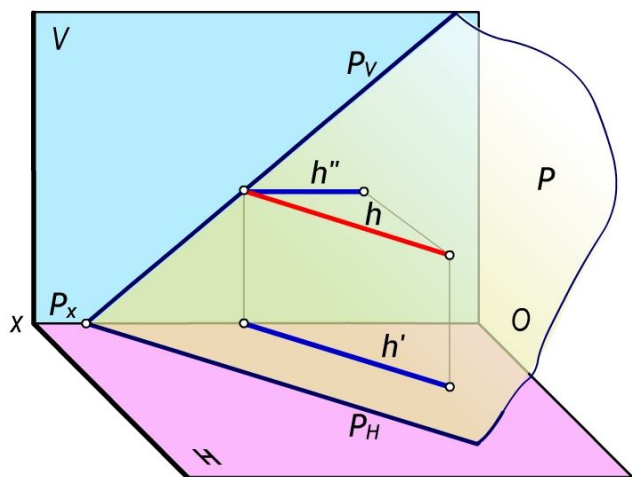
5.6-§. Tekislikning bosh chiziqlari

Tekislikning bosh chiziqlariga uning gorizontali, frontali va eng katta og'ish chiziqlari kiradi.

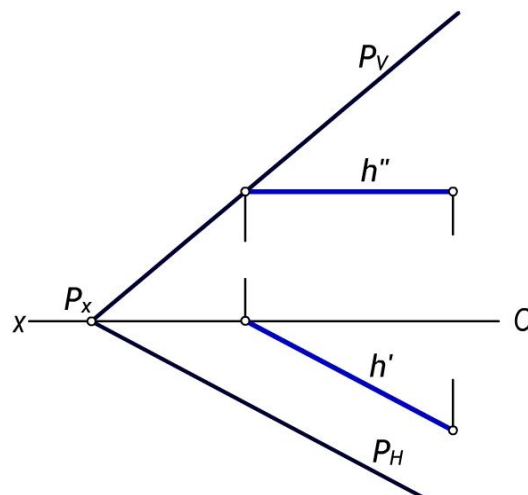
Tekislikning gorizontali

Ta'rif. Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq H tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq **tekislikning gorizontali** deyiladi.

Chizmada tekislik gorizontalinining frontal proyeksiyasi Ox ga gorizontaal proyeksiyasi esa tekislikning gorizontaal iziga parallel bo'ladi (4.17-rasm).



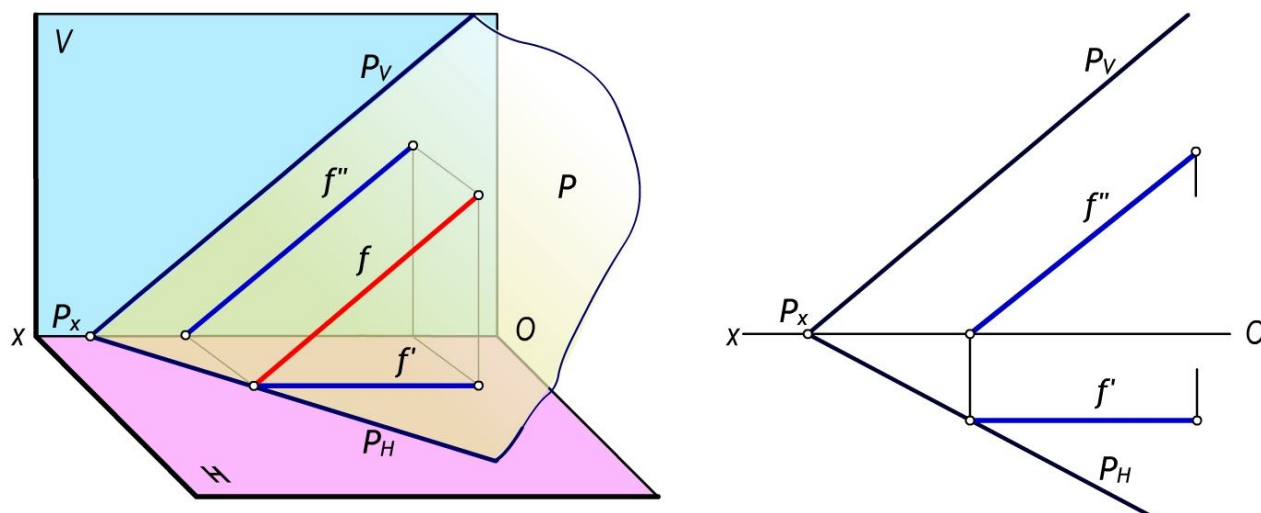
4.17-rasm



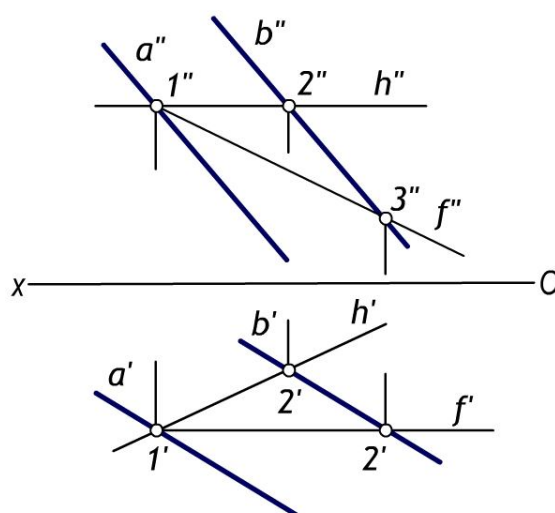
Tekislikning frontali

Ta'rif. Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq V tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq **tekislikning frontali** deyiladi.

Chizmada tekislik frontalining gorizontaal proyeksiyasi proyeksiyalar o'qi Ox ga parallel bo'ladi (4.18-rasm).



4.18-rasm.



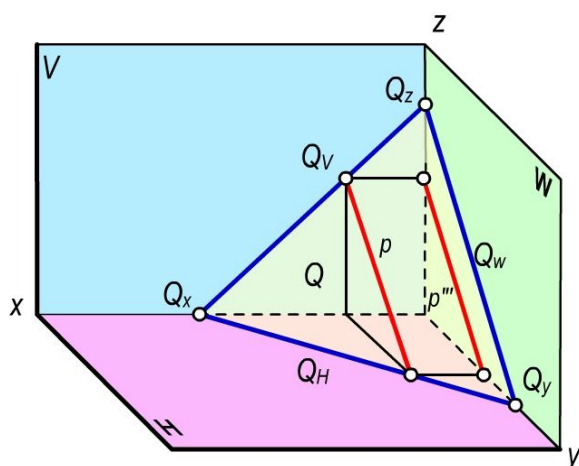
4.19-rasm.

4.19-rasmda $a \cap b$ chiziqlar bilan berilgan tekislikning h gorizontali va f frontali tasvirlangan.

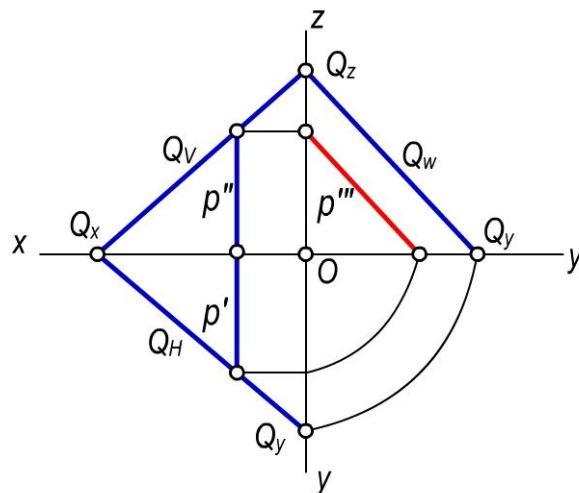
Tekislikning profil chizig'i

Ta'rif. Agar tekislikka tegishli to'g'ri chiziq profil proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikning **profil chizig'i** yoki **profili** deyiladi.

Bunda $p \in Q$ bo'lib va $p \parallel W$ bo'lsa, p to'g'ri chiziq Q tekislikning profili bo'ladi (4.20, a, b-rasm).



a)



b)

4.20-rasm

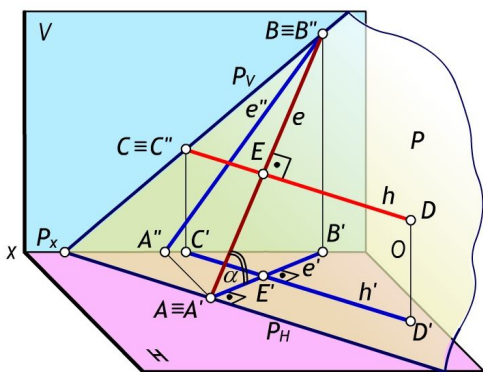
Tekislikning eng katta og'ma chizig'i

Ta'rif. Tekislikka tegishli va tekislikning bosh chiziqlaridan biri (gorizontal yoki frontal)ga perpendikulyar to'g'ri chiziq **tekislikning eng katta og'ma chizig'i** deb ataladi.

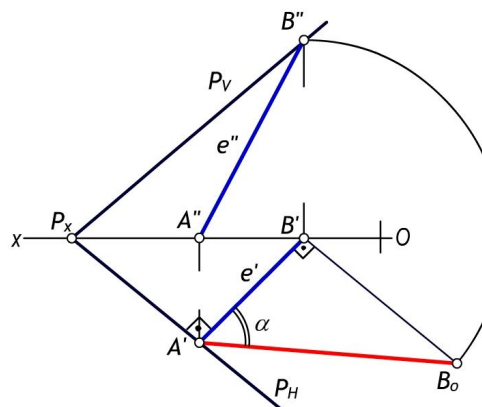
Agar P tekislikka tegishli e to'g'ri chiziq tekislikning gorizontalliga perpendikulyar bo'lsa, u holda e to'g'ri chiziqni P tekislikning H tekislikka nisbatan **eng katta og'ma chizig'i** deyiladi.

4.21-rasmda P tekislikning H tekislikka eng katta og'ma chizig'i tasvirlangan. Bu yerda $h \subset P$ va $h \parallel H$. To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatidan; $\angle BED = 90^\circ$ va $ED \parallel H$ bo'lgani uchun $\angle B'E'D' = 90^\circ$ bo'ladi.

Tekislikning eng katta og'ma chizig'i orqali uning proyeksiyalar tekisligi bilan hosil qilgan ikki yoqli burchagi aniqlanadi (4.21, b-rasm). P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'i P va H tekisliklar orasidagi $\angle BAB'$ chiziqli burchakni ifodalaydi (chunki $AB \perp P_H$ va $A'B' \perp P_H$). Bu ikki yoqli burchakning qiymatini aniqlaydi.



a)



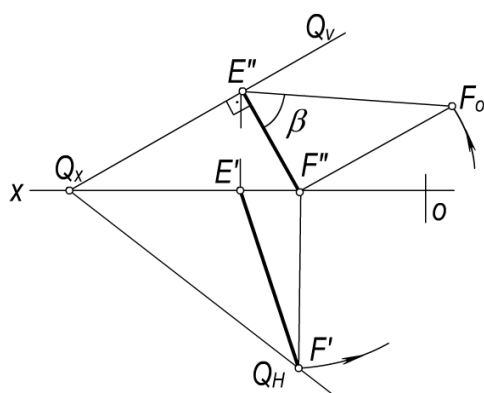
b)

4.21-rasm

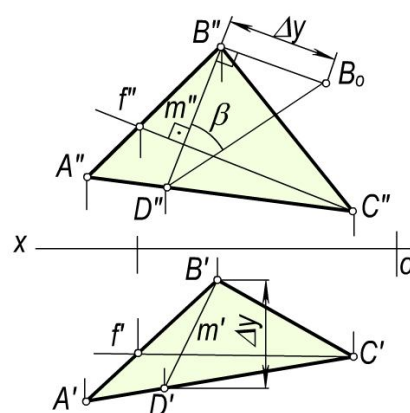
P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'ining gorizontall proyeksiyasi P_H tekislikning h gorizontall chizig'ining h' gorizontall proyeksiyasiga yoki tekislikning P_H gorizontall iziga perpendikulyar bo'ladi (4.21,b-rasm).

P tekislikning H ga nisbatan eng katta og'ma chizig'ini yasash uchun P_H gorizontall izida ixtiyoriy A nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan $e \in P$ to'g'ri chiziqning gorizontall proyeksiyasini $e' \perp P_H$ qilib, P tekislikning H tekislikka eng katta og'ma chizig'ining gorizontall proyeksiyasini o'tkaziladi va Ox o'qida $e' \cap Ox = B'$ nuqtani aniqlanadi. So'ngra bu chiziqning frontal e'' proyeksiyasi A' va B' nuqtalar yordamida yasaladi. Hosil bo'lgan $e \in P$ to'g'ri chiziqning e' va e'' proyeksiyalari P tekislikning H tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi. Bu chiziqning H tekislik bilan hosil qilgan α burchagi aniqlanadi. Buning uchun to'g'ri burchakli uchburchak $\Delta A'B'V_0$ dan foydalanilgan (4.21,b-rasm).

Xuddi shunday $Q(Q_H, Q_V)$ tekislikning V tekislik bilan hosil etgan β burchagi yasaladi (4.22-rasm)



4.22-rasm



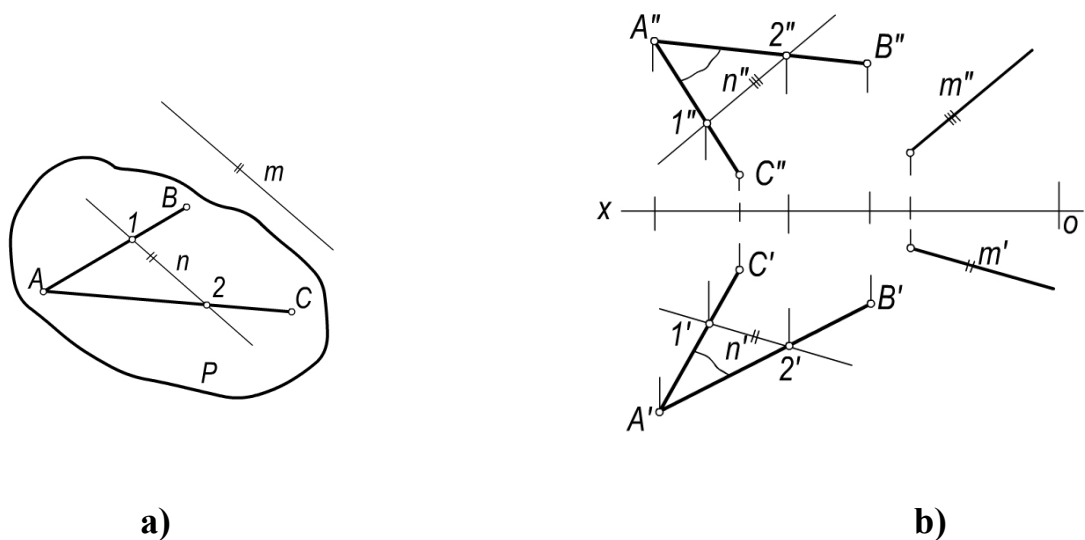
4.23-rasm

ΔABC orqali berilgan tekislikning V tekislik bilan hosil qilgan burchagi aniqlangan (4.23-rasm). Buning uchun ABC tekislikning $f(f', f'')$ frontalini olamiz va unga perpendikulyar qilib berilgan tekislikning V tekislikka nisbatan eng katta og'ma chizig'i $m(m', m'')$ dan foydalanamiz.

5.7-§. To'g'ri chiziq va tekisliklarning o'zaro parallelligi

Ta'rif. Agar fazodagi m to'g'ri chiziq P tekislikka tegishli biror n to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa, u holda bu to'g'ri chiziq tekislikka parallel bo'ladi.

Bunda $n \subset P$ bo'lib, $m \parallel n$ bo'lsa $m \parallel P$ bo'ladi (4.24-a, b rasm).

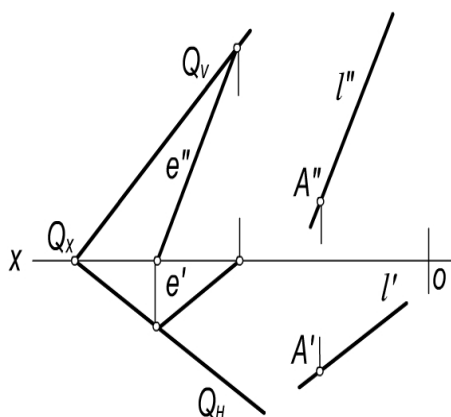


4.24-rasm

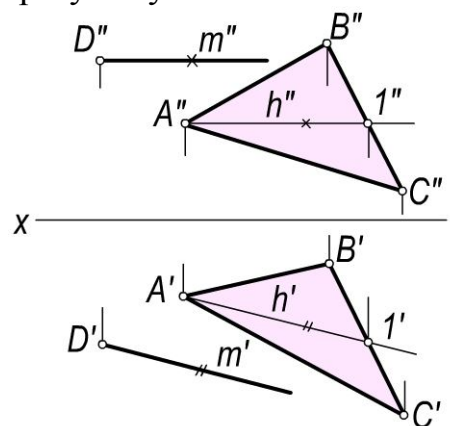
1-misol. A (A' , A'') nuqtadan Q (Q_H , Q_V) tekislikka parallel to'g'ri chiziq o'tkazish talab qilinsin (4.25-rasm).

A nuqtadan Q tekislikka parallel qilib cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlar o'tkazish mumkin. Shunday to'g'ri chiziqlarning ixtiyoriy bittasi l o'tkaziladi.

Buning uchun Q tekislikka tegishli ixtiyoriy e (e' , e'') to'g'ri chiziq tanlanadi. Bu to'g'ri chiziqning bir nomli proyeksiyalariga parallel qilib A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan to'g'ri chiziqning l' va l'' proyeksiyalari o'tkaziladi.



4.25-rasm

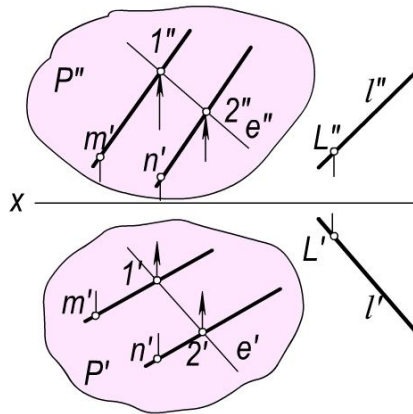


4.26-rasm

2-misol. D (D' , D'') nuqtadan ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) tekisligi va gorizontal proyeksiyalar tekisligi H ga parallel m to'g'ri chiziq o'tkazilsin (4.26-rasm).

Buning uchun $\triangle ABC$ tekisligida H ga parallel, qilib uning gorizontali h (h' , h'') to'g'ri chiziq o'tkaziladi. So'ngra D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan $m' \parallel h'$ va $m'' \parallel h''$ qilib izlangan to'g'ri chiziqning proyeksiyalari o'tkaziladi.

3-misol. P ($m \parallel n$) tekislik va l (l' , l'') to'g'ri chiziqning o'zaro vaziyati aniqlansin (4.27-rasm).



4.27-rasm

To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro vaziyatini aniqlash uchun P tekislikda $e' \parallel l'$ qilib to'g'ri chiziqning gorizontali proyeksiyasini o'tkaziladi va uning frontal e'' proyeksiyasi yasaladi. Chizmada e'' to'g'ri chiziq l'' ga paralell bo'lmagani uchun l to'g'ri chiziq tekislikka paralell bo'lmaydi.

Nazorat savollari

1. Tekislik kompleks chizmada qanday ko'rinishlarda berilishi mumkin?
2. Tekislik izi deb nimaga aytiladi?
3. Qanday tekisliklar proyeksiyalovchi deyiladi?
4. Gorizontali va gorizontali proyeksiyalovchi hamda frontal va frontal proyeksiyalovchi tekisliklarning farqi nimada?
5. Nuqta tekislikka tegishli bo'lsa, uning proyeksiyalari qanday yasaladi?
6. Qanday chiziqlar tekislikning bosh chiziqlari deyiladi?
7. Qanday to'g'ri chiziqlar tekislikning gorizontali, frontali, eng katta og'ma chizig'i deb ataladi?
8. Tekislikning eng katta og'ma chiziqlari yordamida qanday burchaklarni aniqlanish mumkin?

6-ma'ruza - 2 soat.
Tekislik va to'g'ri chiziq

Ikki tekislikning o'zaro vaziyatlari.
To'g'ri chiziq va tekislikning paralleligi.
To'g'ri chiziqlarning tekislik bilan kesishuvi.

Tayanch iboralar va tushunchalar.

Parallel tekisliklar, kesishuvchi tekisliklar, tekisliklarning kesishuv chizig'i, tekislikka parallel to'g'ri chiziq, to'g'ri chiziqni tekislik bilan kesishuv nuqtasi.

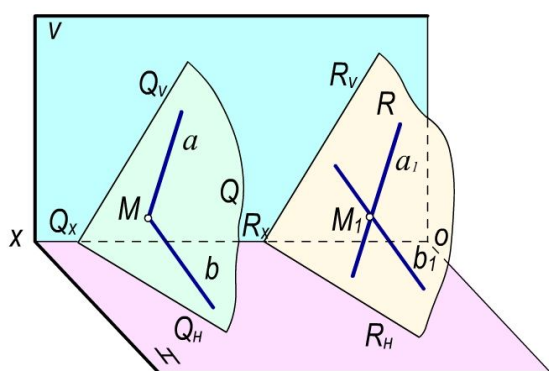
6.1-§. Parallel tekisliklar

Ta'rif. Agar bir tekislikka tegishli $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ikkinchi tekislikka tegishli $a_1 \cap b_1$ kesishuvchi to'g'ri chiziq'larga mos ravishda o'zaro parallel bo'lsa, bunday tekisliklar ham o'zaro parallel deyiladi.

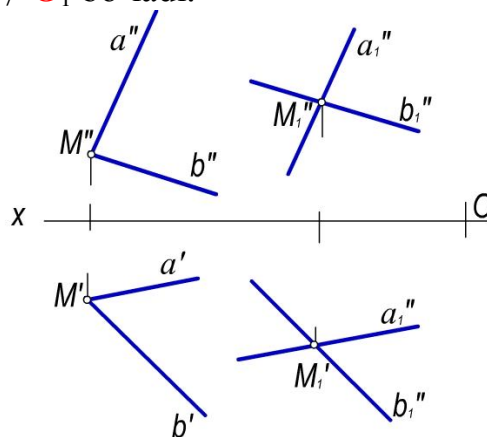
Agar Q tekislikka tegishli $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar ikkinchi P tekislikka tegishli $a_1 \cap b_1$ kesishuvchi to'g'ri chiziq'larga mos ravishda o'zaro parallel bo'lsa, bu tekisliklar ham o'zaro parallel bo'ladi (4.28-rasm).

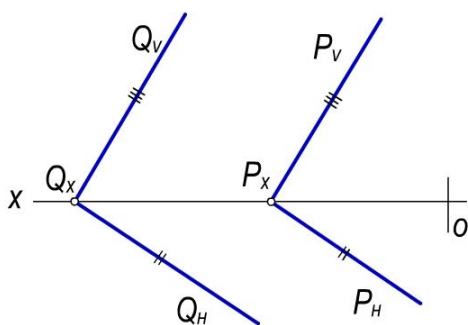
Agar fazodagi ikki tekislik bir-biriga parallel bo'lsa, chizmada bu tekisliklarning bir nomli izlari ham o'zaro parallel bo'ladi, ya'ni: $Q \parallel R$ bo'lsa; $Q_H \parallel R_H$, $Q_V \parallel R_V$ va $Q_W \parallel R_W$ bo'ladi (4.29-rasm).

Chizmada profil proyeksiyalovchi tekisliklar uchun ularning gorizont va frontal izlari parallel bo'lishi yetarli bo'lmaydi. Masalan, 4.30-rasmda berilgan G va G_1 tekisliklarda $G_H \parallel G_{1H}$ va $G_V \parallel G_{1V}$ bo'lib, $G_W \neq G_{1W}$ bo'lgani uchun $G \neq G_1$ bo'ladi. Bu tekisliklarning o'zaro vaziyatini tekisliklarga tegishli a va b to'g'ri chiziqlar yordami bilan ham aniqlash mumkin, bunda $a \subset G_1$ va $b \subset G$ bo'lgan holda $a'' \parallel b''$ bo'lsa, $a' \neq b'$ bo'lgani uchun $a \neq b$ va $G \neq G_1$ bo'ladi.

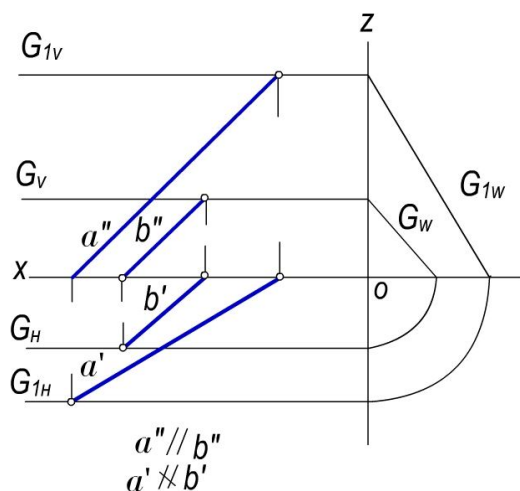


4.28-rasm





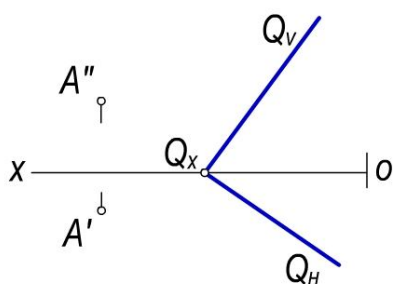
4.29-rasm



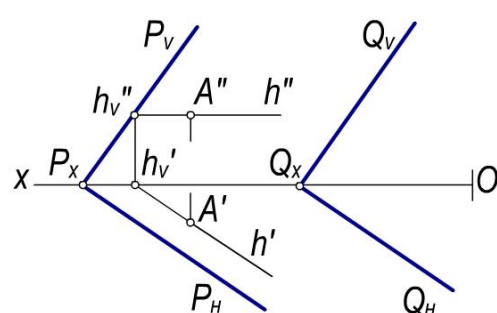
4.30-rasm

Fazodagi ixtiyoriy nuqta orqali berilgan tekislikka faqat bitta parallel tekislik o'tkazish mumkin.

1-misol. $A (A', A'')$ nuqtadan $Q (Q_H, Q_V)$ tekislikka parallel $P (P_H, P_V)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.31-a, rasm). Tekisliklarning parallellik xususiyatlariga ko'ra P tekislikning izlari $P_H \parallel Q_H$ va $P_V \parallel Q_V$ bo'lishi shart. Misolni yechish uchun to'g'ri chiziq va tekislikning parallellik shartlaridan foydalanib, A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikka parallel qilib ixtiyoriy to'g'ri chiziq, $h (h', h'')$ gorizont o'tkaziladi (4.31-b, rasm).



a)



b)

4.31-rasm

Bu gorizontning frontal izi h''_v yasaliy undan izlangan P tekislikning P_V izi berilgan tekislikning Q_V iziga parallel qilib o'tkaziladi. So'ngra $P_V \cap Ox = P_X$ nuqtasidan Q tekislikning Q_H iziga parallel qilib izlangan tekislikning P_H izi o'tkaziladi.

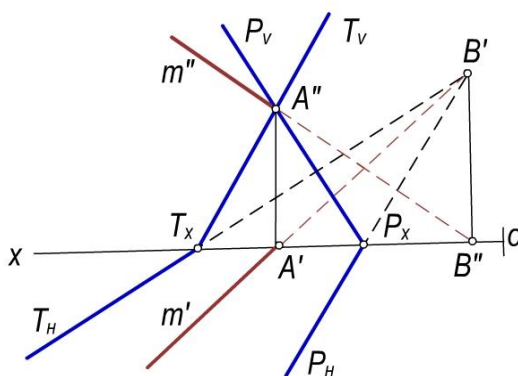
2-misol. $E (E', E'')$ nuqtadan $a (a', a'')$ va $b (b', b'')$ parallel chiziqlar bilan berilgan tekislikka parallel tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.32-a, rasm).

$$l = Q \cap P.$$

Chizmada (4.34-b,rasm) bu tekisliklarning kesishish chizig'ining proyeksiyalarini yasash uchun tekisliklarning bir nomli izlarining kesishish E va F nuqtalarining E', E'' va F', F'' proyeksiyalari aniqlanadi va bir nomli proyeksiyalarini o'zaro tutashtiriladi. Natijada hosil bo'lgan l' va l'' to'g'ri chiziqlar Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi. Agar tekisliklarning izlari birinchi oktantda kesishmasa u holda bir nomli izlarini davom ettirib ularning kesishuv nuqtasini boshqa oktantda topish bilan kesishuv chizig'i nuqtalarining proyeksiyalarini yasash mumkin.

Masalan, $T (T_H, T_V)$ va $P (P_H, P_V)$ tekisliklarning (4.35-rasm) gorizontall izlari T_n va P_n ikkinchi oktantda kesishadi.

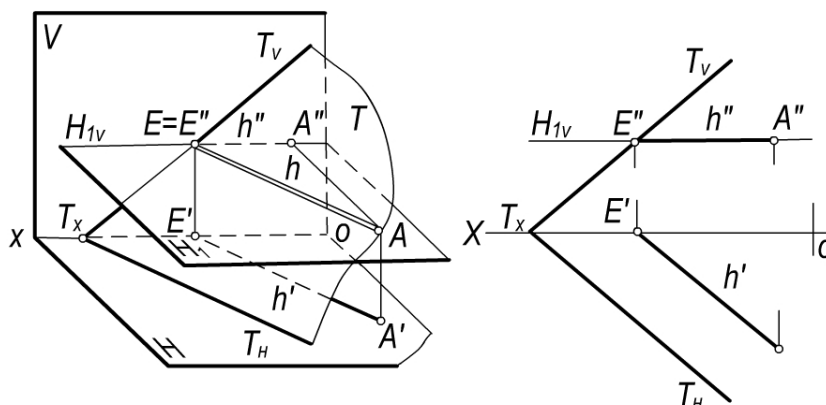
Kesishuvchi tekisliklarning biri gorizontall tekislik bo'lsa, bu tekisliklar gorizontall chiziq bo'yicha kesishadi.



4.35-rasm

4.36-a,b-rasmda umumiy vaziyatdagi T tekislik bilan H_1 gorizontall tekislikning kesishish chizig'i h gorizontall bo'ladi. Agar umumiy vaziyatdagi tekislik frontal tekislik bilan kesishgan bo'lsa, bu tekisliklar frontal bo'yicha kesishadi.

Ammo kesishuvchi tekisliklarning biri proyeksiyalovchi tekislik bo'lsa, proyeksiyalovchi tekislikning xossasiga muvofiq, ularning kesishish chizig'ining proyeksiyalaridan biri proyeksiyalovchi tekislikning izida bo'ladi (4.37-rasm).



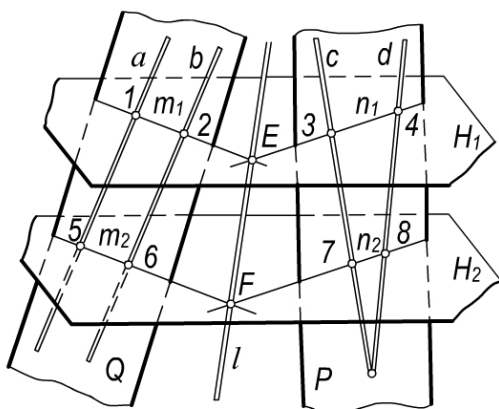
4.36-rasm

Kesishuvchi tekisliklarning bir nomli izlari chizma chegarasida kesishmasa, ularning kesishish chizig'ini yordamchi tekisliklar vositasida aniqlash mumkin. Masalan, umumiy vaziyatdagi $P (P_H, P_V)$ va $T (T_H, T_V)$ tekisliklarning kesishish

The diagram illustrates the forces acting on a structural element at its base. It features a central point where several forces intersect. Key elements include:

- Points:** Labeled points include $1''$, $2''$, $3''$, $4''$, and $5''$.
- Forces:**
 - H_{1v} : Horizontal reaction force at the top left.
 - V_{1H} : Vertical reaction force at the bottom left.
 - P_v : Force vector pointing downwards from $1''$.
 - T_v : Force vector pointing upwards towards $2''$.
 - P_h : Force vector pointing horizontally to the right from $3''$.
 - T_h : Force vector pointing horizontally to the left towards $4''$.
- Moments and Distances:**
 - f_1'' and f_2'' : Distances or moment arms related to the vertical forces.
 - h'_1 and h'_2 : Distances or height parameters related to the horizontal forces.
- Geometry:** The diagram uses a coordinate system with axes x and y . It shows the intersection of a vertical plane, a horizontal plane, and an inclined plane, with various projection lines and angles indicated.

Dastlab H_1 tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish chiziqlarini aniqlash uchun tekisliklarni a , b va s , d , chiziqlarini 1, 2 va 3, 4 nuqtalarda kesganligi belgilanadi. Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirganda, m_1 va n_1 chiziqlar hosil bo'ladi, ya'ni: $H_1 \cap Q = m_1$ va $H_1 \cap P = n_1$ bo'ladi. m_1 va n_1 to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $E = m_1 \cap n_1$ Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan birinchi nuqtadir.



57

Har ikkala P va Q tekisliklar uchun umumiy bo'lgan E va F nuqtalarni o'zaro tutashtirsak, tekisliklarning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.

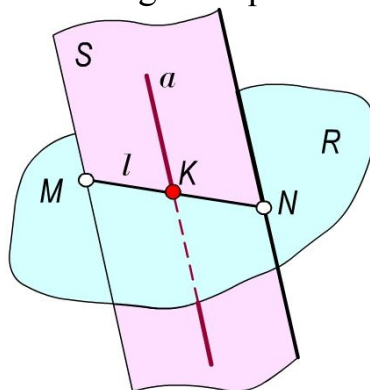
6.3-§. To'g'ri chiziqlarning tekislik bilan kesishishi

Agar to'g'ri chiziq tekislikka parallel yoki tegishli bo'lmasa bu to'g'ri chiziq tekislik bilan kesishadi.

To'g'ri chiziq tekislik bilan kesishishi natijasida nuqta hosil bo'ladi.

Bu nuqtani aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlaridan foydalanadi (4.40-rasm)

- Berilgan a to'g'ri chiziqdan yordamchi S tekislik o'tkaziladi: $a \subset S$
- R va S tekisliklarning kesishish l chizig'i yasayladi: $S \cap R = l$
- a to'g'ri chiziqlarning l bilan kesishgan nuqtasi $K = a \cap l$ bo'ladi.

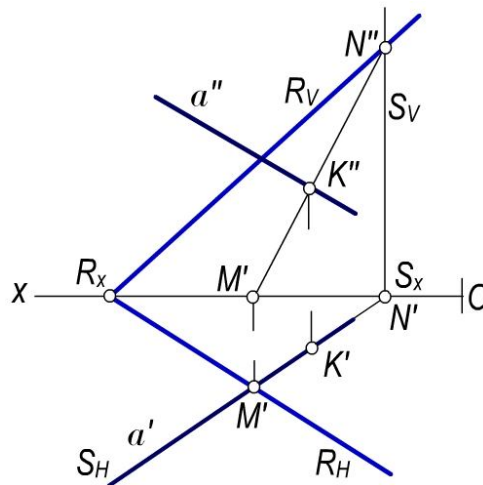


4.40-rasm

Demak, K nuqta a to'g'ri chiziqqa va R tekislikka tegishli umumiy nuqta bo'ladi. Odatda, yordamchi S tekislikni proyeksiyalovchi vaziyatda o'tkaziladi.

Chizmada $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqlarning $R(R_H, R_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini Yuqorida keltirilgan yasash algoritmlari bo'yicha aniqlaymiz (4.41-rasm). Buning uchun:

- To'g'ri chiziqlarning a' proyeksiyasidan yordamchi gorizontal proyeksiyalovchi S tekislikning S_H izini o'tkaziladi.
- S va R tekisliklarning kesishuv chizig'ining l' va l'' proyeksiyalarni yasaladi. Buning uchun tekisliklar izlarining kesishish nuqtalarining proyeksiyalari M', M'' va N', N'' dan foydalaniladi.
- a to'g'ri chiziqlarning frontal a'' proyeksiyasi S va R tekisliklarning kesishish chizig'i l ning frontal l'' proyeksiyasi bilan kesishib K nuqtaning K'' proyeksiyasi aniqlanadi:
 $K'' = a'' \cap l''$.

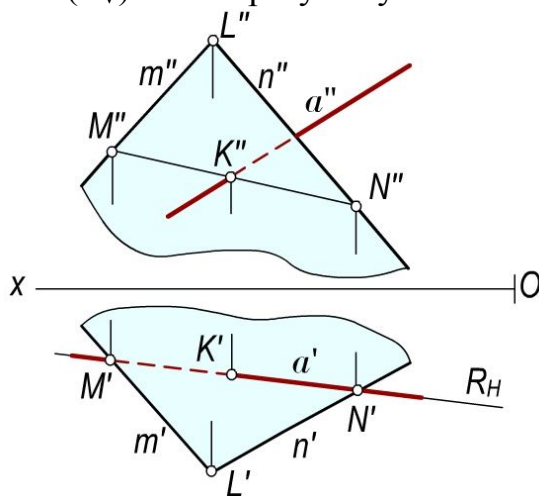


4.41-rasm

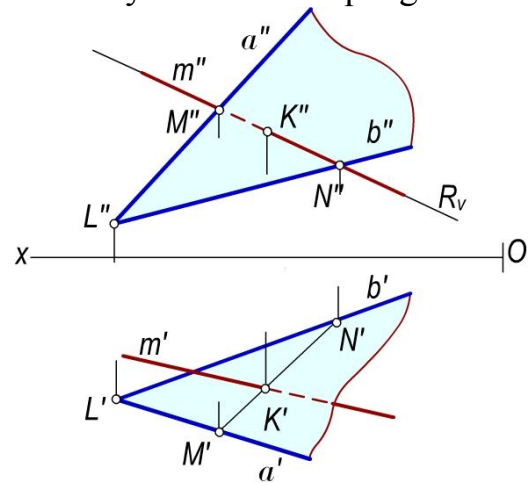
K nuqtaning K' proyeksiyasi tekislikning S_H iziga, a to'g'ri chiziqning a' proyeksiyasiga tegishli bo'ladi.

Yuqoridagi misolni a to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

$(m \cap n)$ tekislik bilan a to'g'ri chiziqning K kesishish nuqtasining proyeksiyalari 4.42-rasmdagi chizmada a to'g'ri chiziq orqali $R(R_H)$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish bilan aniqlangan bo'lsa, 4.43-rasmdagi chizmada m to'g'ri chiziq orqali $R(R_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik o'tkazish yo'li bilan aniqlangan.

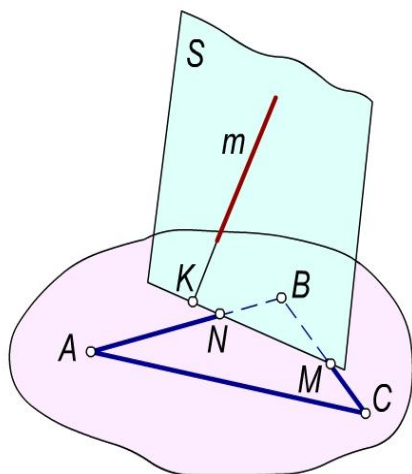


4.42-rasm

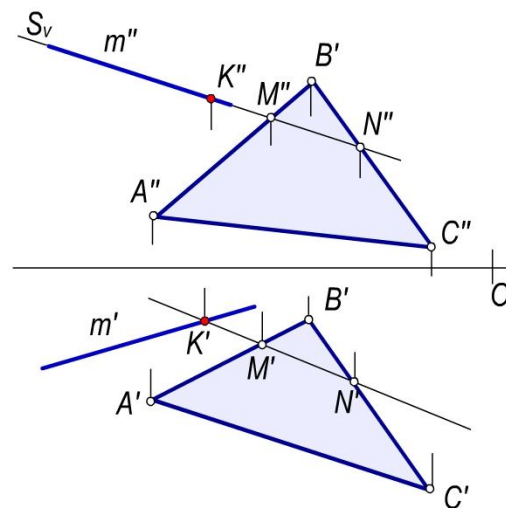


4.43-rasm

Ayrim hollarda to'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasi mazkur tekislikni ifodalovchi chegaralangan ABC tekis shaklning tashqarisida bo'lishi mumkin (4.44-a, b rasm). Bunday hollarda tekislikni chegaralanmagan geometrik sirt ekanligini esda tutish lozim.



a)



b)

4.44-rasm

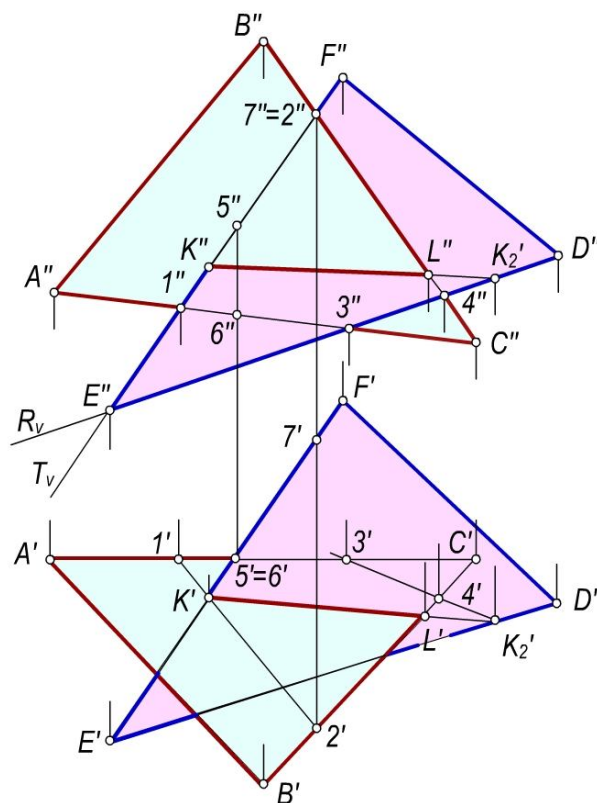
To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtasini yasash algoritmidan foydalanib, turli geometrik tekis figuralarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash mumkin. Masalan, 4.45-rasmda ABC ($A'B'C'$, $A''B''C''$) va DEF ($D'E'F'$, $D''E''F''$) uchburchaklar bilan berilgan tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'ining proyeksiyalari KL ($K'L'$, $K''L''$) yasalgan.

$\triangle ABC$ va $\triangle DEF$ tekisliklarning kesishish chizig'ining yasash uchun ulardan birini, masalan, $\triangle DEF$ ning EF va ED tomonlarining $\triangle ABC$ tekislik bilan kesishish $K(K', K'')$ va $L(L', L'')$ nuqtalarini aniqlanadi.

Xuddi shu tartibda DEF uchburchakning ED tomonning $\triangle ABC$ tekislik bilan kesishish nuqtasi K_2 ning K_2' va K_2'' proyeksiyalarini yordamchi $R(R_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik vositasida aniqlanadi.

Chizmada hosil bo'lgan K' bilan K_2' va K'' bilan K_2'' proyeksiyalarni o'zaro tutashtirilsa, uchburchaklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari hosil bo'ladi. Uchburchaklar chegaralangan figuralar bo'lgani uchun ularning kesishish chizig'ining proyeksiyalari $K'L'$ va $K''L''$ chegarasida bo'ladi.

Uchburchaklarning proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan ko'rinadigan yoki ko'rinmaydigan qismlarini aniqlanadi.



4.45-rasm

Nazorat savollari

1. To'g'ri chiziqning proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish nuqtasi qanday yasaladi?
2. Ikki tekislikning o'zaro kesishishidan nima hosil bo'ladi va uni yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
3. Kesishuvchi tekisliklardan biri proyeksiyalovchi bo'lsa, ularning kesishish chizig'i qanday yasaladi.
4. To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasashning umumiy algoritmi nimadan iborat?
5. Tekislikka parallel bo'lgan to'g'ri chiziq qanday ketma-ketlikda o'tkaziladi?
6. Qanday tekisliklar o'zaro parallel deyiladi?
7. Bir nomli izlari mos ravishda o'zaro parallel bo'lgan ikki tekisliklar o'zaro parallel bo'laoladimi?
8. Kompleks chizmada berilgan ikki tekislikning o'zaro parallelligi qanday tekshiriladi?

7-ma'ruza - 2 soat.
Tekislik va to'g'ri chiziq

To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi.

O'zaro perpendikulyar tekisliklar.

To'g'ri chiziq va tekislik, hamda ikki tekislik orasidagi burchakni aniqlash.

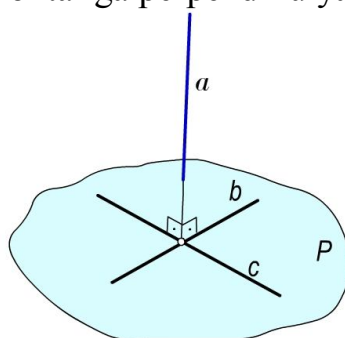
Tayanch iboralar va tushunchalar.

Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziq, o'zaro perpendikulyar tekisliklar, to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

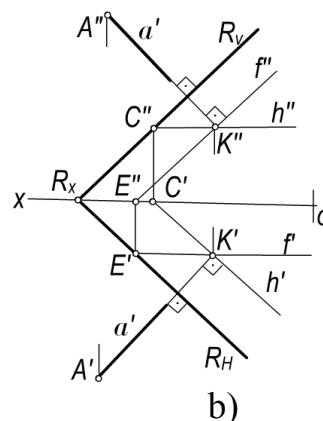
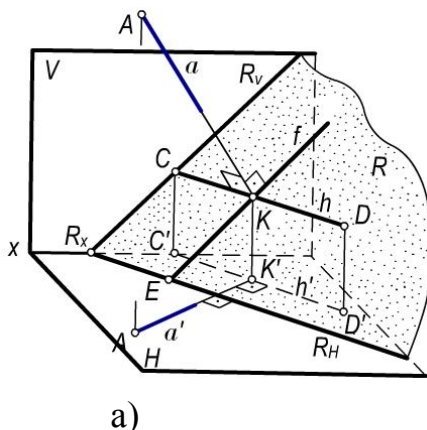
7.1-§. To'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarligi

Ta'rif. Agar to'g'ri chiziq tekislikdagi ikki o'zaro kesishuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziq tekislikka ham perpendikulyar bo'ladi.

Bunda $b \subset P$ va $c \subset P$ bo'lib, $b \cap c$ hamda $a \perp b$ va $a \perp c$ bo'lsa, $a \perp P$ bo'ladi (4.46-rasm). Demak, tekislikka perpendikulyar bulgan to'g'ri chiziq tekislikka tegishli har qanday to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgani uchun, bu to'g'ri chiziq tekislikning asosiy chiziqlariga ham perpendikulyar bo'ladi. Faraz qilaylik, a to'g'ri chiziq tekislikning h gorizontali va f frontaliga perpendikulyar bo'lsin (4.47-a, rasm).



4.46-rasm



4.47-rasm

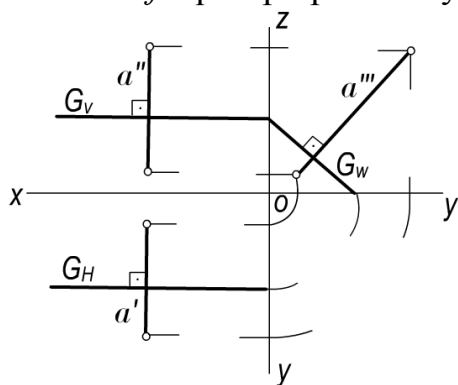
To'g'ri burchakning proyeksiyalanish xususiyatiga muvofiq $\angle AKD = 90^\circ$ va $KD \parallel H$ bo'lgani uchun bu to'g'ri burchakning gorizantal proyeksiyasi $\angle A'K'D' = 90^\circ$ bo'ladi. Demak, $a' \perp h'$ yoki ($a' \perp P_n$) bo'ladi.

Agar tekislik chizmada izlari bilan berilgan bo'lsa, unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqlarning bir nomli proyeksiyalari tekislikning bir nomli izlariga mos ravishda perpendikulyar bo'ladi (4.48-rasm).

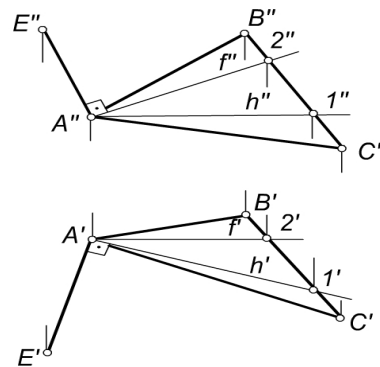
To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro perpendikulyarlik alomatligidan foydalanib ko'pgina metrik masalalarni yechish mumkin.

1-misol. $\triangle ABC$ bilan berilgan tekislikning A uchidan unga perpendikulyar o'tkazilsin (4.49-rasm). Misolni quyidagi algoritm bo'yicha yechamiz.

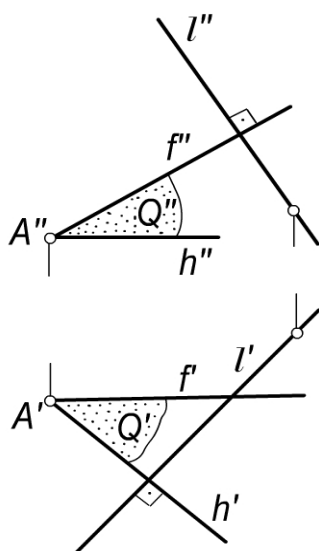
1. $\triangle ABC$ tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali va $f(f', f'')$ frontali o'tkaziladi.
2. Tekislikdagi A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan ixtiyoriy uzunlikda $A'E' \perp h'$ va $A''E'' \perp f''$ qilib perpendikulyarning proyeksiyalarini yasaladi.



4.48-rasm



4.49-rasm



4.50-pacm

2-misol. $A(A', A'')$ nuqta orqali $l(l', l'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazilsin (4.50-rasm). Buning uchun:

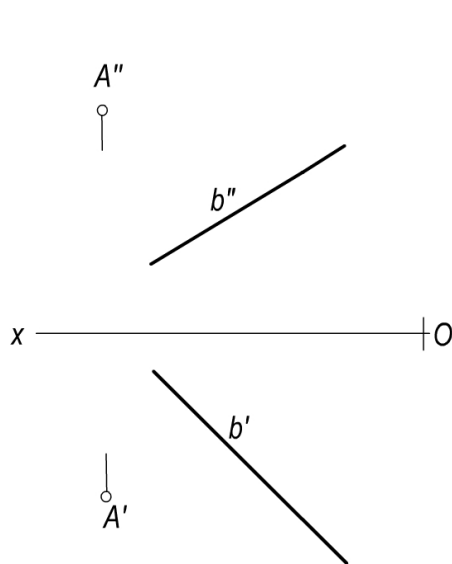
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $h' \perp l'$ va $h'' \parallel Ox$ qilib izlangan tekislik gorizontalinining proyeksiyalari o'tkaziladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan $f' \parallel Ox$ va $f'' \perp l''$ qilib tekislik frontalinining proyeksiyalari o'tkaziladi;
- hosil bo'lgan $h \cap f(h' \cap f'$ va $h'' \cap f'')$ kesishuvchi chiziqlar izlangan tekislikni ifoda qiladi.

Tekislikning gorizontali $h \perp l$ va frontali $f \perp l$ bo'lgani uchun bu tekislik l to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'ladi.

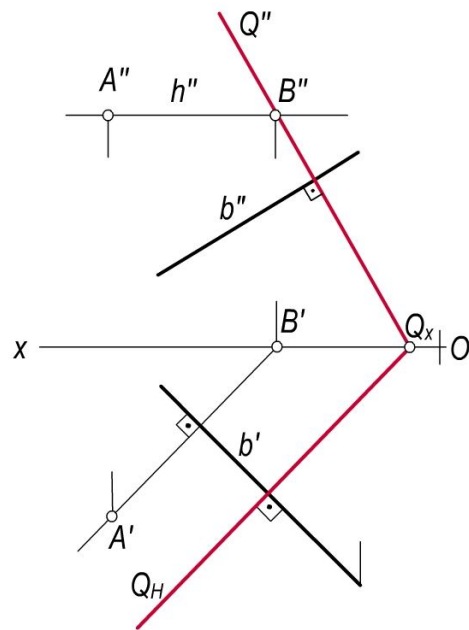
3-misol. $A(A', A'')$ nuqta orqali o'tuvchi va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan tekislikning izlari qurilsin (4.51-rasm).

Buning uchun:

- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan tekislikning gorizontali h to'g'ri chiziq b chiziqqa perpendikulyar qilib o'tkaziladi (4.52-rasm).
- gorizontalinining frontal B izi yasaladi.
- Q tekislikning Q_v frontal izini $Q_v \in B''$ va $Q_v \perp b''$ qilib o'tkaziladi. Tekislikning Q_H gorizont izini esa Q_x dan $Q_H \in Q_x$ va $Q_H \perp b'$ (yoki $Q_H \parallel h'$) qilib o'tkaziladi.



4.51-rasm



4.52-rasm

Natijada, $Q_H \perp b'$ va $Q_V \perp b''$ bo'lgani uchun $Q \perp b$ bo'ladi. Bu misolni tekislikning frontal chizig'ini o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

Nuqta va tekislik orasidagi masofani aniqlash

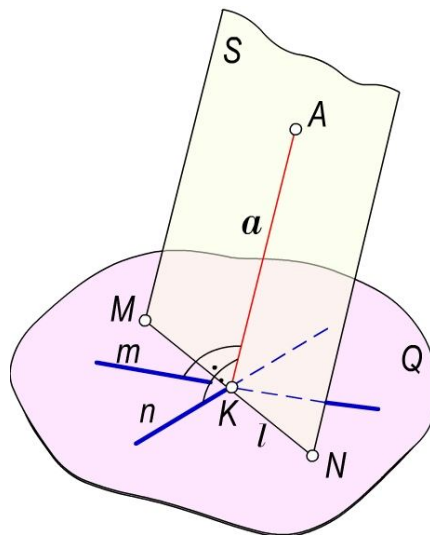
Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan aniqlanadi. Bu perpendikulyarning uzunligini aniqlash uchun uning tekislikdagi asosini yasash zarur.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani quyidagi yasash algoritmi bo'yicha aniqlanadi (4.53-rasm).

- A nuqtadan Q tekislikka a perpendikulyar o'tkaziladi: $a \ni A$ va $a \perp Q$.
- Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishgan A_1 nuqtasi (asosi) aniqlanadi: $K = a \cap Q$

Buning uchun:

- a perpendikulyardan o'tuvchi yordamchi $S \supset a$ tekislik o'tkaziladi;
- Q va S tekisliklarning l kesishish chizig'i yasaladi;
- a perpendikulyarning tekisliklarning kesishish chizig'i l bilan kesishgan K nuqtasi topiladi: $K = a \cap l$. Chizmadagi A K kesma A nuqtadan Q tekislikkacha bo'lgan izlangan masofa bo'ladi.



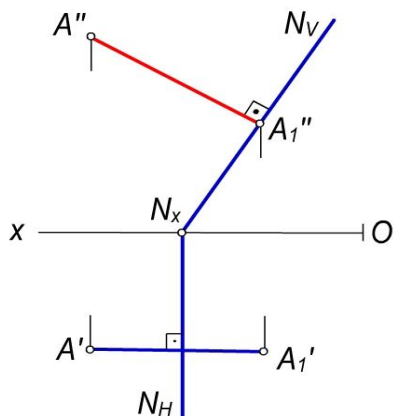
4.53-rasm

1-misol. Berilgan $A (A', A'')$ nuqtadan $Q (Q_H, Q_V)$ tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlansin (4.54-rasm). Yuqorida keltirilgan yasash algoritmiga asosan:

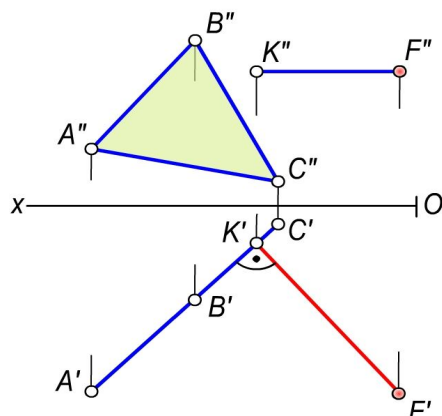
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan Q tekislikning Q_H va Q_V izlariga mos ravishda perpendikulyarning a' va a'' proyeksiyalari o'tkaziladi.
- Bu perpendikulyarning Q tekislik bilan kesishish nuqtasining proyeksiyalarini aniqlash uchun:
 - a perpendikulyardan yordamchi gorizantal proyeksiyalovchi $M (M_H, M_V)$ tekislik o'tkaziladi;
 - Q va S tekisliklarning kesishish chizig'i $l(l', l'')$ bilan $a (a', a'')$ perpendikulyarning kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalari aniqlanadi.
- Chizmada hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ izlangan masofaning proyeksiyalari bo'ladi. Bu masofaning haqiqiy o'lchami to'g'ri burchakli $\Delta A_0A'K''$ ning A_0K'' gipotenuzasi bo'ladi.

2-misol. $D (D', D'')$ nuqtadan $\Delta ABC (\Delta A'B'C', \Delta A''B''C'')$ tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (4.55-rasm). Misolni quyidagi yasash algoritmi asosida yechiladi.

- ΔABC tekislikning gorizantal va frontallarining proyeksiyalari o'tkaziladi.
- D nuqtaning D' va D'' proyeksiyalaridan perpendikulyarning m' va m'' proyeksiyalari $m' \perp h'$ va $m'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi.
- Perpendikulyarning ΔABC tekislik bilan kesishish nuqtasi D_1 ning D_1' va D_1'' proyeksiyalarini aniqlanadi.



4.56-rasm



4.57-rasm

Nuqta va to'g'ri chiziq orasidagi masofani aniqlash

To'g'ri chiziq va unga tegishli bo'lmagan nuqta orasidagi masofa shu nuqtadan mazkur to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi bilan o'lchanadi.

Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani quyidagi tartibda aniqlanadi (4.58,a-rasm).

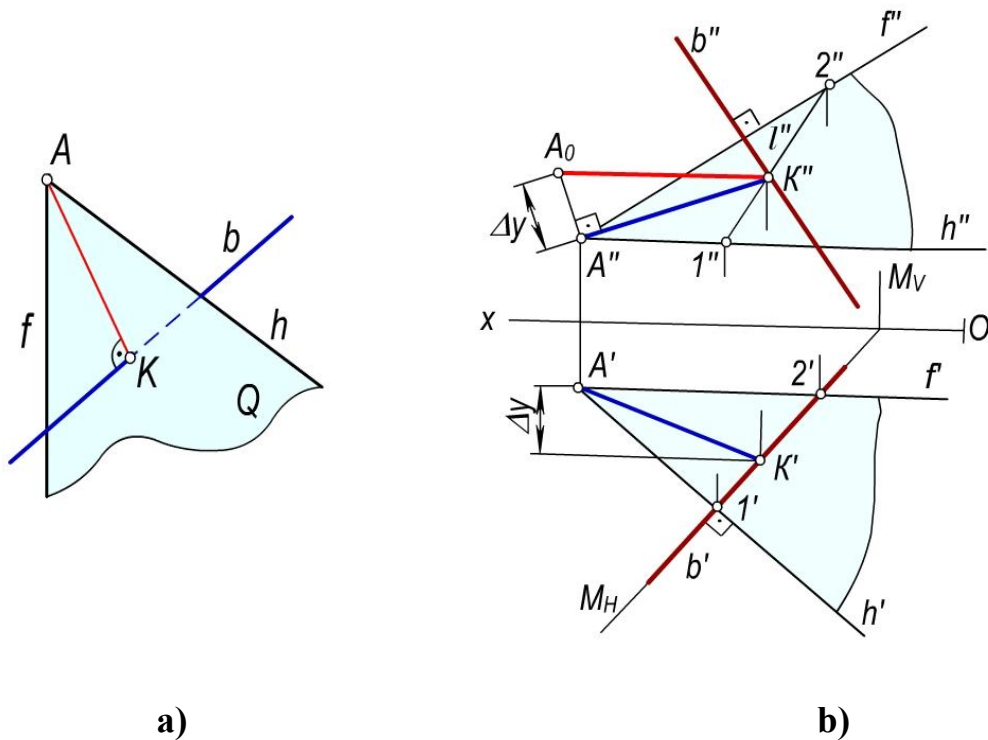
26. A nuqtadan b to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib Q tekislik o'tkaziladi: $Q \ni A, Q \perp b$.

27. Berilgan b to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasini aniqlanadi: $K = b \cap Q$.

28. A va K nuqtalarni o'zaro tutashtirilsa hosil bo'lgan AK kesma A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa bo'ladi.

Chizmada $A(A', A'')$ nuqtadan $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani (4.58,b-rasm) aniqlash uchun:

- $A(A', A')$ nuqtadan tekislikning $h(h', h'')$ gorizontali va $f(f', f'')$ frontalini $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib o'tkaziladi.
- Berilgan b to'g'ri chiziqning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi K ning K' va K'' proyeksiyalarini aniqlash uchun $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqdan yordamchi gorizantal proyeksiyalovchi $M(M_H, M_V)$ tekislik o'tkaziladi. Q va M tekisliklarning kesishish chizig'i $l = Q \cap M$ ning l' , l'' proyeksiyalari yasaladi.
- Chizmada b to'g'ri chiziqning l chiziq bilan kesishgan K nuqtasining frontal proyeksiyasi $K'' = b'' \cap h''$ bilan aniqlanadi, uning K' gorizantal proyeksiyasi esa b' chiziqqa tegishli bo'ladi.
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalarini K nuqtaning K' va K'' proyeksiyalari bilan tutashtiriladi. Hosil bo'lgan $A'K'$ va $A''K''$ kesmalar A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha masofaning proyeksiyalari bo'ladi.



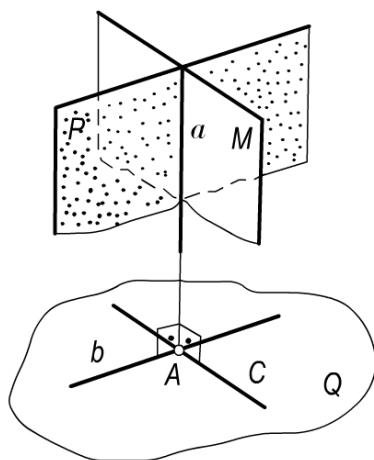
4.58-rasm

Chizmadagi A_0K'' kesma A nuqtadan b to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaning haqiqiy o'lchami bo'lib, u to'g'ri burchakli $\Delta A_0A''K''$ yasash yo'li bilan aniqlangan.

Shunindek, bu turdagi misolni $A(A', A'')$ nuqtadan o'tuvchi $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan Q tekislikni izlari orqali o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.

7.2-§. Tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi

Ta'rif. Agar biror berilgan ikkinchi tekislikka perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq orqali o'tsa, bu **tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'ladi**.



4.59-pacm

Bu ta'rifdan quyidagi xulosaga kelish mumkin, ya'ni tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan har qanday tekislik mazkur tekislikning o'ziga ham perpendikulyar bo'ladi (4.59 -rasm).

Demak, bir-biriga perpendikulyar bo'lgan tekisliklarni yasash ikki usul bilan bajarilishi mumkin:

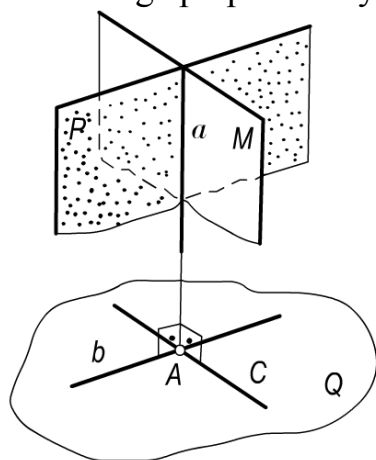
- Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqdan tekislik o'tkazish
- Tekislikka tegishli to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik o'tkazish.

Tekislikning ikki tekislikka perpendikulyarligi

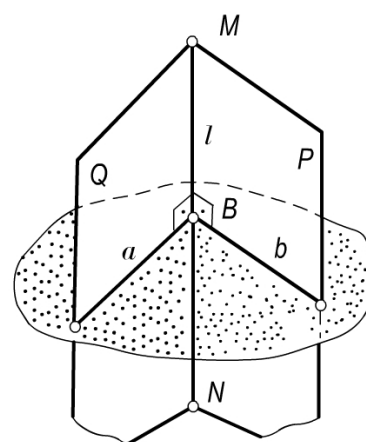
Ta'rif. Agar biror tekislik ikki tekislikka umumiy bo'lgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, u holda bu **tekislik mazkur tekisliklarga ham perpendikulyar bo'ladi.**

Ma'lumki, Q va P tekisliklarga umumiy bo'lgan to'g'ri chiziq ularning l kesishish chizig'i bo'ladi. Tekisliklarning l kesishish chizig'ida ixtiyoriy B nuqta tanlab olamiz (4.60 -rasm). Bu nuqtadan l ga perpendikulyar qilib mos ravishda Q va P tekisliklarga tegishli bo'lgan a va b chiziqlarni o'tkazamiz. Natijada $a \cap b$ kesishuvchi to'g'ri chiziqlar T tekislikni hosil qiladi. Bu tekislik esa berilgan Q va P tekisliklarga perpendikulyar bo'ladi.

Demak, berilgan T tekislikka perpedikulyar bo'lgan l to'g'ri chiziqdan o'tuvchi har qanday tekislik unga perpendikulyar bo'ladi.



4.59-rasm



4.60-rasm

1-misol. $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar va Q_x dan o'tuvchi Q tekislik izlari bilan o'tkazilsin (4.61 -rasm).

Bu misolni yechish uchun:

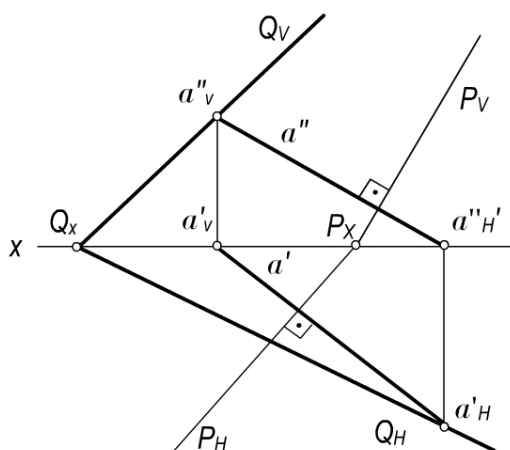
- P tekislikka perpendikulyar bo'lgan ixtiyoriy a to'g'ri chiziq o'tkaziladi.
- Bu to'g'ri chiziq izlarining a_H' , a_H'' va a_V' , a_V'' proyeksiyalarini yasaladi.
- Izlangan Q tekislikning gorizontali Q_H izini o'tkaziladi $Q_H \supset a_H'$ va $Q_H \supset Q_x$ qilib, uning frontal Q_V izini $Q_V \supset a_V''$ va $Q_V \supset Q_x$ qilib o'tkaziladi.

Bu misolni quyidagicha yechish ham mumkin: Q tekislikka perpendikulyar va P_x dan o'tuvchi tekislikni o'tkazish uchun (4.62 -rasm) Q tekislikda ixtiyoriy $m \supset Q$ to'g'ri chiziq olamiz. P tekislikning izlarini P_x dan $P_H \perp m'$ va $P_V \perp m''$ qilib o'tkaziladi. Natijada, $P \perp Q$ bo'ladi.

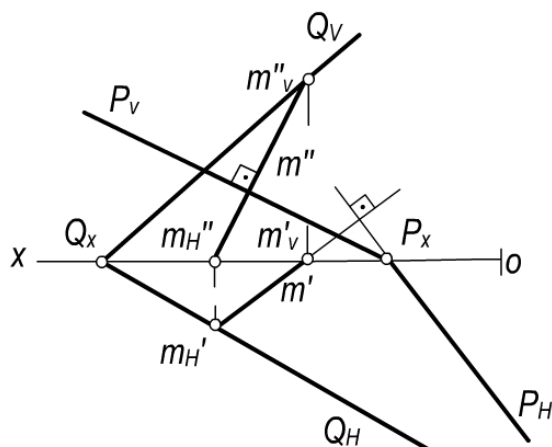
2-misol. Kesishuvchi $a \cap b (a' \cap b', a'' \cap b'')$ chiziqlar bilan berilgan tekislikka $d (d', d'')$ to'g'ri chiziqdan o'tuvchi perpendikulyar tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.63 -rasm). Bu misolni yechish uchun:

1) berilgan tekislikning gorizontali va frontalining h' , h'' va f' , f'' proyeksiyalarni o'tkaziladi;

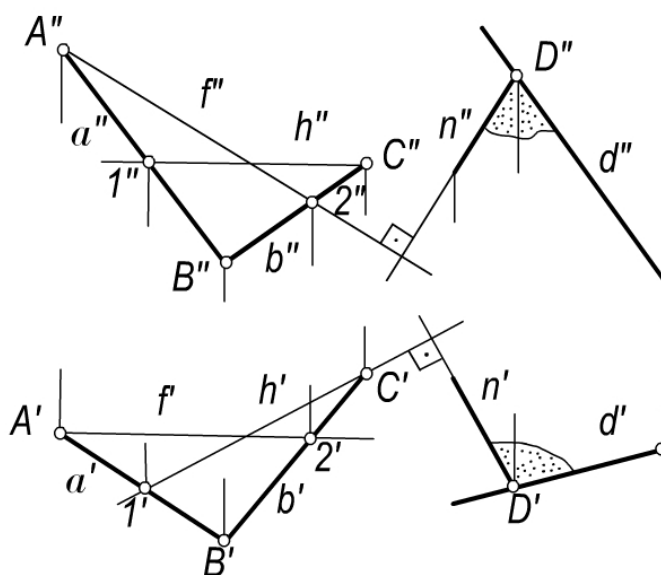
2) d to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqtasidan n to'g'ri chiziqning proyeksiyalarini $n' \perp h'$ va $n'' \perp f''$ qilib o'tkaziladi. Hosil bo'lgan $d' \cap n'$ va $d'' \cap n''$ kesishuvchi chiziqlar berilgan tekislikka perpendikulyar tekislikning proyeksiyalari bo'ladi.



4.61-rasm



4.62-rasm



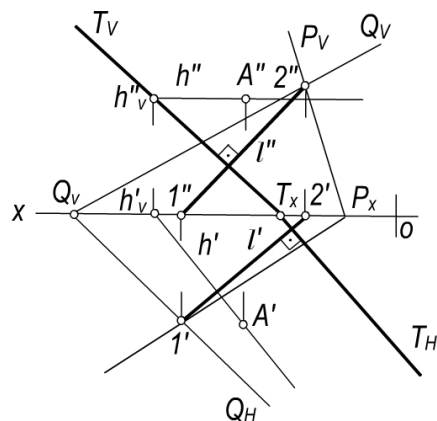
4.63-rasm

3-misol. $A(A', A'')$ nuqtadan $Q(Q_H, Q_V)$ va $P(P_H, P_V)$ tekisliklarga perpendikulyar bo'lgan $T(T_H, T_V)$ tekislik o'tkazish talab qilinsin (4.64 -rasm).

Bu misol quyidagicha yechiladi.

- Q va P tekisliklarning kesishish chizig'ining l', l'' proyeksiyalarni yasaladi;
- A nuqtaning A' va A'' proyeksiyalaridan izlangan tekislikning gorizontali (yoki frontali) ni tekisliklarning kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib o'tkaziladi va uning izlarning h'_V, h''_V proyeksiyalarni yasaladi;
- izlangan tekislikning frontal izini $T_V \supset h''$, $T_V \perp l''$ $T_H \ni T_X$, $T_H \perp l'$ qilib o'tkaziladi.

Natijada, berilgan ikki tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchinchi tekislik yasaladi: $T \perp Q$ va $T \perp P$.



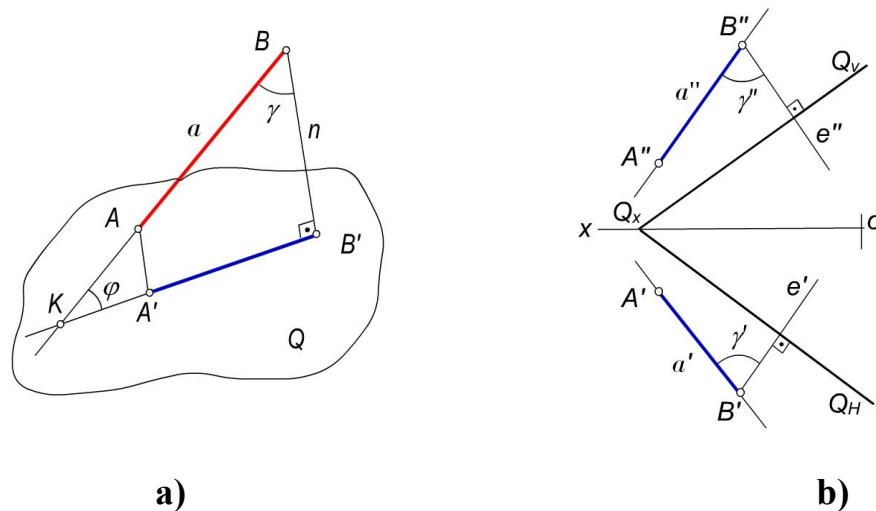
4.64-rasm

7.3-§. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni aniqlash

Ta'rif. To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchak deb, mazkur to'g'ri chiziqning berilgan tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchakka aytiladi.

To'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni 4.65,*a*-rasmida ko'rsatilgan fazoviy modeldan foydalanib quyidagi yasash algoritmlari bilan aniqlash mumkin:

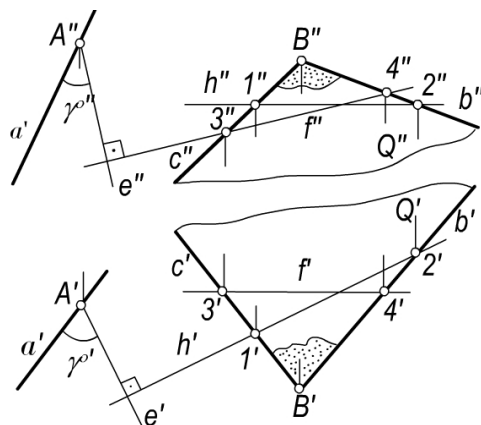
- Berilgan *a* to'g'ri chiziqni *Q* tekislik bilan kesishish nuqtasi aniqlanadi: $K = a \cap Q$.
- To'g'ri chiziqda ixtiyoriy *B* nuqta tanlab olinadi. Bu nuqtadan berilgan *Q* tekislikka *n* perpendikulyarni tushirib, uning *Q* tekislik bilan kesishuv nuqtasini aniqlanadi: $B' = n \cap Q$.
- So'ngra *K* va *B'* nuqtalarni o'zaro tutashtirish natijasida hosil bo'lgan burchak *a* to'g'ri chiziq va *Q* tekislik orasidagi φ burchak bo'ladi.



4.65-rasm

Chizmada to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni aniqlash uchun Yuqorida keltirilgan yasash algoritmlarni to'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarligi va kesishishi qoidalaridan foydalanib bajariladi. Bunda φ burchak a to'g'ri chiziqning ixtiyoriy B nuqtasidan Q tekislikka tushirilgan perpendikulyar orasidagi γ burchak orqali aniqlanadi (4.65-a,b rasm). $\varphi^\circ + \gamma^\circ = 90^\circ$ bo'lgani uchun $\varphi^\circ = 90^\circ - \gamma^\circ$ bo'ladi. $Q(b \cap c)$ tekislik va a to'g'ri chiziq orasidagi φ burchakni aniqlash uchun (4.66-rasm):

- tekislikning h (h' , h'') gorizontali va f (f' , f'') frontali o'tkaziladi;
- to'g'ri chiziqning ixtiyoriy A (A' , A'') nuqtasidan tekislikning gorizontali va frontaliga e (e' , e'') perpendikulyar o'tkaziladi. Bunda: $e' \perp h'$ va $e'' \perp f''$ bo'ladi va γ (γ' , γ'') burchak belgilanadi.



4.66-rasm

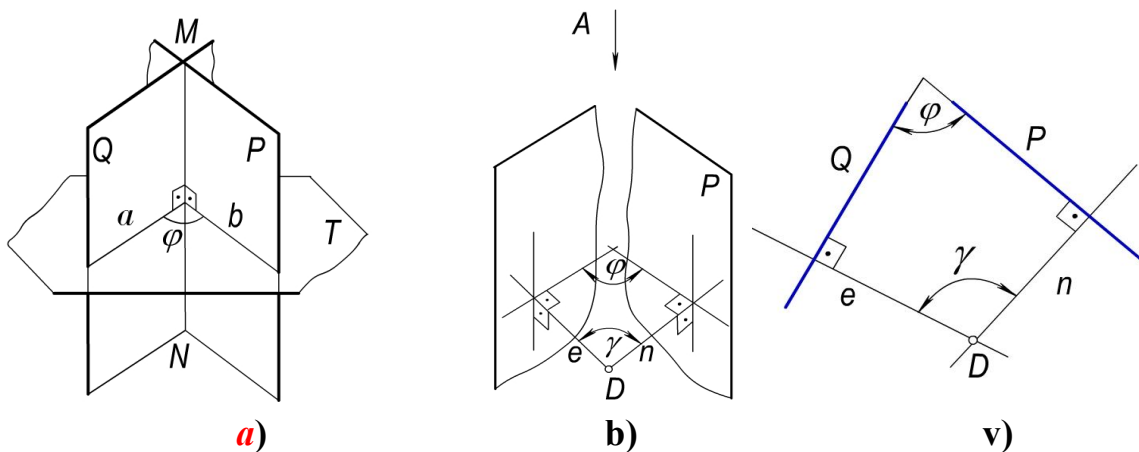
7.4-§. Ikki tekislik orasidagi burchakni aniqlash

Ikki tekislik orasidagi burchak ularning kesishish chizig'iga perpendikulyar bo'lgan ikki to'g'ri chiziqlar orasidagi chiziqli burchak bilan o'lchanadi.

Bu chiziqli burchakni quyidagi yasash algoritmlari bilan aniqlanadi (4.67- a, rasm).

- P va Q tekisliklarning l kesishish chizig'ini yasaladi.

- Tekisliklarning l kesishish chizig'iga tegishli ixtiyoriy $A \in l$ nuqtadan perpendikulyar qilib T tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik Q va P tekisliklarga ham perpendikulyar bo'ladi.
- T tekislikning Q va P tekisliklar bilan kesishish a va b chiziqlar yasaladi: $a = Q \cap T$ va $b = P \cap T$.
- Tekisliklarning kesishish chiziqlari orasidagi $a \wedge b = \varphi$ izlangan burchak bo'ladi.



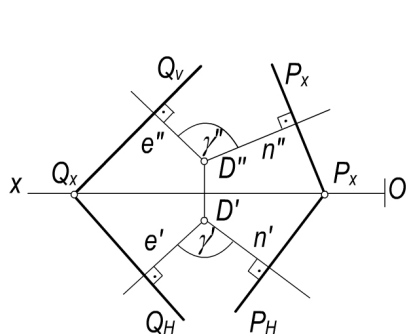
4.67-rasm

P va Q ikki tekisliklar orasidagi burchakni quyidagicha ham aniqlash mumkin (4.67-b, rasm):

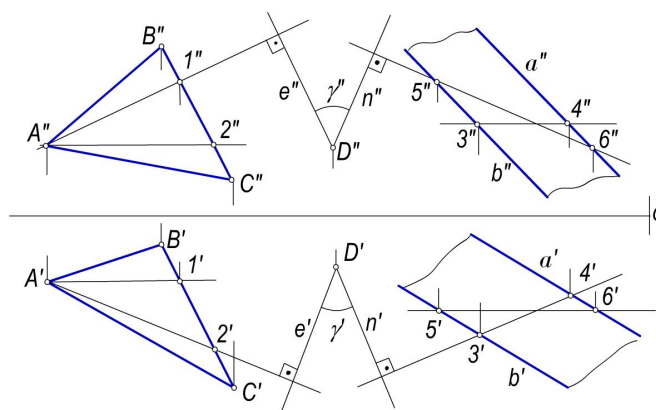
Fazoning ixtiyoriy D nuqtasidan berilgan Q va P tekisliklarga ye va n perpendikulyarlar tushirib, bu perpendikulyarlar orasidagi γ burchakning haqiqiy qiymatini aniqlash orqali φ burchak qiymati $\varphi = 180^\circ - \gamma$ formula orqali aniqlanadi.

Agar φ burchakning haqiqiy qiymati $\gamma \leq 90^\circ$ bo'lsa, bu burchak ikki tekislik orasidagi burchak bo'ladi.

4.69-rasmdagi $\triangle ABC$ va $a \perp b$ to'g'ri chiziqlarning proyeksiyalari bilan berilgan tekisliklar orasidagi burchakni aniqlash uchun ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqta tanlab olinadi. Uning D' va D'' proyeksiyalaridan tekisliklarning gorizontallari va frontallari $e' \perp h_1'$, $e' \perp f_1''$ va $n' \perp h_2'$, $n' \perp f_2''$ qilib perpendikulyarlar o'tkaziladi. Natijada, hosil bo'lgan $\gamma(\gamma', \gamma'')$ burchakning haqiqiy o'lchamini aniqlab, So'ngra $\varphi = 180^\circ - \gamma^\circ$ burchak aniqlanadi.



4.68-rasm



4.69-rasm

Nazorat savollari

1. Tekislikka perpendikulyar to'g'ri chiziqning proyeksiyalari qanday vaziyatda proyeksiyalanadi?
2. Nuqta orqali o'tuvchi tekislikni berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar qilib o'tkazish tartibi nimalardan iborat?
3. qanday tekisliklar o'zaro perpendikulyar deyiladi?
4. Bir nomli izlari o'zaro perpendikulyar bo'lgan tekisliklar o'zaro perpendikulyar bo'laoladimi?
5. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb nimaga aytiladi va u chizmada qanday tartibda yasaladi?
6. Ikki tekislik orasidagi burchak deb nimaga aytiladi?

Ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish usullari

Ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish usullarining mohiyati.

Tekis-parallel harakatlantirish usuli.

Aylantirish usuli.

Proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish.

Nuqtani aylantirish.

Tayanch iboralar va tushunchalar

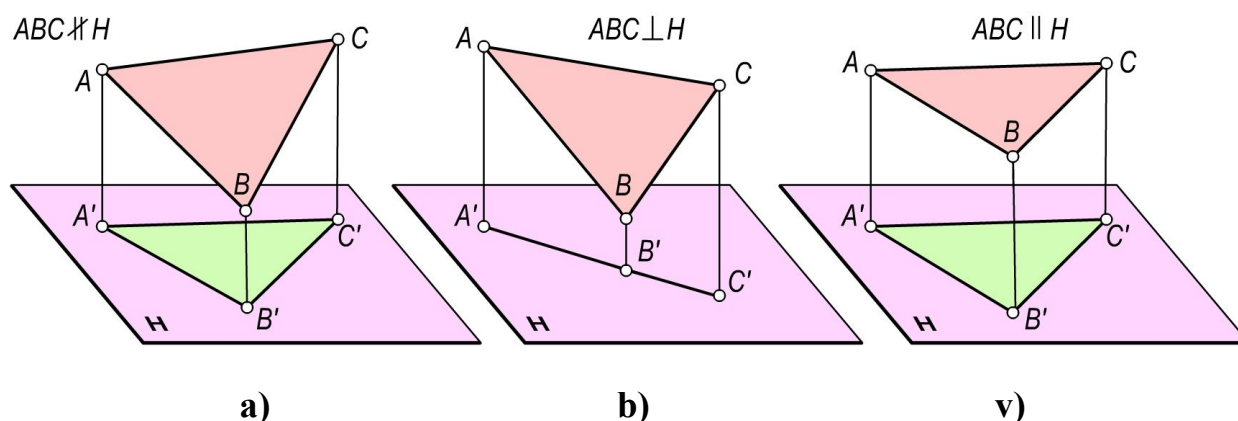
Proyeksiyalarni qayta tuzish, tekis-parallel harakatlantirish, aylantirish usuli, aylantirish tekisligi, aylantirish o'qi, aylantirish radiusi.

8.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Geometrik shaklning proyeksiyalaridagi holatlari uning fazoda proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan joylashuviga bog'liq. Umumiy vaziyatdagi geometrik shakllarning proyeksiyalari proyeksiyalar tekisliklariga qisqarib proyeksiyalanadi (5.1-rasm).

Agar geometrik shaklning proyeksiyasi originaliga teng bo'lib proyeksiyalansa, bu shaklga oid metrik xarakteristikalarini, masalan, $\triangle ABC$ tomonlarining haqiqiy o'lchamlari, uchlaridagi burchaklarning qiymatlari va boshqa xarakteristikalarini aniqlash mumkin (5.1,v-rasm).

Shuning uchun ayrim hollarda umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarning berilgan ikki proyeksiyasi asosida maqsadga muvofiq ravishda yangi xususiy vaziyatining proyeksiyalari tuziladi.



5.1-rasm.

Geometrik shaklning berilgan orthogonal proyeksiyalari asosida yangi proyeksiyalarini yasash *ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish* deyiladi.

Umumiy vaziyatda berilgan geometrik shakllarni xususiy vaziyatga keltirish asosan ikki usulda bajariladi.

1. *tekis–parallel harakatlantirish usuli.*
 2. *proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli.*
- Quyida bu usullarni alohida ko'rib chiqamiz.

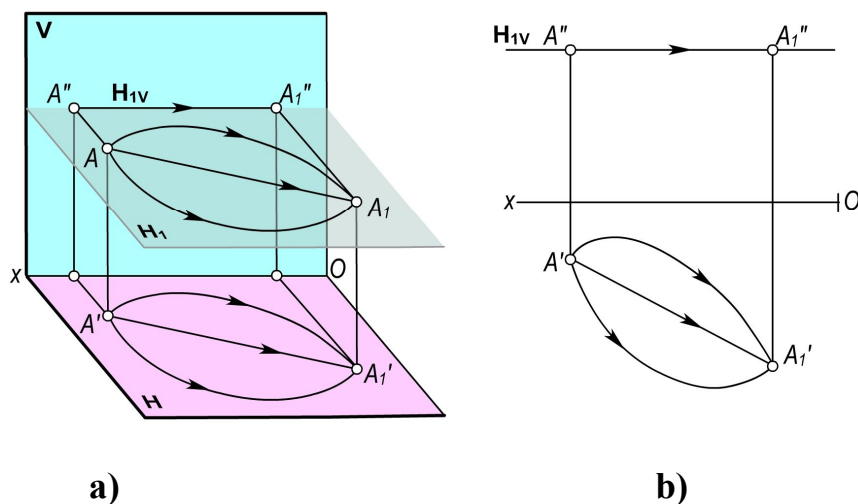
8.2–§. Tekis–parallel harakatlantirish usuli

Tekis–parallel harakatlantirish usulida geometrik shaklning har qanday nuqtalarini bir–biriga parallel tekisliklarda harakatlantiriladi.

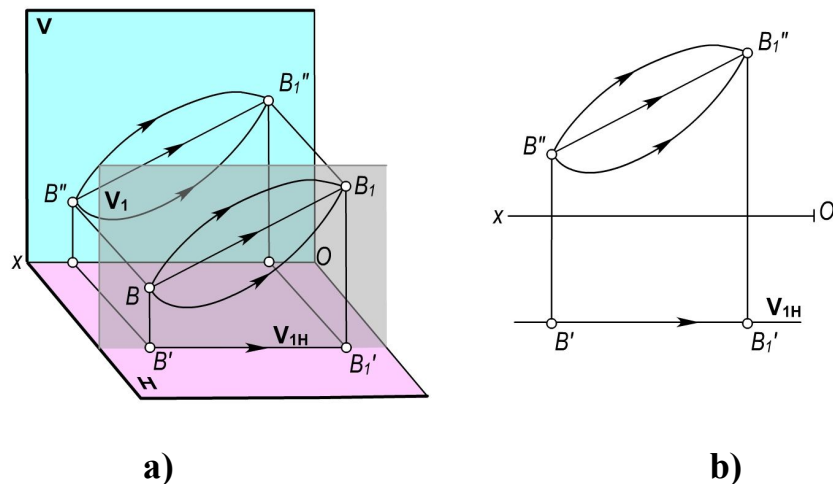
Harakatlantirish tekisliklarining vaziyati va geometrik shakl nuqtalari harakatlanish trayektoriyasining xarakteriga qarab tekis–parallel harakatlantirish usuli *parallel harakatlantirish* va *aylantirish* usullariga bo'linadi.

Parallel harakatlantirish usuli. Bu usulda fazoda berilgan geometrik shaklning har bir nuqtasi proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan gorizontaal yoki frontal tekisliklarda harakatlantiriladi va shuning natijasida uning hosil bo'lgan keyingi proyeksiyasi mazkur proyeksiyalar tekisligiga nisbatan vaziyati o'zgaradi, ammo dastlabki proyeksiyasiga teng bo'lib qoladi.

5.2,a,b–rasmda A nuqta H_1 gorizontaal tekislikda harakatlantirilib A_1 vaziyatga keltirilgan. Shundan ko'ramizki, A nuqta A_1 vaziyatga qanday trayektoriya (to'g'ri yoki egri chiziqlar) bo'ylab harakatlantirilishidan qat'iy nazar, uning A'' frontal proyeksiyasi tekislikning H_{1V} izi bo'yicha harakatlanadi. Shuningdek (5.3,a,b–rasm), B nuqta V_1 frontal tekislikda B_1 vaziyatga har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilmasin, uning B' proyeksiyasi V_{1H} izi bo'yicha harakatlanib, B'_1 vaziyatni egallaydi.



5.2-rasm.



5.3-rasm.

Yuqorida bayon etilganlardan quyidagi xulosaga kelish mumkin:

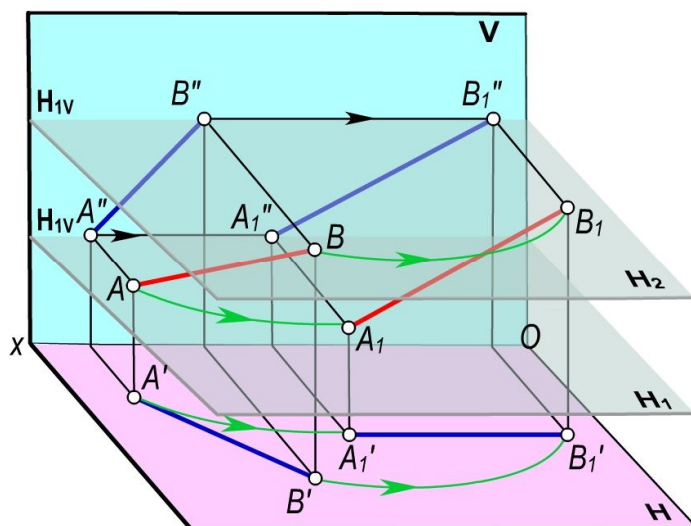
- Fazoda nuqtani gorizontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilsa ham, uning frontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.
- Fazoda nuqtani frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel tekislikda har qanday trayektoriya bo'yicha harakatlantirilsa ham, uning gorizontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

Parallel harakatlantirish usulining bu xususiyatlaridan foydalanishga doir ayrim misollarning yechilishini ko'rib chiqamiz.

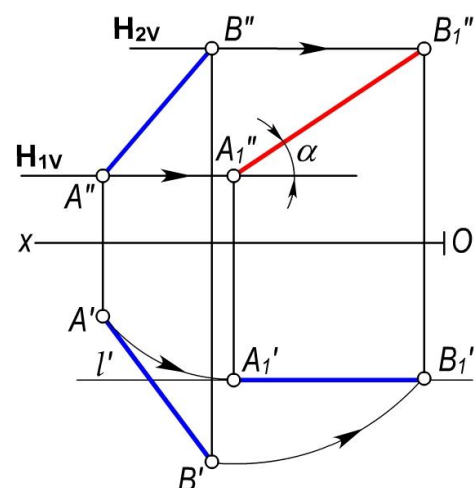
1–misol. Umumiy vaziyatda berilgan AB kesmani V tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.4,a,b–rasm).

$AB \parallel V$ bo'lishi uchun chizmada $A_1'B_1' \parallel Ox$ bo'lishi kerak. Demak, bu misolni yechish uchun H tekislikda (5.4,a–rasm) ixtiyoriy A_1' nuqta tanlab, u orqali Ox o'qiga parallel l' to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga $A_1'B_1' = A'B'$ kesmani o'lchab qo'yamiz. Kesmaning yangi frontal proyeksiyasini parallel harakatlantirish xususiyatiga muvofiq aniqlaymiz: kesma uchlarining A'' va B'' proyeksiyalari mos ravishda Ox o'qiga parallel ravishda harakatlanadi va A_1'' , B_1'' vaziyatlarga keladi. Natijada, V tekislikka parallel A_1B_1 to'g'ri chiziq kesmasining proyeksiyalari hosil bo'ladi.

Shuningdek, AB kesma V tekislikka parallel bo'lishi bilan birga uning haqiqiy o'lchami va H tekislik bilan tashkil etgan α burchagi aniqlanadi.



a)

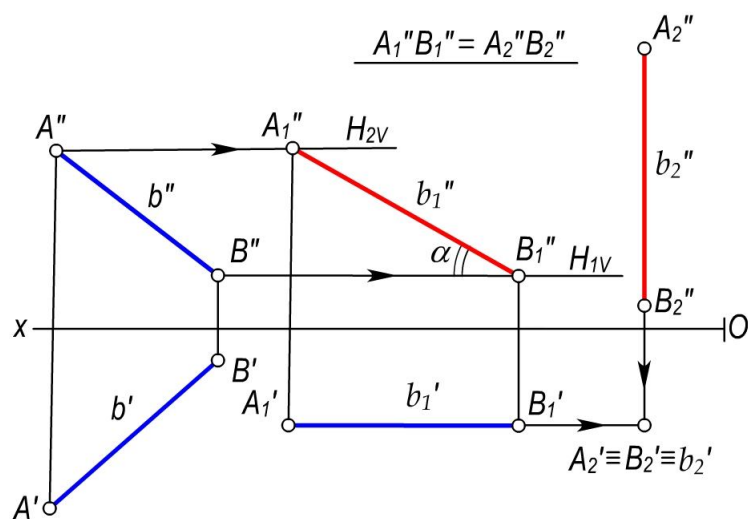


b)

5.4-rasm.

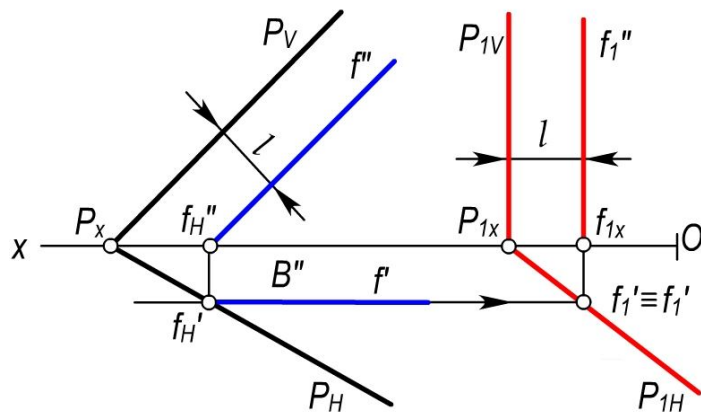
2–misol. Umumiy vaziyatdagi $AB(A'B', A''B'')$ kesma (5.5–rasm) H tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltirilsin.

Bu misolni yechish uchun avval AB kesmani harakatlantirib, V tekislikka parallel $A_1'B_1', A_1''B_1''$ vaziyatga keltiramiz. So'ngra ixtiyoriy B_2'' nuqta tanlab olamiz va bu nuqtadan $b_2'' \perp Ox$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz va unga $A_2''B_2'' = A_1''B_2''$ kesmani o'lchab qo'yamiz. Kesmaning gorizontaal proyeksiyasi b_1' chiziq bo'yicha harakatlanib, $A_2' \equiv B_2'$ bo'lib proyeksiyalanadi.



5.5-rasm.

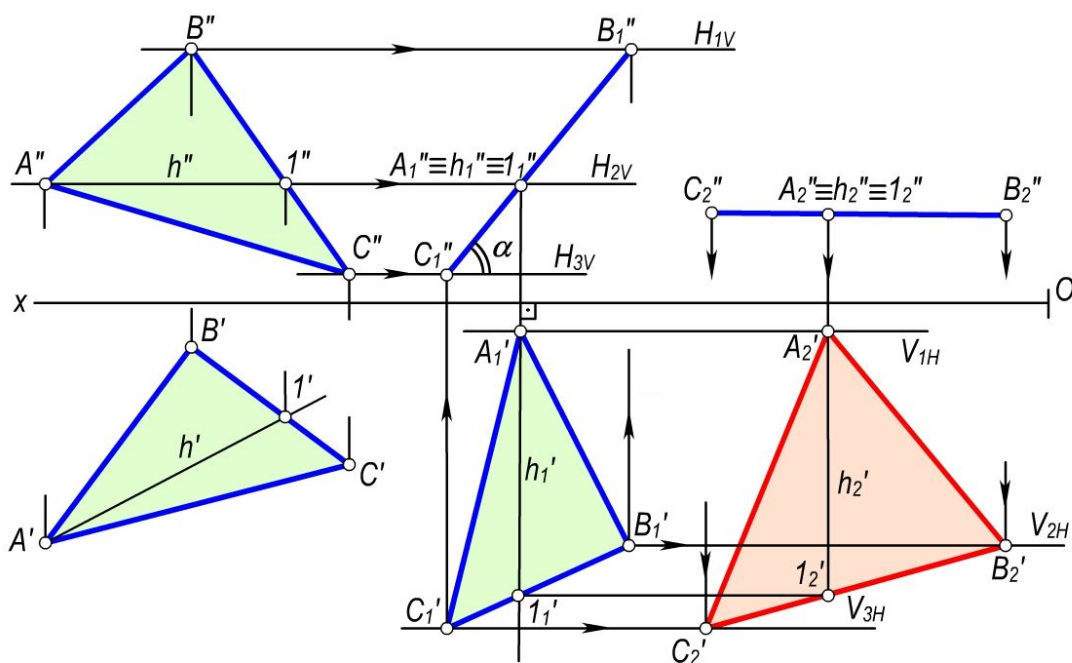
3–misol. Umumiy vaziyatda berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislikni H tekisligiga perpendikulyar vaziyatga keltirilsin (5.6–rasm). Masalani yechish uchun P tekislikning ixtiyoriy $f(f', f'')$ frontali o'tkaziladi. So'ngra Ox o'qida ixtiyoriy nuqtadan $f_1' \perp Ox$ qilib o'tkazamiz va chizmada ko'rsatilgan ℓ masofada tekislikning frontal izi $P_{1V} \perp Ox$ qilib o'tkazamiz. Tekislikning P_{1H} gorizontaal izi P_{1X} va f_1 nuqtalardan o'tadi.



5.6-rasm.

4–misol. Umumiy vaziyatdagi $\triangle ABC$ tekislikni H tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin (5.7–rasm). Buni quyidagicha bajaramiz.

1. $\triangle ABC$ ni avval V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. Buning uchun uchburchakning $h(h', h'')$ gorizontali o'tkazamiz. Chizmada ixtiyoriy A'_1 nuqta tanlab, bu nuqtadan $h'_1 \perp Ox$ qilib $\triangle A'_1 B'_1 C'_1 = \triangle A'B'C'$ yangi gorizantal proyeksiyasini yasaymiz.



5.7-rasm.

2. $\triangle ABC$ ning yangi vaziyati V tekislikka perpendikulyar bo'lgani uchun uning frontal proyeksiyasi $C'_1 A'_1 B'_1$ kesma tarzida proyeksiyalanadi.

3. Ixtiyoriy C''_2 nuqta tanlab, bu nuqtadan Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va $C''_2 A''_2 B''_2 = C''_1 A''_1 B''_1$ bo'lgan kesmani qo'yamiz. Parallel harakatlantirishning xususiyatiga muvofiq uchburchak gorizantal proyeksiyasining $A'_2 B'_2$ va C'_2 nuqtalari frontal tekisliklarning mos ravishda V_{1N} , V_{2N} va V_{3N} izlari bo'yicha harakatlanishi natijasida $\triangle A'_2 B'_2 C'_2$ gorizantal proyeksiyalar tekisligi H ga

parallel bo'ladi va berilgan uchburchakning haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgan proyeksiyasi hosil bo'ladi.

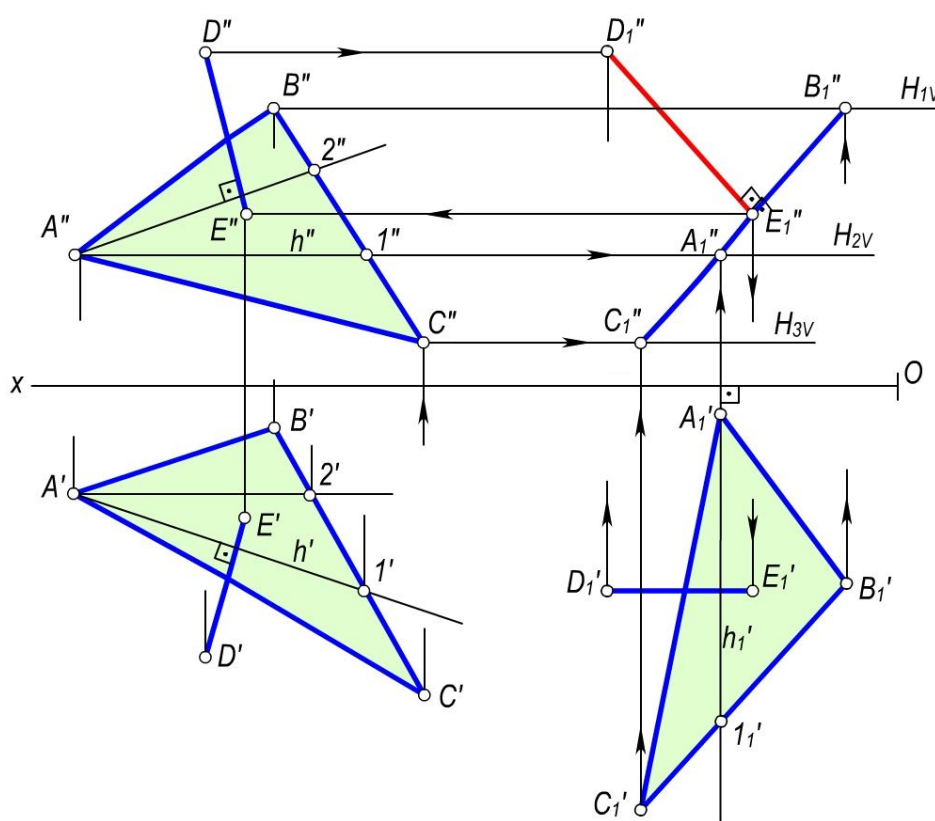
Shuningdek, chizmadagi α burchak $\triangle ABC$ ning H tekislik bilan hosil qilgan burchagini ko'rsatadi.

4-misol. $D(D', D'')$ nuqtadan $\triangle ABC(\triangle A'B'C', \triangle A''B''C'')$ tekislikkacha bo'lgan masofa aniqlansin (5.8, a-rasm).

Bu misol quyidagicha yechiladi.

1. $\triangle ABC$ ni parallel harakatlantirib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga, masalan, V tekislikka perpendikulyar vaziyatga keltiramiz. D nuqtaning yangi D'_1 va D''_1 proyeksiyalarini aniqlaymiz.

2. Masofaning haqiqiy o'lchami D''_1 nuqtadan $C''_1A''_1B''_1$ kesmaga tushirilgan $D''_1E''_1$ perpendikulyar bilan o'lchanadi. Izlangan masofaning gorizontaal proyeksiyasi $D'_1E'_1$ esa Ox o'qiga parallel bo'ladi.



5.8-rasm.

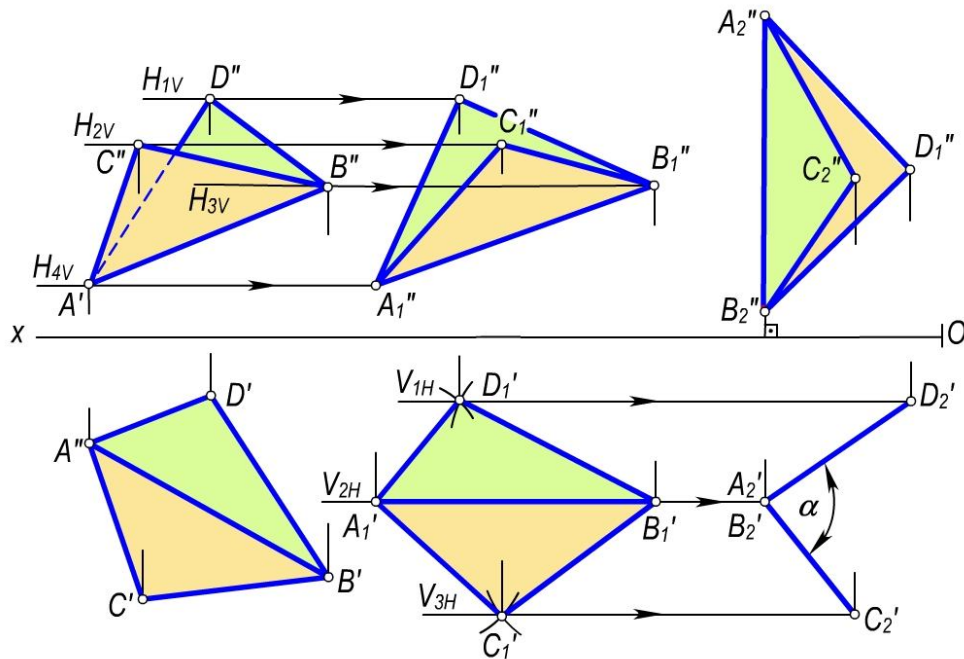
3. Masofaning proyeksiyalarini tekislikning berilgan proyeksiyalarida yasashni chizmadan tushunib olish qiyin emas.

5-misol. $CABD(C'A'B'D', C''A''B''D'')$ ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi parallel harakatlantirish usulidan foydalanib aniqlansin (5.9-rasm).

Ikki yog'li burchakning haqiqiy o'lchami α quyidagi algoritm bo'yicha aniqlanadi:

1. AB qirrani V tekislikka parallel qilib joylashtiriladi.
- Buning uchun chizma maydonining ixtiyoriy joyida $A'_1B'_1=A'B'$ va $A'_1B'_1 \parallel Ox$ qilib joylashtiriladi.

- A'_1 va B'_1 nuqtalarga nisbatan D'_1 , C'_1 nuqtalarni planimetrik yasashlardan foydalanib yasaymiz. Hosil bo'lgan A_1 , C_1 , B_1 va D_1 nuqtalar yangi gorizontaal proyeksiya bo'ladi.
 - Parallel harakatlantirish qoidasiga asosan A'' , C'' , B'' va D'' nuqtalar Ox o'qiga parallel chiziq bo'yicha harakat qilganligidan A''_1 , C''_1 , B''_1 va D''_1 yangi frontal proyeksiyalari yasaladi.
2. AB qirrani H tekisligiga perpendikulyar qilib joylashtiriladi.
- Buning uchun $A''_1B''_1 = A''_2B''_2$ ni chizmaning ixtiyoriy joyida $A''_2B''_2 \perp Ox$ qilib joylashtiramiz. $A''_2B''_2$ yangi frontal proyeksiya bo'ladi.
 - C''_2 va D''_2 nuqtalarni A''_2 va B''_2 nuqtalarga nisbatan planimetrik yasashlarga asosan yasaladi.
 - Parallel ko'chirish qoidasiga asosan A'_1 , C'_1 , B'_1 va D'_1 nuqtalar Ox ga parallel harakat qilib, $A''_2 \equiv B''_2$, C'_2 va D'_2 nuqtalarning yangi gorizontaal proyeksiyalarini hosil qiladi.
 - Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilsa, $R D'_1A'_2 \equiv B'_2 C'_2 - \alpha$ chiziqli burchak AB qirradagi ikki yoqli burchakni o'lchaydi. Bu misolni AB qirrani H ga parallel qilib olishdan boshlab ham yechish mumkin.



5.9-rasm.

8.3–§. Aylantirish usuli

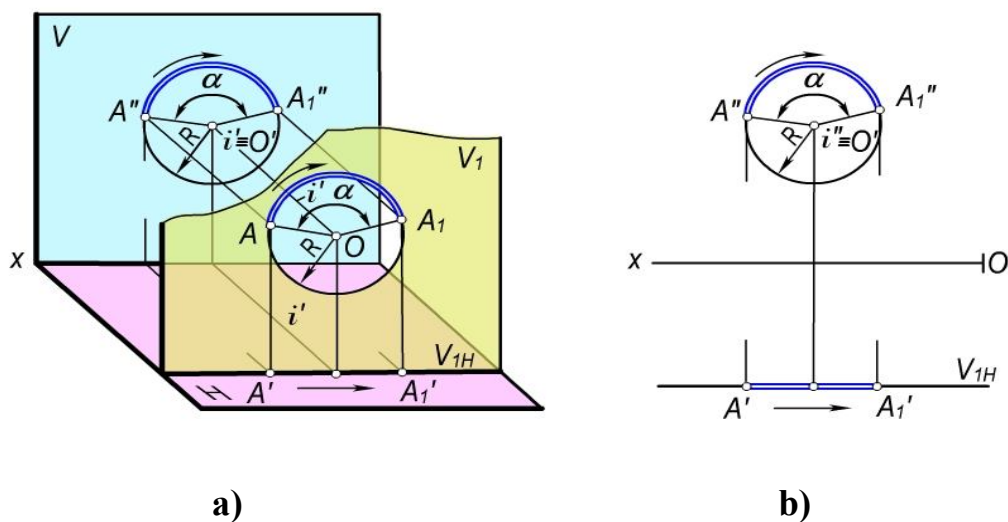
Aylantirish usuli harakatlantirish usulining xususiy ko'rinishi hisoblanadi. Bu usulda geometrik shaklga tegishli nuqta berilgan biror o'qqa nisbatan aylana bo'yicha harakatlanadi. Aylana markazi berilgan o'qda joylashgan bo'lib, uning radiusi harakatlanuvchi nuqta bilan aylantirish o'qi orasidagi masofaga teng bo'ladi.

Aylantirish o'qlari proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan perpendikulyar, parallel, shuningdek, proyeksiyalar tekisligiga tegishli va boshqa vaziyatlarda bo'lishi mumkin.

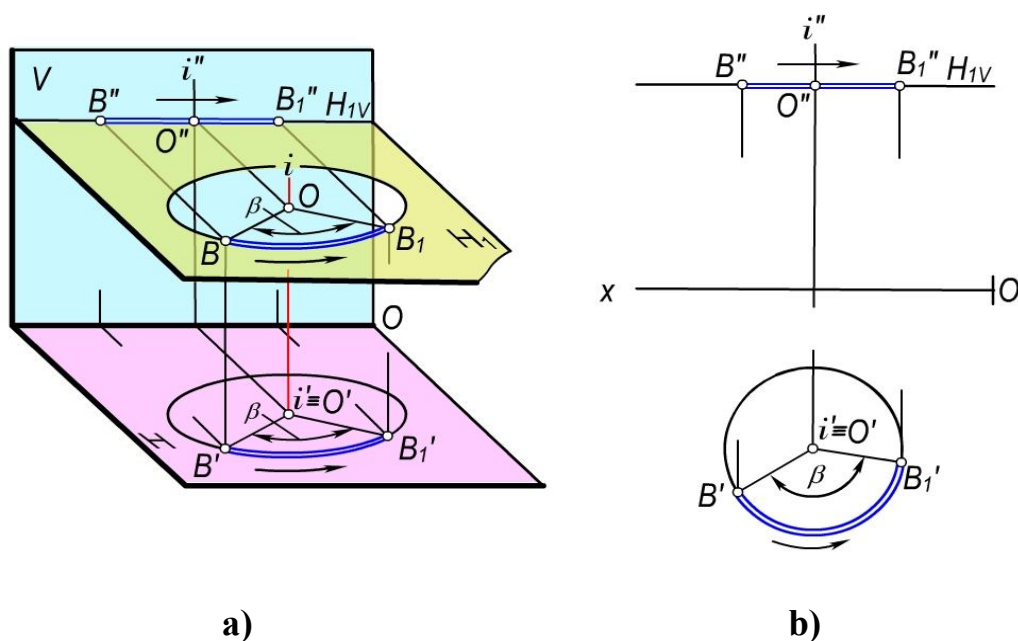
Quyida turli vaziyatlarda joylashgan o'qlar atrofida aylantirish usullarini ko'rib chiqamiz.

Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish. Nuqtani aylantirish. H va V tekisliklar sistemasida A nuqta va i aylantirish o'qi berilgan (5.10–rasm, a). Agar A nuqtani $i \perp V$ aylantirish o'qi atrofida harakatlantirsak, mazkur nuqta V tekislikka parallel V_1 tekislikda radiusi OA ga teng aylana bo'yicha harakatlanadi. Shuningdek, A nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi V_{1N} izi bo'yicha harakat qiladi, frontal proyeksiyasi esa aylana bo'yicha harakat qiladi (5.11–rasm, b).

B nuqtaning H tekislikka perpendikulyar i o'qi atrofida aylantirilishi 5.11–rasm, a da ko'rsatilgan. B nuqta B_1 vaziyatga radiusi OB ga teng aylana bo'yicha H tekislikka parallel bo'lgan N_1 tekislikda harakatlanib keladi. Bunda B nuqtaning gorizontaal proyeksiyasi aylana bo'yicha, frontal proyeksiyasi N_1 tekislikning N_{1V} izi bo'yicha harakatlanadi. (5.12–rasm, b).



5.10-rasm.



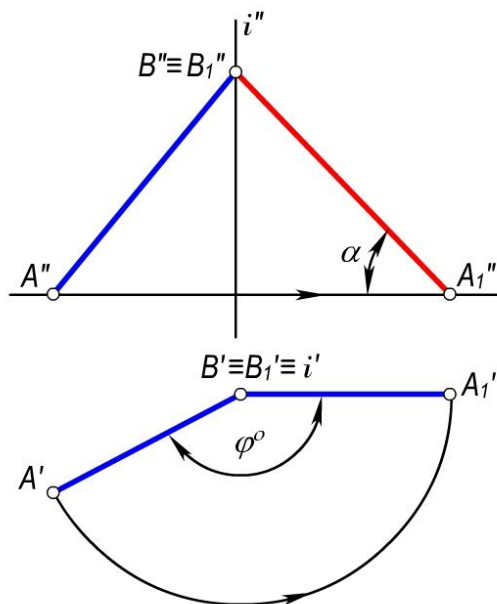
5.11-rasm.

Yuqorida bayon qilinganlardan quyidagi xulosalarga kelimiz:

- Agar A nuqta frontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, mazkur nuqtaning frontal proyeksiyasi (markazi aylantirish o'qining frontal proyeksiyasida bo'lgan) aylana bo'yicha, gorizontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.
- Agar nuqta gorizontal proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirilsa, nuqtaning gorizontal proyeksiyasi (markazi aylantirish o'qining gorizontal proyeksiyasida bo'lgan) aylana bo'yicha, frontal proyeksiyasi Ox o'qiga parallel to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

Nuqtani proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida aylantirish qoidalariga asosan umumiy vaziyatda joylashgan geometrik shakllarni xususiy yoki tadab qilingan vaziyatga keltirish mumkin.

1–misol. Umumiy vaziyatdagi $AB(A'B', A''B'')$ kesmani V tekislikka parallel vaziyatga keltirilsin. (5.12–rasm). Buning uchun AB kesmaning biror, masalan B uchidan $i \perp H$ aylantirish o'qi o'tkaziladi. So'ngra bu o'q atrofida kesmaning $A'B'$ gorizontal proyeksiyasini $A'B' \parallel Ox$ vaziyatga kelguncha aylantiramiz. Bunda AB kesmaning A'' nuqtasi Ox bo'yicha harakatlanib, A''_1 vaziyatni egallaydi. Hosil bo'lgan AB kesmaning $A'_1B'_1$ va $A''_1B''_1$ yangi proyeksiyalari V tekislikka parallelligini ko'rsatadi. Shakldagi α burchak AB kesmani H tekislik bilan hosil etgan burchagi bo'ladi.



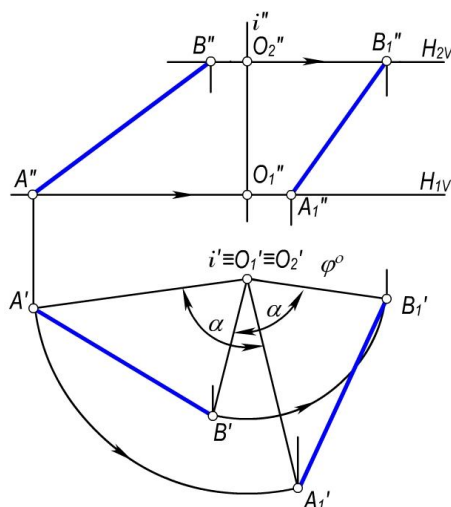
5.12-rasm.

2–misol. $AB(A'B', A''B'')$ kesmani $i \perp H$ o'q atrofida α burchakka aylantirish talab qilinsin (5.13–rasm).

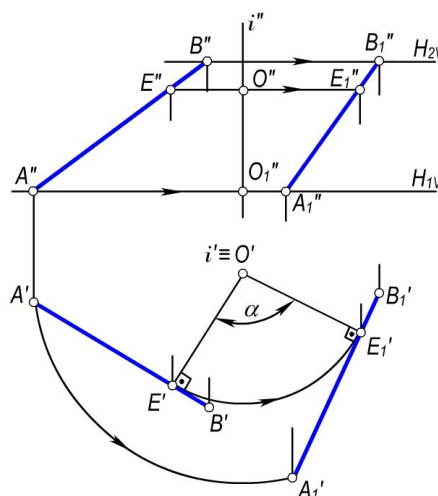
Kesmaning A' va B' proyeksiyalarini i o'qning gorizontal proyeksiyasi i' $A'O'_1$ va $B'O'_2$ kesmalar aylantirish radiuslari bo'ladi. Kesmani α burchakka aylantirish uchun uning A' va B' proyeksiyalarini berilgan I o'qi atrofida $A'O'_1$ va $B'O'_2$ radiuslari bo'yicha α burchakka aylantirish kifoya qiladi.

3–misol. Umumiy vaziyatda berilgan P tekislikni $i \perp H$ o'qi atrofida α burchakka aylantirilishi talab qilinadi. (5.15-rasm).

Buning uchun mazkur tekislik bilan I aylantirish o'qi kesishgan nuqtasi $o(o', o'')$ orqali o'tkazilgan h', h'' gorizontali α burchakka aylantirish yetarli bo'ladi.



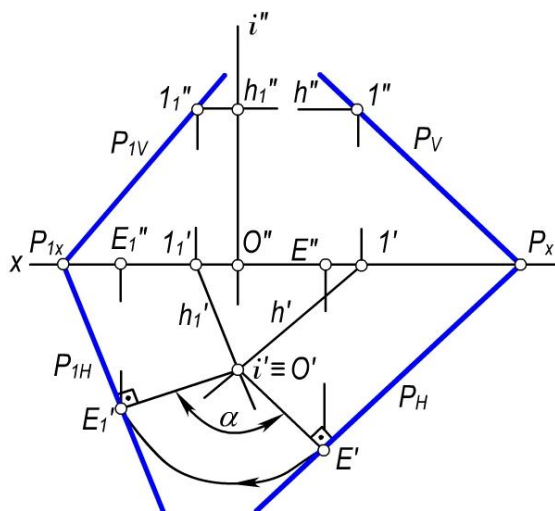
5.13-rasm.



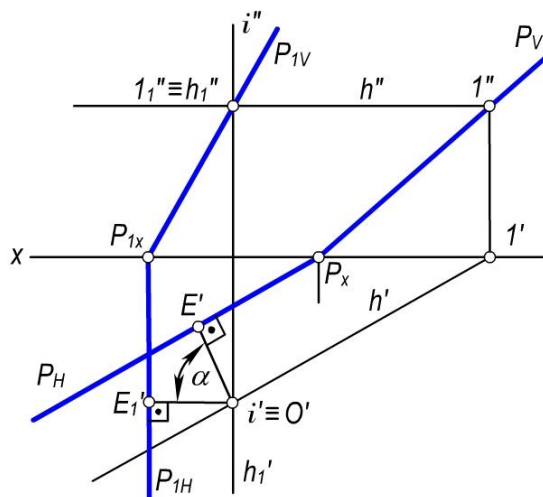
5.14-rasm.

4–misol. Umumiy vaziyatdagi P tekislikni frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etilsin (5.16–shakl).

P tekislikning h', h'' gorizontali i' aylantirish o'qi bilan P tekislikning kesishish nuqtasi $o(o', o'')$ o'tkaziladi. So'ngra tekislikning P_N izini OE radius bo'yicha $P_{1X} \perp Ox$ vaziyatga kelguncha aylantiramiz.



5.15-rasm.

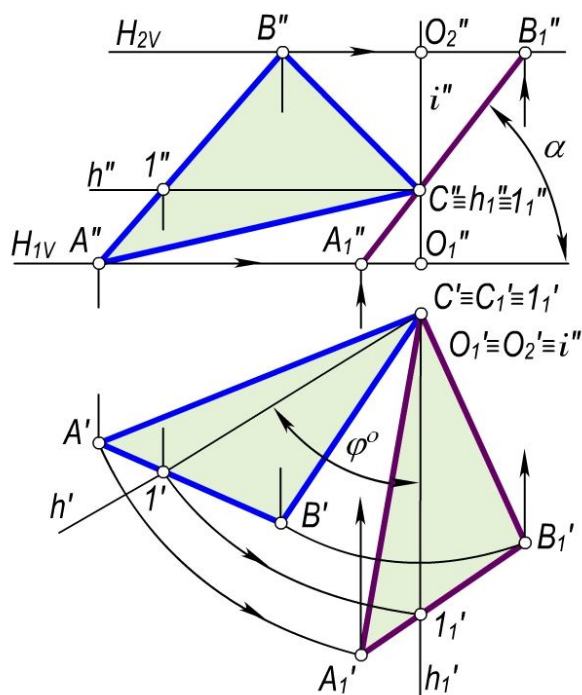


5.16-rasm.

5–misol. $\triangle ABC$ tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan α burchagini aniqlash talab etiladi (5.17–rasm). Izlangan α burchakni aniqlash uchun berilgan $\triangle ABC$ tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltiriladi. Buning uchun uchburchakning biror, masalan, C nuqtasidan $i' \perp H$ aylantirish o'qi o'tkaziladi va bu o'q atrofida uchburchakni $h_1 \perp V$ (epyrda $h_1 \perp V$) vaziyatga kelguncha aylantiriladi.

Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirish. Umumiy vaziyatda joylashgan tekis geometrik shakllarni proyeksiyalar

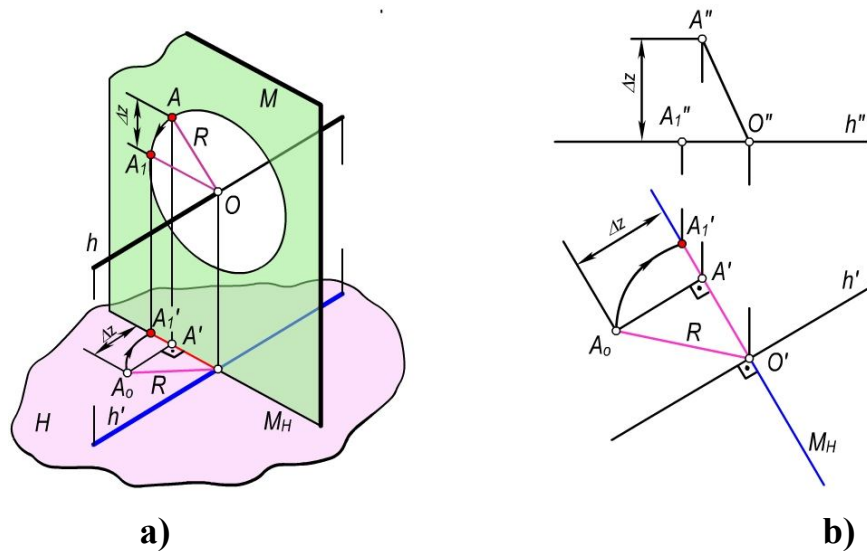
tekisliklariga parallel bo'lgan o'qlar atrofida aylantirib, ba'zi masalalarni yechish mumkin. Aylantirish o'qi deb geometrik shaklning asosiy chiziqlari – gorizontali yoki frontali olinadi. Geometrik shaklni uning gorizontali atrofida aylantirib, H tekislikka parallel vaziyatga, shuningdek, uni frontali atrofida aylantirib, V tekislikka parallel vaziyatga keltirish mumkin.



5.17-rasm.

Geometrik shakl proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirilganda uning har bir nuqtasi aylantirish o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda aylana bo'ylab harakatlanadi. Masalan (5.18–rasm, a), A no'qta h gorizontali atrofida aylantirilganda radiusi OA ga teng aylana bo'yicha $M \perp h$ tekislikda harakatlanadi. Nuqta gorizontali atrofida aylantirilganda uning gorizontali proyeksiyasi gorizontali h' gorizontali proyeksiyasiga perpendikulyar to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanadi.

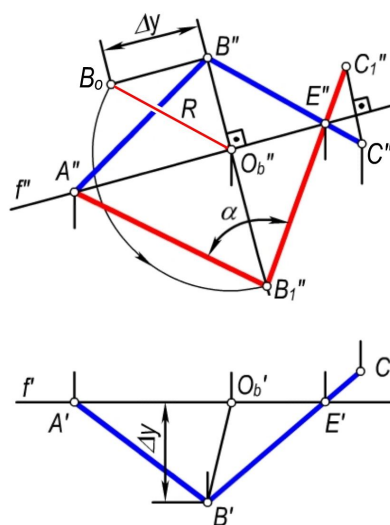
Chizmada (5.18–rasm, b) $A(A', A'')$ nuqtani A_1 vaziyatga aylantirish uchun aylantirish markazi O nuqtani aniqlash kerak. Bu nuqta aylantirish o'qi h ning M tekislik bilan kesishish nuqtasi bo'ladi. Epyurda aylantirish radiusi R ning haqiqiy o'lchamni aniqlash H tekislikda to'g'ri burchakli $\Delta O'A'A_0$ yasash bilan bajariladi.



5.18-rasm.

1– misol. Umumiy vaziyatdagi $\angle ABC$ ($\angle A'B'C'$, $\angle A''B''C''$)ning haqiqiy o'lchami aniqlansin (5.19–rasm). Bu masalani yechish uchun berilgan burchakning gorizontali yoki frontalidan foydalaniladi. Mazkur burchakning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun uning $f(f', f'')$ frontali o'tkaziladi. Shaklda hosil bo'lgan $\angle ABE = \angle ABC$ (chizmada $\angle A'B'E'$ va $\angle A''B''E''$)ning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun B nuqtani aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini aniqlash kifoya. Buning uchun B'' nuqtadan f' ga perpendikulyar o'tkaziladi va aylantirish radiusi markazining O_b va O_b'' proyeksiyalarini, so'ngra aylantirish radiusining $B'O_b$ va $B''O_b''$ proyeksiyalari orqali to'g'ri burchakli $\triangle O_b B'' B_O$ yasash bilan uning haqiqiy o'lchami O_b

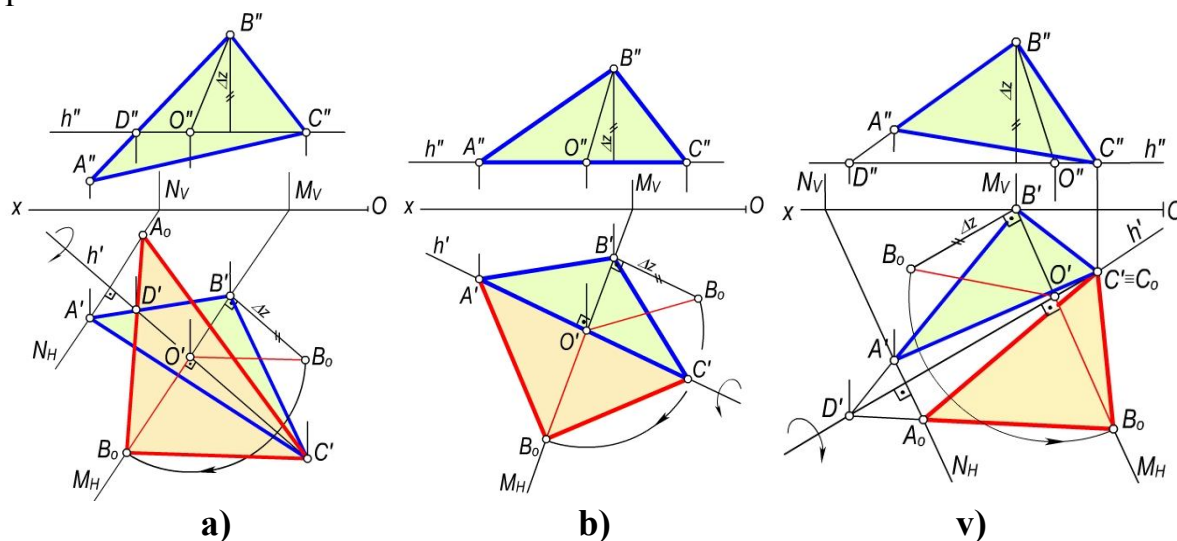
$B''_1 = R$ ni aniqlanadi. B nuqtaning yangi vaziyatini yasash uchun O_b dan R radius bilan $O_b B''_1$ perpendikulyarning davomi bilan kesishguncha yoy o'tkaziladi va hosil bo'lgan B''_1 bilan A'' va E'' nuqtalarni tutashtiriladi. Chizmada hosil bo'lgan α berilgan burchakning haqiqiy o'lchami bo'ladi.



5.19-rasm.

2-misol. 5.20,a-rasmda umumiy vaziyatdagi $\triangle ABC(A'B'C', A''B''C'')$ ning haqiqiy o'lchamini aniqlash ko'rsatilgan. Chizmada bu masalani yechish uchun uchburchak gorizontalinig h' va h'' proyeksiyalari o'tkaziladi.

$\triangle ABC$ ning haqiqiy o'lchami uchun uning A va B uchlarini aylantirish bilan aniqlanadi.



5.20-rasm.

Uchburchakning S va D nuqtalari aylantirish o'qiga tegishli bo'lgani uchun ularning fazoviy vaziyatlari o'zgarmaydi.

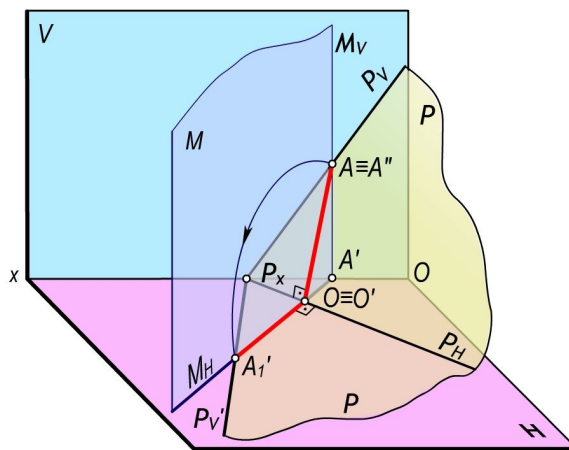
Agar uchburchakning biror tomoni (masalan, AC) gorizontal vaziyatda berilgan bo'lsa, masala 5.20,b-rasmda ko'rsatilgan kabi yechiladi.

5.20,v-rasmda aylanish o'qi (gorizontal) uchburchak tekislikning tashqarisida (C nuqta orqali) o'tkazilgan. Bu holda uchburchakning haqiqiy kattaligi uning gorizontal proyeksiyasi bilan ustma-ust tushmaydi, natijada, masalaning yechimi yaqqolroq bo'ladi.

Geometrik shaklni proyeksiyalar tekisliklariga tegishli o'q atrofida aylantirish (tekislikning izi atrofida aylantirish).

Aylantirish o'qi sifatida umumiy vaziyatdagi tekislikning gorizontal yoki frontal izi qabul qilinadi (5.21-rasm). Bu tekislik biror izi atrofida aylantirilib, proyeksiyalar tekisliklarining biriga jipslashtiriladi. Agar aylantirish o'qi sifatida tekislikning gorizontal izi qabul qilinsa, bu tekislikni gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashtirish mumkin. Shuningdek, tekislikni frontal izi atrofida aylantirib, uni frontal proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi.

Tekisliklarni proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo'li bilan mazkur tekislikka tegishli bo'lgan geometrik shakllarning haqiqiy o'lchamini aniqlash mumkin yoki umumiy vaziyatida berilgan tekislikda talab qilingan har qanday geometrik shaklni yasash mumkin.



5.21-rasm.

5.22–rasm, a da umumiy vaziyatdagi Q tekislikni Q_N gorizontal izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirish ko'rsatilgan. Tekislikning gorizontal izi aylantirish o'qi sifatida qabul qilingani uchun uning vaziyati o'zgarmaydi. Bu tekislikni H tekislikka jipslashtirish uchun mazkur tekislikka tegishli biror nuqtaning H tekislikka jipslashtirish kifoya.

Chizmada $P(P_N, P_V)$ tekislikni P_N izi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtirish uchun P_V izda olingan ixtiyoriy $A(A', A'')$ nuqta aylantirish radiusining haqiqiy o'lchamini aniqlash zarur (5.22–rasm, b).

5.22–rasm, b dan shuni aniqlash mumkinki, Q tekislikni Q_N izi atrofida aylantirib, uni H tekislikka jipslashtirishda Q_V iziga tegishli $Q_X B_1$ kesma o'zining haqiqiy o'lchamiga teng bo'lgachi uchun $Q_X B'' = Q_X B_1$ bo'ladi. Demak, chizmada $Q(Q_N, Q_V)$ tekislikni (5.23–rasm, b) H tekislikka jipslashtirish uchun uning Q_V Izida tanlab olingan B'' nuqtani va Q_X markazdan $Q_X B''$ radius bilan yoy chizib, M tekislikning M_N izi bilan kesishgan B_1 nuqta aniqlanadi. So'ngra B'_1 va Q_X nuqtalardan tekislikning Q_{V1} izi o'tkaziladi.

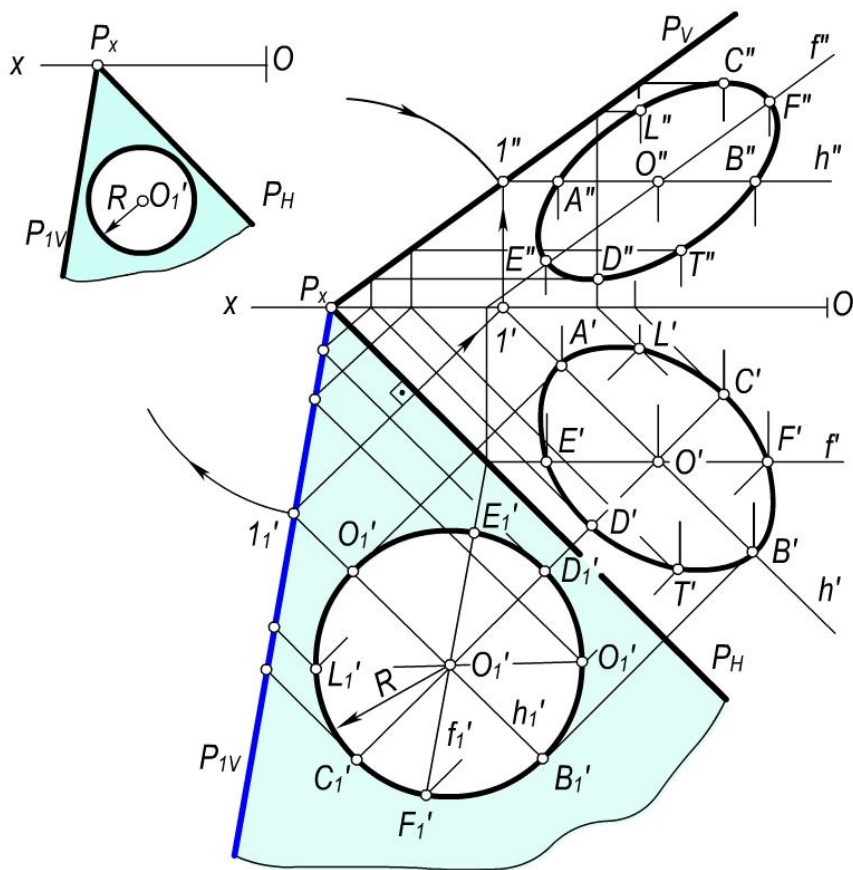
Xuddi shundan $R(R_H, R_V)$ tekislikni V tekislikka ham jipslashtirish mumkin (5.23–rasm). Buning uchun berilgan R tekislikning R_H gorizontal izida ixtiyoriy A nuqta tanlab, uning aylantirish radiusi $R_X A'$ aniqlanadi va tekislikning R_H izini R_V izi atrofida aylantirib, tekislikka jipslashtiriladi.

Umumiy vaziyatda berilgan tekislikka tegishli geometrik shaklning haqiqiy o'lchamini aniqlash uchun uning xarakterli nuqtalarini proyeksiyalar tekisligiga jipslashtirish yo'li bilan aniqlanadi. Masalan, $Q(Q_N, Q_V)$ tekislikka tegishli $\triangle ABC(A'B'C', A''B''C'')$ ning (5.24–rasm) haqiqiy o'lchami uning A, B va C nuqtalarini V tekislikka jipslashtirish bilan aniqlanadi.

proyeksiyasi o'tkaziladi. So'ngra P_x markazdan $P_x l'_1$ radius bilan o'tkazilgan yoyning $1'$ dan Ox o'qiga o'tkazilgan perpendikulyar bilan kesishgan $1''$ nuqtasi topiladi. Bu nuqtadan gorizontaling h'' proyeksiyasini o'tkaziladi. So'ngra $1''$ va P_x nuqtalardan tekislikning P_V izi o'tkaziladi. Aylana markazining proyeksiyalarini yasash uchun O'_1 dan P_N ga perpendikulyar o'tkazib, h' bilan kesishgan O' nuqtani va h'' da O'' nuqta topiladi. Shuningdek, bu gorizontalda joylashgan aylananing A'_1 va B'_1 nuqtalarining A', A'' va B', B'' proyeksiyalari aniqlanadi.

Tekislikning f'_1 frontalini aylananing markazi O'_1 dan P_{1V} ga parallel qilib o'tkazilib, aylananing Ye'_1 va F'_1 nuqtalarning Ye', Ye'' va F', F'' proyeksiyalari yasaladi.

Xuddi shu tarzda aylananing L'_1 va T'_1 , C'_1 va D'_1 nuqtalarning proyeksiyalari tekislikning gorizontallari yordamida aniqlanadi. Bu nuqtalarning bir nomli proyeksiyalarini mos ravishda o'zaro tutashtirilsa, aylananing gorizont va frontal proyeksiyalari (ellips sifatida) hosil bo'ladi.



5.25-rasm.

Nazorat savollari

1. Proyeksiyalarni qayta qurish usullarining asosiy farqlari nimadan iborat?
2. Tekis-parallel harakatlantirish usulining mohiyati nimadan iborat?
3. Nuqta N yoki V tekislikka parallel bo'lgan tekislikda harakatlantirilsa, uning proyeksiyalari qanday harakatlanadi?

4. Gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi o'q atrofida aylanayotgan nuqtaning proyeksiyalari qanday harakatlanadi?
5. Nuqtaning aylanish radiusi, markazi va aylanish tekisliklari deganda nimalar tushuniladi?
6. Kesmaning haqiqiy uzunligini yasash uchun uni qanday vaziyatga kelguncha aylantirish kerak. Bunda aylanish o'qi qanday vaziyatda olinadi?
7. Umumiy vaziyatdagi kesmani proyeksiyalovchi (masalan, gorizontal proyeksiyalovchi) holga keltirish uchun, uni qanday ketma-ketlikda ikki marta aylantirish kerak?
8. Uchburchakni gorizontal (yoki frontal) proyeksiyalovchi holga keltirish uchun uni qaysi o'q atrofida aylantirish kerak?
9. Uchburchakning haqiqiy kattaligini proyeksiyalar tekisliklariga perependikulyar bo'lgan o'qlar atrofida aylantirib topish algoritmi nimadan iborat?
10. Izlari bilan berilgan tekislikni π o'q atrofida aylantirib frontal proyeksiyalovchi holga keltirish uchun nima qilish kerak?
11. Umumiy vaziyatdagi uchburchakning haqiqiy kattaligini gorizontal (yoki frontal) chizig'i atrofida aylantirish mohiyati nimadan iborat?
12. Tekislikni izlari atrofida aylantirishdan ko'zlangan maqsad nima?
13. H gorizontal proyeksiyalar tekisligi bilan jipslashgan R tekislikning (izlari berilgan bo'lsa) fazodagi holati qanday qayta tiklanadi?

9-ma'ruza - 2 soat.
Ortogonal proyeksiyalarni qayta tuzish usullari

Proyeksiyalar tekisligiga parallel o'q atrofida aylantirish.

Proyeksiya tekisligiga tegishli bo'lgan o'q atrofida (tekislikning izi atrofida) aylantirish.

Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli.

Tayanch iboralar va tushunchalar mazkur ma'ruzada yo'q

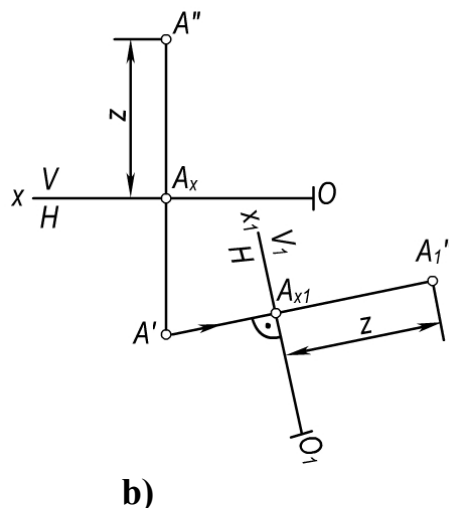
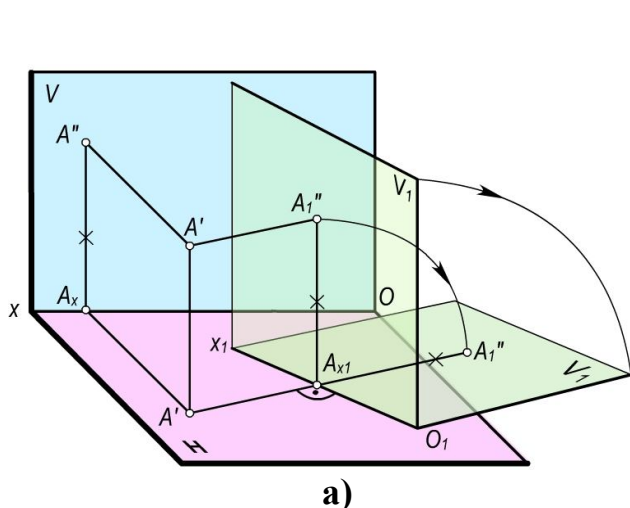
9.1-§. Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usuli

Proyeksiyalar tekisliklarini almashtirish usulida geometrik shaklning dastlabki fazoviy vaziyati saqlanib qoladi. Proyeksiyalar tekisliklari geometrik shakl talab qilingan (parallel, perpendikulyar va boshqa) vaziyatda proyeksiyalanagidan qilib yangi proyeksiyalar tekisliklari bilan almashtiriladi. Bunda tekisliklarning o'zaro perpendikulyarligi saqlanib qoladi va proyeksiyalash yo'nalishi yangi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar qilib olinadi.

Geometrik masalada qo'yilgan shartga ko'ra, uni proyeksiyalar tekisliklarining bittasini yoki ikkitasini ketma-ket almashtirish yo'li bilan yechish mumkin.

Proyeksiyalar tekisliklarining ikkalasi almashtirilganda, ular ketmaket ravishda, masalan, avval geometrik shaklga nisbatan parallel, so'ngra unga perpendikulyar yoki aksincha qilib almashtiriladi.

Proyeksiyalar tekisliklarining bittasini almashtirish. Fazodagi A nuqta, H va V proyeksiyalar tekisliklari berilgan bo'lsin (5.26-rasm, a). A nuqtaning H va V tekisliklardagi ortogonal proyeksiyalari A' va A'' bo'ladi. Agar V tekislikni $V_1 \perp H$ tekislik bilan almashtirsak, $\frac{V_1}{H}$ yangi proyeksiyalar tekisliklari tizimi hosil bo'ladi. A nuqtaning V_1 tekislikdagi proyeksiyasini yasash uchun berilgan nuqtadan mazkur tekislikka perpendikulyar o'tkazib, yangi frontal proyeksiyasi A''_1 topiladi.



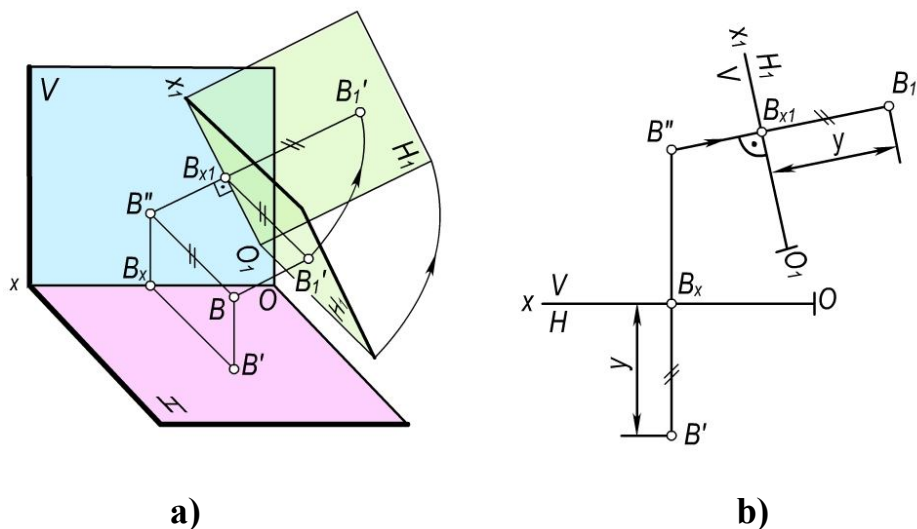
5.26-rasm.

Shakldan A'' dan Ox o'qigacha bo'lgan masofa A''_1 dan O_1x_1 gacha bo'lgan masofaga teng bo'lishini aniqlash mumkin, ya'ni $A''_1A_{x1}=A''A_x$.

Nuqtaning yangi proyeksiyalar tizimidagi chizmasini yasash uchun yangi proyeksiyalar tekisligi dastlabki proyeksiyalar tekisligiga jipslashtiriladi. Yangi $\frac{V_1}{H}$ proyeksiyalar tekisliklar sistemasidagi A nuqtaning epyurini yasash uchun V_1 tekislikni O_1x_1 o'qi atrofida aylantirib, H tekislikka jipslashtiramiz. Bunda V_1 tekislikni qaysi tomonga aylantirib uni H tekislik bilan jipslashtirish deyarli ahamiyatga ega emas. Faqat geometrik shaklning yangi proyeksiyasi uning dastlabki proyeksiyalariga ustma-ust tushmasligi ma'kul.

Chizmada A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun (5.26,b–rasm) A nuqtadan O_1X_1 ga perpendikulyar tushiriladi. Uning davomiga $A''A_x$ masofani qo'yamiz. Natijada, hosil bo'lgan A' va A''_1 yangi $\frac{V_1}{H}$ tekisliklar tizimidagi A nuqtaning chizmasi bo'ladi. Demak, frontal proyeksiyalar tekisligi almashtirilganda nuqtaning yangi frontal proyeksiyasini yasash uchun uning Ox dan frontal proyeksiyasigacha bo'lgan masofasi (z) o'zgarmaydi.

Shuningdek, 5.27,a–rasmda H va V proyeksiyalar tekisliklari tizimida B nuqta B' va B'' proyeksiyalari berilgan. Agar H tekislikni $H_1 \perp V$ tekislik bilan almashtirilsa, $\frac{V}{H_1}$ yangi tekisliklar tizimiga ega bo'linadi. B nuqtadan H_1 tekislikka perpendikulyar o'tkazamiz va B'_1 proyeksiyasini yasaymiz. Nuqtaning yangi tekisliklar tizimidagi chizmani yasash uchun (5.27,b–rasm) H_1 tekislikni O_1X_1 proyeksiyalar o'qi atrofida aylantirib, V tekislikka jipslashtiramiz. Chizmada B nuqtaning yangi proyeksiyasini yasash uchun uning B'' proyeksiyasidan O_1X_1 ga o'tkazilgan perpendikulyarning davomiga $B'_1B_{x1}-B^1B_x$ masofa qo'yiladi. Natijada hosil bo'lgan B'_1 va B'' yangi $\frac{V}{H_1}$ tekisliklar tizimidagi B nuqtaning chizmasi bo'ladi. Demak, gorizontal proyeksiya tekisligini almashtiriganda, nuqtaning yangi gorizontal proyeksiyasini yasash uchun uning Ox dan gorizontal proyeksiyasigacha bo'lgan masofasi (u) o'zgarmaydi.



5.27-rasm.

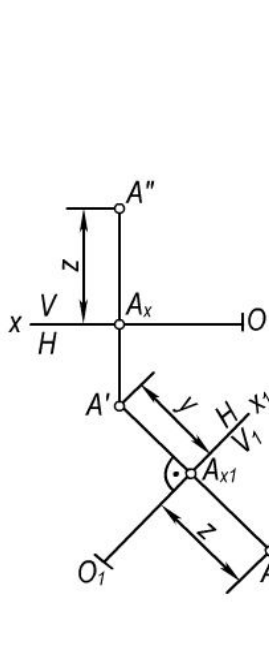
Proyeksiyalar tekisliklarining ikkitasini almashtirish. Ayrim geometrik masalalarni proyeksiyalar tekisliklarining ikkitasini almashtirish yo'li bilan yechish mumkin. Bunday hollarda proyeksiyalar tekisliklarini masalada talab qilingan shartga muvofiq ravishda ketma-ket almashtiriladi.

A nuqtaning $\frac{V}{H}$ sistemasida berilgan A' va A'' proyeksiyalari orqali uning H va V proyeksiyalar tekisliklari almashtirilgandan keyingi yangi A'_1 va A''_1 proyeksiyalarini yasash. (5.28–rasm). Uchun avval H tekislikni H_1 tekislik bilan almashtirib, $\frac{V_1}{H_1}$ tizimi hosil qilinadi. Buning uchun chizmada ixtiyoriy vaziyatda O_1X_1 proyeksiyalar o'qi tanlab olinadi, A nuqtaning yangi A''_1 proyeksiyasini yasash uchun uning A' proyeksiyasidan O_1X_1 proyeksiyalar o'qiga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A''A_X$ masofa qo'yiladi. Natijada, A nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ tizimidagi yangi A''_1 proyeksiyasi hosil bo'ladi. A nuqtaning A'_1 proyeksiyasini yasash uchun $\frac{V_1}{H}$ tizimdan $\frac{V_1}{H_1}$ tizimga o'tiladi. Buning uchun ixtiyoriy vaziyatda joylashgan O_2X_2 o'qi olinadi va nuqtaning A''_1 proyeksiyasidan O_2X_2 ga perpendikulyar o'tkazib, uning davomiga $A'A_{X1}$ masofa qo'yiladi. Shunday qilib O_2X_2 tizimda A nuqtaning A''_1 va A'_1 yangi proyeksiyalari hosil bo'ladi.

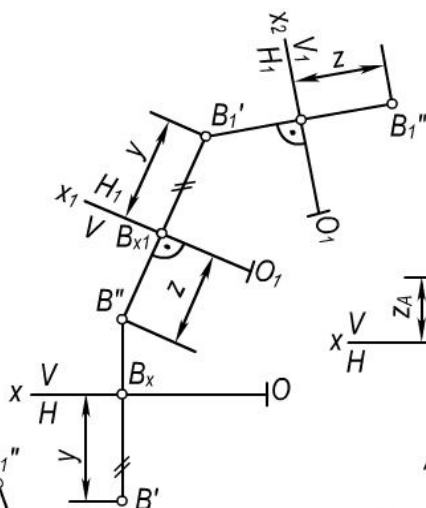
5.29–rasmda B nuqtaning $\frac{V}{H_1}$ sistemani O_1X_1 , $\frac{V_1}{H}$ va O_2X_2 , $\frac{V_1}{H_1}$ sistemaga almashtirish natijasida yangi B''_1 va B'_1 proyeksiyalarni yasash ko'rsatilgan.

1–misol. Umumiy vaziyatda berilgan $AB(A'B', A''B'')$ kesmaning haqiqiy uzunligi aniqlash talab etilsin. (5.30-rasm). Buning uchun umumiy vaziyatda berilgan kesmaga parallel qilib, gorizonttal yoki frontal proyeksiyalar tekisligini yangi proyeksiyalar tekisligi bilan almashtiriladi. Chizmada masalani yechish uchun uning yangi O_1X_1 proyeksiyalar o'qini kesmaning biror, masalan, $A'B'$ gorizonttal proyeksiyasiga parallel qilib olinadi.

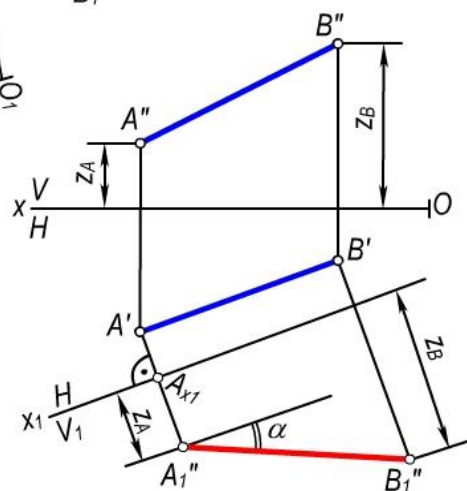
Demak, $\frac{V_1}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari tizimida AB kesma V_1 proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'ladi va bu tekislikda haqiqiy uzunligiga teng bo'lib proyeksiyalanadi.



5.28-rasm.



5.29-rasm.



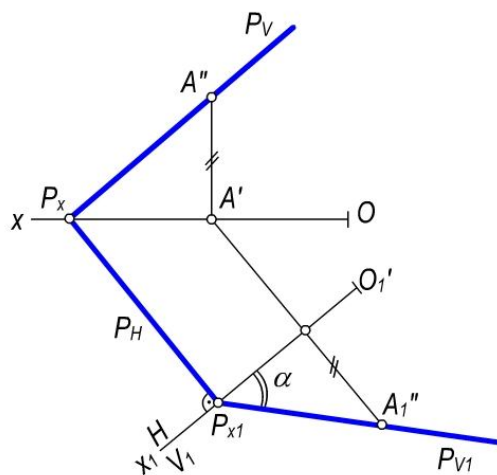
5.30-rasm.

2–misol. Umumiy vaziyatdagi $P(P_N, P_V)$ tekislikni frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltirish talab etiladi (5.31–rasm)

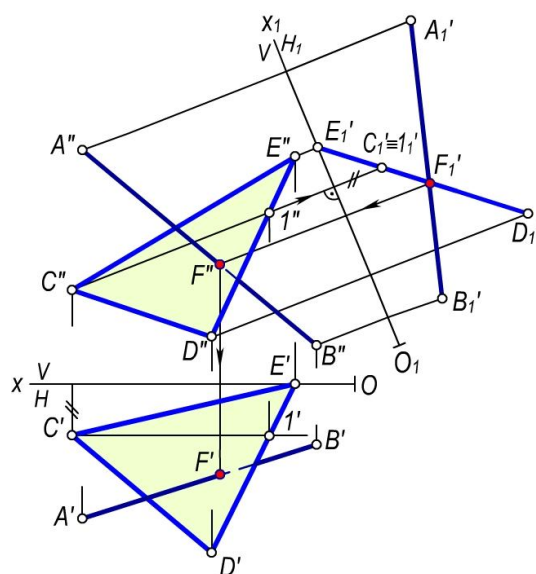
Ma'lumki, frontal proyeksiyalovchi tekislikning gorizontal izi Ox o'qiga perpendikulyar bo'ladi. Demak, umumiy vaziyatdagi P tekislikni frontal proyeksiyalovchi vaziyatga keltirish uchun yangi O_1X_1 proyeksiyalar o'qini tekislikning P_N gorizontal iziga ixtiyoriy joydan perpendikulyar qilib olinadi.

Tekislikning yangi P_V frontal izini O_1X_1 proyeksiyalar o'qi bilan tekislik P_N izining kesishish nuqtasi P_{X1} dan o'tkaziladi. Tekislikning yangi P_{V1} izining yo'nalishini aniqlash uchun tekislikning P_V iziga tegishli biror, masalan, A nuqta (chizmada A' va A'') olinib, uning yangi A''_1 frontal proyeksiyasi yasiladi. Tekislikning yangi P_{V1} izini P_{X1} va A''_1 nuqtalardan o'tkaziladi. Chizmada ko'rsatilgan α burchak P tekislikning H tekislik bilan tashkil etgan burchagi bo'ladi.

3–misol. $AB(A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziqning umumiy vaziyatdagi $Q(Q_H, Q_V)$ tekislik bilan kesishish nuqtasi yasalsin (5.32–rasm). Masalani yechish uchun Q tekislikni gorizontal yoki frontal proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiriladi. Buning uchun yangi O_1X_1 proyeksiyalar o'qini tekislikning biror iziga masalan, Q_H ga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Natijada, tekislikning yangi Q_{V1} izini hamda to'g'ri chiziqning $A''_1 B''_1$ proyeksiyasi yasiladi. Hosil bo'lgan kesmaning $A''_1 B''_1$ proyeksiyasi bilan tekislik Q_{V1} izining kesishgan K''_1 nuqtasi AB kesmaning Q tekislik bilan kesishish nuqtasi bo'ladi. Bu nuqtani teskari yo'nalishda proyeksiyalab, berilgan to'g'ri chiziq kesmasi bilan tekislikning kesishish nuqtasining K' va K'' proyeksiyalari yasiladi.

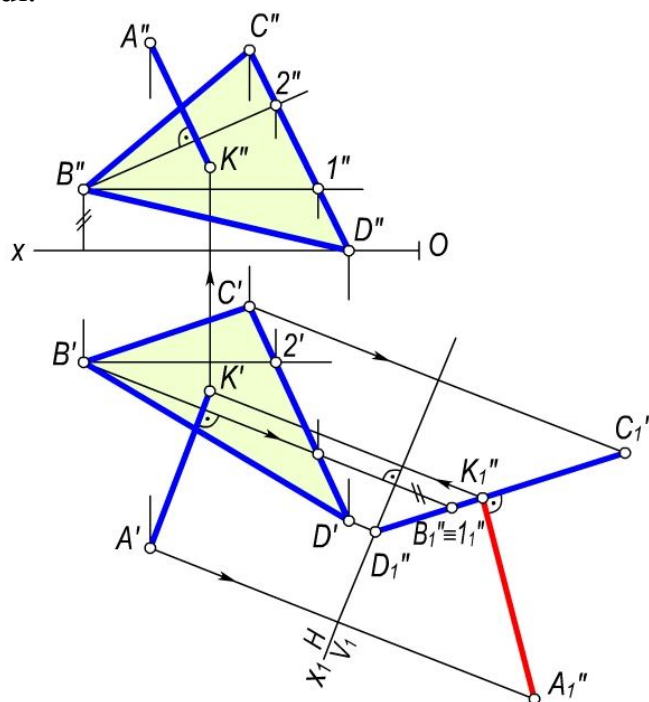


Xuddi shu usul bilan $AB(A'B', A''B'')$ to'g'ri chiziqning (5.33–rasm) $\Delta CDE(\Delta C'D'E', \Delta C''D''E'')$, bilan kesishish nuqtasining F' va F'' proyeksiyalarini yasash uchun mazkur tekislikni proyeksiyalovchi tekislik vaziyatiga keltiriladi. Buning uchun epyurda ΔCDE tekislikning biror asosiy chizig'iga, masalan, $C1(C'1', C''1'')$ frontaliga perpendikulyar qilib, yangi O_1X_1 proyeksiyalar o'qini o'tkaziladi.



4–misol. $A(A', A'')$ nuqtadan $\triangle BCD(\triangle B'C'D', \triangle B''C''D'')$ tekislikkacha bo'lgan masofani aniqlansin (5.34–rasm). Bu masofa A nuqtadan $\triangle BCD$ tekislikka tushirilgan perpendikulyar bilan o'lchanadi. Masalani yechish uchun epyurda yangi proyeksiyalar tekisligini uchburchak tekisligining asosiy chiziqlaridan biriga, masalan, gorizontliga perpendikulyar qilib ya'ni $O_1x_1 \perp B'1'$ ni o'tkaziladi. So'ngra nuqtaning va uchburchakning to'g'ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalangan

yangi proyeksiyalovchi $D''_1 B''_1 C''_1$ vaziyatini va nuqtaning A''_1 proyeksiyasi yasaladi. Izlangan masofaning haqiqiy uzunligi A''_1 dan $D''_1 B''_1 C''_1$ kesmaga o'tkazilgan $A''_1 K''_1$ perpendikulyar bo'ladi.



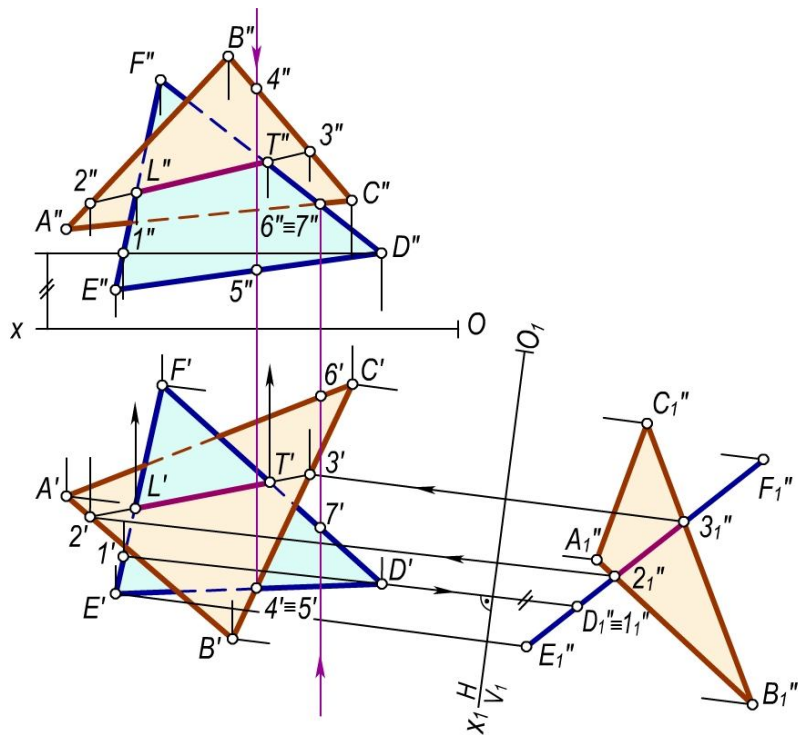
5.34-rasm.

5-misol. $\triangle ABC$ ($\triangle A'B'C'$, $\triangle A''B''C''$) va $\triangle EFD$ ($\triangle E'F'D'$, $\triangle E''F''D''$) tekisliklar kesishish chizig'ining proyeksiyalari va ko'rinishligi aniqlansin. (5.35–rasm). Masalani yechish uchun berilgan uchburchaklarning birini, masalan $\triangle EFD$ ni proyeksiyalovchi vaziyatga keltiriladi. Bunda $\triangle EFD$ ning mazkur proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi shaklida proyeksiyalanadi. Proyeksiyalar tekisliklarining yani tizimida ikki uchburchaklar $2''_1 3''_1$ to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. Kesishish chizig'ining $2' 3'$ gorizontal va $2'' 3''$ frontal proyeksiyalarini teskari proyeksiyalash bilan uchburchaklarning dastlabki berilgan proyeksiyalari aniqlanadi. Chizmada topilgan $2'3'$ va $2''3''$ kesmalarni $\triangle EFD$ ning $E'F'$, $E''F''$ va $D'F'$, $D''F''$ tomonlari bilan kesishgan L' , L'' va T' , T'' nuqtalar aniqlanadi. Natijada, hosil bo'lgan $L' T'$ va $L'' T''$ chiziqlar ikki uchburchak kesishish chizig'ining proyeksiyalari bo'ladi.

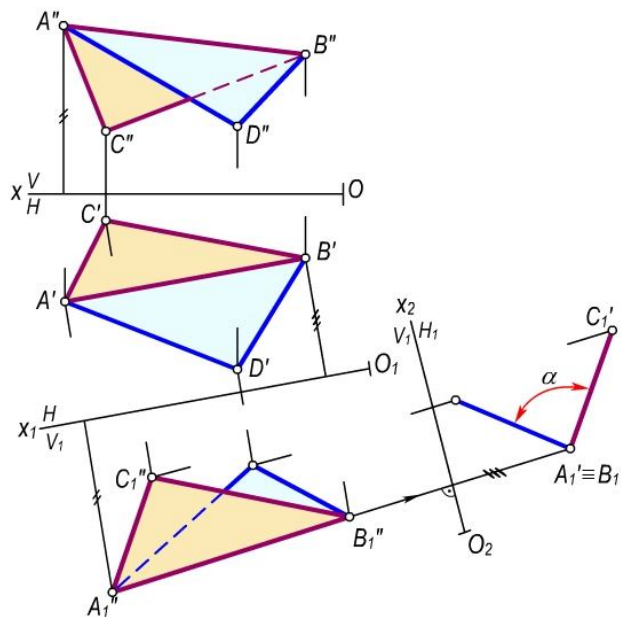
Chizmaning ko'rinishligini aniqlash uchun uchburchaklarning $4'$, $4''$ va $5'$, $5''$, shuningdek, $6'$, $6''$ va $7'$, $7''$ konkurent nuqtalaridan foydalaniladi.

6-misol. $\triangle ABC$ ($A'B'C'$, $A''B''C''$) va $\triangle ABD$ ($A'B'D'$, $A''B''D''$) tekisliklari orasidagi ikki yoqli burchakning haqiqiy kattaligi topilsin (5.36–rasm). Yangi proyeksiyalar tekisligini ikki tekislikning umumiy AB kesishish chizig'iga perpendikulyar qilib olinadi. Lekin AB qirra umumiy vaziyatda bo'lgani uchun $\frac{V}{H}$ proyeksiyalar tekisliklari tizimini avval $\frac{V_1}{H} \parallel AB$ qilib (chizmada $O_1 X_1 \parallel A'B'$), so'ngra $\frac{V_1}{H_1} \perp AB$ qilib (chizmada $O_2 X_2 \perp A''_1 B''_1$) ketma-ket almashtiriladi.

Natijada, $\triangle ABC$ va $\triangle ABD$ yangi H_1 proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar vaziyatda bo'lib qoladi va kesishuvchi kesmalar shaklida proyeksiyalanadi. Bu kesmalar orasidagi α o'tkir burchak izlangan burchak bo'ladi.

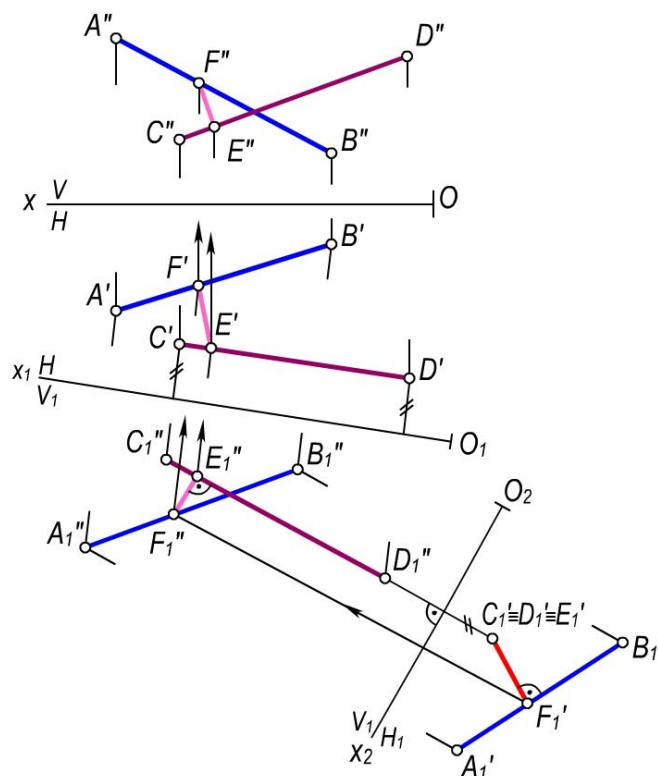


5.35-rasm.



5.36-rasm.

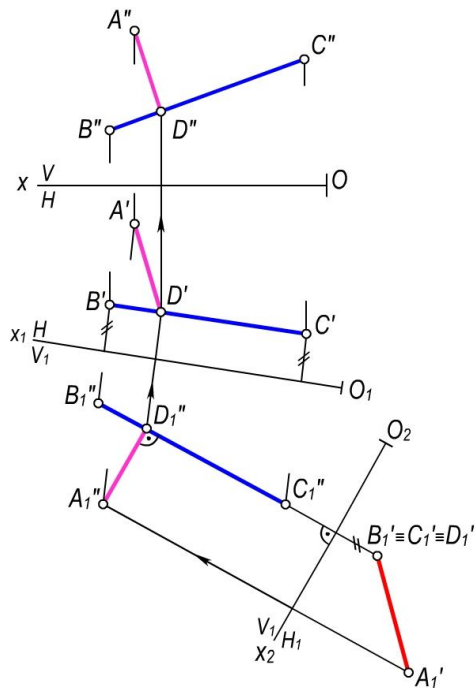
7–misol. $AB(A'B', A''B'')$ va $CD(C'D', C''D'')$ uchrashmas to'g'ri chiziqli kesmalari orasidagi masofani aniqlash 5.37–rasmida ko'rsatilgan. Bunda to'g'ri chiziqlardan biri, masalan CD proyeksiyalovchi holga keltiriladi (rasmida CD kesma parallel qilib V_1 yangi frontal proyeksiyalar tekisligi o'tkazilgan). So'ngra CD kesma perpendikulyar qilib H_1 tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikda kesmalarning yangi gorizontali proyeksiyalari topiladi. Bunda CD kesma $C_1 \equiv D_1$ nuqta ko'rinishida proyeksiyalanadi. Bu nuqtadan $A_1 B_1$ kesma tushirilgan $E_1 F_1$ kesmaning uzunligi CD va AB lar orasidagi masofa bo'ladi. Teskari proyeksiyalash bilan E va F nuqtalarning E', E'' va F', F'' proyeksiyalari yasalgan.



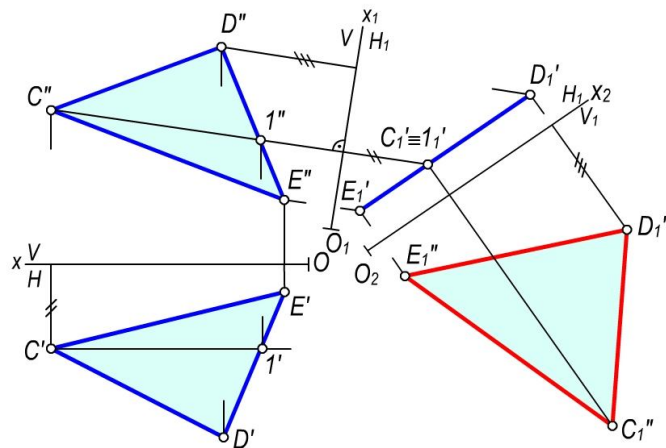
5.37-rasm.

8–misol. 5.38–rasmda $A(A', A'')$ nuqtadan $BC(B'C', B''C'')$ kesmagacha bo'lgan masofa aniqlangan. Buning uchun BC kesmaga parallel qilib V tekislikni V_1 tekislik bilan shunday almashtiramizki, $V_1 \parallel B'C'$ bo'lsin. V_1 tekislikda BC va A larni proyeksiyalanadi hamda $B''_1 C''_1$ kesma va A''_1 nuqtaning yangi frontal proyeksiyalari hosil qilinadi. So'ngra H tekislikni H_1 tekislik bilan shunday almashtiramizki, $H_1 \perp B''_1 C''_1$ bo'lsin. H_1 tekislikda BC va A larning yangi gorizontal proyeksiyalari yasaladi. Hosil bo'lgan A'_1 va $B'_1 \equiv C'_1$ nuqtalar orasidagi masofa A nuqtadan BC kesmagacha bo'lgan masofa bo'ladi.

9–misol. 5.39–rasmda $\triangle CDE(\triangle C'D'E', \triangle C''D''E'')$ uchburchakning proyeksiyalariga asosan uning haqiqiy kattaligi aniqlangan. Bunda H tekislikni H_1 tekislikka shunday almashtiramizki, $H_1 \perp \triangle CDE$ bo'lsin. Buning uchun $H_1 \perp C''D''$ (uchburchak frontalining frontal proyeksiyasi) bo'lsa kifoya qiladi. Uchburchakning uchlarini H_1 tekislikka proyeksiyalab, yangi $C'_1 D'_1 E'_1$ gorizontal proyeksiyani to'g'ri chiziq ko'rinishida hosil qilinadi. So'ngra V tekislikni V_1 tekislik bilan shunday almashtiramizki, $V_1 \parallel C'_1 D'_1 E'_1$ bo'lsin. C, D, E nuqtalarning V_1 . Bu nuqtalarni o'zaro tutashtirib, $\triangle C'_1 D'_1 E'_1 = \triangle CDE$ haqiqiy kattaligini hosil qilamiz. Bu misolni uchburchakning gorizontalini o'tkazib va unga avval V_1 ni perpendikulyar qilib tekislik o'tkazish va hosil bo'lgan kesmaga (uchburchakning proyeksiyasi) H_1 ni parallel qilib o'tkazish yo'li bilan ham yechish mumkin.



5.38-rasm.



5.39-rasm.

Nazorat savollari

1. Proyeksiyalar tekisliklarni almashtirish usulining mohiyati nimadan iborat?
2. Kesmaning haqiqiy uzunligini va og'ish burchaklarini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklari qanday vaziyatda almashtiriladi?
3. Umumiy vaziyatdagi to'g'ri chiziqni proyeksiyalovchi nolga keltirish uchun proyeksiyalar tekisliklari qanday ketma-ketlikda va qanday vaziyatlarda almashtiriladi?
4. Umumiy vaziyatdagi uchburchakning haqiqiy kattaligini yasash uchun proyeksiyalar tekisliklari qanday ketma-ketlikda va qanday vaziyatlarda almashtiriladi.

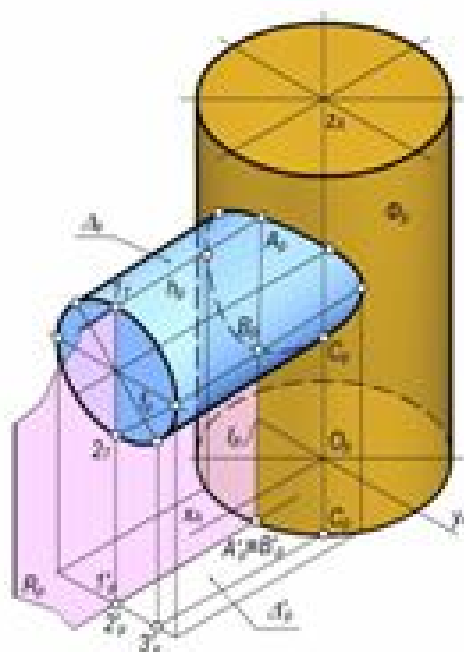


TOSHKENT AVTOMOBIL YO'LLAR INSTITUTI
CHIZMA GEOMETRIYA VA GRAFIKA KAFEDRASI

Hakimov L. Jumayev M. To'xtayev A.

CHIZMA GEOMETRIYA

2-qism
ma'ruzalar matni



Toshkent -2005

Ko'pyoqliklar

Ko'pyoqlik haqida tushuncha Ko'pyoqliklarning tekislik bilan kesishishi

Tayanch iboralar va tushunchalar

Ko'pyoqlik, qavariq, botiq ko'pyoqlik, mun ko'pyoqlik, Platon jismlari, Arximed jismlari.

10.1-§. Umumiy ma'lumotlar

Ta'rif. Hamma tomonidan tekis ko'pburchaklar bilan chegaralangan geometrik rasm - **ko'pyoqlik** deyiladi.

Tekis ko'pburchaklarning o'zaro kesishuvidan hosil bo'lgan kesmalar, ko'pyoqlikning-**qirralari** va qirralar orasidagi ko'pburchaklarni uning **yoqlari** deb ataladi. Qirralarning o'zaro kesishuv nuqtalari ko'pyoqlikning **uchlari** deb yuritiladi (6.1, 6.2-rasm).

Ko'pyoqlikning uchlari va qirralari uning *aniqlovchilari* xisoblanadi (6.1-rasm). Ko'pyoqlikning bir yon yog'ida yotmagan ikki uchini birlashtiruvchi kesma uning *diagonali* deb ataladi (6.2 rasm). Ko'pyoqlik aniqlovchilari uning istalgan yon yog'iga (tekislikka) nisbatan bir tomonda joylashsa, uni *qavariq ko'pyoqlik*, aksincha *qavariq bo'lmagan ko'pyoqlik* deb yuritiladi. Ko'pyoqliqlarining bir necha turlari mavjud bo'lib, ulardan quyidagilarni ko'rib chiqamiz:

Piramida

Ta'rif. Yoqlaridan biri tekis ko'pburchak bo'lib, qolgan yoqlari esa umumiy uchga ega bo'lgan uchburchaklardan tuzilgan ko'pyoqlik **piramida** deyiladi

Ko'pburchak piramidaning asosi va uchburchaklar esa uning yon yoqlari deb ataladi. Yon yoqlarining umumiy uchi piramidaning ham uchi hisoblanadi va u asos tekisligida yotmaydi. Asosi muntazam ko'pburchakli piramida *muntazam piramida* deb ataladi. Piramida balandligi asosining markazidan o'tib, unga perpendikulyar bo'lsa, uni to'g'ri piramida, perpendikulyar bo'lmasa og'ma piramida deb yuritiladi (6.1- rasm).

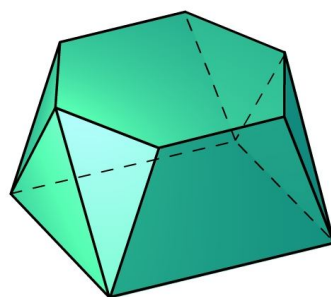
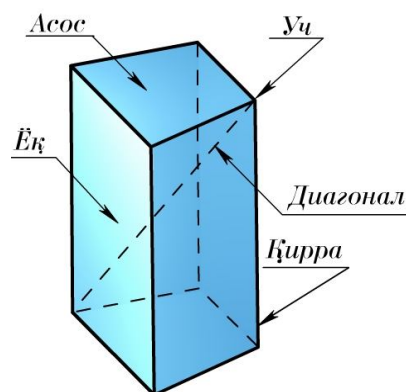
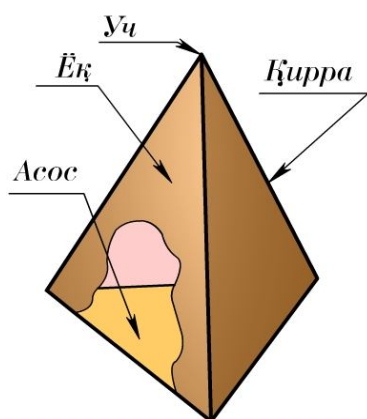
Prizma

Ta'rif. Yon yoqlari to'rt burchaklardan va asosi ko'pburchakdan iborat bo'lgan ko'pyoqlik **prizma** deyiladi.

Prizmani barcha qirralarini kesuvchi parallel tekisliklarda hosil bo'lgan ko'pburchaklar–prizmaning asoslari deb ataladi. Yon qirralari asosiga nisbatan og'ma yoki perpendikulyar bo'lsa, prizma ham mos ravishda *og'ma* yoki *to'g'ri prizma* deb ataladi. Asosi muntazam ko'pburchak bo'lgan prizma, *muntazam prizma* deb yuritiladi (6.2-rasm).

Asoslari o'zaro parallel tekisliklarda yotgan ikkita ko'pburchakdan va yon yoqlari esa asos uchlaridan o'tuvchi uchburchaklar va trapetsiyalardan iborat bo'lgan ko'pyoqlik *prizmatoid* deyiladi (6.3-rasm). Muntazam qabiq ko'pyoqliklar o'zaro teng bir xil muntazam ko'pburchaklardan iborat yoqlarga, o'zaro teng ikki yoqli

burchaklarga va o'zaro teng qirralarga ega bo'ladi. Bu ko'pyoqliklar asosan besh xil bo'lib *Platon jismlari* deb yuritiladi (2-jadval).



6.1-rasm

6.2-rasm

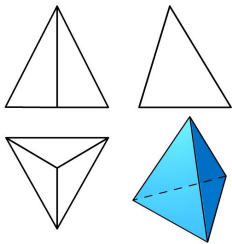
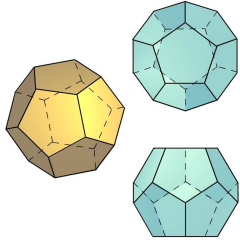
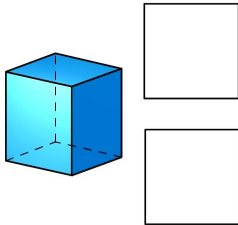
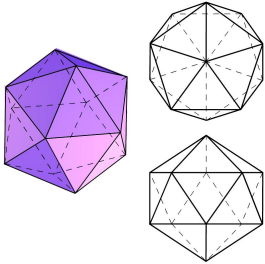
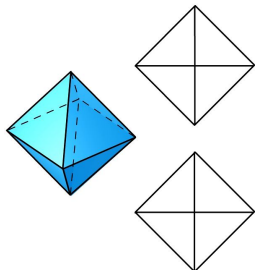
6.3-rasm

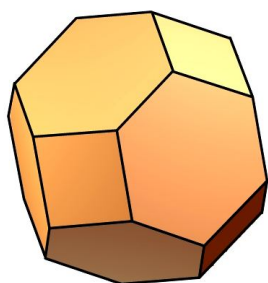
Ko'pyoqliklarning muhim xossalariidan birini Eyler quyidagicha bayon etgan:

Eyler teoremasi. Har qanday qavariq ko'pyoqlikda yoqlar bilan uchlar sonining yig'indisidan qirralar sonining ayirmasi ikkiga teng bo'ladi (ya'ni $Y + Q - Q = 2$) (6.1-jadval)

6.1-jadval

Muntazam ko'pyoqliklar

Ko'pyoqlik nomi Tetraedr (6.4-rasm) 	Ko'pyoqlik nomi Dodekaedr (6.7-rasm) 
Kub – geksaedr (6.5-rasm) 	Ikosaedr (6.8-rasm)  $Y_o + U - Q = 2$ Y_o – yoqlar soni U – uchlar soni Q – qirralar soni
Oktaedr (6.6-rasm) 	

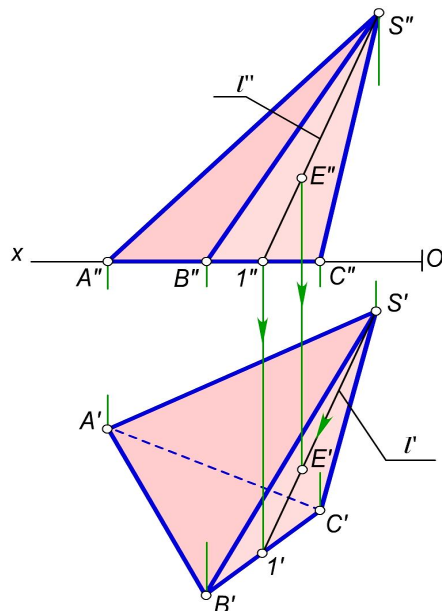


6.9-rasm

Yon yoqlari turli rasmdagi muntazam ko'pburchaklardan iborat bo'lgan ko'pyoqlikni *yarim muntazam ko'pyoqlik* deb yuritiladi. Bu ko'pyoqliklar 18 xil bo'lib, ular *Arximed jismlari* deb yuritiladi. 6.9-rasmda Arximed jismlaridan biri bo'lgan kesik oktaedrning yaqqol tasviri keltirilgan.

Ko'pyoqliklar texnikada turli ko'rinishdagi mashina detallari, ko'pyoqli linzalar yasashda, hamda arxitektura va qurilish ishlarida keng ishlatiladi. Masalan, devor va poydevor bloklari, tom, ko'priklarning temir-beton panellari va inshootning boshqa qismlari ko'pyoqliklardan iborat bo'ladi. Ko'pyoqliklardan yana «*geodezik*» gumbazlar yasashda, keng oraliqli binolarni ustunsiz yopishda keng foydalaniladi. Qadimiy binolarda esa gumbaz, gumbaz osti, bino gumbazidan prizmatik qismiga o'tish joylarida bezak-ornament sifatida ham qo'llanilgan.

Ko'pyoqlikning chizmada tasvirlanishi. Ko'pyoqlik chizmada o'z aniqlovchilarining to'g'ri burchakli proyeksiyalari orqali beriladi. 6.10–rasmda $SABC$ piramidaning tekis chizmasi o'z aniqlovchilari: $S(S'S'')$ uchi, asosi $ABC(A'B'C', A''B''C'')$ uchburchakning proyeksiyalari orqali tasvirlangan. $SA, SB, \dots$ qirralarning proyeksiyalari S, A, B, C uchlarining bir nomli proyeksiyalarini birlashtiruvchi $S'A'$ va $S''A'', S'B'$ va $S''B''$ va x.k. kesmalar bo'ladi.



6.10-rasm

Yoqlarining proyeksiyalari esa qirralarning proyeksiyalari bilan chegaralangan $S'A'B'$ va $S''A''B''$, $S'A'C'$ va $S''A''C''$,... tekis rasmlardan iborat bo'ladi. Ko'pyoqlik sirtidagi ixtiyoriy $E(E'')$ nuqtaning yetishmagan E' proyeksiyasi yon tekislikka tegishli ixtiyoriy $\ell(\ell', \ell'')$ to'g'ri chiziq vositasida yasaldi.

10.2-§. Ko'pyoqliklarning tekislik bilan kesishishi

Ko'pyoqlikni tekislik bilan kesilganda kesimda ko'pburchak hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan ko'pburchakning uchlari, ko'pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtalari bo'ladi.

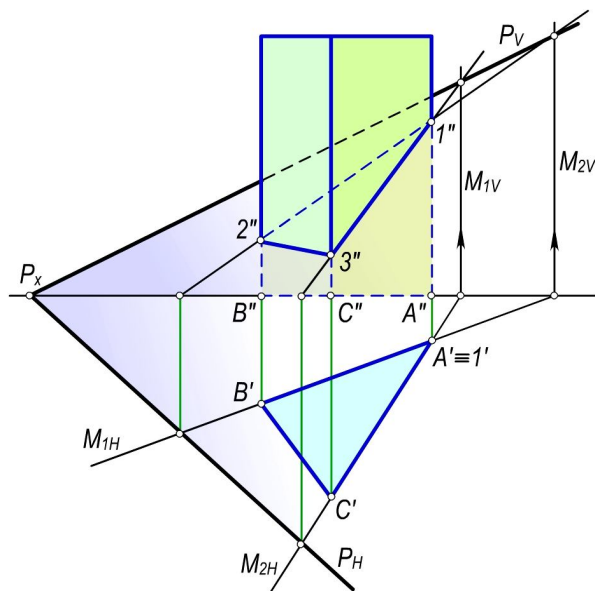
Kesimning tomonlari esa ko'pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chiziqlari bo'ladi. Ko'pyoqlikning tekislik bilan kesilgan qismini quyidagi uch usul bilan yasash mumkin:

- kesim tomonlarini, ya'ni ko'pyoqlik yoqlarining kesuvchi tekislik bilan kesishish chizig'ini, yasash usuli.
- kesim uchlari, ya'ni ko'pyoqlik qirralarining kesuvchi tekislik bilan kesishgan nuqtasini yasash usuli.
- aralash usul, bunda yuqoridagi ikkala usuldan foydalaniladi.

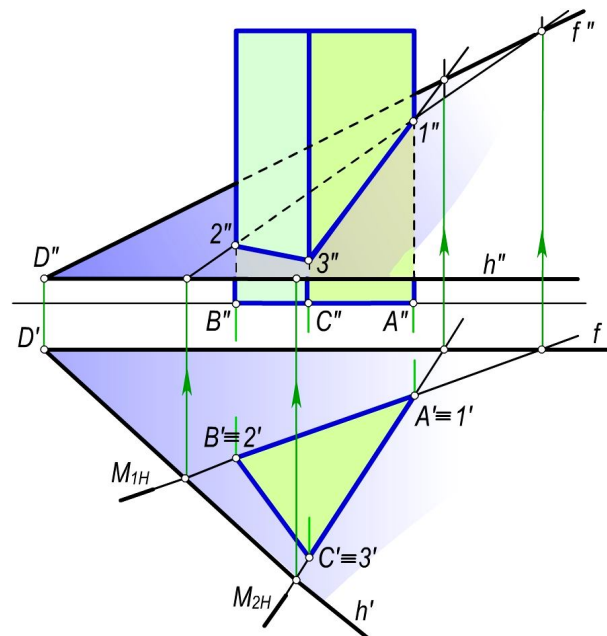
Bu usullardan qaysi birini qo'llash ko'pyoqlik va tekislikni chizmada berilishiga qarab tanlanadi.

Kesim tomonlarini yasash usuli. Bu usul ikki tekislikning kesishish chizig'ini yasash algoritmini bir necha marta takrorlash asosida bajariladi. Bu usuldan proyeksiyalovchi vaziyatdagi prizmaning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashda foydalanish juda qulaydir. 6.11-rasmda uch yoqlik to'g'ri prizmaning umumiy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimining proyeksiyalari yasalgan.

Bunda prizmaning yon yoqlari orqali $M_1(M_{IH}, M_{IV})$ va $M_2(M_{2H}, M_{2V})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkazilgan. Bu tekisliklarni berilgan P tekislik bilan kesishgan chiziqlari yordamida kesim yuzasining $12(1'2', 1'', 2'')$, $13(1'3', 1''3'')$ tomonlari aniqlangan.



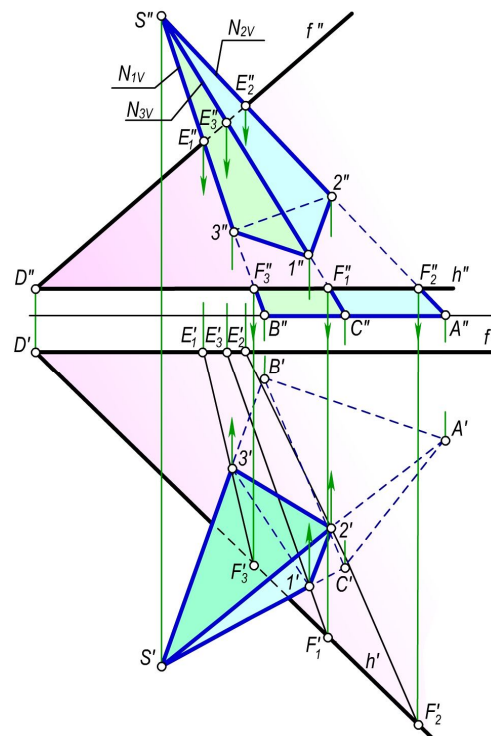
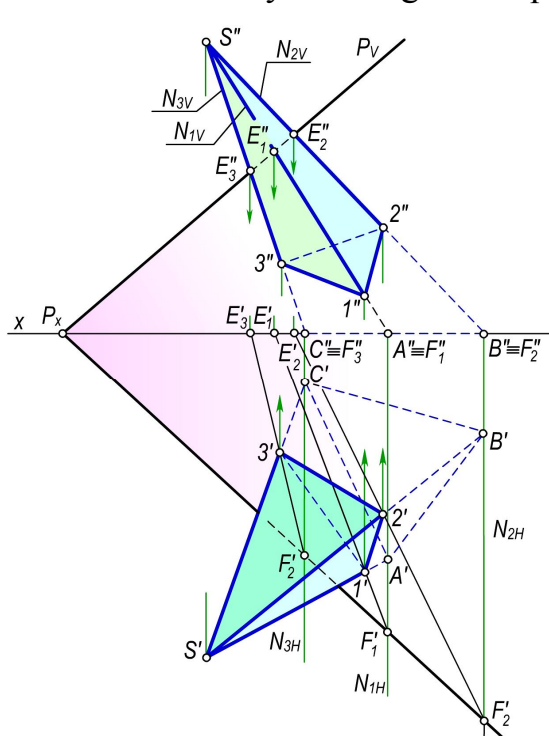
6.11-rasm



6.12-rasm

Aynan shu prizmani, o'zaro kesishuvchi $h(h',h'')$ va $f(f',f'')$ to'g'ri chiziqlar orqali berilgan tekislik bilan kesishuv chizig'ini yasash 6.12-rasmda ko'rsatilgan. Bunda kesishish chiziqlari prizma yoqlari orqali o'tkazilgan M_1 va M_2 gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar vositasida kesim yuzasining $\Delta 123(1'2'3', 1''2''3'')$ proyeksiyalari yasalgan.

Kesim uchlarini yasash usuli. Bu usul 1-usulga nisbatan umumiyroq hisoblanib, to'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasash algoritmi asosida bajariladi. 6.13, 6.14-rasmlarda asosi N proyeksiyalar tekisligida bo'lgan SABC ($S'A'B'C'$, $S'A'B'C'$) piramidani, izlari orqali berilgan tekislik va kesishuvchi chiziqlar (h va f) proyeksiyalari orqali berilgan umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishishdan hosil bo'lgan kesimini yasash ko'rsatilgan. Bunda kesim proyeksiyalari $\Delta I'2'3'$ va $\Delta I''2''3''$ ni yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi:

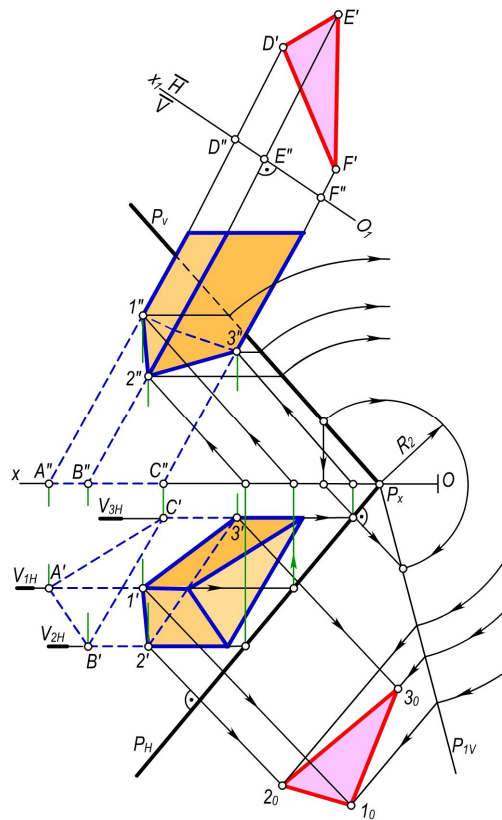


- SA, SB, SC qirralar orqali yordamchi N_1, N_2, N_3 frontal proyeksiyalovchi tekisliklar o'tkaziladi;
- bu tekisliklarning P tekislik bilan kesishgan chiziqlari E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 ning proyeksiyalari yasalanadi;
- kesishuv chiziqlari E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 bilan piramida qirralari SA, SB, SC ning mos ravishda kesishuv nuqtalari $1, 2, 3$ larni proyeksiyalari aniqlanadi;
- hosil qilingan $1, 2, 3$ nuqtalar o'zaro birlashtirilib, kesim yuzasining proyeksiyalari $\Delta 1'2'3'$ va $\Delta 1''2''3''$ yasalanadi.

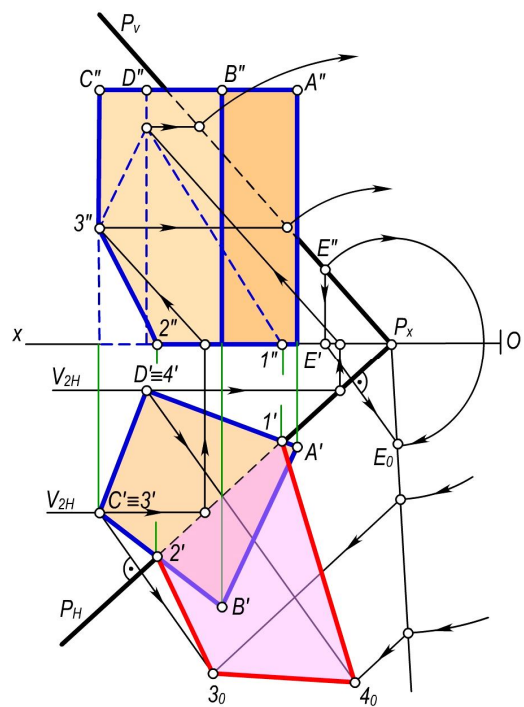
6.15-rasmda aynan shu usul bilan og'ma prizmaning umumiy holatdagi $P(P_V, P_H)$ tekislik bilan kesishish chizig'ini proyeksiyalarini yasash prizma qirralari orqali V_1, V_2 va V_3 yordamchi frontal tekisliklar o'tkazish bilan aniqlash ko'rsatilgan. Kesim yuzasi $\Delta 123$ ning haqiqiy kattaligi P ni P_H izi atrofida aylantirib H ga jipslashtirish usuli bilan aniqlangan.

6.16-rasmda to'g'ri prizmaning umumiy vaziyatdagi $R(P_V, P_H)$ tekislik bilan kesishish chizig'ining proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Kesimning $1(1', 1'')$ va $2(2', 2'')$ nuqtalari bevosita prizma asosi bilan R tekislikning P_n izi kesishgan nuqtalarida yotadi. C va D qirralar orqali o'tkazilgan yordamchi kesuvchi V_1, V_2 frontal tekisliklar vositasida $3, 4$ nuqtalar proyeksiyalari aniqlangan. Kesim yuzasining haqiqiy kattaligi R tekislikni uning P_N izi atrofida aylantirib N ga jipslashtirish usulida yasalgan.

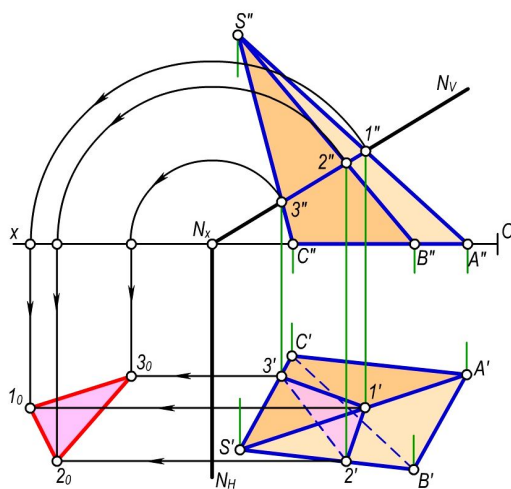
Agar ko'pyoqliklar proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishsa, ularning kesim yuzasini proyeksiyalarini yasash yanada osonlashadi, chunki bunda kesim yuzaning bir proyeksiyasi proyeksiyalovchi tekislik izida bo'ladi. 6.17-rasmda og'ma piramidaning frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislik bilan kesishgan va kesim yuzasini va uning haqiqiy kattaligini yasash ko'rsatilgan. 6.18-rasmda uchyoqli piramidani N_1 va N_2 frontal proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesib, kesimda hosil bo'lgan o'yoq qismining gorizontaal proyeksiyasini yasash ko'rsatilgan. Kesim yuzasi proyeksiyalarini yasash yo'llarini chizmadan tushunib olish qiyin emas.



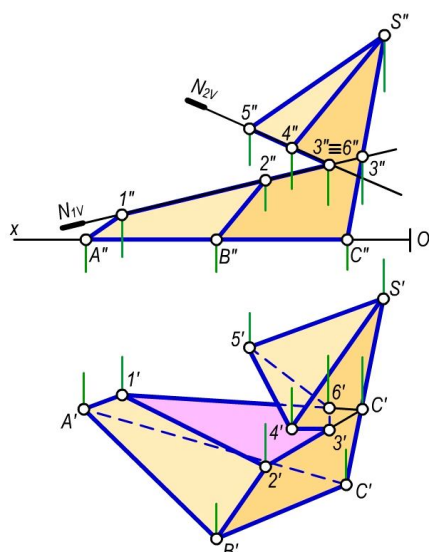
6.15-rasm



6.16-rasm



6.17-rasm



6.18-rasm

11-ma'ruza – 2soat.

Ko'pyoqliklarning boshqa geometric shakllar bilan kesishishi

Ko'pyoqlikning to'g'ri chiziqli bilan kesishishi

Ikki ko'pyoqlikning o'zaro kesishuvi

Tayanch iboralar va tushunchalar

Bu ma'ruzada tayanch iboralar yo'q.

11.1-§. Ko'pyoqlikning to'g'ri chiziq bilan kesishishi

To'g'ri chiziq qavariq ko'pyoqlikning yoqlari bilan ikki nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarning biri *kirish* ikkinchisi *chiqish* nuqtalari deb yuritiladi. To'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining kesishish nuqtalarini yasashda quyidagi usullardan foydalaniladi:

- to'g'ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish usuli;
- to'g'ri chiziq orqali umumiy vaziyatdagi tekislik o'tkazish usuli.

Quyida to'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlikning kesishish nuqtalarini yasashga oid bir necha misollarni ko'rib chiqamiz.

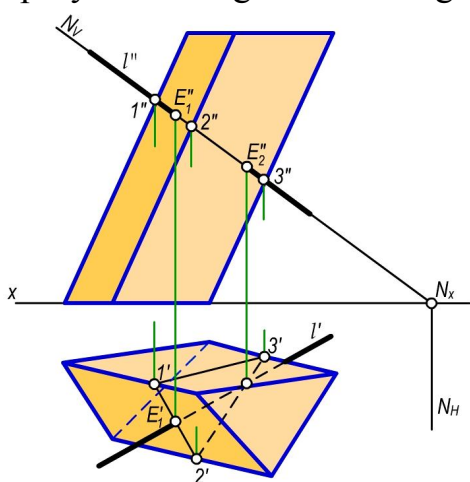
1-usul: Quyidagi yasashlar algoritm asosida bajariladi:

- berilgan to'g'ri chiziq orqali xususiy vaziyatdagi tekislik o'tkaziladi;
- xususiy vaziyatdagi tekislik bilan berilgan ko'pyoqlikning o'zaro kesishuvidagi kesim yuza chizig'i;
- kesim yuza chizig'i bilan berilgan to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari belgilanadi.

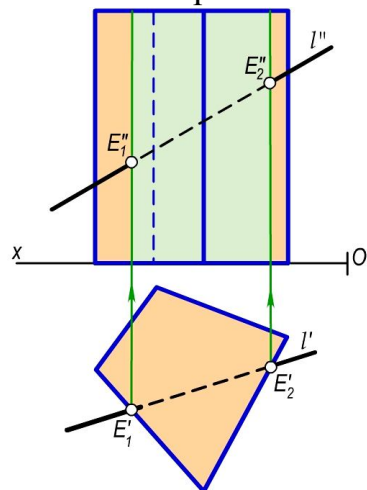
6.19–rasmda $\ell(\ell', \ell'')$ to'g'ri chiziqning uch yoqli $F(F', F'')$ prizma sirti bilan kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan.

Yasash algoritmi qo'yidagicha:

- ℓ to'g'ri chiziq orqali frontal proyeksiyalovchi $N(N_H, N_V)$ tekislik o'tkaziladi; $\ell'' \subset N_V$ va $N_H \perp OX$;
- N tekislik bilan F prizmaning kesishishidagi kesim yuza chizig'i proyeksiyalari $1'2'3'$ va $1''2''3''$ yasaladi;
- Kesim yuza chizig'i $\Delta 123$ bilan ℓ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari E_1 va E_2 belgilanadi. Bunda avvalo $1'2'3' \cap \ell' = E'_1$ va E'_2 lar aniqlanib, so'ngra proyeksion bog'lanish chizig'i orqali E''_1 va E''_2 lar holati aniqlanadi.



6.19-rasm.



6.20-rasm

Agar ko'pyoqlikning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklar bo'lsa, to'g'ri chiziq bilan bunday sirtning kesishish nuqtalarini yasash juda soddalashadi.

6.20–rasmida to'rt yoqli to'g'ri prizma sirti bilan $\ell(\ell', \ell'')$ to'g'ri chiziqning o'zaro kesishish $E_1(E'_1, E''_1)$, $E_2(E'_2, E''_2)$ nuqtalarini yasash tasvirlangan.

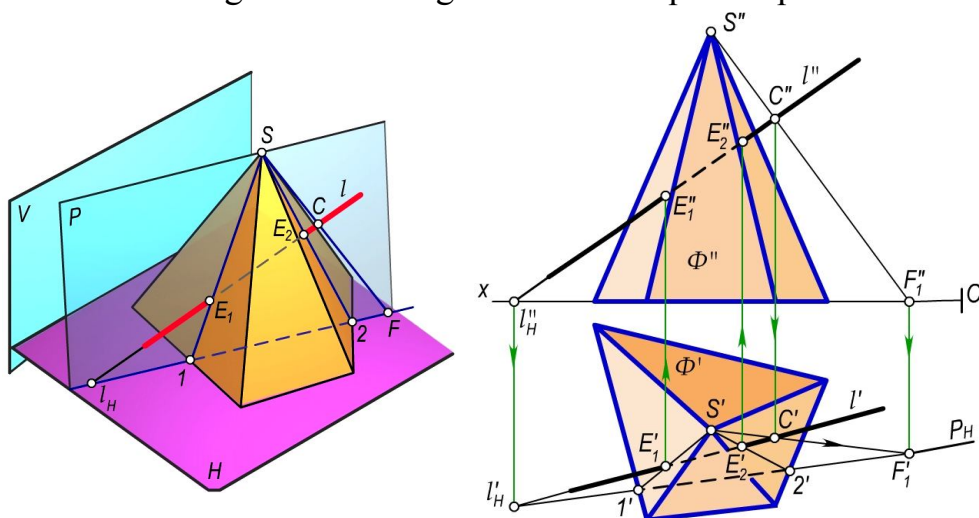
Bunda prizmaning yon yoqlari proyeksiyalovchi tekisliklardan iborat bo'lgani uchun ℓ orqali $M(M_N)$ gorizontaal proyeksiyalovchi tekislik o'tkaziladi, kesishuv nuqtalari proyeksiyalari E'_1 va E'_2 belgilanadi. So'ngra ularning E''_1 va E''_2 proyeksiyalari yasalanadi.

2-usul: To'g'ri chiziqni ko'pyoqlik sirtiga kirish va chiqish nuqtalarini yasash algoritmi quyidagicha:

- berilgan to'g'ri chiziq orqali sirtning asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi yordamchi tekislik o'tkaziladi;
- yordamchi tekislik bilan sirt asosi tomonlarining kesishish nuqtalari belgilanadi;
- bu nuqtalar orqali yordamchi tekislik bilan sirt yon yoqlarining kesishish chiziqlari aniqlanadi;
- bu chiziqlar berilgan to'g'ri chiziq bilan kesishib sirtga tegishli kirish va chiqish nuqtalarni hosil qiladi.

6.21– a,b rasmda $\ell(\ell',\ell'')$ to'g'ri chiziq bilan $F(F'F'')$ piramidaning o'zaro kesishish nuqtasini yasash tasvirlangan. Bunda piramidaning S uchi va ℓ to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi umumiy vaziyatdagi P tekislikning R_N izini o'tkazish uchun:

- berilgan ℓ to'g'ri chiziqning gorizontaal ℓ'_H izi yasalanadi;
- piramidaning S uchidan ℓ to'g'ri chiziqni ixtiyoriy $S(C',C'')$ nuqtada kesib o'tuvchi $SC(S''C'', S' C')$ to'g'ri chiziq o'tkazib uning ham gorizontaal F'_1 izi yasalanadi;
- ℓ'_H va F'_1 izlar orqali piramidani asosini kesuvchi umumiy vaziyatdagi R tekislikning gorizontaal R_N izini o'tkazamiz. R_N bilan piramida asosining kesishish nuqtalari $1'$ va $2'$ ni belgilanadi.
- S' nuqtani $1'$ va $2'$ nuqtalar bilan birlashtirib, P tekislik bilan piramidaning kesishish chizig'i $\Delta S'1'2'$ ni yasalanadi;
- $\Delta S'1'2'$ bilan ℓ' to'g'ri chiziqning o'zaro uchrashish E'_1 va E'_2 nuqtalarini belgilanadi. Bu nuqtalardan foydalanib ularning frontal E''_1 va E''_2 proyeksiyalari aniqlanadi. Hosil bo'lgan E_1 va E_2 nuqtalar ℓ to'g'ri chiziq bilan F piramida sirtining kesishishidagi kirish va chiqish nuqtalari bo'ladi.



a)

b)

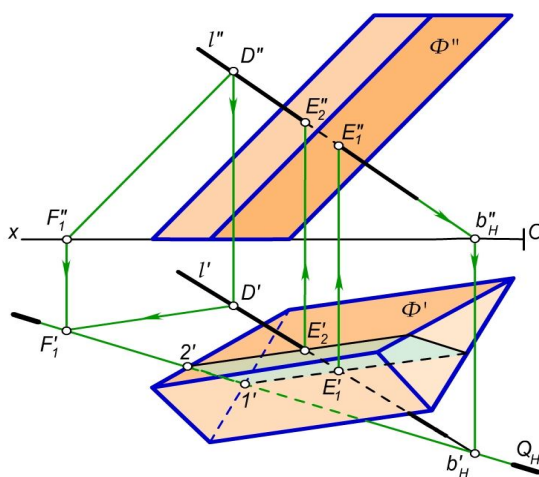
6.21-rasm

Yuqorida bayon etilgan usulni yordamchi markaziy proyeksiyalash usuli deb ham ataladi. Bu usuldan to'g'ri chiziq bilan konus sirtining kesishish nuqtalarini yasashda ham foydalaniladi. Prizma yoki silindr sirtlari bilan to'g'ri chiziqning kesishuv nuqtalarini yasashda ham umumiy vaziyatdagi tekisliklaridan foydalangan qulay. Bunda berilgan to'g'ri chiziq bilan ko'pyoqlik sirtining o'zaro kesishish nuqtalari berilgan to'g'ri chiziq orqali ko'pyoqlikning yon qirralariga parallel qilib o'tkazilgan umumiy vaziyatdagi tekislik vositasida aniqlanadi.

Proyeksiyalash yo'nalishi ko'pyoqlik qirralariga parallel bo'lgani uchun uni *qiyshiq burchakli yordamchi parallel proyeksiyalash usuli* deb ham ataladi.

6.22-rasmda og'ma vaziyatdagi $F(F', F'')$ prizma sirti bilan $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqning o'zaro kesishish nuqtalarini yasash tasvirlangan. Bu misolni chizmada yechish algoritmi quyidagicha:

- berilgan b to'g'ri chiziqning gorizontal b_h izi yasaladi;
- b to'g'ri chiziqning ixtiyoriy $D(D', D'')$ nuqtasidan prizmaning yon qirralariga parallel qilib to'g'ri chiziq o'tkaziladi va uning ham gorizontal F_1 izi aniqlanadi.
- b'_h va F_1 izlar orqali, prizmaning qirralariga parallel kesuvchi umumiy vaziyatdagi Q tekislikning Q_H izi o'tkaziladi. Bu tekislik prizmaning asosini $1'$ va $2'$ nuqtalarda kesadi. Ushbu nuqtalaridan prizma qirralariga parallel o'tkazilgan kesim chiziqlari b' to'g'ri chiziqni E'_1 va E'_2 nuqtalarida kesadi. Bu nuqtalarning frontal proyeksiyalari E_1 va E_2 nuqtalar, b' to'g'ri chiziqda aniqlanadi. Natijada, to'g'ri chiziqni prizma sirti bilan kesishishdagi kirish va chiqish nuqtalari hosil bo'ladi.



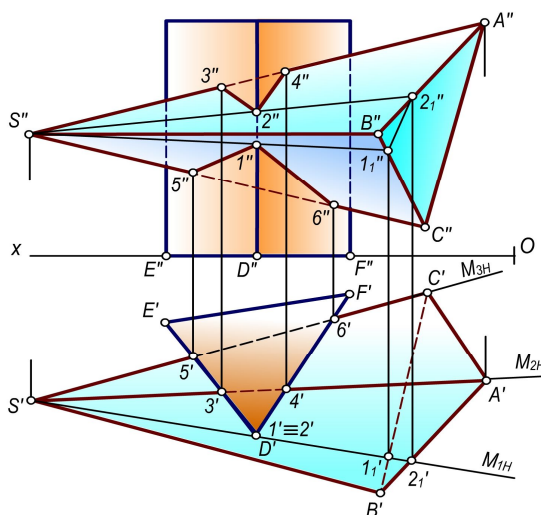
6.22-rasm

11.2-§. Ko'pyoqliklarning o'zaro kesishishi

Ko'pyoqliklar fazoda bir-biriga nisbatan o'zaro joylashuviga qarab, to'la, qisman kesishgan yoki butunlay kesishmagan vaziyatlarda uchraydilar. Ko'pyoqliklar o'zaro kesishganda bir yoki bir necha yopiq fazoviy yoki tekis sinik chiziqlar hosil bo'ladi. Bu sinik chiziq uchlarini, ko'pyoqlikning to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini yasash usuli yordamida aniqlanadi. Agar kesishuvchi ko'pyoqliklardan birini F va ikkinchisini Ω deb belgilasak, ularning kesishgan chizig'ini yasash qo'yidagicha ketma-ketlik bilan bajariladi:

- F ko'pyoqlik qirralarining Ω ko'pyoqlik sirti yoqlari bilan kesishish nuqtalari yasaladi. Ω ko'pyoqlik qirralarining F ko'pyoqlik yoqlari bilan kesishish nuqtalari aniqlanadi;
- F va Ω ko'pyoqlarning yon yoq tekisliklarini o'zaro kesishish chiziqlari yasaladi.

Hosil bo'lgan kesishish nuqtalarini yoki chiziqlarni tegishli tartibda birlashtirilsa berilgan ko'pyoqliklarning kesishish chizig'i hosil bo'ladi. So'ngra ko'pyoqliklarning ko'rinar, ko'rinmas qirralarini aniqlanib va ularning ko'rinar qismlari asosiy tutash chiziqlarda chiziladi.



6.23 – rasm.

6.23-rasmda tasvirlangan prizma va piramida sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi qo'yidagicha bo'ladi:

- prizma qirralarining piramida sirti bilan kesishgan nuqtalari yasalgan. Shakldan ko'rinib turibdiki, prizmaning faqat oldingi DD' qirrasigina piramida sirtini 1 va 2 nuqtalarda kesib o'tgan. Bu nuqtalar D qirra orqali o'tkazilgan. $M_1(M_{1N})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik yordamida yasalgan;
- piramida qirralarining prizma sirti bilan kesishgan 3,4,5,6 nuqtalari yasalgan. Piramidaning faqat SA va SC qirralari prizma bilan kesishadi. SA va SC qirralarining prizma bilan kesishgan 3(3',3''), 4(4',4''), 5(5',5''), 6(6',6'') nuqtalari 6.20-rasmda ko'rsatilganidek $M_2(M_{2N})$ va $M_3(M_{3N})$ gorizontal proyeksiyalovchi tekisliklar yordamida topilgan;
- Aniqlangan 1'',2'',3'',4'',5'',6'' nuqtalarni rasmda ko'rsatilganidek, ko'rinar-ko'rinmas qismlarini e'tiborga olib, tartibi bilan birlashtirib chiqilsa, ikki sirtning o'zaro kesishish siniq chizig'ining frontal proyeksiyasi hosil bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Ko'pyoqlik deb nimaga aytiladi?
2. Ko'pyoqlikning aniqlovchilari deb nimalarga aytiladi?
3. Qanday ko'pyoqlikni piramida deb ataladi?
4. Qanday ko'pyoqlikni prizma deb ataladi?
5. Qanday ko'pyoqlikni to'g'ri, ko'pyoqlik deb ataladi?
6. Qanday ko'pyoqlikni muntazam ko'pyoqlik deb yuritiladi?
7. Eyler teoremasini tushuntirib bering?

8. Tekis (to'g'ri chiziq)ning ko'pyoqlik bilan kesishish chizigi (nuqtalari) yasash algoritmini tushuntirib bering?
9. Ikki ko'pyoqlikning o'zaro kesishish chizig'ini yasashning algoritmi nimadan iborat?

12-ma'ruza - 2 soat **Egri chiziqlar.**

Egri chiziqlar va ularning proeksion xossalari.

Tekis egri chiziqlar.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.

Fazoviy egri chiziqlar.

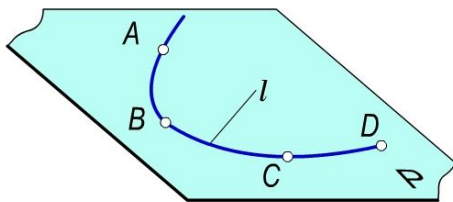
Tayanch iboralar va tushunchalar

Egri chiziq, qonuniy (algebraik) egri chiziq, qonynsiz egri chiziq, tekis egri chiziq, fazoviy egri chiziq.

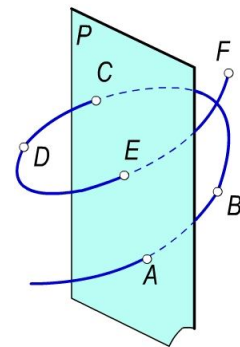
12. 1-§. Umumiy tushunchalar

Egri chiziq fazoda yoki tekislikda ma'lum yo'nalishda uzluksiz harakatlanuvchi biror nuqtaning trayektoriyasi sifatida qabul qilinadi.

Egri chiziqlar tekis (7.1,a-rasm) va fazoviy (7.1,b-rasm) egri chiziq'larga bo'linadi.



a)



b)

7.1-rasm

Egri chiziqlar qonuniy va qonunsiz egri chiziqlarga bo'linadilar. Egri chiziqni tashkil kiluvchi nuqtalar to'plami ma'lum biror qonunga buysunsa u *qonuniy*, aksincha nuqtalar to'plami xech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday egri chiziq *qonunsiz egri chiziq* deyiladi. qonuniy egri chiziqlarning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamalariga qarab algebraik va transsendent egri chiziqlarga bo'linadilar. Tenglamasi algebraik funksiya orqali ifodalangan egri chiziq *algebraik*, transsendent funksiya bilan ifodalangan egri chiziq esa *transsendent* egri chiziq deyiladi.

Algebrik egri chiziqlar tartib va klass tushunchalari bilan xarakterlanadi. Egri chiziqlarning tartibi uni ifodalovchi tenglamaning darajasiga teng bo'ladi.

Grafik jihatdan tekis egri chiziqlarning tartibi uning to'g'ri chiziq bilan, fazoviy egri chiziqning tartibi esa uning biror tekislik bilan maksimum kesishish nuqtalar soni orqali aniqlanadi.

Tekis egri chiziqning klassi unga shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasidan o'tkazilgan urinmalar soni bilan, fazoviy egri chiziqning klassi unga biror to'g'ri chiziq orqali o'tkazilgan urinma tekisliklar soni bilan aniqlanadi.

Egri chiziqning tartibi va klassi har xil bo'ladi. Faqat ikkinchi tartibli egriliklarning tartibi va klassi bir xil bo'lib, u 2 ga teng bo'ladi.

12.2-§. Tekis egri chiziqlar. Ularga urinma va normal o'tkazish

Ta'rif. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotgan egri chiziq **tekis egri chiziq** deyiladi.

Tekis egri chiziqlar analitik va grafik ko'rinishlarda berilishi mumkin. Analitik ko'rinishda quyidagi xollar bilan beriladi:

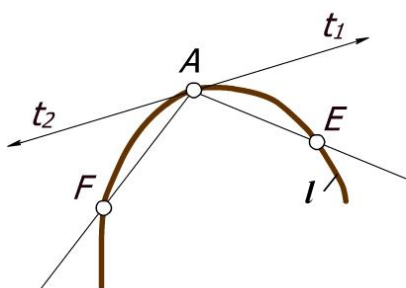
- dekart koordinatalar sistemasida $f(x,y) = 0$ ko'p xad bilan;
- qutb koordinatalar sistemasida $r=f(\varphi)$;
- parametrik ko'rinishda $x=x(t)$ va $y=y(t)$ bilan.

Egri chiziqlarning grafik ko'rinishda berilishining turli xil usullari mavjud.

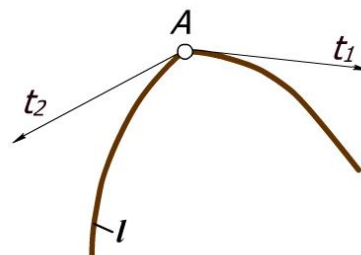
Tekis egri chiziqning har bir nuqtasidan unga bitta urinma va bitta normal o'tkazish mumkin.

7.2-rasmda berilgan ℓ tekis egri chizig'iga uning biror A nuqtasida urinma va normal o'tkazish ko'rsatilgan. Buning uchun A nuqta orqali egri chiziqni kesuvchi AYE va AF to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. E nuqtani A nuqtaga egri chiziq buylab yaqinlashtira boshlaymiz. Natijada, AYE kesuvchi A nuqta atrofida burila boshlaydi. E nuqta A nuqta bilan ustma-ust tushganda AYE kesuvchi t_1 urinmani xosil qiladi. Uni ℓ egri chiziqning berilgan nuqtasida o'tkazilgan **yarim urinma** deyiladi. F nuqtani ham egri chiziq ustida harakatlantirib A nuqta bilan ustma-ust tushiramiz. AF kesuvchi t_2 yarim urinmani xosil qiladi. Qarama-qarshi yo'nalgan t_1 va t_2 yarim urinmalar xosil qilgan to'g'ri chiziq egri chiziqqa berilgan nuqtada o'tkazilgan **urinma** deyiladi. Shunday nuqtalardan tashkil topgan egri chiziq **ravon egri chiziq** deyiladi.

Egri chiziqning A nuqtadagi t urinmaga o'tkazilgan perpendikulyar n to'g'ri chiziq uning normali deb ataladi. Ba'zan yarim urinmalar o'zaro ustma-ust tushmasdan o'zaro kesishishi mumkin. Bunday nuqtalar **sinish nuqtasi** deyiladi (7.3-rasm). Amaliyotda egri chiziqlarga urinma va normal o'tkazish masalalari ko'p uchraydi, shuning uchun urinma va normal o'tkazishning ba'zi bir grafik usullarini ko'rib chiqamiz.



7.2-rasm

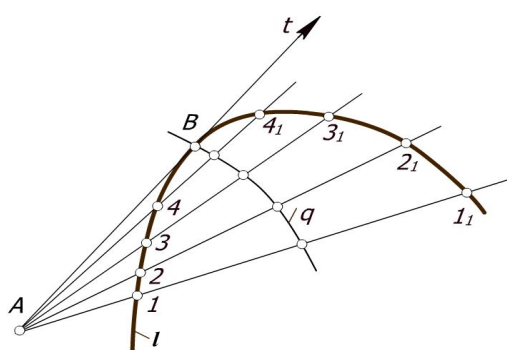


7.3-rasm

Egri chiziqqa undan tashqari olingan nuqta orqali urinma o'tkazish

ℓ egri chiziq va undan tashqarida olingan A nuqta berilgan (7.4-rasm) A nuqtadan ℓ egri chiziqqa urinma o'tkazish talab qilinsin. Buning uchun A nuqta orqali ℓ egri chiziqni kesuvchi to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Xosil bo'lgan vatarlarning uchlarini $1_1, 2_1, 3_1, \dots$ nuqtalar bilan belgilab, har bir vatarining o'rta nuqtalari topiladi. Vatarlarning o'rta nuqtalarini birlashtirib q egri chiziq xosil qilinadi. Bu egri chiziq

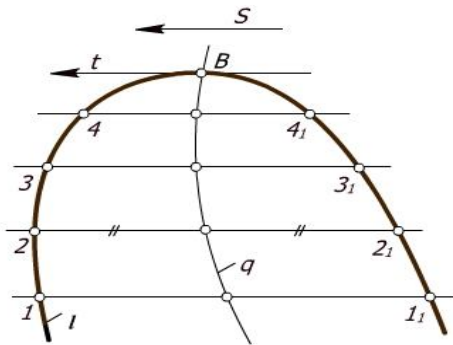
xatoliklar egri chizig'i deyiladi va uning ℓ egri chizig'i bilan kesishish V nuqtasi A nuqtadan o'tuvchi urinmaning egri chiziqqa urinish nuqtasi bo'ladi. A va V nuqtalarni to'g'ri chiziq bilan birlashtirilsa, t urinma xosil bo'ladi.



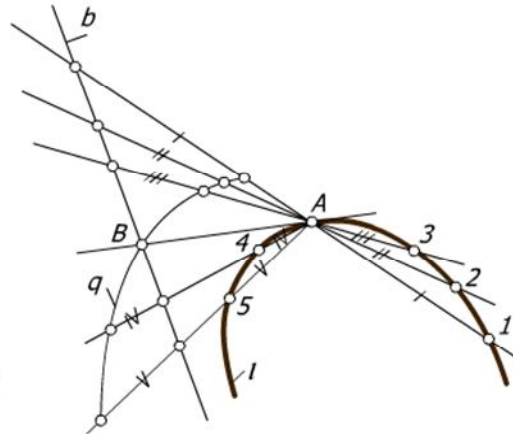
7.4-rasm

Berilgan yo'nalishga parallel urinma o'tkazish

ℓ egri chiziqqa s yo'nalishga parallel urinma o'tkazish uchun ℓ egri chiziqni berilgan s yo'nalishga parallel bo'lgan chiziqlar bilan kesiladi va xosil bo'lgan $11_1, 22_1, 33_1, \dots$ vatarlarni teng ikkiga buluvchi nuqtalar orqali q xatoliklar egri chizig'ini o'tkaziladi (7.5-rasm). q egri chiziqning ℓ bilan kesishish nuqtasi V ni topiladi. V nuqta orqali berilgan s yo'nalishga parallel qilib t urinma o'tkaziladi.



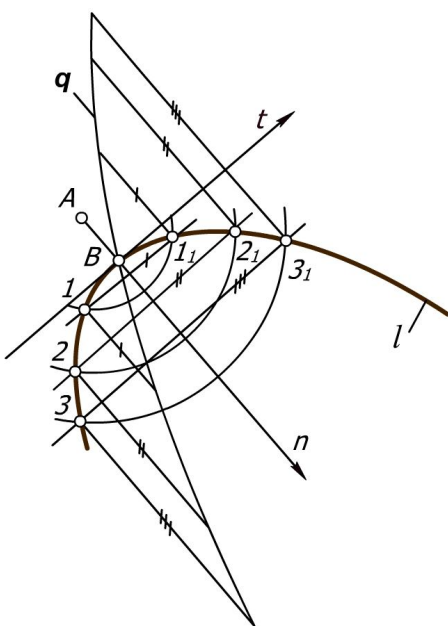
7.5-rasm



7.6-rasm

Egri chiziq ustida yotgan nuqta orqali unga urinma o'tkazish

Berilgan egri chiziqni uning ustida yotgan A nuqtadan chiquvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziqlar bilan kesiladi (7.6-rasm). A nuqtadan o'tuvchi urinmaning taxminiy yo'nalishiga perpendikulyar qilib b to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Kesuvchi nurlarga b to'g'ri chiziqni kesib o'tgan nuqtalardan boshlab usha chiziqning ℓ dagi vatar uzunligi o'lchab quyiladi. Nuqtalar to'plami q egri chiziqni xosil qiladi. q egri chiziqning b bilan kesishish nuqtasi V ni A nuqta bilan birlashtirganda t urinmaga xosil bo'ladi.



7.7-rasm

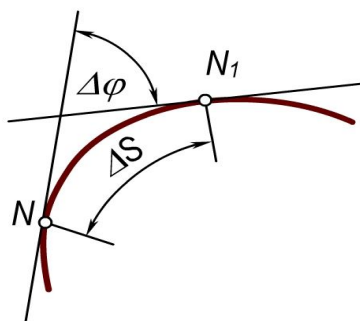
Egri chiziqdan tashqarida olingan nuqtadan unga normal o'tkazish

Egri chiziqdan tashqaridagi A nuqtani konsentrik aylanalarining markazi sifatida qabul qilib (7.7-rasm), berilgan egri chiziqni kesuvchi bir necha aylanalar chiziladi. Bu aylanalar ℓ egri chiziqni $11_1, 22_1, 33_1, \dots$ nuqtalarda kesadi. Mos nuqtalarni o'zaro birlashtirib, egri chiziqning $11_1, 22_1, 33_1, \dots$ vatarlari xosil qilinadi. Vatarlar uchlaridan qarama-qarshi yo'nalishda unga perpendikulyar chiziqlar chiqariladi va ularga vatarlar uzunliklarini o'lchab quyiladi. Bu kesmalarining uchlarini tartib bilan birlashtirib q chiziq xosil qiladi. q va ℓ egri chiziqlar o'zaro V nuqtada kesishadilar. A va V nuqtalarni birlashtiruvchi n to'g'ri chiziq ℓ egri chiziqning normali bo'ladi.

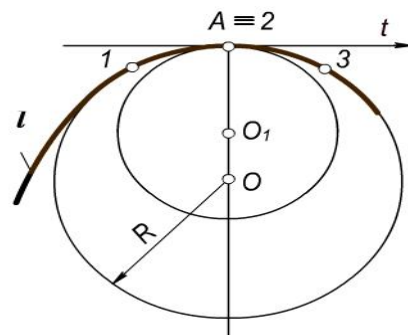
12.3-§. Tekis egri chiziqlarning egriligi

Qo'shni yarim urinmalar orasidagi α burchakni ular orasidagi s yoy uzunligiga nisbatining $\Delta S \rightarrow 0$ dagi limiti *egri chiziqlarning egriligi* deyiladi (7.8-rasm). Egrilikni k bilan belgilasak, u quyidagicha ifodalanadi:

$$k = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta S}.$$



7.8-rasm



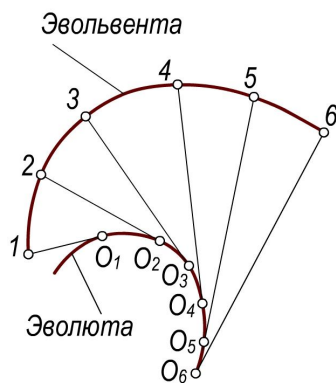
7.9-rasm

Bunda φ burchak qancha katta bo'lsa, egri chiziq shuncha ko'p egilgan va, aksincha, qanchalik kichik bo'lsa, egri chiziq shuncha kam egilgan bo'ladi. Egrilik qiymati egri chiziqlarning har bir nuqtasida har xil bo'ladi. Aylananing hamma nuqtasida egrilik bir xildir, to'g'ri chiziqda esa egrilik nolga teng. Har qanday egri chiziqlarning egriligi aylana yordamida aniqlanadi. Bu aylana egri chiziqdagi cheksiz yaqin uchta 1, 2, 3 nuqtalardan o'tadi. Uning radiusi, **egrilik radiusi**, markazi esa **egrilik markazi** deyiladi. Egrilik radiusi R va egrilik miqdori k o'zaro teskari proporsionaldir: $k = \frac{1}{R}$

12.4-§. Evolyuta va evolventa

Biror ℓ egri chiziqlarning hamma nuqtalari uchun egrilik markazlari yasalsa, ularning to'plami ℓ_1 egri chiziqni hosil qiladi. Bu ℓ_1 egri chiziq berilgan ℓ egri chiziqlarning **evolyutasi** deb ataladi (7.10-rasm). ℓ egri chiziq ℓ_1 evolyutaga nisbatan **evolventa** deyiladi. Evolyutaning urinmalari ℓ evolventaning normallari. Evolyuta urinmalarida cheksiz ko'p evolventalar joylashgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun ham evolyuta o'z evolventasini **maxsus** egri chiziqni hosil qiladi.

Tekis egri chiziqlar *monoton* va *ulama* chiziqlarga bo'linadi. Monoton egri chiziqlarning qator nuqtalarida egrilik radiusi uzluksiz o'sib yoki kamayib boradi. Monoton egri chiziq yo'ylaridan tashkil topgan chiziq *ulama* chiziq deyiladi. Bu yo'ylarning ulanish nuqtalari ulama chiziqlarning *uchlari*, ulanuvchi yo'ylarning o'zi esa ulama chiziqlarning tomonlari deb ataladi. Yo'ylarning ulanish xarakteriga qarab, ulama chiziqlarning uchlari **oddiy** va **maxsus** nuqtalar bo'lishi mumkin. Egri chiziqlarning oddiy nuqtasida yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bitta to'g'ri chiziq ustida yotadi va egrilik markazlari ustma-ust tushadi. Egri chiziqlarning maxsus nuqtalari quyidagilardan iborat:

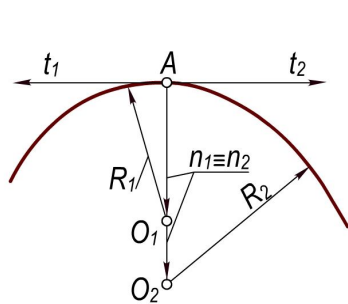


7.10-rasm

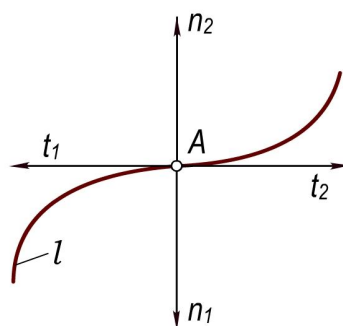
Qo'sh nuqta. Yarim urinmalar qarama-qarshi yo'nalishga ega, normallar ustma-ust tushadi, egrilik markazlari esa har xil joylashadi (7.11-rasm);

Egilib o'tish nuqtasi. Yarim urinmalar ham, normallar ham qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi (7.12-rasm);

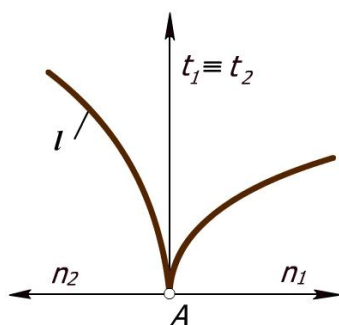
Birinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar ustma-ust tushadi va bir xil yo'nalishda bo'ladi, normallar qarama-qarshi yo'nalishda bo'lib, bir chiziq ustida yotadi (7.13-rasm);



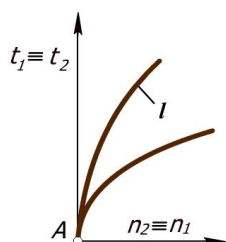
7.11-rasm



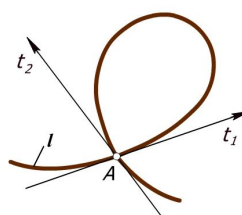
7.12-rasm



7.13-rasm



7.14-rasm



7.15-rasm

Ikkinchi turdagi qaytish nuqtasi. Yarim urinmalar va normalar juft-juft bo'lib bir xil yo'nalishga ega bo'ladi (7.14-rasm);

Sinish nuqtasi. Yarim urinmalar va normalar har xil yo'nalishda bo'ladi (7.3-rasmga qarang);

Tugun nuqta. Tugun nuqtada egri chiziq o'zini-o'zi bir yoki bir necha marta kesib o'tishi mumkin. (7.15-rasm).

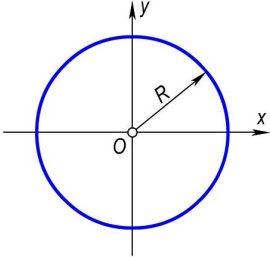
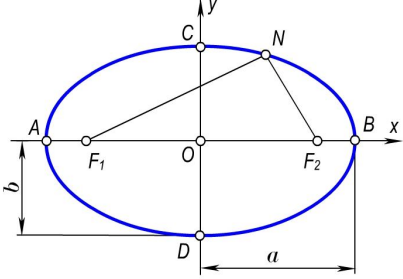
12.6-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

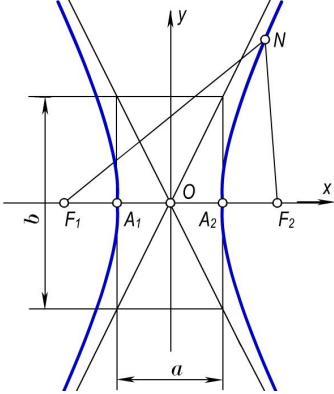
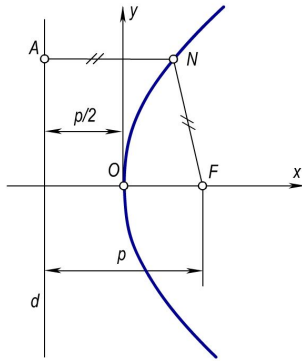
Ta'rif. Ikkinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanuvchi egri chiziqlar **ikkinchi tartibli egri chiziqlar** deyiladi.

Bunday chiziqlar to'g'ri chiziq bilan eng ko'pi ikki nuqtada kesishadi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar va ularning xususiyatlaridan mashinasozlikda, binokorlikda, umuman injenerlik amaliyotining barcha tarmoqlarida keng foydalaniladi. Shu boisdan ham 2-tartibli egri chiziqlari mukammal o'rganilgan. Ularga aylana, ellips, parabola, giperbola va ularning xususiy hollari kiradi. Bu egri chiziqlarning tenglamalari va ularning shakllarini aniqlovchi parametrlari analitik geometriyada to'liq o'rganiladi. Chizmachilikda va chizma geometriyada esa ularni yasash va hosil bo'lish usullari o'rganiladi.

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning nomi, ta'rifi, tenglamasi va ularning shakllari 7.1-jadvalda keltirilgan.

7.1-jadval

Aylana Berilgan nuqtadan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to'plami aylana deyiladi. Kanonik tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ Parametrik tenglamasi $x = R \cdot \cos t$ $y = R \cdot \sin t$	
Ellips Berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtadan uzoqliklarining yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning to'plami ellips deyiladi. $F_1N + F_2N = AB = \text{Const}$ Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parametrik tenglamasi $x = a \cdot \cos t$	

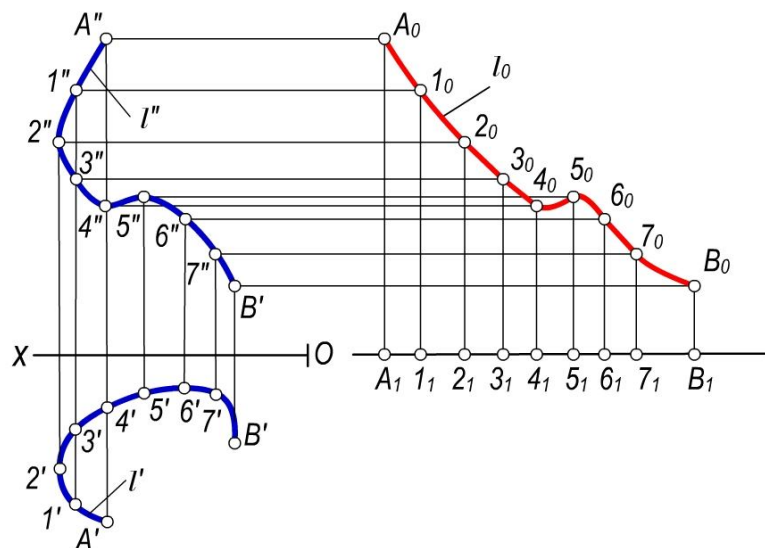
$y = b \cdot \sin t$	
Giperbola Berilgan F_1 va F_2 ikki nuqtadan uzoqliklarining ayirmasi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarining to'plami giperbola deyiladi. $F_1N - F_2N = A_1A_2 = \text{Const}$ Kanonik tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Parametrik tenglamasi $x = a \cdot \sec t$ $y = b \cdot \tg t$	
Parabola Berilgan nuqtadan va d to'g'ri chiziqdan teng masofalarda joylashgan nuqtalarning to'plami parabola deyiladi. $FN = AN$ Kanonik tenglamasi $y^2 = 2px$ Parametrik tenglamasi $x = t$ $Y = \sqrt{2pt}$ yoki y $= t, x = t^2/2p$	

12.7-§. Fazoviy egri chiziqlar. Ularga urinma va normallar o'tkazish

Ta'rif. Hamma nuqtalari bitta tekislikda yotmagan egri chiziq **fazoviy egri chiziq** deyiladi.

Fazoviy egri chiziqning uzunligini to'g'ri burchakli proyeksiyalariga asosan aniqlash

Biror fazoviy ℓ egri chiziqning ℓ' va ℓ'' to'g'ri burchakli proyeksiyalari berilgan bo'lsin. (7.16-rasm). Uning uzunligini grafik usulda aniqlash uchun quyidagi yasash algoritmlari bajariladi.



7.16-rasm

Egri chiziqlarning l' - gorizontaal proyeksiyasi $A'B'$ ni har bir bo'lagi uzunligini ixtiyoriy tanlangan a to'g'ri chiziqlarning A_1 nuqtadan boshlab unga ketma-ket quyib chiqiladi. Xosil bo'lgan A_1, B_1 kesma $A'B'$ proyeksiyani to'g'rilangani yoki uni uzunligini o'lchovchi kesma bo'ladi.

So'ngra a to'g'ri chiziqlarning $A_1, 1_1, 2_1, 3_1, \dots, B_1$ nuqtalaridan unga perpendikulyarlar chiqariladi. Bu perpendikulyarlarga ixtiyoriy tanlangan gorizontaal O_0x_0 (yoki Ox) chiziqdan $l''(A''B'')$ nuqtalarigacha bo'lgan masofalar o'lchanib qo'yiladi. Natijada l_0 egri chiziq hosil qilinadi.

12.8-§. Vint chiziqlari

Silindrik vint chiziqlar

Ta'rif. Nuqtaning silindrik sirt bo'ylab aylanma va ilgarilanma harakati natijasida hosil bo'lgan trayektoriyasi **vint chizig'i** deyiladi.

7.17-rasmda A_0C_0 yasovchining bir necha holatlari $A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, \dots$ tasvirlangan. Bunda yo'ylar $A_0B_1=B_1B_2=B_2B_3=\dots$ o'zaro teng bo'lib, ularning har bir $\pi d/n$ ga teng bo'ladi. d - silindr diametri, n - silindr asosi bo'laklarini sonidir.

Agar A_0 nuqtaning holatlari $A_1, A_2, A_3, \dots$ deb belgilansa, uning har bir ko'tarilishi $A_2B_2=2 \cdot A_1B_1, A_3B_3=3 \cdot A_1B_1$ va x.k. bo'lib, A_0A_{12} yasovchi bir marta aylanma harakat qilganda $A_{12}B_{12}=12 \cdot A_1B_1$ bo'ladi. A_0A_{12} - masofa vint chizig'ining qadami, i - vint chizig'ining o'qi, A nuqtadan i gacha bo'lgan masofa vint chizig'ining radiusi deb yuritiladi.

Vint chizig'i chizilgan silindrning diametri va vint chizig'ining qadami uning parametrlari deyiladi.

7.17,a-rasmda silindrik vint chizig'ining yasalishi ko'rsatilgan. Buning uchun o'qi N ga perpendikulyar, asos diametri d ga va balandligi $2h$ ga teng bo'lgan silindrning

gorizontal va frontal proyeksiyalari yasaladi. Silindr asosi bo'lgan aylana teng 12 bo'lakka bo'linadi.

Xuddi shuningdek, vint chizig'ining qadami h ga teng bo'lgan 1-12 kesma ham 12 bo'lakka bo'linadi. Vint chizig'ining gorizontal proyeksiyasi aylana bilan ustma-ust tushadi, frontal proyeksiyasi esa sinusoidaga o'xshash chiziq bo'ladi.

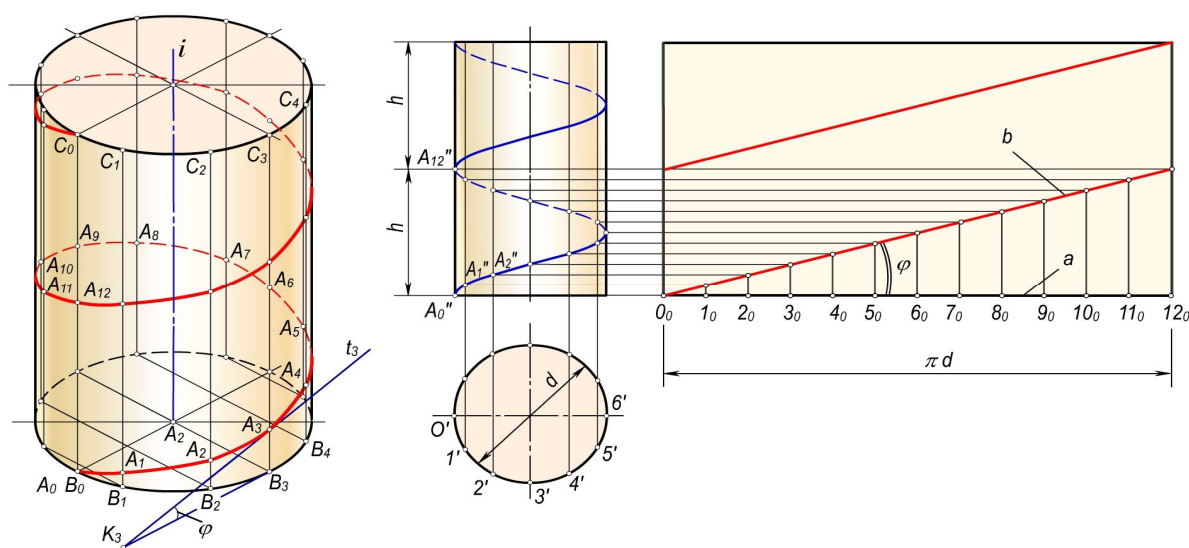
Silindrik vint chizig'ining yoyilmasi 7.17,b-rasmda keltirilganidek. b to'g'ri chiziqni hosil qiladi. Bu to'g'ri chiziqning silindr asosi bilan tashkil qilgan φ burchagi uning ko'tarilish burchagi bo'ladi. Vint chizig'ining A_1 nuqtasidan boshlab hosil bo'lgan ikkinchi bo'lagini aylanmasi ham b_1 to'g'ri chiziq shaklida ko'rsatilgan.

Vint chizig'ining ko'tarilish burchagi $\tan \varphi = h \cdot \pi d$ formula bilan uning bir o'ramining uzunligi $l = \sqrt{h^2 + (\pi d)^2}$ formula bilan aniqlanadi.

Ma'lumki geodezik chiziqlar yordamida sirdagi ixtiyoriy ikki nuqta orasidagi eng qisqa masofada o'lchanadi. Shunga ko'ra silindrik vint chiziq silindrning **geodezik chizig'i** ham bo'ladi

Silindrik vint chiziqlar o'ng va chap yo'nalishda bo'ladi. Nuqtaning ko'tarilishida harakat chapdan o'ng tomonga bo'lsa, yoki tushishida o'ngdan chapga bo'lsa, hosil bo'lgan chiziq **o'ng yo'nalishli vint chiziq** deyiladi.

Nuqtaning ko'tarilishida harakat o'ngdan chap tomonga bo'lsa, yoki tushishida chapdan o'ngga bo'lsa, hosil bo'lgan chiziq **chap yo'nalishli vint chiziq** deyiladi.



7.17-rasm.

Silindrik vint chiziqlar mashinasozlikda va qurilishda keng qo'llaniladi.

Vint chizig'iga o'tkazilgan urinmalarning barchasi uning o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislik bilan bir xil φ burchak hosil qiladi. Shuning uchun silindrik vint chiziqni **bir xil qiyaqlikdagi chiziq** ham deyiladi.

Silindrik vint chizig'iga o'tkazilgan urinmalarning N tekislikdagi izlarining geometrik o'rni silindrik **sirt asosining evolventasi** bo'ladi. Asos aylanasi esa **evolyuta** hisoblanadi.

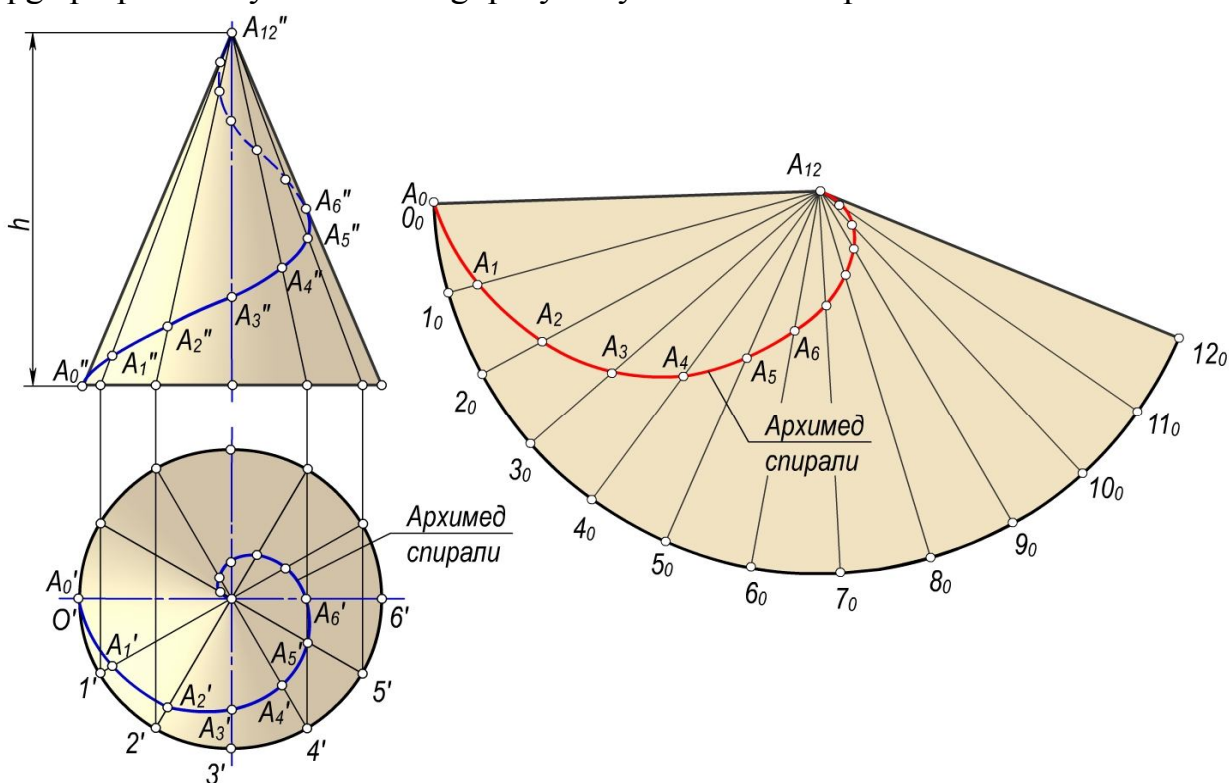
Agar silindr sirdagi boshlang'ich A_0 nuqtaning ilgarilanma va aylanma harakati o'zaro proporsional bo'lmasa, o'zgaruvchi qadamli vint chiziq xosil bo'ladi.

Konus vint chizig'i

Ta'rif. To'g'ri doiraviy konus sirtidagi A nuqta ilgarilanma va aylanma harakat qilsa, unda A nuqta konus sirtiga fazoviy vint chiziq chizadi. Bu chiziq **konus vint chizig'i** deb yuritiladi.

Nuqtaning konus yasovchisi buylab harakati shu yasovchining aylanish burchagiga proporsionaldir. 7.18–rasmda konusning 12 ta yasovchilarining holatlari chizilgan va ularga nuqtalarning holatlari mos ravishda belgilangan. A nuqtaning konus sirti buylab bir marta aylanishidan hosil bo'lgan $A_0A_{12}=h$ masofa **konus vint chizig'ining qadami** deb yuritiladi.

Konus vint chizig'ining konus o'qiga parallel tekislikdagi frontal proyeksiyasi to'liq balandligi kamayuvchi sinusoidaga o'xshash egri chiziq bo'ladi. Uning konus o'qiga perpendikulyar tekislikdagi proyeksiyasi Arximed spirali bo'ladi.



7.18-rasm.

Nazorat savollari

1. Tekis va fazoviy egri chiziqlarning farqi nimada?
2. Egri chiziqqa urinma deb nimaga aytiladi.
3. Egri chiziqning egriligi deb nimaga aytiladi?
4. Egri chiziqning evolyutasi deb nimaga aytiladi?
5. Egri chiziqning biror nuqtasida unga normal qanday o'tkaziladi?
6. Tekis egri chiziqlarning uchlari deb nimaga aytiladi?
7. Tekis egri chiziqlarning maxsus nuqtalari deb nimaga aytiladi va ularning turlarini aytib bering?

8. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar deb nimaga aytiladi va ularning turlarini aytib bering?
9. Silindrik va konussimon vint chiziqlari qanday xosil bo'ladi?
10. Vint chiziqining qadami nima?
11. Silindrik va konus vint chiziqlarining har bir o'rami yoyilmada qanday ko'rinishlarga ega bo'ladi?
12. O'ng yoki chap o'ramli vint chiziqlar qanday aniqlanadi?

13-ma'ruza - 2-soat. Sirtlar

Sirtlar va ularning chizmada berilishi

Aylanish sirtlari

Ikkinchi tartibli aylanish sirtlari

Chiziqli sirtlar

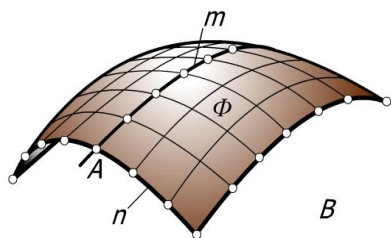
Vint sirtlar

Tayanch iboralar va tushunchalar

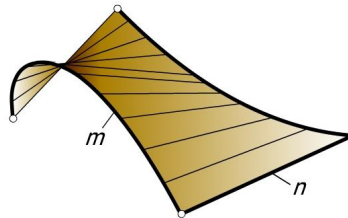
Sirt, algebraik sirt, transsendent sirt, kinematik sirt yasovchi, yo'naltiruvchi, sirtning karkasi, aylanish sirtlari, ikkinchi tartibli sirt, chiziqli sirt, vint sirt.

13.1–§. Umumiy ma'lumotlar

Biror chiziqlarning fazodagi uzluksiz harakati natijasida turli sirtlar hosil qilish mumkin. Sirtlarning hosil qilishning turli usullari ma'lum.



8.1-rasm.

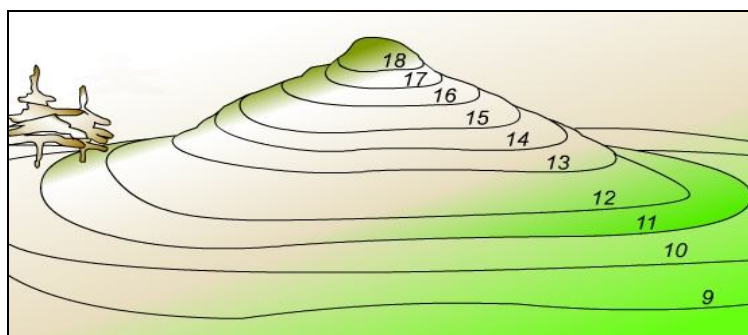


8.2-rasm.

Yasovchilarning turiga qarab egri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt **egri chiziqli sirt** (8.1-rasm), to'g'ri chiziqli yasovchi hosil qilgan sirt **chiziqli sirt** (8.2-rasm) deb ataladi.

Sirtlar hosil bo'lish jarayoniga qarab qonuniy va qonunsiz sirtlarga bo'linadi. Sirtning hosil bo'lishi biror matematik qonunga asoslangan bo'lsa, bunday sirt **qonuniy sirt** deyiladi. Doiraviy silindr, konus, sfera kabi ikkinchi tartibli sirtlar bunga misol bo'la oladi.

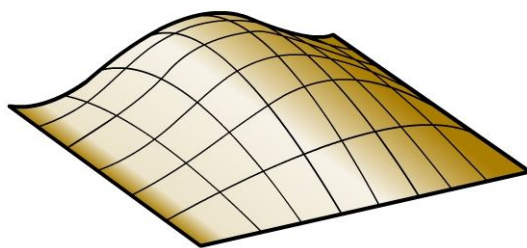
Sirtning hosil bo'lishi xech qanday qonunga asoslanmagan bo'lsa, bunday sirt **qonunsiz sirt** deb ataladi. Bunga topografik (8.3-rasm) va empirik (tajriba asosida olingan) sirtlar (8.4-rasm) kiradi.



8.3-rasm.

13.2–§. Sirtlarning berilish usullari

Chizma geometriyada sirtlar asosan kinematik va karkas usullarda beriladi.



8.4-rasm

Sirtlarning kinetik usulda berilishi

Biror chiziqlarning fazodagi uzluksiz harakatidan kinematik sirt hosil bo'ladi. Kinematik harakatning asosiy turlari: ilgarilanma, aylanma va bu ikki harakatning yig'indisi - vintsimon harakatdir.

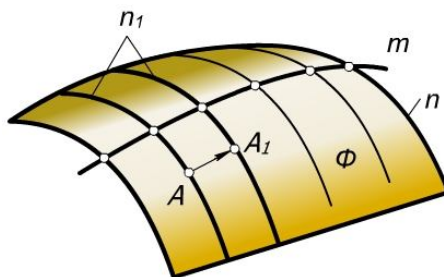
Ta'rif. Yasovchisining kinematik harakati natijasida hosil bo'lgan sirt **kinematik sirt** deyiladi.

Xarakatning turiga qarab, ilgarilanma harakat natijasida hosil bo'lgan sirt **tekis parallel ko'chirish sirti**, aylanma harakatdan hosil bo'lgan sirt **aylanish sirti** va vintsimon harakat natijasida hosil bo'lgan sirt **vint sirti** deb ataladi.

Tekis parallel ko'chirish sirtlari

Ta'rif. Yasovchining ma'lum yo'naltiruvchi bo'yicha doimo o'z-o'ziga parallel ravishda harakatlanishidan hosil bo'lgan sirt **tekis parallel ko'chirish sirti** deyiladi.

8.5– rasmda n tekis egri chiziqli yasovchining m egri chiziq buylab doimo o'z-o'ziga parallel ravishda ilgarilanma harakatlanishi natijasida hosil bo'lgan F sirti ko'rsatilgan



8.5-rasm

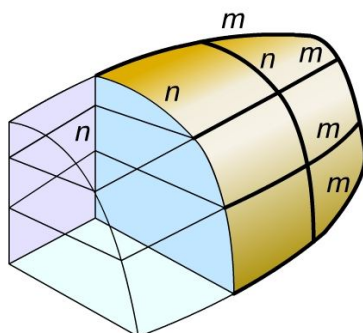
Agar m yo'naltiruvchi to'g'ri chiziq bo'lsa, silindr sirti hosil bo'ladi.

Biror parabolani boshqa parabola bo'yicha tekis siljitilsa, giperbolik paraboloid sirti hosil bo'ladi. Demak, bu sirtlar ham tekis parallel ko'chirish sirtlari turiga kiradi.

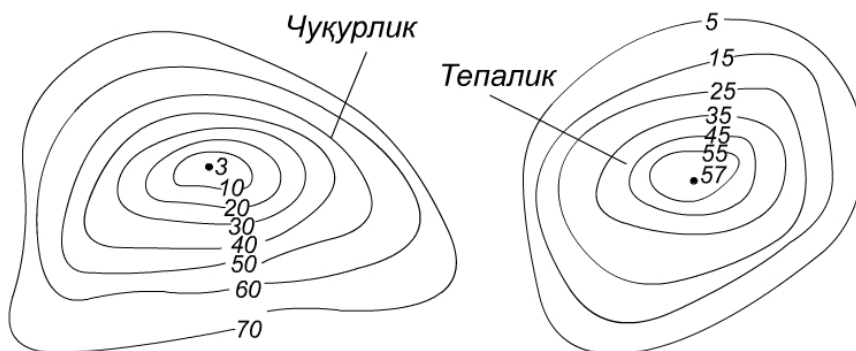
Sirtlarning karkas usulida berilishi

Ba'zi bir sirtlarini aniq geometrik qonuniyatlar bilan berib bo'lmaydi. Bunday sirtlar shu sirt ustida yotuvchi bir nechta nuqtalar yoki chiziqlar bilan beriladi.

Sirtning uning ustidagi bir nechta nuqtalar yoki chiziqlar bilan berilishi uning *karkas usulida berilishi* deb yuritiladi. Sirt ustida tanlangan chiziqlar to'plami *sirtning karkaslari* deyiladi (8.6, 8.7-rasmlar).



8.8-rasm

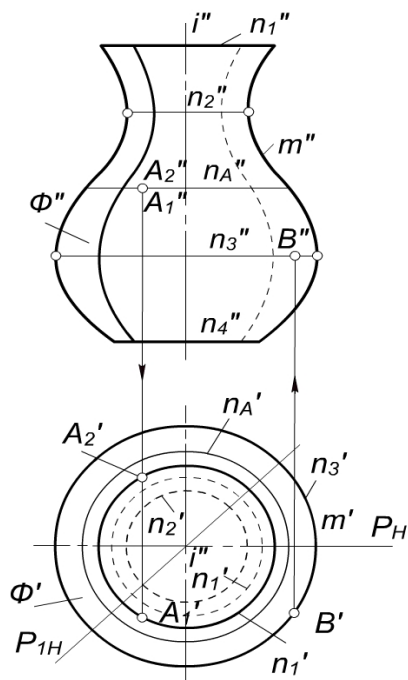


8.7-rasm

13.3–§. Aylanish sirtlari

Ta'rif. Biror tekis yoki fazoviy chiziqning qo'zg'almas to'g'ri chiziq atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt **aylanish sirti** deb ataladi.

Harakatlanuvchi chiziq sirtning *yasovchisi*, qo'zg'almas to'g'ri chiziq esa uning **aylanish o'qi** deyiladi. Yasovchi va aylanish o'qi aylanish sirtning aniqlovchilarini tashkil qiladi. 8.8–rasmda $m(m', m'')$ egri chiziqning $i(i', i'')$ aylanish o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan umumiy ko'rinishdagi aylanish sirti chizmada tasvirlangan. Aylanish jarayonida yasovchining hamma nuqtalari aylanalar bo'yicha harakat qilib, bu aylanalar sirtning **parallellari** deyiladi. Aylanish o'qidan o'tgan barcha tekisliklar **meridian tekisliklari**, ularning aylanish sirti bilan kesishish chiziqlari esa **sirtning meridianlari** deyiladi. Frontal meridian tekisligi **bosh meridian tekisligi** hisoblanib, uning sirt bilan kesishish chizig'i **bosh meridian chizig'i** yoki sirtning **frontal ocherki** deb ataladi. meridian kesimlari ko'rsatilgan. Bosh meridian V ga parallel bo'lganligi uchun uning frontal proyeksiyasi o'zining haqiqiy kattaligiga teng bo'ladi.



8.8-rasm

Eng kichik radiusli parallel sirtning bo'yini, eng katta radiusli parallel esa uning ekvatori deyiladi.

8.8-rasmdagi aylanish sirtida parallellardan n_2 (n_2' , n_2'') buyin, n_3 (n_3' , n_3'') esa ekvator chizig'i hisoblanadi.

Parallellar yordamida sirt ustida nuqtalarning proyeksiyalari topiladi. Masalan, aylanish sirtiga tegishli A_1 va A_2 nuqtalarning frontal proyeksiyalari A_1'' va A_2'' nuqtalar berilgan bo'lsa, ularning gorizontal proyeksiyalari n_1 -parallelni n_1' -gorizontal proyeksiyasida topiladi.

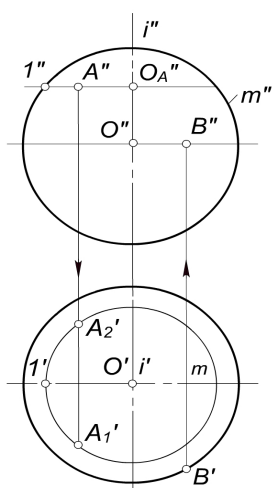
Ekvatorida yotuvchi V nuqtaning gorizontal V' proyeksiyasi berilgan. Uning V'' frontal proyeksiyasi ekvatorning n_3'' frontal proyeksiyasida bo'ladi.

Ikkinchi tartibli aylanish sirtlari

Ta'rif. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning o'z o'qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt **ikkinchi tartibli aylanish sirtlari** deyiladi.

Sfera

Ta'rif. Aylananing o'z diametrlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt **sfera** deb ataladi.



8.9-rasm

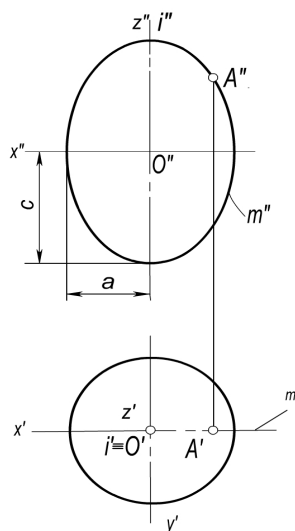
8.9-rasmda tasvirlangan sfera ustidagi A nuqtaning A'' frontal va V nuqtaning V' gorizontal proyeksiyalari berilgan. A nuqtaning A_1' va A_2' gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun u orqali $O_A''1''$ radiusli parallel o'tkaziladi. A nuqtaning gorizontal proyeksiyalari ana shu parallelni gorizontal proyeksiyasida yotadi. A nuqta sferaning oldingi yoki orka yarmida joylashgan bo'lishi mumkin. Shuning uchun uning gorizontal proyeksiyalari A_1' va A_2' nuqtalar parallelni gorizontal proyeksiyasida topiladi. V nuqta sfera ekvatorida yotganligi uchun uning V'' frontal proyeksiyasi ekvatorning frontal proyeksiyasida topiladi.

Ellipsoid

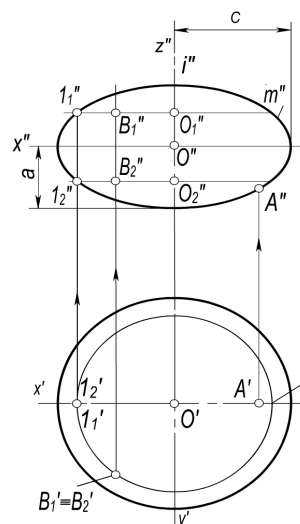
Ta'rif. Ellipsning o'z o'qlaridan biri atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt aylanma **ellipsoid** deyiladi.

Bunda $m(m', m'')$ – ellips va $i(i', i'')$ aylanish o'qi – ellips o'qi bilan ustma-ust tushadi.

Ellipsning kichik o'qi atrofida aylanishidan *siqiq aylanma ellipsoid* (8.10-rasm), katta o'qi atrofida aylanishidan *cho'ziq aylanma ellipsoid* hosil bo'ladi (8.11-rasm). 8.10- va 8.11-rasmlarda ellipsoidlar ustida berilgan A va V nuqtalarning bitta proyeksiyasi bo'yicha ularning yetishmaydigan proyeksiyalarini yasash ko'rsatilgan. Yetishmaydigan proyeksiyalar parallel, meridian va proyeksion bog'lanish chiziqlari yordamida aniqlangan.



8.10-rasm.

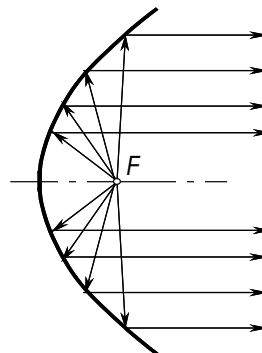
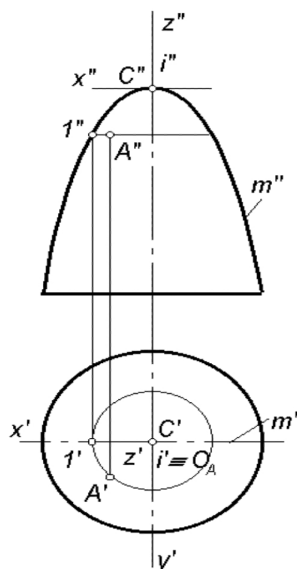


8.11-rasm.

Paraboloid

Ta'rif. Parabolaning o'z o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt **aylanma paraboloid** deyiladi.

8.12–rasmda $m(m', m'')$ parabolani $i(i', i'')$ o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan paraboloidning proyeksiyalari berilgan va uning ustida nuqta tanlash ko'rsatilgan.



a)

b)

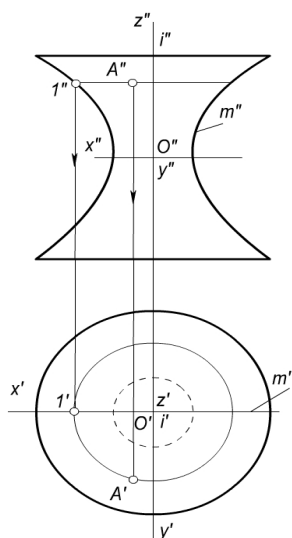
8.12-rasm

Giperboloid

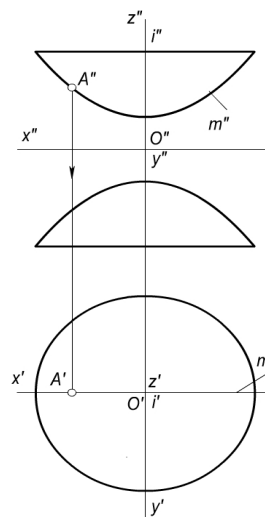
Ta'rif. Giperbolaning o'z mavhum yoki haqiqiy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt **aylanma giperboloid** deyiladi.

Giperbolaning mavhum o'q atrofida aylanishidan **bir pallali aylanma giperboloid** hosil bo'ladi (8.13–rasm).

Giperbolaning o'z haqiqiy o'qi atrofida aylanishidan **ikki pallali aylanma giperboloid** hosil bo'ladi (8.16-rasm).



8.13-rasm



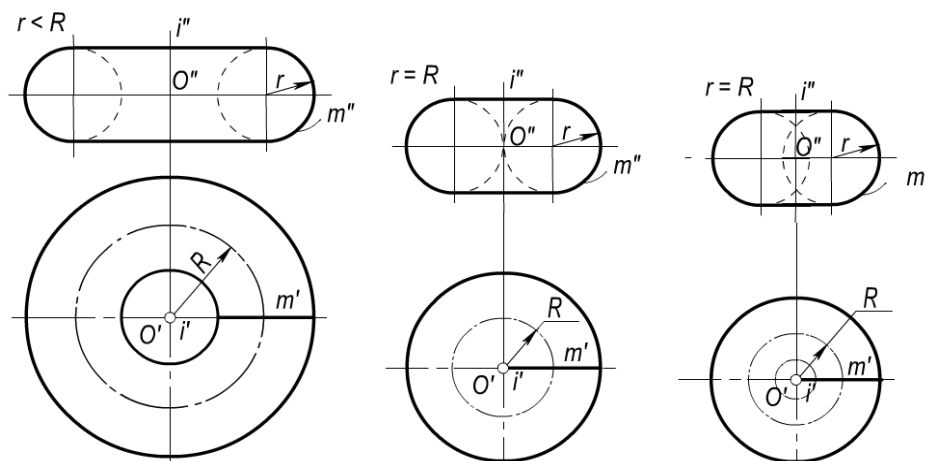
8.14-rasm

Tor sirti

Ta'rif. Biror aylananing shu aylana tekisligida yotuvchi, ammo aylana markazidan o'tmaydigan, ixtiyoriy i o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt **tor sirti** deyiladi.

Yasovchi m aylana radiusi r va aylana markazidan i o'qqacha bo'lgan R masofalarning o'zaro nisbatiga ko'ra tor sirlari turlicha bo'ladi.

- $r < R$ bo'lganda yasovchi $m(m', m'')$ aylana aylanish o'qi $i(i', i'')$ ni kesmaydi va hosil bo'lgan tor ochiq tor yoki halqa deyiladi (8.15,a-rasm).
- $r = R$ bo'lganda yasovchi $m(m', m'')$ aylana aylanish o'qi $i(i', i'')$ ga urinadi. Bunday tor yopiq tor deb ataladi (8.15,b-rasm).
- $r > R$ bo'lganda yasovchi $m(m', m'')$ aylana aylanish o'qi $i(i', i'')$ ni kesadi. Bu holda xosil bo'lgan tor ham yopiq tor deyiladi (8.15,v-rasm).



a)

b)

v)

8.15-rasm

Qaytish qirrali yoyiladigan chiziqli sirtlar. Torslar

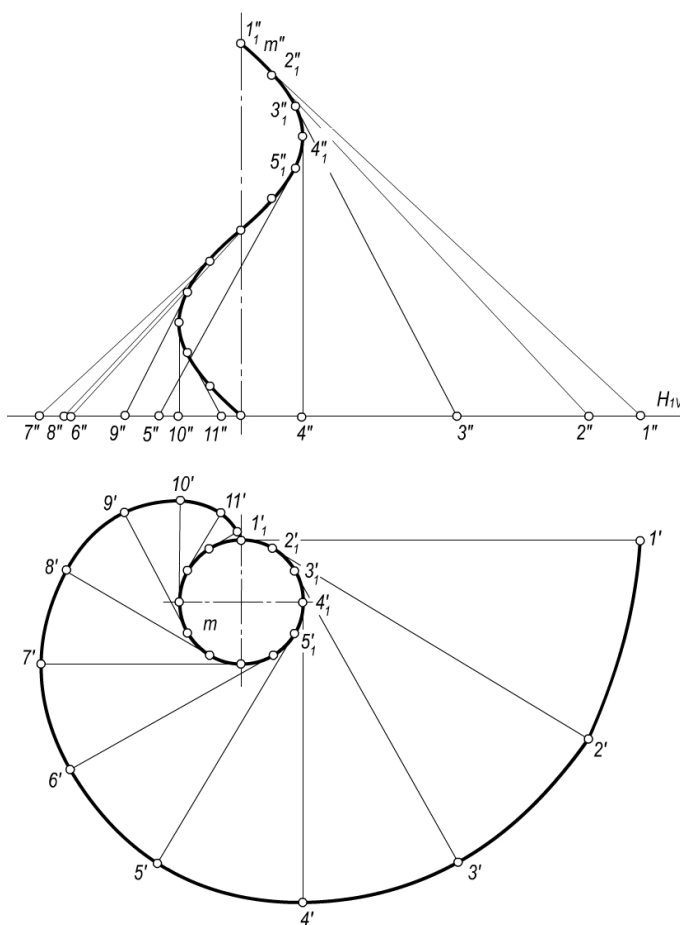
Ta’rif. Biror fazoviy egri chiziqqa urinib o’tuvchi chiziqlar to’plamidan hosil bo’lgan sirt **qaytish qirrali sirt** deb ataladi.

Qaytish qirrali sirtlar torslar deb ham ataladi. Bunda, fazoviy egri chiziq sirtning yo’naltiruvchisi, urinma chiziqlar esa uning yasovchilari bo’ladi (8.16-rasm).

Vint sirtlar

Ta’rif. . Biror chiziqning vintsimon harakati natijasida hosil bo’lgan sirt **vint sirti** deyiladi.

Vintsimon harakatlanuvchi chiziq sirtning yasovchisi bo’ladi. Yasovchining bir marta to’la aylanishida bosib o’tgan h masofa vint sirtining qadami deb ataladi.

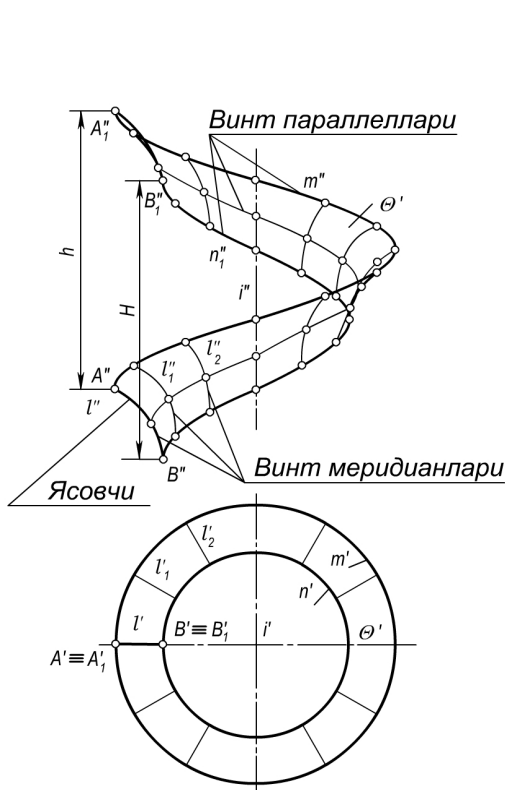


8.16-rasm

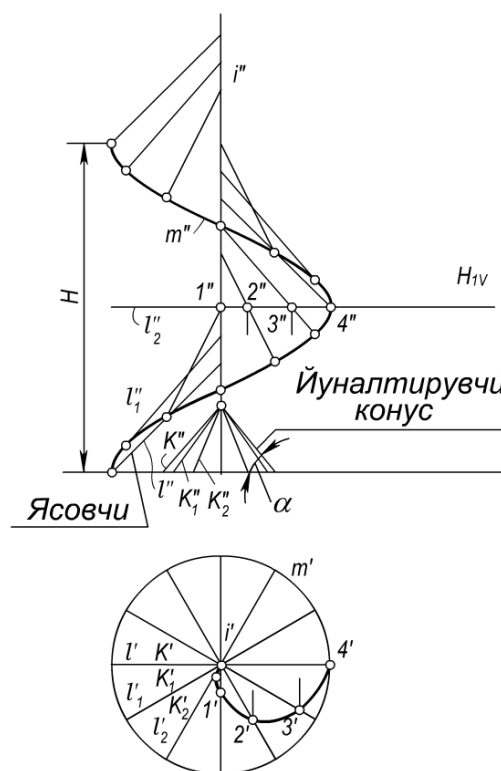
8.17-rasmda $i o'q$ chizig'i va u orqali o'tuvchi tekislikda yotgan ℓ egri chizig'i berilgan. Rasmda bu yasovchining vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan θ vint sirtining chizmasi tasvirlangan. To'g'ri chiziqlarning vintsimon harakati natijasida hosil bo'lgan vint sirtlari *gelikoid* deb yuritiladi.

Vint sirtining yasovchisi (to'g'ri chizig') uning aylanish o'qini kesib o'tsa, **yopiq**, kesmasa **ochiq** vintsimon sirtlar (gelikoidlar) hosil bo'ladi.

Yasovchi to'g'ri chiziq vint sirtining o'qiga perpendikulyar bo'lsa, to'g'ri va perpendikulyar bo'lmasa, og'ma vintsimon sirt (gelikoid) deyiladi. 8.18-rasmda yo'naltiruvchilar sifatida $i o'q$ chiziq, m vint chizig'i va yo'naltiruvchi konus sirt berilgan.



8.17-rasm



8.18-rasm

Nazorat savollari

1. Sirt deb nimaga aytiladi?
2. Sirtning yasovchisi va yo'naltiruvchisi nima?
3. Sirtlarni hosil bo'lishining qanday usullari mavjud?
4. Sirtlarni hosil qilishning kinetik usulini tushuntirib bering.
5. Aylanish sirtlari nima va ularga misollar keltiring.
6. Aylanish sirtlarining xarakterli chiziqlari qatoriga qaysi chiziqlar kiradi?
7. Chiziqli va chiziqli bo'lmagan sirtlarning farqi nimada?
8. Qanday sirtlar yoyiladigan sirtlar qatoriga kiradi?
9. Vint sirtini hosil bo'lishini tushuntirib bering.

10. Bir pallali va ikki pallali giperboloid sirtlar qanday hosil bo'ladi?
11. Siquq va cho'ziq ellipsoidlarning farqi nimada?
12. To'g'ri chiziq kesmasini aylantirish yo'li bilan qanday sirtlar hosil bo'lishi mumkin?
13. Sirtlarni chizmada tasvirlash deganda nimani tushunasiz?
14. Sirt yuzidagi nuqta qanday aniqlanadi?

14-ma'ruza - 2-soat

Sirtlarning tekislik va to'g'ri chiziq bilan kesishuvi

Umumiy ma'lumotlar

Sirtlarning proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishishi

Doiraviy konus kesimlari

Sirtlarning to'g'ri chiziq bilan kesishishi

Sirtlarning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishishi

Tayanch iboralar va tushunchalar

Doiraviy konus kesimlari, tayanch nuqtalar, elliptik kesim, parabollik kesim, giperbolik kesim.

14.1–§. Umumiy ma'lumotlar

Sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig'i to'g'ri chiziq, siniq chiziq va egri chiziq tarzidagi tekis shakllardan iborat bo'lishi mumkin. Bu xol tekislik bilan qanday sirtning kesishishiga va sirt bilan tekislikning o'zaro vaziyatiga bog'liqdir.

Sirt bilan tekislikni kesishish chizig'ining shaklini uni yasashdan oldin bilish mumkin. Ana shunga ko'ra uni yasashning biror usuli tanlanadi. Agar kesishish chizig'i to'g'ri chiziq bo'lsa, uning ikki nuqtasini, siniq chiziq bo'lsa, uning sinish nuqtalari (uchlari) ni, egri chiziq bo'lsa, uning tayanch (xarakterli) va bir necha ixtiyoriy nuqtalarini topib, ular o'zaro tutashtiriladi.

Tekislikning ko'pyoqlik yoki egri chiziqli sirtlar bilan kesishish chizig'ini yasash to'g'ri chiziq yoki egri chiziqning tekislik bilan kesishish nuqtalarini topishga asoslanadi.

14.2–§. Sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishi

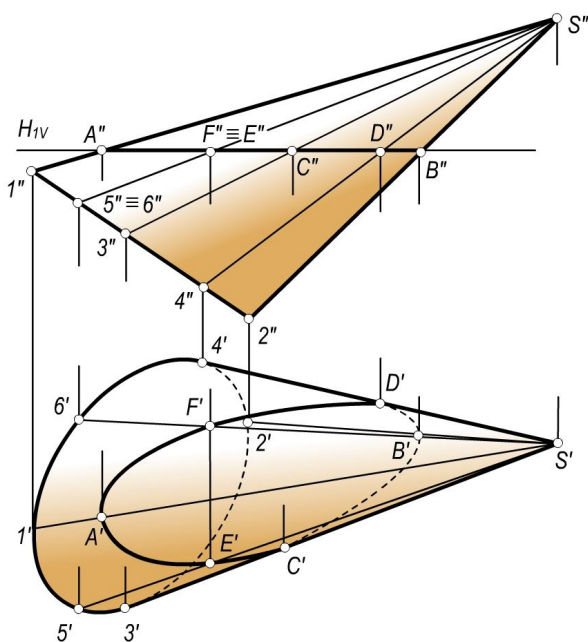
Odatda, kesim chizig'i konturining proyeksiyalarini yasash uning tayanch nuqtalarini topishdan boshlanadi.

Agar sirtni kesuvchi tekislik proyeksiyalovchi bo'lsa, kesim chizig'ining proyeksiyalarini yasash soddalashadi, chunki bu holda kesishish chizig'ining proyeksiyalaridan biri to'g'ri chiziq kesmasidan iborat bo'ladi.

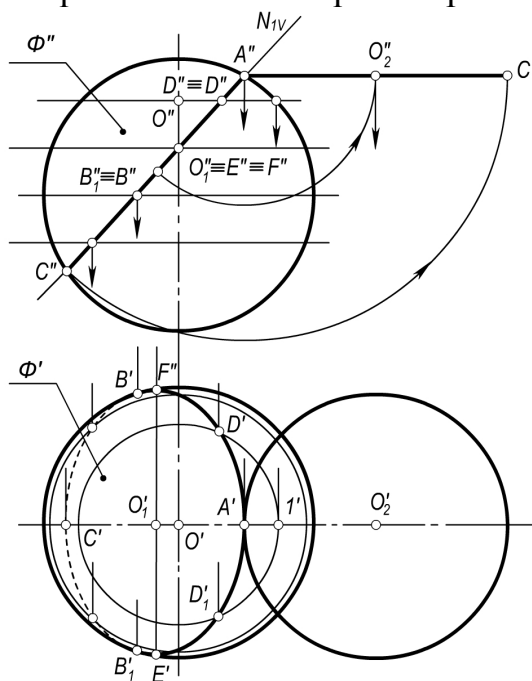
Quyida ba'zi sirtlarning proyeksiyalovchi tekisliklar bilan kesishishini ko'rib chiqamiz.

9.1-rasmda og'ma elliptik konusning $N_1(N_{IV})$ gorizontall tekislik bilan kesshishi ko'rsatilgan. Bunda konusning bir necha yasovchilari o'tkaziladi va ularning kesuvchi tekislik bilan kesishish nuqtalari: dastlab A, V, C, D tayanch nuqtalari, so'ngra Ye va F kabi oraliq nuqtalari yasaladi. Bu nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirsak, kesishish chizig'i xosil bo'ladi.

Kesishish chizig'ining $A''B''$ frontal proyeksiyasi kesuvchi tekislikning frontal izi bilan ustma-ust tushadi. $A(A', A'')$ va $B(B', B'')$ nuqtalarning A' va B' gorizontall proyeksiyasi ular orqali o'tuvchi S_1 va S_2 yasovchilarning gorizontall proyeksiyalari S_1' va S_2' larda bo'ladi. Konusning gorizontall S_3', S_4' ocherk yasovchilari bilan N_1 tekislikning kesishish nuqtalarini yasash uchun bu yasovchilarning frontal S_3'' va S_4'' proyeksiyalari bilan tekislikning H_{IV} izi bilan kesishish nuqtalari S'' va D'' lar belgilab olinadi. Bu nuqtalardan proyeksion bog'lanish chiziqlari o'tkaziladi va ularning S_3', S_4' yasovchilar bilan kesishgan nuqtalari C' va D' nuqtalar topiladi.



9.1-rasm.



9.2-rasm.

Kesimning oraliq nuqtalarini yasash uchun $A''V''$ kesmada ixtiyoriy $E'' \equiv F''$ nuqtalar belgilab olinadi. Bu nuqtalar orqali S_5, S_6 yasovchilarning frontal proyeksiyalari o'tkaziladi, so'ngra ularning S_5' va S_6' gorizontall proyeksiyalari topiladi va ularda E' va F' nuqtalar belgilab olinadi. Shu tarzda yana bir necha nuqtalarning gorizontall proyeksiyalari yasaladi.

Gorizontall proyeksiyada kesimning ko'rinishligi aniqlanib, kesish chizig'ining nuqtalari tekis egri chiziq bo'yicha tutashtiriladi.

9.2-rasmda sferaning N frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishuvi tasvirlangan. Bu holda kesimning $A''C''$ frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Kesimning gorizontall proyeksiyasi esa nuqtalarning sferaga tegishlilik shartiga ko'ra yasaladi. B va B_1 nuqtalar sferaning ekvatoriga tegishli bo'lganligi uchun ularning B' va B_1' gorizontall proyeksiyalari gorizontall proyeksiyaning ocherkida belgilab olinadi. A va C nuqtalarning gorizontall

proyeksiyalari A' va S' nuqtalar esa sfera bosh meridianining gorizontal proyeksiyasida yotadi.

Kesimga tegishli ixtiyoriy D va D_1 nuqtalarning D' va D_1' gorizontal proyeksiyalarini yasash uchun $D'' \equiv D_1''$ nuqta orqali gorizontal tekislikning N_{IV} frontal izi o'tkaziladi. Bu tekislik sferani radiusi $0''1''$ ga teng bo'lgan aylana bo'yicha kesadi. Bu aylanani gorizontal proyeksiyasida D' va D_1' nuqta xosil qilinadi. Oraliqdagi boshqa ixtiyoriy nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari ham xuddi shunday yasaladi. Gorizontal proyeksiyada hosil bo'lgan nuqtalarning ko'rinishligi aniqlanadi. Gorizontal proyeksiyada sferaning ekvatoridan yuqorida joylashgan hamma nuqtalar ko'rinadi, pastki qismida joylashgan nuqtalar esa ko'rinmaydi. Rasmda kesim yuzining haqiqiy kattaligini yasash aylantirish usulida bajarib ko'rsatilgan.

14.3–§. Konus kesimlari

Doiraviy konus sirtning tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan chiziqlar konus kesimlari yoki ikkinchi tartibli chiziqlar deyiladi. Bu chiziqlar oilasiga parabola, (qo'sh to'g'ri chiziq) giperbola, (o'zaro kesuvchi ikki to'g'ri chiziq) ellips (aylana) kiradi. Bu oilaga mansub chiziqlarning hosil bo'lishi kesuvchi tekislikning konus o'qiga va uning yasovchilariga nisbatan vaziyatiga bog'liq bo'ladi.

Kesuvchi tekislik konusning uchidan o'tib, yasovchilardan birortasi bilan kesishmasa, u holda kesimda nuqta hosil bo'ladi (9.3-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o'qi orqali o'tsa, kesimda o'zaro kesuvchi ikki to'g'ri chiziq hosil bo'ladi (9.3-rasm).

Kesuvchi tekislik konus o'qiga perpendikulyar bo'lib, uning uchidan o'tmasa, kesimda aylana hosil bo'ladi (9.3-rasm).

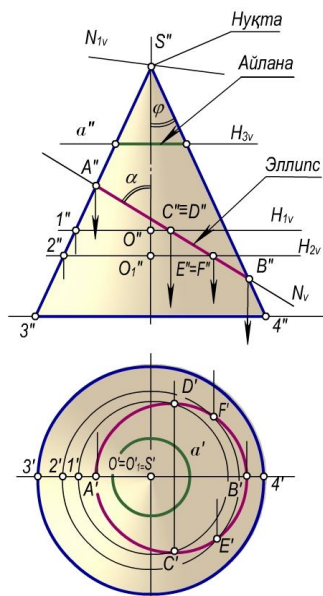
Ta'rif. Aylanma konusning tekislik bilan kesishuvidan hosil bo'lgan kesimning konus o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi to'g'ri burchakli proyeksiyasi 2-tartibli egri chiziq bo'lib, uning fokuslaridan biri konus uchining shu tekislikdagi proyeksiyasi bo'ladi.

Elliptik kesim. Agar kesuvchi tekislik bilan konus o'qi orasidagi α burchak konus yasovchilari va o'qi orasidagi φ burchakdan katta ($\alpha > \varphi$) bo'lsa, kesimda ellips hosil bo'ladi. Kesuvchi tekislik konusning barcha yasovchilarini kesib, $\alpha \neq 90^\circ$ bo'lsa ham, kesimda ellips hosil bo'ladi (9.3-rasm)

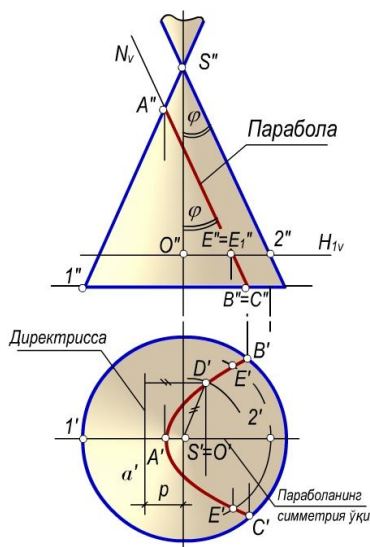
To'g'ri doiraviy konusning $N(N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash kerak bo'lsin (9.3-rasm).

Kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli ellipsning frontal proyeksiyasi to'g'ri chiziq kesmasi $A'' B''$ dan iborat bo'ladi. $A'' B''$ kesma ellipsning katta o'qi bo'ladi. Uning kichik o'qi $C'D'$ kesma katta o'qi $A' B'$ ga perpendikulyar bo'lib, kesishish nuqtasida har ikkala o'q teng ikkiga bo'linadi.

A va B nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari A' va B' bevosita $S'3'$ va $S'4'$ yasovchilarda belgilab olinadi. C va D nuqtalarning gorizontal proyeksiyalarini topish uchun $C'' \equiv D''$ nuqta orqali $N_1(N_{IV})$ gorizontal tekislik o'tkaziladi. Radiusi $0''1''$ kesmaga teng bo'lgan aylana O' markaz bo'yicha chiziladi. $C'' \equiv D''$ nuqtadan proyeksion bog'lanish chizig'i o'tkazilib, uning $O'1'$ radiusli aylana bilan kesishish nuqtalari C' va D' lar belgilab olinadi.



9.3-rasm



9.4-rasm.

Ellipsni katta ($A'' B''$) va kichik ($C'D'$) o'qlari bo'yicha yasash mumkin. Kesimga tegishli oraliq nuqtalardan bir nechta yasab, ular o'zaro tutashtirilsa ellips hosil bo'ladi. Shunday nuqtalardan E' va F' larni yasashni ko'rib chiqaylik. A'' va B'' nuqtalar orasida ixtiyoriy $E'' \equiv F''$ nuqta olib, u orqali $N_2(N_{2V})$ gorizont tekislik o'tkaziladi. Bu tekislikning konus bilan kesishish chizig'i (aylana) ning gorizont proyeksiyasi bo'lgan $O'2'$ radiusli aylana chiziladi. Bu aylana bilan $E'' \equiv F''$ nuqtadan tushirilgan proyeksion boglanish chizig'ining o'zaro kesishishidan E' va F' nuqtalar hosil bo'ladi.

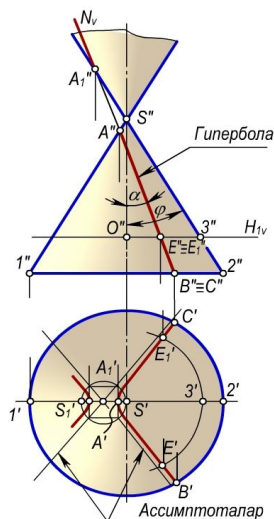
Parabolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning yasovchilaridan biriga parallel qilib o'tkazilsa, kesimda **parabola** hosil bo'ladi (9.4-rasm).

Yoki kesuvchi tekislik konusning uchidan o'tmagan va $\angle \alpha = \angle \varphi$ bo'lgan holda ham kesimda parabola hosil bo'ladi. Rasmda to'g'ri doiraviy konus bilan $N(N_V)$ tekislikning kesishuvi ko'rsatilgan. Kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi sababli parabolaning frontal proyeksiyasi tekislikning N_V frontal izi bilan ustma-ust tushadi. Uning gorizont proyeksiyasi ham parabola bo'lganligi uchun uni A' uchi, S' fokusi hamda a' direktrissasi bo'yicha yasash mumkin. A' nuqta bevosita $S'1'$ yasovchida belgilab olinadi, uning chap tomonida $A'S'$ masofada a' direktrissasi parabolaning simmetriya o'qiga perpendikulyar qilib o'tkaziladi. Parabolaning ixtiyoriy D' nuqtasini yasash uchun markazi S' nuqta (fokus) da bo'lgan biror $r > A'S'$ radiusli aylana yoyi o'tkaziladi. So'ngra direktrissaga parallel qilib, undan r masofada to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziq bilan aylana yoyi o'zaro kesishib D' nuqtani hosil qiladi.

Kesimga tegishli ixtiyoriy nuqtalarni quyidagicha topish ham mumkin. $A''V''$ kesimda ixtiyoriy $E'' \equiv E_1''$ nuqta belgilab olinadi. Bu nuqta orqali N_1 gorizont tekislikning frontal N_{1V} izi o'tkaziladi. Bu tekislik konusni $O'2''$ radiusli aylana

bo'yicha kesadi. Bu aylananing gorizontaal proyeksiyasi bilan $E'' \equiv E_1''$ nuqtadan tushirilgan proyeksion boglanish chizig'i o'zaro kesishib E' va E_1' nuqtalarni hosil qiladi.

Giperbolik kesim. Kesuvchi tekislik konusning ikkita yasovchisiga parallel bo'lsa, u konusni giperbola bo'yicha kesib o'tadi. Bunda $\alpha^\circ < \varphi^\circ$ bo'ladi. Bunday tekisliklar xususiy holda konus o'qiga parallel bo'ladi (9.5-rasm).



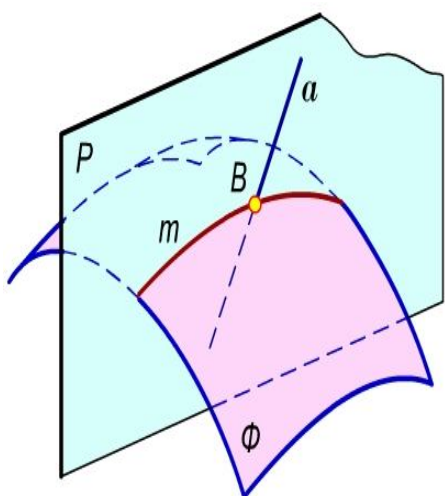
Rasmda berilgan to'g'ri doiraviy konusning $N(N_v)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishishi ko'rsatilgan. Bu holda ham kesuvchi tekislik frontal proyeksiyalovchi bo'lganligi uchun giperbolaning frontal proyeksiyasi tekislikning N_v frontal izi bilan ustma-ust tushadi, gorizontaal proyeksiyasi esa giperbola chizig'i bo'ladi. A' va A_1' nuqtalar giperbolaning uchlari bo'lib, ular $S'1'$ va $S'2'$ yasovchilarda belgilab olinadi. S' va S_1' nuqtalar giperbolaning fokuslaridir. Giperbolani uchlari, fokuslari va asimptotalari bo'yicha yasash mumkin. Kesim (giperbola) ga tegishli ixtiyoriy E' va E_1' nuqtalar konusni aylana bo'yicha kesuvchi yordamchi N_1 gorizontaal tekislik yordamida topilgan.

9.5-rasm

14.4–§. Sirtlarni to'g'ri chiziq bilan kesishishi

To'g'ri chiziq bilan sirtlarning kesishish nuqtalari sirtlarning tekislik bilan kesishish chizig'ini yasashga asoslanib topiladi. Umuman, biror a to'g'ri chiziq bilan F sirtning kesishish nuqtasi quyidagicha aniqlanadi (9.6-rasm):

- Berilgan a to'g'ri chiziq orqali ixtiyoriy yordamchi R tekislik o'tkaziladi. $R \supset a$.
- F sirt bilan R tekislikning kesishish chizig'i m yasaladi. $F \cap R = m$.
- m chiziq bilan berilgan a to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi V belgilab olinadi: $a \cap m = V$.



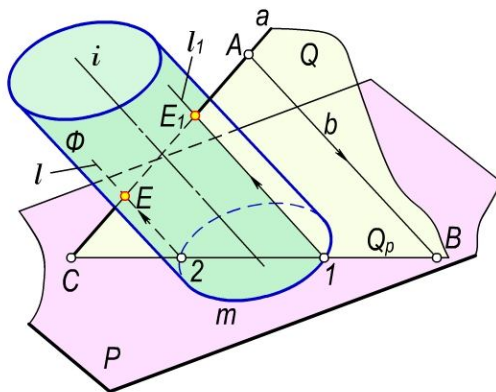
9.6-rasm

Ma'lumki, berilgan to'g'ri chiziq orqali istalgancha tekislik o'tkazish mumkin. Agar yordamchi tekislik proyeksiyalovchi vaziyatda o'tkazilsa, masalaning yechilishi soddalashadi. Silindrik yoki konus sirtlar berilgan bo'lsa, to'g'ri chiziq orqali silindr yasovchilariga parallel yoki konus uchidan o'tuvchi tekislik o'tkazish maqsadga muvofiq bo'ladi.

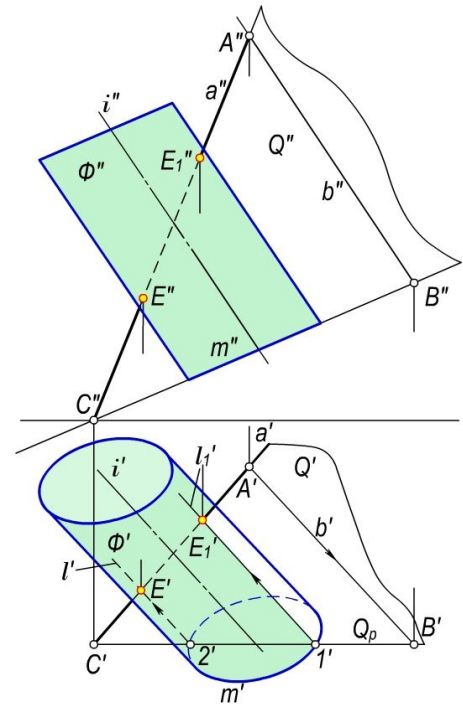
9.7-rasmda a to'g'ri chiziq bilan F og'ma elliptik silindrning kesishish nuqtalarini yasash yaqqol tasvirda, 9.8-rasmda esa tekis chizmada ko'rsatilgan. Kesishish nuqtalari E va E_1 larni yasash tartibi quyidagicha:

- berilgan a to'g'ri chiziq orqali silindrning yasovchilariga parallel qilib ixtiyoriy Q tekislik o'tkaziladi. Buning uchun a to'g'ri chiziqqa tegishli ixtiyoriy A nuqtani belgilab olib, u orqali b to'g'ri chiziqni silindrning yasovchilariga parallel qilib o'tkaziladi. Kesishuvchi a va b to'g'ri chiziqlar Q tekislikni ifodalaydi;
- Q tekislik bilan F silindrning kesishish chiziqlari ℓ va ℓ_1 yasovchilar yasaladi. Q tekislik va silindrning asos tekisligi R ning o'zaro kesishish chizig'i BS yasaladi. BS to'g'ri chiziqning silindr asosi m bilan kesishish nuqtalari 1 va 2 orqali ℓ va ℓ_1 yasovchilar (kesishish chiziqlari) o'tkaziladi;
- berilgan a to'g'ri chiziq bilan ℓ va ℓ_1 yasovchilarning kesishish nuqtalari E va E_1 belgilab olinadi.

Asosi N tekislikka tegishli bo'lgan to'g'ri doiraviy konus sirti bilan a to'g'ri chiziqning kesishishi va 9.9-9.10-rasmlarda tasvirlangan. Bu holda a to'g'ri chiziq orqali o'tuvchi yordamchi tekislik konusning uchidan o'tkaziladi.



9.7-rasm



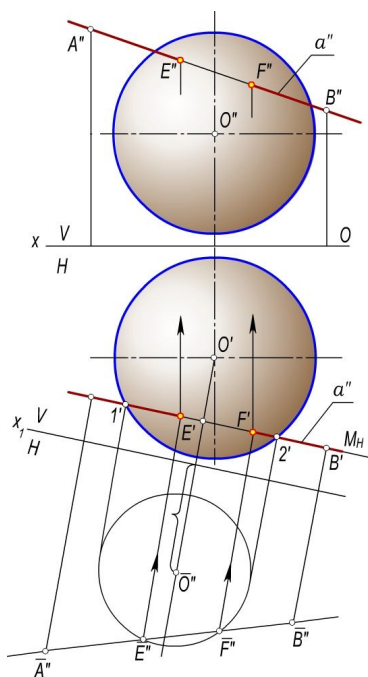
9.8-rasm

Rasmlarda bunday tekislik o'zaro kesishuvchi a va h to'g'ri chiziqlar orqali berilgan. Bunda h gorizontal to'g'ri chiziq konusning S uchidan utadigan qilib o'tkazilgan $h \ni S$.

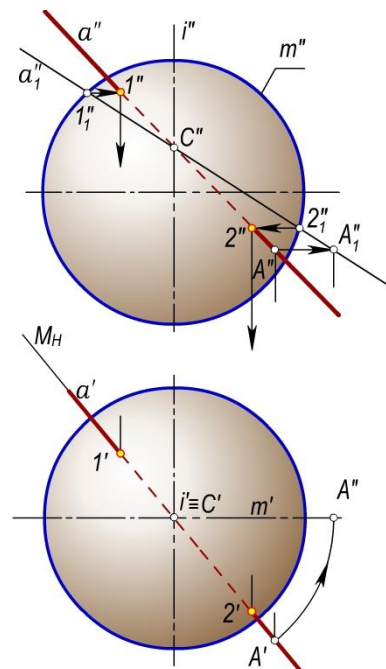
$$1'2' \equiv M_N.$$

Berilgan a to'g'ri chiziqli bilan 12 diametrli aylananing kesishish nuqtalari E va F larning proyeksiyalari V tekislik M ga parallel bo'lgan ixtiyoriy V tekislik bilan almashtirish orqal yasaladi.

Agar $a(a', a'')$ to'g'ri chiziqli aylanish sirtining aylanish o'qi bilan kesishadigan vaziyatda berilgan bo'lsa (9.13-rasm), u holda to'g'ri chiziqli bu o'q atrofida aylantirib, uning aylanish sirti bilan kesishish nuqtalarini osongina yasash mumkin.



9.12-rasm.

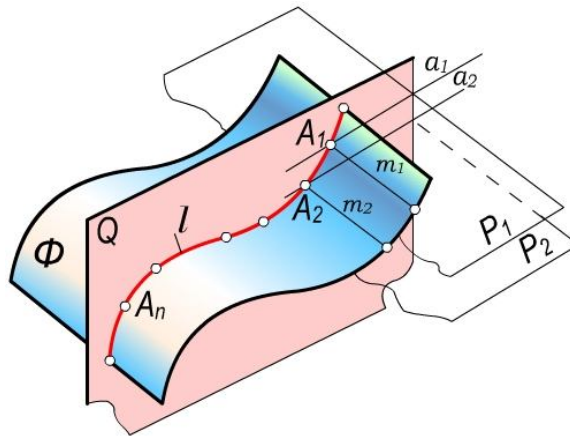


9.13-rasm.

14.5–§. Sirlarning umumiy vaziyatdagi tekisliklar bilan kesishish

Sirlarning umumiy vaziyatdagi tekislik bilan kesishish chiziqlari quyidagi algoritm asosida bajariladi:

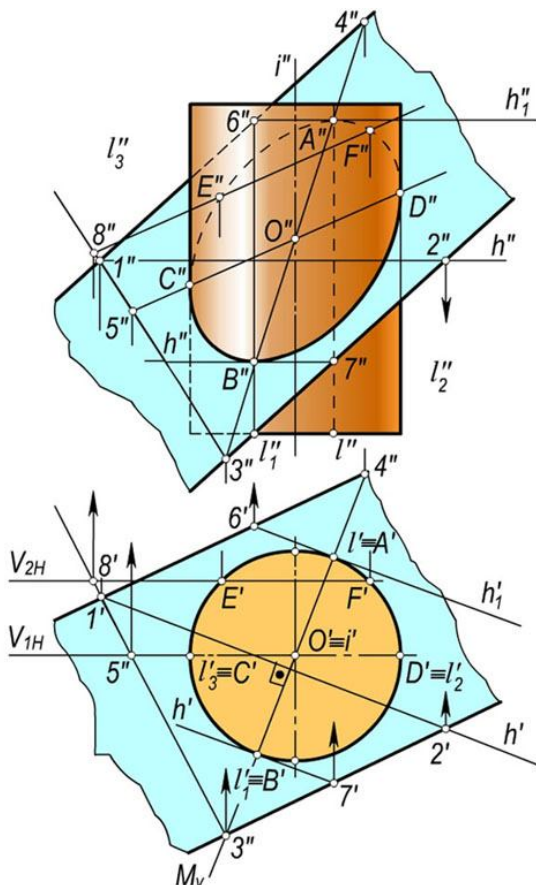
- berilgan F sirt va Q tekislik yordamchi kesuvchi P_1 tekislik bilan kesiladi (9.14-rasm). P_1 yordamchi tekislikni shunday o'tkazish kerakki, uning F sirt bilan kesishi chizig'i m_1 to'g'ri chiziqli yoki aylana bo'lsin.
- yordamchi P_1 tekislik bilan F sirtning kesishish chizig'i m_1 yasaladi: $F \cap P_1 = m_1$
- berilgan Q va P_1 tekisliklarning o'zaro kesishish chizig'i yasaladi: $Q \cap P_1 = a_1$;
- a_1 va m_1 chiziqlarning kesishish nuqtasi A_1 ni belgilab, olinadi. a_1 va m_1 chiziqlarining kesishish nuqtalari bitta yoki ko'p bo'lishi mumkin.



9.14-rasm.

Yuqorida bayon qilingan yasashlarga asosan $P_2, P_3, \dots$ tekisliklar o'tkazilib $A_2, A_3, \dots$ nuqtalarning holati aniqlanadi.

Bu nuqtalar o'zaro tutashtirilib, F sirt bilan Q tekislikning kesishish tekis egri chizig'i ℓ hosil qilinadi.

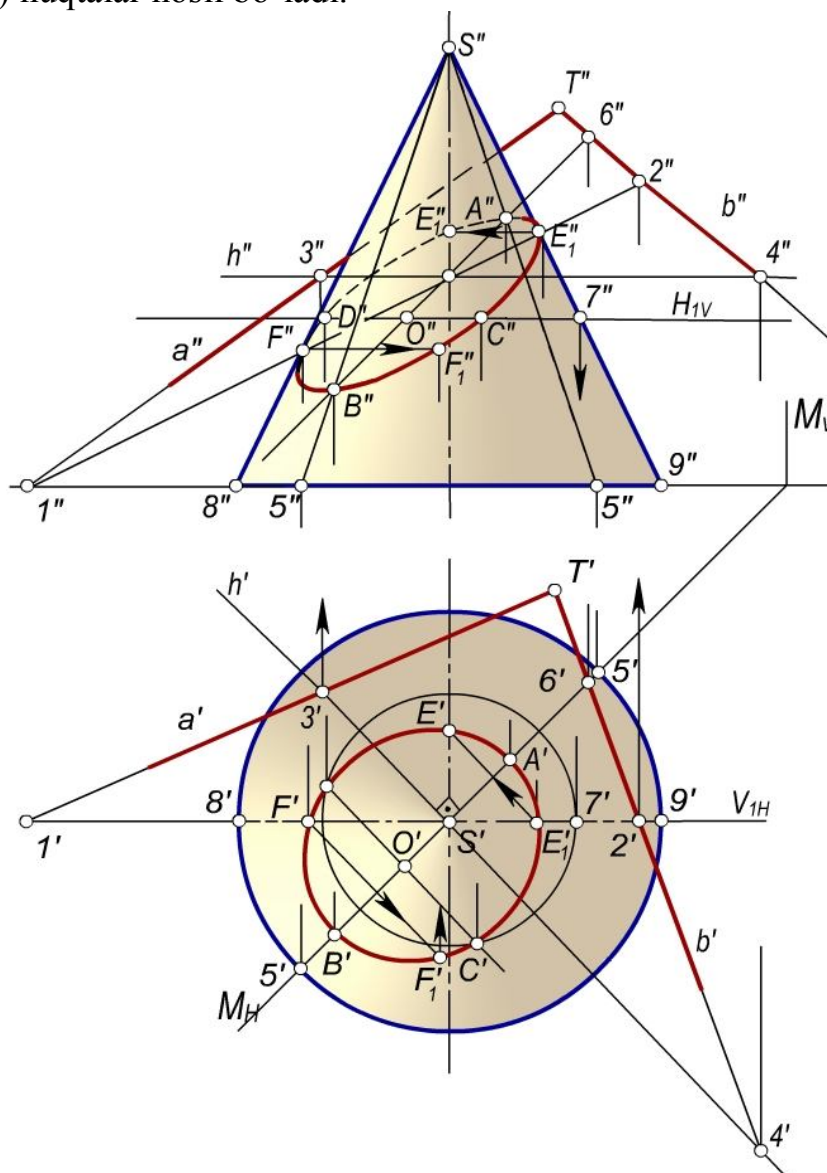


9.15-pacm.

silindrni ℓ va ℓ_1 yasovchilari bo'yicha, berilgan Q tekislikni esa 34 chiziq bo'yicha kesadi. 34 kesishish chizig'i va l, l_1 yasovchilarning frontal proyeksiyalari $3''4''$ hamda l', l_1' larning kesishuvidan A'' va B'' nuqtalar hosil bo'ladi. Yuqori va quyi nuqtalarning A' va B' proyeksiyalari silindr asosining proyeksiyasiga tegishli bo'ladi.

Silindr ocherkiga tegishli C va D nuqtalar shu ocherkni ifodalovchi l_2 , va l_3 yasovchilarning Q tekislik bilan kesishuvida hosil bo'lgan, oraliqdagi E va F nuqtalar esa C hamda D nuqtalar singari topiladi.

To'g'ri doiraviy konusning tekislik bilan kesishuvi 9.16-rasmda ko'rsatilgan. Bunda kesuvchi tekislik o'zaro kesishuvchi $a(a', a'')$ va $b(b', b'')$ to'g'ri chiziqlar bilan berilgan. Dastlab tayanch nuqtalarning topilishini ko'rib chiqamiz. Kesishish chizig'ini konus ocherkiga tegishli, ya'ni konus chetki yasovchilari S_9 va S_8 larning berilgan tekislik bilan kesishish nuqtalari E, F lar Quyidagicha topiladi: S_9 va S_8 yasovchilar orqali yordamchi V_1 frontal tekislik o'tkaziladi. U berilgan tekislikni 12 ($1'2', 1''2''$) to'g'ri chiziq, konusni esa $S_8(S'8', S''8'')$ va $S_9(S'9', S''9'')$ yasovchilar bo'yicha kesadi. 12 to'g'ri chiziq bilan S_8 va S_9 yasovchilarning kesishuvidan $E(E', E'')$ va $F(F', F'')$ nuqtalar hosil bo'ladi.



9.16-rasm.

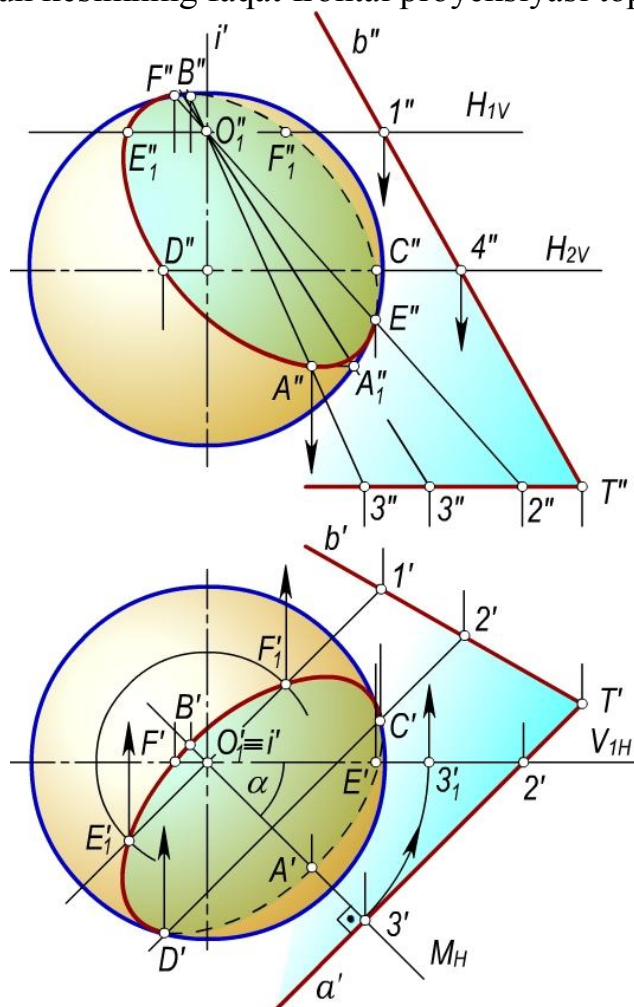
Yuqori va quyi nuqtalar esa konusning i o'qi orqali o'tuvchi va berilgan tekislikka perpendikulyar bo'lgan yordamchi (T_n) tekislikdan foydalanib topiladi. Buning uchun berilgan tekislikning ixtiyoriy $h(h', h'')$ gorizontali o'tkaziladi. Bu gorizontaling h' proyeksiyasiga perpendikulyar qilib, S' nuqta orqali yordamchi T tekislikning T_H izini o'tkazamiz. T tekislikning konus bilan kesishishi chiziqlari S_5 va S_6 yasovchilar hamda berilgan tekislik bilan kesishish chizig'i S_6 larning frontal proyeksiyalari o'tkaziladi. Ular o'zaro kesishib, mos ravishda quyi B va Yuqori A nuqtalarning frontal proyeksiyalari B'' va A'' nuqtalarni hosil qiladi. A va B nuqtalar

orasida masofa kesim yuza-ellipsning katta o'qi bo'ladi. Uning kichik o'qi CD ni topish uchun AB kesmani teng ikkiga bo'luvchi O_1 nuqta orqali AB ga perpendikulyar to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu holda CD kichik o'q gorizontal vaziyatdagi to'g'ri chiziq bo'lib uning proyeksiyasini yordamchi H_1 tekislikdan foydalanib topamiz. Gorizontal proyeksiyada kesuvchi tekislikning T_H izi kesishish chizig'ining simmetriya o'qi bo'ladi. Oraliqdagi E_1 va F_1 nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari E_1' va F_1' nuqtalar shu simmetriya o'qiga asoslanib yasalgan. So'ngra ular orqali E_1'' va F_1'' nuqtalar topilgan. Hosil bo'lgan nuqtalarning ko'rinishligi V_{1H} simmetriya tekisligi (frontal) bo'yicha aniqlanib, tekis egri chiziq bilan tutashtiriladi.

9.17-rasmda shar sirtini $Q(a \cap b)$ tekislik bilan kesishishi keltirilgan. Bunda kesishish chizig'ining quyi va yuqori nuqtalarini aylantirish usuli bilan topish qulay. Dastavval sferaning markazidan o'tuvchi yordamchi $M(M_H)$ tekislik berilgan $Q(Q', Q'')$ tekislikka perpendikulyar qilib o'tkaziladi.

So'ngra $M(M_N)$ yordamchi tekislikning sfera va berilgan $Q(Q', Q'')$ tekislik bilan kesishish chiziqlari sferaning $i(i', i'')$ o'qi atrofida frontal vaziyatga kelguncha aylantiriladi. Ocherklarning berilgan tekisliklar bilan kesishish nuqtalari C, D, E va F lar H_2 hamda V_1 tekisliklar yordamida topilgan. Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalardan E_1 va E_2 lar esa yordamchi H_1 tekislikdan foydalanib topilgan.

9.18-rasmda asosan H tekislikda joylashgan to'g'ri doiraviy silindrning ixtiyoriy vaziyatdagi $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishishi ko'rsatilgan. Bu holda kesimning gorizontal proyeksiyasi silindrning gorizontal proyeksiyasi (asosi) bilan ustma-ust tushadi. Shuning uchun kesimning faqat frontal proyeksiyasi topiladi.

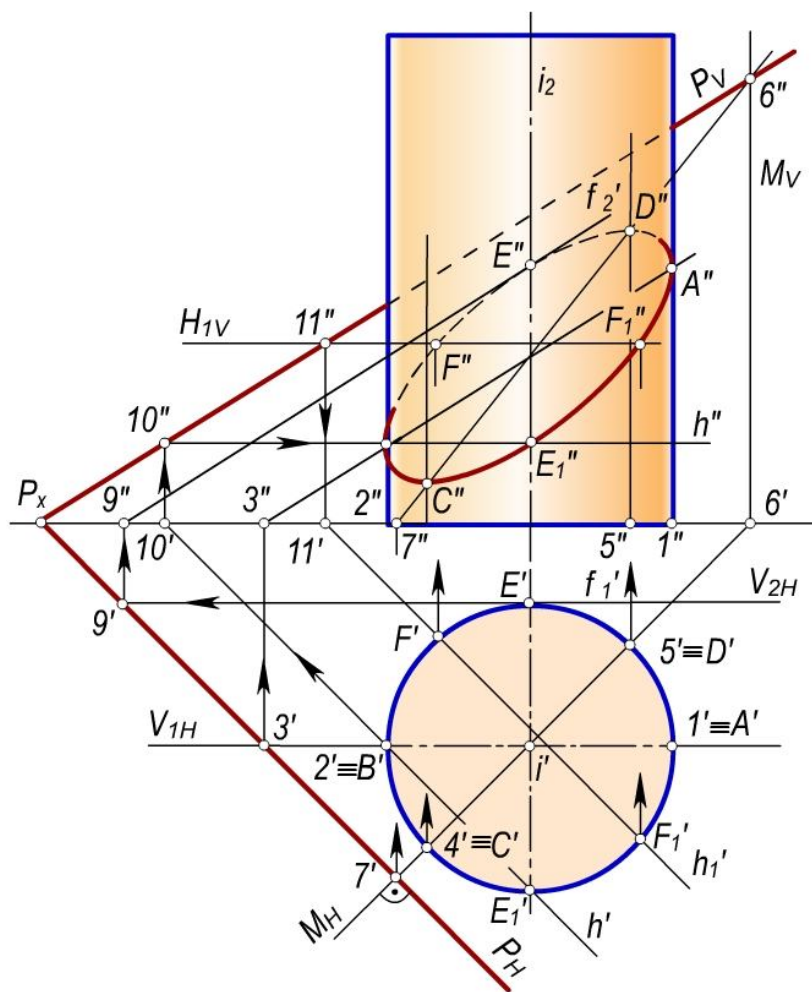


9.17-rasm.

Dastlab silindrning chetki 1, 2 yasovchilari bilan R tekislikning kesishish nuqtalari A va B ning frontal proyeksiyalari A'' va B'' nuqtalari topiladi. Buning uchun chetki yasovchilar orqali $V_1(V_{1N})$ frontal tekislik o'tkaziladi. Bu tekislik berilgan R tekislikni frontal chiziq bo'yicha kesadi. Bu chiziq frontal silindr chetki yasovchilarining frontal proyeksiyalari bilan kesishib, A'' va B'' nuqtalarni hosil qiladi.

Kesimning eng yuqori va eng quyi nuqtalarning frontal proyeksiyalari D'' va C'' nuqtalar silindrning o'qidan o'tuvchi va P tekislikka perpendikulyar bo'lgan $M(M_H, M_V)$ gorizontal proyeksiyalovchi tekislik yordamida topiladi.

Kesimning boshqa nuqtalarini tekislikning gorizontal yoki frontal chiziqlaridan foydalanib topiladi.

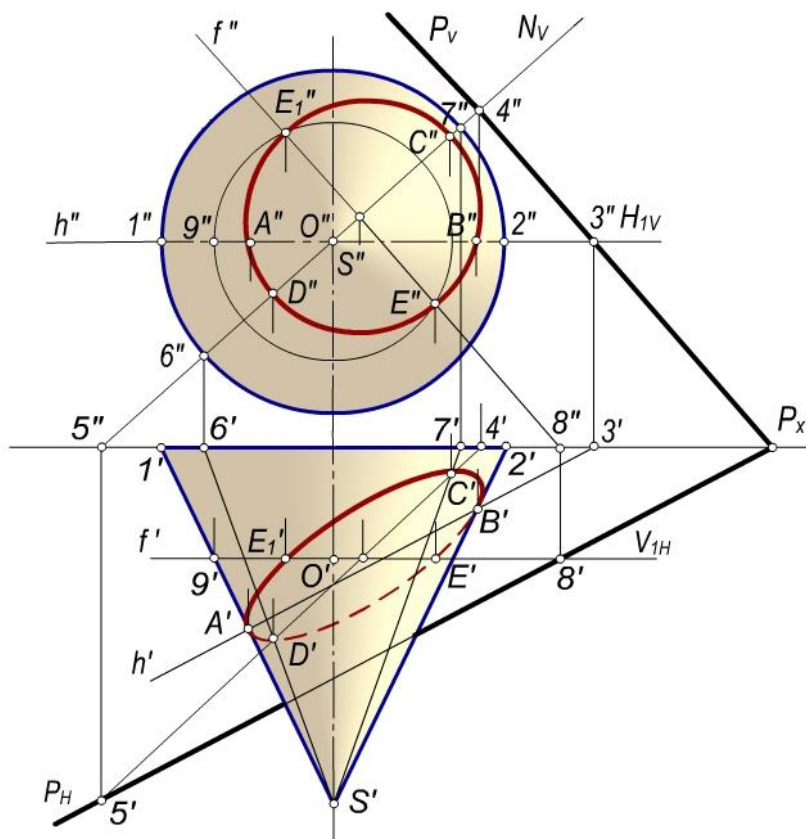


9.18-rasm.

9.19-rasmda asosi V tekislikda joylashgan to'g'ri doiraviy konusning $P(P_H, P_V)$ tekislik bilan kesishishi ko'rsatilgan.

Kesim (ellips) ning proyeksiyalarini yasash konusning $S_1(S'1', S''1'')$ va $S_2(S'2', S''2'')$ yasovchilari bilan $P(P_H, P_V)$ tekislikning kesishish nuqtalari A(A', A'') va V(V', V'') larni topishdan boshlanadi. S_1 va S_2 yasovchilarning frontal proyeksiyalari $S''1''$ va $S''2''$ lar orqali $N_1(N_{1V})$ gorizontal tekislikning frontal izi o'tkaziladi. Bu tekislik berilgan R tekislikni 3($3', 3''$) nuqtadan o'tgan $h(h', h'')$ gorizontal chiziq bo'yicha kesadi. Bu gorizontalning h' gorizontal proyeksiyasi konusning $S'1'$ va $S'2'$

chetki yasovchilari bilan kesishib, A' va V' nuqtalarni hosil qiladi. Bu nuqtalardan proyeksiyon bog'lanish chizig'ini o'tkazib, $S''1''$ va $S''2''$ yasovchilarda A'' va V'' nuqtalar belgilab olinadi.



9.19-rasm.

V tekislikka eng yaqin $S(S', S'')$ va eng uzoq $D(D', D'')$ nuqtalarning proyeksiyalari konusning o'qi orqali o'tuvchi va berilgan $P(P_H, P_V)$ tekislikka perpendikulyar bo'lgan $N(N_H, N_V)$ frontal proyeksiyalovchi tekislik yordamida topiladi.

Oraliqdagi ixtiyoriy nuqtalar esa konusning o'qiga perpendikulyar (frontal) yordamchi tekisliklar o'tkazish bilan topiladi. Frontal proyeksiyada kesimga tegishli bo'lgan hamma nuqtalar ko'rinadi. Gorizontaal proyeksiyada esa konusning Yuqori yarimda joylashgan kesimning $A'F_1'E_1'S'V'$ qismi ko'rinadi, $V'E'F'D'A'$ qismi esa ko'rinmaydi. Bu nuqtalarni tartibi bilan tutashtirib, tekis egri chiziq ellipsni hosil qilinadi.

Nazorat savollari

1. Sirt bilan tekislikning kesshuvidan qanday shakllar hosil bo'lishi mumkin?
2. Sirt proyeksiyalovchi tekislik bilan kesishganda qanday qulaylikka ega bo'linadi?
3. Konus kesimlari va ularning xususiy hollari nimadan iborat?
4. Sirt bilan tekislik kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalarni tushuntirib bering?

5. To'g'ri chiziqning sirt bilan kesishish nuqtalarini yasashning umumiy algoritmi nimalardan iborat?

15-ma'ruza - 2-soat.
Sirtlarning yoyilmalari

Umumiy ma'lumotlar
Silindr sirtlarning yoyilmalarini yasash
Konus sirtlarining yoyilmalarini yasash
Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash

Tayanch iboralar va tushunchalar

Sirtlarning yoyilmalari, normal kesim usuli, dumalatish usuli, taqribiy yoyilma, yordamchi uchburchak usuli.

15.1 §. Umumiy ma'lumotlar

Sirtning egilish deformatsiyasi yordamida tekislikka jipslashtirish (yoiqizish) mumkin bo'lsa, bunday sirt **yoyiladigan sirt** deyiladi. Sirtning yoyilmasini yasash deganda uni yirtmasdan, uzmasdan yoki g'ijimlamasdan faqat egib bir tekislikka jipslashtirish tushuniladi. Sirtning biror bo'lagi tekislikning ma'lum bir sohasiga yoyilishi mumkin. Masalan, silindrik sirt tekislikning o'zaro parallel ikki to'g'ri chizig'i orasidagi sohasida yoyiladi. Konus sirti esa tekislikka tegishli ikki kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi sohada yoyiladi.

Ta'rif. Sirtning biror bo'lagining cho'zilmasdan, yirtilmasdan tekislikka yoyilishidan hosil bo'lgan tekis shakl uning yoyilmasi deyiladi.

Yoyiladigan sirtlarga to'g'ri chiziqli sirtlardan faqat yondosh yasovchilari xos yoki xosmas nuqtalarda kesishadigan sirtlar kiradi.

Torslarda yondosh yasovchilarning kesishish nuqtalari qaytish qirrasida, konus sirtlarda esa uning uchida va silindrik sirtlarda cheksiz uzoqlikdagi nuqtada bo'ladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasash injenerlik amaliyotida katta ahamiyatga ega. Mashinasozlik, samolyotsozlik va qurilishda turli-tuman konstruksiyalarning shakllarini hosil qilish uchun yaxlit listlarda sirtlarning yoyilmalari yasaliib, ishlab chiqarish uchun zarur bo'lgan turli andozalar yasaladi.

Sirtlarning yoyilmalarini yasashda uchburchaklar, dumalatish va normal kesim usullari mavjud.

Uchburchaklar usuli bilan ko'pyoqlik sirtlar, konus va tors sirtlarning yoyilmalari yasaladi. Dumalatish usuli bilan proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda berilgan prizma, konus va silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash mumkin. Yasovchilari yoki qirralari proyeksiya tekisliklariga nisbatan og'ma vaziyatda bo'lgan silindrik yoki prizmatik sirtlarning yoyilmalarini normal kesim usulida yasash osonroqdir.

Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari taqriban yasaladi.

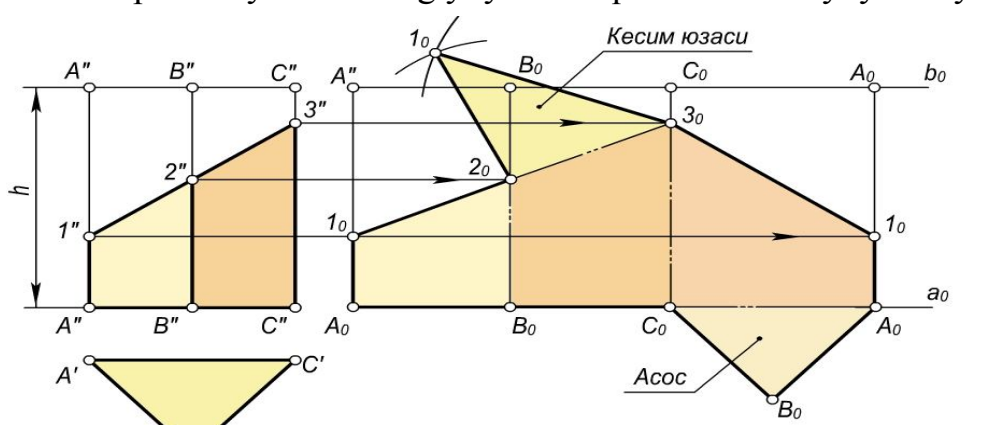
15.2–§. Ko'pyoqliklar yoyilmalari

Ko'pyoqliklar to'la yoyilmasini yasash uchun uning yon yoqlari va asoslarining yoyilmalari yasaladi. Bunday yoqlar (uchburchak yoki ko'pburchak) ni yoyilmada yasash ularga teng bo'lgan yoqlarni yasash

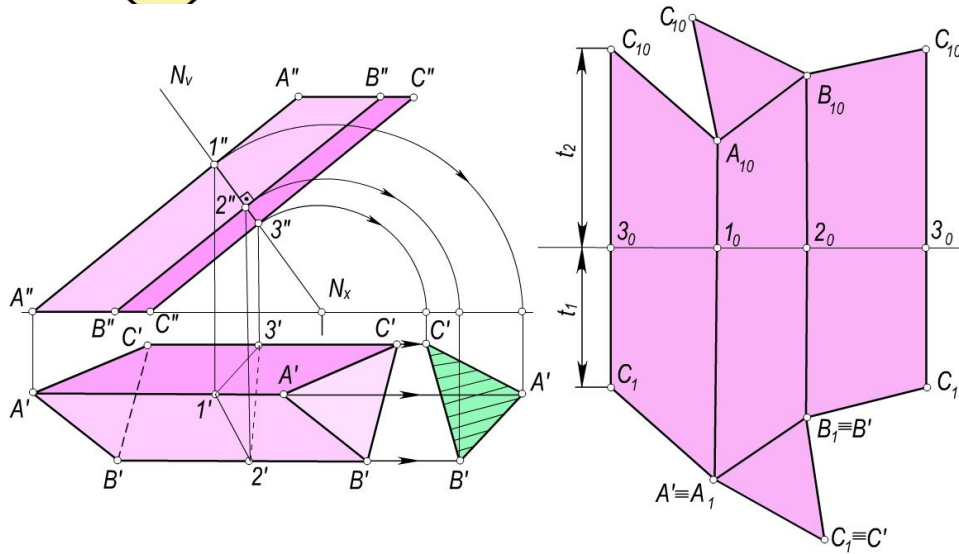
demakdir. Bunday yoqlarni yoyilmada yasash uchun tomonlari ya'ni qirralarining haqiqiy uzunliklari bo'lishi kerak. Agar ularning haqiqiy uzunliklari chizmada bo'lmasa, ularni turli usullar bilan yasash mumkin.

1-Misol: Asosi N tekislikda yotgan uchburchakli to'g'ri prizmaning yoyilmasini yasash kerak bo'lsin (10.1,a,b-rasm). Bu prizmaning yon qirralari frontal proyeksiyada, asosidagi qirralari esa gorizontaal proyeksiyada haqiqiy uzunlikda tasvirlanadi. Prizmaning yoyilmasini yasash uchun dastlab uning biror masalan, AA' qirrasi bo'ylab xayolan kesish kerak. So'ngra uchta to'g'ri to'rtburchaklar (yon yoqlar) yonma-yon qo'yib yasaladi. Bu to'rtburchaklarning balandligi prizmaning balandligiga (h) ga, asoslari esa mos ravishda $A'B'$, $B'S'$ va $S'A'$ kesmalarga teng bo'ladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga asoslari qo'shiladi va prizmaning to'la yoyilmasi hosil bo'ladi.

10.2,a,b-rasmlarda berilgan uch yoqli og'ma prizmaning yon qirralari frontal vaziyatda bo'lgani uchun ularning haqiqiy uzunliklari $A''A_1''$, $B''B_1''$ va $C''C_1''$ kesmalarga teng bo'ladi. Asoslari gorizontaal vaziyatda bo'lganligi uchun asos qirralarining haqiqiy qiymati $A'B'$, $B'A'$ va $S'A'$ kesmalarga teng bo'ladi. Bunday og'ma prizmaning yoyilmasini normal kesim usulida yasash qulay hisoblanadi. Buning uchun og'ma prizmaning yon qirralariga perpendikulyar qilib ixtiyoriy tekislik o'tkaziladi. Normal kesim 123 uchburchakning proyeksiyalari ($1'2'3'$, $1''2''3''$) ni hosil qilinadi. So'ngra normal kesimning haqiqiy kattaligi $\Delta 1_0 2_0 3_0$ aylantirish usulida yasaladi. Yoyilmani yasash uchun ixtiyoriy (bo'sh) joyda a_0 – yordamchi chiziqni ingichka qilib o'tkaziladi. Bu chiziqqa normal kesim tomonlarning haqiqiy uzunliklari biror (masalan, 3_0) nuqtadan boshlab o'lchab qo'yiladi (10.3,b-rasm). Hosil bo'lgan 3_0 , 1_0 , 2_0 va 3_0 nuqtalardan a_0 chiziqqa perpendikulyar vaziyatda chiziq o'tkaziladi. Bu chiziqlarga qirralarning haqiqiy uzunliklari o'lchab qo'yiladi. Chiziqda SS_1 qirraning o'lchab qo'yilishi ko'rsatilgan. Hosil bo'lgan qirralar uchlari o'zaro tutashtirib prizma yon sirtining yoyilmasi qo'shib to'la yoyilma yasaladi.



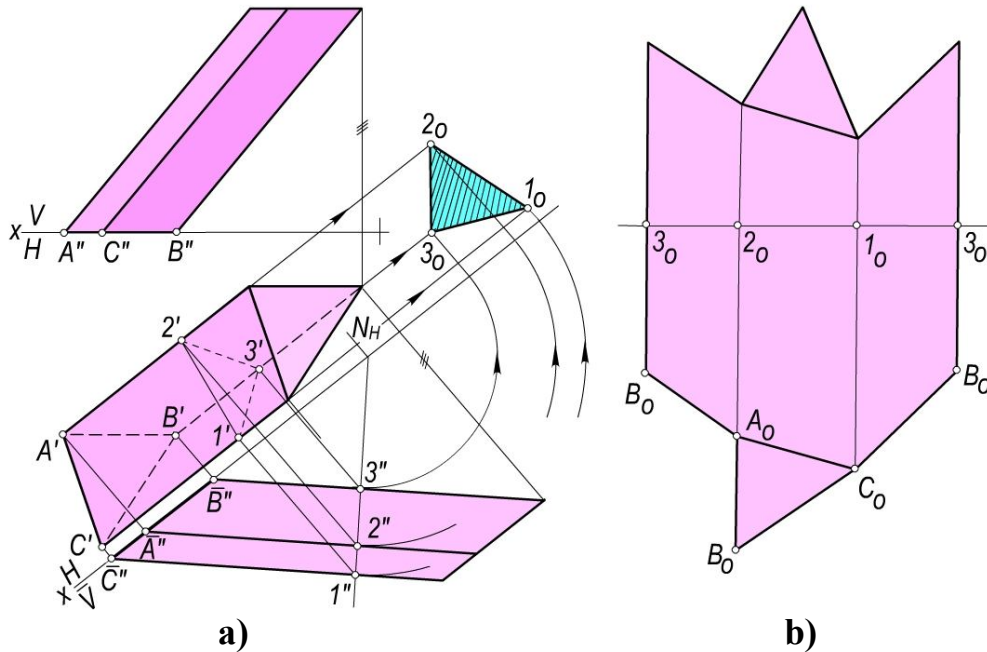
10.1-



rasm

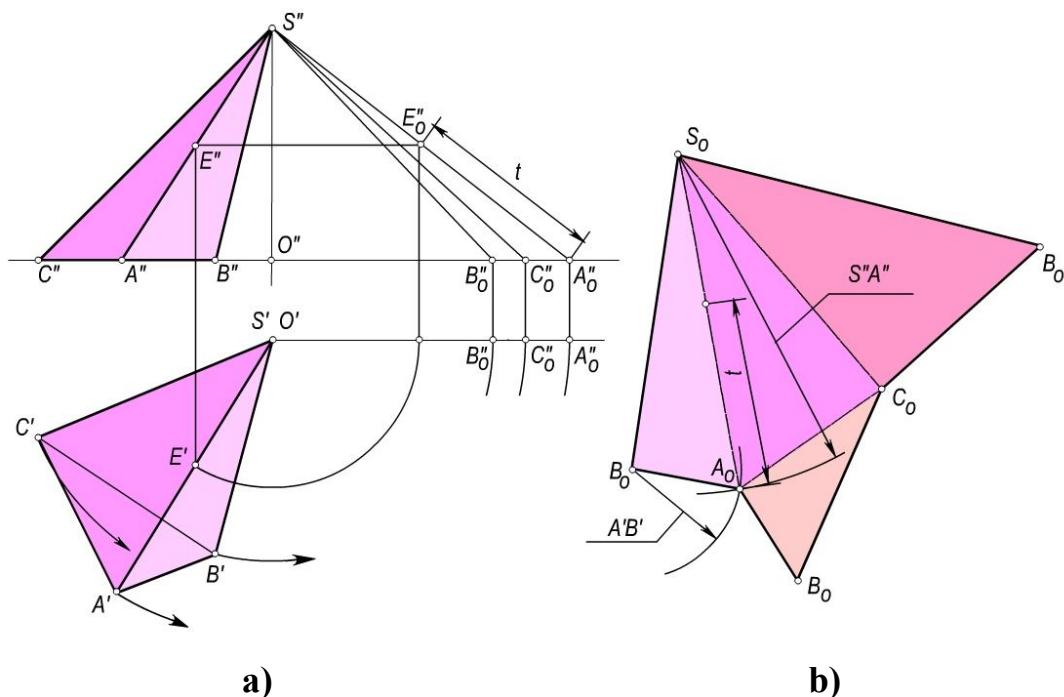
10.2-rasm

2-Misol 10.3,a-rasmda berilgan yon qirralari umumiy vaziyatda bo'lgan uch yoqli prizmaning yoyilmasini yasash talab etilsin. Mazkur masala yuqorida keltirilgan masala asosida yechilishini takidlash kerak. Buning uchun dastlab prizma qirralari va normal kesimining haqiqiy uzunliklarni yasash kerak bo'ladi. Buni esa proyeksiyalar tekisliklarini (prizma qirralariga paralel vaziyatda) almashtirish bilan amalga oshirish maqsadga muvofiq bo'ladi. Chizmadagi qolgan yasashlar va yoyilma (10.3,b-rasm) ning hosil qilinishi ortiqcha tushuntirishlarni talab qilmaydi.



10.3-rasm

3-Misol. Asosi N tekislikka tegishli bo'lgan uch yoqli og'ma piramidaning to'la yoyilmasi yasalsin (10.4,a-rasm).



10.4-rasm

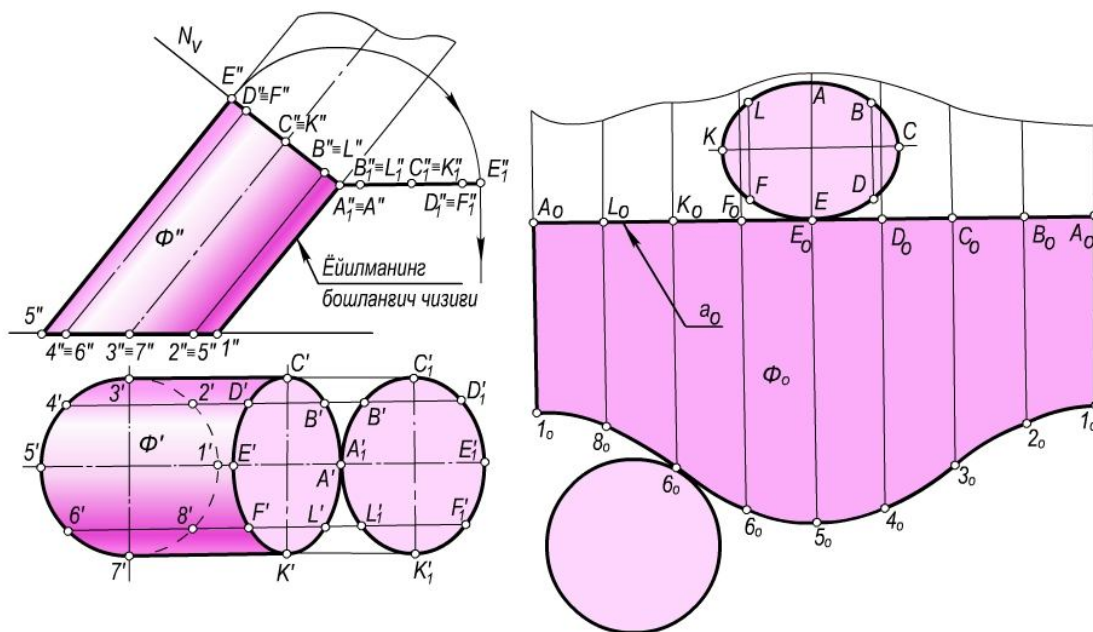
Dastlab piramida yon qirralarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Chizmada ular aylantirish usuli yordamida topilgan. Asos qirralarining haqiqiy uzunliklari $A'V'$, $V'S'$ va $S'A'$ kesmalarga teng bo'ladi. Piramida yon sirtining yoyilmasini yasash uchun chizmaning ixtiyoriy (bo'sh) joyida S_0 nuqta belgilab olinadi (10.4,b-rasm). Bu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa $S_0V_0qS''V_0''$ kesma o'lchab qo'yiladi (chunki piramida SB qirradi xayolan kesildi deb faraz qilinadi). So'ngra markazi V_0 nuqtada, radiusi $V_0A_0qB'A'$ bo'lgan va markazi S_0 nuqtada, radiusi $S_0A_0qS''A_0''$ bo'lgan ikkita yoy chiziladi. Bu yoylarning kesishuvidan A_0 nuqta hosil bo'ladi. $S_0V_0A_0$ nuqtalar o'zaro tutashtirilib $\triangle AVS$ ning yoyilmadagi o'rni hosil qilinadi. Qolgan yon yoqlarning yoyilmalari ham shu tarzda yasaladi. Hosil bo'lgan yon sirtning yoyilmasiga piramida asosining yoyilmadagi o'rni qo'shilsa, piramida to'la sirtining yoyilmasi hosil bo'ladi.

15.3- §. Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasash

Silindrik sirtlarning yoyilmalarini yasashda normal kesim va dumalatish usullaridan foydalaniladi. Har ikkala usul bilan ham yoyilmani yasashda silindrik sirtni approksimatsiya qilib prizmatik sirtga keltiriladi va masala prizmaning yoyilmasini yasash kabi bajariladi.

Umuman biror silindrning yoyilmasini yasash uchun: silindr yoyilmasini yasash uchun kerakli yasovchilarning haqiqiy uzunliklari aniqlanadi; bu yasovchilar orasidagi asos yoqlarining haqiqiy uzunliklari topiladi;

10.5,a-rasmda yasovchilari frontal vaziyatda va asosi H tekislikda yotgan og'ma, elliptik silindir tasvirlangan. Bunday silindrning yoyilmasi (10.5,b-rasm) normal kesim usulida bajarilgan. Silindrik sirt prizmatik sirtga approksimatsiya qilinadi. Buning uchun silindr asosini ixtiyoriy bo'laklarga bo'linadi (rasmda 8 ta teng bo'lakka bo'lingan).

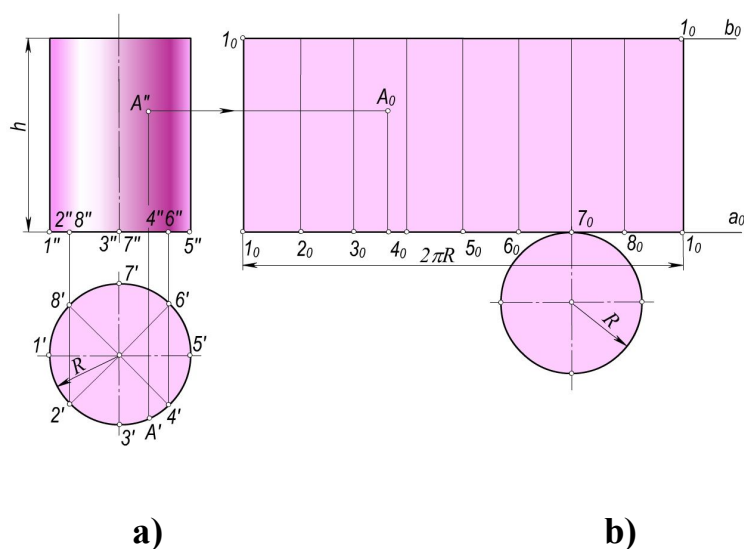


10.5-rasm

Bu holda silindrni n yoqli prizmagga almashtiriladi. Silindrning yasovchilariga perpendikulyar bo'lgan N tekislik bilan kesishish chizig'i yasaladi. Kesishish chizig'i, ya'ni normal kesimning haqiqiy kattaligi aylantirish usuli bilan topiladi.

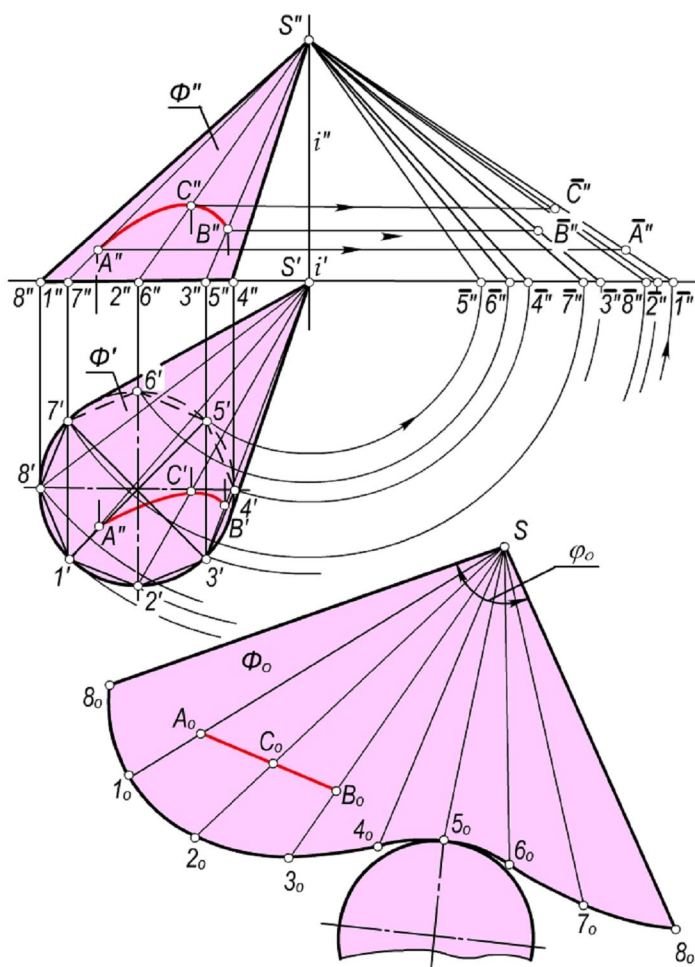
Asoslari aylanish o'qiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindr yon sirtining yoyilmasi to'g'ri to'rtburchakdan iborat bo'lib, bunday to'rtburchakning tomonlari $2\pi R$ va h_0 ga teng bo'ladi (10.6,a-rasm). Bu yerda R – asosning radiusi, h – silindrning balandligi. Asosi N tekisligiga tegishli va o'qi unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy silindrning to'la yoyilmasini yasash 10.6,b-rasmda ko'rsatilgan.

Bunda silindrning $1_0 2_0$ ($1' 2', 1'' 2''$) yasovchisi yoyilmaning boshlanish chizig'i deb olingan.



10.6-rasm

Ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziq o'tkazib, unga $[1_0 1_0] - 2\pi R$ kesma o'lchab qo'yiladi. Kesmaning har ikkala uchidan a_0 to'g'ri chiziqqa perpendikulyar chiqarilib, ularga $1_0 2_0 = l'' 2'' = h_0$, ya'ni silindrning balandligiga teng kesmalar o'lchab kuyiladi. Hosil bo'lgan $1_0 2_0 2_0 1_0$ to'g'ri to'rtburchak berilgan silindr yon sirtining yoyilmasi bo'lib, to'la yoyilmani yasash uchun $1_0 1_0$ va $2_0 2_0$ tomonlarga urinuvchi qilib silindrning asoslari chiziladi. Sirtga tegishli A nuqtaning yoyilmadagi o'rnini aniqlash rasmdan ko'rinib turibdi. Bunda $1' 3' = [1_0 3_0]$ va $3' A' = 3_0 A_0$ bo'ladi.



10.7-rasm

15.4-§. Konus sirtlarning yoyilmalarini yasash

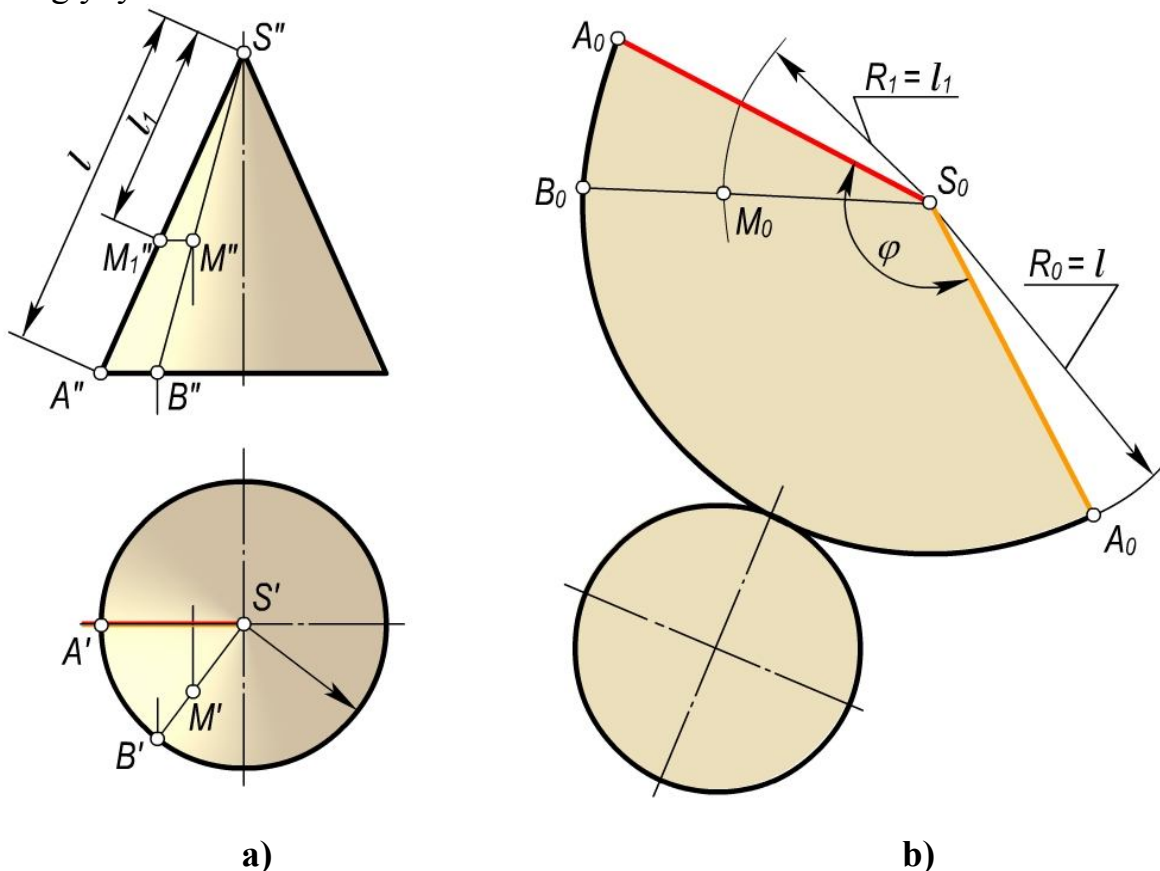
Umumiy holdagi konus sirtining yoyilmasi ham piramida yoyilmasini yasashdagidek, uchburchaklar usuli bilan bajariladi. Buning uchun konus o'ziga ichki chizilgan ko'pyoqlik piramidaga approksimatsiya qilinadi va shu piramidaning yoyilmasi konus sirtining yoyilmasi deb qabul qilinadi. Ichki chizilgan ko'pyoqlik piramidaning yoqlari qanchalik ko'p bo'lsa, konus sirtining yoyilmasi shunchalik aniq bo'ladi. 10.7,a-rasmda asosi N tekislikka tegishli F og'ma konus tasvirlangan. Bu konusning yoyilmasini yasashda uchburchaklar usulidan foydalanamiz. Konusni o'ziga ichki chizilgan piramidaga

approksimatsiyalaymiz. Konus yasovchilari (piramida qirralari)ning haqiqiy uzunliklarini yasash rasmda aylantirish usulida bajarilgan.

S_1 yasovchini yoyilmaning boshlanish chizig'i deb olamiz. Chizma qog'ozining bo'sh joyida ixtiyoriy S_0 nuqtani belgilaymiz (10.7,b-rasm). 10.7,a-rasmdan S_1 yasovchining haqiqiy uzunligi bo'lgan $S''1''_1$ kesmani o'lchab va uni S_0 nuqtadan chiqarilgai ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziqqa qo'yib, 1_0 nuqtani hosil qilamiz. So'ngra S_0 nuqtani markaz, $S''2''_1$ ni radius qilib yoy chizamiz. Markazi 1_0 nuqtada va radiusi $1'2'$ bo'lgan ikkinchi yoy chizamiz. Har ikkala yoylar o'zaro kesishib 2_0 nuqtani hosil qiladi. Yoyilmaning qolgan $3_0, 4_0, 5_0, \dots$ nuqtalari ham shu tartibda yasaladi. Hosil bo'lgan F_0 figura berilgan konus yon sirtining yoyilmasi bo'ladi. Uni konusning asosi – ellips bilan to'ldirib, to'la yoyilmani hosil qilamiz. F konus sirtidagi AB egri chiziqqa F_0 figurada A_0V_0 to'g'ri chiziq mos kelgan. Shuning uchun AB – konusning

geodezik chizig'i bo'ladi. Shuningdek, konusning hamma yasovchilari uning geodezik chizig'i bo'la oladi.

10.8,a,b-rasmda asosi H tekislikka tegishli va uni unga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri doiraviy F konus Monj chizmasida berilgan. Bunday konus yon sirtining yoyilmasi doira sektoridan iborat bo'ladi.



10.8-rasm

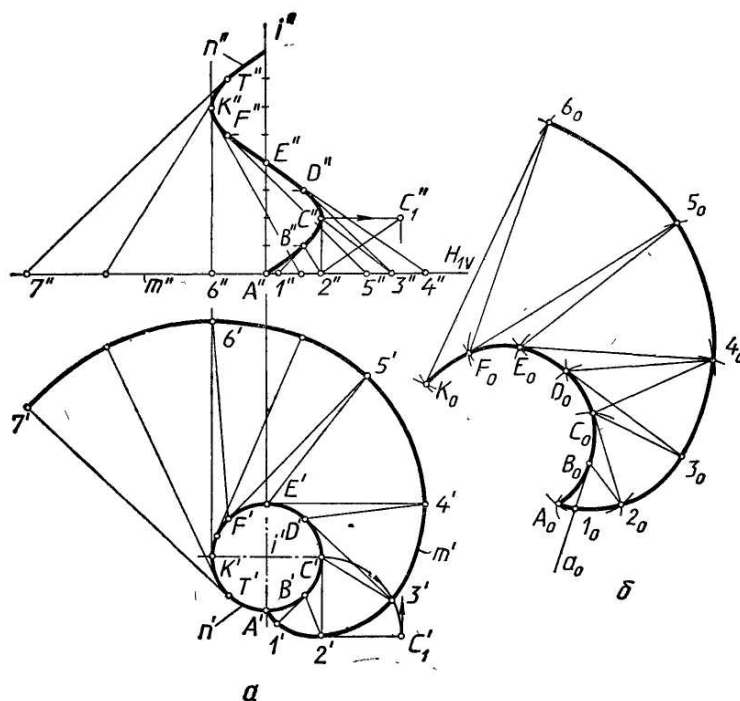
Doiraviy sektorning radiusi konus yasovchisining uzunligi l ga teng, markaziy burchagi $\omega = \frac{r}{l} 360^\circ$ bo'ladi. Bu yerda r – konus asosining radiusi, l – konusning yasovchisi.

15.5-§. Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash

Qaytish qirrali sirtlarning yoyilmalarini yasash ham konus sirtlarning yoyilmalarini yasashdagidek uchburchaklar usulida bajariladi. 10.9,a-rasmda yoyiladigan gelikoid va 10.9,b-rasmda uning yoyilmasini yasash ko'rsatilgan. qaytish qirrasi silindrik vint chizig'ida $A, B, S, \dots$ nuqtalarni belgilab olamiz. Ular orqali vint chizig'iga urinmalar o'tkazib, sirt yasovchilarini hosil qilamiz. Sirtning o'ziga perpendikulyar N_1 tekislik bilan kesamiz. Bu holda berilgan sirt n — vint chizig'i va m — evolventa bilan chegaralangan bo'ladi. Urinmalarning N_1 tekislik bilan kesishish nuqtalari $1, 2, 3, \dots$ ni belgilab olamiz. Sirtning qo'shni yasovchilari orasidagi bo'laklarining, ya'ni egri chiziqli to'rtburchaklarning bittadan diagonalini o'tkazib, ularni ikkita uchburchakka ajratamiz. Masalan, $BC21$ bo'lakning $B2$ diagonalini o'tkazib, uni $B12$ va $B2C$ uchburchaklarga ajratamiz. Agar $A, B, S, \dots$ nuqtalar orasidagi masofalar qisqa bo'lsa, uchburchaklarning egri chiziqli tomonlari

Shunday qilib, qaytish qirrali sirt ko'pyoqlik sirtga approksimatsiya qilinadi. Bu holda sirt yoyilmasini yasash ko'pyoqlik sirtining yoyilmasini yasash kabi bajariladi. Buning uchun uchburchaklarning uchala tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaladi. Shunday tomonlardan biri, masalan, C_2 ning haqiqiy uzunligini yasash 10.9,a-rasmda aylantirish usulida bajarilib ko'rsatilgan. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari bo'yicha yoyilmada uchburchaklar ketma-ket yasaladi. 10.9,b-rasmda yoyilma $A_0B_0l_0$ uchburchakni yasashdan boshlangan. Bu uchburchak quyidagicha yasaladi: ixtiyoriy a_0 to'g'ri chiziq o'tkazib, unga B_1 tomonning haqiqiy uzunligiga teng bo'lgan B_0l_0 kesma o'lchab qo'yiladi. Markazlari l_0 va B_0 nuqtalarda bo'lgan va radiuslari mos ravishda A_1 , AB tomonlarning haqiqiy uzunliklariga teng bo'lgan ikki aylana yoylari chiziladi. Bu yoylarning o'zaro kesishuvidan A_0 nuqta hosil bo'ladi.

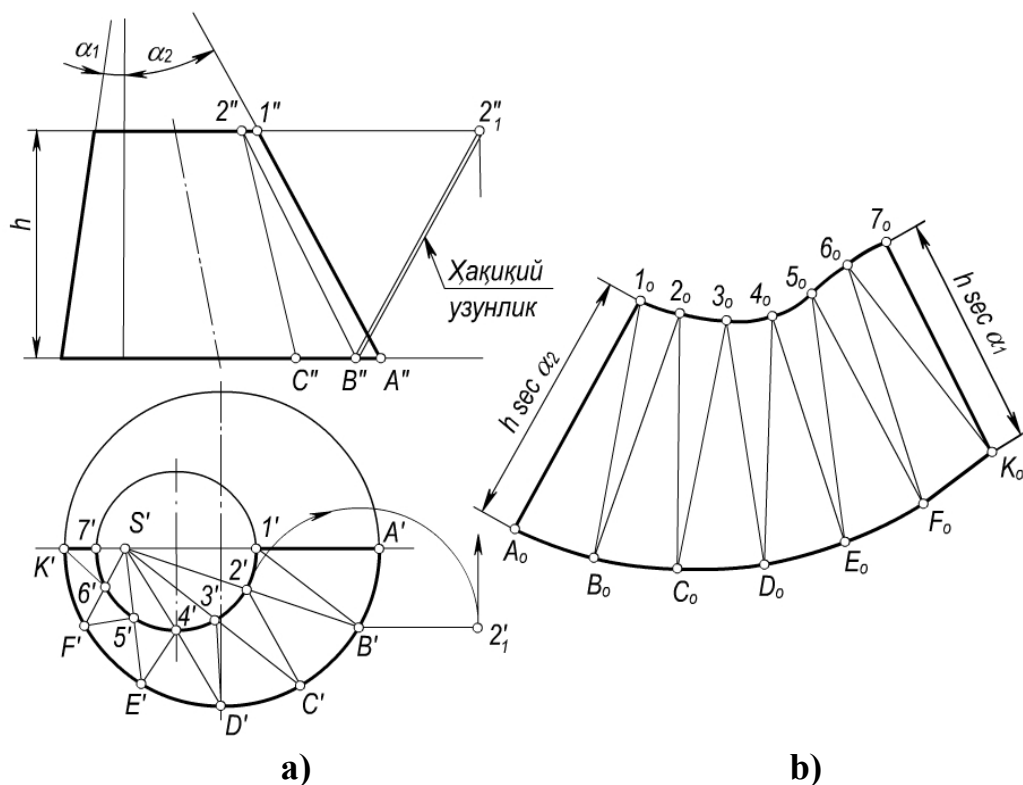
Qolgan uchburchaklarning haqiqiy kattaliklari ham shu tarzda bir-biriga yondashtirib yasaladi.



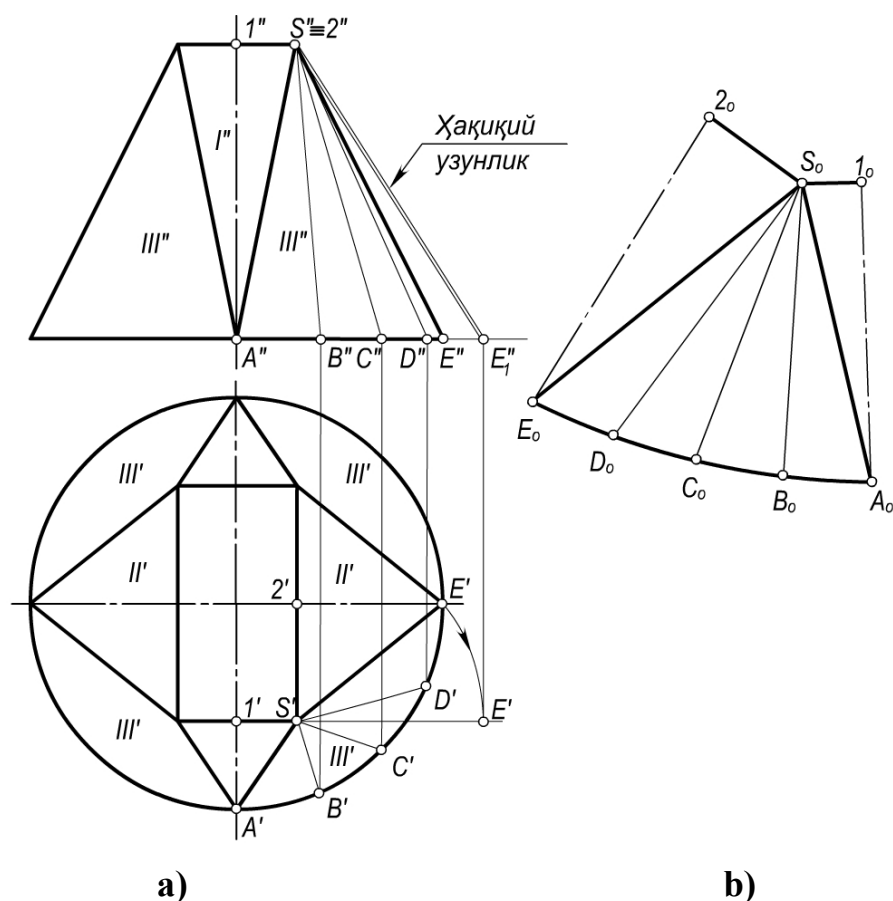
10.9-rasm

15.6-§. Yoyilmaydigan sirtlarning taqribiy yoyilmalarini yasash

Injenerlik amaliyotida ko'pgina hollarda yoyilmaydigan sirtlar yoki ularning bo'laklaridan ba'zi konstruksiyalarni yasashga to'g'ri keladi. Ammo ularning faqat taqribiy yoyilmalarini yasash mumkin. Taqribiy yoyilmalarni yasashning umumiy usuli shundan iboratki, berilgan sirt yoyiladigan sirtlardan biriga (ko'pyoqlik, silindrik yoki konussimon) approksimatsiya qilinadi. So'ngra atgroksimatsiya qilingan sirtning yoyilmasi u yoki bu usulda yasaladi. 10.10,a-rasmda Monj chizmasida og'ma konus tasvirlangan. Uning yoyilmasini yasash uchun berilgan konus sirti



10.10-rasm.



10.11-rasm

A1V, V12, V2S,... uchburchaklarga ajratiladi. Bu uchburchaklarning bittadan tomonlari konusning uchidan o'tadigan qilib olinadi. Uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklari yasaldi. Ulardan biri B2 ning haqiqiy uzunligi aylantirish usulida yasalgan. Yoyilmani hosil qiluvchi uchburchaklarni ularning uchala tomonlari

(haqiqiy uzunliklari) bo'yicha yasash qiyin emas. Bunda yoyilmadagi uchburchaklar tomonlarining o'zaro joylashuv tartibi proyeksiyadagi joylashuv tartibi bilan bir xil bo'lishi kerak. 10.10,b-rasmda og'ma konus yon sirti yoyilmasining yarmi ko'rsatilgan. 10.11,a-rasmda tasvirlangan sirt silindrik trubadan to'rtburchakli trubaga o'tish elementi bo'lib, u ikkita I-ko'rinishdagi, ikkita II-ko'rinishdagi tekis uchburchaklardan hamda to'rtta elliptik konus III sirtlardan tashkil topgan. Bunday sirtning yoyilmasini yasash uchun dastlab konus sirtlarni piramida sirtlariga approksimatsiya qilamiz (rasmda faqat bitta konus sirtining piramidaga approksimatsiya qilinishi ko'rsatilgan). Buning uchun konusning asosida bir necha A , B , C , D , E nuqtalarni belgilab olib, ularni konusning uchi bilan tutashtiramiz. Hosil bo'lgan uchburchaklar tomonlarining haqiqiy uzunliklarini yasaymiz. 10.11,a-rasmda SE tomonning haqiqiy uzunligini yasash ko'rsatilgan. Bu sirt yoyilmasini yasash uchun tomonlarning haqiqiy uzunliklari bo'yicha uchburchaklar yasaymiz.

Berilgan sirtning $S2EA1$ choragining yoyilmasini yasash 10.11,b-rasmda ko'rsatilgan. Qolgan choraklarining yoyilmasi ham yuqorida bayon qilinganidek yasaladi.

Nazorat savolari

1. Sirtning yoyilmasi deb nimaga aytiladi?
2. Ko'pyoqli sirtning yoyilmasi yasash uchun nimalar qilish kerak?
3. Qanday ko'pyoqlikning yoyilmasini normal kesim usulda yasash qulay hisoblanadi?
4. Yoyilmani yasashda uchburchaklar usulining mohiyatini tushuntirib bering?
5. Silindrik sirtlarning yoyilmalari qanday yasaladi?
6. Konussimon sirtlarning yoyilmalari yasashni tushuntirib berin?
7. Yoyilmaydigan sirtlarning yoyilmalari qanday yasaladi?

16- Ma'ruza – 2 soat **Sirtlarning o'zaro kesishishi**

Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash usullari

Sirtlarni o'zaro kesishish chizig'ini kesuvchi tekisliklar dastasi yordamida yasash

Tayanch iboralar va tushunchalar yo'q

12.6. O'qlari bir tekislikda yotmaydigan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi.

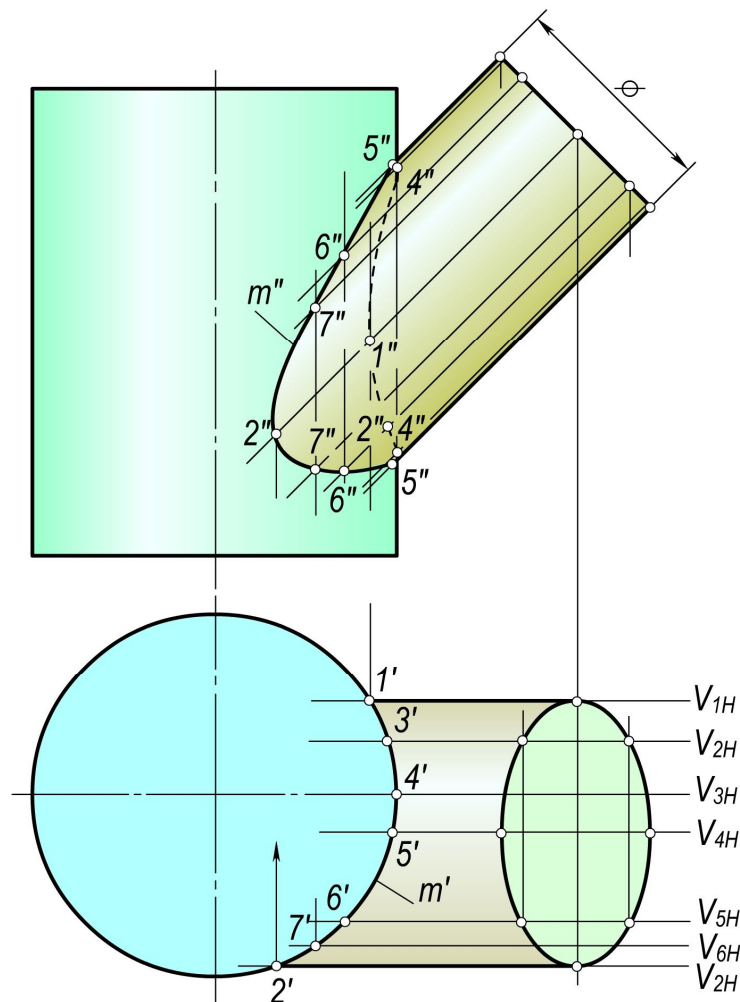
Parallel kesuvchi tekisliklar usuli

Agar ikki kesishuvchi sirtlarning o'qlari o'zaro kesishmasdan, ulardan biri biror proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar bo'lib, ikkinchi sirtning o'qi ikkinchi proyeksiyalar tekisligiga perpendikulyar yoki parallel bo'lsa, u holda bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasashda parallel kesuvchi tekisliklar usulidan foydalaniladi. Parallel kesuvchi tekisliklar proyeksiyalar tekisliklaridan birortasiga parallel qilib olinadi.

Parallel kesuvchi tekisliklar usulining qulayligi shundaki, bunda yordamchi kesuvchi tekisliklar kesuvchi sirtlarni aylanalar va to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi. Parallel kesuvchi tekisliklar usuli bilan yechiladigan bir necha sirtlarning o'zaro kesishuvini ko'rib chiqamiz.

Ikki silindrning o'zaro kesishishi.

12.16–rasmda o'zaro kesishuvchi ikki silindrdan birining o'qi gorizontal proyeksiyalovchi, ikkinchisining o'qi frontal proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan holda tasvirlangan. Bularning kesishish chizig'ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklar V tekislikka parallel bo'ladi. Ularning o'zaro vaziyati chizmaning gorizontal proyeksiyasidan ko'rinib turibdi. Kesishish chizig'ining xarakterli 1 ($1'$, $1''$), 2 ($2'$, $2''$), 4 ($4'$, $4''$), 5 ($5'$, $5''$) nuqtalari yordamchi kesuvchi frontal V_{1H} , V_{2H} , V_{3H} ,... tekisliklar yordamida hosil qilingan. Bunda yordamchi parallel tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Bir tekislikda yotuvchi ikki silindrga mansub bo'lgan yasovchilarning kesishish nuqtalari ikkala sirt uchun umumiy bo'lib, yasaladigan m (m' , m'') egri chiziqning nuqtalari bo'ladi. m egri chiziqning qolgan nuqtalari V_{1H} va V_{2H} tekisliklar orasida yordamchi kesuvchi tekisliklar o'tkazish bilan yasalgan. Kesishish chizig'ining frontal silindrning V_4 simmetriya tekisligidan kuzatuvchi tomondagi nuqtalari ko'rinadi, uning orqasidagi nuqtalari esa ko'rinmaydi.

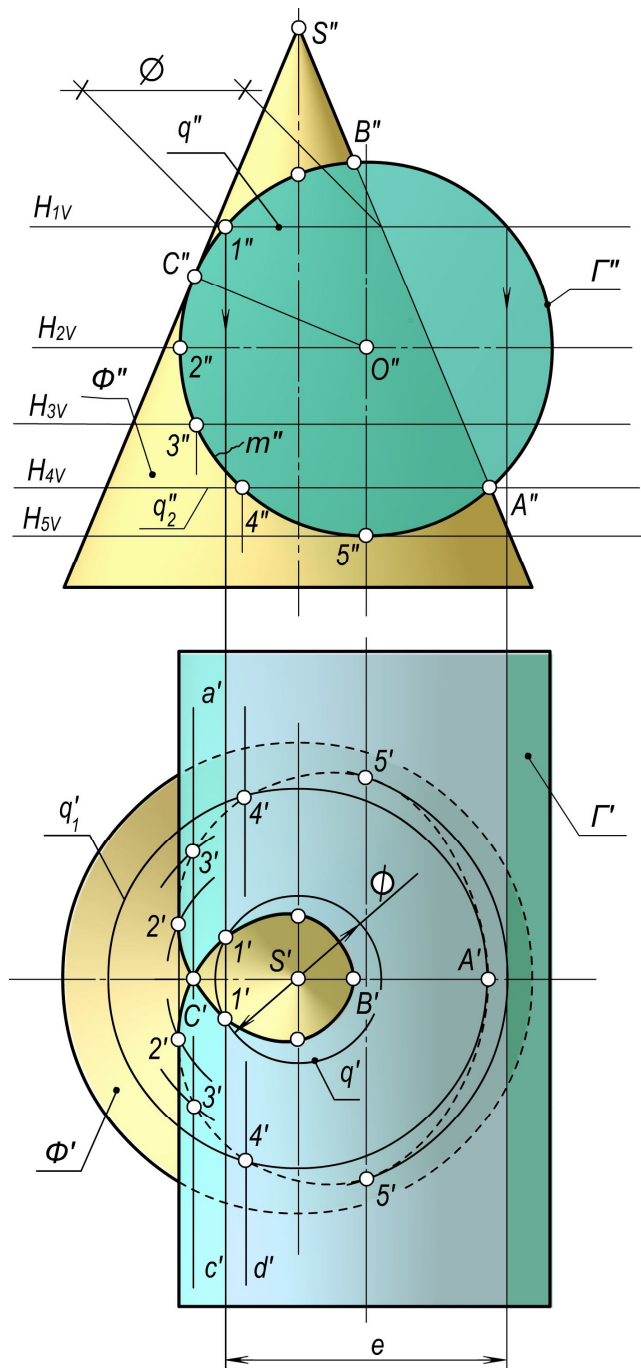


12.16-rasm

O'qlari uchramas va H yoki V ga perpendikulyar bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishish chizig'ini yasash. Kesuvchi sirtlardan 12.17-rasmda doiraviy silindr o'qi V tekislikka va doiraviy konus o'qi H tekislikka perpendikulyar bo'lganda yordamchi parallel kesuvchi tekisliklar gorizontaal proyeksiya tekisligi bo'ladi. Bu tekisliklar konusni aylanalar va silindrni yasovchilari bo'yicha kesadi. Hosil bo'lgan aylana va yasovchilar o'zaro kesishib, kesishish chizig'ining nuqtalarini hosil qiladi.

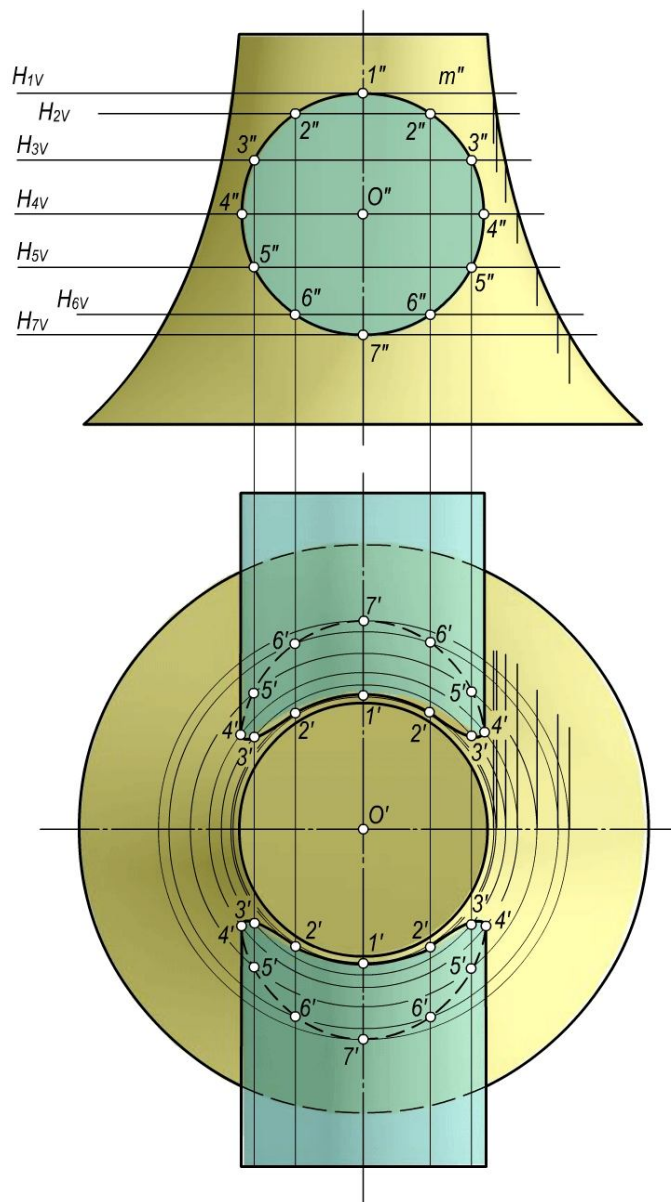
Kesishish chizig'ining $A (A', A'')$, $B (B', B'')$, $C (C', C'')$, nuqtalari xarakterli nuqtalardir. Ular bevosita sirtlar frontal ocherklarining kesishish nuqtalarida belgilanadi. Qolgan nuqtalar kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Masalan, 1,2,3,4 nuqtalar $H_1 \parallel H, \dots$ va $H_4 \parallel H$ tekisliklar o'tkazib, gorizontaal proyeksiyadagi q va q_1 aylanalarining va a, b, c va d to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan to'rtburchak kesimlarining kesishuvidan hosil qilingan. qolgan nuqtalar ham shu tartibda hosil qilinadi.

2 ($2', 2''$) xarakterli nuqta silindrning H_2 simmetriya tekisligini o'tkazish yo'li bilan topiladi. Kesishish chizig'ining ko'rinadigan va ko'rinmaydigan nuqtalari ham H_2 simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.



12.17-rasm

12.18-rasmda o'qlari kesishgan o'zaro perpendikulyar bo'lgan aylanma silindr bilan tor sirti bo'lagining kesishish chizig'ini yasash tasvirlangan. Kesishish chizig'ini yasash H_{1V} , H_{2V} , H_{3V} ,... gorizontall kesuvchi tekisliklar o'tkazish bilan yasalgan. Bunday holda sirlarning kesishish egri chizig'i ikkita simmetrik bo'lakdan iborat bo'ladi. 1, 4, 7 xarakterli nuqtalarni yasash H_{1V} , H_{4V} va H_{7V} tekisliklar yordamida yasalgan. Egri chiziqlarning ko'rinadigan va ko'rinmaydigan qismlari H_4 simmetriya tekisligi yordamida aniqlanadi.

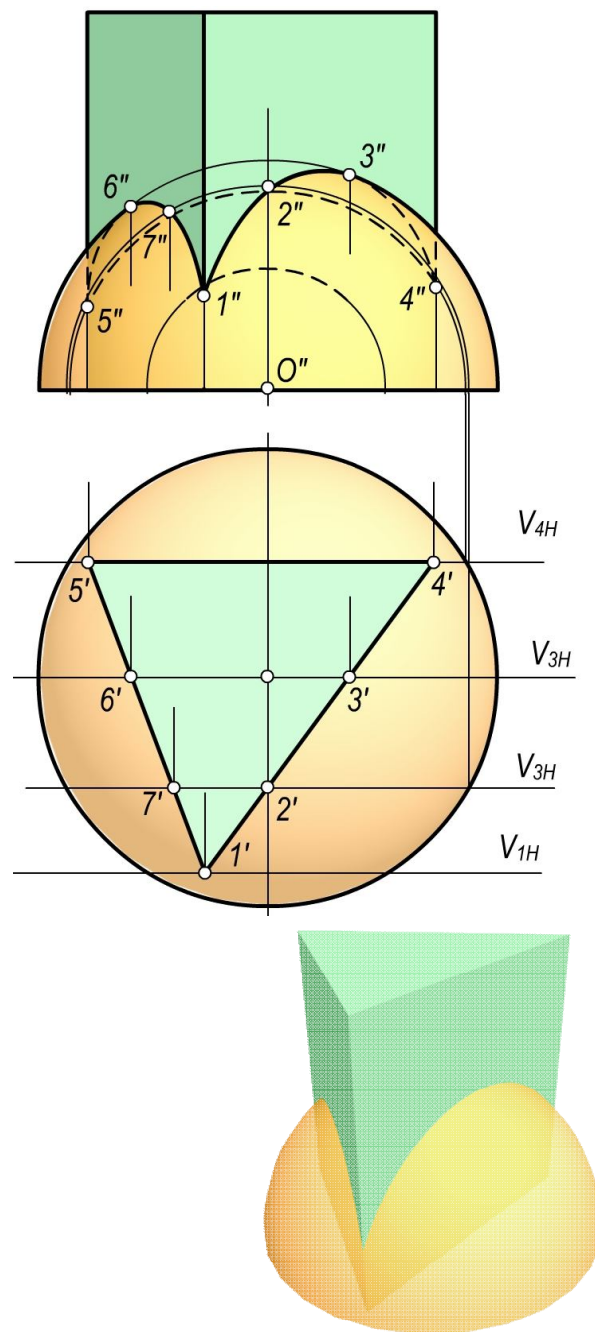


12.18-rasm.

Yarim sfera bilan uchburchakli to'g'ri prizmaning o'zaro kesishishi.

Sfera bilan prizma kesishganda bo'laklari aylana yo'ylaridan iborat bo'lgan fazoviy egri chiziqli hosil bo'ladi. 12.19-rasmda yarim sfera va qirralari H tekislikka perpendikulyar bo'lgan uchburchakli prizma tasvirlangan. Yordamchi kesuvchi tekisliklar frontal tekisliklardan iborat bo'ladi. Bu tekisliklar sferani parallellari bo'yicha, prizmani esa yon qirralariga parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi. Ularning o'zaro kesishuvidan har ikkala sirtga tegishli nuqtalar hosil bo'ladi.

Rasmdan ko'rinib turibdiki, prizma sirti sharni uchta aylanalar bo'yicha kesadi. Ularning V dagi proyeksiyalari ellipslar va aylana bo'lib proyeksiyalanadi. Shar va prizma sirti o'zaro kesishish chizig'ining xarakterli 1,4,5,6 va 3 nuqtalari frontal V_1 , V_4 va V_3 tekisliklar yordamida yasalanadi. V_3 tekislik sharning simmetriya tekisligidir, undagi 3 va 6 nuqtalar frontal proyeksiyada kesishish chizig'ining ko'rinadigan qismini ajratib turuvchi nuqtalardir. Kolgan yasashlar rasmdan ko'rinib turibdi.



12.19-rasm.

O'qlari o'zaro parallel bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi.

12.20–shaklda o'qlari parallel bo'lgan F siqiq aylanma ellipsoid bilan G aylanish sirti tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari H tekisligiga perpendikulyar bo'ladi.

Sirtlarning fazoda bunday berilishida yordamchi kesuvchi tekisliklarni berilgan sirtlarning o'qlariga perpendikulyar qilib o'tkaziladi $1(1', 1'')$ va $7(7', 7'')$ nuqtalari belgilanadi. qolgan nuqtalar $H_2, H_3...$ kesuvchi tekisliklar yordamida yasaladi. Kesuvchi gorizontaal yordamchi tekisliklar berilgan ikkala aylanish sirtini aylanalar bo'yicha kesadi. Kesimlarda hosil bo'lgan bu aylanalar o'zaro kesishib, ikkala sirtlarga oid bo'lgan kesishish chizig'ining nuqtalarini beradi. Masalan, 12.21-rasmda $1(1', 1'')$, $2_1(2_1', 2_1'')$ nuqtalarni hosil qilishda H_{2V} tekisligi o'tkazilgan. Bu tekislik sirtlarning birini $l_1(l_1', l_1'')$ ikkinchisini $n_1(n_1', n_1'')$ aylanalar bo'yicha kesgan. Hosil bo'lgan l_2 va n_2 aylanalar o'zaro kesishib, $2(2', 2'')$ va $2_1(2_1', 2_1'')$ nuqtani hosil qiladi, ya'ni gorizontaal proyeksiyalar tekisligidagi l_2' va n_2' aylanalarning kesishidan 2 va 2^1 nuqtalar hosil bo'ladi so'ngra ularning V dagi proyeksiyalari yasaladi.

12.7. Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash.

Kesuvchi tekisliklar usuli

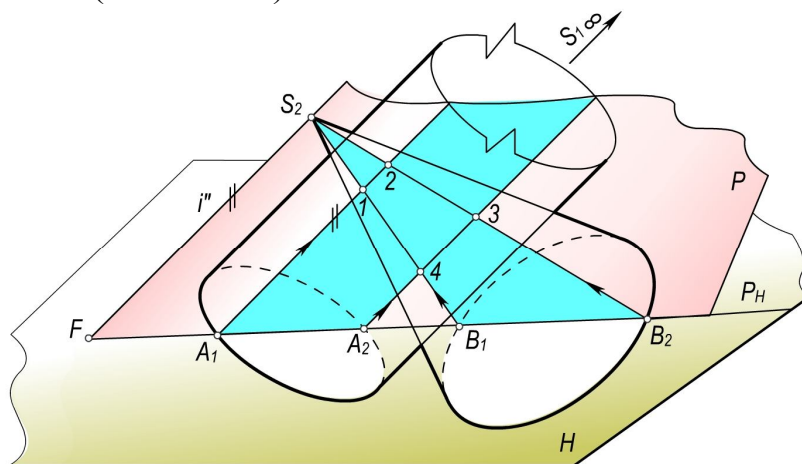
Konus bilan piramidaning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash.

Konus bilan piramida sirtlari fazoviy siniq egri chiziq hosil qilib kesishadi. Kesishish chizig'ining sinish nuqtalari piramida qirralarining konus sirti bilan kesishgan nuqtalardir. Kesishish chizig'ining tekis egri chiziqlari piramida yoqlarining konus sirti bilan kesishgan chiziqlari bo'ladi. Konus bilan piramida sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi umuman olganda, konus bilan konusning kesishish chizig'ini yasash algoritmidan farq qilmaydi. Faqat piramida qirralarining konus sirti bilan kesishgan(sinish) nuqtalarini birinchi novbatda yasash lozim bo'ladi.

Konus bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash.

Konus bilan silindr sirtlari o'zaro kesishganda fazoviy, xususiy hollarda esa tekis egri chiziq hosil bo'ladi.

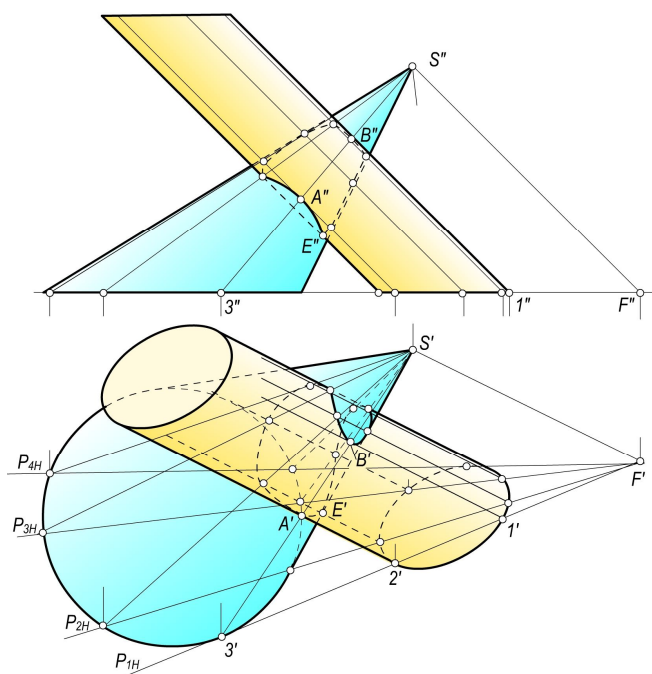
Asosi bir tekislikda yotuvchi konus va silindr sirtlarini kesishish chizig'ini yasash uchun **konusning S_2 uchidan silindr yasovchilariga *parallel*** qilib kesuvchi tekisliklar o'tkaziladi (12.12-rasm).



12.12-rasm

Bunda istalgan P tekislik konusni $S_2B_1B_2$ uchburchak va silindrni esa A_1, A_2 nuqtalardan o'tuvchi yasovchilari bo'yicha kesishishi natijasida kesishish chizig'ining 1, 2, 3, 4 nuqtalari hosil bo'ladi.

12.13-rasmda asoslari H tekislikda yotgan konus bilan silindr sirtlarining kesishish chizig'ini yasash chizmada ko'rsatilgan. Buning uchun sirtlarga urinuvchi yordamchi kesuvchi $P_1, \dots, P_4$ tekisliklarning $P_{1H}, \dots, P_{4H}$ izlari yasaladi.



12.13-rasm

Konus bilan silindrning xarakterli nuqtalarini aniqlash konus bilan konusning o'zaro kesishganidek bajariladi.

Kesishish chizig'ining oraliq nuqtalari P_1 va P_4 tekisliklar orasidagi yordamchi tekisliklar orqali yasaladi. Hosil bo'lgan barcha kesishish nuqtalari ketma-ket silliq egri chiziq bilan tutashtiriladi.

Konus bilan prizmaning o'zaro kesishish chizig'ini yasash.

Konus bilan prizma sirti o'zaro kesishib, fazoviy siniq egri chiziq hosil qiladi. Bu kesishish chizig'ining sinish nuqtalari prizma qirralarining konus sirti bilan kesishish nuqtalaridir. Kesishish chizig'ining tekis egri chiziqli bo'laklari prizma yoqlarining konus sirti bilan kesishuvidan hosil bo'ladi.

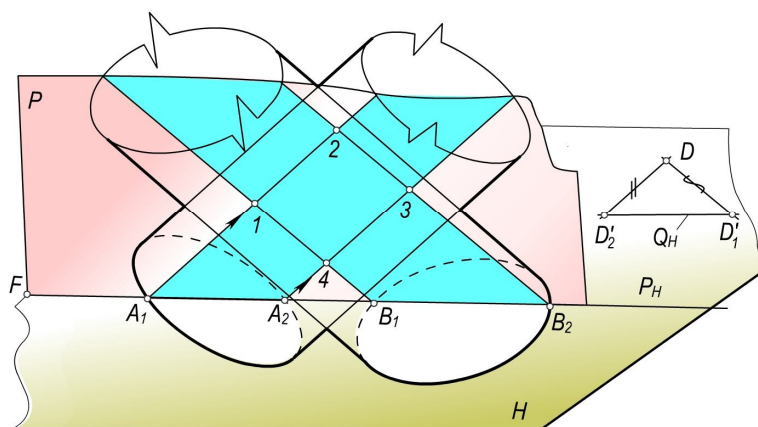
Konus bilan prizmaning kesishish chizig'ini tekislik bilan sirtning kesishish chizig'ini yasash algoritmini bir necha marta qo'llash bilan aniqlash ham mumkin. Umuman, konus bilan prizmaning kesishish chizig'ini yasash algoritmi konus bilan silindrning kesishish chizig'ini yasash algoritmidan farq qilmaydi, faqat prizma qirralarining konus sirti bilan kesishish nuqtalarini albatta yasash kerak bo'ladi.

Silindr bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash.

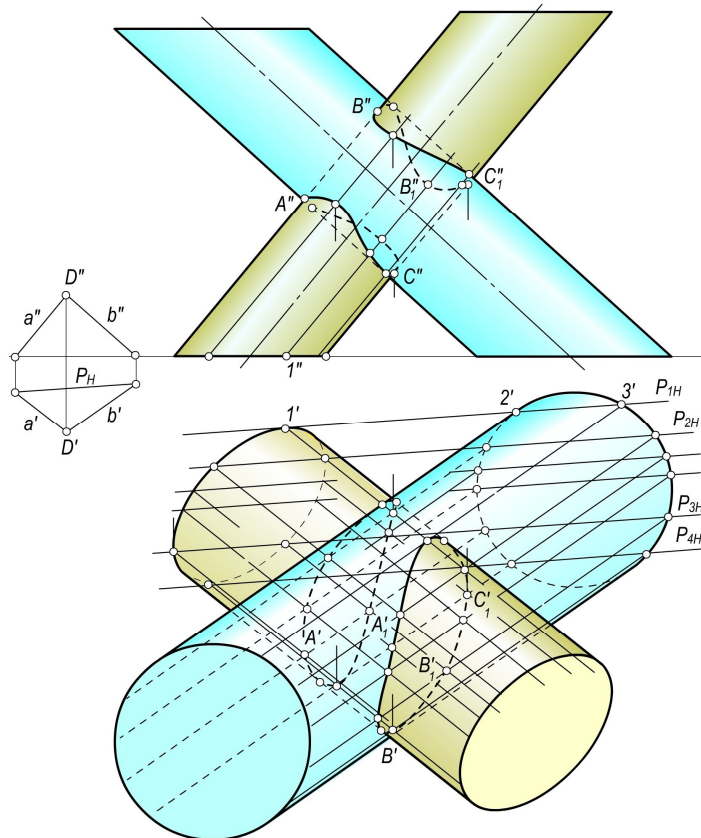
Silindr bilan silindr sirti o'zaro kesishib, fazoviy egri chiziq xosil qiladi. Bunda yordamchi tekisliklar berilgan silindrlar yasovchilariga parallel holda o'tkaziladi

Berilgan silindrlarning o'zaro kesishish chizig'ining 1,2,3,4 nuqtalarini yasash 12.14-rasmدا ko'rsatilgan. Bu nuqtalar Q tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy yordamchi va ikki silindrni kesuvchi P tekislikni o'tkazish bilan yasalgan.

12.15-rasmdagi chizmada asoslari H tekislikda yotgan ikki silindrning kesishish chizig'ini yasash ko'rsatilgan. Silindr sirtlarining biriga urinib, ikkinchisini kesuvchi yordamchi $P_1, \dots, P_4$ tekisliklarning gorizontal $P_{1H}, \dots, P_{4H}$ izlari o'tkaziladi. Bunda $P_{1H} \parallel P_{4H} \parallel Q_H$ bo'ladi.



12.14-rasm



12.15-rasm.

Kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari xuddi konus bilan konusning yoki konus bilan silindr kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari kabi topiladi. Bu $A(A', A'')$, $B(B', B'')$, $C(C', C'')$ nuqtalarning gorizontal proyeksiyalari P_{2H} , $P_{3H}...$, tekislik izlari yordamida yasaladi.

Kesishish chizig'ining boshqa oraliq nuqtalari P parallel yordamchi tekisliklar o'tkazish bilan yasaladi. Hosil bo'lgan barcha kesishish nuqtalari o'zaro silliq egri chiziq bilan birlashtiriladi.

Prizma bilan silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi yuqorida bayon etilgan ketma-ketlikda bajariladi.

Nazorat savollari

1. Ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'i deb nimaga aytiladi?
2. Ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi nimadan ibrat?
3. Yordamchi sferalar usulining mohiyatini tushuntirib bering?
4. Qanday hollarda ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yordamchi sferalar yordamida yasash mumkin?
5. Qaysi hollarda konsentrik sferalar va ekssentrik sferalar qo'llaniladi?
6. Sferalar usulining xususiy xollarni izohlab bering?

17-ma'ruza – 2 soat
Sirtlarning o'zaro kesishishi

Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ini yasash usullari
Sirtlarning o'zaro kesishish chizig'ini yordamchi sferik sirtlar yordamida yasash

Tayanch iboralar va tushunchalar

Yordamchi kesishuvchi – sirtlar, kesishuv chizig'i, kesishuvchi tekislik, kesuvchi tekisliklar dastasi, konsentrik sfera sirtlari usuli

12.1. Umumiy ma'lumotlar

Muxandislik faoliyatida sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini aniq yasash va ularni sirt yoyilmasida aniq tasvirlay bilish muxim ahamiyat kasb etadi. Mazkur ma'ruzada turli shakldagi sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasash usullari bayon qilinadi.

Ta'rif. Berilgan sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalardan tashkil topgan chiziq bu ikki sirtning **o'zaro kesishish** chizig'i deyiladi.

Ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'i umumiy holda fazoviy egri chiziq bo'ladi. Kesishuvchi sirtlarning biri egri chiziqli ikkinchisi ko'pyoqlik sirt bo'lsa, u holda ularning kesishish chizig'i tekis egri chiziqlar bo'laklarining yig'indisidan iborat bo'ladi.

Kesishuvchi sirtlarning ikkalasi ham ko'pyoqlik sirt bo'lsa, ularning kesishish chizig'i fazoviy yoki tekis sinq chiziq bo'ladi.

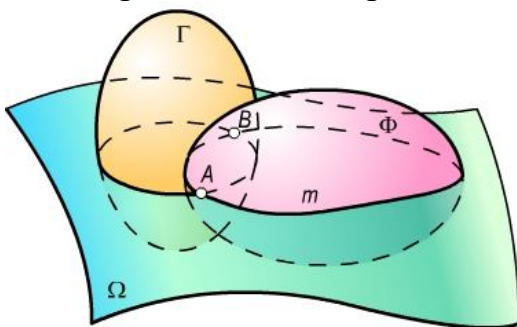
12.2. Sirtlar kesishish chizig'ini yasashning umumiy algoritmi

Ikki sirtning kesishish chizig'i, odatda kesishish chizig'ining nuqtalarini ketma-ket yasash yo'li bilan hosil qilinadi. Kesishish chizig'ining nuqtalari yordamchi kesuvchi sirtlar yordamida yasaladi. Yordamchi kesuvchi sirtlar sifatida tekislik, sfera, konus va silindr sirtlarini olish mumkin. Yordamchi kesuvchi sirtlar shunday tanlanishi kerakki, ular berilgan sirtlar bilan kesishganda kesimda to'g'ri chiziq yoki aylanalar hosil bo'lsin.

Yordamchi kesuvchi sirtlar usulida yasash algoritmi quyidagicha bo'ladi (12.1-rasm):

- Berilgan ikki G va F sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalari yasaladi. Bu nuqtalar o'z navbatida yordamchi kesuvchi sirtlarni o'tkazish chegarasini aniqlaydi.
- Yordamchi kesuvchi Ω sirt o'tkaziladi. Bunda G va Ω sirtlar o'zaro kesishib n chiziqni, F sirt bilan Ω sirt kesishib m chiziqni hosil qiladi.
- n va m chiziqni kesishib $A, B, \dots$ nuqtalarni hosil qiladi.

Bu nuqtalar berilgan F va G sirtlar kesishish chizig'ining nuqtalaridir. Bunday yasash algoritmi yetarli marta takrorlansa, kesishish chizig'ini yasash uchun yetarli nuqtalari hosil qilinadi. Bu nuqtalar ma'lum tartibda lekalo yordamida silliq tutashtirilsa, berilgan ikki sirtning kesishish chizig'i hosil bo'ladi.

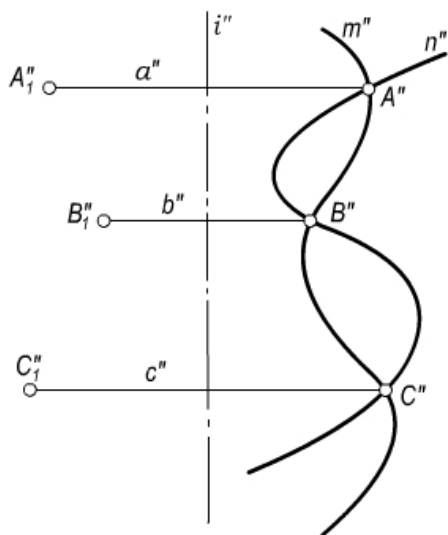


12.1-rasm

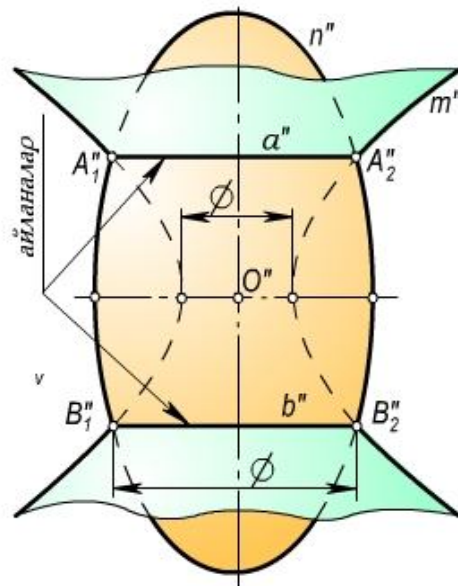
12.3. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlarining o'zaro kesishishi

Teorema. Umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanish sirtlari chekli sondagi aylanalar bo'yicha kesishadi.

12.2-rasmda umumiy o'qqa ega bo'lgan aylanma ellipsoid va bir pallali giperboloidlarning frontal proyeksiyadagi kesishish chiziqlari a'' va b'' aylanalar ko'rsatilgan. 12.3 va 12.4-rasmlarda sferaning doiraviy silindr, doiraviy konus va i o'qli aylanma sirtlari bilan kesishish chiziqlari tasvirlangan. Bu sirtlarning o'qlari proyeksiyalar tekisliklarining biriga perpendikulyar qilib olingan.



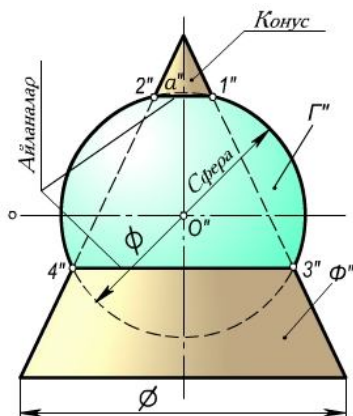
12.2-rasm



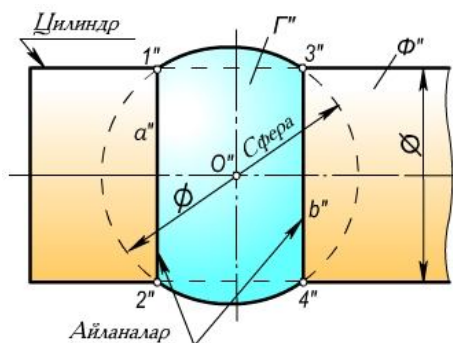
12.3-rasm

Yuqoridagi teoremadan quyidagi xulosani chiqarish mumkin:

Markazi aylanish sirtining o'qida bo'lgan sfera shu sirt bilan aylanalar buyicha kesishadi. (12.4 ,12.5 va 12.6-rasmlar).



12.4-rasm



12.5-rasm

12.6-rasm.

12.4. O'qlari o'zaro kesishadigan aylanish sirtlarining kesishuvi.

Yordamchi sferalar usuli

Ma'lumki, markazi biror aylanish sirtining o'qida bo'lgan sfera bu sirtni aylanalar bo'yicha kesadi. Bu aylanalar proyeksiyalar tekisliklarining biriga to'g'ri chiziq kesmasi shaklida, ikkinchisiga aylana yoki ellips ko'rinishida proyeksiyalanadi. Aylanish sirtlari bilan sferaning o'zaro kesishish chizig'i haqidagi bu muhim xulosa ikkita aylanish sirtining o'zaro kesishish chiziqlarini yasashga imkon beradi.

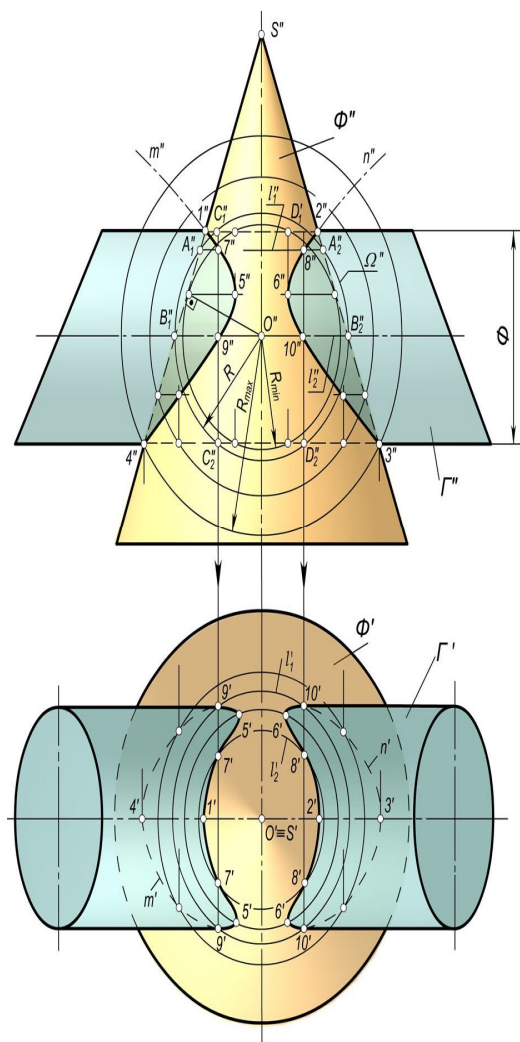
Yordamchi kesuvchi sferalar to'plami konsentrik yoki eksentrik ko'rinishlarda bo'ladi. Kesishuvchi sirtlarning xarakteriga qarab, yordamchi kesuvchi sferalarning biror usuli ishlatiladi.

Konsentrik sferalar usuli

Ikki aylanish sirtining o'qlari umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu o'qlar bitta tekislikni tashkil qiladi. Bu tekislik har ikkala sirt uchun simmetriya tekisligi bo'ladi.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalar usulini quyidagi shartlar qanoatlantirgan hollardagina qo'llash mumkin:

- o'zaro kesishuvchi sirtlar aylanish sirtlari bo'lishi shart;
- aylanish sirtlarining o'qlari o'zaro kesishgan bo'lishi kerak;

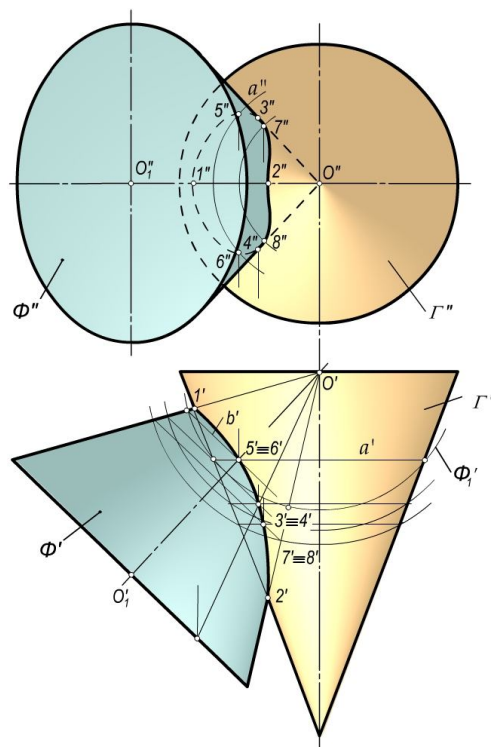


12.7-rasm.

Yordamchi kesuvchi konsentrik sferalarning markazi sirtlarning o'qlari kesishgan nuqtasida bo'ladi. 12.7-rasmda o'qlari umumiy $O(O', O'')$ nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi V ga parallel bo'lgan $F(F', F'')$ aylanma konus va $G(G', G'')$ silindr sirtlari berilgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun O'' nuqtani markaz qilib, R radiusli $\Omega(\Omega'')$ sfera chiziladi. Ω sfera F sirt bilan $l_1(l_1', l_1'')$ va $l_2(l_2', l_2'')$ aylanalar bo'yicha kesishadi. Rasmda bu aylanalarning V tekislikdagi proyeksiyalari $A_1'' A_2''$ va $B_1'' B_2''$ kesmalar tarzida tasvirlangan. Shuningdek, bu sfera G sirt bilan umumiy o'qqa ega bo'lgani uchun $C_1' C_2''$ va $D_1'' D_2''$ kesmalar ko'rinishidagi aylanalar bo'yicha kesishadi. Bu aylanalarning o'zaro kesishish 7'', 8'', 9'' va 10'' nuqtalari har ikkala F va G sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarning frontal proyeksiyalari bo'ladi. Shuningdek O'' nuqtani markaz qilib, konsentrik sferalar chiziladi, ular yordamida F va G sirtlar uchun umumiy bo'lgan nuqtalarini yasash mumkin. Bu nuqtalarning geometrik o'rni bo'lgan m'' va n'' egri chiziqlar F va G sirtlarning kesishish chizig'i bo'ladi.

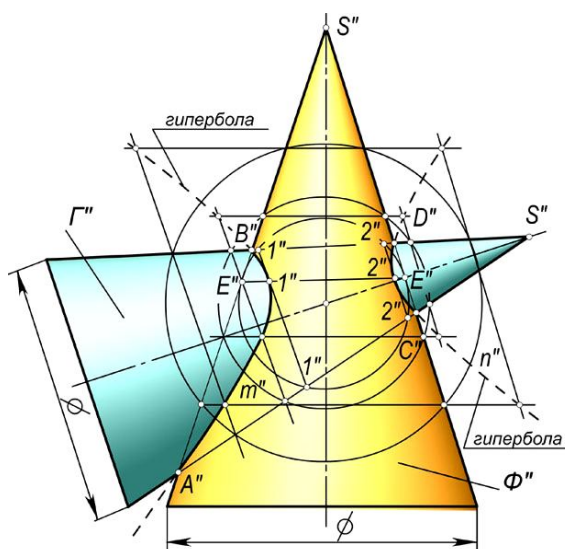
F va G sirtlarning frontal ocherklarining 1'', 2'', 3'', 4'' kesishish nuqtalari bu sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli nuqtalaridan hisoblanadi. O'' nuqtadan eng uzoqda joylashgan 4'' xarakterli nuqtadan o'tuvchi sferaning radiusi R_{max} bo'ladi. Urinma sferani shunday o'tkazish kerakki, u sirtlarning biriga urinsin va ikkinchisini kesib o'tsin. 12.7-rasmda G sirtga urinma bo'lgan R_{min} radiusli sfera o'tkazish bilan yasalgan egri chiziqning 5, 6 xarakterli nuqtalari aniqlangan. Kesishish chizig'ining boshqa nuqtalari R_{max} va R_{min} radiusli sferalar orasida ixtiyoriy sferalar o'tkazish bilan aniqlanadi.

12.8-rasmda o'qlar $O(O', O'')$ nuqtada kesishuvchi va simmetriya tekisligi H proyeksiyalar tekisligiga parallel bo'lgan ikki doiraviy konusning kesishish chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan yasalgan. Bunda avvalo kesishish chizig'ining xarakterli 1(1', 1'') va 2(2', 2'') nuqtalari aniqlanadi. Kesishish chizig'ining qolgan nuqtalari oldingi misolda keltirilganidek topiladi va ular o'zaro tutashtiriladi.



12.8-rasm

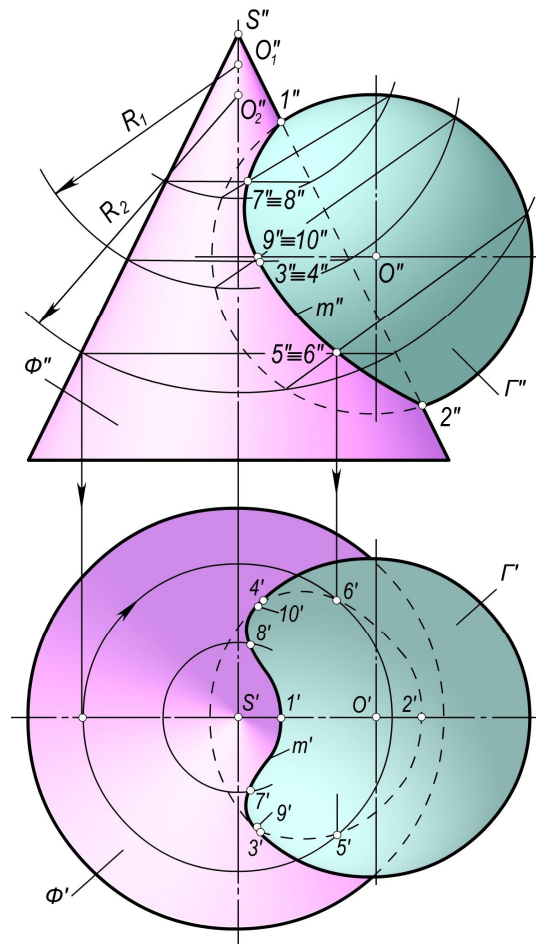
12.9-rasmda simmetriya tekisligi proyeksiyalar tekisligi V ga parallel bo'lgan ikki aylanma konusning kesishish chizig'i konsentrik sferalar usuli bilan frontal proyeksiyalar tekisligida tasvirlangan



12.9-rasm

Ekssentrik sferalar usuli

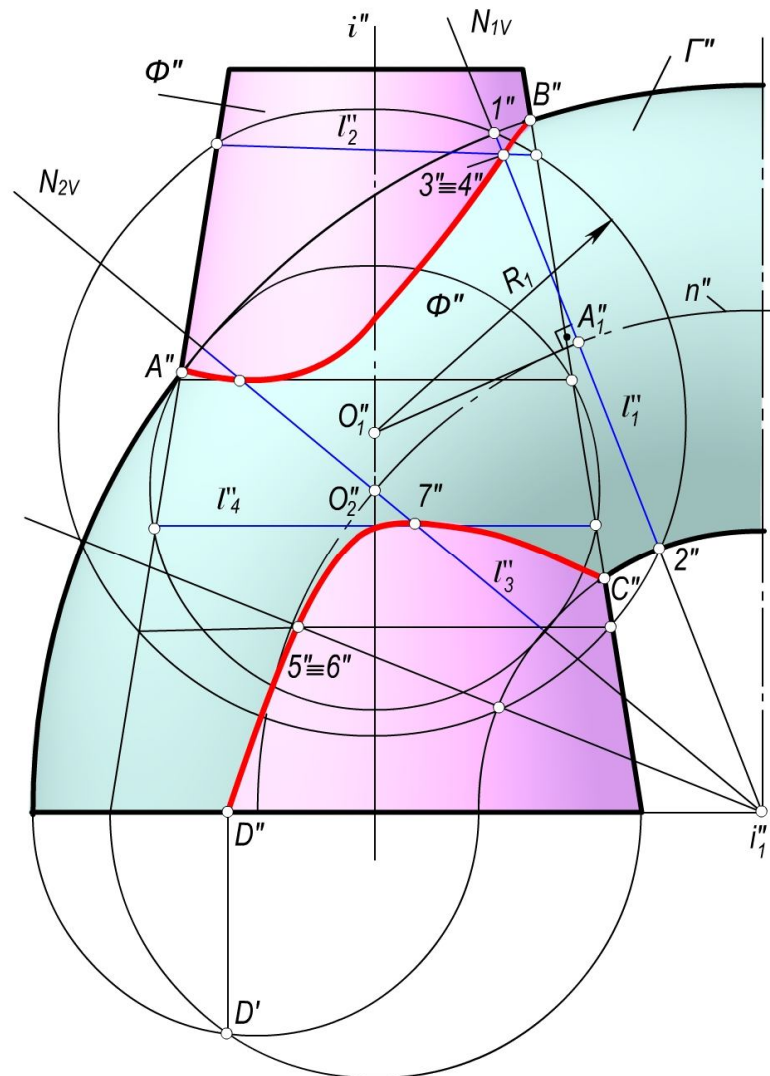
Markazlari biror aylanma sirt o'qini turli nuqtalarida joylashgan sferalar ekssentrik sferalar deb yuritiladi. 11.10–rasmda konus o'qi va sfera markazi O (O' , O'') bitta frontal simmetriya tekisligida joylashgan.



12.10-rasm

Bu ikki sirtning kesishish chizig'ini yasash uchun avvalo ularning frontal ocherkalarining kesishish nuqtalari 1'' va 2'' belgilanadi. Konus o'qidagi O_1'' nuqtani markaz qilib olib, R_1 radiusli sfera yordamida kesishish chizig'ining 3(3', 3'')=4(4', 4'') nuqtalari yasalgan. Shuningdek, konus o'qidagi O_2'' nuqtani markaz qilib olib, R_2 radiusli sfera yordamida 5(5', 5'')=6(6', 6'') nuqtalarning vaziyati aniqlangan. Xuddi shu tarzda konus o'qidagi ixtiyoriy nuqtalarni markaz qilib olib, ixtiyoriy radiuslar bilan sferalar chizish yordamida ikkala sirtning kesishish chizig'i m (m' , m'') yasalgan.

Aylanma konus va tor sirtlarning kesishish chizig'ini yasash frontal proyeksiya tekisligida ko'rsatilgan (12.11-rasm). Konusning o'qi i'' va tor yasovchilarining markazlari yotuvchi n'' chiziq bitta frontal tekislikda joylashgan. Bu sirtlarning kesishish chizig'ini yasash uchun torning frontal proyeksiya tekisligidagi i_1'' o'qi orqali N_{IV} frontal proyeksiyalovchi tekislikning izi o'tkaziladi. Bu tekislik torni n'' markazlar chizig'ini ixtiyoriy A_1'' nuqtada kesadi. Bunda N_{IV} tekislik torni l_1'' aylana bo'yicha kesadi. l_1'' aylananing markazi A_1'' nuqtadan aylana tekisligiga perpendikulyar chiqariladi. Uning aylanma konus o'qi i'' bilan kesishish nuqtasi O_1'' belgilanadi. O_1'' nuqtani markaz qilib olib, torning l_1'' aylanasi bilan o'tuvchi R_1 radiusli sfera chiziladi. Bu yordamchi sfera konus bilan l_2'' va l_3'' aylanalar bo'yicha va tor sirti bilan l_1'' va l_4'' aylanalar bo'yicha kesishadi. l_1'' va l_2'' aylanalarning kesishish nuqtalari 3''=4'' hamda l_3'' va l_4'' aylanalarning kesishish nuqtalari 5''=6'' izlanayotgan egri chiziqning nuqtalari bo'ladi.

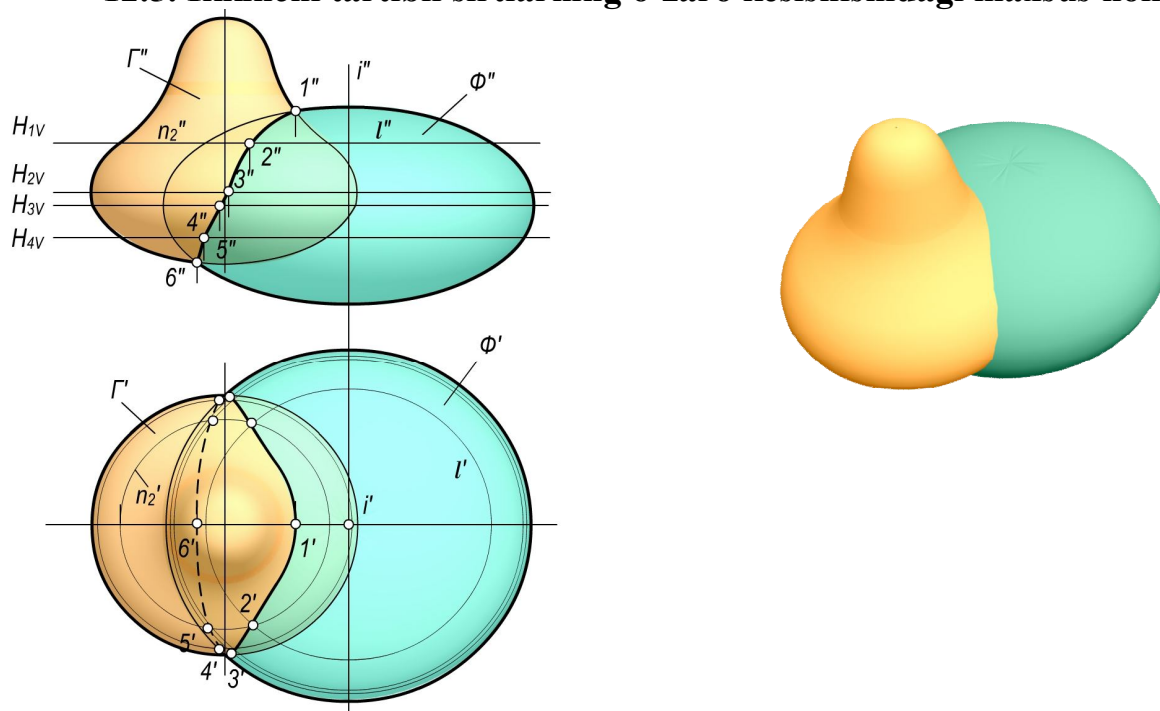


12.11-rasm

Aylanma konus va tor sirtlar kesishish chizig'ining xarakterli A'' , B'' va C'' nuqtalari bu sirtlarni frontal ocherklarining kesishish nuqtalari yordamida aniqlangan. Cirtlar o'qlarining kesishish nuqtasi O_2'' orqali tor sirtga urinma qilib o'tkazilgan F'' sfera sirti orqali A'' va $7''$ xarakterli nuqtalar aniqlangan. Bu nuqtalar egrilikning burilish nuqtalari bo'ladi.

Torning i_1'' aylanish o'qi orqali bir necha frontal proyeksiyalovchi tekisliklar izlarini o'tkazib va bu tekisliklarda hosil bo'lgan aylanalar orqali markazi konus o'qida turlicha joylashgan yordamchi sferalar o'tkazib, egri chiziqning qolgan oraliq nuqtalari yasaladi.

12.5. Ikkinchi tartibli sirtlarning o'zaro kesishishidagi maxsus hollar

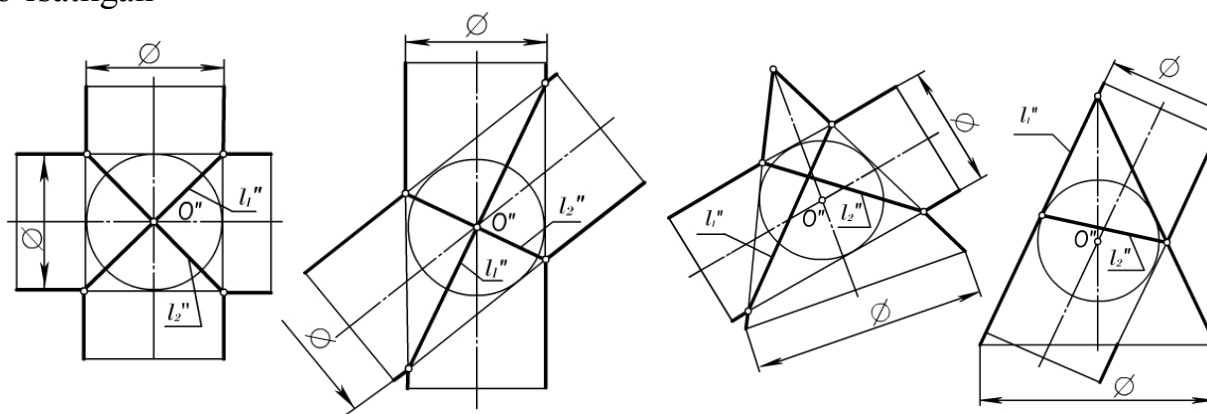


12.20-rasm.

Monj teoremasi va uning xususiy xollari

Teorema: Agar ikki o'zaro kesishuvchi ikkinchi tartibli sirtlarning tashqarisida yoki ichkarisida biror uchinchi ikkinchi tartibli sirtni urinma vaziyatda chizish mumkin bo'lsa, u holda berilgan sirtlarning o'zaro kesishish chizig'i ikkita tekis egri chiziqlarga ajraladi. Bu ikki tekis egri chiziqlarning tekisliklari urinish nuqtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziq orqali o'tadi.

Monj teoremasi injenerlik amaliyotida ikkinchi tartibli ikki sirtning tashqarisida yoki ichkarisida **sfera** chizish mumkin bo'lgan hollarda ularning kesishish chizig'ini yasash uchun qo'llaniladi. Masalan, 12.21 a,b-rasmlarda o'qlari kesishuvchi holda joylashgan ikki aylanma kesishuvchi silindrlar ichiga sferalar chizilgan. Bu holda berilgan silindrlar o'zaro ikki l_1'' va l_2'' ellipslar bo'yicha kesishadi. Xuddi shunday 12.22 a,b-rasmlarda esa aylanma silindr bilan konusning kesishish chizig'ini yasash ko'rsatilgan



a)

b)

a)

12.21-rasm

b)

12.22-rasm

3-teorema. Ikkinchi tartibli sirtlarning ocherki (konturi) ikkinchi tartibli egri chiziqdan iboratdir.

Bu teorema ikkinchi tartibli sirtlarni tasvirlashda alohida ahamiyatga ega, chunki ikkinchi tartibli sirtlar ko'pincha, chizmada o'zlarining ocherklari bilan beriladi.

Isboti. 1. Parallel proyeksiyalashda ikkinchi tartibli sirtlarning xossasiga asosan uni har qanday tekislik bilan kesganda ikkinchi tartibli tekis egri chiziq hosil bo'ladi. Bu egri chiziqning ixtiyoriy vaziyatdagi tekislikdagi parallel proyeksiyasi umumiy holda ikkinchi tartibli egri chiziq bo'ladi.

Kesuvchi tekislik ikkinchi tartibli sirtning simmetriya tekisligi bo'lib, asosiy proyeksiyalar tekisliklarining biriga parallel bo'lsa, kesimning shu proyeksiyasi tekisliklaridagi parallel proyeksiyalari o'ziga kongruent bo'ladi.

2. Markaziy proyeksiyalashda S markaz bo'yicha biror ikkinchi tartibli F sirtni proyeksiyalar tekisligi P ga proyeksiyalaymiz. Bunda proyeksiyalovchi nurlar to'plami o'rovchi konus sirtini hosil qiladi. O'rovchi konus sirti berilgan F sirt bilan bitta tekis egri chiziq bo'yicha urinadi. Bu egri chiziq berilgan sirtning S markaz bo'yicha ocherki hisoblanadi.

Hosil bo'lgan proyeksiyalovchi konus sirtini ixtiyoriy P tekislik bilan kesganda kesimda ikkinchi tartibli egri chiziq hosil bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Yordamchi tekisliklar usulining mohiyati nimadan iborat?
2. Sirtlarning o'zaro kesishuv chizig'idagi qaysi nuqtalar xarakterli (tayanch) nuqtalar deyiladi?
3. Ikki silindrning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmini tushuntirib bering?
4. Ikki konusning o'zaro kesishish chizig'ini yasash algoritmi nimalardan iborat?
5. Silindrik va konussimon sirtlarning o'zaro yasash tartibi (algoritmi)ni izohlab bering?

18-ma'ruza

Aksonometrik proyeksiyalar

Umumiy ma'lumotlar

Aksonometriyaning asosiy teoremasi

To'g'ri burchakli standart aksonometriyalari

Aksonometriyada pozitsion masalalarni yechish

Tayanch iboralar va tushunchalar

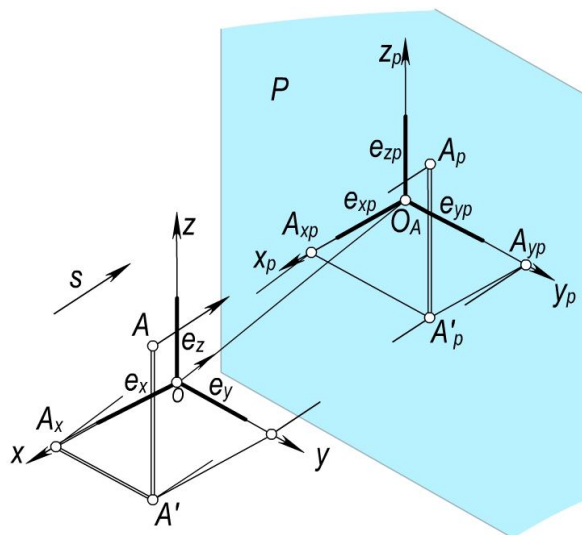
Aksonometriya, aksonometriya tekisligi, aksonometrik o'qlar, aksonometrik masshtab birligi, o'zgarish koeffitsiyentlari. Trimetrik proyeksiya, dimetrik proyeksiya, izometrik proyeksiya, standart aksonometrik proyeksiyalar.

13.1-§ Umumiy ma'lumotlar

Ma'lumki, ortogonal proyeksiyalarda chizmalarni chizish bir muncha qulay bo'lib, buyumning metrik xarakteristikalarini ham saqlanadi, chunki ortogonal proyeksiyalashda buyum proyeksiyalar tekisliklariga nisbatan qulay holda joylashtiriladi. Ortogonal proyeksiyalash usulida tuzilgan chizmalarda qirrim va kesimlardan foydalanib buyumning ichki va tashqi ko'rinishini yetarlicha aniqlash mumkin. Ammo ortogonal proyeksiyalardagi chizmalariga ko'ra ularning fazoviy shakllarini tasavvur qilish qiyin. Bunday hollarda buyum chizmasini uning yaqqol tasviri bilan to'ldirish zaruriyati tug'iladi.

Bunday tasvirlar aksonometrik proyeksiyalar bo'la oladi. Lekin aksonometrik proyeksiyalarning hammasi ham yaqqol bo'lavermaydi. Buyumni yaqqol qilib tasvirlash proyeksiyalash yo'nalishi va proyeksiyalar tekisligining vaziyatlariga bog'liq bo'ladi. Aksonometrik proyeksiya qisqacha aksonometriya deb yuritiladi (**aksonometriya** grekcha so'z bo'lib, **axon** – o'q, **metrien** – o'lchayman, ya'ni o'qlar bo'yicha o'lchash degan ma'noni bildiradi.)

Ta'rif. Dekart koordinatalar sistemasida joylashtirilgan buyum va uning proyeksiyalari shu sistema bilan birgalikda berilgan s yo'nalish bo'yicha ixtiyoriy olingan biror R tekislikdagi proyeksiyasi uning **aksonometriyasi** deyiladi.



13.1-rasm

R tekislik aksonometriya tekisligi deb yuritiladi (13.1-rasm). Aksonometrik proyeksiyalar ikki xil bo'ladi:

- Parallel proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik proyeksiyalar.

- Markaziy proyeksiyalash asosida qurilgan aksonometrik proyeksiyalar yoki ular perspektiv proyeksiyalar deb ham yuritiladi.

Parallel aksonometrik proyeksiyalar to'g'ri burchakli va qiyshiq burchakli bo'ladi. s proyeksiyalash yo'nalishi bilan R tekislik orasidagi burchak $\varphi=90^\circ$ bo'lsa, to'g'ri burchakli; agar $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ bo'lsa, qiyshiq burchakli aksonometriya deb ataladi.

Biror figuraning aksonometrik proyeksiyasini yasash uchun figuraning o'zi va uning ortogonal proyeksiyalaridan birini aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga proyeksiyalash yetarlidir. Masalan, fazodagi A nuqta ortogonal proyeksiyalaridan biri A' proyeksiyasi bilan birga R aksonometriya tekisligiga tasvirlangan (13.1-rasm). Bunda A_r nuqta A nuqtaning aksonometrik proyeksiyasi bo'ladi. A'_p nuqta esa A nuqtaning *ikkilamchi proyeksiyasi* deb yuritiladi. Shakldagi OA_xA'A siniq chiziq tomonlari A nuqtaning x, y va z koordinatalaridan iborat bo'lganligi uchun uni *koordinatalar siniq chizig'i* deb yuritiladi. Uning aksonometrik proyeksiyasi O_rA_{xp}A'_rA_r bo'ladi.

O_rx_r, O_ry_r, O_rz_r lar aksonometrik proyeksiyalar o'qlari, O_r esa O koordinatalar boshining aksonometriyasi bo'ladi.

13.2-§ Aksonometrik o'qlar va ular bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari

Dekart koordinatalar sistemasidagi uchala koordinata o'qlari uchun umumiy bo'lgan *e* uzunlikni masshtab birligi sifatida qabul qilamiz (13.1-rasm). Buni ***natural masshtab birligi*** deb ataymiz. Natural masshtab birligi *e* kesmani Ox, Oy va Oz koordinata o'qlariga qo'yib, ularni R tekislikka proyeksiyalasak, *e_x*, *e_y*, *e_z*, kesmalar hosil bo'ladi. Bu kesmalar aksonometrik masshtab birliklari deb yuritiladi. Ularning *e* ga nisbatlari aksonometrik o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari deb yuritiladi va qo'yidagicha belgilanadi:

$$\frac{e_x}{e} = k_x, \quad \frac{e_y}{e} = k_y, \quad \frac{e_z}{e} = k_z, \quad (1)$$

13.1-rasmdan

$$\frac{O_p A_x}{O A_x} = \frac{e_x}{e} = k_x, \quad \frac{O_p A_y}{O A_y} = \frac{e_y}{e} = k_y, \quad \frac{O_p A_z}{O A_z} = \frac{e_z}{e} = k_z, \quad (2)$$

tengliklarni yozish mumkin.

Demak, A nuqtaning dekart va aksonometrik koordinatalari orasidagi bog'lanishni qo'yidagicha yozishimiz mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{x_p}{x} &= k_x \quad \text{yoki} \quad x_p = k_x x \\ \frac{y_p}{y} &= k_y \quad \text{yoki} \quad y_p = k_y y \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{z_p}{z} = k_z \quad \text{yoki} \quad z_p = k_z z.$$

Aksonometrik proyeksiyalar uch turga bo'linadi.

- Agar uchala o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari o'zaro teng bo'lsa, ya'ni $k_x=k_y=k_z$ bo'lganda hosil bo'lgan aksonometriya **izometrik proyeksiyalar** deyiladi.
- Agar o'zgarish koeffitsiyentlaridan ikkitasi o'zaro teng bo'lib, uchinchi ulardan farkli bo'lsa, ya'ni $k_x=k_y \neq k_z$, $k_x=k_z \neq k_y$, yoki $k_y=k_z \neq k_x$ bo'lganda, hosil bo'lgan aksonometriya **dimetrik proyeksiyalar** deyiladi
- Uchala o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyenti turlicha bo'lgan aksonometriyalar ($k_x=k_y \neq k_z$ bo'lsa), **trimetrik proyeksiyalar** deyiladi.

13.3-§. O'zgarish koeffitsiyentlari va proyeksiyalash burchagi orasidagi o'zaro bog'lanish

Aksonometriyaning asosiy teoremasiga asosan aksonometrik proyeksiyalar o'qlari va ular bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlarini ixtiyoriy olish mumkin. Ammo ular bir-biri bilan o'zaro uzviy bog'liq bo'ladi.

Ox, Oy va Oz koordinatalar o'qlarini R aksonometrik proyeksiyalar tekisligiga φ burchak ostida proyeksiyalaymiz (13.2-rasm). Bunda koordinatalar boshi O nuqtaning R tekislikdagi proyeksiyasi O_r bo'ladi. Bunday qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyalashning proyeksiyalanish burchagi φ ni chizmada hosil qilish uchun O nuqtadan R tekislikka OO_0 perpendikulyarni tushiramiz. OO_p va O_rO_0 to'g'ri chiziqlar orasidagi φ burchak proyeksiyalash burchagi bo'ladi.

1-teorema. Qiyshiq burchakli aksonometrik proyeksiyada o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari kvadratlarining yig'indisi 2 soni bilan proyeksiyalash burchagi kotangensi kvadratining yig'indisiga teng.

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi \quad (1)$$

Ushbu teoremani isbotsiz qabul qilamiz.

2-teorema. To'g'ri burchakli aksonometrik proyeksiyalashda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari kvadratlarining yig'indisi 2 ga teng.

Isboti. to'g'ri burchakli aksonometrik proyeksiyalashda $\varphi^0=90^\circ$ bo'lganligi uchun $\operatorname{ctg}90^\circ = 0$ bo'lib, (1) ifoda qo'yidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

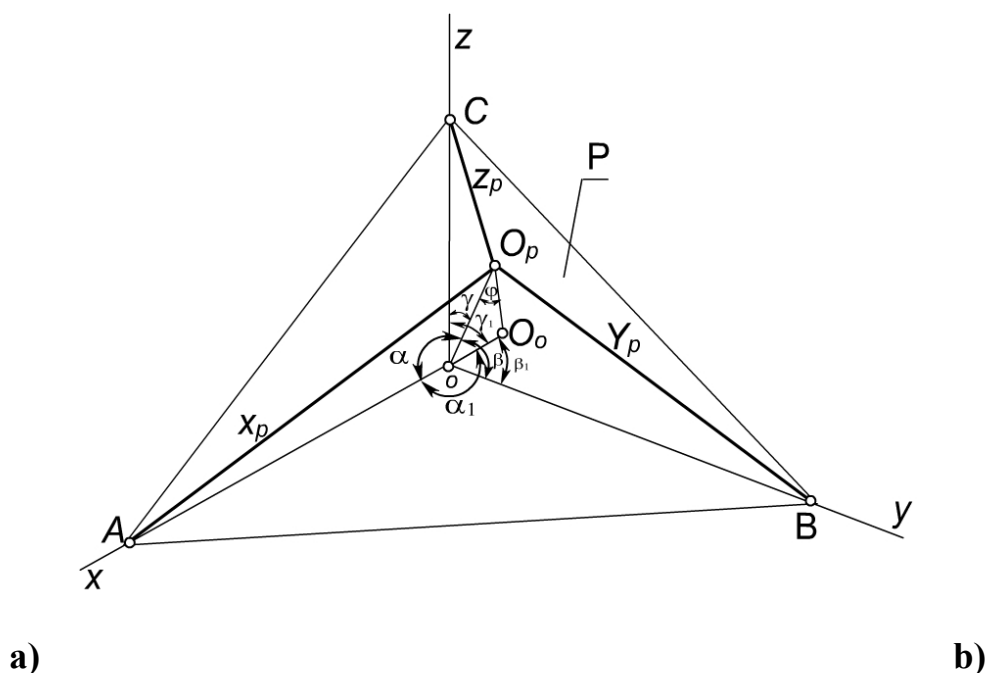
$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2. \quad (2)$$

Keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlari

Aksonometrik masshtablardan foydalanmasdan aksonometrik proyeksiyalar yasash juda ko'p vaqtni oladi. Chunki dekart koordinatalar o'qlariga parallel bo'lgan har bir kesma aksonometriyalarning uzunliklarini hisoblab topishga to'g'ri keladi. Shuning uchun keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlaridan foydalaniladi. Masalan,

ixtiyoriy to'g'ri burchakli trimetrik proyeksiyalar qo'yidagi o'zgarish koeffitsiyentlari bilan berilgan bo'lsin:

$$k_x=0.92, k_y=0.47, k_z=0.96;$$



13.2-rasm.

Bularni (2) ifodaga qo'yilsa,

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = (0.92)^2 + (0.47)^2 + (0.96)^2 = 1.9889 \approx 2$$

hosil bo'ladi.

Bu koeffitsiyentlarni $\frac{1}{0.92} = 1.09$ ga ko'paytirsak, $k_x = 1.0028$, $k_y = 0.5123$, $k_z = 1.0464$ bo'ladi. Bularni yaxlitlab $k_x^k = 1$, $k_y^k = 0.5$ va $k_z^k = 1$ deb olsak, $k_x^k = k_x \cdot 1.09$, $k_y^k = k_y \cdot 1.09$, $k_z^k = k_z \cdot 1.09$ bo'ladi, bular keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlari bo'ladi. Bunda 1,09 keltirish koeffitsiyenti bo'lib, uni m bilan belgilaymiz. U holda

$$k_x = \frac{k_x^k}{m}, \quad k_y = \frac{k_y^k}{m}, \quad k_z = \frac{k_z^k}{m}, \text{ yoki } (k_x^k)^2 + (k_y^k)^2 + (k_z^k)^2 = 2m^2$$

hosil bo'ladi.

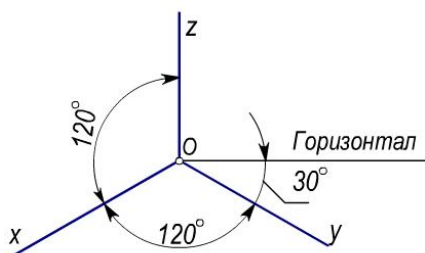
Demak, keltirilgan koeffitsiyentlari bo'yicha bajarilgan aksonometrik proyeksiyalarda o'qlar bo'yicha aksonometrik masshtablar keltirish koeffitsiyentiga proporsional ravishda o'zgaradi.

To'g'ri burchakli standart aksonometriyalar

To'g'ri burchakli aksonometriyada aksonometrik proyeksiyalar tekisligi R koordinatalar tekisliklari bilan bir xil burchak xosil qilsa, izlar uchburchagi teng tomonli bo'lib, uning balandligi bissektressasi xam bo'ladi. Shuning uchun to'g'ri burchakli izometriyada aksonometrik o'qlar orasidagi burchaklar 120° ga teng (13.3-rasm). Bu holda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari $k_x=k_y=k_z$ bo'lib,

$k_x^2+k_y^2+k_z^2=2$ tenglikdan $3k_x^2=2$ yoki $k_x=\sqrt{\frac{2}{3}}=0.82$ hosil bo'ladi. Demak,

$k_x=k_y=k_z=0.82$ bo'lib, u natural o'zgarish koeffitsiyenti deyiladi. Buyumning aniq izometriyasini yasash uchun dastlab undagi har bir nuqtani x, y, z koordinatalari yoki uning eni, bo'yi va balandligini $0,82$ ga ko'paytirib, chizishga to'g'ri keladi.



13.3-рasm.

Lekin buyumlarinig to'g'ri burchakli izometriyasini yasashda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari 1 ga teng qilib olinsa, chizish sur'ati tezlashadi. Bu holda $k_x^k=k_y^k=k_z^k=1$ bo'lib, ular **keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlari** deb yuritiladi. Bunda

keltirish koeffitsiyenti $m=\frac{1}{0.82}=1.22$ ga teng

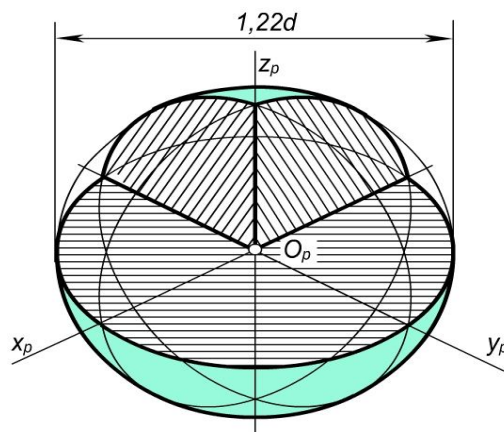
bo'lib, buyumning aksonometriyasi asliga nisbatan $1,22$ marta kattalashadi.

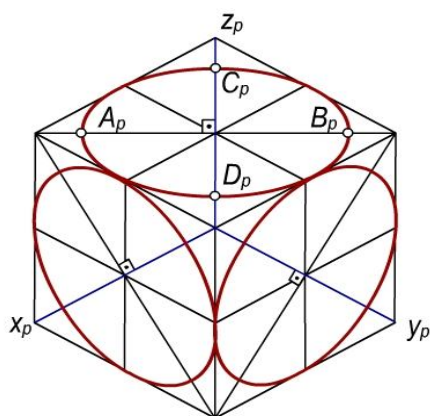
13.4-rasmda kub va uning yoqlariga ichki chizilgan aylanalarning izometriyalari bo'lgan ellipslar tasvirlangan. Aylananing tekisliklari (kubning yoqlari) H, B va W proyeksiyalar tekisliklariga parallel bo'lganligi uchun natural o'zgarish koeffitsiyentlari $0,82$ bo'yicha ellipslarning katta va kichik o'qlari qo'yidagicha bo'ladi:

$$A_pB_p=d, \quad C_pD_p=\sqrt{1-0.82^2}d=0.58 \cdot d$$

Bunda d - berilgan aylana diametri. Keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlari bo'yicha ellipslarning katta o'qlari $A_pB_p=1,22d$ ga, kichik o'qlari $C_pD_p=1,22 \cdot 0,58d=0,71d$ ga teng bo'ladi. Shunday qilib, diametri d ga teng bo'lgan aylanalar gorizont, frontal va profil yoki ularga parallel bo'lgan tekisliklarda joylashgan bo'lsa, bunday aylanalarning izometriyasidagi ellipslarning A_pB_p katta o'qi d ga, C_pD_p kichik o'qi esa $0,58d$ ga teng, keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlar bo'yicha esa $A_pB_p=1,22d$, $C_pD_p=0,71d$ bo'ladi.

13.5-rasm to'g'ri burchakli izometriyada tasvirlangan sferaning diametri $1,22d$ ga teng. Bunda d sferaning diametri.



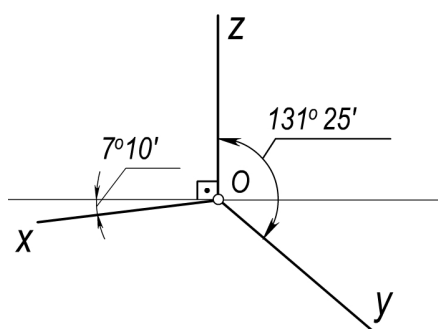


13.4-rasm.

13.5-rasm.

To'g'ri burchakli standart dimetriya

Agar aksonometrik proyeksiyalar tekisligi koordinatalar tekisliklaridan ikkitasi bilan bir xil burchak hosil qilsa, bunday aksonometriya **to'g'ri burchakli dimetriya** deyiladi. Bunda o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari $k_x=k_u \neq k_z$, $k_x=k_z \neq k_y$ yoki $k_y=k_z \neq k_x$ bo'lishi mumkin.



13.6-rasm.

To'g'ri burchakli dimetriyaning juda ko'p turlari mavjud bo'lib, ulardan aksonometrik o'qlarning o'zaro joylashuvi 13.6-rasmda ko'rsatilgan vaziyatdagi holati standartda tavsiya qilingan. Bu o'qlarni α va β burchaklarning tangenslari orqali oson yasash mumkin, chunki $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{8}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{7}{8}$. Standart dimetriyada o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlarining $k_x=k_z \neq k_y$ holi qabul qilinib $k_x=k_z=2k_y$ yoki $k_y=1/2 k_x$ deb olingan. U holda $k_x^2 Q k_y^2 Q k_z^2 = 2$ tenglikka

yuqoridagi qiymatlarni qo'yib, $k_x^2 + k_x^2 + \frac{k_x^2}{4} = 2$ yoki $9k_x^2 = 8$ ga ega bo'lamiz.

Bundan, $k_x = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.94$ ni hosil qilamiz. Demak, $k_x \approx 0,94$; $k_z \approx 0,94$; $k_y \approx 0,47$.

Amaliyotda to'g'ri burchakli dimetrik proyeksiyalarni yasash uchun qo'yidagi keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlaridan foydalaniladi:

$$k_x^k = 1, \quad k_x^k = 1, \quad k_x^k = 0.5$$

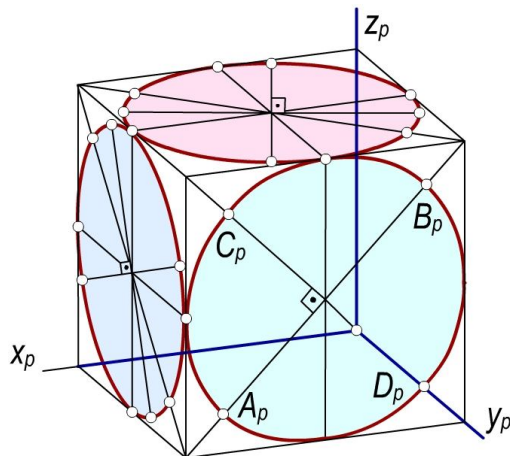
U holda keltirish koeffitsiyenti $m = \frac{1}{0.94} = 1.06$ bo'ladi.

13.7,a-rasmda to'g'ri burchakli dimetriyada kub va uning yoqlarida ichki chizilgan aylanalarning dimetrik proyeksiyalari bo'lgan ellipslar tasvirlangan.

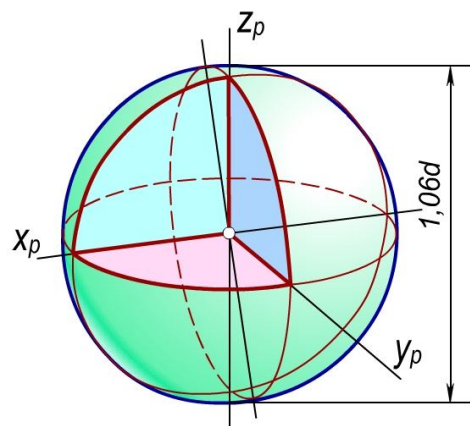
To'g'ri burchakli standart dimetriya uchun $k_x = k_z = 0,94$ va $k_y = 0,47$ bo'lganligi uchun $H(xOy)$ hamda $W(yOz)$ tekisliklarga tegishli aylananing proyeksiyalari bo'lgan ellipslar uchun

$$C_p D_p = CD \cdot \sqrt{1 - 0,94^2} = 0,33 \cdot d$$

bo'ladi. $V(xOz)$ tekislikka tegishli aylananing proyeksiyasi ellips uchun esa $C_p D_p = d \sqrt{1 - 0,47^2} = 0,88 \cdot d$ bo'ladi.



a)



b)

13.7-rasm.

Keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlari bo'yicha xOy va yOz tekisliklariga parallel bo'lgan yoqlardagi ellipslar (aylananing dimetriyasi) uchun katta o'qlar $A_p B_p = 1,06d$, kichik o'qlar $C_p D_p = 0,35d$ bo'ladi. Chunki $C_p D_p = 1,06 \cdot 0,33d$. xOz tekislikka parallel bo'lgan yoqdagi ellips uchun $A_p B_p = 1,06d$, $C_p D_p = 0,93d$. Chunki $C_p D_p = 1,06 \cdot 0,88d = 0,93d$.

Sferani to'g'ri burchakli dimetriyasini keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlari bo'yicha chizish, 13.7,b-rasmda ko'rsatilgan. Sferaning dimetriyasi D_1 diametrli aylana bo'lib, $D_1 = 1,06d$ ga teng.

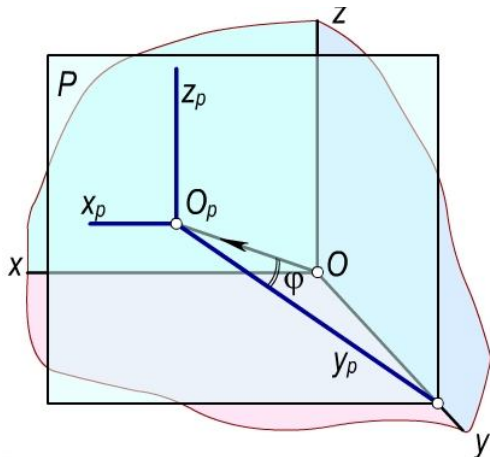
Diametri d ga teng aylanalar gorizontal va profil tekisliklarda joylashgan bo'lsa, ularning dimetriyasidagi ellipsning katta o'qlari d ga, keltirilgan koeffitsiyentlari bo'yicha $1,06d$ va $0,35d$ teng. Agar diametri d ga teng aylana frontal tekislikda joylashgan bo'lsa, bunday aylananing dimetriyasidagi ellipsning katta o'qi $0,88d$ ga keltirilgan koeffitsiyentlar bo'yicha $1,06d$ va $0,94d$ ga teng bo'ladi.

13.4-§. Qiyshiq burchakli standart aksonometriyalar.

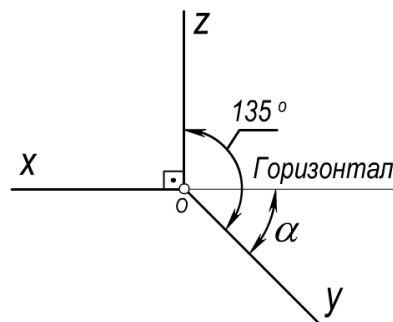
Qiyshiq burchakli standart frontal dimetriya

R aksonometrik proyeksiyalar tekisligini xususiy xolda, ya'ni koordinata tekisliklarining birortasiga parallel qilib olinadi. Bu holda proyeksiyalash yo'nalishini aksonometrik tekislikka perpendikulyar qilib olib bo'lmaydi. Chunki bunda koordinata o'qlaridan biri nuqta bo'lib proyeksiyalanadi. Bu esa tasvir yaqqoligini ta'minlamaydi. Agar R aksonometriya tekisligini xOz koordinatalar tekisligiga parallel qilib olinsa (13.8-rasm) $O_r x_r \square \equiv O_x$, $O_p z_p \equiv O_z$, bo'lganligi uchun,

$O_r x_r$ va $O_p z_p$ o'qlar o'zaro perpendikulyar bo'lib, bu o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari $k_x=k_z=1$ bo'ladi, k_y esa OO_rB to'g'ri burchakli uchburchaqdan topiladi va $k_y = \frac{OO_p}{OB} = \text{ctg } \varphi$ ga teng bo'ladi. Bu holda xOz koordinatalar tekisligi va unga parallel bo'lgan barcha tekisliklarda joylashgan shakllar aksonometriya tekisligiga o'zining kattaligicha proyeksiyalanadi. Bu esa predmet yaqqol tasvirini yasashni osonlashtiradi.



13.8-rasm.

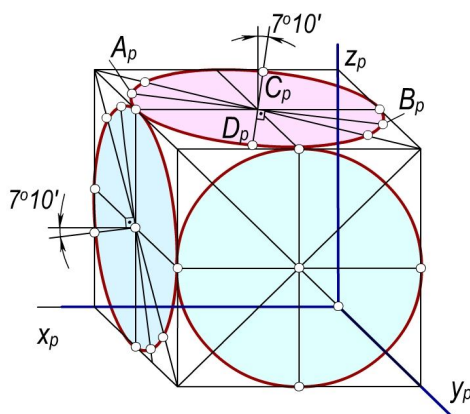


13.9-rasm.

Agar $\varphi=45^\circ$ bo'lsa, $k_y=\text{ctg}45^\circ=1$ bo'lgani uchun aksonometriya o'qlari bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari $k_x=k_z=1$ va $k_y=1$ bo'ladi. Bu xolda qiyshiq burchakli frontal izometriya hosil bo'ladi.

Amalda $O_p y_p$ o'qi $O_r x_r$ o'qining davomidagi gorizontal to'g'ri chiziq bilan hosil qilgan burchagi α ning 30° , 45° , 60° vaziyatlari (13.9-rasm) olinadi va bu o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsiyenti $k_y=0,5$ qabul qilingan $k_x=k_z=1$, $k_y=0,5$ bo'yicha chizilgan aksonometriyalar *qiyshiq burchakli frontal dimetriyalar yoki kabinet proyeksiyalar* deyiladi.

Qiyshiq burchakli frontal dimetriyada aksonometriya o'qlarining vaziyati 13.9-rasmda ko'rsatilganidek qabul qilingan, ya'ni $x_p O_p z_p=90^\circ$, $y_p O_p z_p=135^\circ$ O'zgarish koeffitsiyentlari esa $k_x^{qq}k_z=1$ va $k_y=0,5$ bo'ladi.



13.10-rasm.

13.10-rasmda kub va uning yoqlaridagi ichki chizilgan aylanalar aksonometriyalari qiyshiq burchakli frontal dimetrik proyeksiyada tasvirlangan. Bunda xOz tekislikka parallel yoqda yotgan aylana dimetriyada aylana bo'lib proyeksiyalanadi. Qolgan yoqlardagi aylanalar, ellipslar bo'lib proyeksiyalanadi.

Qiyshiq burchakli izometriyada $k_x=k_z=k_y=1$ bo'lganligi uchun $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + \text{ctg}^2 2\varphi$ dan

$I^2 Q I^2 Q I^2 = 2 Q \text{ctg}^2 \varphi$ yoki $\text{ctg}^2 \varphi = 1$ bo'ladi.

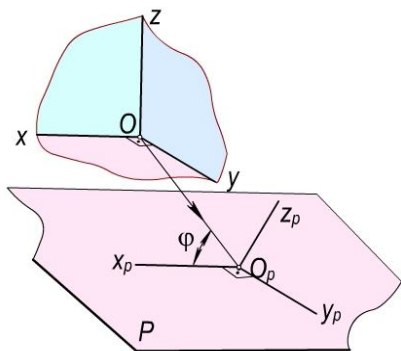
Bundan $\varphi^\circ = \arctg 1 = 45^\circ$. Demak, qiyshiq burchakli izometriyada φ proyeksiyalash burchagi 45° ga teng ekan.

Qiyshiq burchakli dimetriya uchun $k_x = k_z = 1$ va $k_y = 0,5$ bo'lgani uchun,
 $1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = 2 + ctg^2 \varphi$ yoki $ctg^2 \varphi = \frac{1}{4}$; bundan $ctg^2 \varphi = \frac{1}{4}$; bo'lib,
 $\varphi^\circ = \arctg \frac{1}{2} \approx 63^\circ$ bo'ladi.

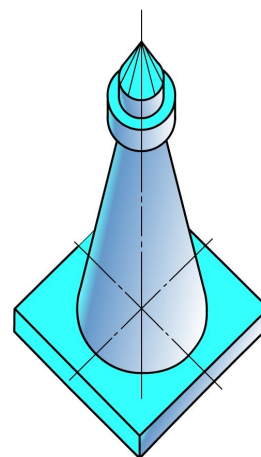
Qiyshiq burchakli dimetriyada proyeksiyalash burchagi $\varphi = 63^\circ$.

Qiyshiq burchakli gorizontal izometriya (zenit aksonometriyasi)

Agar P aksonometriya tekisligi xOy koordinatalar tekisligiga parallel bo'lsa, u holda hosil bo'lgan tasvir gorizontal izometriya (zenit aksonometriyasi) deyiladi (13.11-rasm). Bunda φ burchak ixtiyoriy bo'lishi mumkin.



13.11-rasm.



13.12-rasm.

$O_r x_r$ va $O_r y_r$ o'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlari $k_x = k_y = 1$ bo'lib, $O_p z_p$ o'q bo'yicha o'zgarish koeffitsiyenti k_z - esa 0,7 dan 1 gacha deb olinishi mumkin. Ko'p hollarda $k_z = 1$ deb olinadi.

Zenit aksonometriyasi juda katta qurilish maydonida joylashgan binolar, yo'llar, aerodromlar va hokazolarning o'zaro joylashuvini kichik masshtabda ko'rsatish uchun foydalaniladi. 13.12-rasmda minoraning zenit aksonometriyasi tasvirlangan. Minoraning plani α burchakka burilgan.

13.15-§. Aksonometriyada pozitsion masalalarni yechish

Aksonometrik proyeksiyalarda geometrik figuralarning o'zaro joylashuviga qarab turli pozitsion masalalar ortogonal proyeksiyalardagi qoidalarga asoslanib yechish mumkin.

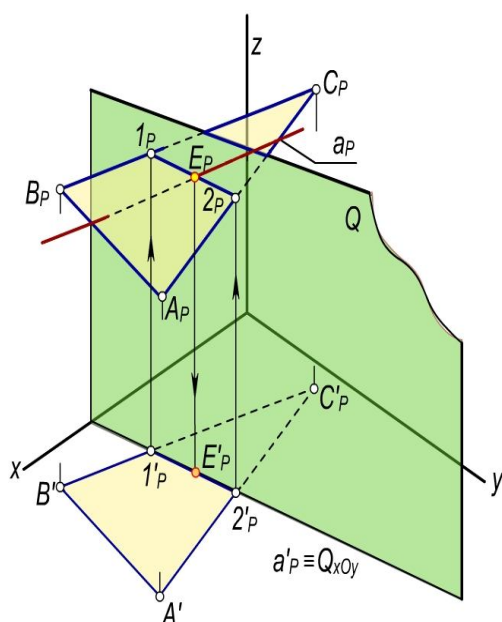
Bunda geometrik figuralarning aksonometriyasi hamda ularning ikkilamchi proyeksiyalaridan biri berilishi kerak. Ko'pincha figuralarning gorizontal tekislikdagi ikkilamchi proyeksiyalaridan foydalaniladi.

To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishish nuqtasini yasash

ABC uchburchak tekisligining $A_p B_p S_p$ va a to'g'ri chiziqning a_p proyeksiyasi hamda ularning ikkilamchi proyeksiyalari $A_p B_p S_p$, a'_p berilgan bo'lsin (13.13- rasm). Ularning kesishish nuqtasini yasash algoritmi qo'yidagicha bo'ladi:

- a_p (a_p) to'g'ri chiziq orqali Q_p tekislikni $O_p Z_p$ o'qqa parallel qilib o'tkaziladi;
- Bu tekislik ABC tekislikning $A'B'S'$ ikkilamchi proyeksiyasi bilan 1_p va 2_p nuqtalarda kesishadi. Bu nuqtalardan $O_p Z_p$ o'qqa parallel chiziqlar chiqarib, 1_p va 2_p nuqtalarni $B_p S_p$ va $A_p S_p$ tomonlar ustida belgilanib, ular o'zaro tutashtiriladi;
- So'ngra a_p va $1_p 2_p$ to'g'ri chiziqlarning o'zaro kesishuv nuqtasi E_p belgilab olinadi. Uning ikkilamchi proyeksiyasi E_R nuqta bo'ladi.

Konusning tekislik bilan kesishishi

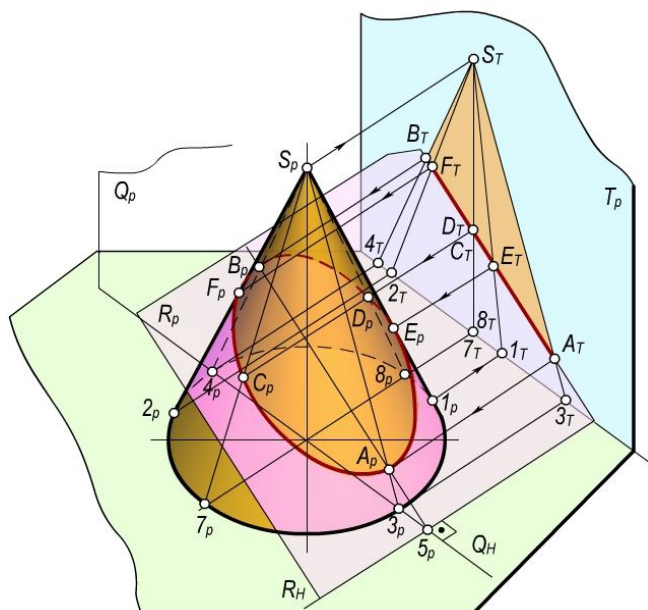


13.13-rasm.

To'g'ri burchakli izometriyada tasvirlangan F konusning R tekislik bilan kesishish chizig'ini yasash algoritmi qo'yidagicha bajariladi. $T \equiv P$ tekislikka proyeksiyalanadi (13.14-rasm). U holda kesishish chizig'ining T_r tekislikdagi proyeksiyasi $A_t B_t$ to'g'ri chiziq kesmasi bo'ladi. Bu kesmada ixtiyoriy $C_t \equiv D_t$ nuqtalarni belgilab, ular orqali $S_t 7_t = S_t 8_t$ yasovchilar o'tkaziladi. Bu yasovchilarning $S_t 8_t$ aksonometriyalari o'tkazilib, ularda S_t va D_t nuqtalar belgilab olinadi. Boshqa nuqtalarning aksonometriyalari ham xuddi shunday topiladi. Kesishish chizig'ining konus ocherkiga urinish nuqtalari E_R va F_R lar qo'yidagicha topiladi. Konusning ocherkini ifodalovchi $S_r 1_r$ va $S_r 2_r$ yasovchilarning T_r tekislikdagi $S_t 1_t$ va $S_t 2_t$ preksiylarini o'tkaziladi.

Ularning $A_t B_t$ kesma bilan kesishish nuqtalari E_t va F_t larni belgilab olinadi. E_t va F_t nuqtalardan teskari yo'nalishda nurlar o'tkazib, ularning mos ravishda $S_r 1_r$ va $S_r 2_r$ yasovchilar bilan kesishish nuqtalari E_r va F_r larni belgilab olinadi.

Kesimning A_R - qo'yi va B_R - yuqori nuqtalarni ortogonal proyeksiyalarga oid qoidalarga asoslanib topish mumkin. Buning uchun konusning i_r o'qidan o'tuvchi va berilgan R_p tekislikka perpendikulyar Q_r tekislikdan foydalanamiz. Bu tekislik konusni $S_r 3_r$ va $S_r 4_r$ yasovchilari, berilgan tekislikni esa $5_r 6_r$ to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi. $S_r 3_r$ va $S_r 4_r$ yasovchilarning $5_r 6_r$ to'g'ri chiziq bilan kesishishidan A_r va B_r nuqtalar hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan nuqtalarni tekis egri chiziq bilan tutashtirib, konusning P tekislik bilan kesishish chizig'ini yasaladi.



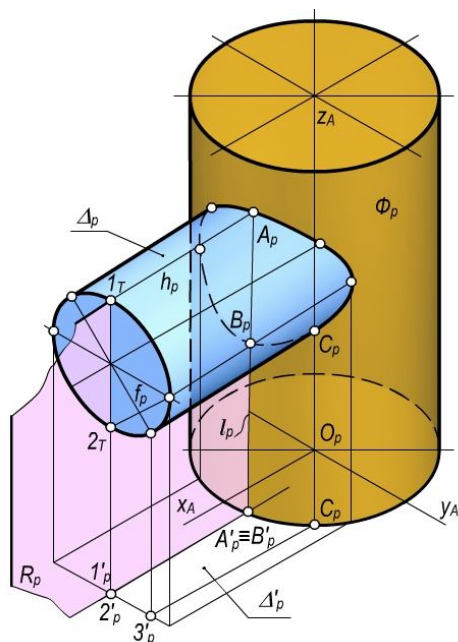
13.14-rasm.

Sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarining yasash

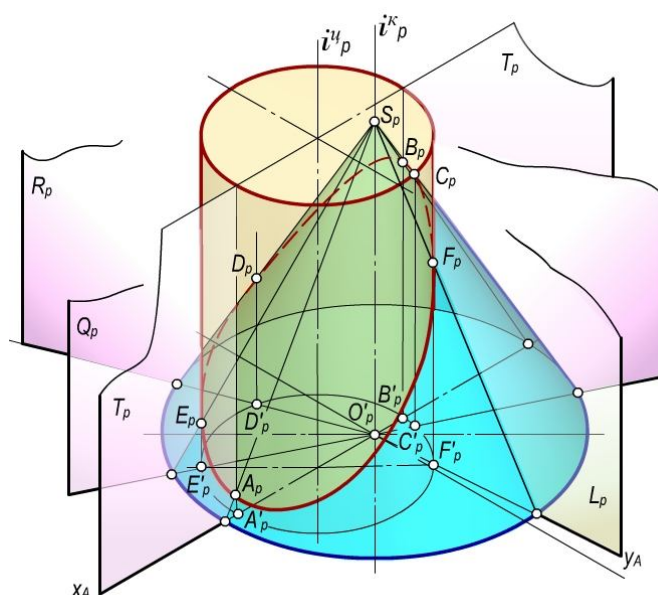
Ortogonal proyeksiyalardagi singari aksonometriyada ham sirtlarning o'zaro kesishish chiziqlarini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalaniladi. Ular berilgan sirtlar bilan tekis egri chiziqlar bo'yicha kesishadi. Bu egri chiziqlar o'zaro kesishib sirtlarning kesishish chizig'iga tegishli nuqta larni hosil qiladi.

Yordamchi tekislikni yasalishi oson bo'lgan chiziqlar hosil bo'ladigan qilib tanlanadi. Bu shartga ko'ra ba'zi masalalarni yechishda qo'shimcha proyeksiyalashdan ham foydalanish mumkin.

Qo'yidagi rasmlarda tasvirlangan ikki sirtning o'zaro kesishish chizig'ini yasashda yordamchi kesuvchi tekisliklardan foydalanilgan. 13.15-rasmda gorizont va vertikal vaziyatda joylashgan silindrlarning o'zaro kesishuv chizig'ini yasash ko'rsatilgan. Bu holatda yordamchi kesuvchi tekisliklar har ikkala silindrni yasovchilari bo'yicha kesadigan qilib o'tkazilgan. 13.16-rasmda esa aylanish o'qlari o'zaro parallel bo'lgan vertikal vaziyatdagi silindr va konuslarning aksonometriyalari berilgan. Ularning o'zaro kesishish chizig'ini yasash uchun ham yordamchi tekisliklar ularning yasovchilari bo'yicha kesishadigan qilib o'tkazilgan. Bu shakllardagi sirtlarni o'zaro kesishish chiziqlarini yasashlarni chizmalardan tushunib olish qiyin emas.



13.15-rasm.



13.16-rasm.

Nazorat savollari:

1. Aksonometrik proyeksiyalar qanday proyeksiyalash turiga kiradi?
2. Aksonometriya asosiy teoremasining mohiyati nimadan iborat?
3. O'qlar bo'yicha o'zgarish koeffitsiyentlarini ta'riflab bering. Haqiqiy va keltirilgan o'zgarish koeffitsiyentlarning farqini tushuntiring.
4. Proyeksiya burchagi va o'zgarish koeffitsiyentlari orasida qanday bog'lanish bor?
5. Aylananing aksonometriyasi haqida nimalar bilasiz?
6. Standart aksonometriyaning qanday turlarini bilasiz?
7. To'g'ri burchakli standart izometriya haqida nimalarni bilasiz?
8. To'g'ri burchakli standart dimetriyani ta'riflab bering?
9. Qiyshiq burchakli standart dimetriya (kabinet proyeksiya) haqida nimalar bilasiz?
10. Zenit aksonometrik proyeksiyalar qanday maqsadlarni ko'zlab chiziladi?
11. Aksonometrik proyeksiyalarda pozitsion masalalarni yechish uchun nimalarga e'tibor beriladi?