

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi.
Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti

T.M. Magrupov

GRAFLAR NAZARIYASI.

O'quv qo'llanma.



Toshkent 2006

UDK 519. 15.

Graflar nazariyasi va uning qo'llanilishi
O'quv qo'llanma. T.M. Magrupov. Toshkent davlat texnika
universiteti. Toshkent, 2006. 84 b.

O'quv qo'llanmada graflar nazariyasining asosiy tushunchalari va xususiyatlari yoritilgan. Har bir bo'lim masala va mashqlar bilan yakunlanib, o'quvchilar tomonidan darslarni o'zlashtirish darajasini aniqlash imkoniyati yaratilgan.

Keltirilgan masalalar asosan qurilmalar va ularning elementlarini loyihalash asosida ko'rib chiqilgan. O'quv qo'llanma kelgusi fanlarni o'zlashtirish uchun ob'ektlarni va jarayonlarni to'g'ri tasvirlashga imkon beradi.

O'quv qo'llanma 5521500 va 5521900 yo'nalishlari bo'yicha va boshqa texnika sohalari bo'yicha o'qiyotgan talabalarga amaliy matematikaning maxsus kursi sifatida foydalanishga mo'ljallangan, aspirantlar va magistratura talabalari ilmiy izlanishlarni olib borishda foydalanishlari mumkin.

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti ilmiy-uslubiy kengashi qaroriga binoan chop etildi.

Taqrizchilar: O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi qoshidagi
«Fan va texnika» markaziy amaliy- tadqiqot bo'limi
boshlig'i f.-m.f. doktori Azamatov Z.T.
Toshkent Axborot Tehnologiyalari Universiteti,
«Telematika» kaf. t.f.n., dotsent Gaibnazarov T.

Kirish.

Graflar nazariyasi amaliy matematikaning asosiy qismlaridan biri bo'lib, ob'yektlarni va unda sodir bo'ladigan jarayonlarni tasvirlashda qulayliklar tug'diradi. Bu nazariya tushunchalari va masalalari eng qiyin kechadigan jarayonlarni loyihalashda, masalan elektron qurilmalarning oxirgi avlodlarini yaratishda, ularning element asoslarini analiz va sintez qilishda ishlatilishi bilan fan va texnika taraqqiyotida katta o`rin egallaydi.

Hozirgi kunda graflar nazariyasi neyrotexnologiya asoslarining asosiy matematik apparati bo'lib, ularning ichki imkoniyatlarini to'liq yoritishda xizmat qilmoqda.

Xulosa qilib aytsak, graflar nazariyasi va uning masalalarini texnika sohasida qo'llanilishi ko'p qirrali va ko'p tarmoqlarning ichki xususiyatlarini yechishda katta imkoniyatlar yaratadi.

Shu sababali ushbu o'quv qo'llanmada graflar nazariyasining asosiy tushunchalari va masalalari, ularni mikroelektron texnika elementlari va qurilmalarini yaratish nuqtai nazaridan ko'rib chiqilgan.

I. ASOSIY TUSHUNCHALAR.

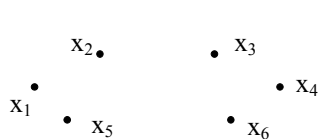
1.1. Asosiy aniqlanishlar.

Tekislikdagi va fazodagi biror x nuqtani cho'qqi deb belgilasak, ikki nuqtani (x_1 va x_2)ni bog'lovchi kesmani qobiq deb belgilaymiz.

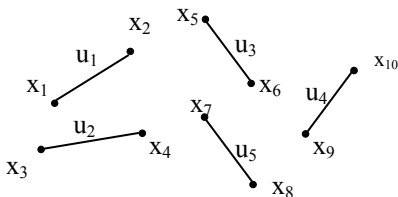
Cho'qqilar nuqta yoki dumaloq ko'rinishida beriladi, qobiq esa tutash nuqta yoki dumaloqqa mos keluvchi cho'qqilardan yoki dumaloqni bog'lovchi kesmadan iborat.

Har bir qobiq ikkita cho'qqi bilan aniqlanadi. Cho'qqilarni belgilash uchun $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m$, qobiqlarni belgilash uchun esa $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n$ harflaridan foydalanish mumkin. Bu holda qobiq $u_j = (x_\alpha, x_\beta)$ bilan belgilanadi, $\alpha, \beta = 1, m$, lekin $\alpha \neq \beta$.

Bu holda cho'qqilar to'plamini $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ (1.1-rasm) holatida va qobiqlar to'plamini esa $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ (1.2-rasm) holatida tasvirlash mumkin.

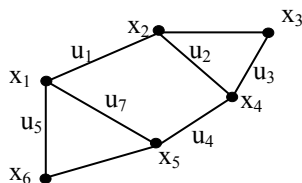


1.1-rasm
Cho'qqilar to'plami.



1.2-rasm
Qobiqlar to'plami.

Qobiqlarni bir-biri bilan bog'lash natijasida hosil bo'lgan chizma graf G deb ataladi va u quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi $G = \langle X, U \rangle$ (1.3-rasm).



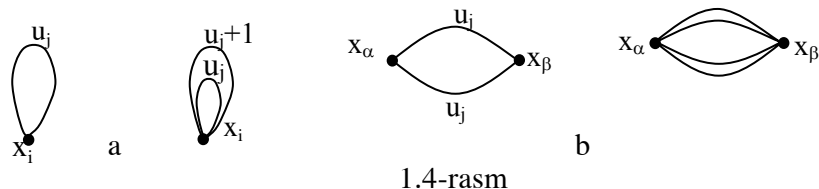
1.3-rasm. Graf $G = \langle X, U \rangle$, $m=6$, $n=8$

Bu yerda $X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ – cho'qqilar to'plami;
 $U = \{u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_m\}$ – qobiqlar to'plami.

Natijada: 1) Cho'qqilar to'plami X ning har bir elementi x_i , $i=1,2,3,\dots,m$, shu to'plamga tegishli cho'qqi deb hisoblanadi va $x_i \in X$ deb ifodalanadi.

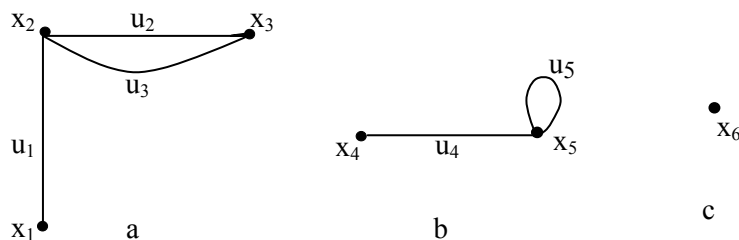
2) Qobiqlar to'plami U ning har bir elementi u_j , $j=1,2,3,\dots,n$, shu to'plamga tegishli qobiq deb hisoblanadi va $u_j \in U$ deb ifodalanadi.

Agar $u_j=(x_i, x_i)$ bo'lsa, u_j holda u_j tuguncha deb ataladi (1.4.a-rasm). Qobiqlarning boshlang'ich va oxirgi cho'qqilari bir xil bo'lsa ular parallel qobiqlar deyiladi (1.4.b-rasm). Faqat cho'qqining o'zi berilgan bo'lsa, u xolis cho'qqi deyiladi.



Agar grafda tuguncha va parallel qobiqlar bo'lmasa, ular oddiy graf deb ataladi (1.3-rasm).

Masalan, agar $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ va $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ bo'lsa va $u_1=(x_1, x_2)$, $u_2=(x_2, x_3)$, $u_3=(x_2, x_3)$, $u_4=(x_4, x_5)$, $u_5=(x_5, x_5)$, u holda graf $G=\langle X, U \rangle$ quyidagicha tasvirlanadi (1.5-rasm). Bu grafda u_2 va u_3 parallel qobiqlar bo'lsa, u_5 – tugunchadir. Bu graf bog'lanmaganlik grafi yoki bog'lanmaganlik komponentlari deb ataladi, chunki uchta bog'lanmagan grafdan iborat: $G_1=\langle X_1, U_1 \rangle$, $X_1=\{x_1, x_2, x_3\}$, $U_1=\{u_1, u_2, u_3\}$; $G_2=\langle X_2, U_2 \rangle$, $X_2=\{x_4, x_5\}$, $U_2=\{u_4, u_5\}$; $G_3=\langle X_3, U_3 \rangle$, $X_3=\{x_6\}$, $U_3=\{o\}$. Agar grafda qobiqlar bo'lmasa, u nol graf deb ataladi.



Ikkita cho'qqi x_α va x_β bog'langan hisoblanadi, agar ular ixtiyoriy U_i qobiqlarning tutash cho'qqilari bo'lsa $u_j=(x_\alpha, x_\beta)$, aks holda ular bog'lanmagan hisoblanadi. Agar ixtiyoriy ikkita qobiq u_j, u_k umumiy cho'qqiga ega bo'lsa, ular bog'langan hisoblanadi. Qobiqlar u_j har doim o'zining x_α, x_β tutash cho'qqilariga insendentdir, aks holda insendent emas hisoblanadi. Masalan, graf $G=<X, U>$ da (1.5-rasm) qobiq u_2, x_2 va x_3 cho'qqilariga insendent, x_2 va x_3 cho'qqilar bog'langan cho'qqilar deyiladi, u_1 va u_2 esa bog'langan qobiqlar deyiladi.

Berilgan x_i cho'qqiga insendent qobiqlar soni cho'qqining darajasi deb ataladi va $\lambda(x_i)$ deb belgilanadi, u holda $\lambda(x_i)=N_{x_i}$ ga teng bo'ladi. Cho'qqilarning maksimal va minimal darajasi $\max \lambda(x_i)$ yoki $\min \lambda(x_i)$ bilan belgilash mumkin.

Ayrim hollarda cho'qqining darajasi valentlik deb ataladi. Cho'qqining darajasi «1» bo'lsa, u osilgan cho'qqi deyiladi. Osilgan cho'qqiga insendent qobiq osilgan qobiq deyiladi. Agar cho'qqining darajasi «0» bo'lsa, u yakka cho'qqi deyiladi. Cho'qqidagi tuguncha har doim ko'rilyotgan cho'qqi uchun «1» qiymatga ega bo'ladi.

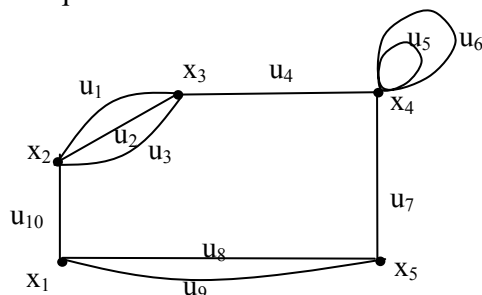
1.5-rasmdagi $G=<X, U>$ graf uchun $\lambda(x_2)=3, \lambda(x_3)=2, \lambda(x_1)=1, \lambda(x_4)=1, \lambda(x_5)=2, \lambda(x_6)=0$ ga teng.

Bu yerda x_6 – xolis cho'qqi, x_1, x_4 – osilgan cho'qqilar, u_1, u_4 – osilgan qobiqlardir.

Grafning hamma cho'qqilari darajasining yig'indisi toq qiymatga ega bo'lib, u qobiqlarning ikki barobariga teng.

$$\lambda(x_i)=2|U|$$

Shunday qilib har qanday grafda juft darajaga ega bo'lgan cho'qqilar soni toqdir.

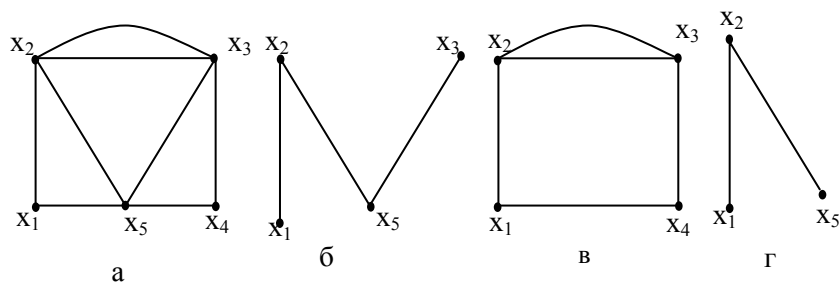


1.6-rasm

Grafda parallel qobiqlar va tugunchalar soni bir nechta bo'lishi mumkin. U holda graf quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi (1.6-rasm).

1.2. Graf bo'laklari

Graf $G = \langle X, U \rangle$ da $G^I = \langle X^I, U^I \rangle$ G grafning bo'lagi bo'ladi, agar X^I va U^I , X va U to'plamlariga nisbatan to'plamlar bo'lagi bo'lsa. Bu holda (x_α, x_β) qobiq U^I qobiqlar to'plami bo'lagiga qarashli deyiladi, agar x_α, x_β cho'qqilar X^I cho'qqilar to'plamiga qarashli bo'lsa. Demak $x_\alpha, x_\beta \in X^I$, $X^I = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ va $x_\alpha, x_\beta \in X$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, u holda $X^I \subset X$ bo'lib, $X = \{X^I \cup X^{II}\}$, bu yerda $X^{II} = \{x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k_1}\}$ holatida bo'ladi va $k + k_1 = m$ qiymatiga teng bo'ladi (1.7-rasm).

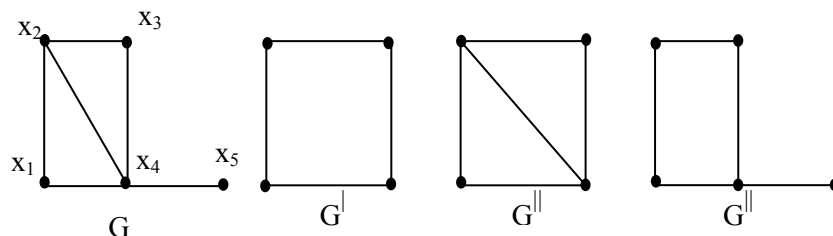


1.7-rasm. Graf va uning bo'laklari ko'rinishi.

a - graf G , b - graf bo'lagi G^I , v - graf asosi G^{II} , g - xolis cho'qqili graf G^{III}

Graf G^I graf G ning bo'lagi deb aytiladi, agar $X^I \subseteq X$, $U^I \subset U$. Agar G^I graf G ning bo'lagi bo'lsa, u holda G^I G ga qarashli deyiladi. Graf bo'lagi G^I graf asosi hisoblanadi, agar $X^I = X$ bo'lsa. Agar G^I graf bo'lagining cho'qqilar to'plamini N deb belgilasak, va uning qobiqlar to'plami G grafning qobiqlar to'plami bilan mos kelsa, ularning ikki tugash cho'qqilari N ga qarashli bo'lsa, u holda G^I , N cho'qqilar to'plami bilan qamrab olingan graf bo'lagi $G = \langle H, U \rangle$ deyiladi.

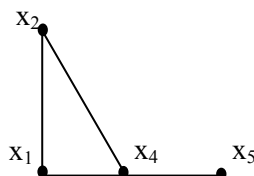
1.8-rasmda G - graf va uning uchta graf bo'laklari G^I , G^{II} , G^{III} tasvirlangan, ular ichida G^{II} - qamrab olingan va G^{III} - asosli graf bo'lagidir.



1.8 – rasm.

Graf bo'lagi turlaridan ayrimlari cho'qqilarni olib tashlash orqali ifodalanadi. Agar x_i , G grafning cho'qqisi bo'lsa, u holda bu cho'qqiga insident bo'lgan hamma qobiqlarni olib tashlasak, G_{x_i} grafiga ega bo'lamiz.

Masalan, 8-rasmdagi G grafidan X_3 cho'qqisini olib tashlangandan so'ng G^{IV} graf bo'lagini ko'rish mumkin, $G^{IV}=(X^{IV}, U^{IV})$, $X^{IV}=X \setminus x_i$ (1.9-rasm).



1.9 – rasm

Natijada graf bo'lagi deb G grafning shunday qismiga G^I aytiladiki, uning qo'shimcha qismi G^{II} ning qobiqlari G grafga tegishli bo'lib, G^I grafda ishtirok etmaydi.

$$G^{II} = G - G^I$$

Bu holda graf bo'lagi G^I graf G ning qoplaydigan qismi yoki graf bo'lagi (sugraf) deb ataladi.

Graf bo'laklari G_1 va G_2 , G grafning ikki bo'lagi bo'lsin, bu bo'laklarning yig'indisi quyidagicha aniqlanadi

$$G = G_1 \cup G_2$$

Ular qobiqlardan iborat bo'lib, G_1 yoki G_2 ga tegishlidir. Shu tarzda ularning kesishuvi

$$R = G_1 \cap G_2$$

Grafda bo'laklarning soni ko'p bo'lsa, ularning yig'indisi va kesishuvi quyidagicha aniqlanadi:

$$G = \bigcup_{\alpha} G_{\alpha} \text{ va } R = \bigcap_{\alpha} G_{\alpha}$$

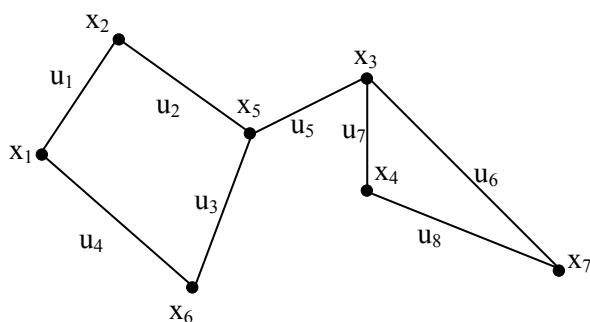
Bu yerda: G_{α} – graf bo'laklari to'plami, $\alpha = \overline{1, k}$ – grafdagi bo'laklar soni.

Agar G_{α} graf bo'laklari umumiy cho'qqilarga va qobiqlarga ega bo'lmasa ular cho'qqi bo'yicha kesishmaydi. Graf bo'laklari G_{α} umumiy qobiqlarga ega bo'lmasa, ular qobiqlar bo'yicha kesishmaydi.

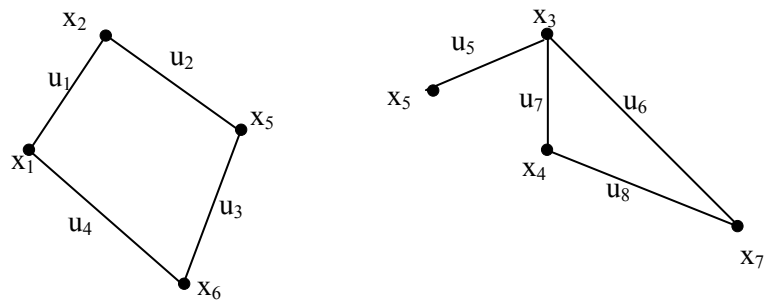
Agar berilgan $G = \langle X, U \rangle$ grafni graf bo'laklariga bo'lish talab etilsa, quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

- cho'qqilar to'plami X ning bir qismini quyidagicha ifodalash mumkin. $X' \subset X$ bu holda $x_i \in X'$, X' bo'ladi. $\alpha < m$ qiymatga ega bo'ladi va cho'qqilar to'plamining bo'lagi $X' = \{x_1, x_2, \dots, x_{\alpha}\}$ teng bo'ladi.
- qobiqlar to'plami U ning bir qismini quyidagicha ifodalash mumkin $U' \subset U$, bu holda, $u_j \in U_{\beta}$, U' bo'ladi va qobiqlar to'plamining bo'lagi $U' = \{u_1, u_2, \dots, u_{\beta}\}$ teng bo'lib, $\beta < n$ qiymatga ega bo'ladi.

Masalan: $G = \langle X, U \rangle$ berilgan (1.10-rasm). Bu grafni bo'laklarga bo'lib, G^I va G^{II} graflarga ega bo'lamiz (1.11-rasm).



1.10-rasm. Graf $G = \langle X, U \rangle$

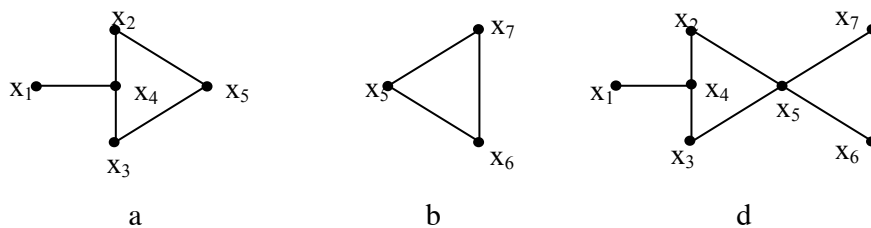


1.11-rasm. $G=\langle X, U \rangle$ ning bo'laklari $G^I=\langle X^I, U^I \rangle$,
 $G^{II}=\langle X^{II}, U^{II} \rangle$

Bu yerda: G^I grafi uchun $X^I=\{x_1, x_2, x_5, x_6\}$ cho'qqilar to'plami;
 $U^I=\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ – qobiqlar to'plami;
 G^{II} grafi uchun $X^{II}=\{x_3, x_4, x_7\}$ – cho'qqilar to'plami;
 $U^{II}=\{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ – G^{II} grafi uchun qobiqlar to'plami;
 x_5 – G^I va G^{II} graflari uchun umumiy cho'qqi.

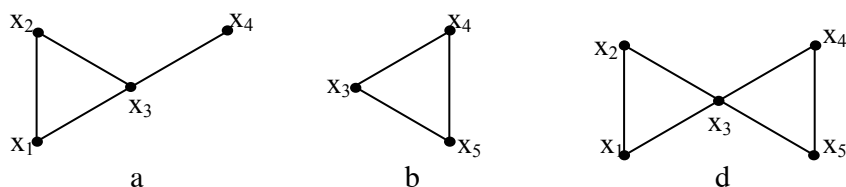
1.3. Graflar ustida amallar

Mantiqiy birlashish amali. Eng kerakli amallardan biri – birlashish amalidir. Graf $G=\langle X, U \rangle$, $G^I=\langle X^I, U^I \rangle$ va $G^{II}=\langle X^{II}, U^{II} \rangle$ graflarining birlashmasi hisoblanadi, agar $X=X^I \cup X^{II}$ va $U=U^I \cup U^{II}$ shartlar bajarilsa, ya'ni $G=G^I \cup G^{II}$



1.12-rasm. Cho'qqi bo'yicha birlashish.
a- graf $G^I=\langle X^I, U^I \rangle$; b- graf $G^{II}=\langle X^{II}, U^{II} \rangle$; d- $G=\langle X, U \rangle$

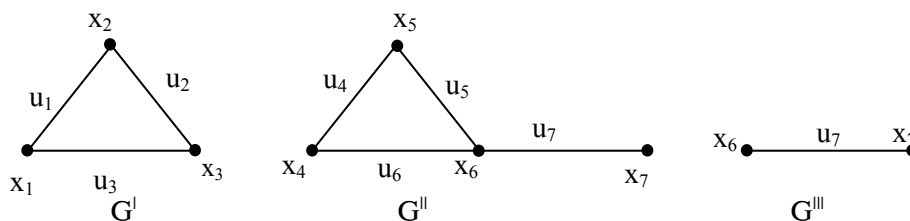
Graflar G^I va G^{II} 1.12-rasmda x_5 cho'qqisi orqali birlashgan bo'lib, graf G cho'qqi bo'yicha birlashishni tashkil etadi.



1.13-rasm. Qobiq bo'yicha birlashish
a- graf $G^I = \langle X^I, U^I \rangle$; b- graf $G^{II} = \langle X^{II}, U^{II} \rangle$; d- $G = \langle X, U \rangle$

1.13-rasmda graflar G^I va G^{II} (x_3, x_4) qobig'i orqali birlashib, qobiq bo'yicha birlashishni tashkil etadi.

Mantiqiy kesishish amali. Agar $G^I(X^I, U^I)$ va $G^{II}(X^{II}, U^{II})$ graflari berilgan bo'lsa, ularning bir-biriga kesishishi asosida graf $G^{III} = G^I \cap G^{II}$ hosil bo'ladi.



1.14-rasm

G^I va G^{II} graflarning kesishishi asosida $G^{III} = \langle X^{III}, U^{III} \rangle$ hosil bo'ladi, bu yerda $X^{III} = \{x_6, x_7\}$, $U^{III} = \{u_7\}$. 1.14-rasmda G^I va G^{II} graflarning kesishuvi asosida G^{III} grafning cho'qqilari to'plami $X^{III} = \{x_6, x_7\}$ va qobiqlari to'plami $U^{III} = \{u_7\}$ hosil bo'ladi.

1.4. Marshrutlar, zanjirlar, yo'llar va halqalar.

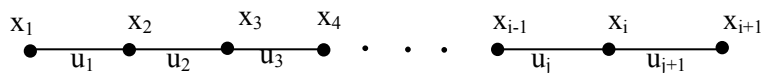
Marshrut deb, qobiqlarning ketma-ketligini tushunib, unda har bir ikkita qo'shni qobiqlar u_{j-1} va u_j umumiy tutash cho'qqiga ega

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n\}$$

Bu yerda har bir qobiqni $u_1 = (x_1, x_2)$, $u_2 = (x_2, x_3)$, ..., $u_n = (x_m, x_{m+1})$ ni ko'rinishida yozish mumkin.

Demak, grafdan cho'qqi va qobiqlarining ketma-ketligi $x_1, u_1, x_2, u_2, x_3, u_3, \dots, x_i, u_i, x_{i+1}$ marshrut deb ataladi va $u_j = (x_i, x_{i+1})$ ifoda ko'rinishida yoziladi. Bundan tashqari marshrutni cho'qqilar ketma-

ketligi $x_1, x_2, \dots, x_{i+1}$ va qobiqlar ketma-ketligi $u_1, u_2, \dots, u_{j+1}$ bilan aniqlanadi (1.15-rasm).



1.15-rasm

Aytish kerakki, marshrutda ixtiyoriy bir u_j qobig'I, yoki x_i cho'qqisi bir necha marta ishtirok etishi mumkin.

Agar marshrutda x_0 cho'qqidan oldin hech qanday cho'qqi bo'lmasa u boshlang'ich cho'qqi deb ataladi. Agar x_m cho'qqidan keyin hech qanday cho'qqi bo'lmasa, x_m tugash cho'qqisi deb ataladi. Agar ikkita qobiq u_j, u_{j+1} o'rtasida umumiy cho'qqi bo'lsa, u holda x_i cho'qqi ichki cho'qqi deb ataladi. Agar marshrut boshlang'ich cho'qqiga ega bo'lib, tugash cho'qqisi bo'lmasa yoki tugash cho'qqisi bo'lib boshlang'ich cho'qqisi bo'lmasa, u holda bunday marshrut bir tomonlama tugallanmagan deb ataladi. Marshrutda boshlang'ich va tugash cho'qqilari bo'lmasa, ikki tomonlama tugallanmagan deb ataladi.

Agar S marshrut x_0 boshlang'ich cho'qqiga va x_m tugash cho'qqisiga ega bo'lsa, u quyidagi ko'rinishda ifodalanadi.

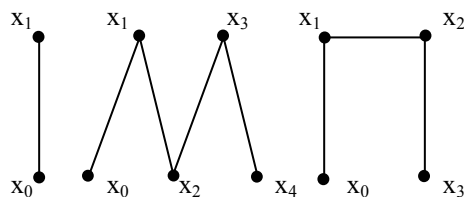
$$S=S(x_0, x_m)$$

bu yerda x_0, x_m – marshrutning tugash cho'qqilari deb ataladi.

Agar x_0 boshlang'ich cho'qqi x_m tugash cho'qqisi bo'lsa, marshrutning uzunligi m ga teng bo'ladi.

Agar har bir qobiq bir marta ishtirok etsa, marshrut zanjir deb ataladi.

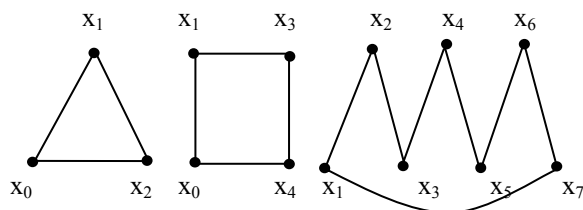
Agar zanjirda hech qanday cho'qqi qaytarilmasa, u oddiy zanjir deb ataladi. Uning ayrim ko'rinishlari 1.16-rasmda ifodalangan.



1.16-rasm.

Grafdagi har qanday zanjirni grafning bo'lagi deb aytish mumkin. Ikkita zanjirning boshlang'ich va tugash cho'qqilarini bog'lanishidan halqa tashkil etiladi. Graf bog'langan hisoblanadi, agar bir-biriga mos bo'lmagan ikkita cho'qqi marshrut orqali bog'langan bo'lsa.

Marshrut halqa deb ataladi, agar uning boshlang'ich va tugash cho'qqilari bir cho'qqidan iborat bo'lsa, ya'ni $x_0 = x_m$. Halqalarda boshlang'ich cho'qqi ichki cho'qqilar bo'lmaydi va qolgan cho'qqilar qaytarilmaydi (1.17-rasm).



1.17-rasm

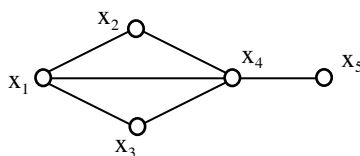
Yuqoridagi tushunchalar yo'naltirilmagan graf uchun qabul qilingan.

Yo'naltirilgan graf uchun ham yo'naltirilgan marshrut, zanjir va oddiy zanjirlar tushunchasini kiritish mumkin. Bu masalalarga keyinroq to'xtalamiz.

1.5. Masala va mashqlar.

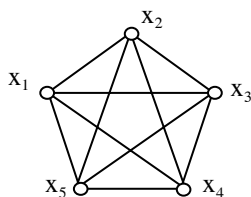
1. Bog'langan grafda lokal daraja va qobiqlar sonini aniqlang.
2. T_1 va T_2 darajalarning kesishuvi $T_1 \cap T_2$ T darajani tashkil etishini ko'rsating.
3. Graf G m ta cho'qqidan va n ta qobiqdan iborat bo'lib, cho'qqilar darajasi k va $k+1$ ga teng. Agar graf G da m_k cho'qqi k darajaga ega bo'lsa va m_{k+1} cho'qqi $k+1$ darajaga ega bo'lsa, u holda $m_k = (k+1)m - 2m$ ga teng bo'lishini isbot qilish kerak.
4. To'g'ri yoki to'g'ri emasligini isbot qiling:
 - a) turli xildagi 2 ta bog'liq marshrutlarni 2 ta cho'qqilar orqali birlashuvi siklni tashkil qilsin.
 - b) ixtiyoriy ikki xil yo'lni ikkita cho'qqi orqali birlashuvi siklni tashkil qilsin.

5. Hamma cho`qqilarning darajasini 2 bo`lgan bekiq zanjir sikl ekanligini isbotlang.
6. 23. Agar G grafning ikkita turli sikli u qobig`iga ega bo`lsa, u holda G grafda u qobig`iga ega bo`lmagan sikl bor ekanligini ko`rsating.
7. Agar beshta cho`qqili grafning ikkita cho`qqisi bir xil darajaga ega bo`lsa ularning ikkalasining darajasi 0 ga, yoki 4 ga teng bo`lishi mumkinmi?
8. Darajalari 2, 3, 3, 4, 4, 4 bo`lgan oltita cho`qqidan iborat graf bormi?
9. G grafning hamma cho`qqilaridan o`tuvchi x_1 dan x_5 gacha oddiy yo`llar bormi (1.18–rasm)?



1.18–rasm

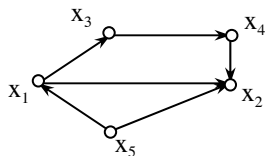
10. G grafda quyidagi qobiqlar sonidan iborat sikllarni toping (1.19–rasm). a) 4 ta qobiqli; b) 6 ta qobiqli; d) 5 ta qobiqli; e) 10 ta qobiqli. Bu sikllarning qaysi biri oddiy?



1.19–rasm

11. Oddiy siklda eng kam qobiqlar soni qancha?
12. Cho`qqilar soni  $m \geq 3$  bo`lgan oddiy siklda qobiqlar soni qancha?
13. m cho`qqidan iborat bo`lgan oddiy yo`lda qobiqlar soni qancha?

14. 17 ta cho`qqili to`liq grafdan bir nechta qobiqlarni shunday olib tashlash kerakki u holda har bir cho`qqining darajasi 5 ga teng bo`lsin.
15. Oltita cho`qqidan iborat bog`langan G graf berilgan, bunda shunday yopiq marshrutni topingki, hamma cho`qqilar uch marta qaytarilsin.
16. Tasvirlangan garfdan (1.20–rasm):
- har bir cho`qqining kirish va chiqish darajalarini aniqlang;
 - kirish va chiqishni toping;
 - E cho`qqidan  $S$  cho`qqigacha bo`lgan yo`llar sonini toping;
 - E cho`qqidan  $S$  cho`qqigacha bo`lgan masofani toping.



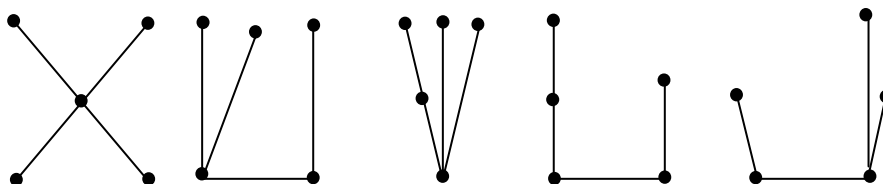
1.20–rasm

17. 5 ta cho`qqili G garfni chizing, bunda graf:
- 2 ta chiqish, 1 ta kirishdan iborat bo`lsin;
 - chiqish va kirishdan iborat bo`lmasin.

II. GRAFLARNING XUSUSIYATLARI.

2.1 Graflarning turlari.

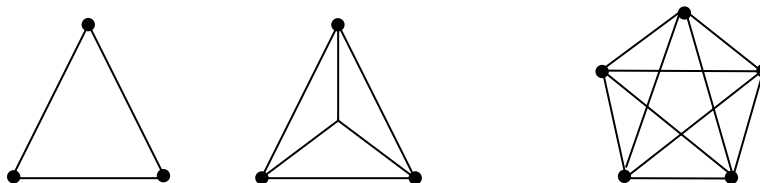
Daraxtlar. Daraxt deb, halqaga ega bo'lmagan bog'langan grafga aytiladi. Daraxtlarning yig'indisi o'rmon deb ataladi. Shunday qilib, o'rmonning komponentlari daraxt hisoblanadi. 2.1-rasmda beshinchi tartibli daraxtlar keltirilgan.



2.1 – rasm

Daraxtlarda har bir cho'qqining darajasi $\lambda(x_i) \geq 1$, ya'ni boshlang'ich va tugash cho'qqilar bitta qobiq bilan bog'langan, qolgan cho'qqilarda bog'lanishlar soni birdan ko'p bo'ladi.

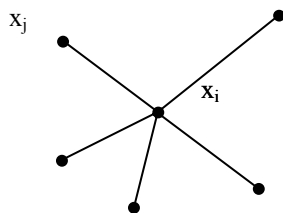
To'liq graflar. Grafda uning ixtiyoriy ikkita cho'qqisi bir-biriga bog'langan bo'lsa, to'liq graf deb ataladi. Masalan, graf $G = \langle X, U \rangle$ m ta cho'qqidan iborat bo'lsa, undagi qobiqlar soni $m(m-1)/2$ ga teng bo'ladi (2.2-rasm).



2.2-rasm.

Graflar oddiy zanjir (1.16-rasm) va oddiy halqa (1.17-rasm) ko'rinishida bo'lishi mumkin.

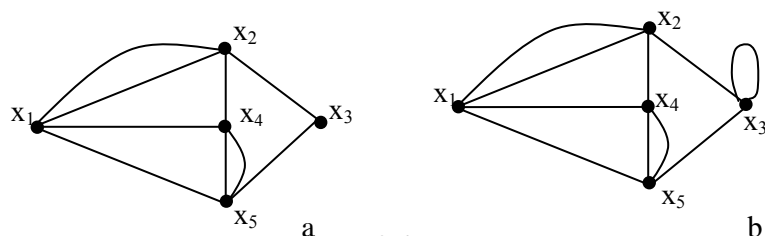
Yulduzli graf deb, boshlang'ich cho'qqisi x_i va qolganlari X/x_i tugash cho'qqilardan iborat bo'lib, qobiqlar hosil qilgan grafga aytiladi (2.3-rasm).



2.3 -rasm

Multigraf va psevdograf. Ayrim hollarda ikkita cho'qqining bog'lanishi bittadan ko'p qobiqlar bilan ifodalanadi. Bunday hollarda multigraf tushunchasi hosil bo'ladi. Multigraf bu (X, U) ikkiligidan tashkil topgan bo'lib, X – bo'sh bo'lmagan cho'qqilar to'plami, U esa ikkilik cho'qqilar to'plamchasidan tashkil topgan qobiqlar to'plami. To'plamchalar parallel qobiqlardan iborat (2.4.,a-rasm).

Shunday qilib, agar ixtiyoriy grafda birorta qobiqlar karrali yoki parallel bo'lsa, bunday graflar multigraf deyiladi.



2.4-rasm

Ayrim graflarda parallel qobiqlardan tashqari, tugunchalar, ya'ni boshlang'ich va tugash cho'qqilarini bitta cho'qqini ifodalovchi va shu cho'qqi atrofida tashkil etilgan qobiq grafda ishtirok etsa, bu holda psevdograf hosil bo'ladi. U (X, U) ikkiligidan iborat bo'ladi (2.4.,b-rasm). Bu yerda X – bo'sh bo'lmagan cho'qqilar to'plami, U esa tartibsiz cho'qqilar ikkiligi – albatta har xil bo'lmagan qobiqlarning majmuasi.

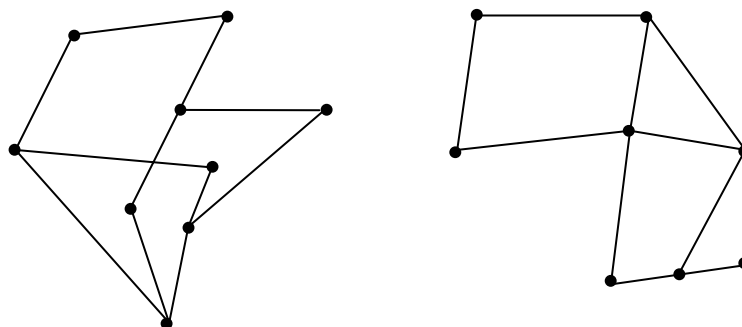
Yo'naltirilgan va yo'naltirilmagan graflar. Agar grafning qobiqlarini aniqlashda ularning boshlang'ich va tugash cho'qqilarining tartibi inobatga olinmasa, ya'ni:

$$U=(x_i, x_j)=(x_j, x_i)$$

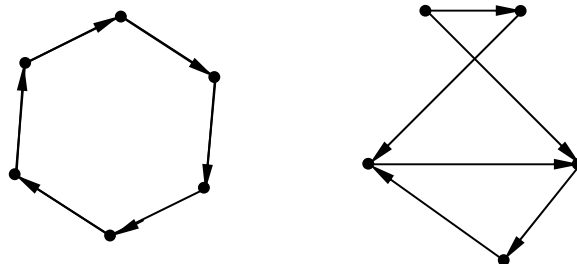
bo'lsa, u holda U yo'naltirilmagan qobiq, agar ularning tartibi zaruriy bo'lsa, yo'naltirilgan qobiq deb ataladi. Bunda x_i - qobiqning boshlang'ich cho'qqisi, x_j esa tugash cho'qqisi hisoblanadi.

Graf yo'naltirilmagan deb ataladi, agar uning har bir qobig'i yo'naltirilmagan bo'lsa va yo'naltirilgan deb ataladi, agar hamma qobig'i yo'naltirilgan bo'lsa.

Yo'naltirilmagan graflar 2.5-rasmda va yo'naltirilgan graflar 2.6-rasmda tasvirlangan.



2.5-rasm

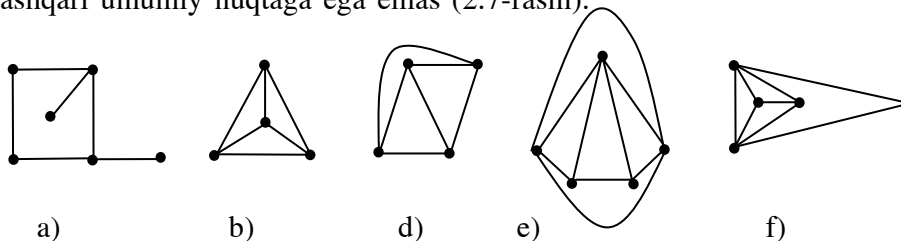


2.6-rasm

Ko'pgina holatlarda aralash graflar ko'riladi. Ular yo'naltirilgan va yo'naltirilmagan qobiqlardan iborat bo'ladi. Masalan: shaharning planida qobiqlar bilan ko'chalarni, cho'qqilar bilan esa chorrahalarini belgilaymiz. Bu holda ayrim ko'chalar bo'yicha bir tomonlama

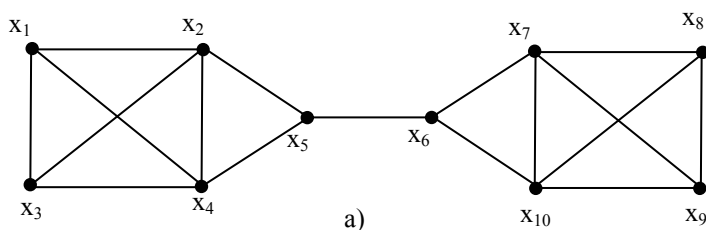
harakat bo'lsa, yo'nalish beriladi, ayrimlari bo'yicha esa ikki tomonlama harakat bo'lsa, yo'nalish berilmaydi.

Tekis va planar graflar. Tekis graf deb, shunday graflarga aytiladiki, uning cho'qqilari tekislikdagi nuqta bo'lib, qobiqlari esa o'zaro kesishmagan uzluksiz tekis chiziqlardan tashkil topgan. Unda ixtiyoriy ikkita qobiq ularga incident bo'lmagan cho'qqilardan tashqari umumiy nuqtaga ega emas (2.7-rasm).

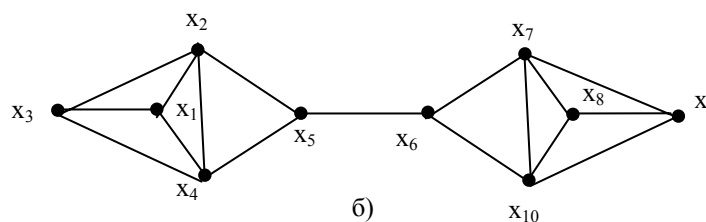


2.7-rasm

Tekis grafga o'xshash har qanday grafni planar graf deb ataladi. 2.7.,b-rasmda to'rt cho'qqidan iborat bo'lgan graf, 2.7.,v-rasmdagi to'rt cho'qqidan iborat bo'lgan grafga o'xshash bo'lgani uchun ular planar deyiladi. Xuddi shu asosda 2.8-rasmda keltirilgan graflar ham bir-biriga o'xshash hisoblanadi.



a)



b)

2.8-rasm

Shunday qilib quyidagilarni ma'qullash mumkin.
1) planar grafning har qanday bo'lagi planardir.

- 2) agar grafning bog'lovchi komponentlari planar graf bo'lsa, graf planar deyiladi.

2.2. Yo'naltirilgan graflar va uning asosiy xususiyatlari.

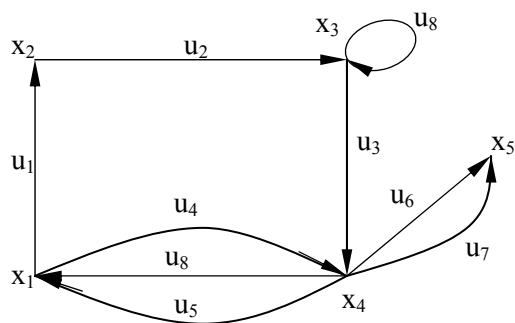
Agar grafda qobiqlarning boshlang'ich cho'qqisi va tugash cho'qqisi berilgan bo'lsa, bunday qobiqlar yo'naltirilgan qobiq deb ataladi, ular asosida tashkil etilgan graf esa yo'naltirilgan graf deb ataladi.

Berilgan graf $G=\langle X, U \rangle$ da X - yo'naltirilgan grafning cho'qqilari, U - yo'naltirilgan grafning qobiqlari. Bu holda yo'naltirilgan qobiq, tartibli joylashtirilgan juft cho'qqilardir.

Agar $U=(x_i, x_j)$ - yo'naltirilgan qobiq bo'lsa, u holda x_i va x_j uning tugash cho'qqilari, ya'ni x_i - qobiqning boshlanishi va x_j - uning tugashi. Yo'naltirilgan qobiq tugash cho'qqilarining ikkisiga ham insident hisoblanadi. Undan tashqari yo'naltirilgan qobiq boshlang'ich cho'qqidan chiqib ikkinchi cho'qqida tugaydi. Yo'naltirilgan qobiqning boshlanishi va tugashi bir-biriga mos kelsa, (x_i, x_j) tartibda u tuguncha deyiladi.

Yo'naltirilgan graf umumiy boshlang'ich va umumiy tugash cho'qqilardan iborat yo'naltirilgan qobiqlardan va parallel qobiqlardan tashkil topadi.

Masalan. 2.9-rasmda yo'naltirilgan qobiq yo'naltirilgan qobiq bilan, ya'ni bir nuqtadan chiqib ikkinchisiga kiruvchi qobiq orqali ifodalangan. Qobiqning yo'nalish ko'rsatkichi bilan belgilangan.



2.9-rasm

Bu rasmda $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $U=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\}$ va $\{u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ - yo'naltirilgan parallel qobiqlar, u_8 – tugunchadir.

Yo'naltirilgan grafning cho'qqilari, birorta yo'naltirilgan qobiqning tugash cho'qqilari bo'lsa, hamda yo'naltirilgan qobiqlar, umumiy tugash cho'qqisiga ega bo'lsa, ular bog'langan hisoblanadi.

Yo'naltirilgan grafda cho'qqining darajasi. $G=<X,U>$ - yo'naltirilgan graf bo'lsin, u holda x_i cho'qqisidan chiquvchi hamma yo'naltirilgan qobiqlarni $G^+(x_i)$, hamda x_i cho'qqisiga kiruvchi hamma yo'naltirilgan qobiqlarni $G^-(x_i)$ deb belgilaymiz.

Cho'qqidan chiquvchi qobiqlarning soni $\lambda^+(x_i)$ – cho'qqining chiqish darajasi, ya'ni $\lambda^+(x_i)=|G^+(x_i)|$ deb ataladi. Shunga o'xshash x_i cho'qqiga kirish darajasi $\lambda^-(x_i)$, ya'ni $\lambda^-(x_i)=|G^-(x_i)|$ tarzida aniqlanadi.

Umumiy holda cho'qqining darajasi uning kirish va chiqish darajasini yig'indisidan hosil bo'ladi:

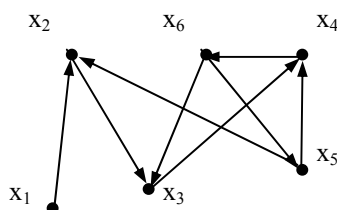
$$\lambda(x_i)=\lambda^+(x_i)+\lambda^-(x_i)$$

Agar $R=\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ birorta G grafdagi umumiy cho'qqiga ega bo'lmagan yo'llar to'plami bo'lsa, u holda graf G quyidagicha ifodalanadi:

$$G=P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_k$$

Graf G yo'llar to'plami R dan iborat bo'lib, R esa yo'naltirilgan graf G ning yo'llarga bo'linishidan iborat. Graf G ning bo'linishidagi R yo'llarning minimal sonini l deb belgilaymiz va natijada $l(P)$ tashkil etiladi.

Masalan. Berilgan $G=<X, U>$ graf (2.10-rasm).



2.10-rasm

Bu grafda x_2 va x_6 cho'qqilarning darajasi

$$\lambda^+(x_2)=1; \quad \lambda^-(x_2)=2;$$

$$\lambda^+(x_6)=2; \quad \lambda^-(x_6)=1;$$

2.3. Matritsalar va ularning graf bilan bog'liqligi

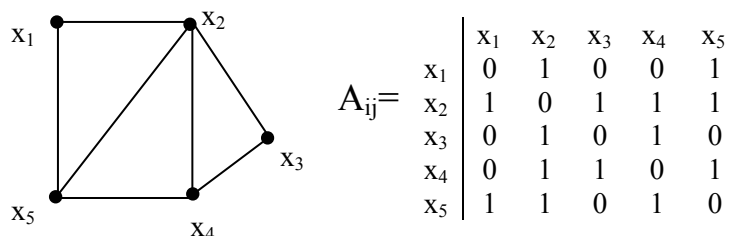
Bog'langanlik matritsasi. Matritsa A va uning elementi (i, j) bilan aniqlanib u A_{ij} simvoli bilan belgilanadi. Agar matritsaning har bir elementi «0» yoki «1» bilan belgilansa, bu ikkilik matritsasi deb ataladi.

Grafning bog'langanlik matritsasining gorizontal va vertikal tomonlari cho'qqilar asosida ifodalanadi. Har bir x_i cho'qqining ikkinchi bir cho'qqi x_j bilan bog'lanishi berilgan G graf asosida belgilanadi. Matritsada har bir x_i cho'qqi va x_j cho'qqini bog'langanligini ko'rsatuvchi elementlar $M(x_i, x_j)=1$ ga teng, aks holda, ya'ni x_i va x_j cho'qqilar orasida bog'lanish bo'lmasa, $M(x_i, x_j)=0$ ga teng bo'ladi. Shu tartibda berilgan graf $G=\langle X, U \rangle$ ning hamma cho'qqilarining bog'lanishi uning matritsasini qurish asosida ko'rib chiqiladi va matritsa elementlari «1» yoki «0» qiymatlari bilan to'ldiriladi.

Umumiy holda berilgan $G=\langle X, U \rangle$ graf uchun uning cho'qqilari $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ bo'lsa, u holda ikkilik $m \times m$ matritsa A_{ij} hosil bo'ladi.

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } x_i \text{ va } x_j \text{ cho'ggilar bog'langan bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x_i \text{ va } x_j \text{ cho'ggilar bog'lanmagan bo'lsa} \end{cases}$$

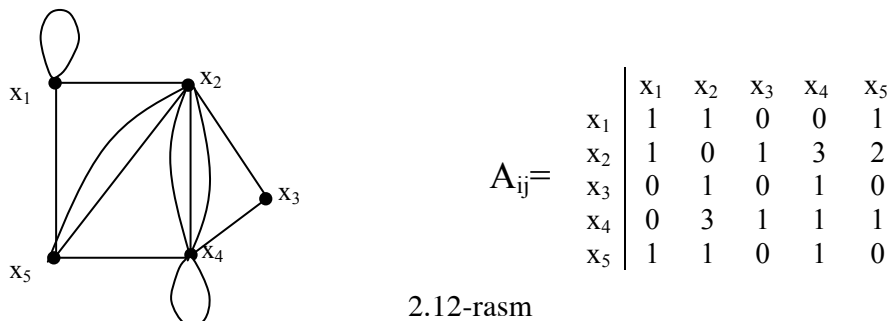
$A(G)$ matritsasi G grafning bog'lanish matritsasi deb ataladi (2.11-rasm).



2.11-rasm

Bu matritsaning diagonalni bo'yicha nollar bo'lib, simmetrik matritsa deyiladi. Matritsa qatoridagi birlar soni mos cho'qqilarning darajasini aniqlaydi.

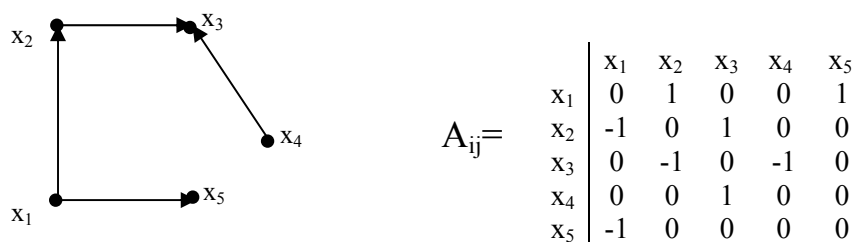
Shunga o'xshash tarzda multigraflarni bog'langanlik matritsasi ham aniqlanadi. Bu holda A_{ij} x_i va x_j cho'qqilarini bog'lovchi qobiqlar soniga teng bo'ladi (tuguncha ikkita qobiqqa teng bo'ladi) (2.12-rasm).



2.12-rasm

Yo'naltirilgan graflar uchun bog'langanlik matritsasi quyidagicha aniqlanadi:

Berilgan graf $G = \langle X, U \rangle$ uchun bog'langanlik matritsasini quramiz.



2.13-rasm

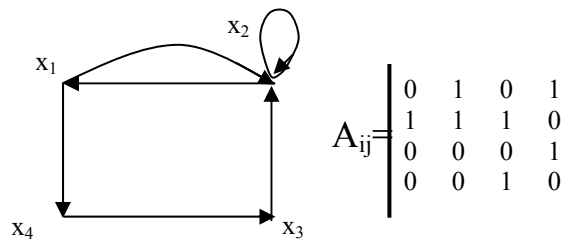
Bu yerda:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar qobiq to'nalishi boshlang'ich cho'qqidan tugash cho'qqiga } x_i \rightarrow x_j; \\ -1, & \text{agar qobiq to'nalishi tugash cho'qqidan boshlang'ich cho'qqiga } x_i \leftarrow x_j; \\ 0, & \text{agar boshlanish bo'lmasa} \end{cases}$$

Har qanday yo'naltirilgan grafning ham bog'langanlik matritsasi bo'ladi. 2.14-rasmda yo'naltirilgan graf G bog'langanlik matritsasi bilan tasvirlangan.

Agar graf $G=\langle X, U \rangle$ yo'naltirilgan bo'lsa, u holda A_{ij} bog'langanlik matritsasi quyidagicha hisoblanadi:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } (i, j) \in U \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } (i, j) \notin U \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$



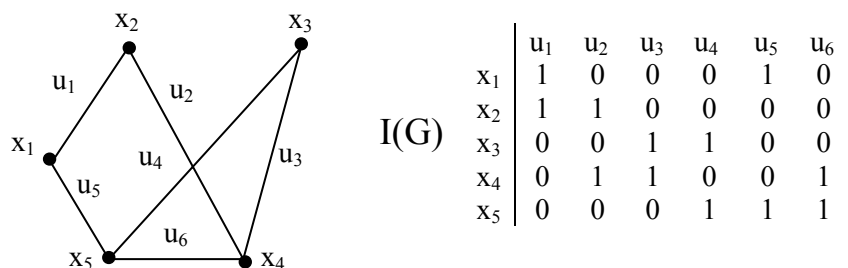
2.14- rasm

Insidentlik matritsasi. Graf $G=\langle X, U \rangle$ ning insidentlik matritsasi $I(G)$ ning har bir elementi

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } x_i \text{ cho'qqi va } u_j \text{ qobiq insident bo'lsa} \\ 0, & \text{azap } x_i \text{ cho'qqi va } u_j \text{ qobiq insident bo'lmasa} \end{cases}$$

bu yerda, $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$

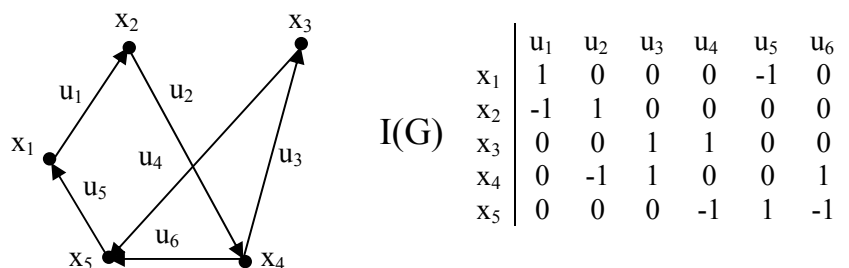
Shunday qilib cho'qqilar matritsada gorizontalar qatorlarni bildirsa, qobiqlar vertikal qatorni bildiradi. Bu holda qobiqlarning har bir qatorida ikkitadan «1» qiymati bor bo'lishi kerak. Shu bilan $m \times n$ qiymatga ega bo'lgan matritsa hosil bo'ladi (2.15-rasm).



2.15 – rasm

Yo'naltirilgan graf uchun insidentli matritsa $I(G)$ qurish uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

$$I_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{agar } x_i \text{ cho'qqining } u_j \text{ yo'naltirilgan qobiqning boshlang'ch cho'qqisi bo'lsa} \\ -1, & \text{agar } x_i \text{ cho'qqining } u_j \text{ yo'naltirilgan qobiqning oxirgi cho'qqisi bo'lsa} \\ 0, & \text{agar } x_i \text{ cho'qqining } u_j \text{ yo'naltirilgan qobiqqa insident cho'qqisi bo'lsa} \end{cases}$$

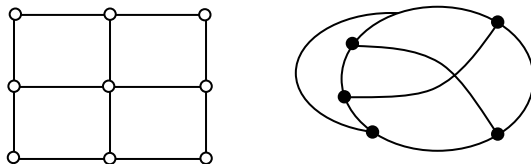


2.16 - rasm

Insidentli matritsani tashkil etilishi 2.16-rasmida berilgan graf $G=\langle X, U \rangle$ uchun keltirilgan.

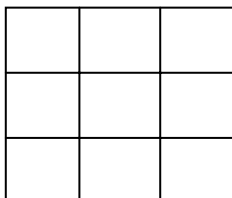
2.4. Masala va mashqlar.

1. Cho'qqilar soni $m > 5$ bo'lgan tekis graflarni chizing. Cho'qqilar orasida 4 ta cho'qqining darajasi 5 dan kichik bo'lsin.
2. Kontursiz yo'naltirilgan grafda bitta kirish cho'qqi va bitta chiqish cho'qqisi borligini ko'rsating.
3. Yo'nalgan grafda quyidagi xususiyatlar o'rinlilikini isbotlang
 - yo'naltirilgan graflarning har bir marshrut yo'li hisoblansin.
 - G – kontursiz grafni aniqlang.
 - G yo'naltirilgan grafning cho'qqilarini shunday tartibda tashkil etish mumkinki, uning bog'langanlik matritsasini yuqori uchburchakli matritsa tashkil etsin.
4. Berilgan graflardan tekis va notekis graflarni toping.



2.17–rasm

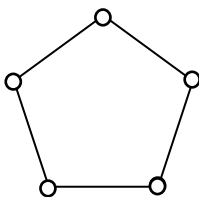
5. To'g'ri ko'p burchaklar uchun bog'langanlik va insidentlik matritsalarini ko'rsating.
6. Berilgan kvadratni uning tomonlariga parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlar yordamida n^2 kichik kvadratlarga to'g'ri bo'ling (2.18–rasm).



2.18–rasm

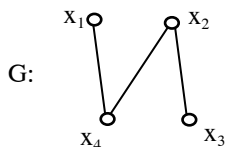
7. m - ta cho'qqiga va n ta qobiqlari bo'lgan tugunchasiz graflarning to'liq sonini aniqlang.
8. Agar oddiy graf G bog'lanmagan bo'lsa, u holda unga qo'shimcha graf $\overline{G}$ bog'langan bo'lishini isbotlang.
9. Agar graf G m ta cho'qqi va n ta qobiqqa ega bo'lsa, ya'ni $n=m-1$. Graf G bog'lanmagan graf ekanligini isbotlang.
10. Agar $\delta(G) \geq (n-1)/2$ bo'lsa, n ta cho'qqi oddiy graf bog'langan ekanligini isbotlang.
11. Bo'lmaganda 2 ta cho'qqiga ega bo'lgan oddiy graf bir xil darajali 2 ta cho'qqiga ega ekanligini ko'rsating.
12. Agar graf $G = \langle X, U \rangle$ oddiy va bog'langan bo'lsa va to'liq bo'lmasa, u holda u shunday 3 ta x_i, x_j, x_k cho'qqiga egaki, (x_i, x_j) va (x_j, x_k) qobiqlar U ga tegishli, (x_i, x_k) – esa U ga tegishli emas.
13. Cho'qqilar soni $m=2,3,5$ bo'lgan to'liq grafni chizing.
14. Cho'qqilar soni $m=3,5,k$ bo'lgan to'liq grafda har bir cho'qqi nechta qobiqqa tegishli bo'ladi?
15. Cho'qqilar soni $m=3,4,5$ bo'lgan to'liq grafda qobiqlar soni qancha?
16. Yettita qobiqdan iborat to'liq graf bormi?

17. Cho'qqilar soni m bo'lgan to'liq grafda qobiqlar soni $n(n-1)/2$ ekanligini isbot qiling.
18. To'liq graf hosil bo'lishi uchun tasvirlangan grafga nechta qobiq qo'shish kerak (2.19–rasm)?

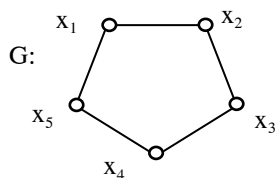


2.19–rasm

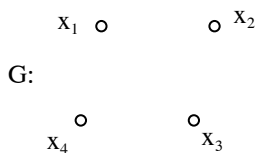
19. G grafiga qo'shimcha bo'lgan G^1 grafini chizing (2.20–rasm).



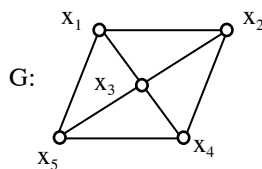
a)



b)



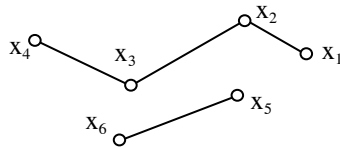
c)



d)

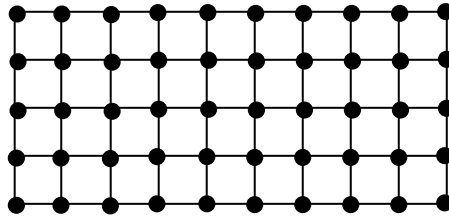
2.20–rasm

20. Shunday beshta cho'qqidan iborat bo'lgan grafni topish mumkinmi? Uning bitta cho'qqisi ozod va boshqasining darajasi to'rtga teng bo'lsin.
21. Shunday beshta cho'qqidan iborat bo'lgan grafni topish mumkinmi? Uning cho'qqilari darajasi har xil, ya'ni 0,1,2,3,4.
22. Beshta cho'qqidan iborat G grafini chizing, unda ikkita cho'qqi bir xil darajaga ega bo'lsin.
23. Tasvirlangan grafni shunday to'ldiringki u bog'langan bo'lsin (2.21–rasm).



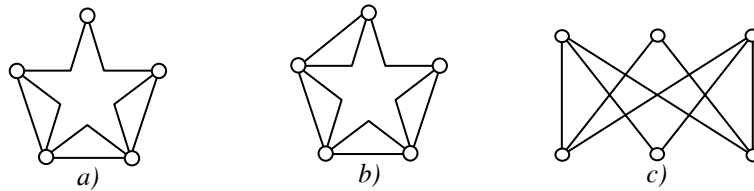
2.21–rasm

24. 7 ta cho`qqi va 6 ta qobiqdan iborat hamda siklga ega bo`lmagan graf chizing.
25. 7 ta cho`qqi va 6 ta qobiqdan iborat bo`lgan bog`langan grafni chizing.
26. Har qanday ikkita cho`qqi orasida ularni bog`lovchi yagona yo`ldan iborat bo`lgan 7 ta cho`qqili graf quring.
27. G grafning bir qism qobiqlarini shunday olib tashlangki, natijada hosil bo`lgan graf  $G$  daraxtdan iborat bo`lsin va grafning barcha cho`qqilarini o`zida saqlasin.
28. m ta cho`qqidan va  $n$  ta qobiqdan iborat bo`lgan grafning barcha cho`qqilarini saqlagan holda, daraxt hosil qilish uchun nechta qobig`ini olib tashlash kerak.
29. 2.22–rasmda berilgan graf bog`langan graf bo`lishi uchun eng ko`pi bilan nechta qobiqlarni olib tashlash mumkin?



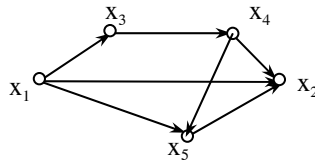
2.22–rasm

30. 5 ta cho`qqidan iborat hamma mumkin bo`lgan daraxtlarni ko`rib chiqing. Ularning har bir cho`qqisining darajasi 1 ga yoki 2 ga teng. Shunday daraxtlardan nechta bor?
31. Berilgan G graf tekisligini isbotlang (2.23–rasm).



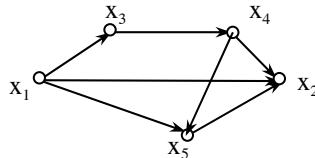
2.23–rasm

32. To'rtta cho'qqidan iborat tekis bo'lmagan graf bormi?
33. Oltita cho'qqidan iborat tekis bo'lmagan graflarga misol keltiring.
34. G grafga yangi qobiqlarni shunday qo'shsangiz, natijada tekis graf hosil bo'ladimi? Agar mumkin bo'lsa, ular qanday ko'rinishda bo'ladi.
35. G grafning qobiqlarini to'g'ri chiziq bilan tekislikda tasvirlang.
36. m ta cho'qqidan hamda n ta qobiqdan iborat bo'lgan yo'naltirilgan grafda quyidagilarni isbotlang:
 - a) x_1 kirish darajasi + x_2 kirish darajasi + ... + x_m kirish darajasi = n ;
 - b) x_1 kirish darajasi + x_2 kirish darajasi + ... + x_m kirish darajasi = x_1 chiqish darajasi + x_2 chiqish darajasi + ... + x_m chiqish darajasi;
37. Nima uchun berilgan graf to'liq yo'naltirilgan graf emas (2.24–rasm)?



2.24–rasm

38. Oltita cho'qqidan iborat bo'lgan to'liq yo'naltirilgan grafni chizing.
39. Tasvirlangan graf uchun bog'langanlik matritsasini quring (2.25–rasm).



2.25–rasm

40. Quyida keltirilgan bog`langanlik matritsalar uchun graflarni tasvirlang.
41. Graf bog`langanlik matritsa ko`rinishida keltirilgan. Shu matritsa orqali qanday topish mumkin?: a) grafning cho`qqilari sonini; b)  $B_i$  cho`qqidan chiquvchi qobiqlar sonini; d) B_i cho`qqiga kiruvchi qobiqlar sonini; e) yo`naltirilgan grafdagi qobiqlar sonini.
42. Agar grafning bog`langanlik matritsasida asosiy diagonaldagi elementlar 0 ga teng bo`lsa, bunday graf qanday xususiyatga ega?
43. 5 ta cho`qqidan iborat bo`lgan bog`lanmagan grafni chizing.
44. Grafning bog`langan matritsasini toping
45. Grafning insidentli matritsasini toping.
46. Grafning bo`laklarini toping.
47. Markazida bitta cho`qqi bo`lgan grafni quring.
48. Markazida uchta bog`langan cho`qqi bo`lgan grafni quring.
49. Darajasi $\lambda(x_i) \geq n$ bo`lgan daraxtlarni quring, $n=1,2,\dots,10$.
50. λ_5 cho`qqining bog`langan graflarida eng kam qobiqlar soni qanchaga teng?
51. Cho`qqilar soni  $n > 5$  bo`lgan tekis grafni chizing. Unda darajasi 3 dan katta bo`lmagan 4 ta cho`qqi bo`lishi kerak.

III. GRAFLARNING IZOMORFLIGINI ANIQLASH.

3.1. Graflar izomorfligining asosiy shartlari

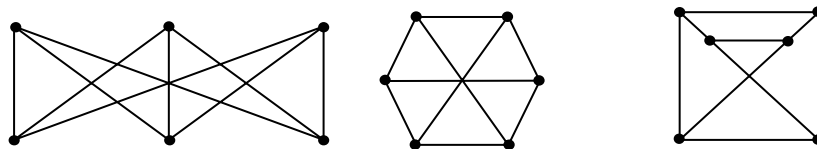
Ikkita graf $G=\langle X, U \rangle$ va $G^1=\langle X^1, U^1 \rangle$ izomorf deyiladi, agar ularning choʻqqilar toʻplami X, X^1 oʻzaro mos boʻlsa, yaʼni bir grafdagi choʻqqilardan tashkil etilgan qobiqlar U , ikkinchi grafdagi choʻqqilarni birlashuvidan tashkil topgan qobiqlarga U^1 mos kelishi kerak. Agar qobiqlar yoʻnaltirilgan boʻlsa, u holda ularning yoʻnalishlari ham ikkita graf boʻyicha mos kelishi kerak.

Graflarning izomorfligini aniqlashni – ekvivalentlik yoki oʻxshashlik deb ham tushunish mumkin.

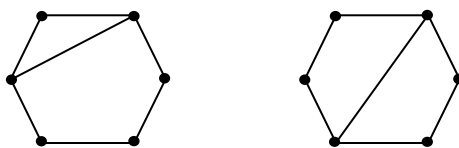
Graflar nazariyasida graflarning izomorfligini aniqlash asosiy markaziy oʻrinni egallaydi. Ayrim mualliflarni fikriga koʻra [1], umumiy holda bu masala toʻliq saralash bilan yechiladi. Bu holda m ta choʻqqiga ega boʻlgan ikkita oddiy grafning izomorfligini aniqlash uchun $m!$ teng taqqoslash kerak boʻladi.

Masalan: Berilgan uchta graf (3.1-rasm) bir-biriga nisbatan izomorf boʻlsa, 3.2 - rasmda berilgan graflar esa izomorf emas, nima uchun?

Bu savolga javob berish uchun izomorf masalasini toʻliq koʻrib chiqishga toʻgʻri keladi.



3.1–rasm

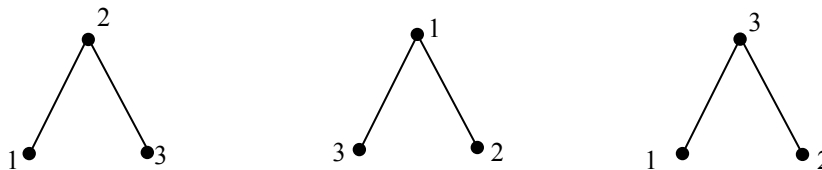


3.2–rasm

Graflarning izomorfligini aniqlash talab etilgan holda, belgilangan graf tushunchasini kiritish mumkin.

Graf bogʻlangan boʻladi, agar uning choʻqqilari birorta belgiga ega boʻlsa, masalan 3.3–rasmda choʻqqilarning har xil belgilangan uchta graf berilgan.

Bunday graflar bir-biriga oʻxshash, yaʼni izomorf graflar deb ataladi, chunki ular choʻqqilarini tartib raqami bilan belgilash boʻyicha farq qiladi.



3.3–rasm

Shunday qilib 3.1–rasmda berilgan graflar bir-biriga izomorf hisoblanadi, chunki koʻrinish jihatdan har xil boʻlishiga qaramasdan choʻqqilarining bir-biri bilan bogʻlanishi, yaʼni choʻqqilarning, yoki qobiqlarning tashkil etilishi bir xildir. Bu rasmda ham choʻqqilarning, yoki qobiqlarning tartib raqamini oʻzgarishi, ularning izomorfligini izhor eta olmaydi.

Graflarning izomorfligini aniqlashning bir nechta yoʻllari bor.

1. Graflar izomorf boʻladi, agar ularning bogʻlanganlik matritsalarini biri ikkinchisidan qatorlarining va ustunlarining oʻrnini bir xil almashtirish bilan hosil qilingan boʻlsa. Bu holda bogʻlanganlik matritsalarini teng boʻlsa, graflar izomorf boʻladi.

2. Graflar izomorf boʻladi, agar ularning insidentli matritsasi biri ikkinchisidan qator va ustunlarning oʻrnini ixtiyoriy oʻzgartirish orqali olinsa, yaʼni bu holda bir-biriga teng boʻlgan insidentli matritsa hosil boʻlishi kerak.

3. Graflarning izomorfligini topish uchun saralash usulidan foydalanish taklif etiladi, yaʼni saralash sonini kamaytirishdan iborat. Shunday usullardan biri graflarni sathlarga boʻlishga asoslangan. Bunday yechilish usullari koʻproq amaliyotga bogʻliq boʻlib, boshlangʻich choʻqqilarni toʻgʻri tanlashga asoslangan, yaʼni ikkita graf boʻyicha bir-biriga mos choʻqqilarni aniqlash talab etiladi. Bunday choʻqqilarni aniqlash elektrik, funksional, topologik va boshqa sxemalarda qiyinchilik tugʻdirmaydi.

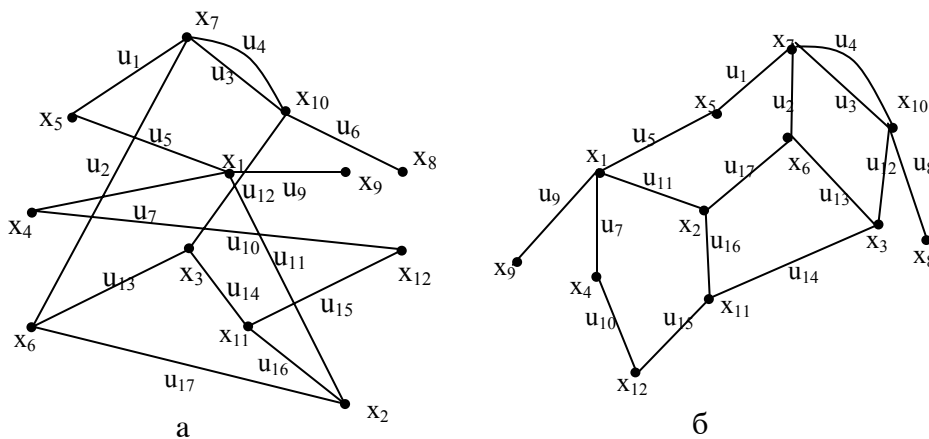
3.2. Graflarni sathlarga boʻlish

1- lemma. Ixtiyoriy graf $G<X,U>$ ning U qobiqlarini R sathlar bo'yicha bo'lish mumkin.

Isbot. $G=<X,U>$ ixtiyoriy yo'naltirilmagan graf (3.4.,a-rasm) berilgan, bu yerda $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ – cho'qqilar to'plami; $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ qobiqlar to'plami. Grafning qobiqlarini sathlar $R=\{1, 2, \dots, r, \dots, l\}$ bo'yicha bo'lish talab etiladi.

Grafni sathlarga bo'lish uchun birinchi boshlang'ich cho'qqi $X_H \in X$ yoki boshlang'ich $X_{N1} \subset X$ cho'qqilarni tanlab olish talab etiladi. Bu cho'qqilar birinchi sath $r=1$ uchun boshlang'ich cho'qqilar hisoblanadi. Agar boshlang'ich cho'qqilar ma'lum bo'lsa, ularga mos ravishda incident bo'lgan $U_r \subset U$ qobiqlarni aniqlaymiz. Bu qobiqlar birinchi sathning qobiqlari hisoblanadi va ularning ikkinchi cho'qqilari $X_{K1} \subset X$ shu sathning tugash cho'qqilari hisoblanadi. Shu tartibda grafning birinchi sathi $r=1$ uchun $(X_{N1}, X_{K1}) = U_r$ hosil qilamiz (3.4.,b-rasm).

Berilgan 3.4.,a-rasmda boshlang'ich cho'qqini $X_{N1}=(x_7)$ deb belgilaymiz, u holda x_7 ga incident bo'lgan $U_1=(u_1, u_2, u_3, u_4)$ qobiqlarni topamiz va ular bilan bog'liq bo'lgan $X_{K1}=(x_5, x_6, x_{10})$ cho'qqilarni aniqlaymiz.



3.4-rasm. Graflarni sathlarga bo'lish.

a- graf $G<X,U>$; b- graf $G^I<X^I,U^I>$

Shu tariqa keyingi sath $r=2$ uchun X_{K1} cho'qqilari boshlang'ich cho'qqilar $X_{N2}=X_{K1}$ deb aniqlab, ularga bog'liq bo'lgan U_2 qobiqlarni

aniqlaymiz va natijada ular bilan bog'liq bo'lgan cho'qqilar X_{K2} hosil bo'ladi.

Sath $r=2$ uchun boshlang'ich cho'qqilar $X_{N2}=\{x_5, x_6, x_{10}\}$ bo'lsa, $X_{K2}=\{x_1, x_2, x_3, x_8\}$ esa tugash cho'qqilar hisoblanadi, natijada qobiqlar $U_2=\{u_5, u_9, u_{10}, u_6, u_8\}$ hosil bo'ladi.

Shunday qilib har bir sathning boshlang'ich cho'qqilari X_H ga nisbatan tugash cho'qqilar X_K va qobiqlar U aniqlanib ular sathlarga taqsimlanadi. Natijada graf $G=<X,U>$ uchun graf $G'=<X,U>$ hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan graf G' – yo'nalgan graf deb ataladi va uning cho'qqilari X va qobiqlari U ga teng bo'ladi.

1-shart. Agar biror $r \in R$ sathning cho'qqilari shu sath uchun bog'langan va tugash bo'lsalar, ularni bog'lovchi qobiqlar $r+1$ darajaga qarashli bo'ladi va u cho'qqilarning biri boshlang'ich, ikkinchisi esa tugash cho'qqi bo'ladi.

2-shart. Grafda x_i cho'qqisiga insident bo'lgan qobiqlar sonini aniqlovchi, darajasi $\lambda(x_i) \geq 1$ bo'lgan boshlang'ich va tugash cho'qqilar bo'lishi mumkin.

3-shart. Grafning cho'qqisidagi tuguncha, shu cho'qqi boshlang'ich bo'lgan sathga tegishli bo'ladi.

4-shart. Agar yo'naltirilgan qobiqlar biror cho'qqidan chiquvchi va unga kiruvchi bo'lsa, u cho'qqilardan biri boshlang'ich bo'lgan sathga qarashli bo'ladi.

5-shart. Ikkita cho'qqini bog'lovchi parallel qobiqlar yoki yo'naltirilgan qobiqlar ularni turiga qaramasdan bitta sathga qarashli bo'ladi.

1-A lemma. Agar ixtiyoriy graf bog'lanmagan bo'lsa, uning har bir bog'lanish komponentasining qobiqlari sathlar bo'yicha alohida bo'lingan bo'lishi kerak.

Bu holda grafning har bir bog'lanish komponentasiga nisbatan 1-lemma va 1-5 – shartlar bajarilishi kerak.

3.3. Graflarning izomorfligi

$G=<X,U>$ va $L=<Y,U>$ graflarning izomorfligini aniqlashda quyidagi asosiy shartlar bajarilishi kerak bo'ladi:

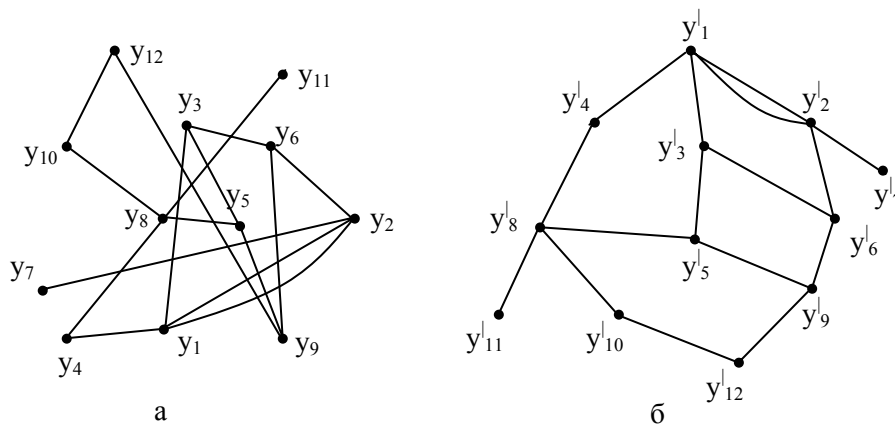
- Graflarning cho'qqilari soni teng bo'lishi kerak, ya'ni $|X| = |Y|$;
- Graflarning qobiqlari soni teng bo'lishi kerak, ya'ni $|U| = |V|$;
- Graflarning cho'qqilari X, Y va qobiqlari U, V mos ravishda teng bo'lishi kerak, ya'ni $X \Leftrightarrow Y, U \Leftrightarrow V$.

Bu uchta shartning bajarilishi graflarning izomorfligini ta'minlaydi. Birinchi va ikkinchi shartlar zaruriy shart, uchinchi shart esa yetarli shart hisoblanadi.

Birinchi va ikkinchi shartlarni bajarish uchun, G va L graflardagi cho'qqilar sonining tengligi aniqlanadi. Bu yerda cho'qqilar to'plami $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y=\{y_1, y_2, \dots, y_{m1}\}$ va qobiqlar to'plami $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $V=\{v_1, v_2, \dots, v_{n1}\}$.

$G=\langle X, U \rangle$ va $L=\langle Y, V \rangle$ graflarning izomorfligini aniqlash uchun yuqoridagi shartlarni hisobga olgan holda quyidagi masalalarni yechish talab etiladi.

- graflarda boshlang'ich cho'qqilarni topish;
- graflarni sathlarga bo'lish;
- graflarning sathlar bo'yicha izomorfligini aniqlash;
- graflarning izomorfligini aniqlash.



3.5-rasm. Graflarni sathlarga bo'lish.

a- graf $L=\langle Y, V \rangle$, b- graf $L'=\langle Y', V' \rangle$

3.2 bandga asoslangan holda $L=\langle Y, V \rangle$ grafidan $L'=\langle Y', V' \rangle$ yo'nalgan grafini hosil qilamiz.

3.3.1 Graflarda boshlang'ich cho'qqilarni topish

Graflarda boshlang'ich cho'qqilarni topish uchun quyidagi lemmadan foydalanamiz:

2- lemma. Ixtiyoriy $G=\langle X,U \rangle$ va $L=\langle Y,V \rangle$ graflar berilgan (3.4a, 3.5a–rasmlar). Ular o'zaro mos keluvchi minimal songa teng bo'lgan $x_i \in X$ va $y_i \in Y$ cho'qqilaridan iborat. Bu holda G va L graflari uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

$$S^G = S^L$$

bu yerda,

$$S^G = S^o(x_i) + S^-(x_i) + S^+(x_i) + S^{\sim}(x_i);$$

$$S^L = S^o(y_i) + S^-(y_i) + S^+(y_i) + S^{\sim}(y_i)$$

$S^o(x_i), S^o(y_i)$ – x_i va y_i cho'qqilaridagi tugunchalar soni;

$S^-(x_i), S^-(y_i)$ – x_i va y_i cho'qqilariga kiruvchi yo'naltirilgan qobiqlar soni;

$S^+(x_i), S^+(y_i)$ – x_i va y_i cho'qqilaridan chiquvchi yo'naltirilgan qobiqlar soni;

$S^{\sim}(x_i), S^{\sim}(y_i)$ – x_i va y_i cho'qqilariga insident bo'lgan qobiqlar soni.

O'zaro mos keluvchi cho'qqilarni topish G va L graflar uchun belgili matritsalarini hisoblashga asoslanadi. Belgili matritsalarida M_p^G va M_p^L ularning qatorlari cho'qqining tartib raqamlari bilan, ustunlari esa qobiqlarning belgilari ($\psi, \eta, \delta, \theta$) bilan aniqlanadi. Bu yerda ψ – x_i yoki y_i cho'qqilardan chiquvchi yo'naltirilgan qobiqlar sonini aniqlovchi belgi; η – x_i yoki y_i cho'qqilariga kiruvchi yo'naltirilgan qobiqlar sonini aniqlovchi belgi; δ – x_i yoki y_i cho'qqilaridagi tugunchalar sonini aniqlovchi belgi; θ x_i yoki y_i cho'qqilariga insident bo'lgan qobiqlarni aniqlovchi belgi.

M^G va M^L matritsalarining teng qiymatlilikini aniqlash matritsalar qatorini ketma-ket taqqoslash orqali teng qiymatli belgilar soni bo'lgan qatorlarni topish bilan aniqlanadi. Bu qatorlar bir-biriga mos bo'lgan cho'qqilarni aniqlaydi.

$$M_p^G(i, j) = M_p^L(i + \tau, j), \quad M_p^G(i^l, j^l) = M_p^L(i^l + \tau^l, j^l),$$

$$M_p^G(i, j) = M_p^L(i^l, j^l)$$

Bu yerda, $j, j^l = \overline{1, H}$; τ, τ^l – o'zgaruvchan sonlar, ular 1 dan $m-1$ gacha i ga teng bo'lmagan qiymatlarni qabul qilishi mumkin. M_p^G va M_p^L matritsalarini bo'yicha teng qiymatli qatorlarni topishda

bir-biriga teng bo'lgan qatorlar sonini, ya'ni τ, τ^l aniqlash kerak. Bu holda M_p^G da teng qiymatli qatorlar soni minimal qiymatga ega bo'lishi kerak, M_p^G va M_p^L da ularni soni teng bo'lishi kerak.

G va L graflarda teng qiymatli qatorlar $X_K \subset X$ va $Y_K \subset Y$ cho'qqilarini aniqlaydi. Shunday qilib ko'rilayotgan graflarda o'zaro mos bo'lgan $X_K \Leftrightarrow Y_K$ cho'qqilar aniqlanadi va ular boshlang'ich cho'qqilar $X_N = X_K$, $Y_H = Y_K$ hisoblanadi. Boshlang'ich cho'qqilar X_N , Y_H ni topish uchun qatorlar ustida N marta taqqoslash olib borish kerak

$$m \leq N \leq m(m+1)/2$$

bu yerda, m grafdagi cho'qqilar soni.

Umumiy holda G va L graflari uchun bir xil darajaga ega bo'lgan o'zaro mos keluvchi $|X_H| > 1$, $|Y_H| > 1$ topilishi mumkin. Belgili matritsalarini har bir sathi va qatori bo'yicha taqqoslab, teng qiymatli qatorlarni aniqlaymiz, ya'ni $S(x_i) = S(y_i)$.

Bunday hollarda bu cho'qqilar boshlang'ich cho'qqilar deb qabul qilinadi. (Lemma 1).

Natijada, agar G va L graflari izomorf bo'lsa, M_p^G va M_p^L matritsalarida hech bo'lmaganda bitta teng qiymatli qator va o'zaro mos cho'qqi mavjud bo'ladi.

2-A lemma. Agar ixtiyoriy graflar bog'lanmagan komponentlardan tashkil topgan bo'lsa, ularda o'zaro mos bo'lgan bog'lanmagan komponentlarning boshlang'ich cho'qqilarini birgalikda topish mumkin.

Graf G va L ning cho'qqilari va qobiqlari, hamda bog'lanmagan komponentlarining belgili matritsalarini teng qiymatli bo'lsa, bog'langanlik komponentalari teng qiymatli bo'ladi.

2- lemma asosida bir-biriga o'xshash belgili matritsalar tanlab olingandan so'ng har bir bog'langanlik matritsasi uchun boshlang'ich cho'qqi aniqlanadi.

3- lemma. Agar G va L graflar izomorf bo'lsa, G^l va L^l graflarning har bir sathida (3.5-rasm) boshlang'ich va tugash cho'qqilari soni bir xil va ular o'zaro mos.

Isbot. G grafning har bir qobig'i $u_j \in U$ ni $(\omega_\alpha, \varphi_\beta)$ bilan aniqlaymiz. L grafning har bir qobig'i $v_j \in V$ ni esa (w_α, γ_β) bilan aniqlaymiz.

Bu yerda $\alpha=1,2,\dots,A$; $\beta=1,2,\dots,V$ qiymatlar qabul qiladi; ω_α , $w_\alpha - u_j$, v_j qobiqlarning x_j , y_i boshlang'ich cho'qqilarining r sathidagi tartib raqami. φ_α , γ_β - u_j va v_j qobiqlarning x_j , y_j tugash cho'qqilarining r sathidagi tartib raqami.

Graflarni sathlarga bo'lish usuli (1-lemma) ga asosan cho'qqilarning qayta tartib raqamini aniqlaymiz. Har bir sath uchun α va β larni qiymatlarining o'sish tartibi alohida bo'ladi. Bu tartib G va L graflarni cho'qqilarining darajasini hisobga olgan holda belgili matritsalar (2-lemma) yordamida aniqlanadi. Agar $A=V$ bo'lsa, ya'ni har bir sathidagi cho'qqilar soni teng bo'lsa, u holda cho'qqilarning bir-biriga nisbatan o'zaro mos kelishini aniqlash kerak.

Cho'qqilarning o'zaro mos ekanligini aniqlash uchun, ularni sathini o'sish tartibini aniqlash kerak. Natijada graf G va L ning qobiqlari va cho'qqilari sathlar bo'yicha taqsimlanib ichki tartib raqamlari bilan aniqlangan bo'ladi.

1-teorema. G graf L grafga izomorf bo'ladi, agar:

1. Ixtiyoriy r darajasida G va L graflar bo'yicha boshlang'ich cho'qqilar va tugash cho'qqilar va ularning sathlari bir-biriga teng bo'lsa

$$\forall r \in R \quad [|\omega_\alpha|=|w_\alpha|, |\varphi_\beta|=|\gamma_\beta|, s(x_i)=s(y_i)].$$

2. Ixtiyoriy x_i cho'qqisi uchun shunday u_i cho'qqisi borki ular uchun boshlang'ich va tugash cho'qqilari teng bo'lish sharti bajarilsa

$$\forall x_i \in X \quad \exists y_i \in Y [(\omega_\alpha=w_\alpha) \wedge (\varphi_\beta=\gamma_\beta)].$$

3. G^I va L^I graflarning insidentli matritsalar bir-biriga o'xshash yoki teng bo'lsa,

$$M_G = M_L$$

Isbot. 1-lemmaga nisbatan X , U to'plamlarni har bir cho'qqisi va U , V to'plamlari qobiqlari darajalar bo'yicha taqsimlanadi. Har bir graf uchun boshlang'ich cho'qqi 2-lemma asosida aniqlanadi. (3.4.,b- rasm). Natijada G va L graflari G^I va L^I yo'naltirilgan graflarga aylanadi. 3-lemma asosida graflarning cho'qqisi va qobiqlari yangi tartib raqamlarga ega bo'ladi. Natijada r sathda boshlang'ich va tugash cho'qqilarning o'zaro teng qiymatga ega

bo'lishi 1-2-teoremlarning kerakli shartlarini bajarilishini ta'minlaydi.

Teoremaning yetarli sharti graflarni insidentlik matritsalarini M_G va M_L tengligi va ularning har biri sathlar bo'yicha matritsalaridan tashkil topganligi bilan aniqlanadi. Agar darajalar bo'yicha matritsalar teng qiymatga ega bo'lsa, u holda matritsalar teng bo'ladi. Natijada G^l va L^l graflar izomorfligi ta'minlanadi.

M_G va M_L matritsalarining o'xshashligi ularning elementlari a_{ij} va a_{ji}^l larni qatorlar (qobiqlar) bo'yicha taqqoslash orqali aniqlanadi. G va L graflar sathlarga bo'linganligi kabi insidentlik matritsasi ham sathlar bo'yicha N_r va N_r^l aniqlanadi. Bu yerda $N_r = \|a_{jt}\|$ va $N_r^l = \|a_{js}^l\|$; $t, s = 1, 2, \dots$ matritsalariga nisbatan har bir sathidagi ustunlar soni.

Shunday qilib:

- matritsa ustunlarining elementlari mos ravishda teng qiymatli bo'lishi kerak $a_{jt} \Leftrightarrow a_{js}$;
- matritsa sathlaridagi ustunlari teng qiymatli bo'lishi kerak:
 $A_t \Leftrightarrow A_s^l$ bu yerda $A_t = \{a_{1t}, a_{2t}, \dots, a_{nt}\}$;
 $A_s^l = \{a_{1s}^l, a_{2s}^l, \dots, a_{ns}^l\}$;
- matritsa sathlari teng qiymatli bo'lishi kerak:
 $N_t = \|A_t\| \Leftrightarrow N_r^l = \|A_s^l\|$;
- matritsalar teng qiymatli bo'lishi kerak:
 $M_G = \|N_r\| \Leftrightarrow M_L = \|N_r^l\|$.

Natijada sathlar bo'yicha matritsalar teng bo'ladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa,

$$\mu = \begin{cases} 0, & \text{agar } (\forall a_{ij} \in A_s^l \exists a_{ij} \in A_t) \wedge (\forall A_s^l \in N_r^l \exists A_t \in N_t) [N_r \Leftrightarrow N_r^l] \\ \zeta, & \text{agar } (\forall a_{ij}^l \in A_s^l \exists a_{ij} \in A_t) [a_{ij} \neq a_{ij}^l] \end{cases}$$

Agar $\mu_t = 0$ bo'lsa sathlar teng qiymatli, $\mu_r = \xi_{r1}$ - sathlar teng emas. Ikkinchi holda r sath uchun xatoliklar $\xi_r = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r1}\}$ to'plamida yig'iladi. Bu to'plamda w_α , γ_β va ularga mos qobiq v_j , hamda ω_α , ϕ_β va u_j qobig'idan tashkil topadi. ω_α , ϕ_β va qobiq u_j qiymatlari yordamida y_i va y_i^l cho'qqilarning bog'lovchi v_j qobig'i aniqlanadi. r sath bo'yicha xatoliklarni aniqlagandan so'ng $r+1$ sath ko'rib chiqiladi. Natijada hamma sathlarni taqqoslab o'zgartirish kerak bo'lgan cho'qqilar topiladi.

2-teorema. G va L graflarning izomorfligini aniqlash uchun

$\frac{1}{2} \sum_{r=1}^e n_r (n_r + 1)$ taqqoslash yetarli hisoblanadi. Bu yerda r - sathning tartib raqami, n_r - har bir sathdagi qobiqlar soni, m - cho'qqilar soni, n - qobiqlar soni.

G va L graflarni izomorfligini aniqlash uchun, umumiy holda G grafning har bir qobig'ini L grafning har bir qobig'i bilan taqqoslash talab etiladi. M_G matritsasining har bir ustuniga ikkinchi M_L matritsaning mos ustunini topish uchun, M_G ning har bir ustunini M_L ning hamma ustunlari bilan taqqoslab mos ustunni tanlab olish uchun n ta taqqoslashni bajarish kerak. Keyingi ustunlarni topishda n-1, n-2... taqqoslashlar olib boriladi. Shunday qilib M_G va M_L ni teng qiymatli ekanligini topish uchun $n(n+1)/2$ taqqoslash kerak bo'ladi. Agar bu taqqoslashlar sath miqyosida olib borilsa, har bir

sath uchun $\frac{1}{2} \sum_{r=1}^e n_r (n_r + 1)$ taqqoslash kerak bo'ladi. Har bir matritsa

M_G va M_L mos ravishda sath matritsalarini N_r va N_r^l bilan aniqlanadi.

G va L graflarning izomorfligini ularning sathlariga bo'lish bo'yicha aniqlash algoritmining samaradorligi quyidagicha aniqlanadi:

$$\theta = \frac{n(n+1)}{\sum_{r=1}^e n_r (n_r + 1)}$$

bu yerda $\sum_{r=1}^e n_r = n$. Graflar bitta sath bilan tasvirlangan holda, ya'ni

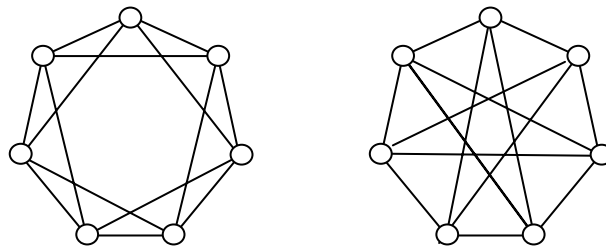
$l=1$, $n_r=n$ bo'lganda $\theta=1$ bo'ladi. Boshqa hamma hollarda $\theta>1$ bo'ladi. Agar $l>>1$ va $n_r=1$ bo'lsa, u holda $\theta>>1$ bo'ladi va algoritmi izomorflikni tezroq topish imkoniga ega bo'ladi. Ixtiyoriy graflar G va L izomorfligini topish algoritmini quyidagicha tasvirlash mumkin:

- G va L graflar uchun M_p M_p^l belgili matritsalarini hisoblash;
- o'zaro mos qiymatli X_k va U_k cho'qqilarni topish;
- G va L graflar uchun boshlang'ich cho'qqilar $X_H \subset X$ $Y_H \subset Y$ ($X_H \Leftrightarrow Y_H$) tanlash;
- G va L graflarni boshlang'ich cho'qqilar X_H va U_H asosida sathlarga bo'lish;
- yo'nalgan graflarni $G^l = \langle X, U \rangle$ va $L^l = \langle Y, V \rangle$ aniqlash;

- G va L graflarni sathlari bo'yicha cho'qqilarni juft tartib raqamlari bilan belgilab chiqish (w_α, φ_β) va ($\omega_\alpha, \gamma_\beta$);
- G va L graflar uchun insidentli matritsani aniqlash $M_G = \|a_{ij}\|$ va $M_L = \|a_{ij}^1\|$
- sathlar bo'yicha matritsalarini $N_r = \|a_{it}\|$ $N_r^1 = \|a_{is}^1\|$ o'zaro bir xil qiymatga ega ekanligini aniqlash;
- agar $N_r \Leftrightarrow N_r^1$ bo'lsa, sathga nisbatan graf bo'laklari izomorf hisoblanadi va keyingi sath matritsasi tekshiriladi, aks holda graf izomorf emasligi aniqlangan bo'ladi.
- graflar sathi izomorf bo'lmagan holda ularni izomorf holga keltirib keyingi sathga o'tish mumkin.
- graflarning hamma sathlari bo'yicha izomorflik ta'minlangandan so'ng graflar izomorf deb hisoblanadi.

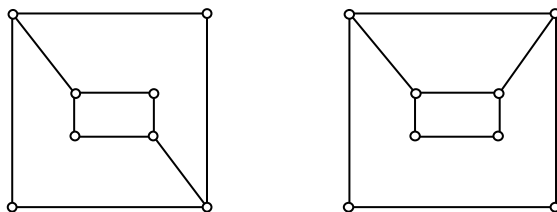
3.4. Masala va mashqlar

1. G va H ikkita graf berilgan. Agar $G \Leftrightarrow H$ bo'lsa, u holda $H \Leftrightarrow G$ bo'ladimi?
2. Beshinchi tartibli bir-biriga izomorf bo'lmagan hamma graflarni toping.
3. 3.1-rasmda tasvirlangan 3 ta graf izomorf, 3.2-rasmda tasvirlangan 2 ta graf izomorf emasligini isbotlang.
4. 8-tartibli bir-biriga izomorf bo'lmagan juft kub graflarni chizing.
5. 7-tartibli bir-biriga izomorf bo'lmagan juft kub graflarni chizing.
6. Keltirilgan graflar izomorfmi? Nima uchun (3.6-rasm)?



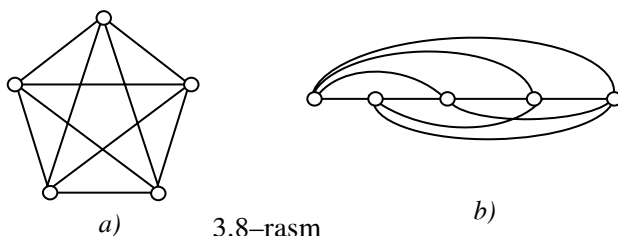
3.6-rasm

7. Berilgan 2 ta graf izomorf emasligini ko'rsating (3.7-rasm).



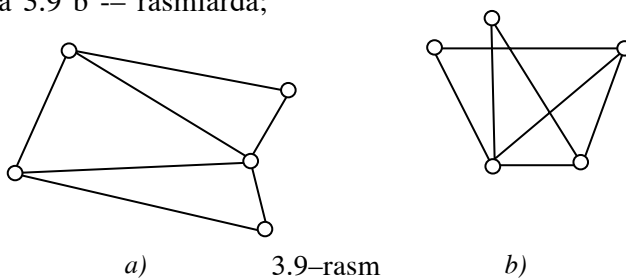
3.7–rasm

8. Uchinchi va toʻrtinchi tartibli oddiy izomorf boʻlmagan graflarni aniqlang. Ilova: 3 ta choʻqqili 4 ta izomorf boʻlmagan graflar va 4 ta choʻqqisi boʻlmagan graflar bormi?
9. Ixtiyoriy m - ta choʻqqili ikkinchi darajali 2 ta oddiy bogʻlangan graf izomorf ekanligini isbotlang.
10. 6 ta choʻqqi uchun 6 ta izomorf boʻlmagan daraxtlar borligini, 7 ta choʻqqi uchun 11 ta izomorf boʻlmagan daraxtlar boʻlishini koʻrsating.
11. Quyida keltirilgan 3.8,3.9,3.10–rasmlarda bir xil graf berilganligini isbotlang:
a) 3.8 a va 3.8 b– rasmlarda;



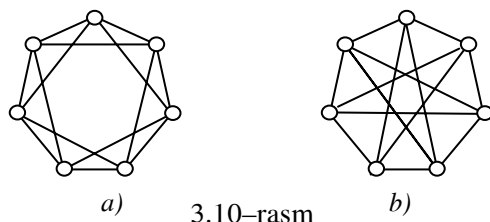
3.8–rasm

- b) 3.9 a va 3.9 b -- rasmlarda;

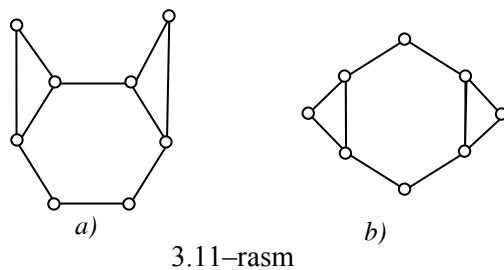


3.9–rasm

d) 3.10 a va 3.10 b – rasmlarda.

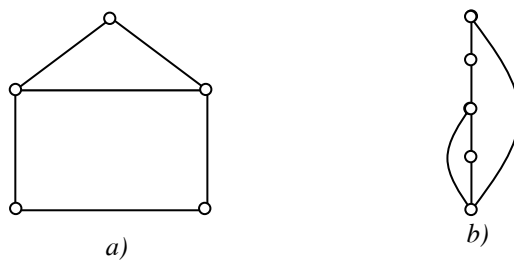


12. Graflarning bir-biriga mos emasligini isbotlang (3.11 a, b–rasmlar).

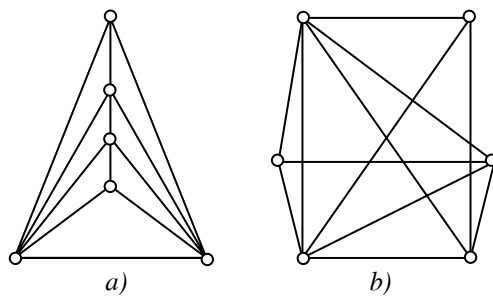


13. Keltirilgan graflar bir xilmi?:

a) 3.12 a va 3.12 b rasmlarda;



b) 3.13 a va 3.13 b – rasmlarda.



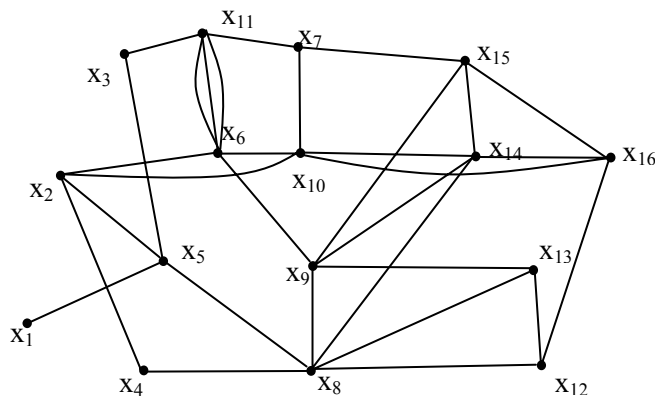
3.13-rasm

IV. GRAFLARDA YO`LLARNI TOPISH.

4.1. Graflarda yo`llarni topish va ularning sonini aniqlash.

Berilgan graf $G=\langle X,U \rangle$. Bu yerda $X=\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ cho`qqilar to`plami, $U=\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ -qobiqlar to`plami bo`lsin (4.1-rasm). Berilgan graf parallel qobiqlardan va tugunchalardan iborat.

Grafda yo`llarni topish uchun graflarni sathlarga bo`lish masalasidan foydalaniladi. Bu holda berilgan graf $G=\langle X,U \rangle$ ni (4.1-rasm) sathlarga bo`linadi.

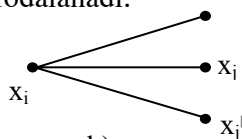


4.1-rasm

Bu yerda parallel qobiqlarni va tugunchalarni oddiy qobiqlar orqali ifodalash asosida qo`shimcha cho`qqilar va qobiqlar tashkil etiladi. Masalan parallel qobiqlar (4.2.,a-rasm) yulduzli graf (4.2.,b-rasm), halqa (4.3-rasm) esa kontur orqali ifodalanadi.

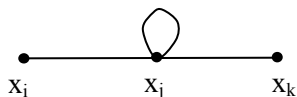


a)

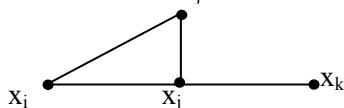


b)

4.2-rasm



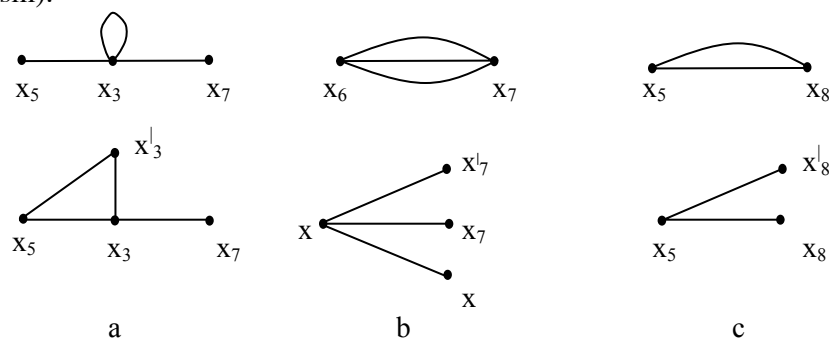
a)



b)

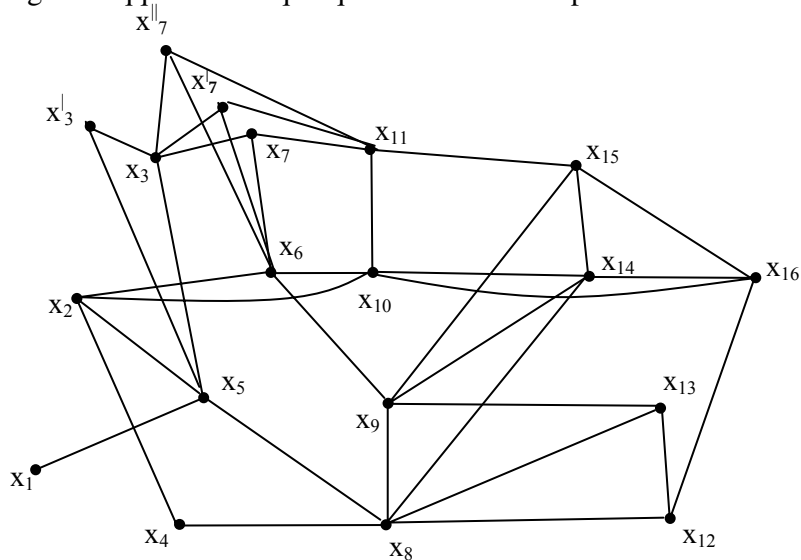
4.3-rasm

Berilgan $G=\langle X,U \rangle$ grafda x_3 cho'qqidagi halqani, (x_6,x_7) va (x_5,x_8) parallel qobiqlarni oddiy qobiqlarga aylantiramiz. Natijada halqa va parallel qobiqlar quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi (4.4–rasm).



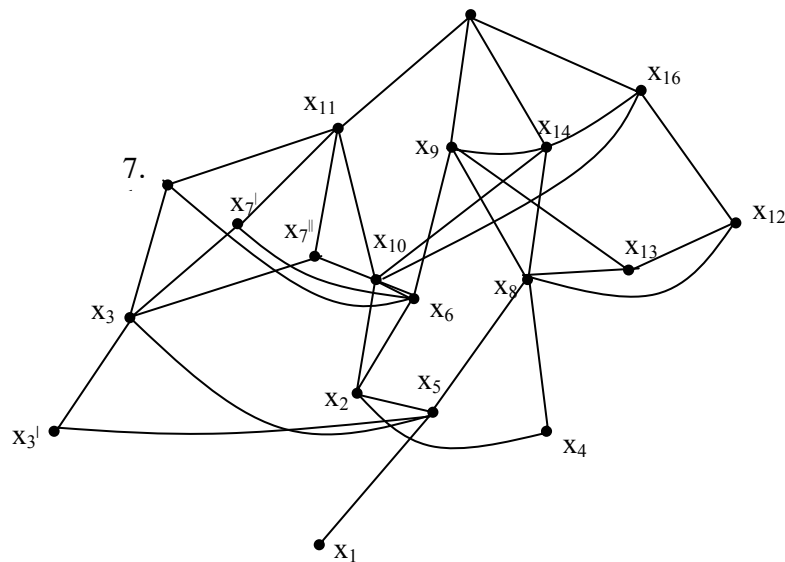
4.4–rasm

Shunday qilib, graf $G=\langle X,U \rangle$ asosida yo'nalgan graf $G^l=\langle X^l,U^l \rangle$ hosil bo'ladi. Bu yerda $X^l=\{x_1, x_2,...,x_k\}$, $U^l=\{u_1, u_2,...,u_l\}$ va $k>m$, $l>n$. Ya'ni, G^l grafdagi cho'qqilar X^l va qobiqlar U^l soni G grafdagi cho'qqilar X va qobiqlar U sonidan ko'pdir.



Masalan: Hosil bo'lgan graf $G^I = \langle X^I, U^I \rangle$ da (4.5-rasm) boshlang'ich cho'qqi x_{15} berilgan bo'lsin. U holda graf $G^I = \langle X^I, U^I \rangle$ da berilgan boshlang'ich cho'qqiga nisbatan mumkin bo'lgan hamma yo'llarni topish talab etiladi. Ayrim holda boshlang'ich cho'qqining o'rnida boshlang'ich cho'qqilar to'plami berilgan bo'lishi mumkin (ikki va undan ortiq). Yo'llarni tugash cho'qqilari oxirgi sathdagi cho'qqilar hisoblanadi. Bundan tashqari sathlardagi boshlang'ich cho'qqilar har doim qobiqning chiqish cho'qqisi bo'lib, tugash cho'qqilar esa qobiqning kirish cho'qqisi hisoblanadi.

Shu tariqa yangi graf $G^{II} = \langle X^{II}, U^{II} \rangle$ (4.6-rasm) hosil bo'ladi. Bu graf to'rtta sathdan iborat. Yo'llar shu sathlarga nisbatan aniqlanadi. Oxirgi sathda x_1 va x_3^I cho'qqilari tugash cho'qqilari hisoblanadi.



4.6-rasm

$G^{II} = \langle X^{II}, U^{II} \rangle$ grafda berilgan shartlarga asoslangan holda yo'llar sonini topamiz. Yo'llar cho'qqilarni bog'lanishi bilan ifodalanadi va quyidagicha tasvirlanadi.

- | | |
|---|---|
| 1. $x_{15} - x_{11} - x_7 - x_3 - x_3^I$ | 16. $x_{15} - x_9 - x_8 - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$ |
| 2. $x_{15} - x_{11} - x_7^I - x_3 - x_3^I$ | 17. $x_{15} - x_9 - x_{14} - x_8 - x_5 - x_1$ |
| 3. $x_{15} - x_{11} - x_7^{II} - x_3 - x_3^I$ | 18. $x_{15} - x_9 - x_{14} - x_8 - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$ |
| 4. $x_{15} - x_{11} - x_7 - x_3 - x_5 - x_1$ | 19. $x_{15} - x_{14} - x_{10} - x_2 - x_5 - x_1$ |

5. $x_{15} - x_{11} - x_7^1 - x_3^1 - x_5 - x_1$
6. $x_{15} - x_{11} - x_7^1 - x_3 - x_3^1$
7. $x_{15} - x_{11} - x_7^1 - x_3 - x_3^1$
8. $x_{15} - x_{11} - x_7^{11} - x_3 - x_3^1$
9. $x_{15} - x_{11} - x_7^{11} - x_3 - x_3^1$
10. $x_{15} - x_{11} - x_7 - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
11. $x_{15} - x_{11} - x_7^{11} - x_6 - x_7 - x_5 - x_1$
12. $x_{15} - x_{11} - x_{10} - x_2 - x_5 - x_1$
13. $x_{15} - x_{11} - x_{10} - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
14. $x_{15} - x_9 - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
15. $x_{15} - x_9 - x_8 - x_5 - x_1$
20. $x_{15} - x_{14} - x_{10} - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
21. $x_{15} - x_{14} - x_8 - x_5 - x_1$
22. $x_{15} - x_{14} - x_6 - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$
23. $x_{15} - x_{16} - x_{10} - x_2 - x_5 - x_1$
24. $x_{15} - x_{16} - x_{10} - x_6 - x_8 - x_5 - x_1$
25. $x_{15} - x_{16}^1 - x_{10} - x_2 - x_5 - x_1$
26. $x_{15} - x_{16} - x_{10} - x_6 - x_2 - x_5 - x_1$
27. $x_{15} - x_{16} - x_{12} - x_{13} - x_8 - x_5 - x_1$
28. $x_{15} - x_{16} - x_{12} - x_8 - x_5 - x_1$
29. $x_{15} - x_{16} - x_{12} - x_{13} - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$
30. $x_{15} - x_{16} - x_{12} - x_8 - x_4 - x_2 - x_5 - x_1$

Shunday qilib, graf $G=\langle X, U \rangle$ da yo'llar soni 30 taga teng.

Yo'naltirilmagan graflarda yo'llarni topish algoritmi quyidagicha tasvirlanadi:

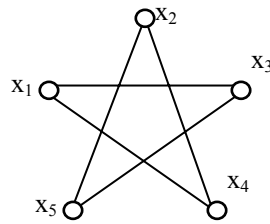
1. $G=\langle X, U \rangle$ – berilgan yo'naltirilmagan graf parallel qobiqlar va tugunchalar bilan ifodalangan.
2. Parallel qobiqlar va tugunchalarni oddiy qobiqlar yordamida tasvirlanadi.
3. $G^1=\langle X^1, U^1 \rangle$ yo'nalgan graf parallel qobiqlar va tugunchalarsiz hosil qilinadi.
4. Ixtiyoriy boshlang'ich cho'qqilarni $X_B \subset X$ tanlab olamiz.
5. $G^1=\langle X^1, U^1 \rangle$ grafni sathlarga bo'lamiz.
6. Oxirgi sathdagi cho'qqilarni tugash cho'qqilari deb tanlab olamiz.
7. Boshlang'ich $X_B \subset X$ va tugash cho'qqilariga $X_T \subset X$ nisbatan mumkin bo'lgan yo'llarni topamiz.

Yo'naltirilmagan, yo'naltirilgan va aralash graflarda yo'llarni topish masalasi graflar nazariyasining asosiy masalalaridan biri hisoblanadi. Bu masala mikroelektron qurilmalarni loyihalashda elektrik va funksional sxemalarda signallarni bir elementdan ikkinchisiga o'tish yo'llarini, hamda kirishda berilgan signallarni tarqalish yo'llarini aniqlashga yordam beradi.

4.2. Masala va mashqlar

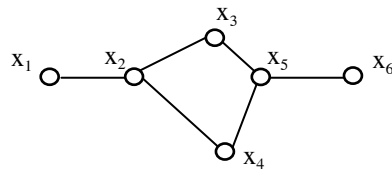
1. Agar G grafda x_i va x_j cho'qqilari orasida, hamda x_i va x_j cho'qqilar orasida yo'l bo'lsa, u holda x_i va x_j orasida yo'l bo'lishini isbot qiling.

2. Grafda x_1 va x_3 cho`qqilarni bog`lovchi ikkita yo`lni toping (4.7–rasm).



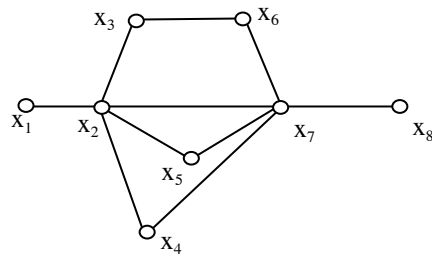
4.7–rasm

3. G graf tasvirlangan (4.8–rasm). x_1 dan x_6 gacha bo`lgan yo`lni aniqlang. x_1 dan x_6 gacha grafning hamma cho`qqilari orqali o`tuvchi yo`llar bormi?



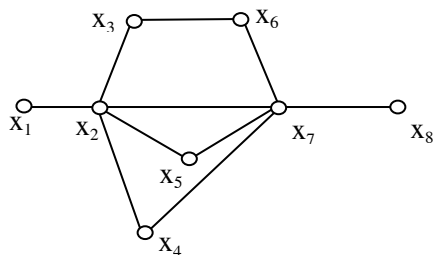
4.8–rasm

4. G grafning hamma cho`qqilarini tashkil etuvchi  $x_1$  dan  $x_8$  gacha yo`llar bormi (4.9–rasm)?



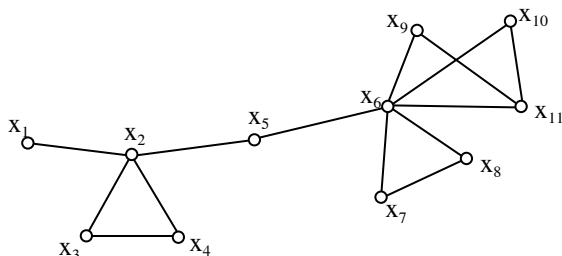
4.9–rasm

5. Tasvirlangan grafda x_1 cho`qqidan  $x_2$  va  $x_7$  cho`qqilarigacha bo`lgan eng qisqa va eng katta uzunliklarga ega bo`lgan yo`llarni toping (4.10–rasm).



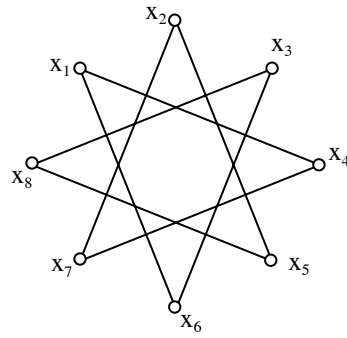
4.10–rasm

6. G graf tasvirlangan (4.11–rasm):
 a) Grafning hamma cho`qqilarini qamrab olgan  $x_1$  dan  $x_{11}$  gacha bo`lgan yo`lni toping;
 b) Grafning hamma cho`qqilaridan o`tuvchi x_1 dan x_{11} gacha bo`lgan oddiy yo`l bormi?
 v) G graf nechta sikldan iborat?
 g) G graf nechta oddiy sikldan iborat?



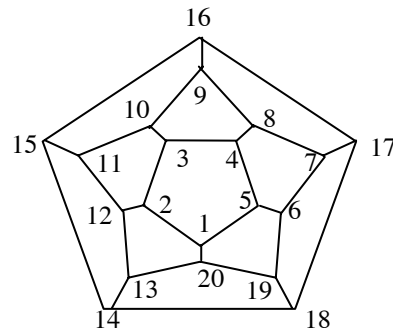
4.11–rasm

7. G graf tasvirlangan (4.12rasm):
 a) x_1 va x_3 cho`qqilarni bog`lovchi yo`llarni toping;
 b) G graf bog`langanmi?
 v) G grafda 3,4,5,6 ta qobiqlardan iborat sikllar bormi?
 g) G grafda oddiy sikllar bormi? Agar bo`lsa ular nechta qobiqdan iborat? Ularni ko`rsating.



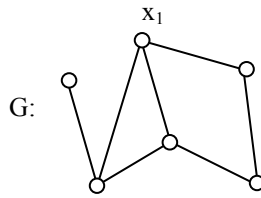
4.12–rasm

8. 4.13–rasmda 20 ta shahar va ularni bogʻlash yoʻllari tasvirlangan. Birinchi shahardan boshlab har bir shahardan bir marta oʻtish kerak. Shunday sayohatni bajarish uchun shaharlardan ketma-ket oʻtishni keltiring, agar:
- a) 16 chi shaharda sayohatni toʻxtatish kerak boʻlsa;
 - b) avval 2, 12, 11 va 10 chi shaharlarga borib, soʻngra 1 chi shaharga qaytish kerak boʻlsa;
 - v) birinchi navbatda 2 va 3 chi shaharlarga borib, soʻngra sayohatni 18-shaharda tugatish kerak boʻlsa.



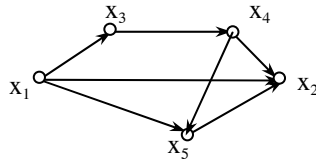
4.13–rasm

9. Bogʻlangan G graf tasvirlangan. x_i choʻqqidan boshlangan yopiq yoʻlni topingki, bunda barcha qobiqlar ikki marta qaytarilsin va har biri ayrim yoʻnalishda boʻlsin (4.14–rasm).



4.14–rasm

10. Tasvirlangan G grafda A choʻqqidan V choʻqqigacha boʻlgan yoʻllar sonini aniqlang. A dan V gacha, S dan A gacha, A dan S gacha boʻlgan masofalarni aniqlang (4.15–rasm).



4.15–rasm

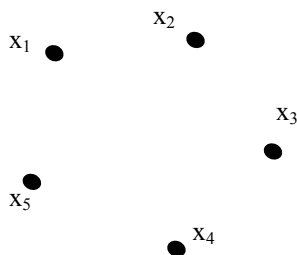
11. G oddiy grafda k uzunligidagi yoʻl bor. Shu grafda $k+1$ uzunligida sikl borligini koʻrsating, hamda $k \geq 2$ ekanligini isbotlang.

12. Agar bogʻlangan yoki bogʻlanmagan graf shunday 2 ta juft darajali choʻqqiga ega boʻlsa, u holda 2 ta choʻqqini bogʻlovchi yoʻl borligini isbot qiling.

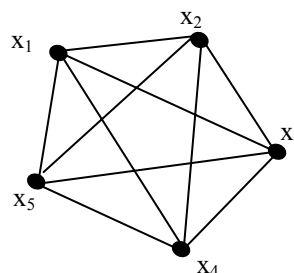
V. MINIMAL DARAXTLARNI QURISH.

5.1. Yulduzli graflarni tanlash.

Tekislikda cho`qqilar to`plami $X=\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$ berilgan bo`lsin (5.1.–rasm).



5.1–rasm



5.2–rasm

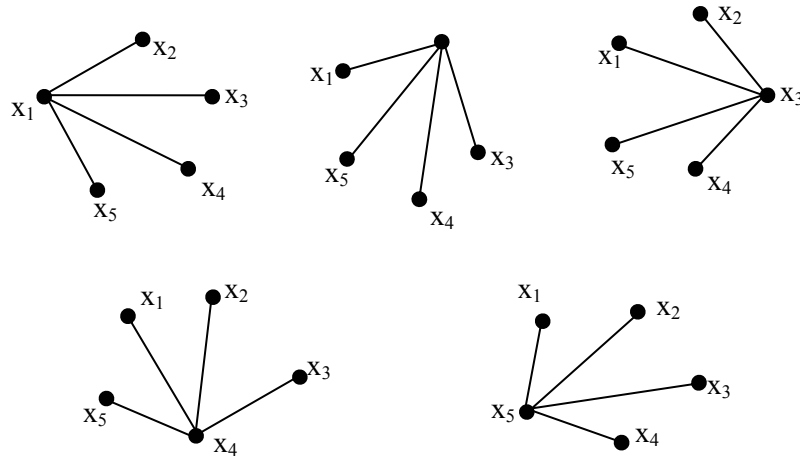
Berilgan cho`qqilar to`plami asosida ularni bog`lovchi qobiqlarning uzunliklari yig`indisi eng qisqa bo`lgan daraxtlarni qurish talab etiladi. Agar cho`qqilarning soni $m=|x|$ bo`lsa, u holda  $m^{m-2}$  daraxtlarni qurish mumkin. Chunki  $m$  cho`qqilar orasidagi eng ko`p qobiqlar soni  $m(m-1)/2$  ga teng bo`ladi.

Daraxtlarni qurish ikki xil usulda olib borilishi mumkin. Agar cho`qqilar darajasi  $\lambda \leq 2$  bo`lsa, bu holda qisqa Gamil`ton zanjirini,  $\lambda \geq 1$  bo`lsa qisqa bog`langan tarmoqni qurish talab etiladi.

Berilgan tekislikdagi cho`qqilar (5.1–rasm) asosida to`liq graf quramiz $Q=\langle X, U \rangle$ (5.2-rasm). To`liq grafning har bir cho`qqisini boshlang`ich cho`qqi, yoki nurlarni chiqish joyi deb qarasak, u holda har bir cho`qqi va uning bog`langan cho`qqilari asosida yulduzli graf  $G_i=\langle X_i, U_i \rangle$  hosil bo`lishini ko`rish mumkin (5.3–rasm)

Tashkil etilgan yulduzli graflar $G=\langle X, U \rangle$ dan, shunday G_i ni topish talab etiladiki, uning asosida minimal daraxt hosil bo`lsin. Uning qobiqlarining uzunliklari yig`indisi qolgan daraxtlarga nisbatan eng kichik qiymatga teng bo`lishi kerak.

Shunday qilib masalani yechishni eng qisqa minimal daraxt $G=\langle X, U \rangle$ ni qurish uchun yulduzli graf G_i ni, ya`ni yulduzli graflarni qobiqlarining uzunliklari yig`indisining o`rtacha qiymatiga mos keluvchi ishonchlilik oralig`idagi a qiymatini tanlashni taqozo qiladi.



5.3–rasm

Qiymat a uchun ishonchlilik oralig'i quyidagi tenglik orqali aniqlanadi:

$$\bar{S} - t \frac{\sigma}{\rho\sqrt{m}} < a < \bar{S} + t \frac{\sigma}{\rho\sqrt{m}},$$

Bu yerda:

$\bar{S}$ – yulduzli graflarning qobiqlari uzunliklari yig'indisining o'rtacha qiymati;

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

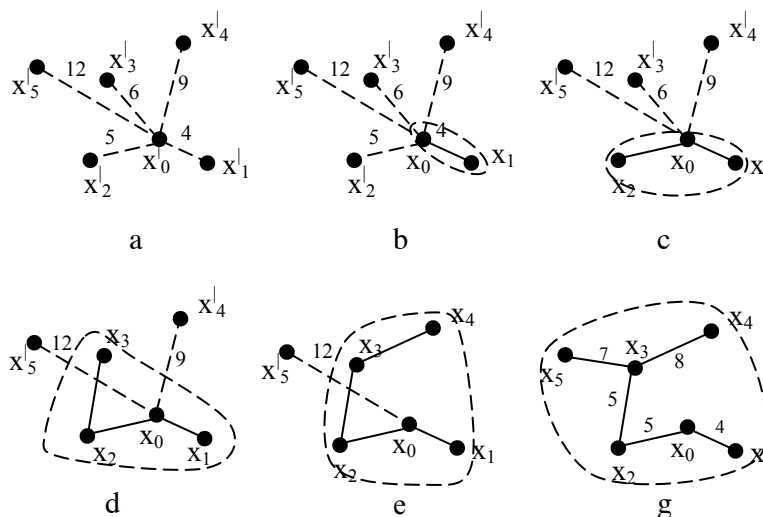
σ^2 - o'rtacha kvadratik burilishi,

t_ρ - ehtimollik oralig'ining ildiz tenglamasi.

Shunday qilib yulduzli graflar orasidan minimal daraxtlarni tanlash variantlari soni $m^l \leq m$ ga keltiriladi, bu yerda m^l – yulduzli graflarning uzunliklarini ishonchlilik oralig'iga mos kelgan a ning qiymatlari soni.

5.2. Minimal daraxtlarni tanlash usuli va algoritmi.

Berilgan yulduzli graf $G^l = \langle X^l, U^l \rangle$ (5.4.–rasm) bo'yicha minimal daraxtni qurish usuli taklif etiladi. Bu grafda $X^l = \{x_0^l, x_1^l, x_2^l, \dots, x_{m-1}^l\}$ – cho'qqilar to'plami; $U^l = \{u_0^l, u_1^l, u_2^l, \dots, u_n^l\}$ qobiqlar to'plami.



5.4-rasm

G^l grafi uchun markaziy cho`qqi deb boshlang`ich cho`qqi  $x_0^l$  ni tanlaymiz. Graf  $G$  ning har bir qobig`i $u_j^l \in U$ markaziy cho`qqi  $x_0^l$  va  $x^l = \{ \bigcup_{i=1}^n x_i^l \}$  to`plamining biror cho`qqisi orqali aniqlanadi. Bu holda qobiqlar to`plami quyidagicha aniqlanadi:

$$u_1^l = (x_0^l, x_1^l), u_2^l = (x_0^l, x_2^l), \dots, u_n^l = (x_0^l, x_{m-1}^l)$$

X^l to`plamining har bir cho`qqisining markazga intiluvchi kuchi to`plamdagi mos keluvchi qobiqlarning uzunliklari bilan aniqlanadi.

Quyidagi aniqlanishlarni kiritamiz: yulduzli graflarning «markazga intiluvchi kuchi» qanchalik kichik bo`lsa,  $x_i^l$  cho`qqi bilan shunchalik kuchli bog`langan. Minimal daraxtni qurish eng kuchli bog`langan cho`qqidan boshlanib, eng sust bog`langan cho`qqi bilan tugallanadi.

Taklif etilayotgan usul ikkita tamoyilga asoslangan:

1. Yulduzli graf G ning markaziy cho`qqisi qo`shni cho`qqilar  $X^l$  ning birortasi bilan eng qisqa qobiq orqali bog`langan.
2. X^l to`plamining har bir cho`qqisi markaziy cho`qqi bilan yoki tashkil etilayotgan minimal daraxtning cho`qqilar

to'plamining birorta cho'qqisi bilan qisqa qobiq orqali bog'langan.

Minimal daraxtlarni qurishda birinchi tamoyil bir marta ishlatilsa, ikkinchi tamoyil esa ko'p marta ishlatiladi, ya'ni eng sust bog'langan cho'qqiga insident bo'lgan oxirgi qobiqni aniqlashgacha. Bu qobiq minimal «markazga intiluvchi kuch» ga ega. Masalan, minimal daraxt $G=\langle X, U \rangle$ boshlang'ich holatda birorta cho'qqiga va birorta qobiqqa ega emas. Yulduzli graf G^I ning cho'qqilarini tanlashning har bir qadamida quyidagi shart bajarilishi kerak.

$$X = \bigcup_{i=1}^n (x_i^I \cap x_0^I),$$

Natijada, X^I to'plamidan birorta cho'qqi tanlangandan so'ng, u X to'plamiga qo'shiladi. Cho'qqi x_0^I ni minimal daraxtning boshlang'ich (markaziy) cho'qqisi deb qabul qilamiz. Shu cho'qqidan minimal daraxtning qurilishi boshlanib, u uning birinchi cho'qqisi hisoblanadi. Shundan so'ng, graf G^I dan shunday $x_i^I \in X^I$ cho'qqisini topamizki (5.4.-rasm), u G^I grafining qobig'i bo'lib, uning uchun quyidagi shart bajariladi:

$$d(u_j^I) = \min d(x_0^I, x_i^I),$$

bu yerda, $d(u_j^I)$ - u_j^I qobig'ining uzunligi.

Natijada yulduzli graflarning, juda bo'lmaganda bitta qobig'ini aniqlaymiz, u minimal daraxt G ning ham qobig'i hisoblanadi (birinchi tamoyil).

$$\exists u_j^I \in U^I P[(x_0^I, u_j^I, x_i^I) = (x_0, u_j, x_i)]$$

Shundan so'ng X^I to'plamidan markazga intiluvchi kuchning kamayishi asosida cho'qqini tanlaymiz (bu qadamda $|X^I| < |X^I \setminus X_0^I|$) (5.4,v, e – rasm).

G grafni qurishning j – qadamida quyidagi shart bajarilishi talab etiladi.

$$d(u_j^I) = \min_i d(x_0^I, x_i^I)$$

Cho'qqi $x_i^I \in X^I$ ni tanlab, navbatdagi $x_i \in X$ cho'qqini aniqlaymiz bu qadamda $|X^I| < |X^I|$. Bu yerda x_i cho'qqi $x_{i1} \in X$

cho`qqisi bilan eng qisqa yo`l bilan bog`langan bo`lib, u_j qobig`ini aniqlaydi (2-tamoyil). Bu holda,

$$d(u_j^l) = \min_{i_l} d(x_i, x_{i_l}), \quad i_l = i-1$$

5.2 va 5.3 shartlarning birgalikda bajarilishi, G^l grafning eng sust bog`langan cho`qqisini tanlashgacha takrorlanadi.

$$d(u_j^l) = \max_i d(x_0^l, x_i^l)$$

Shunday qilib, qobiqlar uzunligining yig`indisi eng kam bo`lgan minimal daraxtni topamiz (4-e-rasm).

$$d\{G = \langle X, 0 \rangle\} = \min d(U) = \min \sum_{i=1}^n d(u_j)$$

va u X cho`qqilar to`plami uchun optimal variant hisoblanadi.

Minimal daraxtni topish algoritmi quyidagi bosqichlarga bo`linadi:

- to`liq graf uchun masofali matritsa hisoblash;
- yulduzli graflarning qobiqlari uzunliklari yig`indisi o`rtacha qiymatining ishonchlilik oralig`ini aniqlash va ularga mos ravishda cho`qqilarni aniqlash;
- yulduzli grafning qobiqlari ro`yxatini ularning uzunliklari asosida belgilash;
- minimal daraxtlarni tashkil etuvchi qobiqlarini topish;
- minimal darajalarni tashkil etish.

Minimal daraxtlar qurishga misollar keltiramiz.

1-misol. Tekislikda berilgan cho`qqilar soni 20 ga teng. Qisqa gamilton zanjirini (QGZ) qurish talab etiladi. 20 ta cho`qqidan iborat bo`lgan to`liq graf $Q = \langle X, U^n \rangle$ quramiz. Bu graf uchun masofali matritsa $M = \|d_{ij}\|$ ni hisoblaymiz (1-jadval), bu yerda $m=k=20$. Matritsaning har bir elementi d_{ij} x_i va x_j cho`qqilari orasidagi masofani aniqlaydi.

1-jadval

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_7 \quad x_8 \quad x_9 \quad x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15} \quad x_{16} \quad x_{17} \quad x_{18} \quad x_{19} \quad x_{20}$

0	18	38	27	46	49	65	80	90	95	02	112	120	127	138	142	150	136	12	111	x_1
	0	20	21	40	42	47	72	74	80	92	104	104	112	115	131	144	122	19	98	x_2
		0	34	35	46	30	73	58	68	87	100	88	98	105	124	134	109	32	89	x_3
			0	21	22	48	53	70	70	75	86	98	104	101	115	129	111	13	85	x_4
				0	26	67	51	85	80	77	85	110	113	106	116	131	120	27	91	x_5
					0	47	30	60	54	54	64	84	87	82	93	108	94	35	65	x_6
						0	62	28	42	67	82	59	69	79	100	108	80	53	64	x_7
							0	60	44	22	34	74	72	59	65	81	75	66	45	x_8
								0	21	53	67	30	41	55	79	84	53	78	44	x_9
									0	32	46	31	34	37	59	67	42	80	23	x_{10}
										0	15	55	49	32	40	55	50	88	20	x_{11}
											0	66	58	34	32	50	55	92	38	x_{12}
												0	15	49	64	63	28	106	37	x_{13}
													0	27	50	48	13	114	30	x_{14}
														0	25	29	20	113	16	x_{15}
															0	18	41	128	36	x_{16}
																0	36	141	45	x_{17}
																	0	122	31	x_{18}
																		0	99	x_{19}
																			0	x_{20}

Masofali matritsa diagonal bo'yicha simmetrik qismlardan iborat bo'lib, ikkita uchburchakli matritsaga bo'linadi. Shuning uchun, kerakli hamma amallarni uchburchakli matritsa asosida bajarish mumkin. Tashkil etilgan matritsaning har bir qatoridagi qiymatlar boshlang'ich cho'qqini shu qator tartib nomeriga teng bo'lgan yulduzli grafning qobiqlari uzunligini ko'rsatadi.

	G_1^I	G_2^I	G_3^I	G_4^I	G_5^I	G_6^I	G_7^I	G_8^I	G_9^I	G_{10}^I
$\overline{S}$	1658	1449	1338	1283	1447	1142	1197	1118	1130	1005
$d(G)_{g.s}$	455	455	641	454	586	669	657	595	591	624
$d(G)_{s.s}$	386	386	386	386	390	400	415	389	412	396
	G_{11}^I	G_{12}^I	G_{13}^I	G_{14}^I	G_{15}^I	G_{16}^I	G_{17}^I	G_{18}^I	G_{19}^I	G_{20}^I
$\overline{S}$	1065	1220	1281	1261	1220	1458	1612	1338	1414	1067
$d(G)_{g.s}$	627	473	487	613	612	494	467	487	421	601
$d(G)_{s.s}$	386	395	391	381	377	391	391	381	386	386

Bu yerda $\overline{S}$ – matritsa qatorlari elementlarining yig'indisi; $d(G)_{23}$ va $d(G)_{bt}$ mos ravishda gamilton zanjiri va bog'langanlik tarmoqlari qobiqlarining uzunliklari yig'indisi.

Bu qatorlar (yulduzli graflar) uchun o'rtacha qiymatini va dispersiyani aniqlaymiz:

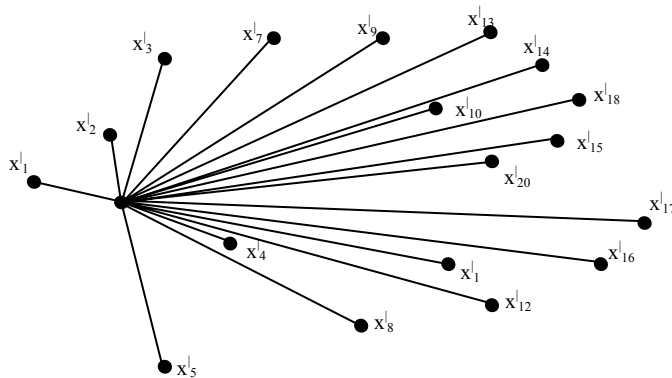
$$\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i \quad \text{va} \quad \sigma^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (S_i - \bar{S})^2.$$

Minimal daraxtlarni qurishda ixtiyoriy S qiymatlar uchun oʻrtacha qiymatning ishonchlilik oraligʻini $R=0,99$ ehtimollik bilan aniqlaymiz. Bu holda ishonchlilik oraligʻining quyi chegarasi

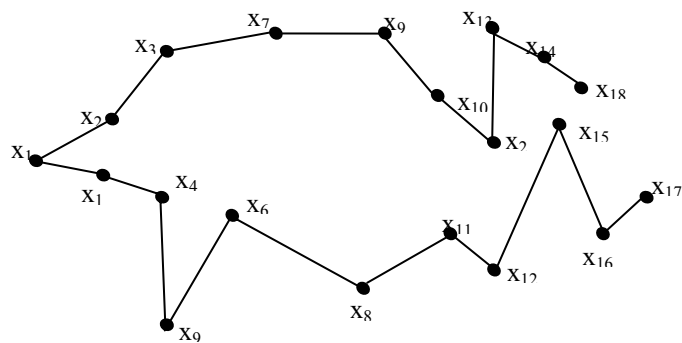
$$a_{\min} = \bar{S} - t_{\rho} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} = 1155, \text{ yuqori chegarasi esa}$$

$$a_{\max} = \bar{S} + t_{\rho} \frac{\sigma}{\sqrt{m}} = 1419 \text{ ga teng.}$$

Topilgan ishonchlilik chegarasiga $S_3, S_4, S_6, S_7, S_{12}, S_{15}, S_{18}, S_{19}$ ixtiyoriy qiymatlar toʻgʻri keladi. Ixtiyoriy S_{19} qiymati uchun daraxt qurish jarayonini koʻrib chiqamiz. Markaziy choʻqqini x_{19} deb qabul qilib, yulduzli graf $G_{19}^I(X^I, U^I)$ ni quramiz (5.5–rasm). Natijada graf G_{19}^I uchun qobiqlar uzunligi yigʻindisi $d(G_{19}^I)=421$ boʻlgan gamilʼton zanjirini topamiz (5.6–rasm).



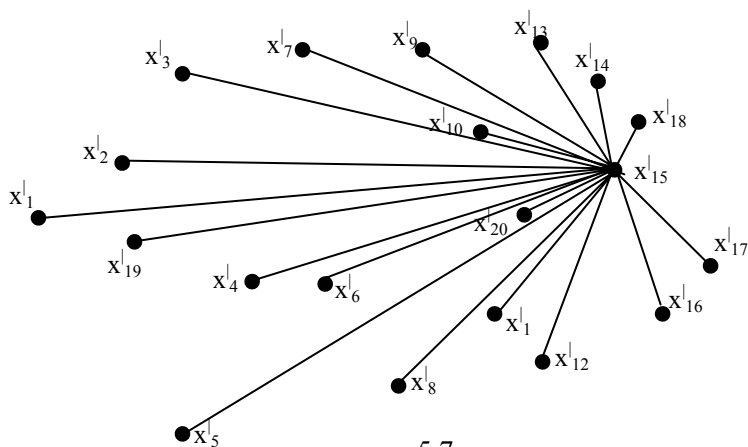
5.5-rasm



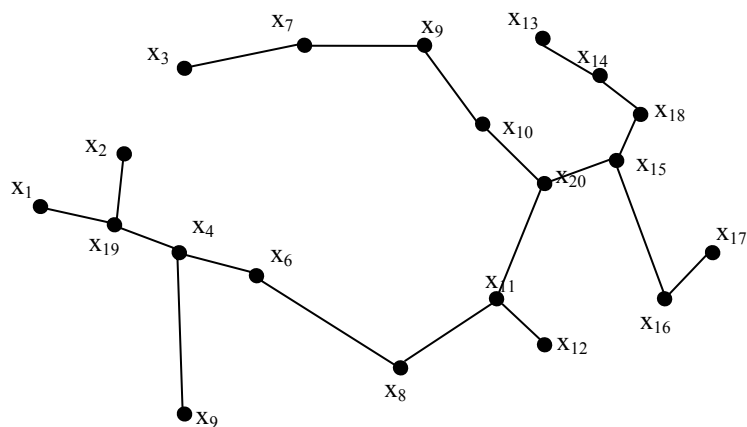
5.6-rasm

Boshqa yulduzli graflar uchun ham shu tarzda gamilton zanjirini quramiz. Natijada, xulosa qilib aytganda G_{19}^1 yulduzli graf asosida qurilgan daraxtning qobiqlar uzunligi yig'indisining qiymati eng kichik, ya'ni minimal hisoblanandi. Tanlangan ishonchlilik oralig'i qisqa gamilton zanjirini qurish uchun etarlidir. Shunday qilib, graf $G_{19}^1(X, U)$ berilgan cho'qqilar to'plami uchun qisqa gamilton zanjiridir.

2-misol. 1-misol uchun qisqa bog'langanlik tarmog'ini (QBT) quramiz. QBT ni qurish QGZ qurishdan cho'qqilarni lokal darajasi bo'yicha farq qiladi. Shuning uchun algoritmnining 4-bosqichidagi talabdan boshqa talablar bir xil hisoblanandi. Bu yerda 4-bosqichda cho'qqilarning lokal darajasi ixtiyoriy bo'lishi mumkin.



5.7-rasm



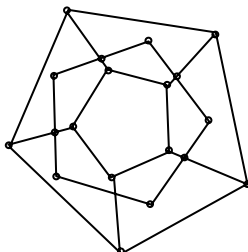
5.8-rasm

Berilgan cho`qqilar soni uchun qobiqlarning uzunliklari yig`indisini minimal bo`lgan  $d(G_{15})=377$  bo`lgan G_{15} grafini aniqlaymiz (5.7-rasm).

Bu graf qisqa bog`langanlik tarmog`i bo`lib (5.8-rasm), u  $x_{15}$  markaziy cho`qqilar yulduzli graf asosida qurilgan.

5.3. Masala va mashqlar.

1. Graf yo`naltirilgan va yo`naltirilmagan qobiqlardan iborat, masalan shaharning turli ko`chalarida bir tomonlama va ikki tomonlama harakat qilinadi. Bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga borish yo`llarini toping, hamda shular orasida eng qisqa masofaga ega bo`lgan yo`lni toping.
2. Graf G da gamilton yo`li yo`q ekanligini ko`rsating (5.9-rasm).



5.9-rasm

VI. GRAFLARNING TOPOLOGIK TASVIRLANGAN MAYDONINI QOPLASH.

6.1 Graflarning topologik maydonini qoplash.

Masalani yechish uchun ayrim qo'shimcha tushunchalarni kiritamiz. Zanjirda hamma cho'qqilar va qobiqlar har xil bo'lsa, u oddiy zanjir deb ataladi. Bog'langan grafning har qanday ikkita cho'qqisi oddiy zanjir bilan bog'langan. Shunday zanjirlarning agar boshlang'ich va oxirgi cho'qqilari ustma-ust tushsa, ya'ni $(x_0=x_n)$, u holda quyidagi oddiy sikl hosil bo'ladi.

$$X_0 u_1 x_1 u_2 x_2 u_3 \dots u_i x_i \dots u_n x_n u_{n+1} x_0$$

bu yerda u_i x_i va x_{i+1} orasidagi qobiq.

Agar graf $G=\langle X, U \rangle$ ning topologik tasviri G_i^P berilgan bo'lsa va uning hamma nuqtalari (cho'qqilari va qobiqlari) S tekisligiga tegishli bo'lsa, bunday graf S tekislikda joylashgan deb hisoblanadi. Agar graf G $\square$ kala $\square$ tekisligida joylashgan bo'lsa, u tekis graf deb ataladi. Tekislikda joylashgan har qanday oddiy sikl (tekis graf), uni ikkita maydonga bo'ladi. Ularning biri ichki, ikkinchisi esa tashqi maydon deb ataladi.

S tekisligida $P_i^S \in P^S$ ni aniqlovchi $G_i^P = \langle X^P, U^P \rangle$ tekis graf va P_i^S dagi $P_i^S \in P^S$ ichki maydonni aniqlovchi $G_i^S = \langle X^S, U^S \rangle$ tekis grafi berilgan. Shunday qilib, P_i^S maydoni G_i^S tekis graf tomonidan ikkita maydonga, ya'ni tashqi P_i^S va ichki P_i^S maydonlariga bo'linadi, $P_i^S = P_i^C \cup P_j^C$. Har bir maydonning atrofidagi nuqtalari to'plami uning chegarasi deb ataladi va u $G_i^P \in G^P$ va $G_j^S \in G^S$ graflarining cho'qqi va qobiqlaridan tashkil topgan. Aniqlanishi bo'yicha $G_i^P \in G_j^C$ graflarining qobiqlari maydonning chegarasi hisoblanadi. Bu holda G_j^C grafning har bir qobig'i ikkita maydonning chegarasini aniqlaydi va u faqat ikkita maydonga tegishli bo'lishi mumkin.

Teorema: $\mu(G_i^P)$ – G_i^P grafning tashqi va ichki maydonlari soni $\lambda(G_j^C)$ – G_j^C grafning ichki maydonlari P_j^C soni bo'lsa, R^S maydonlarini R^S maydonlari bilan qoplanishi uchun quyidagi shartlar bajarilishi kerak:

$$\mu(G^P) = \lambda(G^C) + 1$$

$$\forall P_j^C \in P \forall P_i^S,$$

$$P_\xi^S \in P^S \left[(P_j^C \cap P_i^S = P_j^C) \wedge (P_j^C \cap P_\xi^S = \otimes) \cap (P_i^S \cap P_\xi^S = \otimes) \right]$$

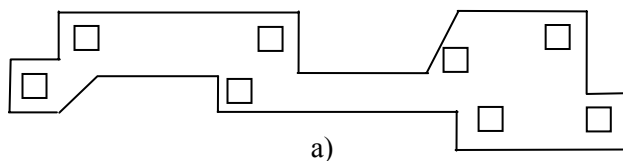
Isbot: $\lambda(G_i^P)=1$ uchun P_i^S maydonning chegarasi faqat bittagina ichki oddiy graf G_j^S dan tashkil topgan, u maydonni ikkiga bo'ladi va ikkala maydon uchun chegara hisoblanadi, ya'ni $\mu(G_i^P)=2$ yoki $\lambda(G_i^P)=1$. Bu holda maydon P^S ichki oddiy sikllar G^S to'plamidan tashkil topgan bo'lgani uchun:

$$\mu(G_i^P) > 2$$

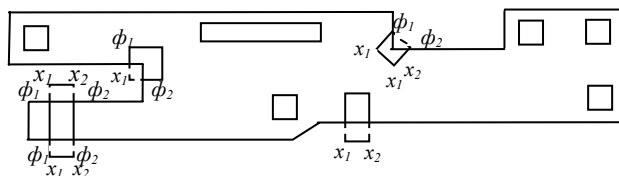
Shunday qilib, graf G^P ning tashqi va ichki maydonlari quyidagicha aniqlanadi:

$$\mu(G_i^P) = \lambda(G_j^C) + 1 \quad (6.1)$$

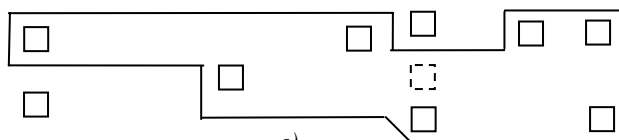
Bu shart maydonlarni qoplash uchun kerakli, lekin yetarli emas (6.1, a-rasm).



a)



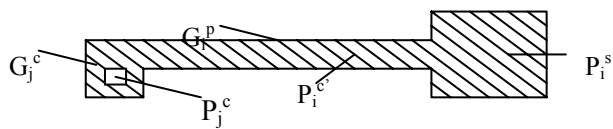
b)



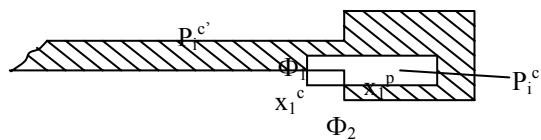
c)

6.1-rasm

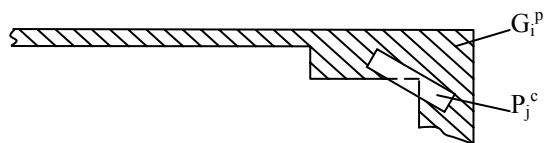
Masalan graf G_i^s ning ixtiyoriy cho`qqisi  $G_i^p$  grafning chegarasidan tashqarida bo`lsin (6.1.,b-rasm). Bu holda (6.1) shart bajariladi, lekin P_j^c maydon P_i^s maydoni bilan to`liq qoplanmaydi, chunki  $x_i^s$  cho`qqi va u^c qobiq undan tashqarida joylashgan.



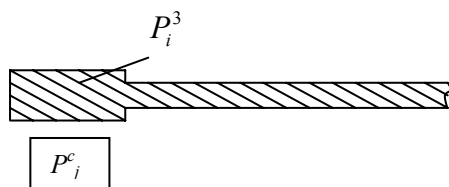
a) P_i^c maydonini to`liq qoplash



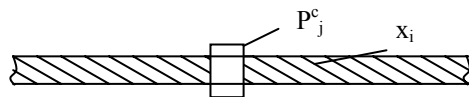
b) P_i^c maydonini qisman qoplash



c) $P_j^c \cap P_i^c \neq \emptyset \& P_j^c \cap P_i^c \neq P_j^c$



d) P_j^c maydonini to`liq qoplamaslik



e) $P_j^c \cap P_L^c = P_i^c \neq P_j^c$

6.2 –rasm. Maydonlarni qoplash usullari

Bu holda G_j^S grafning x_j^S cho`qqisiga insident bo`lgan qobiqlari, x_i^R cho`qqilariga insident bo`lgan qobiqlar bilan kesishib, F_1 va F_2 nuqtalarni hosil qiladi. Bu holat P_j^C maydonini P_i^S maydon tomonidan to`liq qoplanmaganligidan dalolat beradi.  $G_j^S$  va  $G_i^P$  graflar uchun  $P_j^C$  maydonini to`liq qoplamaganlik shartlarini aniqlaymiz. (6.2-rasm)

$$P_i^S \cap P_j^C \neq P_j^C, \quad P_i^S \cap P_j^C \neq \emptyset \quad (6.2)$$

Shunday qilib, P_j^C maydonini P_i^S maydoni bilan qoplashdan P_i^S ning bir qismiga teng bo`lgan uning maydoni hosil bo`ladi (6.1-rasm).

Masalan, G_j^S grafning cho`qqilari  $G_i^P$  chegaradan tashqarida bo`lsin (6.1.b,–rasm), u holda (6.1) shart bajarilmaydi, ya`ni $\lambda(G_j^C)=0$, $\mu(G_i^P)=1$ va

$$P_i^S \cap P_j^C = \emptyset \quad \text{yoki} \quad P_i^S \cap P_j^C = P_i^S \quad (6.3)$$

Bu tenglama P_j^C maydonini P_i^S maydoni bilan to`liq qoplanmaganligini aniqlaydi. (6.2-rasm)

P_j^C maydonini P_i^S maydoni bilan to`liq qoplash uchun quyidagi shart bajarilishi talab etiladi.

$$P_j^C = P_i^S \cap P_j^C \quad (6.4)$$

Bu shart (6.2) va (6.3) shartlarga qarama-qarshidir.

P_j^C maydonini P_i^S bilan to`liq qoplanishi uchun bu shart yetarli hisoblanadi va umumiy holda quyidagicha tasvirlanadi.

$$\forall P_j^C \in P^C \exists P_i^S \in P^S [P_j^C \cap P_i^S = P_j^C] \quad (6.5)$$

Umumiy holda tekislikda berilgan bog`lanmagan tekis graflar uchun qoplanish tahlilini ko`rib chiqamiz.

$$G_j^P = \{G_1^P, G_2^P, \dots, G_N^P\} \quad \text{va} \quad G_j^C = \{G_1^C, G_2^C, \dots, G_M^C\}$$

Tekis graflar to`plami  $G^P$  bilan aniqlangan  $P^S$  maydoni unga mos ravishda  $G^C$  tekis graflar to`plami bilan aniqlangan P^S maydonlari bilan qoplanishi kerak.

Yuqorida keltirilgan teorema va uning isboti asosida maydonlar to'plamini qoplash va qoplamaslik holatlarini quyidagicha ifodalash mumkin:

- 1) P^S maydonlar to'plami P maydonlari bilan to'liq qoplangan;
- 2) P^S maydonlar to'plamining P_j^C maydoni $P_i^S \in P^S$ maydoni bilan qoplanadi.
- 3) P^S maydonlar to'plamining P_j^C maydoni $P_i^S \in P^S$ maydoni bilan to'liq qoplanmaydi.

Birinchi holatda (6.1) va (6.5) shartlar P^S maydonlarini qoplash uchun kerakli va yetarli hisoblanadi, ya'ni ixtiyoriy $P_i^S \in P^S$ G^C tekis graflar G^P tekis graflarning cho'qqilari va qobiqlarining nuqtalarini o'ziga qamrab olmagan.

Ikkinchi holatda G^K va G^n tekis graflar o'rtasida qobiqlarining kesishuvi mavjud bo'lib (6.1) va (6.2) kerakli shartning o'ziga bajarilib, yetarli shart (6.5) bajarilmaydi.

Uchinchi holatda esa, P^S to'plamida P_j^C mavjud bo'lib, ular ixtiyoriy $P_i^S \in P^S$ maydonidan tashqarida, ya'ni

$$\exists P_j^C \in P^C \exists P_i^S \in P^S \left[(P_j^C \cap P_i^S = \emptyset) \wedge (P_j^C \wedge P_i^S) \right] \quad (6.6)$$

Bu o'rinda (6.1) va (6.5) shartlari bajarilmaydi. Ayrim holatlarda P_j^C maydoni $P_i^S \in P^S$ tegishli bo'lish o'rniga boshqa maydonga tegishli bo'lib $P_\xi^S \in P^S$, ya'ni $P_\xi^S \wedge P_i^S = \emptyset$.

Shunday qilib topologik tasvirdagi R^S graflarning maydonlarini boshqa R^S maydonlari bilan to'liq qoplash uchun kerakli va yetarli shart quyidagicha bo'lishi kerak:

$$\mu(G^P) = \lambda(G^C) + 1, \quad \forall P_j^C \in P \forall P_i^S \in P^S \quad (7),$$

$$P_\xi^S \in P^S \forall P_i^S, P_j^S \in P^S \left[(P_j^C \cap P_i^S = P_j^C \cap (P_j^C \cap P_\xi^S = \emptyset)) \right]$$

Taklif qilingan topologik tasvirlangan graflarning maydonlarini qoplash usuli asosida turli texnologik strukturali katta integral sxemalarni komponentalarining topologiyasi maydonini qoplashni tekshirish va loyihalash jarayonida bo'lgan xatoliklarni topishga imkon beradi.

6.2. Masala va mashqlar.

1. Maydonni qisman qoplash usuliga misollar keltiring.

2. Topologik tasvirlangan graflarning maydonlar to'plamini birorta maydon bilan qoplash usullariga misollar keltiring.
3. Maydonning bir cho'qqisi ichki maydonga tegishli bo'lsa, uning tashqi maydonga mos kelishini isbotlang.
4. Maydonlarni to'liq qoplashga misollar keltiring.
5. Maydonlarning to'liq qoplanmasligiga misollar keltiring.

VII. GRAFLARNI BO`LAKLARGA BO`LISH.

7.1. Graflarni bo`laklarga bo`lish.

Graflarni bo`laklarga bo`lish masalasi quyidagicha ta`riflanadi.

Berilgan graf $G=<X,U>$ shunday bo`laklarga bo`linishi kerakki, bo`linishdan so`ng uning bo`laklari orasidagi bog`lanishlar soni minimumiga teng bo`lsin, har bir bo`lakdagi cho`qqilar soni chegaralangan bo`lishi, ya`ni bo`laklar soni va ular orasidagi o`xshashliklar soni minimum bo`lsin, nihoyat bo`laklarning sifat darajasi bir xil bo`lsin.

Keltirilgan talab va chegaralanishlarni bajarish uchun ko`p mezonli masalalarni yechish usullari muammosini hal qilishga to`g`ri keladi. Ma`lumki, bir vaqtning o`zida bir necha mezonni bajarish juda katta muhim masala hisoblanadi. Quyidagi graflarni bo`lishni amaliyotda qo`llash nuqtai nazaridan, uni dasturlash asosida yechishga ahamiyat beramiz.

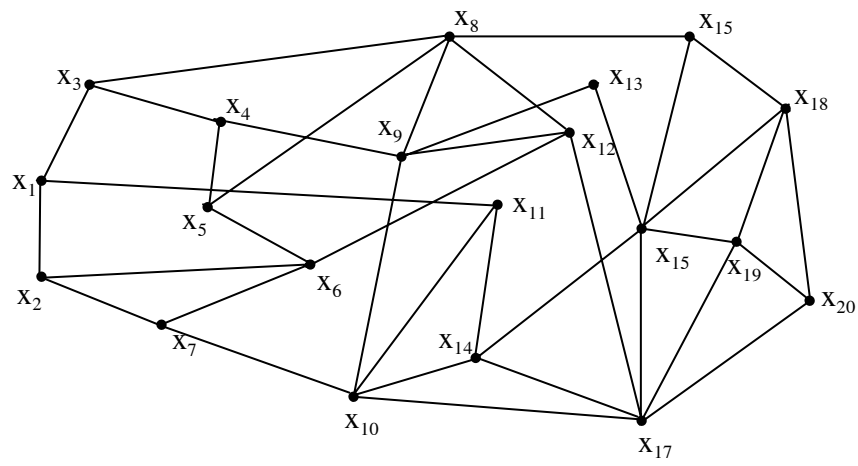
Graflarni bo`laklarga bo`lishda quyidagi asosiy mezonlarni bajarish talab etiladi:

1. Har bir graf bo`lagida cho`qqilar va qobiqlar soni maksimum qiymatga ega.
2. Har bir graf bo`lagi ikkinchi graf bo`lagi bilan eng kam miqdordagi bog`lanishlar soni bilan bog`langan.
3. Graflarni eng kam miqdordagi bo`laklarga bo`lish.

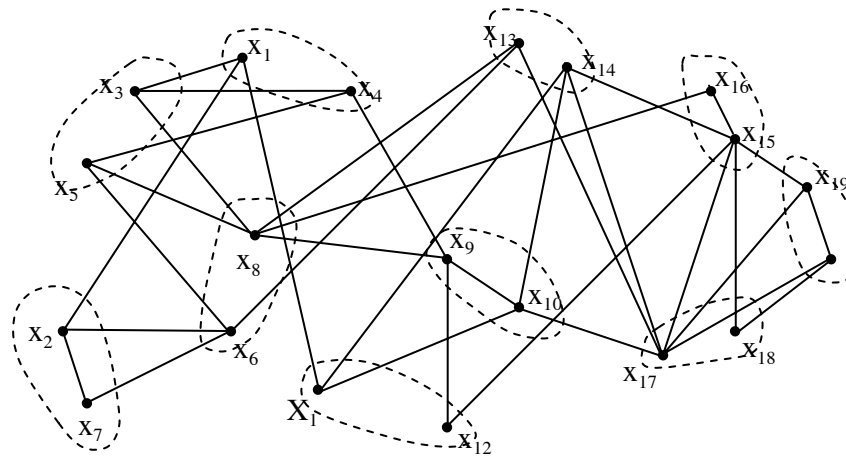
Agar $G=<X,U>$ graf berilgan bo`lsin, u  $X=\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\}$  cho`qqilar to`plamidan va  $U=\{u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n\}$  qobiqlar to`plamidan tashkil topgan. X cho`qqilarning bog`lanishlarini hisobga olgan holda, bog`lanishlar matritsasini  $M=\|m_{ij}\|$  qurish mumkin. Har bir qobiq biror og`irlik funksiyasiga teng deb faraz qilamiz. Bu yerda og`irlik funksiyasini  $Z=\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  bilan belgilaymiz. Har bir graf bo`lagi aniq cho`qqilar miqdoriga va har xil og`irlik funksiyasiga ega, hamda bo`laklar orasidagi bog`lanishlar soni minimum qiymatga ega.

Masalani yechishini besh bosqichdan iborat bo`lgan algoritm orqali ifodalaymiz:

I. Graf $G=<X,U>$ ni bir xil og`irlik funksiyasini qiymatiga ega bo`lgan bog`langan graflarga bo`lamiz. (7.1-rasm)



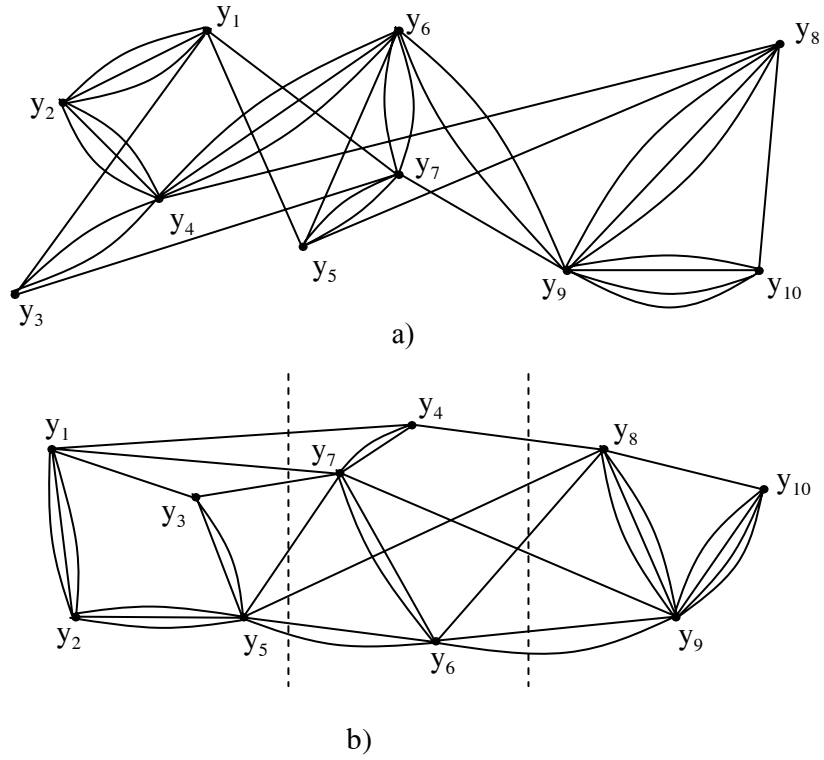
a)



b)

7.1-rasm

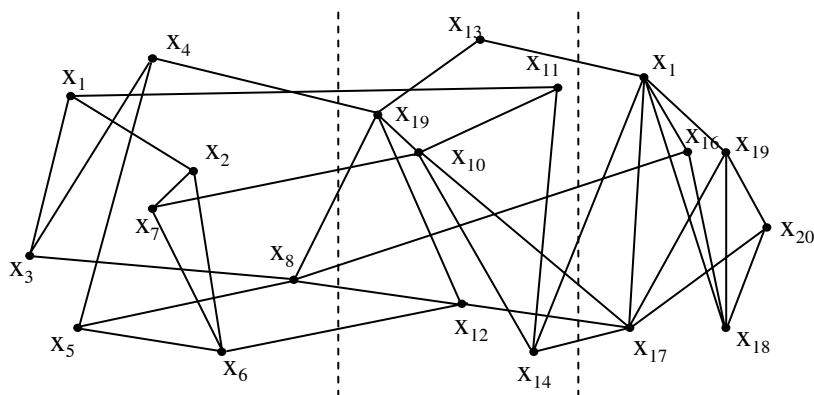
II. Graf $G=\langle X,U\rangle=\bigcup_{c=1}^n P_c\langle X_c,U_c\rangle$ ni $G=\langle Y,V\rangle$ ko`rinishida tasvirlaymiz. (7.2 a-rasm). Bu yerda  $y$ - birinchi bosqichda tashkil etilgan  $P_c\langle X_c,U_c\rangle$  graf bo`laklari.



7.2–rasm

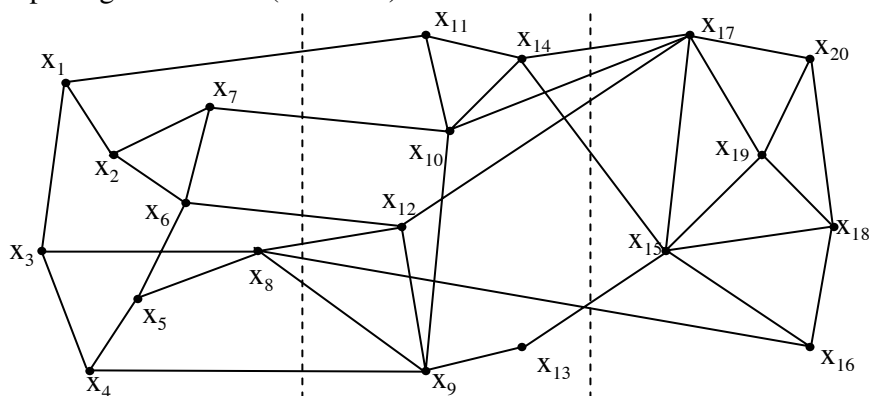
III. $G=\langle Y,V\rangle$ grafni elementlar soni chegaralangan graf bo`laklariga bo`lamiz. Yangi $G^l=\langle Y^l,V^l\rangle=\bigcup_{\alpha=1}^n G_{\alpha}\langle Y^l,V^l\rangle$ garflarni tashkil etamiz (7.2 b-rasm).

IV. Cho`qqilar  $y_i \in Y$   $x_i$  ni boshlang`ich cho`qqilar to`plami bilan ifodalaymiz. $G<X^I, U^I> = \bigcup_{\alpha=1}^n G^I_{\alpha}<X^I, U^I>$ graflar bo`lagini tashkil etamiz. (7.3-rasm)



7.3-rasm

V. $G^I=< X^I, U^I>$ grafini $G^{III}=< X^{III}, U^{III}>$ graf bo`laklari to`plamiga bo`lamiz. (7.4-rasm)



7.4-rasm

Quyida graflarni bo'laklarga bo'lishni uchta usulini ko'rib chiqamiz.

Ketma-ket usuli. Graflarni bo'laklarga bo'lish ketma-ket bajariladi: avval birinchi graf bo'yicha, so'ngra ikkinchi va boshqa graf bo'laklari topiladi. Har bir graf o'zining boshlang'ich cho'qqisi asosida quriladi. Shunday qilib, graflar bo'laklarining soni uning cho'qqilarning va uning cho'qqilarining boshlang'ich to'plamiga bog'liq. Graf bo'laklarini aniqlashdagi har bir qadamda qo'yilgan chegaralanishlarni hisobga olgan holda birinchi mezonning bajarilishi ta'minlanadi. Bu mezon umumiy bo'lishi mumkin, aks holda mezonlarning ketma-ket bajarilishi ta'minlanadi. Shu tariqa ustuvorlik asosida mezonlarning bajarilishi ketma-ketligi tuziladi va graflarni bo'laklarga bo'lish ta'minlanadi.

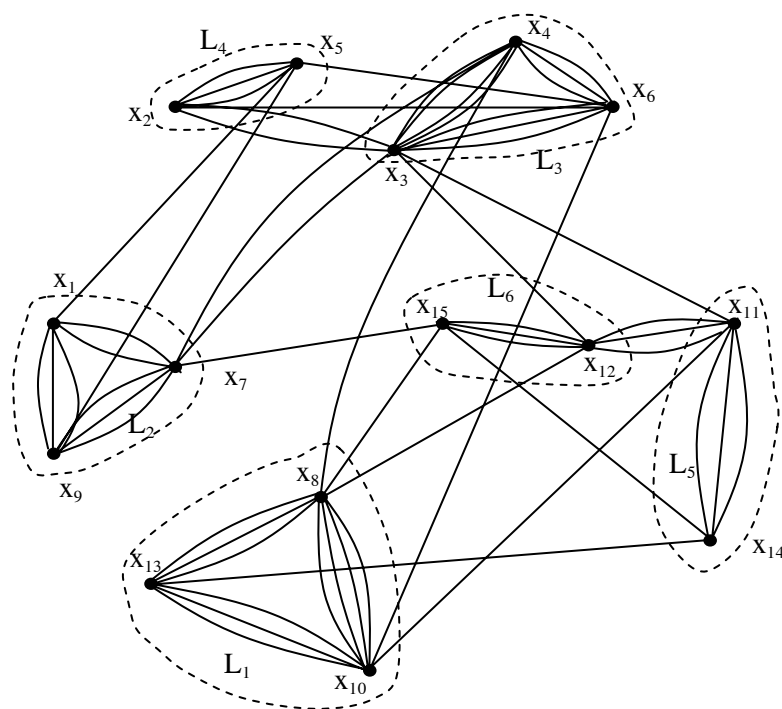
Parallel usul. Bu usul bo'yicha parallel ravishda bir nechta graf bo'laklarini tashkil etishga erishiladi. Buning uchun boshlang'ich cho'qqilar to'plami orasida yangi cho'qqilar parallel tanlab olinadi. Har bir tanlashda berilgan chegaralanishlar va mezonlar hisobga olinib boriladi.

Ketma-ket-parallel usul. Bu usul avvalgi ikkita usulning birlashmasidir. Avval graf bo'laklarining fragmentlari parallel hosil qilinadi va qolgan qismini esa ketma-ket qurilishi tashkil etiladi.

Bu usulda ham har qadamda berilgan chegaralanishlar va mezonlarni bajarilishi ta'minlanadi.

Ko'rinib turibdiki, bu usullar bo'yicha graflarni bo'laklarga bo'lishni tashkil etishda asosiy muammo boshlang'ich cho'qqilar to'plamini tanlashdan iborat. Buning uchun ikkita holat tavsiya etiladi. Birinchi holatda boshlang'ich cho'qqilar sifatida bir xil toifadagi, ya'ni o'xshash cho'qqilar tanlab olinadi, ya'ni eng kichik qobiqqa yoki darajaga ega bo'lgan cho'qqilarni tanlab olish mumkin. Ikkinchi holatda boshlang'ich cho'qqilar sifatida ziddiyatli cho'qqilarini olish mumkin. Ziddiyatli cho'qqilar, shunday cho'qqilarki, ularning hech bo'lmaganda ikkitasi bitta graf bo'lagida birga bo'lishi mumkin emas.

Yuqorida aytilganlarni hisobga olib, quyidagi graflarni bo'laklarga bo'lish masalasini yechishning umumiy algoritmini keltirish mumkin.



7.5-rasm. Graf $L = \langle X, U \rangle$

Graflarni bo'laklarga bo'lish algoritmi quyidagicha amalga oshiriladi:

1. Boshlang'ich cho'qqilarning to'plamini tanlash: o'xshash cho'qqilar, ziddiyatli cho'qqilar.
2. Graflarni bo'lishning boshlang'ich bo'lagini (fragmentini) tashkil etish.
3. Fragment bilan maksimum bog'langan cho'qqini tanlash.
4. Asosiy mezonlar va chegaralanishlar bajarilganligini tekshirish.
5. Grafni bo'lishdagi yangi fragmentni tashkil etish.
 - Ketma-ket usuli bilan;
 - Parallel usul bilan;
 - Parallel – ketma-ket usul bilan.
6. Barcha cho'qqilar graf bo'laklariga taqsimlanganligini tekshirish.

7. Graf bo`laklarini tashkil etish.

Misol. Graf $G=\langle X, U \rangle$ berilgan (7.5-rasm). Grafdagi cho`qqilar soni 15 ta. Shu grafni bo`laklarga bo`lish talab etiladi.

Berilgan grafda X cho`qqilar to`plam, to`plamchalar bo`yicha taqsimlangan. Har bir to`plam bir xil rangga ega bo`lgan o`xshash cho`qqilardan iborat.

O`xshash cho`qqilar to`plami quyidagi tartibda taqsimlangan:

$$\begin{aligned} X^1 &= \{x_1, x_2, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}, X^2 = \{x_8, x_9\}, X^3 = \{x_7, x_{13}\}, \\ X^4 &= \{x_5, x_{14}, x_{15}\}, X^5 = \{x_3\}, \\ X^6 &= \{x_4\}, X^7 = \{x_6\} \end{aligned}$$

Ko`rilayotgan graf uchun chegaralanishlar quyidagicha berilgan:

1) ziddiyatli cho`qqilar to`plamchalari;

$$Z_1 = \{x_{10}, x_9, x_3\} \text{ i } Z_2 = \{x_5, x_6\},$$

2) graf bo`laklarining maksimal bog`lanishlari – $F_0=20$;

3) graf bo`laklarida maksimal cho`qqilar soni – $K_0=3$;

4) grafda graf bo`laklarining maksimal soni – $N_0=6$;

Graf $G=\langle X, U \rangle$ bog`lanishlar ro`yxati S bilan berilgan. Shu ro`yxat asosida bog`langanlik matritsasini quramiz.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}
x_1		1			1		2		3						
x_2	1		2		3	1									1
x_3		2		4		3	1			1	1	1			
x_4			4			3	1	1							
x_5	1	3				1			1					1	
x_6		1	3	3	1					1					
x_7	2		1	1					3						1
x_8				1						4		1	3		1
x_9	3				1		3						1		
x_{10}			1			1		4			1		3		
x_{11}			1							1		3		3	
x_{12}			1					1			3				3
x_{13}								3	1		3			1	
x_{14}					1						3			1	1
x_{15}		1			1			1				3		1	

Keltirilgan algoritm bo'yicha boshlang'ich cho'qqilar uchun ziddiyatli cho'qqilar to'plamlarini $Z_1=\{x_{10}, x_9, x_3\}$ ni keyinroq $Z_2=\{x_5, x_6\}$ ni olamiz. Ketma-ket (parallel) ravishda Z_1 to'plamidan cho'qqini tanlab bog'langanlik matritsasi orqali eng kuchli bog'langan cho'qqilarni aniqlaymiz.

Bog'langanlik matritsasining har bir elementi qatordagi cho'qqilarni ustundagi cho'qqilar bilan bog'langanligini ko'rsatadi. Masalan x_{10} cho'qqini boshlang'ich cho'qqi deb olsak, u bilan eng kuchli bog'langan cho'qqi x_8 bo'lib (x_{10}, x_8) bog'lanishi hosil qilinadi.

Bu cho'qqilar uchun eng kuchli bog'langan cho'qqi x_{13} hisoblanadi. Shunday qilib, $G_1=\langle X_1, U_1 \rangle = \{x_{10}, x_8, x_{13}\}$ graf bo'lagi hosil bo'ladi.

Shu tartibda x_9 cho'qqisi uchun $G_1=\langle X_1, U_1 \rangle$ grafiga izomorf holatda x_7 va x_1 cho'qqilarini aniqlaymiz. Natijada, $G_2=\langle X_2, U_2 \rangle = \{x_9, x_7, x_1\}$ graf bo'lagini tashkil etamiz.

Bu graf bo'laklarining cho'qqilari o'xshash bo'lib, G_1 va G_2 graflarida X^1, X^2, X^3 cho'qqilar to'plamidan bittadan cho'qqi ishtirok etgan. Natijada, $G=\langle X, U \rangle$ grafini graf bo'laklariga bo'lishni quyidagicha ifodalash mumkin:

Graf bo'lagi	Cho'qqilar to'plamchasi	Cho'qqilar turi	Tashqi qobiqlar soni
G_1	x_8, x_{10}, x_{13}	1, 2, 3	$F_1=8$
G_2	x_1, x_7, x_9	1, 2, 3	$F_2=7$
G_3	x_3, x_4, x_6	5, 6, 7	$F_3=11$
G_4	x_2, x_5	1, 4	$F_4=9$
G_5	x_{11}, x_{14}	1, 4	$F_5=8$
G_6	x_{12}, x_{15}	1, 4	$F_6=9$

Shunday qilib, graf $G=\langle X, U \rangle$ uch xil turdagi graf bo'laklariga bo'linadi.

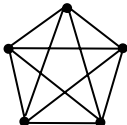
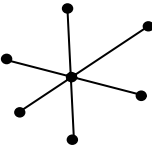
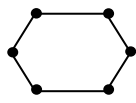
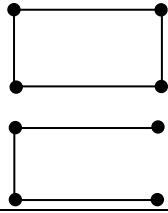
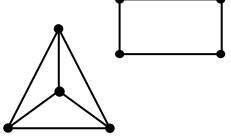
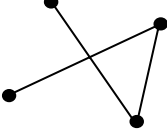
- 1) $G_1=\langle X_1, U_1 \rangle, G_2=\langle X_2, U_2 \rangle;$
 - 2) $G_3=\langle X_3, U_3 \rangle;$
 - 3) $G_4=\langle X_4, U_4 \rangle, G_5=\langle X_5, U_5 \rangle, G_6=\langle X_6, U_6 \rangle.$
- Graf bo'laklarining tashqi qobiqlari soni 52 ga teng.

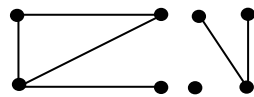
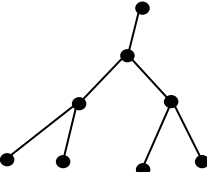
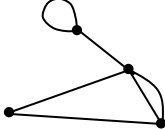
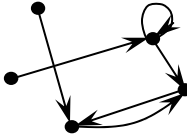
7.2. Masala va mashqlar

1. Berilgan grafni tashqi qobiqlar soni eng kam bo'lgan mezonga asoslangan holda ikki bo'lakka bo'ling.
2. Graf $G=\langle X, U \rangle$ da bo'laklar soni chegaralanganligini hisobga olib, uni bo'laklarga bo'ling.
3. Berilgan grafning tashqi qobiqlar soni eng kam bo'lgan mezonga asoslangan holda to'rt bo'lakka bo'ling.
4. Graf $G=\langle X, U \rangle$ da graf bo'laklaridagi cho'qqilar soni chegaralanganligini hisobga olib misollar keltiring.
5. Berilgan grafda bir-biriga mos bo'lgan graf bo'laklari sonini toping.
6. Berilgan grafda bir-biriga izomorf bo'lgan bo'laklarni toping.

VIII. GRAFLARNING TURLARI.

1.	Yo`naltirilmagan graf	X-cho`qqilar to`plami va u-qobiqlar to`plamidan tashkil topgan va quyidagicha ifodaga ega bo`lgan: $X=\{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_m\}$ va $U=\{u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_m\},$ hamda $U_j=x_i \text{ va } x_k \text{ cho`qqilarini bog`lovchi qobiq}$ $u_j=(x_i, x_k) \text{ dan iborat}$ bo`lsa, bunday to`plamlar yig`indisidan tashkil topgan chizma $G=\langle X, U \rangle$ yo`naltirilmagan graf deb ataladi.	
2.	Yo`naltirilgan graf	X-cho`qqilar to`plami va U-yo`naltirilgan qobiqlar to`plamidan tashkil topgan, hamda <math>u_i=(x_i, x_k)</math>, <math>x_i</math> – boshlang`ich cho`qqi – chiquvchi va <math>x_k</math> – oxirgi cho`qqi kiruvchi bo`lsa, bunday to`plamlardan tashkil topgan chizma yo`naltirilgan graf deb ataladi.	
3.	Nul graf	$G=\langle X, U \rangle$ grafda $x=\{x_i\}$, $i=1$ $U=\emptyset$ bo`lsa, bunday graf nul graf deb ataladi.	
4.	Multigraf	$G=\langle X, U \rangle$ grafida biror ikkita cho`qqining birlashuvi bir necha qobiq bilan ifodalansa, bunday graf multigraf deb ataladi.	

5.	Simmetrik graf	$G=\langle X, U \rangle$ graf simmetrik deb ataladi, agar uning biror ikkita cho`qqisi $x_i$ va $x_j$ uchun $u=(x_i, x_j)$ bo`lsa, $(x_j, x_i)=u$ bo`lsin.	
6.	To`liq graf	$G=\langle X, U \rangle$ grafda x cho`qqilarning hammasi bir-biri bilan bog`langan bo`lsa, to`liq graf deb ataladi.	
7.	Yulduzli graf	$G=\langle X, U \rangle$ graf bitta markaziy cho`qqiga ega bo`lsa va uning lokal darajasi $\lambda_{x_i} > 1$ bo`lsa, qolganlari esa $\lambda_{x_j} = 1$ bo`lsa, bunday graflar yulduzli graf deb ataladi.	
8.	Siklli graf	$G=\langle X, U \rangle$ grafda har bir cho`qqining darajasi $\lambda=2$ bo`lsa, bunday graf siklli graf deb ataladi.	
9.	Gamilton graf	Har bir cho`qqidan bir marta o`tishi mumkin bo`lgan bekiq zanjir, ya`ni siklli graf Gamilton sikli deb ataladi, agar zanjir bekiq bo`lmasa, Gamilton zanjiri deb ataladi.	
10.	Tekis graf	Tekis graf deb tekislikda berilgan ikkita qobig`i bir-biri bilan kesishmaydigan grafga aytiladi.	
11.	Bog`langan graf	Grafning hamma cho`qqilari bog`langan bo`lib, bir butun bo`lsa, u bog`langan graf deb ataladi.	

12.	Bogʻlanmagan graf	Agar grafda birorta choʻqqilar bogʻlanmagan boʻlsa, ular bogʻlanmagan graf deb ataladi.	
13.	Daraxt	Graf agar unda sikllar boʻlmasa daraxt deb ataladi.	
14.	Yoʻnaltirilmagan aralash graf	Graflarda tugunchalar va parallel qobiqlar boʻlsa, yoʻnaltirilmagan aralash graf deb ataladi.	
15.	Yoʻnaltirilgan aralash graf	Graflarda yoʻnaltirilgan qobiqlar va tugunchalar boʻlsa, bunday graf yoʻnaltirilgan aralash graf deb ataladi.	

1. Автоматизация проектирования сложных логических структур./Под ред. Гарбатова В.А. М: Энергия 1978.327 с
2. Белов В.В , Воробьев Е.М., Шаталов В. Е. Теория графов М. Высшая школа 1976.
3. Берзтисс А.Т. Структуры данных М. Статистика, 1974.
4. Брегман в.И. графы в задачах управления производством
5. Горбатов В.А. Схемы управления ЦВМ и графы Энергия 1971
6. Гуськов Г.Я., Магруппов Т.М. Алгоритмическое проектирование микроэлектронных вычислительных структур. Ташкент 1982
7. Евстигнеев В.А. Применение теории графов в программирование Наука 1985
8. Ершов А.П. Введение в теоретическое программирование Наука 1977
9. Зыков А.А Основы теории графов Наука 1987.
10. Зыков А. А Теория конечных графов Новосибирск Наука 1969
11. Кабулов В.К., Гуськов Г.Я., Магруппов Т.М. Концептуальное проектирование микроэлектронных вычислительных структур и систем. Ташкент: Фае, 1989. 224 с.
12. Ландау И.Я. применение ЦВМ, для проектирования ЦВМ. М. Энергия, 1974
13. Липатов .П Теория графов и ее применение М. Знание 1986
14. Магруппов Т.М. Графы, сети, алгоритмы и их приложения. Ташкент: Фан, 1990. 120 с.
15. Мелихов А.Н., Берштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для применения дискретных устройств. М.: Наука, 1974.
16. Методы разбиения РЭА на конструктивные законченные части. М.: Сов. радио,1978.
17. Морозов К.К., Одинцов В.Г., Курейчик В.М. Автоматизация проектирование конструкций радиоэлектронной аппаратуры. М.: Радио и связь, 1983.
18. Оре. О. Теория графов. М.: Наука,1980
19. Поспелов Д.А. Введение в теорию вычислительных систем. М.: Сов.радио, 1972

20. ФилиппсД., Гарша-ДиасА. Методы анализа сетей/пер. с англ.М.:Мир,1984.496 с.
- 21 Харари Ф. Теория графов М.,Мир 1973.
- 22 <http://booket.ru/book-77179.html>
- 23 <http://www.math.nsc.ru/publishing/Books/distel.htm>
- 24 <http://refmans.pp.ru/ref14/ref396.php>
- 25 <http://www.mavica.ru/directory/rus/8877.html>

Mundarija

Kirish.	3
I-BOB. ASOSIY TUSHUNCHALAR.....	4
1.1. Asosiy aniqlanishlar.....	4
1.2. Graf bo'laklari.....	7
1.3. Graflar ustida amallar.....	10
1.4. Marshrutlar, zanjirlar, yo'llar va halqalar.....	11
1.5. Masala va mashqlar	13
II-BOB. GRAFLARNING XUSUSIYATLARI.....	16
2.1. Graflarning turlari.....	16
2.2. Yo'naltirilgan graflar va uning asosiy xususiyatlari.....	20
2.3. Matritsalar va ularning graf bilan bog'liqligi.....	22
2.4. Masala va mashqlar	25
III-BOB. GRAFLARNING IZOMORFLIGINI ANIQLASH.....	31
3.1. Graflar izomorfligining asosiy shartlari.....	31
3.2. Graflarni sathlarga bo'lish.....	32
3.3. Graflarning izomorfligi.....	34
3.3.1. Graflarda boshlang'ich cho'qqilarni topish.....	35
3.4. Masala va mashqlar	41
IV-BOB. GRAFLARDA YO'LLARNI TOPISH.....	45
4.1. Graflarda yo'llarni topish va ularni hisoblash.....	45
4.2. Masala va mashqlar	48
V-BOB. MINIMAL DARAXTLARNI QURISH.....	53
5.1. Yulduzli graflarni tanlash.....	53
5.2. Minimal daraxtlarni tanlash usuli va algoritmi.....	54
5.3. Masala va mashqlar	61
VI-BOB. GRAFLARNING TOPOLOGIK TASVIRLANGAN MAYDONINI QOPLASH.....	63
6.1. Konturli graflarni qoplash.....	63
6.2. Masala va mashqlar	67

VII-BOB. GRAFLARNI BO`LAKLARGA BO`LISH.....	69
7.1. Graflarni bo`laklarga bo`lish.....	69
7.2.Masala va mashqlar	77
VIII-BOB. GRAFLARNING TURLARI.....	78
Adabiyotlar.....	81

Magrupov Talat Madiyevich.

Graflar nazariyasi.

O`quv qo`llanma.

Muharrir: M.M. Botirbekova.