

«O‘ZBEKISTON TEMIR YO‘LLARI» DATK

Toshkent temir yo‘l muhandislari instituti

EHTIMOLLAR NAZARIYASI

**Barcha yonalishdagi 2-bosqich bakalavrlari uchun mustaqil ishlarni
bo'yicha uslubiy ko'rsatma**

bajarish

Toshkent - 2006

UDK 519.21

Mazkur to'plam to'qqista mavzuni o'z ichiga oluvchi mustaqil ish namunalaridan iborat bo'lib, u Toshkent temir yo'l muhandislari institutida ehtimollar nazariyasini o'qitishda to'plangan ko'p yillik tajriba asosida tuzilgan. To'plam barcha mutahassislikdagi talabalar uchun mo'ljallangan bo'lib, mustaqil ish sifatida berilishi mumkin.

Tuzuvchilar: Ganiev I.G. – fizika-matematika fanlari doktori,
 professor;
 Ikromova M.E. – katta o'qituvchi

Taqrizchilar: ToshTYMI fizika-matematika fanlari nomzodi,
 dotsent **Karimov A.M.**
 O'zMU fizika-matematika fanlari nomzodi,
 dotsent **Atahanov K.U.**

Ko'rsatma institut o'quv-uslubiy kengashida tasdiqlangan va nashrga tavsiya etilgan.

Kirish

Mazkur to'plam to'qqiz bo'limdan iborat bo'lib, quyidagi mavzularni o'z ichiga oladi.

- 1.Ehtimolning klassik ta'rifi.
- 2.Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari.
- 3.To'la ehtimol formulasi.
- 4.Bernulli formulasi.
- 5.Laplasning local va integral teoremlari.
- 6.Diskret tasodifiy miqdorlar.
- 7.Tasodifiy miqdorlar ehtimollarining taqsimot funksiyalari.
- 8.Normal va ko'rsatkichli taqsimot.
- 9.Empirik funksiya.

I. Ehtimolning klassik ta'rifi

Ehtimol hodisaning ro'y berish imkoniyatini xarakterlovchi sonidir. Sinashda ro'y berishi mumkin bo'lgan har bir hodisaga elementar natija deyiladi. Bizni qiziqtirayotgan hodisaning ro'y berishiga olib keladigan elementar natijalarni bu hodisani ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar deyiladi.

Ehtimolning klassik ta'rifi: Biror A -hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar sonini sinashning yagona mumkin bo'lgan, teng imkoniyatli elementar natijalar jami soniga nisbatiga A hodisaning ehtimoli deyiladi.

A hodisaning ehtimoli $P(A)$ –orqali belgilanadi. Demak ta'rifga ko'ra

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

bu erda m hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi elementar natijalar soni, n - sinashning yagona mumkin bo'lgan, teng imkoniyatli elementar natijalar jami soni.

Nisbiy chastota ta'rifi: A hodisa ro'y bergan sinovlar sonini o'tkazilgan sinovlar jami soniga nisbatiga A -hodisasining nisbiy chastotasi deyiladi. Statistik ta'rifida hodisaning ehtimoli uchun uning nisbiy chastotasi qabul qilinadi.

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

Tajriba natijasida ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lgan har qanday faktga hodisa deyiladi.

Masalalar echish namunalari.

1-Masala.

Idishda 10 ta qizil rangli va 4 ta ko'k rangli sharlar bor. Tavakkaliga shu idishdan ketma-ket 2 ta shar olindi. Olingan ikkala sharning ham qizil rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish :

$$m = C_{10}^2 \quad n = C_{14}^2$$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^2}{C_{14}^2} = \frac{10 \cdot 9}{14 \cdot 13} = \frac{45}{91};$$

2-masala .

20 ta mahsulot orasida 5 ta yaroqsiz mahsulot bor. Tekshirish uchun tavakkaliga 2 ta mahsulot tanlandi. Shular orasida 1 tasi yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. 2 ta mahsulotni 20 tadan C_{20}^2 ta usul bilan tanlash mumkin. 1 ta yaroqsiz mahsulotni esa 5 ta mahsulot ichidan C_5^1 ta usul bilan tanlash mumkin.

Klassik ta'rifga ko'ra:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^1 C_{15}^1}{C_{20}^2} = \frac{5 \cdot 15}{190} = \frac{15}{38}$$

I. Ehtimolni bevosita hisoblashga oid masalalar.

1. O'yin (soqqasi) kubigi 1 marta tashlandi.

quyidagi hodisalar ehtimoli topilsin:

a) juft raqamlar chiqish ehtimoli,

b) 5 dan kam bo'lmagan raqamlar chiqish ehtimoli,

v) ko'pi bilan 5 raqami chiqish ehtimoli, (ya'ni 5 yoki 5 dan kam raqam chiqish ehtimoli.)

Javob: a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; v) $\frac{5}{6}$.

2. O'yin kubigi 2 marta tashlandi.

Chiqqan ochkolar (raqamlar) ko'paytmasi 8 bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{1}{18}$;

3. O'yin kubigi bir marta tashlandi.

a) 2 raqamining chiqish ehtimoli,

b) juft raqam chiqish ehtimoli,

v) kamida 3-raqami chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: a) $\frac{1}{6}$; b) 0,5; v) $\frac{2}{3}$;

4. Qutida 5 ta oq va 3 ta qora sharlar mavjud bo'lib, ulardan 4 tasi tavakkaliga olindi.

a) Shu olingan sharlar orasida 2 ta oq va 2 ta qora sharlar mavjud bo'lish ehtimoli topilsin.

b) Oq sharlar soni qora sharlar sonidan ko'p bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: a) $\frac{3}{7}$; b) $\frac{1}{2}$.

5. O'yin kubigi 2 marta tashlandi.

Chiqqan ochkolar yig'indisi 8 bo'lishi ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{5}{36}$.

6. O'yin kubigi 2 marta tashlandi. Chiqqan ochkolar yig'indisi, shu ochkolar ko'paytmasidan katta bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{11}{36}$.

7. Raqamlari 1,2,3,..., n deb belgilangan sharlar ketma-ket tavakkaliga idishdan olindi. Chiqqan sharlar 1,2,3,...,n tartibda joylashishi ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{1}{4}$.

8. Idishda 12 ta oq va 8 ta qizil shar bor. Idishdan tavakkaliga birin-ketin hamma sharlar olindi. Oq rangli sharning qizil rangli shardan oldin chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{3}{5}$.

9. Ikkita idishdan birida 6 ta oq 4 ta qora, ikkinchisida esa 8 ta oq, 6 ta qora sharlar bor. Tavakkaliga ikkita idishdan bittadan sharlar olindi. Chiqqan ikkala sharning ham oq rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{12}{35}$.

10. 9 ta kartochkada 0,1,2,3,4,5,6,7,8 raqamlar yozilgan bo'lib, ulardan tavakkaliga 2 ta raqam olindi. Shu raqamlar terilganda juft son chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{5}{9}$.

11. Kitob 90 betdan iborat, tavakkaliga ochilgan betning tartib nomeri 3 raqami bilan tugashining ehtimoli topilsin.

Javob: 0,1;

12. O'yin kubigi 2 marta tashlanganda, tushgan raqamlar ayirmasi 3 ga teng bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{1}{6}$.

13.O'yin kubigi 2 marta tashlandi. Tushgan ochkolar ayirmasi 3 dan kam bo'lmaslik ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{1}{3}$.

14.Hamma tomoni bo'yalgan kub, teng 64 ta kublarga ajratildi, so'ngra yaxshilab aralashtirildi. Tavakkaliga olingan kubning 2 tomoni bo'yalgan bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{3}{8}$.

15. Hamma tomoni bo'yalgan kub teng 22 kublarga ajratildi. Yaxshilab aralashtirib, tavakkaliga olingan kubining 3 tomoni bo'yalgan bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{8}{27}$.

16. Guruhda 15 talaba bo'lib ulardan 5 tasi a'lochi talabalardir. Tavakkaliga ajratilgan ikki talabadan 1 tasi a'lochi bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{10}{21}$.

17.O'yin kubigi 2 marta tashlandi, chiqqan ochkolar ko'paytmasi 6 bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{1}{9}$.

18.Idishda 6 ta bir xil buyum bo'lib, ulardan ikkitasi yaroqsizdir.Tavakkaliga 2 ta buyum tanlandi. Olingan ikki buyum orasida hech bo'lmaganda bittasi yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{3}{5}$.

19. Korxonada 10 kishi ishlaydi. Ular orasida 6 ta ayol bor. Tavakkaliga 4 ta kishi saylov komissiyasi uchun tanlandi. Shulardan 2 tasi ayol bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{3}{7}$.

20. O'nta bir xil kartochkada 0, 1, 2,...,9 raqamlari yozilgan. Tavakkaliga terilgan 2 ta kartochka olinib terilganda, hosil bo'lgan ikki xonali sonining 18 ga bo'linish ehtimoli topilsin.

Javob: $p = \frac{1}{8}$

21. O'nta bir xil kartochkalarda 0,1,2,...,9 raqamlari yozilgan. Tavakkaliga 2 ta kartochka olinib, terilganda, hosil bo'lgan 2 xonali sonning 12 ga bo'lishi ehtimoli topilsin.

Javob: $p = \frac{4}{45}$.

22. 1,3,5,7 va 9 sm li tayoqchalar bor. Tavakkaliga olingan 3 ta tayoqchalardan uchburchak yasash mumkin bo'lishi ehtimoli topilsin.

Javob: $\{3.7.9\}\{3.5.7\}\{5.7.9\}$ $p = \frac{3}{10}$

II. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari

Ta'rif. A va B hodisalarining yig'indisi $(A + B)$ deb, kamida birining ro'y berishidan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

Ta'rif. A va B hodisalarining ko'paytmasi AB deb, ham A , ham B hodisaning ro'y berishdan iborat bo'lgan hodisaga aytiladi.

Ta'rif To'la gruppani tashkil etuvchi yagona mumkin bo'lgan 2 ta hodisaga qarama-qarshi hodisalar deyiladi, ya'ni A ro'y berganda $\bar{A}$ ro'y bermaydi va aksincha.

Teorema Birgalikda bo'lmagan A va B hodisalar uchun:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \text{ tenglik o'rinli.}$$

Ta'rif Agar A hodisaning ro'y berish ehtimoli B hodisaning ro'y berishiga bog'liq bo'lmasa, A va B hodisalar bog'liq bo'lmagan hodisalar deyiladi.

Teorema Agar A va B lar bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lsa,

$$P(AB) = P(A)P(B) \text{ tenglik o'rinli.}$$

Agar $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ hodisalar birgalikda bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lib, $P(\bar{A}_1) = q_1, \dots, P(\bar{A}_n) = q_n$ bo'lsa kamida bittasining ro'y berish ehtimoli:

$$P = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2) \dots P(\bar{A}_n) \text{ yoki } P = 1 - q_1 \cdot q_2 \dots q_n \text{ ga teng bo'ladi.}$$

Agar $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ bo'lsa, $P = 1 - q^n$ bo'ladi.

Masalalar yechish namunalari.

1. 3 ta o'yin kubigi tashlandi. Kamida bitta kubikda 5 raqami chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish: O'yin kubigi tashlanganda 5 ochko tushishi ehtimoli $P = \frac{1}{6}$, 5 ochko tushmaslik ehtimoli $q = 1 - P = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Agar A uchta kubik tashlanganda kamida bittasida 5 ochko tushish hodisasi bo'lsa, $P(A) = 1 - q^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$

2. Telefon stansiyasida tekshirilayotgan 3 ta aloqa simlaridan faqat bittasining yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin, agar bitta simning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,1 ga teng bo'lsa,

$$P = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 3 \cdot p_1 p_2 q_3 = 3 \cdot 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 0,243$$

3. O'qning nishonga tegish ehtimoli $P = 0,9$ bo'lsa, 3 ta o'q uzilganda, uchalasining ham nishonga tekkan bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: Birinchi o'qni nishonga tegish hodisasi A, ikkinchi o'qni nishonga tegish hodisasi B, uchinchi o'qni nishonga tegish hodisasi C bo'lsa, uchala o'qni nishonga tegish hodisasi ABC bo'ladi.

$P(A) = P(B) = P(C) = p = 0,9$ bo'lgani uchun ko'paytirish teoremasiga ko'ra.

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = p_1 p_2 p_3 = (0,9)^3 = 0,729$$

Qo'shish va ko'paytirish teoremlariga oid masalalar

1.1 chi idishda 1 chi sortli detallar 30% ni, 2 chi idishda 1 chi sortli detallar 40% ni tashkil etadi. Har bir idishdan 1 tadan tavakkaliga detallar olindi. Olingan 2 la detalning ham 1 chi sortli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,12$

2. Talaba o'ziga kerakli formulani 3 ta kitobdan izlamoqda. Formulaning birinchi, ikkinchi, uchinchi kitoblarda bo'lish ehtimoli mos ravishda 0,5, 0,9, 0,8 ga teng. Formulaning faqat 2 ta kitobda bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,42$

3. 1 chi merganning nishonga tekkazish ehtimoli 0,6, 2 chi merganniki esa 0,8 bo'lsa, o'q uzilganda faqat 1 ta merganning nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,44$

4. 2 ta erkli sinovda A hodisaning kamida 1 marta ro'y berish ehtimoli 0,75 ga teng. Agar A hodisaning har bir sinovda ro'y berish ehtimoli bir xil bo'lsa, shu ehtimol topilsin.

Javob: $P = \frac{1}{2}$

5. 1 chi va 2 chi to'pdan otilganda nishonga tekkizish ehtimollari mos ravishda 0,8 va 0,7 bo'lsa, ikkala to'pdan o'q otilganda kamida bittasining nishonga tegish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0.94$

6. 80% yengil jinoyat qilgan, qolganlari esa nisbatan og'ir jinoyat qilgan jinoyatchilar birga joylashgan xonadan tavakkaliga 2 kishi tergovga olib chiqildi. Ikki kishidan biri og'ir, ikkinchisi esa yengil jinoyatchi bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0.32$

7. 200 ta mahsulotning 150 tasi 1 chi navli, 30 tasi 2 chi navli, 20 tasi esa yaroqsizdir. Tavakkaliga olingan mahsulotning yo 1 chi navli yo 2 chi navli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0.9$

8. Idishda 1,2,3,4,5,6 deb belgilangan 6 ta koptok bor. Tavakkaliga bittadan 3 ta koptok olindi. Birin-ketin 4,5,6 raqamli koptoklar olingan bo'lish ehtimoli quyidagi hollarda topilsin:

1) koptoklar idishga qaytarib solinmaydi;

2) olingan koptoklar idishga qaytarib solinadi.

Javob: 1) $P = \frac{1}{120}$ 2) $P = \frac{1}{216}$

9. Taxta yashikda 6 ta detal bo'lib, ularning 4 tasi bo'yalgan. Tavakkaliga 2 ta detal olindi. Olingan ikkala detalning ham bo'yalgan bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0.4$

10. Gruppada 10 ta talaba bo'lib, ulardan 3 tasi a'lochi talabadir. Tavakkaliga 2 ta talaba chaqirildi. Shu ikkala talabaning ham a'lochi bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{1}{15}$

11. 1- chi idishda faqat rangi bilan ajralib turuvchi 5 ta oq, 11 qora, 8 ta qizil sharlar bor. Ikkinchi idishda esa 10 ta oq, 8 ta qora, 6 ta qizil xuddi shunday sharlar bor. Ikkala idishdan tavakkaliga 1 tadan sharlar olindi. Olingan ikkala sharning ham bir xil rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0.323$

12. Tavakkaliga musbat, butun son tanlandi.

1) Shu sonning 2 ga ham, 3 ga ham bo'linmasligi ehtimoli topilsin.

2) Shu sonning 2 ga yoki 3 ga bo'linmaslik ehtimoli topilsin.

Javob: 1) $P_1 = \frac{1}{3}$ 2) $P_2 = \frac{5}{6}$

13. Hamshira o'ziga kerakli dorini 3 ta tokchadan izlamoqda. Dorining 1 chi,

2 chi, 3 chi tokchalarda bo'lish ehtimollari mos ravishda 0,5: 0,8: 0,9 ga teng bo'lsa, izlanayotgan dorining faqat bitta tokchada bor bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,14$

14. Xaridor o'ziga kerakli oyoq kiyimni 3 ta do'kondan izlamoqda. Poyafzalning 1 chi, 2 chi, va 3 chi do'konlarda bor bo'lish ehtimoli mos ravishda 0,7, 0,8, 0,6 ga teng. Izlanayotgan oyoq kiyimning faqat ikkita do'konlarda bor bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,452$

15. 14 chi masala shartlarida, izlanayotgan oyoq kiyimning 3 chala do'konlarda ham bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,336$

16. 10 ta ishchi orasida 3 ta ayol kishi bor. Tavakkaliga ular orasidan 2 ta kishi tanlandi, ulardan hech bo'lmaganda bittasi ayol kishi bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{8}{15}$

17. Ikki mergan nishonga qarata o'q uzmoqda, bitta o'q uzishda nishonga tekkizish ehtimoli birinchi mergan uchun 0,7 ikkinchisi uchun esa 0,8 ga teng. Bir yo'la o'q uzganda merganlardan faqat bittasining nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,38$

18. Idishda 200 ta detal bo'lib, ulardan 150 tasi 1 chi nav, 30 tasi 2 chi nav, 16 tasi 3 chi nav va 4 tasi yaroqsizdir. Tavakkaliga olingan detalning birinchi yoki 2 chi nav li bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,9$

19. Oilada 3 ta farzand bor. Agar qiz bola va o'g'il bola tug'ilish ehtimollarini teng deb olsak, oilada uchala farzand xam qiz bola bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,125 = \frac{1}{8}$

20. 1 chi va 2 chi to'pdan o'q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli mos ravishda 0,8 va 0,7 ga teng. Bir yo'la 2 ta to'pdan o'q uzganda kamida 1 tasining nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,94$

21. Idishda 4 ta oq, 3 ta qizil va 8 ta ko'k rangli, bir xil o'lchovli sharlar bor. Idishdan tavakkaliga olingan sharning rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{11}{15}$

III. To'la ehtimol formulasi

To'la gruppani tashkil etadigan, birgalikda bo'lmagan $B_1, B_2, \dots, B_n$ hodisalarning (gipotezalarning) biri ro'y bergandagina ro'y berishi mumkin bo'lgan A hodisaning ehtimoli, gipotezalardan har birining ehtimolini A hodisaning tegishli shartli ehtimoliga ko'paytmalari yig'indisiga teng.

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)$$

bu yerda $\sum_{i=1}^n P(B_i) = 1$

Masalalar yechish namunalari.

1-Masala: 350 ta mexanizm orasida 160 tasi 1-chi navli, 110 tasi 2-chi navli va 80 tasi 3-chi navlidir. 1-chi navli mexanizmning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,01 ga, 2-chi navli mexanizmning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,02 ga va 3-chi navli mexanizmning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,04 ga teng. Tavakkaliga tanlangan mexanizmning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: B_1 orqali 1-chi navli mexanizm olinganlik hodisasini belgilaylik.

B_2 orqali 2-chi navli mexanizm olinganlik hodisasini belgilaylik.

B_3 orqali 3-chi navli mexanizm olinganlik hodisasini belgilaylik.

Hammasi bo'lib 3 ta gipoteza mavjud, ular teng imkoniyatlidir.

Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra.

$$P(B_1) = \frac{160}{350}; \quad P(B_2) = \frac{110}{350}; \quad P(B_3) = \frac{80}{350};$$

Shartli ehtimollar esa berilgandir.

$P_{B_1}(A)$ - 1 chi navli mexanizmning yaroqsiz bo'lish ehtimoli.

$P_{B_2}(A)$ - 2 chi navli mexanizmning yaroqsiz bo'lish ehtimoli.

$P_{B_3}(A)$ - 3 chi navli mezanizmning yaroqsiz bo'lish ehtimoli.

To'la ehtimol formulasiga ko'ra:

$$P(A) = \frac{160 \cdot 0,01 + 110 \cdot 0,02 + 80 \cdot 0,04}{350} = \frac{1}{50}$$

$P(\bar{A})$ = mexanizmning yaroqli bo'lish ehtimoli

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{50} = \frac{49}{50} = 0,98$$

2-Masala: 2 ta idishning har birida 5 ta oq va 10 ta qizil sharlar bor.

1-chi idishdan tavakkaliga bir shar olinib, 2-chi idishga solindi.

So'ngra 2-chi idishdan tavakkaliga 1 ta shar olindi. Shu olingan sharning qizil rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish: B_1 - 1 chi idishdan olingan sharning qizil rangli bo'lish hodisasi bo'lsin.

B_2 - 1 chi idishdan olingan sharning oq rangli bo'lish xodisasi bo'lsin.

$$P(B_1) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}; \quad P(B_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{11}{16}; \quad P_{B_2}(A) = \frac{10}{16}$$

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{16} + \frac{1}{3} \cdot \frac{10}{16} = \frac{2}{3}$$

To'la ehtimolga oid masalalar.

1. Bazaga 1-chi zavoddan 50%, ikkinchi zavoddan 30% va 3-chi zavoddan esa 20% mahsulot keladi. Mahsulotning yaroqsiz (brak) bo'lishi birinchi zavod uchun 2%, 2-chi zavod uchun 3% ni, 3-chi zavod uchun esa 5% ni tashkil etadi. Tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

$$\text{Javob: } P = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,029 = 0,971$$

2. 3 ta idishda sharlar bo'lib, 1-chi idishda 6 ta oq va 2 ta qizil shar bor. Ikkinchi idishda esa, 8 ta oq va 3 ta qizil, uchinchi idishda 5 ta oq va 7 ta

qizil sharlar bor. Tavakkaliga 1-chi idishdan bitta shar olinib, 2-chi idishga solindi, so'ngra 2-chi idishdan ham tavakkaliga 1 ta shar olinib, 3-chi idishga solindi. 3-chi idishdan ixtiyoriy ravishda olingan sharning qizil rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,56$

3. Dominoning to'liq to'plamidan (28) tavakkaliga 2 tasi tanlandi. Ulardan birini ikkinchisiga ulash mumkin bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{7}{18}$

4. 1-chi idishda 12 ta mahsulot, 2-chi idishda esa 10 ta mahsulot bo'lib, har birida 1 tadan mahsulot yaroqsizdir. Birinchi idishdan tavakkaliga 1 ta mahsulot olinib, 2-chi idishga solindi. Ikkinchi idishdan tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob; $P = \frac{13}{132}$

5. Ichida 4 ta shar bo'lgan qopga bitta oq shar solingan, so'ngra tavakkaliga qopdan bitta shar olindi. Agar qopdagi sharlarning rangi haqidagi barcha mumkin bo'lgan taxminlar teng imkoniyatli bo'lsa, olingan sharning oq bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,6$

6. Guruhda 10 ta mergan bo'lib, ulardan 3 tasi uchun nishonga tekkazish ehtimoli 0,5 ga, 5 tasi uchun nishonga tekkazish ehtimoli 0,8 ga va qolgan 2 tasi uchun esa 0,25 ga teng. Tavakkaliga otilgan o'qning nishonga tekkan bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,6$

7. Birinchi idishda 8 ta oq va 2 ta ko'k sharlar bor. Ikkinchi idishda esa 6 ta oq 4 ta ko'k sharlar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga 1 ta shar olinib, ikkinchi idishga solindi. So'ngra 2-chi idishdan tavakkaliga bitta shar olindi. Shu olingan sharning oq rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{34}{55}$

8. Ikkita bir xil qoplarning birida «a» ta oq va «b» ta qora koptoklar, ikkinchisida esa «c» ta oq va «d» ta qora koptoklar bor. Birinchi qopdan tavakkaliga bitta koptok olinib, ikkinchisiga solindi. So'ngra ikkinchi qopdan tavakkaliga bitta koptok olindi. Shu olingan koptokning oq bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{a(c+1)+b \cdot c}{(a+b)(c+d+1)}$

9. 3 ta bir xil xaltalarning har birida 4 tadan oq va 6 tadan qora sharchalar bor. Birinchi xaltadan tavakkaliga bitta shar olinib, ikkinchi xaltaga solindi, so'ngra ikkinchi xaltadan bitta shar olinib, uchinchi xaltaga solindi. Shu uchinchi xaltadan tavakkaliga olingan sharning rangi oq bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $P = 0,4$

10. «3» ta bir xil idishning har birida «a» ta oq va «b» ta qora sharlar bor. Birinchi idishdan tavakkaliga shar olinib, ikkinchisiga solindi, so'ngra ikkinchi idishdan tavakkaliga bitta shar olinib, uchinchi idishga solindi. Uchinchi idishdan olingan sharning oq rangli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{a}{a+b}$

11. 350 mexanizm orasida 160 tasi birinchi nav, 110 tasi ikkinchi nav va 80 tasi uchinchi navli. Birinchi nav mexanizmlar ichida yaroqsiz mexanizm bo'lish ehtimoli 0,01 ni tashkil etadi. Ikkinchi va uchinchi nav mexanizm orasida yaroqsiz mexanizm bo'lish ehtimollari mos ravishda 0,02 va 0,04 ga teng. Tavakkaliga bitta mexanizm olindi. Bu mexanizmning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: 0,98

12. Tikuv korxonasiga keladigan mahsulotlarning 25% ni A_1 zavod, 35% ni A_2 zavod va 50% ni A_3 zavod etkazib beradi. A_1 zavodi etkazadigan mahsulotning yaroqsiz bo'lish ehtimoli 0,1, A_2 va A_3 zavodlari uchun shu ehtimol mos ravishda 0,2 va 0,5 ni tashkil etadi. Tavakkaliga tanlangan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,705$

13. 3 ta detali bor yashikka bitta standart detal tashlandi, so'ngra tavakkaliga bitta detal olingan. Agar yashikdagi standart detallar soni haqidagi barcha mumkin bo'lgan taxminlar (gipotezalar) teng imkoniyatli bo'lsa, shu olingan detalning standart bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,625 = \frac{5}{8}$

14. Birinchi yashikda 39 ta detal bo'lib, ulardan 36 tasi standartdir. Ikkinchi yashikda 20 detal bo'lib, ulardan 16 tasi standartdir. Ikkinchi

yashikdan tavakkaliga bitta detal olinib, birinchi yashikka solindi. Birinchi yashikdan tavakkaliga olingan detalning standart bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,92$

15. Detallarning 2 xil to'plami bo'lib, birinchi to'plamdagi detalning standart bo'lish ehtimoli 0,8 ga, ikkinchi to'plamdagi detalning standart bo'lish ehtimoli esa 0,9 ga teng. Ixtiyoriy to'plamdan tavakkaliga olingan detalning standart bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,85$

16. Sportchilar komandasida 8 chang'ichi, 5 velosipedchi va 2 ta yuguruvchi bor. Normativni bajarish ehtimollari: chang'ichi uchun 0,8 ga, velosipedchi uchun 0,7 va yuguruvchi uchun esa 0,05 ga teng bo'lsa, tavakkaliga tanlangan sportchining normativni bajarish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{2}{3}$

17. Birinchi idishda 20 dona mahsulot bo'lib, ulardan 2 tasi yaroqsizdir. Ikkinchi idishda 10 dona mahsulot bo'lib, ulardan 1 tasi yaroqsizdir. Har bir idishdan tavakkaliga 1 tadan mahsulot olindi. So'ngra bu ikki mahsulotdan yana bittasi tavakkaliga olindi. Shu olingan mahsulotning yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,9$

18. Yerga ekiladigan o'simliklarning 50% ni A turdagi o'simlik tashkil etadi 30% ni esa B turdagi o'simlik tashkil etadi, 20% C turdagi o'simlikdir. A turdagi o'simlikning unib chiqish ehtimoli 0,8 ga, B turdagi o'simlikning unib chiqish ehtimoli 0,7 ga C turdagi o'simlikning unib chiqish ehtimoli 0,6 ga teng. Tavakkaliga tanlangan o'simlikning unib chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,73$

19. 20 ta mergandan 6 tasining o'q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,8 ga, 8 tasining nishonga tekkizish ehtimoli 0,7 ga, 4 tasining nishonga tekkizish ehtimoli 0,6 ga va qolgan 2 tasining nishonga tekkizish ehtimoli 0,5 ga teng. Tavakkaliga tanlangan merganning nishonga tekkizish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,64$

20. 3 xil partiyada detallar bo'lib, 1 chi partiyada $\frac{2}{3}$ qismi yaroqsiz detallardir. Qolgan 2 ta partiyada yaroqsiz detallar yo'q. Nazorat uchun tavakkaliga olingan partiyadagi detalning yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{2}{9}$

IV. Sinovlarning takrorlanishi. Bernulli formulasi

Agar sinovlar o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisasining ro'y berish ehtimoli qolgan sinovlarning natijalariga bog'liq bo'lmasa, u holda bunday sinovlar A hodisasiga nisbatan erkli deyiladi.

Bernulli formulasi. Har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ($0 < p < 1$) ga teng bo'lgan «n» ta erkli sinovda hodisaning ro'sa «k» marta ro'y berish ehtimoli $P_n(K) = C_n^K p^K q^{n-K}$ ga teng bo'lib, bu erda $q = 1 - p$

Hodisaning 1) «k» dan kam marta:

2) «k» dan ko'p marta:

3) kamida «k» marta:

4) ko'pi bilan «k» marta ro'y berish ehtimoli quyidagi formulalar bo'yicha topiladi.

1) $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1)$

2) $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$

3) $P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$

4) $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$

Masalalar yechish uchun namunalar

1-Masala. Oilada 10 ta bola bor. O'g'il va qiz bola tug'ilishi ehtimollari o'zaro teng 0,5 deb hisoblab, oilada 5 ta o'g'il bola bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. $P_{10}(5) = C_{10}^5 p^5 q^5 = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{63}{256} \approx 0,246$

2-Masala. Tanga uch marta tashlandi. Kamida 2 marta gerb chiqish ehtimoli topilsin.

Yechish.

$$P_3(2) + P_3(3) = C_3^2 p^2 q + C_3^3 p^3 q^0 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2} + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2} = 0,5$$

Bernulli formulasiga doir masalalar

1. Agar har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,3 bo'lsa, beshta erkli sinovda hodisaning kamida 2 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Javob: $P = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 1 - P_5(0) - P_5(1) = 0,472$

2. Bir sutkada elektr energiya sarfining belgilangan normadan ortib ketmaslik ehtimoli $P = \frac{3}{4}$ ga teng. 6 sutkaning 4 sutkasi davomida elektr energiya sarfini normadan ortib ketmaslik ehtimolini toping.

Javob: $P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \frac{6 \cdot 5}{12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0,3$

3. Agar 1 ta o'q uzganda nishonga tekkizish ehtimoli 0,9 ga teng bo'lsa, ketma- ket 3 ta o'q uzganda ko'pi bilan 2 marta nishonga tegmaslik ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,99$

4. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o'ynashmoqda. Qaysi birida yutish ehtimoli kattaroq 4 partiyadan 3 tasini yutishmi yoki 8 partiyadan 5 tasini yutishmi.

Javob: 4 partiyadan 3 tasini yutish.

5. Agar bitta sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,3 ga teng bo'lsa, u holda 2 ta erkli sinovda A hodisaning kamida 1 marta ro'y berish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = P_2(1) + P_2(2) = 0,51$

6. Agar bitta sinovda biror A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, u holda 5 ta erkli sinovda A hodisaning ko'pi bilan bir marta ro'y berish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = P_5(0) + P_5(1) = 0,337$

7. Tanga 4 marta tashlanganda, gerb tomoni kamida 3 marta tushish ehtimoli topilsin.

Javob: $\frac{5}{16}$

8. Agar har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,6 ga teng bo'lsa, 4 erkli sinovda A hodisaning ko'pi bilan 2 marta ro'y berish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,41$

9. Uskunaning yaroqsiz detal ishlab chiqarish ehtimoli 0,01 bo'lsa, tavakkaliga olingan 3 ta detaldan 2 tasining yaroqli bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,03$

10. O'yin kubigi 4 marta tashlanganda. 5 raqamining kamida 1 marta chiqish ehtimoli topilsin.

Javob:

$P = 0,518$

11. Partiyada kelgan detallar orasida yaroqsiz detallar 10% ni tashkil etadi. Tavakkaliga tanlangan 3 ta detalning barchasi yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,001 = \frac{1}{10^3}$

12. Agar yaroqsiz detalning ishlab chiqarish ehtimoli 0,1 ga teng bo'lsa, tavakkaliga olingan 3 ta detaldan 2 tasining yaroqsiz chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,027$

13. Tanga 6 marta tashlanganda, gerb tomoni 2 martadan kam marta chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{7}{64}$

14. Tanga 5 marta tashlandi. Gerbli tomoni kamida 2 marta chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{13}{16}$

15. Bitta lotareya bileti bo'lgan kishining yutish ehtimoli 0,1 ga teng bo'lsa,

3 ta bileti bo'lgan kishining 2 ta biletiga yutuq chiqmaslik ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,243$

16. Nishonga qarata 5 ta bir-biriga bog'liq bo'lmagan o'q otildi. Agar har bir sinashda nishonga tekkizish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, kamida 3 ta o'qning nishonga tegish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,06$

17. Har bir sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli 0,8 ga teng bo'lsa, 6 ta erkli sinovda A hodisaning kamida 2 marta ro'y berish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 1 - P_6(0) - P_6(1) \approx 0,99$

18. Agar biror partiyada detalning yaroqsiz bo'lish ehtimoli $P = 0,1$ ga teng bo'lsa, tavakkaliga olingan 3 ta detal orasida ko'pi bilan 1 ta detalning yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,972$

19. Avvalgi masala shartlarida tavakkaliga olingan 3 ta detaldan 2 tasi yaroqsiz bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P_3(2) = 0,027$

20. Nishonga qarata o'q uzganda nishonga tegish ehtimoli 0,9 bo'lsa, 3 marta o'q uzganda, uchala o'qning ham nishonga tegmaslik ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,001$

V. Laplasning lokal va integral teoremlari

Laplasning lokal teoremasi. Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ ga teng bo'lgan «n» ta erkli sinovda hodisaning «k» marta ro'y berishi ehtimoli taqriban: $P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$ ga teng.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}};$$

bu erda $\varphi(x)$ juft funksiya bo'lib, uning qiymatlari jadvalda beriladi.

Laplasning integral teoremasi. Har birida hodisaning ro'y berish ehtimoli $p(0 < p < 1)$ ga teng bo'lgan «n» ta erkli sinovda hodisaning kamida « k_1 » marta va ko'pi bilan « k_2 » marta ro'y berish ehtimoli taqriban.

$P_n(k_1 : k_2) \approx \Phi(x^{ii}) - \Phi(x^I)$ ga teng.

bu erda $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2/2} dx$ Laplas funksiyasi

$$x^I = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x^{ii} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} \quad x \in (0 \leq x \leq 5)$$

Laplas funksiyasi toq funksiya bo'lib, uning qiymatlari jadvalda beriladi, $x > 5$ qiymatlar uchun esa $\Phi(x) = 0,5$ deb olinadi.

Agar sinovlar soni katta bo'lib, har bir sinovda hodisaning ro'y berish ehtimoli «p» juda kichik bo'lsa, u holda $P_n(k) = \frac{\lambda^k \lambda^{-\lambda}}{k!}$ Puasson formulasidan foydalaniladi, bu erda k –hodisaning «n» ta erkli sinovda ro'y berish soni, $\lambda = np$ - hodisaning «n» ta erkli sinovda ro'y berishlari o'rtacha soni.

Masalalar yechish uchun namunalar

1. Agar A hodisaning har bir sinovda ro'y berish ehtimoli 0,75 ga teng bo'lsa, bu hodisaning 500 ta sinovda rosa 370 marta ro'y berish ehtimoli topilsin.

Yechish: Masala shartlariga ko'ra:

$$n = 500 \quad k = 370 \quad p = 0,75$$

$$q = 1 - p = 0,25$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{370 - 500 \cdot 0,75}{\sqrt{500 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}} = -0,5$$

$$\varphi(x) \approx 0,3521$$

$$P_{500}(370) \approx \frac{1}{\sqrt{500 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}} \cdot 0,351 \approx 0,0362$$

2. Tanga 100 marta tashlangan. Gerbli tomon rosa 50 marta tushishi ehtimolini toping.

Yechish: $n = 100; \quad p = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2} \quad k = 50$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 100 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} = 0$$

$$\varphi(0) = 0,3989$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \cdot 0,3989 \approx 0,0797$$

Laplasning lokal va integral teoremlariga doir masalalar.

1. Tanga 60 marta tashlangan. Yozuvli tomoni gerbli tomondan 2 marta ko'p tushish ehtimolini toping.

Javob: $P_{60}(31) \approx 0,0996$

2. Agar urug'ning unib chiqish ehtimoli 0,6 ga teng bo'lsa, 2400 ta ekilgan urug'dan 1400 tasining unib chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P_{2400}(1400) \approx 0,0041$

4. Bitta o'q otilganda nishonga tegish ehtimoli 0,4 ga teng bo'lsa, 320 ta o'q uzilganda aniq 100 tasining nishonga tegish ehtimoli topilsin.

Javob: $P_{320}(100) \approx 0,003$

4. Agar biror hodisaning har bir sinovda ro'y berish ehtimoli 0,25 ga teng bo'lsa, bu holda 243 ta erkli sinovda hodisaning rosa 70 marta ro'y berish ehtimolini toping.

Javob: $P \approx 0,023$

5. O'g'il bolaning tug'ilishi ehtimoli 0,516 ga teng. 200 ta tug'ilgan bolalardan o'g'il va qiz bolalar soni teng bo'lish ehtimolini toping.

Javob: $P = 0,052$

6. Tanga 1000 marta tashlandi, gerbli tomon rosa 500 marta tushish ehtimolini toping.

Javob: $P_{1000}(500) \approx 0,0252$

7. Sinov o'tkazilayotgan davrda mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli 0,05 ga teng bo'lsa, 100 ta mahsulotdan sinash natijasida kamida 5 ta mahsulotni ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,5$

8. Avvalgi masala shartlarida 100 ta mahsulotdan sinash natijasida ko'pi bilan 4 ta mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,5$

9. 7 Masala shartlarida 100 ta mahsulotdan sinash natijasida 5 dan 10 tagacha mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,489$

10. Sotib oluvchiga 41 razmerli poyafzal zarurligi ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, 750 ta sotib oluvchidan 120 tasidan ko'p bo'lmaganiga shu razmerli poyafzal kerakligi ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,01$

11. Bitta o'q otishda merganning nishonga tekkizish ehtimoli $P = 0,2$ teng bo'lsa, 100 ta otilgan o'qdan 20 tasining nishonga tekkizish ehtimoli qancha?

Javob: $P_{100}(20) \approx 0,1$

12. Avvalgi masala shartlarida 100 ta o'q uzganda kamida 20 tasining nishonga tekkizish ehtimoli qancha?

Javob: $P(20 \leq k \leq 100) \approx \frac{1}{2} = 0,5$

13. Chapaqaylar aholining 1% ni tashkil qiladi. Tavakkaliga olingan 200 ta kishi orasida 4 ta chapaqay bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,1039$

14. Ishlab chiqarilgan detalning nostandart bo'lish ehtimoli $P = 0,2$ ga teng. Tavakkaliga olingan 400 ta detaldan 70 tadan 100 tagachasi nostandart bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P(70 \leq k \leq 100) \approx 0,8882$

15. Darslik kitobi 100000 (tirajda) nusxada bosib chiqarilgan. Darslikning harflari noto'g'ri yig'ilgan bo'lish ehtimoli 0,0001 ga teng bo'lsa, butun 100000 nusxada rosa 5 ta kitobning harflari noto'g'ri yig'ilgan bo'lish ehtimoli qanday?

Javob: $P \approx 0,037$

16. 13 chi masalani Puasson formulasi orqali yeching.

Javob: $P \approx 0,09$

17. Sinov o'tkazilayotgan davrda mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli 0,05 ga teng. 100 ta mahsulotdan sinash natijasida:

a) ko'pi bilan 4 ta mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

b) kamida 5 ta mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Javob:

a) $P = 0,31$

b) $P = \frac{1}{2}$

18. 17 chi masala shartlarida 100 ta mahsulot orasida 5 tadan 10 tagacha mahsulotning ishdan chiqish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,489$

19. Zavod do'konga 5000 ta spirtli maxsulot jo'natdi. Maxsulotning yo'lda shikastlanish ehtimoli 0,0002 ga teng bo'lsa, do'konga 3 ta yaroqsiz maxsulot kelishi ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,0613$

20. 19 masala shartlarida do'konga 3 tadan kam yaroqsiz mahsulot kelgan bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P_{5000}(0) + P_{5000}(1) + P_{5000}(2) \approx \frac{5}{2e} \approx 0,91$

21. Detal ishlab chiqarishda yaroqsiz detal uchrashining ehtimoli $p = 0,02$ ga teng. 400 ta tavakkaliga olingan detallar orasida, 7 dan 10 tagacha nostandart detal bo'lishining ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,414$

VI. Diskret tasodifiy miqdorlar va ularning sonli xarakteristikalar

Oldindan inobatga olib bo'lmaydigan tasodifiy sabablarga bog'liq bo'lgan, turli son qiymatlar qabul qilishi mumkin bo'lgan o'zgaruvchi miqdorga tasodifiy miqdor deyiladi. Diskret (uzlukli) tasodifiy miqdor deb, ayrim qiymatlarni ma'lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi. Tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deyiladi. Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda quyidagi formulalar bilan hisoblanadi.

- 1) $M(x) = \sum_i x_i p_i$
- 2) $D(x) = \sum_i (x_i - M(x))^2 p_i = M(x^2) - M^2(x)$
- 3) $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$

Masalalar yechish uchun namunalar.

1-Masala. Bitta o'q uzganda nishonga tegish ehtimoli $p = \frac{1}{3}$ bo'lsa, 5 ta o'q uzganda X diskret tasodifiy miqdor-nishonga tegish sonining taqsimot qonunini yozing.

Yechish: X-tasodifiy miqdor quyidagi mumkin bo'lgan qiymatlarga ega $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5$.

Ularining ehtimollarini Bernulli formulasiga ko'ra hisoblaymiz.

$$P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243};$$

$$P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{5 \cdot 16}{3^5} = \frac{80}{243};$$

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243};$$

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{543}{123} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243};$$

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q = 5 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \frac{2}{3} = \frac{10}{243};$$

$$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243};$$

Tekshirish: $P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 1$ bo'lishi kerak.

$$\frac{32}{243} + \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{40}{243} + \frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{243}{243} = 1$$

2-Masala. 8 ta detaldan iborat to'plamda 3 tasi nostandart. Ixtiyoriy ravishda 2 ta detal olindi. X-diskret tasodifiy miqdor olingan 2 ta detal orasidagi nostandart detallar sonining matematik kutilishini toping.

Yechish: X tasodifiy miqdor $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2$ qiymatlarini qabul qilishi mumkin. Ularning ehtimollarini esa P_1, P_2, P_3 deb belgilaymiz.

$$P_1 = P_2(0) = \frac{C_3^0 C_5^2}{C_8^2} = \frac{5 \cdot 4}{8 \cdot 7} = \frac{5}{14} = \frac{10}{28}$$

$$P_2 = P_2(1) = \frac{C_3^1 C_5^1}{C_8^2} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 7} = \frac{15}{28}$$

$$P_3 = P_2(2) = \frac{C_3^2 C_5^0}{C_8^2} = \frac{3}{87} = \frac{3}{28}$$

Endi matematik kutilishini hisoblaymiz.

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 2 p_3 = \frac{15}{28} + 2 \cdot \frac{3}{28} = \frac{15 + 6}{28} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$$

Diskret tasodifiy miqdorlarga oid masalalar.

1. 2 ta o'yin kubigi bir marta tashlanganda chiqadigan ochkolar ko'paytmasining matematik kutilishi topilsin.

Javob: $M(x \cdot y) = 12,25$

2. Avvalgi masala shartlarida yig'indining matematik kutilishi topilsin.

Javob: $M(x + y) = M(x) + M(y) = 7$

3. Qutida 5 ta shar bo'lib, ulardan 2 tasi oq va 3 tasi esa qora rangda. Tavakkaliga qutidan ikkita shar olindi. X-tasodifiy miqdor oq shar chiqish soni taqsimotining matematik kutilishi topilsin.

Javob: $M(x) = \frac{4}{5}$

4. Avvalgi masala shartlarida X tasodifiy miqdorining dispersiyasi hisoblansin.

Javob: $D(x) = \frac{9}{25}$

5. Diskret 2 ta erkli tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

XY-ko'paytmasining matematik kutilishini toping.

Javob: 1,53

6. X -tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

X	2	4	8
p	0,1	0,5	0,4

Uning o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Javob: $\sigma(X) = 2,2$

7. 10 ta detaldan iborat to'plamda 3 ta nostandart detal bor. Tavakkaliga 2 ta detal olingan. X -diskret tasodifiy miqdor, olingan 2 ta detal orasidagi nostandart detallar sonining matematik kutilishini toping.

Javob: $M(x) = \frac{3}{5} = 0,6$

8. Geolog safardan qayta turib, tog'dan 6 ta namuna olib keldi. Shulardan 4 tasida izlanayotgan metal qotishmasi bor. Tavakkaliga 3 ta namuna tanlandi. X -diskret tasodifiy miqdor olingan namunalar orasida izlanayotgan metal qotishmasi borligi soni taqsimotining o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Javob: $\sigma(X) = 0,4$

X	0	1	2	3
p	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

9. X -diskret tasodifiy miqdor faqat 2 ta mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatlarga ega, shu bilan birga $x_1 < x_2$, X tasodifiy miqdorning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,2 ga teng. $M(X) = 2,6$ ni o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma(X) = 0,8$ ni bilgan holda, X ning taqsimot qonuni topilsin.

Javob: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$ $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,8$

10. X diskret tasodifiy miqdor faqat 3 ta mumkin bo'lgan $x_3 = 3, x_1, x_2$ qiymatlarga ega shu bilan birga $x_1 < x_2 < x_3$ X ning x_3 va x_2 qiymatlarini qabul qilish ehtimoli mos ravishda 0,5 va 0,4 ga teng. X miqdorning matematik kutilishi $M(X) = 2,4$ va dispersiyasi $D(X) = 0,44$ ni bilgan holda uning taqsimot qonunini toping.

Javob:

X	1	2	3
p	0,1	0,4	0,5

11. Sinov paytida biror detalning buzilish ehtimoli 0,3 ga teng. Sinov paytida kuzatilgan 20 ta detaldan ishdan chiqqan detallar sonining matematik kutilishi topilsin.

Javob: $M(X)=6$

12. Har bir tajribada biror qurilmadagi elementning ishdan chiqish ehtimoli 0,1 ga teng. X diskret tasodifiy miqdor-elementning 5 ta erkli tajribada ishdan chiqish sonining dispersiyasi topilsin.

Javob: $D(X)=\frac{9}{20}$

13. Agar x va y tasodifiy miqdorlar erkli bo'lib, $D(X)=12$ va $D(Y)=7$ ga teng ekanligi ma'lum bo'lsa, $Z=5X-4Y$ tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Javob: $D(Z)=412$

14. 3 ta erkli sinovlar o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisasi 0,4 ehtimol bilan ro'y bersin. X tasodifiy miqdor-A hodisaning ro'y berish sonining matematik kutilishi topilsin.

Javob: $M(X)=1,2$

15. 14-masala shartlarida X tasodifiy miqdor dispersiyasi topilsin.

Javob: $D(X)=0,72$

16. Agar X va Y tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishi ma'lum bo'lsa, $M(X)=5$; $M(Y)=3$; $Z=4X-2Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

Javob: $M(Z)=14$

17. Agar 3 ta erkli sinovda A hodisaning ro'y berish ehtimoli bir xil va $M(X)=0,6$ bo'lsa, bu sinovlarda A hodisaning ro'y berishlari sonidan iborat X diskret tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Javob: $D(X)=0,48$

18. X diskret tasodifiy miqdor faqat ikkita mumkin bo'lgan x_1 va x_2 qiymatga ega bo'lib, $x_1 < x_2$ bo'lsin. Agar x ning x_2 qiymatni qabul qilish ehtimoli 0,8 ga, matematik kutilishi 2,6 ga, dispersiyasi esa 0,64 ga teng bo'lsa, x ning x_1 qiymatni qabul qilish ehtimoli topilsin.

Javob: $P(x=x_1)=0,2$

19. X tasodifiy miqdor faqat 3 ta mumkin bo'lgan qiymatlar $x_1 < x_2 < x_3$ qabul qiladi. X ning x_2 va x_3 qiymatlarni qabul qilish ehtimollari mos ravishda 0,2 va 0,5 ga teng. Matematik kutilishi esa 3,2 va dispersiyasi 0,76 ga teng bo'lsa, X ning taqsimot qonuni topilsin.

Javob:

X	2	3	4
p	0,3	0,2	0,5

20. X, Y lar bog'liq bo'lmagan diskret tasodifiy miqdorlar bo'lib, ularning taqsimot qonunlari berilgan bo'lsin.

X	1	2
p	0,2	0,8

Y	0,5	1
p	0,3	0,7

Ko'paytma $X \cdot Y$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi 2 usulda:

- 1) $X \cdot Y$ ning taqsimot qonunini tuzib;
- 2) matematik kutilishning xossasini qo'llab, topilsin.

Javob: 1,53

VII. Tasodifiy miqdorlar ehtimollarining taqsimot funksiyalari

1. Tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining integral funksiyasi:

Ta'rif: Har bir x qiymat uchun X tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoliga taqsimotning integral funksiyasi deyiladi.

$$P(X < x) = F(x)$$

Agar $F(x)$ - integral funksiya uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, x tasodifiy miqdor uzluksiz deyiladi.

Integral funksiyasi ba'zan taqsimot funksiyasi deb ham nomlanadi.

Integral funksiya xossalari.

1-xossasi: Integral funksiya qiymatlari $[0;1]$ oraliqda joylashgandir.

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

2-xossasi: Integral funksiya kamaymaydigan funksiyadir, ya'ni $x_1 < x_2$ bo'lganda $F(x_1) \leq F(x_2)$ bo'ladi.

3-xossasi: X tasodifiy miqdorning (a,b) oraliqda yotgan qiymatlarni qabul qilish ehtimoli: $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$ ga teng.

Xulosa: Agar X tasodifiy miqdorning barcha mumkin bo'lgan qiymatlari (a,b) oraliqga tegishli bo'lsa, u holda

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \leq a, \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x > b, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Uzluksiz tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimotining differensial funksiyasi.

Integral funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga ehtimollar taqsimotining differensial funksiyasi deyiladi. $f(x) = F'(x)$

Ba'zan differensial funksiyasini zichlik funksiyasi deb ham atashadi.

X uzluksiz tasodifiy miqdorning (a,b) oraliqqa tegishli qiymatlarni qabul qilish ehtimoli.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx \text{ ga teng.}$$

Integral funksiya differensial funksiya orqali quyidagi formula bilan ifodalanadi.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$$

Differensial funksiya xossalari.

1-xossasi: Differensial funksiya manfiy emas:

$$f(x) \geq 0$$

2-xossasi: Quyidagi xosmas integral birga teng:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Agar tasodifiy miqdor (a,b) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilsa, u holda:

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \text{ bo'ladi.}$$

Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi quyidagi formulalar orqali ifodalanadi.

$$1) \quad M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \text{ yoki } M(x) = \int_a^b xf(x)dx$$

$$2) \quad D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^2 f(x)dx, \text{ yoki } D(x) = \int_a^b x^2 f(x)dx - M^2(x)$$

$$3) \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)}$$

Masalalar yechish uchun namunalar.

1) Masala. Agar X-tasodifiy miqdor (0;2) oraliqda quyidagi differensial funksiya bilan berilgan bo'lsa,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, \text{ agar } x \in (0;1] \text{ bo'lsa,} \\ \frac{3}{4}, \text{ agar } x \in (1;2) \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

uning integral funksiyasi topilsin.

Yechish:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{4} + \int_1^x \frac{3}{4} dx = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

dan

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x \leq 0, \text{ bo'lsa,} \\ \frac{x}{4}, \text{ agar } 0 < x \leq 1, \text{ bo'lsa,} \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}, \text{ agar } 1 < x < 2, \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } x > 2, \text{ bo'lsa,} \end{cases} \quad \text{ga ega bo'lamiz.}$$

2) Masala. X-tasodifiy miqdorning integral funksiyasi berilgan bo'lsa,

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x < 0, \text{ bo'lsa,} \\ x, \text{ agar } 0 \leq x \leq 1, \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } x > 1, \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

uning differensial funksiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

$$\text{Yechish: } f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } x < 0, \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } 0 \leq x \leq 1, \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } x > 1, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

$$M(x) = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$D(x) = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Integral va differensial funksiyalarga oid masalalar.

1. X tasodifiy miqdor integral funksiyasi bilan berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{8}{x^3}, \text{ agar } x \geq 2, \text{ bo'lsa} \\ 0, \text{ agar } x < 2, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

X ning sonli xarakteristiklari, ya'ni matematik kutilishi, dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

$$\text{Javob: } M(x) = 3; \quad D(x) = 3; \quad \sigma(x) = \sqrt{3};$$

2. X tasodifiy miqdor (0:1) oraliqda differensial funksiyasi $f(x) = x$, bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ bo'lsa, uning sonli xarakteristiklari hisoblansin.

$$\text{Javob: } M(X) = \frac{1}{3}; \quad D(X) = \frac{5}{36}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{5}}{6};$$

3. X tasodifiy miqdorining (3:5) oraliqda $f(x) = \frac{1}{2}$ differensial funksiya bilan berilgan bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ ga teng. X ning integral funksiyasi topilsin.

$$\text{Javob: } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \\ \frac{x-3}{2}, & \text{agar } 3 < x \leq 5 \text{ bo'lsa} \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

4. X ning integral funksiyasi berilgan bo'lsa,

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \geq a, \text{ bo'lsa} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{a}, & \text{agar, } -a < x < a, \text{ bo'lsa} \\ 0, & \text{agar, } x \leq -a, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

X ning $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$ oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

$$\text{Javob: } P = \frac{1}{3}$$

5. X ning zichlik funksiyasi $f(x) = ae^{-x}$ $[0; \infty)$ oraliqda berilgan bo'lsa, a-koeffitsient topilsin.

$$\text{Javob: } a = 1$$

6. X ning differensial funksiyasi $f(x) = kxe^{-x}$ $x \in [0; \infty)$ oraliqda berilgan bo'lsa, k – koeffitsient topilsin.

$$\text{Javob: } k = 1$$

7. Tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor X ning integral funksiyasi berilgan.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar, } x < 0, \text{ bo'lsa,} \\ x, & \text{agar } 0 \leq x \leq 1 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar, } x > 1, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

X ning differensial funksiyasi topilsin.

$$\text{Javob: } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar, } x \in [0, 1], \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar, } x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty), \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

8. X ning taqsimot funksiyasi berilgan.

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Uning zichlik funksiyasi topilsin.

$$\text{Javob: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

9. Agar zichlik funksiyasi $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ $x \in (-\infty; \infty)$ bo'lsa,

1) a -koeffitsient topilsin.

2) integral funksiyasi topilsin.

Javob: 1) $a = \frac{1}{\pi}$; 2) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg x$

10. Avvalgi 9-masala shartlarida. X tasodifiy miqdorning $(-1;1)$ oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

Javob: $P(-1 \leq x < 1) = \frac{1}{2}$

11. $f(x) = ae^{-x^2}$ X tasodifiy miqdorning $(-\infty; \infty)$ oraligida zichlik funksiyasi bo'lishi uchun a -qanday bo'lishi kerak?

Javob: $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

12. X tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar, } x \leq -1, \text{ bo'lsa,} \\ \frac{1}{\pi} \cdot \arcsin x, \text{ agar,} & -1 \leq x \leq 1, \quad \text{bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar} & x \geq 1, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

berilgan. Uning matematik kutilishi va dispersiyasi qanday?

Javob: $M(X) = 0$; $D(X) = \frac{1}{2}$;

13. Agar X (10:20) oraliqda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor bo'lsa, uning matematik kutilishi dispersiyasi topilsin.

Javob: $M(X) = 15$; $D(X) = \frac{15}{3}$

14. (1:7) oraliqda tekis taqsimlangan X tasodifiy miqdorning o'rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

Javob: $\sigma(X) = \sqrt{3}$

15. $(a;b)$ oraliqda tekis taqsimlansin X tasodifiy miqdorning matematik kutilishini toping.

Javob: $M(X) = \frac{a+b}{2}$

16. 15-masala shartlarida X tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Javob: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

17. X tasodifiy miqdor $(0;2)$ oraliqda $f(x) = \frac{x}{2}$ differensial funksiyasi bilan berilgan, bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ ga teng. X ning dispersiyasi topilsin.

Javob: $D(x) = \frac{2}{9}$

18. X tasodifiy miqdorning $(1; \infty)$ oraliqda integral funksiyasi $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$ ga teng bu oraliqdan tashqarida esa $F(x) = 0$, ga teng bo'lsa, uning matematik kutilishini toping.

Javob: $M(X) = 1,5$

19. X tasodifiy miqdor $(2; 4)$ oraliqda $f(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{9}{2x}x + \frac{14}{2}$ differensial funksiya bilan berilgan. Bu oraliqdan tashqarida esa $f(x) = 0$ ga teng. X miqdorning matematik kutilishi topilsin.

Javob: $M(X) = 3$;

20. X tasodifiy miqdor differensial funksiyasi berilgan.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } & x \leq \frac{-\pi}{2}, \text{ bo'lsa,} \\ \cos x, \text{ agar } & -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \text{ bo'lsa,} \\ 0, \text{ agar } & x > 0, \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

Uning integral funksiyasi topilsin.

$$\text{Javob: } F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar } & x \leq \frac{-\pi}{2}, \text{ bo'lsa,} \\ 1 + \sin x, \text{ agar } & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \text{ bo'lsa,} \\ 1, \text{ agar } & x > 0, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

VIII. Normal taqsimot va ko'rsatkichli taqsimot

Normal taqsimot deb, differensial funksiyasi

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \lambda^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

ko'rinishda berilgan uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimotiga aytiladi.

Bu yerda $a = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(X)}$

X tasodifiy miqdorning $(\alpha; \beta)$ oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli esa

$$P(\alpha < x < \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) \text{ formula yordamida hisoblanadi.}$$

Bu yerda $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \lambda^{-t^2/2} dt$ – Laplas funksiyasi.

Tasodifiy miqdorning o'zining matematik kutilishidan chetlanishi absolyut qiymatining berilgan musbat sondan kichik bo'lish ehtimoli

$$P(|X - a| < \delta) \approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \text{ formula bilan hisoblanadi.}$$

Ko'rsatkichli (eksponensial) taqsimot deb, X uzluksiz tasodifiy miqdorning differensial funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } & x < 0, \text{ bo'lsa,} \\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{ agar, } & x \geq 0, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'lgan tasodifiy miqdor taqsimotiga aytiladi λ - o'zgarmas, musbat parametr.

Eslatma: $e^{-1} \approx 0,3678$; $e^{-2} \approx 0,1352$

ko'rsatkichli taqsimotning integral funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ agar, } & x < 0, \text{ bo'lsa,} \\ 1 - e^{-\lambda x}, \text{ agar } & x \geq 0, \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning (a;b) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli esa

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \text{ formula bilan hisoblanadi.}$$

Ko'rsatkichli taqsimotning sonli xarakteristikolari esa quyidagicha:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda};$$

Masalalar yechish uchun namunalar.

1-Masala. $F(x) = 1 - \lambda^{-0,1x} (x \geq 0)$ integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasi va o'rtacha kvadratik chetlanishini toping.

yechish. $\lambda = 0,1$ bo'lgani uchun:

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0,1^2} = \frac{1}{0,01} = 100; \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = 10;$$

2-Masala. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 10 va 4 ga teng. Sinash natijasida X ning (12:14) oraliqda yotadigan qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

yechish. $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$ formulasiga ko'ra

$$P(12 < X < 14) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0,4772 - 0,3413 = 0,1359$$

Normal va ko'rsatkichli taqsimotga oid masalalar

1. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 6 va 4 ga teng. X ning (4:8) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,6826$

2. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, uning o'rtacha kvadratik chetlanishi 0,4 ga teng. Bu miqdorning matematik kutilishidan chetlanishi absolyut qiymati bo'yicha 0,3 dan kichik bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,5468$

3. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi 0,16 ga teng bo'lib, u normal taqsimlangan. Chetlanishning absolyut qiymati 0,3 dan kichik bo'lish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,5468$

4. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, uning matematik kutilishi va o'rtacha kvadratik chetlanishi mos ravishda 20 va 10 ga teng. Chetlanishining absolyut qiymati bo'yicha 3 dan kichik bo'lishining ehtimolini toping.

Javob: $P \approx 0,2358$

5. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, uning matematik kutilishi va dispersiyasi mos ravishda 30 va 100 ga teng bo'lsa, X ning (10:50) intervalga tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,954$

6. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan. Uning matematik kutilishi 5 va dispersiyasi 4 ga teng. X ning (1:10) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,971$

7. Uzunligi 20 sm bo'lgan detalni ishlab chiqarishda qo'yilgan xato tasodifiy miqdor bo'lib, u normal qonunga bo'ysunadi, $\sigma = 0,2$ sm. Tayyorlangan detalning uzunligi o'z aslidan 0,3 sm kichik bo'lgan miqdorga farq qilishi ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,8664$

8. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi 3 va 4 ga teng. X ning (1:7) oraliqda yotadigan qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = 0,8185$

9. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan uning sonli xarakteristikalarini $M(X) = 3$ va $D(X) = 4$ bo'lsa, X ning 2 dan katta va 4 dan kichik qiymat qabul qilish ehtimoli topilsin.

Javob: $P \approx 0,383$

10. X tasodifiy miqdor normal taqsimlangan bo'lib, uning matematik kutilishi $a = 25$ ga teng. Agar X ning (10:15) oraliqqa tushish ehtimoli 0,2 ga teng bo'lsa, uning (35:40) oraliqqa tushish ehtimoli nechaga teng bo'ladi?

Javob: $P = 0,2$

11. X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi $M(x)=5$ ga teng bo'lib, normal taqsimlangan. Agar X ning (5:10) oraliqqa tushish ehtimoli $\frac{1}{5}$ ga teng bo'lsa, uning (0:5) oraliqqa tegishli qiymat qabul qilish ehtimoli nechaga teng?

12. Agar ko'rsatkichli taqsimotning parametri 0,4 bo'lsa, uning differensial va integral funksiyasini toping.

13. X uzluksiz tasodifiy miqdor $x \geq 0$ bo'lganda $f(x)=2e^{-2x}$ differensial funksiya bilan berilgan $x < 0$ bo'lganda esa $f(x)=0$. Sinov natijasida X ning (0,5:1) oraliqqa tushish ehtimoli topilsin.

Javob: $P = \frac{e-1}{e^2} \approx 0.2323$

14. X uzluksiz tasodifiy miqdor $x \geq 0$ bo'lganda $F(x)=1-e^{-3x}$ integral funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli qonun bo'yicha taqsimlangandir. $x < 0$ bo'lganda $F(x)=0$ ga teng. X ning sinov natijasida $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ oraliqqa tushish ehtimolini toping.

Javob: $P \approx 0,23$

15. Differensial funksiyasi $f(x)=0,4e^{-0,4x}$ ga teng bo'lgan, ko'rsatkichli taqsimotning sonli xarakteristikallari topilsin.

Javob: $M(X)=2,5$; $D(X)=6,25$;

16. $f(x)=20e^{-20x}$ ($x \geq 0$) differensial funksiya bilan berilgan ko'rsatkichli taqsimotning dispersiyasi topilsin.

Javob: $D(X)=0,0025$

17. Ko'rsatkichli taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasi 0,01 ga teng bo'lsa, X ning differensial va integral funksiyalarini yozing.

18. Elementning buzilmasdan ishlash vaqtining davomiyligi $F(t)=1-e^{-0,03t}$ ko'rsatkichli taqsimotga ega. Davomiyligi $t=100$ soat bo'lgan vaqt ichida elementning buzilmaslik ehtimolini toping.

Javob: $P \approx 0,05$ $P \approx \frac{1}{e^3} \approx 0,0497$

19. Ikkita erkli ishlaydigan element sinalmoqda, birinchi elementning buzilmasdan ishlash vaqtining davomiyligi $F_1(t)=1-e^{-0,4t}$ ko'rsatkichli taqsimotga, ikkinchi elementning buzilmasdan ishlash vaqtining davomiyligi $F_2(t)=1-e^{-0,2t}$ ko'rsatkichli taqsimotga ega. Davomiyligi 5 soat bo'lgan vaqt ichida ikkala elementning buzilishi ehtimolini toping.

Javob: $P = F_1(5) \cdot F_2(5) = 0,5467$

20. 19-masala shartlarida kamida bitta elementning buzilish ehtimolini toping.

Javob: $P = 1 - (1 - F_1)(1 - F_2) = \frac{e^3 - 1}{e^3} \approx 0,95$

21. X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimlangan bo'lib, uning matematik kutilishi 10 ga teng bo'lsa, X ning integral funksiyasini toping.

Javob: $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$

22. X tasodifiy miqdor ko'rsatkichli taqsimlangan bo'lib, uning o'rtacha kvadratik chetlanishi $\frac{1}{5}$ ga teng. X ning differentsial funksiyasi topilsin.

Javob: $f(x) = \frac{5}{e^{5x}}$

23. Normal taqsimlangan X tasodifiy miqdor $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-1)^2/2}$ differentsial funksiya bilan berilgan. X ning matematik kutilishi va dispersiyasini toping.

Javob: $D(X) = 1$

Empirik funksiya, gistogramma va poligon

X -statistik taqsimotning sonli belgisi bo'lsin.

n_x -belgining x dan kichik kuzatishlar soni bo'lsin

n -kuzatishlarning umumiy soni bo'lsin (tanlanma xajmi).

$X < x$ xodisaning nisbiy chastotasiga, ya'ni $\frac{n_x}{n}$ ga empirik funksiya

deyiladi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$

Misol. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping.

$$x_i: \quad 4 \quad 7 \quad 8$$

$$n_i \quad 5 \quad 2 \quad 3$$

Yechish. Tanlanmaning xajmini topamiz.

$$n = 5 + 2 + 3 = 10$$

Eng kichik variant 4 ga teng, demak $F^*(x) = 0$, $x \leq 4$ bo'lganda

$X < 7$ qiymat 5 marta kuzatiladi, demak, $4 < x \leq 7$ bo'lganda

$$F^*(x) = \frac{5}{10} = 0,5$$

$X < 8$ qiymatlar $5 + 2 = 7$ marta kuzatiladi, demak $7 < x \leq 8$ bo'lganda

$F^*(x) = \frac{7}{10} = 0,7$ $x = 8$ eng katta variantda bo'lgani uchun $x > 8$ bo'lganda

$$F^*(x) = 1$$

shunday qilib, izlanayotgan empirik funksiya

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4 \\ 0,5, & 4 < x \leq 7 \\ 0,7, & 7 < x \leq 8 \\ 1, & x > 8 \end{cases} \text{ bo'lganda}$$

I. Tanlanmaning quyidagi taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini toping:

1. x_i ; 2 6 10
 n_i ; 12 18 30
2. x_i ; 2 5 7 8
 n_i ; 1 3 2 4
3. x_i ; 5 4 9
 n_i ; 1 4 7
4. x_i ; 7 6 8
 n_i ; 1 4 6
5. x_i ; 1 5 7 10
 n_i ; 4 7 10 15
6. x_i ; 1 5 7 10
 n_i ; 5 1 2 6
7. x_i ; 7 8 11
 n_i ; 4 5 8
8. x_i ; 5 8 10
 n_i ; 9 11 14
9. x_i ; 5 7 9
 n_i ; 1 3 5
10. x_i ; 3 7 11
 n_i ; 1 3 5

Chastotalar poligoni deb, kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi, bu yerda x_i – tanlanmaning variantalari va n_i – ularga mos chastotalar.

Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

Quyidagi tanlanmaning taqsimotlari bo'yicha chastotalar poligoni va gistogrammasini yasang.

11. x_i ; 5 7 10 15

n_i ; 2 3 8 7

12. x_i ; 8 11 13

n_i ; 1 7 4

13. x_i ; 5 8 10

n_i ; 4 6 8

14. x_i ; 6 8 10

n_i ; 1 3 5

15. x_i ; 1 8 10

n_i ; 3 1 7

16. x_i ; 1 6 8

n_i ; 4 5 6

17. x_i ; 5 6 10

n_i ; 1 5 8

18. x_i ; 1 3 5 7

n_i ; 10 15 20 25

19. x_i ; 2 4 6 8

n_i ; 1 3 5 7

20. x_i ; 4 7 10 13

n_i ; 5 10 15 20

Adabiyotlar

1. Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика. Тошкент, Ўқитувчи 1977.

2. Гмурман В.Е. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма. Тошкент, Ўқитувчи 1980.

Mundarija

1.Kirish.....	3
2.Ehtimolning klassik ta'rifi.....	4
3.Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremlari.....	8
4.To'la ehtimol formulasi.....	12
5.Bernulli formulasi.....	17
6.Laplasning local va integral teoremlari.....	20
7.Diskret tasodifiy miqdorlar.....	24
8.Tasodifiy miqdorlar ehtimollarining taqsimot funksiyalari.....	28
9.Normal va ko'rsatkichli taqsimot.....	33
10.Empirik funksiya.....	37
11. Adabiyotlar.....	40

Muharrir:

T. I. Umurzoqova

Bosishga ruxsat etildi 28.11.06	Hajmi 2,3	Buyurtma №
Qog'oz bichimi 60 x 80 1/16.	Adadi	nusxa.

Toshkent temir yo'l muhandislari instituti bosmaxonasi.
Toshkent, Odilxo'jayev ko'chasi, 1.

©Toshkent temir yo'l muhandislari instituti, 2006

