

**УЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ХАЛҚ ТАЪЛИМИ ВАЗИРЛИГИ**

**ЖИЗЗАХ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА
ИНСТИТУТИ**

**«БОШЛАНГИЧ ТАЪЛИМ УСЛУБИЯТИ»
КАФЕДРАСИ**

«МАТЕМАТИКА» фанидан

МАЪРУЗАЛАР МАТНИ

3-КУРСЛАР УЧУН

ЖИЗЗАХ – 2006 й

**УЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ХАЛҚ ТАЪЛИМИ ВАЗИРЛИГИ**

**ЖИЗЗАХ ДАВЛАТ ПЕДАГОГИКА
ИНСТИТУТИ**

**«БОШЛАНГИЧ ТАЪЛИМ УСЛУБИЯТИ»
КАФЕДРАСИ**

«Математика» фанидан
МАЪРУЗА МАТНЛАРИ

**ЖДПИ услубий
кенгашида тасдиқланган
баен № _____**

«_____» _____ 2006 й.

ЖИЗЗАХ – 2006 й

Ушбу маъруза матнлари Педагогика факультетида таълим олаётган талабаларга мулжалланган. Маъруза матнларида назарий қисм, мустахкамлаш учун саволлар, таянч иборалар урин олган. У янги уқув режаси ва дастури асосида тузилган.

Ушбу маъруза матнлари Бошланғич таълим услубияти кафедраси илмий-услубий йиғилишида муҳокама қилинган.

БАЕН № 1
26.08.2006й

Ушбу маъруза матнлари Педагогика факультетининг услубий кенгаши томонидан чоп этишга тавсия қилинган.

БАЕН № 1
29.08.2006й

Тузувчи:

Кат.уқит. Хусанов Х.

Такризчи:

Доц. Кулмуродов Т.Ф.

МУНДАРИЖА

1.	1-маъруза	Текисликда аналитик геометрия элементлари	5
2.	2-маъруза	Текисликда тугри чизик. Тугри чизикнинг нормал тенгламаси	10
3.	3-маъруза	Фазода аналитик геометрия элементлари	14
4.	4-маъруза	Иккинчи тартибли чизиклар. Айлана, эллипс, гипербола ва парабола.	19
5.	5-маъруза	Айланма сиртлар. Сфера, эллипсоид, гиперболаоид ва параболаоид.	24
6.	6-маъруза	Чизикли тенгламалар системаси ва уларни ечиш усуллари. Амалий масалаларини ечишда куллаш.	27
7.	7-маъруза	Узгарувчили микдорлар. Функция тушунчаси. Функцияни берилиш усуллари. Жуфт ва тоқ функциялар.	29
8.	8-маъруза	Функцияни номаълум чексизга интилгандаги лимитлари. Чап ва унг лимитлар.	34
9.	9-маъруза	Сонли кетма-кетлик ва уларнинг лимитлари. Натурал логарифм.	38
10.	10-маъруза	Функциянинг нуктадаги узлуксизлиги ва узилиш нуктасининг турлари.	41
11.	11-маъруза	Функция хосиласи. Аргумент ва функциянинг орттирмаси. Хосиланинг таърифи.	45
12.	12-маъруза	Баъзи элементар функцияларнинг хосилалари. Асосий дифференциаллаш қоидалари.	50
13.	13-маъруза	Функция дифференциали. Функцияни дифференциалининг хоссалари.	55
14.	14-маъруза	Функцияни текшириш.	59
15.	15-маъруза	Интеграл. Бошланғич функция. Аникмас интеграл ва унинг хоссаси. Асосий формулалар жадвали.	64
16.	16-маъруза	Аник интеграл ва уни ҳисоблаш формулалари.	69
17.	17-маъруза	Аник интегралда узгарувчиларни ажратиш. Аник интеграл ердамида тақрибий ҳисоблаш.	74
18.	18-маъруза	Аник интегрални геометрик тадбиқи. Юзаларни ҳисоблаш.	77
19.		Фойдаланилган адабиётлар руйхати	82

ТЕКИСЛИКДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

РЕЖА

- а) Тугри бурчакли декарт координаталар системаси.
- б) Икки нукта орасидаги масофа.
- в) Кесмани берилган нисбатда булиш.
- г) Кутб координаталар системаси. Тугри бурчакли декарт координаталар системаси билан кутб координаталар системаси орасидаги богланиш.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Аналитик геометрия, вектор, кесма узунлиги, координаталар боши, абцисса, ординаталар уки, координата текислиги, октанталар, бурчак, поляр уки, поляр бурчаги, поляр радиуси.

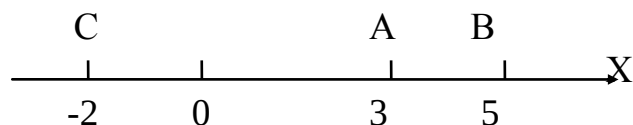
Математиканинг геометрик масалалар алгебраик усул билан ечиладиган булими аналитик геометрия деб аталади. Аналитик геометриянинг асоси координаталар сули булиб, уни XVII асрда француз математиги ва файласуфи **Рене Декарт** киритган ва бу усулни купгина геометрик масалаларга тадбик этган. Координаталар усули нуктанинг вазиятини координаталар системасини хосил киладиган бирор чизикларга нисбатан карашга асосланади.

Ихтиёрий тугри чизик олайлик, унда бошлангич 0 нукта танланган, санокнинг мусбат йуналиши “ $\rightarrow$ ” белги билан курсатилган, узунлик бирлиги танлаб, тугри чизикка 0 нуктадан бошлаб жойлаштирилади. Бу тугри чизикни — сон уки деб аталади.

М — тугри чизикнинг ихтиёрий нуктаси булсин. $\overrightarrow{OM}$ йуналган кесманинг узунлиги OM ни карайлик. $\overrightarrow{OM}$ нинг йуналиши укнинг йуналиши билан устма-уст тушса $OM = !OM!$, агар йуналиши устма-уст тушмаса у холда $OM = -!OM!$ булади.

$!OM!$ — OM кесманинг узунлигидир.

М нуктанинг сон укидаги координатаси куйидагича ифодаланади:



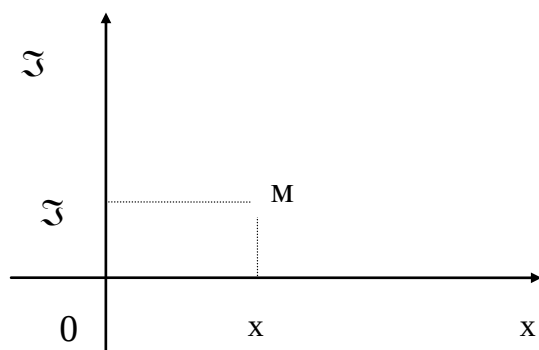
A(3); B(5); C(-2) ва хоказо. Умумий холда $A(X_1)$; $B(X_2)$; $C(X_3)$,... Икки нукта орасидаги масофани топиш учун куйидаги формуладан фойдаланамиз:

$$!AB! = !x_2 - x_1! = !x_1 - x_2! \quad (1)$$

Энди текисликда ётган нуктанинг вазиятини куриб чикайлик. Иккита узаро перпендикуляр иккита укни олайлик. Бу иккала тугри

чизикни кесишган нуктасини O — **координата боши** деб аталади, горизонтал жойлашган урни OX деб белгилаб, — **абциссалар уки**, вертикал урни эса OY — **ордината уки** деб атаймиз.

OX ва OY уқлар жойлашган текисликни эса **координаталар текислиги** деб атаймиз ва OXY билан белгилаймиз.



M текислиكنинг ихтиёрий нуктаси булсин, унинг вазияти иккита сон билан аникланади. M нуктадан OX ва OY уқларига MA ва MB перпендикуляр туширамиз. M нуктанинг координаталари $M(x; y)$ — шаклида белгиланади. Бу ерда x -абцисса, y -ордината.

OX ва OY уқлар координата текислигини туртта чоракка булади.

I	чоракда	$x > 0; y > 0$
II	чоракда	$x < 0; y > 0$
III	чоракда	$x < 0; y < 0$
IV	чоракда	$x > 0; y < 0$

$A(x_1; y_1)$ ва $B(x_2; y_2)$ нукталар орасидаги масофа куйидагича хисобланади:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2)$$

Энди фазодаги нуктанинг вазиятини аниклашга утамиз. Битта O нуктада кесишган ва бир-хил масштаб бирлигига эга булган учта узаро перпендикуляр OX , OY ва OZ уқлар фазода тугри бурчакли Декарт координаталар системасини аниқлайди ва YOX YOZ - шаклида белгиланади. Бу ерда O - координаталар боши

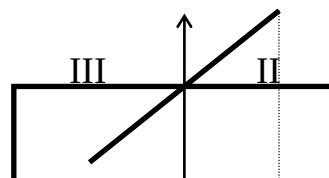
OX - абциссалар уки
 OY - ординаталар уки
 OZ - олпикаталар уки дейилади.

M нукта фазодаги ихтиёрий нукта булса, унинг координаталарини куйидагича ифодаланилади:

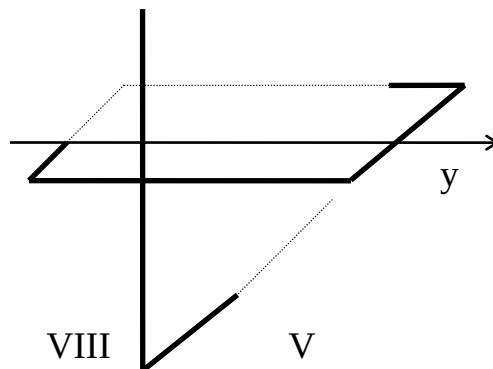
$$M(X; Y; Z)$$

HOY , YOZ ва XOZ текисликлар координата текисликлари деб аталади ва улар фазони саккизта **октанта**ларга ажратади.

I	октанта	$x > 0, y > 0, z > 0$
---	---------	-----------------------



II	октанта	$x < 0, y > 0, z > 0$
III	октанта	$x < 0, y < 0, z > 0$
IV	октанта	$x > 0, y < 0, z > 0$
V	октанта	$x > 0, y > 0, z < 0$
VI	октанта	$x < 0, y > 0, z < 0$
VII	октанта	$x < 0, y < 0, z < 0$
VIII	октанта	$x > 0, y < 0, z < 0$



Фазода жойлашган ихтиёрий икки нукта $A(x_1; y_1; z_1)$ ва $B(x_2; y_2; z_2)$ орасидаги масофа куйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (3)$$

Айтайлик $(M_1 M_2)$ кесмани $\lambda > 0$ нисбатда булакларга булишимиз керак булсин. Бу дегани кесмада шундай M нуктани топишимиз керакки, унинг учун

$$\frac{M_1 M}{M M_2} = \lambda \quad \text{муносабат уринли булиши керак.}$$

Бу тенгликдан $M_1 M = \lambda M M_2 \Rightarrow$

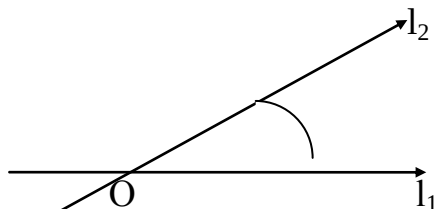
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (\lambda=1)$$

Кутб координаталар системаси.

1. Ү Икки ук орасидаги бурчак.

Р текисликда ётувчи ихтиёрий иккита O нуктада кесишувчи l_1 ва l_2 укни олиб карайлик.

l_1 ва l_2 уқлар орасидаги бурчак деб, Р текисликда l_1 укни l_2 ук билан устма-уст тушгунга қадар O нукта атрофида буришдан ҳосил булган бурчакка айтилади.



Бу ерда l_1 ни соат стрелкасига қарама-қарши йуналишда буриш мусбат йуналиш, соат стрелкаси бўйича бурилса, - манфий йуналиш деб қабул қилинган. У ҳолда

$$(l_1 \wedge l_2) = \angle l_2 \wedge l_1$$

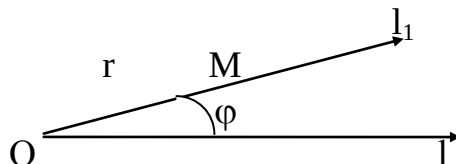
$(l_1 \wedge l_2) = \varphi$ деб белгилаймиз, бунда $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Декарт координаталардан сунг, қуп ишлатиладиган системалардан бири — поляр координаталар системасидир.

Текисликда l горизонтал укни олиб, уни **поляр ўқи** деб атайлик. Унинг бошки нуктаси O ни — **полюс** деб аталади.

Полюс билан устма-уст тушмайдиган ихтиёрий M нуктани олайлик. M нуктани O полюс билан туташтирайлик ва l_1 ук деб белгилайлик.

$(l_0 \wedge l_1) = \varphi$ деб белгилайлик ва уни $M(\cdot)$ нинг **поляр бурчаги** деб атаймиз: $OM = r$ - M нуктанинг **поляр радиуси** дейилади.

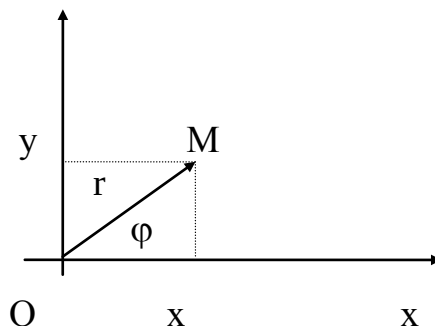


$M(\varphi; r)$ — нуктанинг поляр координаталари.

2. Поляр координаталар системаси ва декарт координаталар системаси орасидаги боғлиқлик.

Баъзи масалаларни ечишда поляр ва декарт координаталар системасида ишлашга тугри келади. Шунинг учун поляр ва декарт координаталар системалари орасидаги боғлиқликни топайлик.

Айтайлик поляр ук l билан абциссалар ўқи, полюс билан координаталар боши устма-уст тушсин. У ҳолда текисликда олинган ихтиёрий M нукта поляр координаталар системасида $M(\varphi; r)$ координатага ва Декарт координаталар системасида $M(x; y)$ координаталарга эга булсин.



Чизмадан куришиб турибдики, тригонометрик таърифга асосан

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{бундан} \quad x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

(4) декарт координаталарни поляр координаталари оркали ифодасидир.

(4) формулани ҳар иккала томонини квадратга кутарайлик:

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= r^2 \cos^2 \varphi \\ y^2 &= r^2 \sin^2 \varphi \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$$

демак, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Энди $y = r \sin \varphi$ ва $x = r \cos \varphi$ ларни нисбатини топайлик

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi; \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\text{Демак, } r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left. \begin{array}{l} y \\ x \end{array} \right\} \quad (5)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

бу ерда $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (5) поляр координаталари оркали ифодасидир.

Мисол: $M(\sqrt{3}; 1)$ нуктасининг поляр координаталарини топинг.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Демак, } \varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{ёки} \quad \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Агар $x = \sqrt{3}$; ва $y = 1$ эканлигини ҳисобга олсак, x ва y биринчи чоракда мусбат, демак,

$$\varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{бу ҳолда}$$

$$M\left(\frac{\pi}{6}; 2\right) \Leftrightarrow M(\sqrt{3}; 1)$$

Уз узини текшириш учун саволлар

1. Аналитик геометрия бўлими нимани ургатади.
2. Икки нута орасидаги масофани топинг.
3. Декарт координаталар системаси хақида маълумот беринг.
4. Поляр координаталар системаси хақида маълумот беринг.

2 — МАЪРУЗА
ТЕКИСЛИКДА ТУГРИ ЧИЗИК.
ТУГРИ ЧИЗИКНИНГ НОРМАЛ ТЕНГЛАМАСИ

РЕЖА

1. Тугри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси.
2. Берилган нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси.
3. Икки тугри чизик орасидаги бурчак.
4. Нуктадан тугри чизиккача булган масофа.
5. Тугри чизикнинг нормал тенгламаси.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Нормал вектор, тугри чизикнинг умумий тенгламаси, йуналтирувчи вектор, каноник тенглама, бурчак коэффициенти, тугри чизиклар орасидаги бурчак, параллел ва перпендикулярлик шартлари, нуктадан тугри чизик орасидаги масофа.

Текисликда тугри чизик

1. Тугри чизикнинг нормал тенгламаси. Берилган нуктадан утувчи, берилган векторга перпендикуляр тугри чизик тенгламаси.

Оху текисликда 1 тугри чизикни олайлик. Айтайлик, $M_1(x_1, y_1)$ 1 булсин ва $N = A_i + B_j$ вектор берилган булиб, бу ерда $N \perp l$ шарт бажарилсин. N - ни **нормал вектор** деб аталади. M_1 нукта ва N вектор тугри чизикни жойлашишини аниқлайди.

$M(x, y)$ 1 ихтиёрий нукта булсин. У холда $M_1 M = (x - x_1) i + (y - y_1) j \perp N$

Икки векторнинг перпендикулярлик шартига асосан $M_1 M * N = 0$;

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0 \quad (1)$$

(1) — берилган нуктадан утувчи, берилган векторга перпендикуляр тугри чизик тенгламасидир.

Мисол: $M(-1; 3)$ нуктадан утиб $N = 2i - 5j$ векторга перпендикуляр тугри чизик тенгламасини тузинг.

$$\begin{aligned} A &= 2; \quad B = -5 \\ 2(x+1) + (-5)(y-3) &= 0 \\ 2x - 5y + 2 + 15 &= 0 \\ 2x - 5y + 17 &= 0 \end{aligned}$$

2. Тугри чизикнинг умумий тенгламаси

$$Ax + By + C = 0 \quad (2)$$

тенглама тугри чизикнинг умумий тенгламасидир. Хакикатдан ҳам

$A(x - 0) + B(y + C/B) = 0$ бу эса $(0; -C/B)$ нуктадан утиб $N(A; B)$ га перпендикуляр булган тугри чизик тенгламасидир.

3. Йўналтирувчи вектор. Тугри чизикнинг каноник тенгламаси

Оху текисликда l тугри чизикни карайлик. Тугри чизикни унда ётувчи ихтиёрий $M_1(x_1, y_1)$ нукта ва унга параллел булган $S = m\vec{i} + n\vec{j}$ вектор вектор тулик аниқлайди. S векторни l тугри чизикни йўналтирувчи ввектори деб аталади.

Айтайлик $M(x, y)$ нукта l тугри чизикнинг ихтиёрий нуктаси булсин. У холда M_1M l тугри чизикка тегишли булиб, шарт буйича у S векторга параллел булади. Векторларнинг параллелик шартига асосан:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} \quad (3)$$

(3) тугри чизикнинг каноник тенгламаси деб аталади.

Агар тугри чизик Оу укка параллел булса, у холда унинг тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{0} = \frac{y-y_1}{n} \quad (3')$$

агар Ох укка параллел булса, у холда

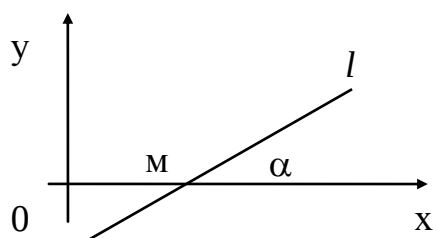
$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_0}{0} \quad (3'')$$

булади.

4. Берилган нуктадан ўтувчи тайин йўналишдаги тугри чизик тенгламаси.

Тугри чизик тенгламалар тўплами.

Оху текисликда l тугри чизик берилган булсин. l ох ук билан M



нуктада кесишсин. l тугри чизик билан ох ук орасидаги бурчакни α билан белгилайлик.

Агар, $\alpha = 0$ булса, у холда l ох ук билан устма-уст тушади. Ох ва оу укига параллел булган l тугри чизикни карайлик. l тугри чизикда ётувчи

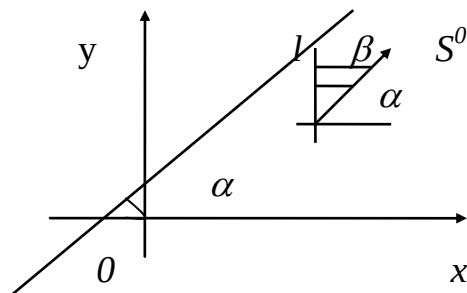
ихтиёрий $M_1(x_1, x_2)$ нуктани оламиз. Тугри йуналтирувчи вектор сифатида бирлик вектор $S^0 = \cos\alpha i + \sin\alpha j$ ни олайлик.

$$\cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha \Rightarrow S^0 = \cos\alpha i + \sin\alpha j$$

демак, $m = \cos\alpha$; $n = \sin\alpha$

у холда

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\sin\alpha} \quad (4)$$



у номаълумга нисбатан ечамиз:

$$y - y_1 = \tan\alpha (x - x_1)$$

$\tan\alpha = k$; $y - y_1 = k(x - x_1)$ (5) берилган нуктадан утувчи берилган йуналишдаги тугри чизик тенгламасидир.

Агар тугри чизик Оу укига параллел булса, у холда тугри чизик тенгламасини (5) формула шаклида ёзиб булмайди.

$x = x_1$ — $(x_1; 0)$ нуктадан утувчи тугри чизик тенгламасидир.

6. Бурчак коэффицентли тугри чизик тенгламаси.

Айтайлик тугри чизик Оу укини $B(O; v)$ нуктада кесиб утиб, Ох уки билан α бурчак хосил килсин

$$y - v = k(x - 0)$$

$$\text{ёки} \quad y = kx + v \quad (6)$$

7. Икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси.

Айтайлик $M_1(x_1; y_1)$ ва $M_2(x_2; y_2)$ текисликда ётувчи ихтиёрий икки нукта булсин булсин. Айтайлик $S = M_1 M_2$ вектор йуналтирувчи вектор булсин, у холда тугри чизикнинг тенгламаси куйидагича булади:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (7)$$

(7) — икки нуктадан утувчи тугри чизикнинг тенгламасидир.

8. Икки тугри чизик орасидаги бурчак.

Айтайлик, l_1 ва l_2 тугри чизиклар M нуктасида кесишсин. Тугри чизиклар куйидаги тенглама билан берилган булсин.

$$l_1; y = k_1 x + v; \quad l_2; y = k_2 x + v_2$$

Тугри чизиклар орасидаги бурчак

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}$$

$\operatorname{tg} \alpha_1 = k_1$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = k_2$; деб олсак, у холда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \quad (8)$$

(8) — икки тугри чизик орасидаги бурчакни топиш формуласидир.

Тугри чизикларнинг параллеллик шarti:

$$k_1 = k_2$$

Перпендикулярлик шarti: $k_1 k_2 = -1$ ёки $k_1 = 1/k_2$ ёки $k_2 = -1/k_1$;

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (9)$$

(9) — $M(x_0; y_0)$ нуктадан $Ax + By + C = 0$ тугри чизиккача булган масофани хисоблаш формуласидир.

Узини текшириш учун саволлар

1. Нормал вектор деб кандай векторларга айтилади ?
2. Берилган нуктадан утувчи, берилган векторга перпендикуляр тугри чизик тенгламаси.
3. Тугри чизикнинг умумий тенгламаси.
4. Кандай векторга йуналтирувчи вектор деб аталади ?
5. Икки тугри чизик орасидаги бурчак ?
6. Тугри чизиклар қачон параллел булади ? Қачон перпендикуляр булади ?
7. Икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламаси.

3 — МАЪРУЗА.

ФАЗОДА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ.

РЕЖА

1. Тугри чизикни параметрик тенгламаси.
2. Тугри чизикни умумий тенгламаси.
3. Икки тугри чизик орасидаги бурчак.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР.

Йуналтирувчи вектор, тугри чизик, вектор тенглама, каноник тенгламаси.

Фазода чизик сифатида иккита соханинг кесишишидан ҳосил булган чексиз нукталар тупламидан иборатдир.

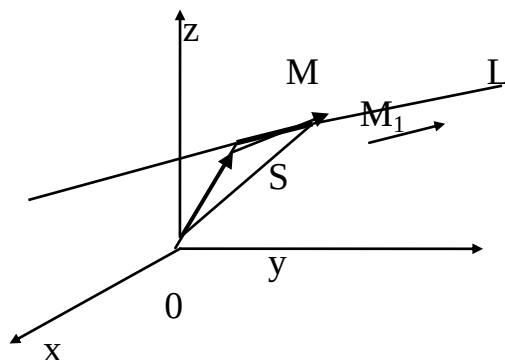
$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ \Phi(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Фазода тугри чизикнинг умумий тенгламаси:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Фазода тугри чизик тайин бир нуктаси $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва унга параллел $S = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ вектор оркали тулик аникланган. S ни **йуналтирувчи** вектор деб аталади.

Айтайлик фазода L тугри чизик унда ётувчи нукта $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва унга параллел булган $S = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k}$ йуналтирувчи векторга берилган булсин. L тугри чизикдан ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуктани оламиз. OM , OM_1 , M_1M векторларни ясаймиз.



Чизмадан куринадики

$$OM = OM_1 + M_1M$$

M_1M S L демак M_1M ва S лар узаро коллениар. Шунинг учун

$$M_1M = tS$$

Белгилаш киритамиз: $r_1 = \vec{OM}_1$; $r = \vec{OM}$

$$У холда \quad r = r_1 + tS \quad (9)$$

(9) тугри чизикнинг **вектор** тенгламасидир.

$$r = \vec{OM} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$r_1 = \vec{OM}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}; \quad tS = t(m\mathbf{i} + n\mathbf{j} + p\mathbf{k})$$

У холда икки векторнинг тенглигига асосан:

$$\begin{cases} x = x_1 + tm \\ y = y_1 + tn \\ z = z_1 + tp \end{cases} \quad (10) \text{ тугри чизикнинг параллеллик тенгламаси}$$

M_1M вектор S вектор коллениар эканлигидан уларнинг мос координаталари пропорционалдир:

$$M_1M = (x-x_1)i + (y-y_1)j + (z-z_1)k, \quad S = mi + nj + pk$$

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \quad (11)$$

(11) тугри чизикнинг **каноник** тенгламасидир.

Агар $S = \cos\alpha i + \cos\beta j + \cos\gamma k$ бирлик вектор булса,

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma} \quad (12)$$

Йуналтирувчи коэффициентлар ролини йуналтирувчи косинуслар булади.

Агар L тугри чизик $\vec{bz}$ укига перпендикуляр булса, бу тугри чизик тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} \quad (13)$$

Илова 1: Тугри чизикнинг каноник тенгламасини тугри чизикнинг параметрик тенгламасидан t -параметрни йукотиш йули билан хосил қилинади.

Илова 2: Айтайлик тугри чизик бирор координата укига перпендикуляр булса, масалан Ox укига, у холда $m=0$ булиб, тугри чизик параметрик тенгламаси:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 + nt \\ z = z_1 + pt \end{cases}$$

t ни йукотиш натижасида

$$\begin{cases} x - x_1 = 0 \\ \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p} \end{cases}$$

У холда тугри чизикнинг каноник тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{y} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$$

бу ерда, агар касрнинг махражи нолга тенг булса у холда касрнинг сурати ҳам нолга тенг булишини эсдан чикармаслик керак.

$$\frac{x-x_1}{y} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p} \quad (14) \quad \text{ёки} \quad x=x_1; y=y_1$$

Бу тугри чизик уз укига параллелдир. Хусусий холда

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1} \quad \text{уз укининг тенгламасидир.}$$

Энди тугри чизикнинг умумий тенгламаси берилган булса, бу тугри чизикнинг каноник тенгламасини тузайлик:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$L: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Каноник тенгламани тузиш учун L тугри чизикда ётувчи $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нукта ва $S = mi + nj + pk$ йуналтирувчи вектор берилган булиши керак.

M_1 нуктанинг координаталарини топиш учун x, y, z номаълумлардан бирига ихтиёрий сон киймат бериб, колган номаълумлар топилади. Йуналтирувчи векторни эса $S = N_1 + N_2$ шаклида топамиз.

Мисол 1. $2x + 3y - z + 8 = 0$
 $x - 3y + 2z + 1 = 0$

тугри чизикнинг каноник тенгламасини тузинг.

$$z=0 \text{ булса, } 2x + 3y = -8$$

$$\frac{x-3y=-1}{3x=-9}$$

$$x=-3$$

$$3y = -3 + 1; \quad y = -2/3; \quad M_1(-3; -2/3; 0)$$

$$S = N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (6-3)i - (4+1)j + (-6-3)k = 3i - 5j - 9k$$

Биз излаган тугри чизик тенгламаси:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2/3}{-5} = \frac{z}{-9}; \quad \frac{x+3}{3} = \frac{3y+2}{-15} = \frac{z}{-9}$$

Икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламасини тузайлик. Айтайлик $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ L тугри чизикнинг ихтиёрий нукталари булсин.

(M_1M_2) тугри чизикнинг каноник тенгламасини тузиш учун S йуналтирувчи векторни топайлик. $M_1M_2=S$ вектор сифатида қабул қилиш мумкин. У ҳолда тугри чизик тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (15)$$

(15) икки нуктадан утувчи тугри чизик тенгламасидир.

Мисол 2. $M_1(1; 3; -5)$ ва $M_2(2; 4; 2)$ нукталардан утувчи тугри чизик тенгламасини тузинг.

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-3}{4-1} = \frac{z+5}{2+5}$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{7}$$

Айтайлик бизга

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{ва}$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad \text{ва}$$

тугри чизикларни каноник тенгламаси билан берилган бўлсин. Бу тугри чизиклар орасидаги бурчакни топиш учун, бу тугри чизикларнинг йуналтирувчи S_1 ва S_2 векторлар орасидаги бурчакни топиш кифоядир:

$$\cos \varphi = \frac{S_1 S_2}{|S_1| |S_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \quad (16)$$

Мисол 3.

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-5}{-2}$$

$$\text{ва} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5}$$

тугри чизиклар орасидаги бурчакни топинг .

$$\cos \varphi = \frac{5 * 3 + 3 * 2 + (-2) * 5}{\sqrt{25 + 9 + 4} \sqrt{9 + 4 + 25}} = \frac{11}{38}$$

$$\varphi = \arccos 11/38$$

Мисол 4. $M_1 (1; 2; 3)$ нуктадан утувчи ва

$$\begin{cases} 2x+3y+5z-7=0 \\ 3x-4y+z-8=0 \end{cases}$$

тугри чизикка параллел тугри чизик тенгламасини тузинг.

$$S=N_1 \times N_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (3+20)i - (2-15)j + (-8-9)k = 23i + 13j - 17k$$

Демак тугри чизик тенгламаси:

$$\frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-17};$$

Мисол 5. $M_1 (-4; 0; 2)$ нуктадан утиб

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4} \quad \text{ва}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}$$

тугри чизикка перпендикуляр булган тугри чизик тенгламасини тузинг.

$$S=S_1 \times S_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (6-8)i - (4-12)j + (4-9)k = -2i + 8j - 5k$$

Энди тугри чизик тенгламаси

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{-5};$$

Узини текшириш учун саволлар

1. Фазода тугри чизик тенгламаси.
2. Тугри чизикнинг йуналтирувчи вектори деганда кандай векторни тушунасиз?
3. Тугри чизикнинг каноник тенгламасини келтириб чиқаринг.

4-МАЪРУЗА

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИКЛАР

РЕЖА

1. Айлана, эллипс, гипербола, параболаларнинг каноник тенгламаси

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Айлананинг каноник тенгламаси, марказ, радиус, фокус, узгармас микдор, ярим катта ук, ярим кичик ук, эксцентритет, фокал радиус, директрисса, симметрия уки, учи.

1. Айлана, эллипс, гипербола, параболаларнинг каноник тенгламаси.

Оху тугри бурчакли координаталар системасида радиуси R ва маркази $C(a;b)$ нуктада булган айлана тенгламасини келтириб чикарайлик.

Айланада тегишли ихтиёрий $M(x; y)$ нуктани оламиз ва ундан берилган $c(a; b)$ нуктагача булган масофа радиусни беради

$$|MC| = R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

(1)

(1) - айлананинг каноник тенгламаси дейилади.

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + B = 0$$

(2)

(2) - айлананинг умумий тенгламасидир.

(2) тенгламани каноник шаклига келтирамиз.

$$(x+D)^2 + (y+E)^2 = D^2 + E^2 - F$$

(3)

1) агар $D^2 + E^2 - F > 0$ булса, (3) айлана тенгламаси.

2) $D^2 + E^2 - F < 0$ - бу ҳеч қандай чизикни ифодаламайди.

3) $D^2 + E^2 - F = 0$ - (3) тенглама $(-D; -E)$ нуктани ифодалайди.

Мисол 1: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ айлананинг маркази ва радиусини топинг.

Ечиш: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 - 16 = 0.$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$$

Демак, $O(1; -2)$ - айлана маркази

$R = 4$ - радиуси.

2. Эллипс.

Эллипс шундай нукталарнинг геометрик урники, бу нукталарнинг ҳар биридан иккита узгармас нуктагача - эллипснинг фокуслариғача - булган масофаларининг йигиндиси $2a$ га тенг узгармас микдордир

$B_1(-C; 0)$ $B_2(C; 0)$ - фокуслар $M(x, y)$ эллипснинг ихтиёрий нуктаси. Таърифга

асосан $MB_1 + MB_2 = 2a.$

$$\sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} + \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(-c-x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}$$

$$(-c-x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(c-x)^2 + y^2} + (c-x)^2 + y^2$$

$$c^2 + 2cx + x^2 = 4a^2 - 4a \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = c^2 - 2cx + x^2$$

$$4a \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx \quad | : 4$$

$$a^2 (c-x)^2 + a^2 y^2 = a^4 - 2a^2 cx + c^2 x^2$$

$$a^2 c^2 - 2a^2 cx + a^2 x^2 + a^2 y^2 = a^4 - 2a^2 cx + c^2 x^2$$

$$(a^2 - c^2) x^2 + a^2 y^2 = a^2 (a^2 - c^2) \quad | : a^2 (a^2 - c^2)$$

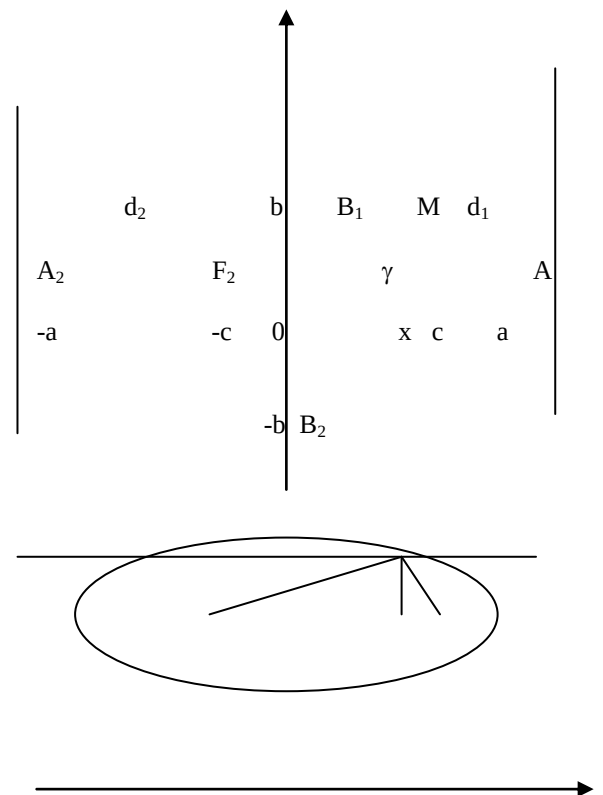
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

$a^2 - c^2 > 0$ шунинг учун $a^2 - c^2 = b^2$ билан белгилаймиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(4)

(4) эллипснинг каноник тенгламасидир



0 - эллипснинг маркази.

A_1, B_1, A_2, B_2 - эллипснинг учлари.

2a - катта ук, a - ярим катта ук.

2b - кичик ук, b - ярим кичик ук.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

(5) эллипснинг эксцентриситети.

$$\varepsilon < 1$$

$r_1 = a - \varepsilon x$ ва $r_2 = a + \varepsilon x$ - фокал радиуслар таърифга асосан

$$r_1 + r_2 = 2a$$

Эллипснинг кичик укига параллел ва ундан $\frac{a}{\varepsilon}$ масофадан утувчи икки тугри чизик - директрисса дейилади ва куйидаги тенглама билан берилган:

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{ва} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon};$$

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon; \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

d_1, d_2 - нуктадан директриссегача булган масофа.

Мисол 1: Агар $B_1 B_2 = 26$ ва $\varepsilon = \frac{26}{32}$ берилган булса, эллипснинг каноник тенгламасини ёзинг.

$$B_1 B_2 = 2c. \quad \text{Десак, } 2c = 26. \quad c = 13.$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{a}; \Rightarrow \frac{26}{32} = \frac{13}{a}; \quad a = 16$$

$$\text{Демак, } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16^2 - 13^2} = \sqrt{(16-13)(16+13)} = \sqrt{3 \cdot 29} = \sqrt{87}$$

$$\text{Демак, } \frac{x^2}{16^2} + \frac{y^2}{87} = 1$$

Мисол 2: $M_1 (2; -3)$ нуктадан утувчи ва катта ярим уки $a = 4$ булган эллипснинг каноник тенгламасини тузинг.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$M, \in \quad \frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1; \quad \frac{4}{4^2} + \frac{9}{b^2} = 1; \quad \frac{9}{b^2} = 1 - \frac{1}{4}; \quad \frac{9}{b^2} = \frac{3}{4}; \quad b^2 = \frac{9 \cdot 4}{3} = 12.$$

$$\text{Демак, } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

Гипербола шундай нукталарнинг геометрик урники, бу нукталарнинг хар биридан иккита узгармас нуктагача - гиперболанинг фокусларигача - булган масофалар айирмаси узгармас микдор булиб, $2a$ га тенгдир.

$$\text{Фокуслар орасидаги масофа } |B_1 B_2| = 2c.$$

$$\text{Шарт буйича } MB_1 - MB_2 = \pm 2a.$$

Бу ерда $M(x; y)$ - гиперболанинг ихтиёрий нуктаси. Худди эллипс тенгламасини келтириб чиққанимиздагидек,

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad | : a^2(a^2 - c^2)$$

бу ерда $a^2 - c^2 < 0$ чунки $2a < 2c$.

Шунинг учун $\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$ деб белгилаймиз.

$$\text{У холда} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(6)

(6) гиперболанинг каноник тенгламасидир.

Фокуслар орасида масофанинг хакикий укка нисбатан гиперболанинг эксцентриситети

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (7) \text{ га айтилади.}$$

бу ерда $\varepsilon < 1$

$$r_1 = \varepsilon x - a$$

$$r_2 = \varepsilon x + a \quad (8) \text{ радиус векторлар}$$

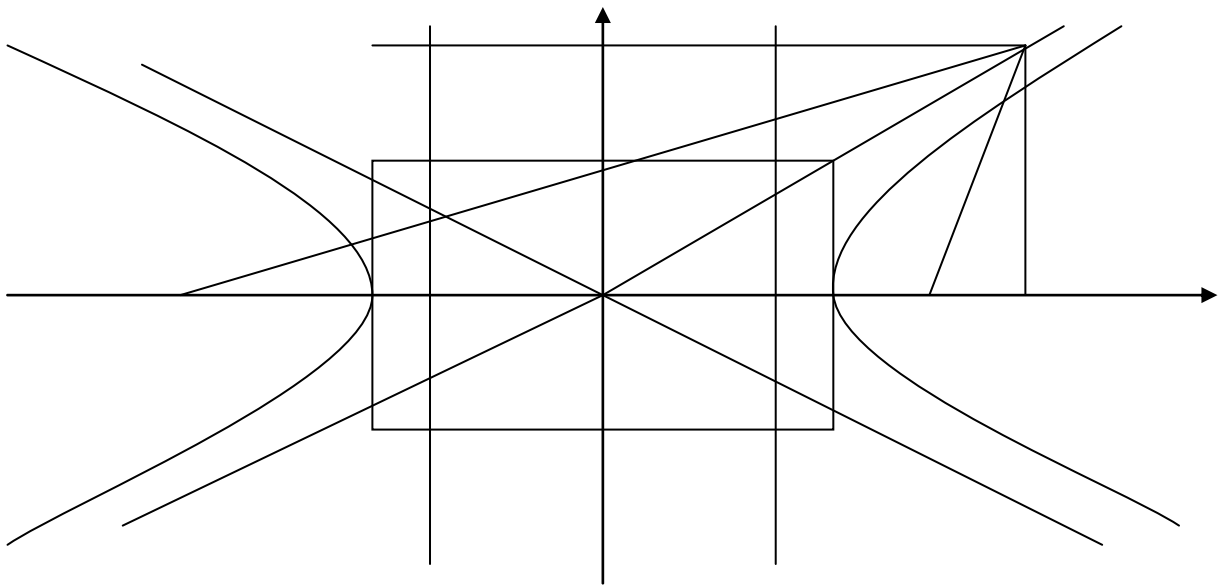
$$r_2 - r_1 = 2a \quad (9)$$

Гиперболанинг фокал укига перпендикуляр ва марказидан $\frac{a}{\varepsilon}$ масофада утган тугри чизиклар гиперболанинг директриссаси дейилади.

$$x = \frac{a}{\varepsilon} \quad \text{ва} \quad x = -\frac{a}{\varepsilon}; \quad (10)$$

$$\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon; \quad \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$$

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{b}{a}x \\ y &= -\frac{b}{a}x \end{aligned} \right\} \quad (11) \quad \text{асимптоталари.}$$



Мисол 3: Агар $F_1F_2 = 26$ ва $\varepsilon = \frac{13}{12}$ булган гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг.

$$2c = 26; \quad c = 13.$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}; \quad \frac{13}{12} = \frac{13}{a}; \quad a = 12$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 12^2 = 25;$$

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Мисол 4. $M_1 \left(-3; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ва $M_2 (4; -2)$ нуктадан утувчи гипербола

тенгламасини тузинг. $\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1; \quad \frac{4^2}{a^2} - \frac{(-2)^2}{b^2} = 1 \quad \text{ёки}$

$$\frac{9}{a^2} - \frac{\frac{1}{2}}{b^2} = 1; \quad \frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$$

Системани олиб, $a^2 = 8; b^2 = 4$ топамиз:

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Парабола деб, шундай нукталарнинг геометрик урнига айтиладики, уларнинг ҳар биридан узгармас бир нуктагача - параболанинг фокусигача - бу узгармас тугри чизиккача - параболанинг директриссасигача - булган масофалар тенгдир.

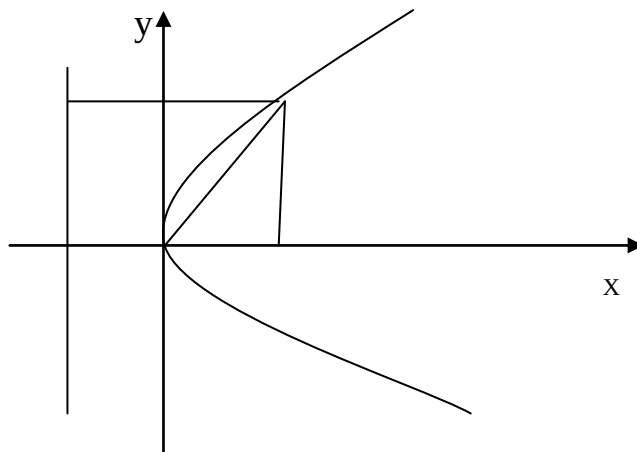
$$MF = MN$$

$$MN = NQ + QM = \frac{p}{2} + x$$

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2}$$

$$y^2 = 2px$$

$0x$ - фокал ук



Параболанинг симметрик уки билан кесишиш нуктаси - параболанинг учи дейилади.

Узининг текшириш учун саволлар.

1. Айлананинг ноэллипс, гипербола ва параболанинг каноник тенгламасини беринг.
2. Эксцентриситет деб аталади?
3. Фокал радиус деб нимага айтамыз?

5 - МАЪРУЗА АЙЛАНМА СИРТЛАР

РЕЖА

1. Сфера, эллипсоид, гиперболоид ва параболоид.
2. Цилиндр ва конус сиртлар. Айланма жисм сирти.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Иккинчи тартибли сирт, сферанинг каноник тенгламаси, цилиндр сирт, йуналтирувчи, доиравий цилиндр, бир паллали гиперболоид, эллипсоид, икки паллали гиперболоид.

х, у ва z га нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенглама билан аниқланган сирт иккинчи тартибли сирт деб аталади ва унинг умумий тенгламаси

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxz + 2Eyz + 2Fxy + ax + by + cz + d = 0 \quad (1)$$

бунда A, B, C, D, E, F - ҳеч бўлмаганда биттаси нолдан фаркли.

A, B, C, D, E, F, a, b, c, d - узгармас коэффициентлар.

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2 \quad (2)$$

сферанинг каноник тенгламаси

$a_1(x, y, z)$ - сферанинг маркази,

R - радиуси.

Бирор берилган чизикни кесувчи тугри чизикнинг бу чизик бўйлаб ва берилган йуналишга параллел ҳаракатидан ҳосил бўлган сирт цилиндр сирт деб аталади. Ҳаракатланувчи тугри чизик ясовчи, берилган чизик эса йуналтирувчи деб аталади.

Цилиндр сиртнинг $M(x; y; z)$ нуктасининг координаталари йуналтирувчи чизик тенгламаси $B(x; y)=0$ ни каноатлантиради.

Мисол 1: $y^2 + z^2 = R^2$ - билан аниқланадиган сирт цилиндр сирт бўлиб, у доиравий цилиндр деб аталади. Унинг ясовчилари эса 0x уққа параллел, 0yz текисликдаги йуналтирувчиси эса радиуси R ва маркази координаталар бошида бўлган $y^2 + z^2 = R^2$ айлана тенгламасидир.

Мисол 2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

тенглама билан аниқланган цилиндр сирт эллиптик цилиндр деб аталади. Унинг ясовчилари 0z уқига параллел, 0xy текисликдаги йуналтирувчиси эса ярим уқлари a ва b бўлган эллипсдир.

Мисол 3: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

тенглама билан аниқланган цилиндрик сирт гиперболик цилиндр деб аталади.

Унинг ясовчилари Ox уққа параллел,
 Oxy текисликдаги йуналтирувчиси эса
 хақиқий уқи a ва мавҳум уқи b булган
 гиперболадир.

Мисол 4: $x^2 = 2Pz$

тенглама билан аниқланадиган цилиндрик
 сирт параболик цилиндр деб аталади. Унинг
 ясовчилари Oy уққа параллел, Oxz текисликдаги
 йуналтирувчиси эса параболодир.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

булган сирт бир паллали гиперболоид деб аталади,
 бу ерда a, b, c - мусбат сонлар.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

бу сиртни эллипсоид деб аталади.

эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

булган иккинчи тартибли сирт икки паллали
 гиперболоид деб аталади.
 бу ерда a, b, c - мусбат сонлар.

$$\frac{x^2}{P} + \frac{y^2}{Q} = 2z$$

бу эллиптик параболоиднинг каноник тенгламасидир.
 P ва Q бир хил ишорали берилган сонлар.

$$\frac{x^2}{P} - \frac{y^2}{Q} = 2z$$

бу эллиптик параболоиднинг каноник тенгламасидир.
 P ва Q бир хил ишорали берилган сонлар.

Узини текшириш учун саволлар.

1. Уч номаълумли иккинчи даражали умумий тенглама қайси шартларда маркази координата бошида булган сферани аниқланг?

2. Куйидагиларни ёзинг: 1) эллиптик цилиндр; 2) гиперболик цилиндр тенгламасини; 3) параболик цилиндр тенгламасини.
3. Эллипсоиднинг каноник тенгламасини ёзинг.
4. Эллиптик параболоиднинг каноник тенгламасини ёзинг.
5. Гиперболик параболоиднинг каноник тенгламасини ёзинг.
6. Бир паллали гиперболоиднинг каноник тенгламасини ёзинг.
7. Икки паллали гиперболоиднинг каноник тенгламасини ёзинг.

6 - МАЪРУЗА

Чизикли тенгламалар системаси ва уларни ечиш усуллари, амалий масалаларни ечишда куллаш.

Режа:

1. Чизикли тенгламалар системаси тузишга олиб келадиган масала.
2. Икки номаълумли чизикли тенгламалар системасини Крамер усулида ечиш, II- тартибли детерминантларни ҳисоблаш.
3. Ҳалланган масалани Крамер усулида ечиш ва ҳулоса.
4. Уч номаълумли чизикли тенгламалар системаси, III - тартибли детерминантларни ҳисоблаш

Чизикли тенгламалар системасига табиий ёндошиш учун қуйидаги кишлоқ хўжалиғи ишлаб чиқариши масаласини қурайлик: Хўжалик 400 га ерга пахта ва бугдой экиш учун қилинадиган харажатларга 450000 сым пул ажратди. Экиладиган пахта ва бугдойдан қутиладиган шосил мос равишда 2,5 т ва 4т. Хар бир гектар пахта экилган ерга 1400 сым, бугдойга 300 сум сарфлансин. Барча ер ва пул ресурсларидан фойдаланиладиган вариант ечими топилсин.

Ечиш: x ва y ортали етиштириладиган пахта ва бугдойнинг умумий ҳажмини белгилаб оламиз. Ерни ажратиш ва пулни тақсимлаш тенгламаларини тузамиз:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2,5} + \frac{y}{4} = 400 \\ x \cdot 1400 + y \cdot 300 = 450000 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 8x + 5y = 8000 \\ 112x + 15y = 90000 \end{array} \right.$$

Бу тенгламалар системасини ечишдан аввал чизиqli тенгламалар системасини Крамер усули ёрдамида ечиш усулини қурайлик. Икки номаълумли иккита тенгамалар системаси берилган бўлсин.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0; \\ \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1; \\ x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Чизиqli тенгламалар системасини детерминантлар ёрдамида бундай ечиш усули Крамер усули дейилади.

Энди юзорида ҳалланган масалани Крамер усулида ечамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 112 & 15 \end{vmatrix} = 120 - 560 = -440 \neq 0; \Delta_x = -330000; \Delta_y = -176000; \\ x = \frac{-330000}{-440} = 750; y = \frac{-176000}{-440} = 400$$

Демак 750 т пахта ва 400 т бугдой етиштирилган экан. Энди ажратиладиган ер майдонини топайлик: $(x/2,5) = (750/2,5) = 300$ га ерга пахта, $(y/4) = (400/4) = 100$ га ерга бугдой экиш учун ажратилди.

Пахта етиштириш учун $(x/2,5) \cdot 1400 = 300 \cdot 1400 = 420000$ сым ва бугдой етиштириш учун $y/4 \cdot 300 = 100 \cdot 300 = 30000$ сым ажратиш керак экан.

Бу усулни 3 номаълумли учта чизиqli тенгламалар системаси учун ҳаллаш мумкин.

$$\begin{cases} a_1x + d_1y + c_1z = d_1; \\ a_2x + d_2y + c_2z = d_2; \\ a_3x + d_3y + c_3z = d_3; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \neq 0$$

былса система ягона ечимга эга булади,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta}; Y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; Z = \frac{\Delta_z}{\Delta} :$$

Саволлар:

1. Чизи=ли тенгламалар системаси ечимга эга былиши учун =андай шартлар бажарилиши керак?
2. Крамер усули =андай усул?
3. +уйидаги чизи=ли тенгламалар системаси ечилсин:

$$a) \begin{cases} 3x + 4y = -6 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}; \quad b) \begin{cases} x - 3y + 2z = 10 \\ 3x + 2y - z = 5 \\ 2x + 6y - 3z = -6 \end{cases} :$$

7 – МАЪРУЗА

УЗГАРУВЧИЛИ МИҚДОРЛАР. ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИ. ФУНКЦИЯНИ БЕРИЛИШ УСУЛЛАРИ. ЖУФТ ВА ТОҚ ФУНКЦИЯЛАР.

РЕЖА

1. Узгарувчили микдорлар, функция тушунчаси.
2. Функцияни берилиш усуллари.
3. Жуфт ва тоқ функциялар.
4. Функциянинг даврийлиги.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Сон, натурал сонлар, бутун сонлар, иррационал сонлар, кесма, сегмент, интервал, ярим очик оралик, нукта атрофи, абсолют киймати, узгарувчи, аргумент функция, аникланиш соҳаси, кийматлар соҳаси, жадвал усули, аналитик усули, график усули, ординаталар уки, координаталар боши, абциссалар уки, мураккаб функция.

Сон - математик анализнинг асосий тушунчаларидан биридир. Нарсаларни, буюмларни санаш зарурати туфайли натурал сонлар пайдо булади. Натурал сонлар туплами $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ курунишда белгиланади. Натурал сонларга карама - карши сонлар ва нолр сонини кушиш билан бутун сонлар туплами

$Z = \{ \dots - n, \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots n, \dots \}$ ни ёсил киламиз.

Математикани тараккиёти давомида рационал сонлар $Q = \left\{ \frac{p}{q} \right\}$ нинг ва кейин иррационал сонда ёзилиши мумкинлигини ҳамда ҳар қандай иррационал сонни чексиз даврий бўлмаган унли қаср шаклида ёзиш мумкин эканлигини эслатиб утамиз.

Рационал ва иррационал сонлар тупламлари бирлашмаси ҳақиқий сонлар тупламини ёсил қилди ва уни R билан белгиланади.

Ҳақиқий сонлар укида нукта орқали ифодаланади.

a ва b сонлар берилган, шу билан бирга $a < b$ бўлсин. $a \leq x \leq b$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган x сонлар тупламини кесма ёки сегмент дейилади ва уни $[a, b]$ орқали белгиланади;

(a, b) -интервал ёки оралик деб аталади. $[a, b]$ ёки (a, b) -ярим очик оралик дейилади.

Снуктани уз ичига олган, $a < c < b$ бўлган (a, b) интервал с нуктанинг атрофи дейилади.

Агар $\varepsilon > 0$ бўлган $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$ интервал с нуктанинг ε -атрофи деб аталади.

Таъриф: Ҳақиқий соннинг абсолют киймати деб, мусбат ва манфий сонлар тупламидан олинган мусбат сонга айтилади ва у қуйидагича аникланади:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса,} \\ -x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

Масала, $|3| = 3$; $|-3| = -(-3) = 3$.

Абсолют кийматининг хоссалари

$$1^0 \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

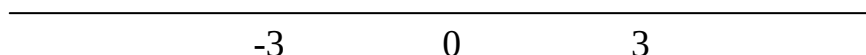
$$2^0 \quad |x-y| \geq |x| - |y|$$

$$3^0 \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$4^0 \quad |x/y| = |x| / |y|$$

Мисол 1: $|x| < 3$ тенгсизликни кандай тушуниш керак?

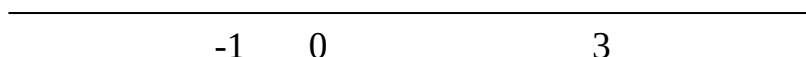
Бу тенгсизлик санок бошигача булган масофалари 3 дан кичик х нукталар тупламини ифодалайди: $|x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3$ тенгсизликлар тенг кучлидир.



Мисол 2: $|x-2| < 1$ тенгсизликни кандай тушуниш керак?

Бу тенгсизлик 2 нуктагача булган масофалари 1 дан кичик х нукталар тупламини ифодалайди.

$$|x-2| < 1 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 3.$$



Энди х ва у узгарувчи микдорни карйлик.

1-Таъриф : Агар х микдорининг Д сохадаги ьар бир кийматига бирор усусл ёки конун буйича у нинг бирор Е сохадаги аник бир киймати мос куйилса, у узгарувчи микдор х узгарувчи микдорнинг функцияси дейилади.

х-эркли узгарувчи, аргумент
у-боьлик узгарувчи, функция.

Функцияни куйидаги куринишда белгиланади:

$$y=f(x), y=y(x), y=\varphi(x) \text{ ва } \text{ьоказо.}$$

Агар $X=X_0$ кийматида $y=f(x)$ функциянинг киймати y_0 булса, уни куйидагича белгиланади:

$$y_0 = f(x_0) \text{ ёки } y|_{x=x_0}=y_0$$

2-таъриф: Узгарувчи х нинг $f(x)$ функция маънога эга буладиган кийматлари туплами функциянинг аникланиш соъаси дейилади ва $D(f)$ билан белгиланади.

3-таъриф: Функциянинг кабул киладиган кийматлари туплами унинг узгариш соъаси дейилади ва $E(f)$ шаклида белгиланади.

Мисло 3: $y = \sqrt{4-x^2}$ функциянинг аникланиш ва узгариш соъасини топинг.

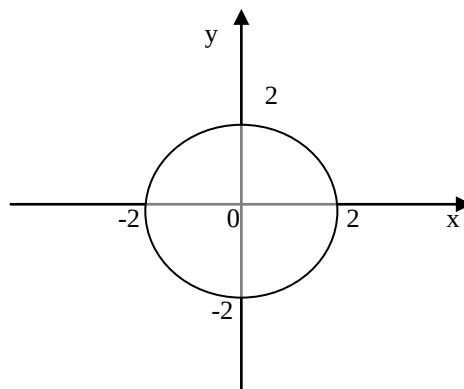
Ечиш: $4 - x^2 \geq 0$ булганда функция маънога эгадир.

$$x^2 \leq 4 \Rightarrow |x| \leq 2 \Rightarrow$$

$$-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow [-2; 2]$$

Демак, $D(f) = [-2; 2]$ $E(f) = [0; 2]$

$y = f(x)$ функциянинг графи деб Oxy текисликдаги координаталари $y = f(x)$ муносабат билан боъланган $P(x, y)$ нукталар тупламига айтилади.



Функция турли усуллар билан берилши мумкин:

- 1) Жадвал усули
- 2) Аналитик усули
- 3) График усули

Функция аналитик усулида берилганда x ва y микдорлар орасидаги боъланиш формулага оркали ифодаланади. Масалан, $y = x^2$; $y = (x - 3)^1$. Функция уз аникланиш соъасининг турли қисмларида турлича формулалар оркали берилиши мумкин:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ агар } x \in [-1; 0], \text{ булса,} \\ x, \text{ агар } x \in (0, +\infty), \text{ булса.} \end{cases}$$

Функция жадвал усулда берилганда x ва y микдорлар орасидаги боъланиш жадвал курунишда ифодаланади:

x	x_1	x_2		x_n
y	y_1	y_2		y_n

Масалан, логарифмик, тригонометрик функциялар жадваллари маълум.

Функция график усулда берилганда унинг графиги маълум булиб, аргументнинг турли қийматларига мос келувчи қийматлари бевосита графикдан топилади. Айтайлик $y = f(x)$ функция бирор $D(f) = [a, b]$ соъада аникланган булсин.

1 - таъриф. Агар x нинг шу соъага тегишли ихтиёрий иккита x_1 ва x_2 қийматлари учун $x_1 < x_2$ булганда $f(x_1) < f(x_2)$ тенгсизлик уринли булса, f функция D соъада усувчи дейилади.

2 - таъриф. Агар $x_1 < x_2$ булганда $f(x_1) \leq f(x_2)$ булса, функция D соъада камаймайдиган функция дейилади. $D(f) = [a, b]$ соъа эса f функциянинг мос равишда усиш ёки камайиш оралиъи дейилади.

3 - таъриф. Агар $y = f(x)$ функция ър бир $x \in D(f)$ учун $f(-x) = f(x)$ тенглик бажарилса, y ълда $y = f(x)$ функция жуфт функция дейилади.

Агар $\forall x \in D(f)$ учун $f(-x) = -f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $f(x)$ функция ток функция дейилади.

Масалан: $y = x^2$; $y = \cos x$, $y = \ln(1 + x^2)$ - жуфт функциялар.

$y = x^3$; $y = \sin x$, $y = x + \frac{1}{x}$ - ток функциялар.

Жуфт функциянинг графиги ординаталар укига ток функциянинг графиги координата бошига нисбатан симметрик булади.

4 - таъриф. Агар $y = f(x)$ функция $\forall x \in D(f)$ ва $x \pm T \in D(f)$ учун $f(x \pm T) = f(x)$ тенглик бажарилса, у ҳолда $y = f(x)$ функция даврий функция дефилади. T - кандайдир хакикий сон. Унинг энг кичик мусбат киймати T_0 мавжуд булса, унга $f(x)$ функциянинг даври дейилади.

Масалан: $y = 3^{|\cos x|}$ функция берилган булсин. Унинг даврини топамиз. $\cos x = \pm \cos(x+T)$ тенгламани T га нисбатан ечамиз.

$$T_1 = (2n-1)\pi - 2x; \quad T_2 = (2n+1)\pi; \quad T_3 = 2n\pi - 2x,$$

$$T_4 = 2k\pi + 2\pi \text{ ларни топамиз.}$$

T_1 ва T_3 лар x га боълик, демак, улар давр була олмайди. $n = 0$ булганда $T_2 = \pi$ ва $T_4 = 2\pi$ га эга булиб, уларнинг энг кичик $T_2 = \pi$ берилган функциянинг изланган даври булади. Аналитик усулда бериладиган функциялар ичида элементар функциялар муъим урин тутади.

1. Узгармас функция $y = c$
2. Даражали функция $y = x^\alpha$ ($\alpha - \text{const}$).
3. Курсаткичли функция $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$).
4. Логарифлик функция $y = \lg x$ ($a > 0, a \neq 1$).
5. Тригонометрик функциялар $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tg x$, $y = \ctg x$.
6. Тескари тригонометрик функциялар:

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arctg x, \quad y = \text{arccctg} x$$

Мураккаб функция бирор D соъада x узгарувчининг функцияси $U = \varphi(x)$ берилган булиб, унинг узгариш соъаси G булсин. G соъада $y = f(u)$ функция берилган булсин. У ҳолда x узгарувчининг G соъадаги аник бир киймати ва бу кийматга y узгарувчининг аник бир киймати мос келади.

$$y = F(x) = f(\varphi(x))$$

Бунда $Y(x)$ функция x узгарувчининг f ва φ функцияларида тузилган мураккаб функцияси дейилади.

$U = \varphi(x)$ - оралик узгарувчи дейилади.

Мисол: $y = \lg u$ ва $y = \tg x$ булса, $y = \lg \tg x$, $y = \lg \tg \sqrt{x^2 + 1}$

Уз-узинин текшириш учун саволлар

1. **Натурал бутун рационал сон деб кандай сонларга айтилади?**
2. **Сигмент, кесма, очик оралик, ярим очик оралик деб кандай ораликларга айтилади?**
3. **Сонни абсолят кийматига таъриф беринг.**
4. **Функция деб нимага айтилади?**
5. **Функция неча хил усулда берилади?**
6. **Кандай функцияни даврий дейилади?**
7. **Мураккаб функцияга таъриф беринг.**

8 – МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯНИ НОМАЪЛУМ ЧЕКСИЗГА ИНТИЛГАНДАГИ ЛИМИТЛАРИ. ЧАП ВА УНГ ЛИМИТЛАР.

РЕЖА

1. **Функцияни номаълум чексизга интилгандаги лимитлари.**
2. **Чапдан ва унгдан лимитлар. Чексиз катта ва чексиз кичик микдорлар.**

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Нуктадаги лимити, узгармас сон, чап ва унг, томонлама лимити, чексиз кичик (катта) микдорлар, чекланган микдорлар, аникмасликлар.

Функциянинг нуктадаги лимити.

5 - таъриф. Агара $y = f(x)$ функция $x = a$ нуктанинг бирор атрофида аникланган булиб, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд булсин, $|x - a| < \delta$ тенгсизликни каноатлантирадиган барча $x \neq a$ нукталар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, A чекли сон $y = f(x)$ функциянинг $x = a$ нуктадаги лимити деб аталади.



Мисол 1: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$ ни исботланг.

$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ функцияни $x = 4$ нуктанинг бирор атрофини карайлик, масалан $3 < 4 < 5$. Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ни оламыз ва $|f(x) - A|$ ни $x \neq 4$ деб,

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| = \left| \frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)} - 2 \right| = \left| \frac{x+4}{x} - 2 \right| = \left| \frac{x-4}{x} \right|$$

$x \in (3; 5)$ яъни $x > 3$ ни ҳисобга олсак,

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| < \frac{|x-4|}{3}$$

бундан куришиб турибдики, $\delta = 3\varepsilon$ деб олсак, у ҳолда $|x - 4| < \delta$ учун барча $x \in (3; 5)$ учун

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} - 2 \right| < \frac{\delta}{3} = \varepsilon$$

бундан 2 сони $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ функциянинг $x = 4$ нуктадаги лимити

булиши келиб чиқади.

6- таъриф. Агара $y = f(x)$ функция x нинг етарлича катта кийматларида аникланган булиб, исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N > 0$ сон мавжуд булсин, $|x| < N$ тенгсизликни каноатлантирадиган барча x лар учун $|f(x) - A| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, узгармас A сон $y = f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги лимити деб аталади.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Мисол. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x} = 1$ эканини исботланг.

Исбот $f(x) = \frac{x+2}{x}$ ни карайлик

Ихтиёрий $\varepsilon > 0$ ни оламыз ва $|f(x) - A|$ ни узгартирамиз

$$\left| \frac{x+2}{x} - 1 \right| = \left| 1 + \frac{2}{x} - 1 \right| = \left| \frac{2}{x} \right|$$

Агар $N = \frac{2}{\varepsilon}$ ни олсак, у ёлда $|x| > N$ учун,

$$\left| \frac{x+2}{x} - 1 \right| < \frac{2}{N} = \varepsilon \quad \text{тенгсизлик бажарилади.}$$

Бундан 1 сони $f(x) = \frac{x+2}{x}$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги лимити келиб
 чиқади.

Таъриф. (а, в) интервалда аникланган $y = f(x)$ функция учун шундай $M > 0$ сон мавжуд булсаки, барча $x \in (a, b)$ лар учун $|f(x)| \leq M$ тенгсизлик бажарилса, у ёлда $y = f(x)$ функция (а, в) интервалда чегараланган дейилади.

Теорема. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ - чекли сон булса, у ёлда $y = f(x)$ функция а нуктанинг бирор атрофида чегаралангандир.

Таъриф. Агар $y = f(x)$ функция $x = a$ нуктадаги ёки $x \rightarrow \infty$ даги лимити таърифида x узгарувчи а дан кичик булганича колса, у ёлда функциянинг A_1 лимити функциянинг $x = a$ нуктадаги (ёки а - 0 даги) чап томонлама лимити деб аталади.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A_1$$

Худди шу каби $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A_2$ - унг томонлама лимити дейилади.

Таъриф. Агар $y = f(x)$ функция а нуктанинг бирор атрофида аникланган ва исталган $M > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон мавжуд булсаки, $|x - a| < \delta$ тенгсизликни каноатлантирадиган барча $x \neq a$ лар учун $|f(x)| > M$ тенгсизлик бажарилса, $x \rightarrow a$ да $f(x)$ функция чексизликга интилади деб айтилади

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

Агар $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ булса, у ёлда $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да ёки $x \rightarrow \infty$ да чексиз катта функция деб аталади.

Таъриф. Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ (ёки $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$) булса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да (ёки $x \rightarrow \infty$ да) чексиз кичик функция деб аталади.

Чексиз кичик микдорларнинг хоссалари:

- 1⁰. Икки чексиз кичик микдорларнинг йииндиси ёки айирмаси яна чексиз кичик микдордир.
- 2⁰. Чексиз кичик микдорни чегараланган микдорга купайтмаси яна чексиз кичик микдордир.

Хулоса: Чексиз кичик микдорни узгармас сонга купайтмаси яна чексиз кичик микдордир.

Мисол: $\alpha = \frac{1}{n}$; $\beta = \frac{1}{n^2}$; $\gamma = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$ (бу ерда $n = 1, 2, 3, \dots$)

α, β, γ - чексиз кичик микдорлар.

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \text{чексиз кичик микдорлар.}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} - 1 \text{ га интилади.}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n - \text{бу эса } \infty \text{ га интилади.}$$

Мисолдан куринадики, чексиз кичик микдорларни нисбати, чексиз кичик микдор була олмайди.

3⁰. Чексиз катта микдорга тескари катталиқ, чексиз кичик микдордир ва аксинча

$$\frac{1}{\infty} = 0; \quad \frac{1}{0} = \infty$$

4⁰. Чексиз катта микдор билан чекланган микдорнинг йиғиндиси чексиз катта микдордир.

5⁰. Иккита чексиз катта микдорни ва чекланган микдорга купайтмасы яна чексиз катта микдордир.

$$\infty + \infty = \infty; \quad \infty - \infty - \text{аникмаслик, яъни } \infty - \infty \neq 0 \text{ худди}$$

шу каби $\frac{\infty}{\infty}$ - аникмаслик.

Узини текшириш учун саволлар.

1. $y = f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги limiti нима?
2. $x \rightarrow a$ да limitга эга булган функцияга мисол келтиринг.
3. $y = f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги limiti таърифни айтиб беринг.
Таърифни тенгсизлик ёрдамида келтиринг.
4. Бир томонлама limitлар нима: Функциянинг нуктадаги limiti ва бир томонлама limit тушунчалари қандай боъланган?
5. Қандай функция чегараланган функция деб аталади?
6. Қандай функцияни чексиз катта функция дейилади?
7. Қандай функцияни чексиз кичик функция дейилади?

9-МАЪРУЗА

СОНЛИ КЕТМА-КЕТЛИК ВА УЛАРНИНГ ЛИМИТЛАРИ. НАТУРАЛ ЛОГАРИФМ.

РЕЖА

1. Сонли кетма-кетлик ва уларни лимитлари.
2. Монотон кетма-кетлик ва уларни лимитлари.
3. 1 сони. Натурал логарифм.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Непер сони, геометрик прогрессия, монотон функция, иккинчи ажойиб лимит, натурал логарифм.

2) 1 - сони (Непер сони)

Лемма - 1. Агар $q > 1$, у холда

$$q^n \geq 1 + n(q-1), \quad n \in \mathbb{N}$$

Исбот: Геометрик прогрессияни хадлар йиьиндиси формуласидан ва $q > 1$ булганлиги учун.

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + \dots + q^{n-1} \geq 1 + 1 + \dots + 1 = n$$

Бу ердан $\frac{q^n - 1}{q - 1} \geq n$, демак $q^n \geq 1 + n(q-1)$.

Лемма - 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ мавжуд.

Исбот: $f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ деб белгилаймиз

$f(n)$ - функцияни камаюфчи функция эканлигини курсатамиз.

$$\begin{aligned} \frac{f(n-1)}{f(n)} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} = \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} \geq \left[1 + (n+1)\left(\frac{n^2}{n^2 - 1} - 1\right)\right] \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n-1}} = 1 \end{aligned}$$

Демак $\frac{f(n-1)}{f(n)} \geq 1$ у холда, $f(n-1) \geq f(n)$, $f(n)$ - функция камаювчи ва

$f(n) \geq 1$ -функция куйидан чегараланган.

Монотон функцияни лименти такидаги теоремага асосан.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \text{ мавжуд.}$$

Натижа-1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ - мавжуд.

Хакикатдан ҳам $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}$

мавжуд $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ тенг.

$$\alpha = \left(1 + n \frac{1}{n}\right) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4$$

Бу ердан $2 \leq e \leq 4$ эканлиги келиб чиқади.

Ҳисобланганда $e \approx 2,7182.818284590...$

Натижа-2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = e \quad X \in \mathbb{R}$

Исбот: $(x)=n$ деб белгилаймиз. Агар $x \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ $E(x)$ функцияни хоссасидан $n \leq x < n + 1$, у ҳолда

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Демак $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{эканлигини исбот қиламиз.}$$

$y = -x$ белгилаш қиритамиз, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)$$

Лимитга утсак, $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Демак, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e$

Мисоллар.

$$1. \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = \left| \frac{1}{\alpha} = t \right|_{\alpha \rightarrow 0, t \rightarrow \infty} = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = 1$$

$$2. \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} a^x - 1 = t \\ a^x = t + 1 \\ x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(1+t)}{\ln a}} = \ln a$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \left| \begin{array}{l} 1+x = e^t \\ (1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha t} - 1 \\ x = e^t - 1 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha t} - 1}{e^t - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} \cdot \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha$$

l - асосли логарифм натурал логарифм дейилади, l n x деб белгиланади.

Унли логарифм билан натурал логарифм орасида куйидаги боьланишни топиш мумкин.

$$\lg x = M \ln x, \quad M = \lg e = 0,43429$$

III

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right)}{x^m \left(b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-m}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_m}{x^m}} = \begin{cases} 0, & \text{аг ар } n < m \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{аг ар } m = n \\ \infty, & \text{аг ар } n > m \end{cases}$$

Мисол.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x + 5}{4x^2 + 9} = \frac{3}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3}{3x^4 + 5x - 3} = 0$$

Узини текшириш учун саволлар.

1. Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги такидаги теоремани айтиб беринг.

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \text{ формулани исботланг.}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e \text{ формулани исботланг.}$$

4. Кандай лагорифмлар системаси натурал логарифмлар деб аталади? Натурал системадан унли системага ва аксинча кандай утилади?

10 – МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯНИНГ НУКТАДАГИ УЗЛУКСИЗЛИГИ ВА УЗИЛИШ НУКТАСИНИНГ ТУРЛАРИ.

РЕЖА

1. Функцияни нуктадаги узлуksизлиги ва узилиги нуктасининг турлари.
2. Функцияни кесмадаги узлуksизлиги ва унинг хоссалари.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Аргумент функция ортирмаси, нуктада узлуksиз, нукта атрофида аникланган, чапдан (унгдан) узлуksиз, узилиш нуктаси, четлатиладиган узилиш нуктаси, биринчи тур узилиш, иккинчи тур узилиш, кесмада узлуksиз.

$Y=f(x)$ функция (a,b) интервалда аникланган булсин. Ихтиёрий $X_0 \in (a,b)$ нуктани оламиз, унга $y_0=f(x_0)$ киймат мос келади. Бошка $X \in (a,b)$ нуктани оламиз, унга $Y=f(x)$ мос келади. $X-x_0$ айрима x аргументнинг x_0 нуктадаги ортирмаси дейилади ва Δx билан белгиланади ва уни $\Delta x = X-X_0$ (1) курунишда ёзилади, унга $f(x)-f(X_0)$ мос келиб, уни Δy курунишда белгиланади.

$$\Delta y = f(X) - f(X_0) = f(X_0 + \Delta x) - f(X_0) \quad (2)$$

1-таъриф: Агар $y=f(x)$ функция X_0 нуктада ва унинг атрофида аникланган булиб,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(X_0) \quad (3)$$

Яъни функциянинг X_0 нуктадаги лимити унинг шу нуктадаги лимити унинг шу нуктадаги кийматига тенг булса, $y=f(x)$ функция X_0 нуктада узлуksиз деб аталади.

2-Таъриф Агар $y=f(x)$ функция X_0 нуктада ва унинг атрофида аникланган булиб, исталган $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ мавжуд булсаки, $|X-X_0| < \delta$ шартни қаноатлантирадиган исталган X учун

$$|f(X)-f(X_0)| < \varepsilon$$

тенгсизлик туъри булса, $y=f(x)$ функция X_0 нуктада узлуksиз деб аталади.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)-f(X_0)| = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(X_0)$$

3-таъриф: Агар $y=f(x)$ функция X_0 нуктада ва унинг атрофида аникланган булиб, аргументнинг чексиз кичик ортирмасига функциянинг чексиз кичик ортирмасига мос келса, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = 0 \quad (4)$$

булса, функция X_0 нуктада узлуксиз дейилади.

4-Таъриф: Функциянинг чап ва унг лимитлари X_0 да мавжуд ва узаро тенг булса, $y=f(x)$ функция X_0 нуктада узлуксиз деб аталади.

Бу таърифда куйидаги хулосаларга келамиз;

1. $f(x)$ функция X_0 нуктада ва унинг атрофида аникланган.
2. Бир томонлама лимитлар мавжуд ва улар узаро тенг.

$$f(X_0-0)=f(X_0+0)$$

3. Бу умумий лимит функциясининг X_0 нуктадаги лимитига тенг.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} X\right)$$

Агар X_0 - нуктада узлуксиз булса, у ьолда бу нуктада лимит ва функция белгиларининг уринларини алмаштириш мумкин.

Мисол 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(X^2+1) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 1} (X^2+1)\right) = \ln 2$

5-таъриф: Агар $y=f(x)$ функция (a, X_0) ораликда аникланган ва

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = f(X_0)$$

булса, бу функция X_0 нуктада чапдан узлуксиз деб аталади.

6-Таъриф: Агар $y=f(X)$ функция $(a, X_0]$ ораликда аникланган ва $\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) = f(X_0)$

булса, бу функция X_0 нуктада чапдан узлуксиз деб аталади.

УЗИЛИШ НУКТАЛАРИ ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ.

1-Таъриф. Агар X_0 нуктада $y=f(x)$ функция учун куйидаги шартлардан камида биттаси бажарилса, X_0 нукта $f(x)$ функциянинг узилиши нуктаси, функциянинг узи эса узлукли функция деб аталади:

- 1) Функция X_0 нуктада аникланган,
- 2) Функция X_0 нуктада аникланган, лекин бир томонли лимитларнинг камида бир Q мавжуд.
- 3) Функция X_0 нуктада мавжуд ва

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) \neq f\left(\lim_{x \rightarrow X_0} X\right)$$

- 4) Функция X_0 нуктада аникланган ва

$$\lim_{x \rightarrow X_0} f(x) \neq f\left(\lim_{x \rightarrow X_0} X\right) \neq f(X_0)$$

Узилиш нукталари 3 хил турда булади:

I. Йукотиладиган (четлатиладиган) узулиш.

2-Таъриф: X_0 нуктада $y=f(X)$ функция аникланган, бироқ бир томонлама лимитлар мавжуд ва узаро тенг, булса, X_0 нуктада йукотиладиладиган узулиш нуктаси деб аталади.

Мисол: $X_0=0$ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ функцияни узилиш нуктасидир бироқ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ ва } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ яъни}$$

$$f(-0)=f(+0)$$

бир томонлама лимитлар мавжуд ва узаро тенг, аммо $f(x)$ мавжуд эмас, демак x_0 йукотиладиган узунлиги нуктаси, $f(0)=f(-0)=f(+0)=1$ деб оламыз, шу билан узулиш нуктасини йукотамиз.

II. Биринчи тур узулиш нуктаси

Агар функция x_0 аникланган ёки аникланмаган лекин бир томонлама лимитлар мавжуд ва узаро тенг булмаса, яъни $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ булса бу нуктани биринчи тур узулишли нуктаси дейилади. $h = f(x_0-0) - f(x_0+0)$ сони функциянинг x_0 нуктадаги сакраши дейилади.

Мисол $f(x) = \frac{|x|}{x}$ функция $x=0$ нуктадаги аникланмаган.

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{+x}{x} = 1$$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-x}{x} = -1$$

яъни $f(-0) \neq f(+0)$ ва $h=1-(-1)=2$

III. Иккинчи тур узилиш нуктаси.

Агар X_0 нуктада бир томонлама лимитлардан камида бири мавжуд эмас ёки чексизликка тенг булса, x_0 нукта иккинчи тур узилиш нуктаси дейилади.

Мисол: $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$ функция $x=1$ нуктада мавжуд эмас.

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{-\infty} = 0$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{\infty} = \infty$$

Демак, $x=1$ иккинчи тур узилмиш нуктаси.

1-Таъриф ; $y=f(x)$ функция (a,b) ораликнинг ҳар бир нуктасида узлуксиз бўлса у бу ораликда узликсиз функция деб аталади.

2-Таъриф; $y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесманинг барча икки нукталарида узлуксиз ва унинг охирларида бир томонлама узликсиз бўлса, бу функция шу кесмада узликсиз деб аталади.

Узини текшириш учун саволлар.

1. $Y=f(x)$ функциянинг X_0 нуктада узликсизлигини таърифини келтиринг ва геометрик талкин этинг.
2. Узликсиз функция учун лимитга утиш қоидаси нимадан иборат?
3. $Y=f(x)$ функциянинг X_0 нуктада чапдан ва унгдан узликсизлиги таърифларини айтиб беринг.
4. Кесмада узликсиз функцияларнинг хоссаларини таърифлаб беринг.
5. Функциянинг узилиш нуктаси деб нимага айтилади?
6. Ўқотиладиган узилиш нуктаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.
7. Биринчи тур нуктаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.
8. Иккинчи тур узилиш нуктаси деб нимага айтилади? Мисол келтиринг.

ФУНКЦИЯ ХСИЛАСИ. АРГУМЕНТ ВА ФУНКЦИЯНИНГ ОРТТИРМАСИ. ХОСИЛАНИНГ ТАЪРИФИ.

РЕЖА

1. Аргумент ва функцияни ортирмаси.
2. Эгри чизикга уринма утказиш масаласи.
3. Моддий нуктани ʔаракат тезлиги.
- Їосилани таърифи.
5. Хосила мавжудлигини зарурий шарти.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Уринма, кесувчи, тезлик, дифференциалланувчи, узлуксиз

I $y=f(x)$ функция берилагн булсин, $f(x)$ функцияни $x=x$ нуктадаги киймати $y=f(x)$ га тенг, $(x=x_2)$ нуктадаги киймати $y_1=f(x)$ га тенг. x_1-x га аргумент ортирмаси деб айтилади ва ΔX билан белгиланади:

$\Delta X = x_1 - x$, бу ерда $\Delta X \neq 0$ $f(x)$ функцияни $x_1 = x + \Delta X$ нуктадаги киймати $f(x + \Delta X)$ га тенг.

$f(x + \Delta X) - f(x)$ айрмага функция ортирмаси деб аталади ва

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$f(x)$ функцияни берилишига боълик равишда функция ортирмаси нолга тенг булиши, манфий ва мусбат булиши мумкин.

II Эгри чизикга уринма утказиш масаласи.

Умумий M нуктага эга булган иккита туъри чизик оламиз.

MN-ҳаракатланувчи

MT-кузгалмас.

MT-туъри чизикга $\varphi \rightarrow 0$ чапдаги MN туъри чизикни лимитик деб караймиз. M нукта, L га яъни эгри чизикга тегишли нукта булсин.

α туъри чизикдаги бирор бир нукта MN-кесувчини утказамиз N нуктани чизик буйича M нуктага караб ʔаракатлантирамыз.

У холда MN кесувчи MT литик ʔолатга якинлашади. MN кесувчи MN лимитик ʔолатига, α эгри чизикни M нуктасига утказилган уринма деб аталади.

Э с л а т м а: α - эгри чизикни M нуктада уринмаси

мавжуд булмаслиги ҳам мумкин.

$y=f(x)$ функцияни графигига $M_0 (X_0, y_0)$ нуктасига уринма утказиш мумкин булсин.

$$y=f(x)$$

тенглама билан берилган эгри чизикни $M_0 (X_0, y_0)$ нуктасигача утказилган уринма тенгламасини тузиш талаб килинсин.

$X=X_0$	нуктада	$y=f(x_0)$;
$X=X+\Delta X$	нуктада	$f(X_0+\Delta X)=y_0+\Delta y$
.	Чизмадан ΔMNE туъри	бурчакли учбурчак

MN кесувчини тенгламаси.

$$y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta X} (X - X_0)$$

Бу ерда $\Delta X \rightarrow 0$ га $N(X+\Delta X, y+\Delta y)$ нуктага $M (x_0, y_0)$ нуктага интилади. β -оркали MN кесувчини OX укига оъиш бурчагини белгилайлик. (OX -укини мусбат йуналиши билан) MN кесувчини лимитик холати MT (M -нуктага утказилган уринма) OX уки билан ьосил килган бурчакни α -деб белгилаймиз. Агар $\Delta X \rightarrow 0$ га, $\beta \rightarrow \alpha$ ва $tq \beta \rightarrow tq \alpha$, $tq \beta = \frac{\Delta y}{\Delta X}$, эканлигини эътиборга олсак,

$$tq \alpha = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X} \text{ га тенг.}$$

Демк, $y=f(x)$ тенглама билан берилган эгри чизикли $M (X_0, y_0)$ нуктасига уринма тенгламаси. $y=f(x)$ функция X нуктани атрофида аникланган булсин.

X -аргументга ΔX оттирма берамиз, (Шуни эслатиб утиш керакки, $X+\Delta X$ нукта функцияни аникланиш соъасидан чикиб кетмаслиги керак).

$$y - y_0 = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X} (X - X_0)$$

Бу ерда шундай хулосага келамизки, эгри бирор нуктасига уринма тенгламасини тузиш

$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X}$ куринишидаги лимитни ьисоблашга келтирилди.

III. Моддий нуктани тезлиги.

Моддий нукта бирор конуни буйича туъри чизик буйича ьаракатланаётган булсин.

t -вакт, $S(t)$ -йул, $V(t)$ -тезликни белгилаймиз. Моддий нуктани ьаракат конуни.

$S=S(t)$ функция билан берилсин.

$t=t$ моментда моддий нукта M холатини эгаллайди. $OM=S(t)$, $t=t+\Delta t$ моментда $OM'=S(t+\Delta t)$. Демак, Δt вақт оралиғида моддий нукта $\Delta S(t)=S(t+\Delta t)-S(t)$ йул утади.

$\Delta S(t)$ -босиб утилган йулни Δt вақт оралиғига нисбатини топамиз. $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$.

Моддий нукта текис ʔаракат қилаётган бўлса, бу нисбат уртача тезликка тенг бўлади, яъни V урта $\frac{\Delta S(t)}{\Delta t}$, $(t; t+\Delta t)$ вақт оралиғидаги урта тезлик, моддий нуктани $t=t_0$ моментдаги тезлигини ʔарактерлайди.

Моддий нуктани ʔақиқий тезлигини $V(t)=\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ лимит орқали топишимиз мумкин.

Демак, моддий нуктани ʔақиқий тезлигини топиш $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ қурилишдаги лимитни ҳисоблашга келтирилди.

IV. Хосилани таърифи.

$y=f(x)$ функция X нуктани атрофида аниқланган бўлсин.

X -аргументга ΔX оттирма берамиз, (Шуни эслатиб ўтиш керакки, $X+\Delta X$ нукта функцияни аниқланиши соʔасидан чиқиб кетмаслиги керак).

У ҳолда функция $\Delta y=f(X+\Delta X)-f(X)$ орттирма олади.

$f(x)$ функцияни $X=X_0$ нуктадаги хосиласи деб, шу нуктадаги функция орттирмасининг уни шу орттирмагача эриштирадиган аргументни орттирмасига нисбатан ΔX нолга интилгандаги лимитга айтилади. (Агар бу лимит мавжуд ва чекли бўлса,)

$y=f(x)$ функцияни $X=X$ нуктадаги хосиласи

y ; $f(x)$ ёки $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dt}{dx}$ деб белгиланади.

Демак, $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X}$ ёки $f'(x)=\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta X}$;

Мисол: $y=x^2$ функцияни хосиласини топинг. функцияни Δy орттирмасини топами:

$$\Delta y=(x+\Delta X)^2-X^2=2X\Delta+(\Delta X)^2$$

Хосилани таърифидан фойдаланамиз.

$$y'=\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X}=\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x+(\Delta X)^2}{\Delta X}=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x+\Delta x)2x$$

Демак, $y'=2x$.

Юқоридаги масалаларга қайтиб, унда ʔосил қилинган лимитлар хосила эканлигини билиш осон.

$$K=tq\alpha=\lim_{\Delta X \rightarrow 0} tq\beta=\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X} f'(X_0)$$

Демак, функция графигига обсциссаси X_0 нуктада булган нуктадаги утказилган уринманинг бурчак коэффициентини бу функциянинг X_0 нуктадаги хосиласига тенг.

$$K_{yp} = f'(X_0)$$

Моддий нукта вақтнинг t моментидagi туъри чизик буйича ʔаракатнинг σ -тезлиги S йулдан t вақт буйича олинган ʔосиладир.

$$\sigma = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S'(t)$$

$y=f(x)$ тенглама билан берилган эгри чизикни оъма уринмаси куйидаги тенглама билан топилади.

$$y-y_0=f'(X_0)(X-X_0)$$

Эгри чизикни M нуктасига утказилган нормали деб, M нуктада уринмага перпендикуляр булган туъри чизикга айтилади:

$$y-y_0=\frac{1}{f'(X_0)}(X-X_0), \quad f'(X_0) \neq 0$$

Мисол: $y=\sin X$ синусоидани абсциссаси тенг булган $X=\frac{\pi}{4}$ нуктасига утказилган уринма тенгламасини тузинг.

Ечинг: Агар $X=\frac{\pi}{4}$ булса, $y_0=\sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ M нуктани координати. M $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ га тенг.

$$\text{Демак } y-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(X-\frac{\pi}{4}\right)$$

V. Хосила мавжудлигини зарурий шарти.

$X=X_0$ нуктада $f(x)$ функция хосилага эга булса, бу нуктада функция дифференциаланувчи дейилади.

Агар $f(x)$ функция (a,b) интервални ʔар бир нуктасида дифференциаланувчи булса, шу интервалда дифференциаланувчи дейилади.

Теорема: Агар $y=f(x)$ функция $X=X$, дифференциаланувчи булса, у шу нуктада узлуксиз булади.

Исботи: Теорема шартига кура $y=f(x)$ функция $X=X$ нуктада хосилага эга, демак чекли.

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{f(X+\Delta X)-f(x)}{\Delta X} = f'(X) \text{ лимит мавжуд.}$$

Функция лимитни таърифидан, $\frac{f(X+\Delta X)-f(x)}{\Delta X} = f'(X) + \alpha(\Delta X), \alpha(\Delta X) \rightarrow 0,$

$\Delta X \rightarrow 0$ келиб чиқади.

Бу ердан $\Delta y = [f'(x) + \alpha(\Delta X)] \Delta X$

Агар $\Delta X \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ Демак $f(x)$ Функция $X=X$ нуктада узлуксиз экан.

Э с л а т м а: Баъзи нукталарда дифференциалланувчи булмаган узлуксиз функциялар мавжуд.

$f(x)=|X|$ функция $X \in (-\infty; +\infty)$ узлуксиз, лекин $x=0$ нуктада хосилага эга эмас. $y=|X|$ функция орттирма $\Delta y=|\Delta X|$ га тенг ва

$$\frac{Dy}{DX} \begin{cases} 1, \text{ агар } & DX > 0 \\ -1, \text{ агар } & DX < 0 \end{cases}$$

Демак, $\Delta y \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X}$ -мавжуд эмас (бу ерда $\Delta y \rightarrow 0$ га ихтиёрий равишда интилади).

Агар $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X}$ чекли булмаса, $X=X_0$ нуктада хосила мавжуд булмайди.

1. Функция аргументи орттирма.
2. Хосилани геометрик маъноси.
3. Хосилани меаника маъноси.
4. Хосилани таърифи.
5. Агар функция узлуксиз булса, у дифференциалланувчи буладими.
6. Эгри чизикга утказилган уринма ва норманли тенглама.
7. $X=X_0$ нуктада хосилани мавжудлигидан, $f(x)$ функция туърисиди кандай мулохазаларни айта оласиз ?
8. $X=X_0$ нуктада хосилани мавжуд эмаслигидан кандай мулохазаларни айта оласиз?

**БАЪЗИ ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАРНИ ХОСИЛАЛАРИ.
АСОСИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЛАШ КОИДАЛАРИ.**

Р Е Ж А.

1. Асосий элементар функцияни хосилалари.
2. Асосий дифференциаллаш коидалари.
3. Мураккаб функцияни хосиласи.
4. Логарифмик функцияни хосиласи.
5. Даражалаш ва курсатгичли функцияни хосиласи.
6. Тескари функцияни хосиласи.

1. Узгармас функцияни хосиласи.

$Y=0$ функция бутун бу сон укида узгармас кийматини саклангани учун ихтиёрий танланган X нуктада аргументнинг исталган ΔX орттирмасига функцияни нолга тенг булган Δy орттирмаси мос келади, демак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta X} = 0.$$

Бу ердан, $\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta X} = 0, C' = 0$

2. $Y = x^n (n \in \mathbb{N})$ -даражали функциянинг хосиласи.

X -ихтиёрий танланган функция нуктаси, ΔX -аргументнинг орттирмаси ва Δy -берилаган функцияни орттирмаси. У ғолда Нрютон биномига асосан.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n$$

$$\text{Демак, } \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2}\Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1}$$

Бу ердан $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}$

яъни $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $Y = \cos x$ функциянинг хосиласи x - аргументнинг иътиёрий танланган кийматига ΔX орттирма бериб, $\cos x$ функцияни орттирмасини ғосил киламиз.

$$\Delta Y = \cos(x + \Delta X) - \cos x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta X}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta X}{2} \right)}{\Delta X} =$$

Демак,

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta X}{2}}{\frac{\Delta X}{2}} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\Delta X}{2} \right) = - \sin x$$

4. Асосий дифференцияллаш қоидалари.

$U=U(x)$ ва $\vartheta=\vartheta(x)$ функциялар $x=x$ нуктада ҳосилага эга бўлсин.

а) Йииндиси ҳосиласи.

$$(U \pm \vartheta)^1 = U^1 \pm \vartheta^1$$

Ҳақиқатдан ҳам x га ΔX орттирма берайлик, у ҳолда $U=U(x)$ ва $\vartheta=\vartheta(x)$ функциялар мос равишда ΔU ва $\Delta \vartheta$ орттирмалар олади. $Y=U \pm \vartheta$ функцияни орттирмаси $\Delta y=(U(x+\Delta x)-U(x)) \pm (\vartheta(x+\Delta x)-\vartheta(x)) = \Delta U \pm \Delta \vartheta$ га тенг.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta x} = U^1 \pm \vartheta^1$$

Мисол.

$$y=x^3+\sin x, \quad y^1=3x^2+\cos x$$

б) Купайтманинг ҳосиласи.

$$(U \cdot \vartheta)^1 = U^1 \vartheta + \vartheta^1 U$$

x аргумент ΔX орттирма олса, у ҳолда U , ϑ ва $y=U \cdot \vartheta$ функциялар ҳам мос равишда ΔU , $\Delta \vartheta$ ва Δy орттирмаларни олади.

$$\Delta y=(U+\Delta U)(\vartheta+\Delta \vartheta)-U\vartheta=\vartheta\Delta U+U\Delta \vartheta+\Delta U\Delta \vartheta.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\vartheta \frac{\Delta U}{\Delta x} + U \frac{\Delta \vartheta}{\Delta x} + \frac{\Delta U}{\Delta x} \Delta \vartheta \right)$$

$U=U(x)$ ва $\vartheta=\vartheta(x)$ лар фиксирланган X да узгармас бўлгани учун уларни лимит ташкарига чиқариш мумкин. Шунинг учун

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \vartheta \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \pm U \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \vartheta^1$$

ва $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta \vartheta = 0$

Эътиборга олсак,

$$U y' = (U \vartheta)' = U' \vartheta + \vartheta' U \text{ келиб чиқади.}$$

Хусусий ҳолда, агар $\vartheta(x)=c$ ($c=\text{const}$) $(CU)'=CU'$

Демак, узгармас купйтувчини ҳосила белгиси ташқарисига чиқариш мумкин.

Мисол: $y=(7x^2+5x-3) \cos x$, $y'=?$

$$y'=(7x^2+5x-3)' \cos x + (7x^2+5x-3) (\cos x)' = (14x+5) \cos x - (7x^2+5x-3) \sin x.$$

в) Булинманинг ҳосиласи.

$$y = \frac{U(X)}{\vartheta(X)} \text{ функцияни қарайлик.}$$

Бу ерда $U(x)$ $\vartheta(x)$ функцияларни $x=x$ нуктада дифференциалланувчи бўлимидан ташқари, бу нуктада $\vartheta(x) \neq 0$ $y' = \frac{u\vartheta' - \vartheta u'}{\vartheta^2}$ эканлигини

курсатмайлик, ҳақиқатдан ҳам X ни ΔX орттирмасига, у ни

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{g + \Delta g} - \frac{u}{g} = \frac{g\Delta u - u\Delta g}{g(g + \Delta g)}$$

орттирмасы туъри келади.
У холда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(g + \Delta g)}$$

Лимитлар ъакидаги теоремани куллаб ($g(x)$ функцияни X нуктада узлуксизлигини эътиборга олсак, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta g \rightarrow 0$ эканлигини келиб чикади).

$$y' = \left(\frac{u}{g} \right)' = \frac{u'g' - g'u}{g^2} \text{ формулани оламиз.}$$

Мисол:

$$(tg' x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Мураккаб функцияни хосиласи.

Айтайлик, $y=f(u)$ ва $u=g(x)$ булсин. У ъолда, y мураккаб функция экан.

$$Y=f(g(x))$$

У-узгарувчи аргумент оралик ъисобланади. (Шуни эслатиб утиш керакки, иккинчи функцияни узгариш соъаси биринчи функцияни аникланиш соъасига киради).

$U = \varphi(x)$ функция x нуктада U' хосилага, $y=f(u)$ функция эса тегишли U нуктада $Y'u$ ъосилага эга булсин, y ъолда $y = f(\varphi(x))$ мураккаб функция ъам бу нуктада хосилага эга булади ва $y' = y'u \cdot U'$ формула билан топилади. X га Δx орттирма берайлик. У холда U ва Y ъам тегишли ΔU ва ΔY орттирмалар олади. Фараз килайлик, $\Delta x \rightarrow 0$ да Δu нолга тенг булмаган кийматларни кабул килсин. У ъолда куйидаги айният уринли.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta Y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta U}{\Delta x}$$

(1)

(1) да $\Delta x \rightarrow 0$ лимитга утамиз. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta u \rightarrow 0$ лимитга утамиз. Агар $\Delta x \rightarrow 0$ да $\Delta u \rightarrow 0$, чунки $U=g(x)$ $x=x$ нуктада узлуксиз

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Демак, $y'=Y'u$. U' келиб чикади.

Мисол: $y=\sin x^3$ функция мураккаб функциядир. $U=x^3$ белгилаш киритамиз ва $y=\sin U$ функцияни оламиз.

У холда

$$y'=(\sin U)'u'U'=\cos u \cdot 3x^2=3x^2 \cos x^3$$

4. Логорифмик функцияни хосиласи.

$Y = \ln x$, $x > 0$ функцияни ьосиласи $y' = \frac{1}{x}$ га тенг.

Хакикат ьам

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \ln \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$\Delta x \rightarrow 0$ нолга интилгандаги лимитга утказамиз. (Логарифмик узлуксизлигини эртиборга оламиз).

$$y' = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \ln \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \quad \text{Агар}$$

$y = e^{a \ln x}$ ($a > 0$, $a \neq 1$), булса, $y' = \frac{1}{x \ln a}$

Мисол: $y = \ln|x|$ функцияни хосиласини топйлик. Бу функция $x=0$ нуктадан ташкари барча нукталарда аникланган.

$$y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{аг ар } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{аг ар } x < 0 \end{cases}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ ва } (\ln(-x))' = \frac{-(x)'}{-x} = \frac{1}{x} \text{ келиб чикади. Демак, } (\ln|x|)' = \frac{1}{x};$$

5. Даражали ва курсатгичли функцияни ьосиласи.

А) $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\ln y = \alpha \ln x$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}, \quad y' = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Мисол: а) $y = \sqrt{2x^2 + 3x + 7}$,

$$y' = \frac{(2x^2 + 3x + 7)'}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 7}} = \frac{4x + 3}{2\sqrt{2x^2 + 3x + 7}}$$

б) $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$),

$\ln y = x \ln a$

$$\frac{y}{y} = \ln a, \quad y' = y \ln a = a^x \ln a$$

Агар $a = e$, $y = e^x$, $y' = e^x$

$$\text{Мисол: } y = \ln^{\sin^2 x}, \quad y' = \ln^{\sin^2 x} (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x \ln^{\sin^2 x} = \sin 2x \ln^{\sin^2 x}$$

6. Тескари функцияни хосиласи.

Узаро иккита $y=f(x)$ ва $x=\vartheta(y)$ функцияларни караймиз. Айтайлик $f(x)$ функция дифференцияланувчи ва $f'(x)\neq 0$, ва Δy мос равишда x ва y ни орттирмалари, у ьолда $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$;

Бу тенгликда $\Delta x \rightarrow 0$ лимитага утамиз, маълумки $f(x)$ функция дифференцияланувчи, эканлигидан узлуксизлиги елиб чиқади ва

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Демак, $xy' = \frac{1}{yx'}$

Мисол: $y=\arctg x$, у ьолда $x=tg y$

$$x'y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + tg^2 y = 1 + x^2, \quad y'x = \frac{1}{x'y} = \frac{1}{1+x^2} (\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

Бу ерда шуни эслатиб утиш керакки, $y=\arctg x$ функцияни тескари функцияси $x=\sin y$. Бу функция $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ интервалда монотон ва дифференциалланувчи, унинг ҳосиласи $X'=\cos y$ эса бу интервалда нолга айланмайди.

С а в о л л а р

1. $Y=2e^2$ функция ҳосиласини $X_0=3$ нуктадаги қийматини топинг.
2. $Y=2 \sin^2 x + e^{x^3}$ функция ҳосиласини топинг.
3. Агар $U(x)$ ва $\vartheta(x)$ функциялардан бирини $X=X_0$ нуктада ҳосиласи мавжуд бўлмаса, у $\frac{U}{\vartheta}$ функцияни $X=X_0$ нуктада ҳосиласи мавжуд бўладими.
4. Агар, $V(x)$ ва $U(x)$ функциялар $X=X_0$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, $V(x)\neq 0$, лекин $V(X_0')=0$ бўлса у $\frac{U}{V}$ функцияни $X=X_0$ нуктадан ҳосиласи мавжуд бўладими?
5. $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$ функциялар $X=X$ нуктада дифференциалланувчи $y=u\vartheta W$ функцияни ҳосиласини топинг.
6. $Y=\arcsin x$ функцияни ҳосиласини топинг.
7. $Y=f(u(x))$ мураккаб функцияни ҳосиласи мавжуд бўлиш учун, $U=U(x)$, $y=f(u)$ функциялар қандай шартларни бажариши керак.

ФУНКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛИ

Р Е Ж А

1. Функция дифференциал ва уни геометрик маъноси.
2. Функция дифференциалини хоссалари.
3. Мураккаб функцияни дифференциали. Дифференциал формасини инвариантлиги.
4. Функция дифференциалини такрибий хисобга тадбики.

1. $Y=f(x)$ функция $x=x$ нуктада хосилга эга булсин.

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ бу ьолда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, бу ерда $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$, агар $\Delta x \rightarrow 0$.

Демак, $\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$ Функция орттирмасини иккита йиьинди шаклда ифодаланади. Биринчи йиьинди. $f'(x)$ ва Δx лар нолга бир хил тартибда интилади, Δx нисбатан чизикли булади, бу кисмга функция орттирмасини бош кисми деб юритилади.

Иккинчи йиьинди, эса $\Delta x \rightarrow 0$ да Δx га нисбатан тезрок интилади, яъни юкори даражали чексиз кичик функция.

$$\left(\frac{\alpha(\Delta x) \Delta x}{\Delta x} = \alpha(\Delta x) \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0 \right)$$

Демак, функция $x=x$ нуктадаги орттирмасини Δx нисбатан чизикли бош кисм ва Δx нисбатан юкори даражали чексиз кичик кушилувчилар сифатида ифодалаш мумкин булса, яъни

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$$

(A - Δx га боълик булмаган сон, $\alpha(\Delta x) \Delta x \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$) Бу мулохазалардан куйидаги хулосага келамиз: Агар $f(x)$ функция $x=x$ нуктада хосилага эга булса, $x=x$ нуктада дифференциалланувчи булади: $A=f'(x)$.

Агар $f(x)$ функция $x=x$ нуктада дифференциалланувчи булса, $x=x$ нуктада хосилага эга булади. Ёакикатдан ёам, $x=x$ нуктада дифференциалланувчи у ьолда,

$$\Delta y = \Delta x + \alpha(x) \Delta x, \alpha(\Delta x) \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x), \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x)$$

Демак, $x=x$ нуктада функция дифференциалланувчи ва $x=x$ нуктада функция ьосилага эга, тушунчалар эквивалент тушунчалардан иборатдир.

Айтайлик, $f(x)$ функция $x=x$ нуктада дифференциалланувчи булсин. $F(x)$ функцияни $x=x$ нуктадаги дифференциали деб, унинг орттирмасини Δx нисбатан бош кисмга айтиади.

$Y=f(x)$ функцияни дифференциали dy ёки $df(x)$ деб белгиланади. Демак,

$$dy=f'(x) \Delta x$$

$\Delta y-dy=\alpha(\Delta x)$ Δx -чексиз кичик, Δx га нисбатан. Агар $y=x$ булса

$$dy=(x)' \Delta x=\Delta x \text{ тенг.}$$

Эркли узгарувчини дифференциали унинг орттирмасига тенг.

$$\text{У ьолда} \quad dy=f'(x)dx \quad dx=\Delta x \quad (1)$$

Шундай килиб $f(x)$ функцияни $x=x$ нуктадаги хосилани эркли узгарувчининг купйтмасига тенг экан. (1) тенгликдан

$$\frac{dy}{dx} f'(x) \text{ эканлиги келиб чикади.}$$

Демак, функцияни хосиласи унинг дифференциалланувчи эркли узгарувчининг дифференциалига нисбатига тенг экан.

$y=f(x)$ функцияни графигини карайлик. ΔMKL дан

$$KL=dy=tq=tq \propto \Delta x \text{ ёки } dy=y' \Delta x$$

Демак, $y=f(x)$ функцияни $x=x$ нуктадаги дифференциали уринманинг ординатасининг орттирмасига тенг экан.

2. Функция дифференциалини хоссалари.

$U=U(x)$ ва $\varphi=\varphi(x)$ функциялар дифференциалланувчи булсин. У ьолда куйидаги формулалар уринли.

$$1. d(u \pm \varphi) = (u \pm \varphi)' dx = U' dx = \varphi dx = du + d\varphi$$

$$2. d(u\varphi) = (u\varphi)' dx = (u' \varphi + u\varphi') dx = \varphi du + u d\varphi$$

$$\text{Хусусий ьолда: } d(Cu) = Cdu$$

$$3). d\left(\frac{u}{\varphi}\right) = \left(\frac{u}{\varphi}\right)' dx = \frac{\varphi du - u d\varphi}{\varphi^2} \quad (\varphi \neq 0)$$

3. Мураккаб функцияни дифференциали. Дифференциали формуласини инвариантлиги.

Айтайлик $y=f(x)$, $x=\vartheta(t)$, яъни y эрки узгарувчи t нинг мураккаб функциясидан иборат, x -оралик аргумент, $x=\vartheta(t)$ функция $t=t$ нуктада $y=f(x)$, функция $x=x$ нуктада ($t=t$ мос келувчи) дифференциалланувчи булсин.

У ьолда $y=f(\vartheta(t))$ мураккаб функция $t=t$ нуктада дифференциалланувчи булади.

У ьолда

$dy=y'_t dt$, мураккаб функцияни дифференциаллаш коидасига асосан $y'_t=y'_x x'_t$

Демак,

$dy = y'_x x'_t dt = f'(x)dx$, чунки $dx=x'_t dt$ $x=\vartheta(t)$,булган $y=f(x)$ мураккаб функциянинг дифференциали аргумент x эрки узгарувчи булгандаги каби

$dy=f'(x)dx$ куринишга эга.

Бу хоссага дифференциалнинг и н в а р и а н т формаси дейилади.

(Бу ерда шуни эслатиб утиш керакки, агар x эрки узгарувчи булса, $\Delta x=dx$, агар x бошка узгарувчига боълик булса, $dx \neq \Delta x$, дифференциални инвариантлиги сакланмайди).

(1) формуладан хосила учун $f'(x) \frac{dy}{dx}$ ифода x аргумент эрки узгарувчи

булмаганда ьам уз куринишини саклаши келиб чиқади.

4. Функция дифференциалини ткрибий ьисобга тадбики.

Функция дифференциалини таърифидан

$dy=f'(x) \Delta x$ -яъни функция орттирмасини бош кисмидан иборат.

Айрим масалаларни ечишда $\Delta y \approx dy$ деб олинади. ($f'(x) \Delta x \neq 0$ -каралаётган нуктада.)

Бу ьолда абсолют хато

$A=|\Delta y - dy|$ га тенг.

Нисбий хато.

$$\left| \frac{\Delta y - dy}{dy} \right| \text{ га тенг.}$$

$Yf(x)$ функциянинг X нуктадаги киймати ва хосиласини киймати маълум булсин, U ьолда $x=x+\Delta x$ нуктадаги кийматини

$$f(x) \Delta x \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

Мисол: 1 п 1.1. Ёисобланг.

$$\ln(x + \Delta x) \approx \ln x + \frac{\Delta x}{x};$$

Агар $x=1$, $\Delta x=0,1$ десак $\ln 1.1=0,1$.

С а в о л л а р

1. Функцияни $y=x$ нуктада хосилани мавжудлиги, уни дифференциалланувчи эканлигини билдирадими?
2. Дифференциални геометрик маъноси.
3. Функция дифференциали бидан унинг орттирмаси орасида кандай фарк бор.
4. Асоснинг радиуси 0,5 см га орттирганда баландлиги $H=40$ см ва асос радиуси $R=30$ см булган цилиндр ъажмини тақрибан орттишини ъисобланг.
5. $\cos 61^\circ$ ни тақрибий кийматини топинг .
6. $y=x^2 e^x$ функцияни дифференциаллигини топинг.

14 – МАЪРУЗА

ФУНКЦИЯНИ ТЕКШИРИШ

РЕЖА

1. Функцияни узиш камайиш шартлари.
2. Функцияни экстремуми, критик нукталари, экстремумни зарурий ва етарли шартлари.
3. Функцияни энг катта ва энг кичик киймати.
4. Функциялар графигини кавариклиги ва ботиклиги, бурилиш нуктаси.
5. Функцияни текширишни умумий схемаси.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Усувчи (камаювчи) функция, экстремум, максимум , минимум, критик нукталар, эгилиш нуктаси, каварик, ботик, огма, вертикал, горизонтал асимптоталар

Таъриф: Агар аргументнинг (а, в) ораликка тегишли катта кийматига функциянинг катта (кичик) киймати мос келса, яъни $x_2 > x_1$ тенгсизликдан, бунда

$x_1, x_2 \in (a, b)$ $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$) тенгсизлик келиб чиқса, у холда

$y = f(x)$ функция шу (а, в) интервалда усувчи (камаювчи) функция дейилади.

$x_2 - x_1 = \Delta x$; $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$ деб белгиласак, $\Delta x > 0$; усувчи функция

учун $\Delta y > 0$ демак $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$

Функцияни узиш ва камайишининг зарурий ва етарли шартларини хосилалар ёрдамида аниқлаймиз.

Теорема 1. (Функциянинг усувчи (камаювчи) булишининг зарурий шarti):

Агар (а, в) интервалда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция усувчи (камаювчи) булса, у холда бу функциянинг хосиласи интервалнинг ҳамма нуктасида манфий (мусбат) булмаслиги зарур, яъни барча $x \in (a, b)$ учун $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Исботи: а). Шартга кура функция усувчи, шунинг учун исталган $x \in (a, b)$: $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$

Δx

Мусбат функциянинг лимити манфий була олмайди:

Демак, ихтиёрий $x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ Иккинчи хол ҳам худди шу каби исботланади.

Теорема 2: (Функциянинг усувчи (камаювчи) булишининг етарли шarti):
Агар $[a, b]$ кесмада узлуксиз булган $y=f(x)$ функция хар бир ички нуктада мусбат
(манфий) хосилага эга булса, у холда бу функция $[a, b]$ кесмада Лагранжнинг чекли айирмалар формуласини тузамиз:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1) f'(c); \quad x_1 < c < x_2 \quad (1)$$

Шартга кура, $x \in (a, b)$ хар бир нуктада $f'(x) > 0$ шу сабабли $f'(c) > 0$ $x_2 - x_1 > 0$, шу сабабли (1) нинг унг кисми мусбат,

$$(x_2 - x_1) f'(c) > 0;$$

Демак, $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow x_2 > x_1$ булса $f(x_2) > f(x_1)$ бунда $f(x)$ функция $[a, b]$ да усувчи эканлиги келиб чиқади. Теорема исботланди.

1-мисол: $y' = 3x^6$ функциянинг монотоник интервалини топинг. $y' = 18x^5$

$x < 0$ да $y' < 0$ функция камаювчи

$x > 0$ да $y' > 0$ функция усувчи

2- мисол: $y = 2x - \cos x$ функциянинг монотонлик интервалларини топинг.

Ечиш: $y' = 2 + \sin x$

$x \in (-\infty, \infty)$ да $y' > 0$ – функция усувчи.

Функциянинг экстремум нукталари

1- Таъриф: Агар $y=f(x)$ функциянинг

x_0

нуктадаги киймати шу функциянинг бу нуктанинг етарлича кичик атрофидаги колган кийматидан катта булса,

$y=f(x)$ функция x_0 нуктада максимумга эга дейилади.

2- Таъриф: Агар $y=f(x)$ функциянинг

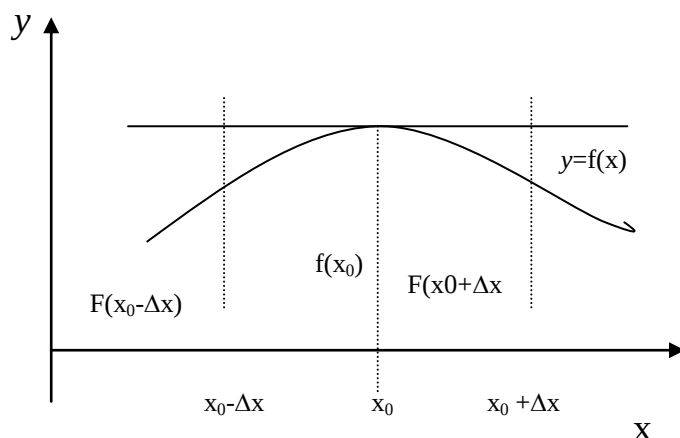
x_0

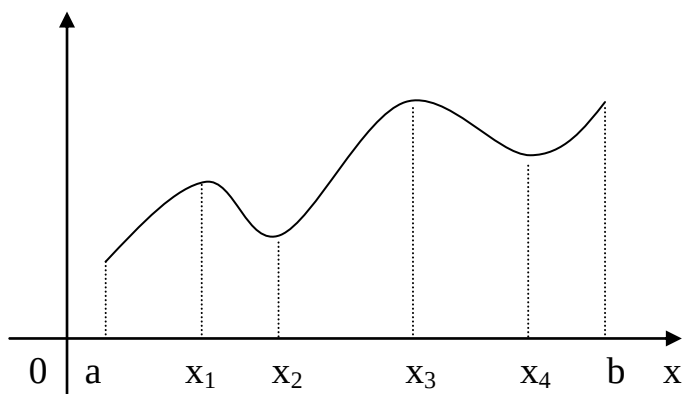
нуктадаги киймати шу функциянинг бу нуктанинг етарлича кичик атрофидаги кийматидан катта булса, у холда $y=f(x)$ функция x_0 нуктада минимумга эга дейилади.

1- Эслатма: Агар функциянинг $[a, b]$ кесмада аникланган булса, у холда бу функция узининг максимум ва минимумларига x нинг шу кесма ичидаги кийматларидагина эришади.

2- Эслатма: Агар функция $[a, b]$ кесмадаги максимум ва минимумлари хар бир доим хам унинг шу кесмадаги энг катта ёки энг кичик киймати булавермайди: максимум нуктада функция энг кичик кийматни максимум нуктасига етарлича якин нукталардаги кийматларига нисбатан(максимум нуктасининг кичик атрофида) гина

кабул килади; минимум нуктасига нисбатан хам шуларни айтиш мумкин. Максимум минимумдан кичик булиб колиши мумкин.





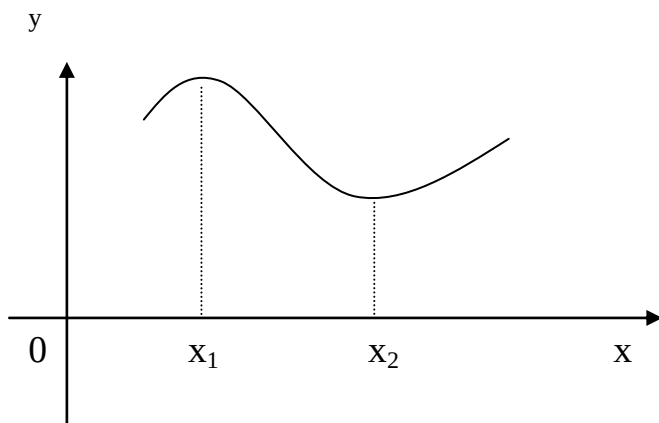
$x=x_1$ ва $x=x_3$ да –максимум
 $x=x_2$ ва $x=x_4$ да функция мини-
 мумга эга.
 $x=x_4$ даги минимум $x=x_1$
 даги максимумдан катта.

Функциянинг максимумлари ва
 минимумлари функциянинг
экстремумлари ёки экстремал
 кийматлари дейилади.

Экстремумнинг зарурий шартлари

1- Теорема: Агар дифференциалланувчи $y=f(x)$ функция x_0 нуктада экстремумга эга булса, у холда унинг шу нуктадаги хосиласи нолга тенг тенг булиши зарур, яъни $y = f'(x_0) = 0$

Теореманинг геометрик маъноси, дифференциалланувчи функция учун экстремум нукталарида уринма Ох уққа паралел булади.

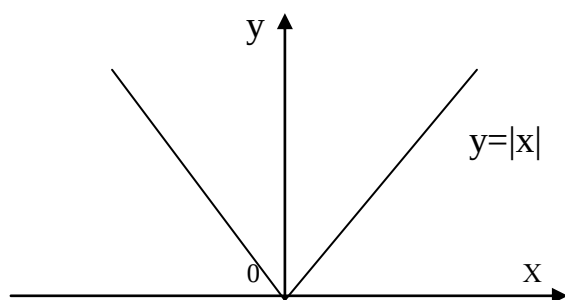


$$f'(x_1) = \operatorname{tg} 0 = 0$$

$$f'(x_2) = \operatorname{tg} 0 = 0$$

Дифференциалланмайдиган
 функция ҳамда экстремум
 нуктасида хосила чексиз ёки

мавжуд булмаслиги мумкин.



Мисол: $y=|x|$ функция уқнинг ҳамма
 ҳамма ерида узлуксиз, $x=0$ нуктада у
 нинг хосиласи мавжуд эмас, аммо
 бу нуктада минимумга эга.

Хулоса: Агар функция нуктада
 экстремумга эга булса, у холда
 хосила бу нуктада нолга тенг,

чексизликка тенг булади ёки мавжуд
 булмайди.

Бундай нукталарни критик нукталар дейилади.

Теорема: Агар x_0 критик нуктани уз ичига олувчи интервалда узлуксиз $y=f(x)$ функциянинг $f'(x)$ хосиласи x_0 нуктадан утишда ишорасини узгартирса, у холда «+» да «-» га алмашганда x_0 нукта максимум нуктаси, ишора «-» да «+» га алмашганда x_0 нукта минимум нуктаси булади.

$y=f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик кийматларини топиш учун :

- 1). Функциянинг критик нукталарини аниклаш;
- 2). Функцияларнинг критик нукталаридаги кийматларини ва кесманинг охирларида кийматларини топамиз;
- 3). Топилган кийматлардан энг катта ва энг кичик кийматларни танлаш керак, ана шу кийматлар функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик кийматларини ифодалайди.

Мисол: $y=x_3+3x_2-9x$ функциянинг $[-2; 5]$ кесмадаги энг катта ва энг кичик кийматларини аникланг.

Теорема: $f'(x_0)=0$ булиб, иккинчи хосила мавжуд ва $f''(x_0) \neq 0$ булса, максимум агар $f''(x_0) < 0$ булса максимум, агар $f''(x_0) > 0$ булса, минимум булади.

1- Таъриф: Агар дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг графиги узининг (a, b) интервалдаги хар кандай уринмасидан юкорида жойлашса, у холда бу функциянинг графиги каварик дейилади.

2- Таъриф: Агар дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг графиги узининг (a, b) интервалдаги хар кандай уринмасидан юкорида жойлашса, у холда бу функциянинг графикнинг эгилиш нуктаси дейилади.

1- Теорема: Агар (a, b) интервалнинг хамма нуктасида $f''(x_0) < 0$ булса, эгри ухолда интервалда $y=f(x)$ функциянинг графиги каварик булади

2- Теорема: Агар (a, b) интервалнинг хамма нуктасида $f''(x_0) > 0$ булса, ухолда бу интервалда $y=f(x)$ функциянинг графиги ботик булади.

3- Теорема: $f''(x_0) = 0$ булса, ёки $f''(x_0)$ мавжуд булса, уз ишорасини узгартирса, у холда абциссаси x_0 га тенг булган нукта $y=f(x)$ функция графигининг эгилиш нуктаси булади.

Таъриф: Агар $y=f(x)$ функциянинг графигини узгарувчи нуктаси чексиз узоклашганда ундан бирор тугри чизиккача булган масофа нолга интилса, бу тугри чизик $y=f(x)$ функция графигини АСИМПТОТАСИ дейилади.

1. Вертикал асимптоталар :

Графиклар яшашнинг умумий схемаси

1. Функциянинг аникланиш сохаси ва узилиш нукталарини топиш.
2. Функциянинг жуфтлигини, токлигини, даврийлигини текшириб куриш.
3. Графикнинг координата уклари билан кесишиш нукталарини аниклаш.
4. Функцияни ишораси сакланадиган интервалларни топиш.
5. Графикнинг асимптоталарини топиш.
6. Функциянинг монотонлик интерваллари ва экстремумларини топиш.
7. Кавариклик, ботиклик интервалларини ва эгилиш нукталарини топиш

Юкоридаги текширишлар асосида графикни чизамиз.

Узини текшириш учун саволлар.

1. Функцияни усувчи булишининг зарурий ва етарлилик шартларини исботлаш.
2. Функция камаювчи булишининг зарурий ва етарлилик шартларини исботланг.

3. Функция экстремум нукталарини, функциянинг экстремал кийматларини таърифланг.
4. Экстремумнинг зарурий шартини исботланг. Бу шартнинг етарлилик эмаслигини курсатувчи мисоллар келитиринг.
5. Функциянинг кесмадаги энг катта ва энг кичик кийматларини кандай топиш мумкин .
6. Иккинчи тартибли хосила ёрдамида функция экстремумининг етарлилик шarti нимадан иборат?
7. $y=f(x)$ функция графигининг кавариклик ва ботиклик таърифини хамда эгилиш нукталари таърифини беринг.
8. $y=f(x)$ функция ботиклиги характери билан функцияиккинчи хосила ишораси ораисдаги боғланиш хакидаги теоремани ифодаланг.
9. Эгилиш нукталари учун етарлилик шarti нимадан иборат?
10. $y=f(x)$ функция графигининг кавариклиги ва ботиклиги интерваллари ва эгилиш нукталари кандай топилади?
11. Чизик асимптотасининг таърифини ифодаланг. Кандай асимптоталар мавжуд?
12. Функцияни умумий текшириш ва графигини яшаш схемасини баён килинг.

15- МАЪРУЗА

ИНТЕГРАЛ. БОШЛАНГИЧ ФУНКЦИЯ. АНИКМАС ИНТЕГРАЛ ВА УНИНГ ХОССАСИ. АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР ЖАДВАЛИ.

РЕЖА

1. Бошлангич функция. Аникмас интеграл ва унинг хоссаси.
2. Асосий формулалар жадвали.
3. Интеграллашнинг энг оддий усуллари.
4. Булаклаб интеграллаш.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Бошлангич функция, функция, функцияни интеграллаш, интегралнинг асосий хоссалари, узгарувчиларни алмаштириш, булаклаб интеграллаш

1. Бошлангич функция. Аникмас интеграл ва унинг хоссаси.

$y=f(x)$ функция (a, b) интегралда берилган бўлсин.

$F(x)$ эса шу ораликда дифференциалланувчи функция бўлсин.

1-Таъриф. Агар $F(x)$ функциянинг ҳосиласи $F'(x)$ берилган $f(x)$ функцияга тенг бўлса,

$$F'(x) = f(x) \quad \text{ёки} \quad dF(x) = f(x) dx$$

бўлса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияси деб аталади.

Мисоллар: 1. $F(x) = x^2$ бўлсин. Бу функциянинг бошлангич функцияси

$$F(x) = \frac{1}{3} x^3 \text{ бўлади, чунки}$$

$$F'(x) = \frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3} 3x^2 = x^2 = f(x)$$

2. $f(x) = \cos x$ бўлсин. Бу функциянинг бошлангич функцияси $F(x) = \sin x$ бўлади, чунки

$$F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$$

Агар $f(x)$ функция (a, b) да узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция шу ораликда бошлангич функцияга эга бўлади.

$f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, у шу ораликда иккита $F(x)$ ва $\Phi(x)$ бошлангич функцияларига эга бўлсин.

Таърифга биноан $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$ бўлади.

Демак, $F'(x) = \Phi'(x)$

У ҳолда юқорида келтирилган натижага кура $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар бир-биридан узгармас сонга фрак килади

$$\Phi(x) = F(x) + C \quad (C - \text{const})$$

Демак, берилган $f(x)$ функциянинг бошлангич функциялари чексиз куп булиб, улар бир-биридан узгармас сонга фарк килади. Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошлангич функция булса, унда $f(x)$ нинг исъланган функцияси $F(x) + C$ ($C = \text{const}$) куринишда булади.

2-таъриф: Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияси булса, у холда $F(x) + C$ ифода $f(x)$ функциянинг аникмас интеграли дейилади ва $\int f(x) dx$ каби белгиланиб,

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \quad (C = \text{const}) \text{ куринишда ёзилади.}$$

Бу ерда $f(x)$ – интеграл остидаги функция

$F(x) dx$ – интеграл остидаги ифода

$\int$ - интеграл белгиси

x – интегралнинг узгарувчиси

$f(x)$ – бошлангич функциясини топиш амали функцияни интеграллаш дейилади .

Аникмас интегралнинг хоссалари.

1. Аникмас интегралнинг хосиласи интеграл остидаги функцияга тенгдир $(\int f(x) dx)' = f(x)$
2. Аникмас интегралнинг дифференциали интеграл остидаги ифодага тенгдир:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx$$

1 ва 2 хоссалар аникмас интеграл таърифидан келиб чикади.

3. Функция дифференциалининг аникмас интеграли у функциядаги ихтиёрий узгармасни кушилганига тенгдир $\int d[F(x)] = F(x) + C$

$$\text{Исбот: } \int d[F(x)] = \int F'(x) dx + C$$

4. Узгармас купайтувчини интеграл белгиси олдида чикариш мумкин, яъни $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

Исбот: интеграл таърифига асосан

$$[\int a f(x) dx]' = a f(x)$$

Иккинчи томондан

$$[a \int f(x) dx]' = a [\int f(x) dx]' = a f(x)$$

Шундай килиб $\int a f(x) dx = a \int f(x) dx$

5. Бир нечта функциянинг алгебраик йигиндисидан олинган аникмас интеграл шу функциялардан олинган интегралларнинг алгебраик йигиндисига тенг, яъни

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx$$

Исбот : таърифга асосан

$$(\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx)' = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)$$

Иккинчи томондан $(\int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx)' =$

$$= (\int f_1(x) dx)' + (\int f_2(x) dx)' - (\int f_3(x) dx)' = f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)$$

Натижа. Х узгарувчидан бошка и узгарувчига утилганда интеграл куруниши узгармайди, яъни

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

Асосий интеграллар жадвали.

$$\text{I. } \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$$

$$\text{II. } \int dx/x = \ln |x| + C \quad x \neq 0$$

$$\text{III. } \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\text{IV. } \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\text{V. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\text{VI. } \int e^x dx = e^x + C$$

$$\text{VII. } \int dx/\cos^2 x = \tan x + C$$

$$\text{VIII. } \int dx/\sin^2 x = -\cot x + C$$

$$\text{IX. } \int dx/(1+x^2) = \arctg x + C$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\text{XI. } \int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\text{XII. } \int \cot x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = 1/a \arctg(x/a) + C$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin(x/a) + C$$

$$\text{XV. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\text{XVI. } \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2} = (1/2a) \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

Бу интеграллардан бирининг, масалан

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C \quad \text{тугрилигини курсатамиз}$$

Интеграллаш усуллари.

1. Бевосита интеграллаш усули.
2. Дифференциал белгиси остига киритиш усули.

$$x = \varphi(u), \quad dx = \varphi'(u) du \text{ деб олсак} \\ \int f(x) dx = \int f[\varphi(u)] \varphi' du \text{ булади}$$

Бундай усул узгарувчини алмаштириш усули деб аталади. Содда холларда интеграл белгиси остидаги дифференциал ифодани куйида курсатилганидек:

$dx = (1/a) d(ax + b); \quad 2x dx = d(x^2) \quad \cos x dx = d(\sin x) \quad dx/x = d(\ln x)$
ва шунга ухшаш алмаштириб ва кавслвп ичидаги ифодаларни u деб фараз килиш асосида янги узгарувчи u ни киритиш амалини кунгилда бажариш тавсия килинади.

Бу усул билан интеграллаш бевосита интеграллаш дейилади.

$$1. \quad \text{Мисол: } \int \frac{Dx}{3-x} = -\int \frac{d(3-x)}{3-x} = -\ln |3-x| + C$$

$$2. \quad \text{Мисол: } \int \frac{dx}{1+(3x)^2} = 1/3 \int \frac{d(1+(3x)^2)}{1+(3x)^2} = 1/3 \arctg 3x + C$$

$$1+9x^2$$

$$1+(3x)^2$$

Булаклаб интеграллаш.

Бу усул икки функциянинг купайтмасини дифференциаллаш формуласидан келиб чиқади.

Фараз қилайлик, $u(x)$ ва $v(x)$ – x нинг дифференциалланувчи функциялари бўлсин. Бу функциялар купайтмасининг дифференциалини топамиз:

$$d(uv) = v du + u dv$$

бундан $u dv = d(uv) - v du$

Охирги тенгликнинг иккала қисмини интеграллаб, қуйидагини топамиз:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du$$

ёки $\int u dv = uv - \int v du$

Бу формула булаклаб интеграллаш формуласи дейилади/

Ушбу I $\int x^m \sin x dx$; $\int x^m \cos x dx$; $\int x^m e^x dx$

Типидаги интеграллар учун $x^m = u$

Колган купайтувчилар $= dv$ белгилаш қулайдир

II $\int x^m \ln x dx$; $\int x^m \arcsin x dx$; $\int x^m \arccos x dx$;
 $\int x^m \arctg x dx$; $\int x^m \operatorname{arccotg} x dx$;

типидаги интеграллар учун

трансцендент купайтувчи $= u$
 колган купайтувчилар $= dv$ } деб белгилаш қулайдир

III. $\int e^{ax} \sin bx dx$; $\int e^{ax} \cos bx dx$

Типидаги интеграллар учун

$e^{ax} = u$
 колган купайтувчилар $= dv$ } деб олиш қулайдир.

Мисол: $\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = u \quad du = dx/x \\ dx = dv \quad v=x \end{array} \right| = x \ln x - \int x \cdot (1/x) dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$

Уз-узини текшириш учун саволлар.

1. Берилган функциянинг бошлангич функцияси деб нимага айтилади?
2. Берилган функциянинг аникмас интеграли деб нимага айтилади?
3. Аникмас интегралнинг энг оддий хоссаларини ифодаланг.
4. Булаклаб интеграллаш усули ердамида амалга ошириш мақсадга мувофиқ бўлган интегралларнинг турларини айтинг.

5. Аникмас интегралда узгарувчини алмаштириш усули нимадан иборат?

АНИК ИНТЕГРАЛ ВА УНИ ХИСОБЛАШ ФОРМУЛАЛАРИ.**РЕЖА**

1. Аник интеграл, аник интегралнинг асосий хоссалари.
2. Аник интеграл хисобнинг асосий формуласи
3. Ньютон-Лейбниц формуласи.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Кесмада аникланган, узлуксиз, интеграл йигинди, куйи ва юкори чегаралар, эгри чизикли трапеция юзаси.

1. Иррационал функцияларни интеграллаш.

Куп холлар ирационал ифодалар катнашган интегралларни урнига куйиш усули билан рационал (хусусан рационал каср катнашган) интегралга келтиради.

Ушбу $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots)$ функиця $x, x^\alpha, x^\beta, \dots$ ни караймиз. Бунда $R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots)$ функция $x, x^\alpha, x^\beta, \dots$ ларнинг рационал функцияси. Бу ерда $\alpha = \frac{m_1}{m_2}, \beta = \frac{m_3}{m_4}, \dots$ рационал сонлар булиб, к уларнинг умумий махражи булса, у холда $x = t^k$ адмаштириш ёрдамида юкоридан интеграл рационал функцияни интеграллашга келади.

Ушбу $\int R(x, (ax+b)^\alpha, (ax+b)^\beta, \dots) dx; \int R(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^\alpha, (\frac{ax+b}{cx+d})^\beta, \dots) dx,$ интегралар эса $ax+b=t^k, \frac{ax+b}{cx+d}=t^k$ алмаштириш ёрдамида рационал функцияни интеграллашга келади.

Мисол. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$

Ечиш. $x=t^6$ алмаштиришни бажарамиз. $dx=6t^5 dt$ булади.

Демак. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{(1+t^2)t^3} = 6 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = 6 \int \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = 6 \int (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt = 6 \int dt - 6 \int \frac{1}{1+t^2} dt = 6(t - \arctg t) + c = 6(\sqrt[6]{x} - \arctg \sqrt[6]{x}) + c$

Бевосита интеграллаб топиладиган иррационал интеграллар, уларни $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + c$ ва $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + c$ каби жадвални иррационал интеграллага келтириб ёки тугридан-тугри топилади.

Масалан:

$$1. \int \sqrt{5x+1} dx = \int (5x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d(5x+1)}{5} = \frac{1}{5} \frac{(5x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{15} (5x+1)\sqrt{5x+1} + c$$

$$2. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + c$$

2. Аник интеграл, аник интегралнинг асосий хоссалари.

$y=f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада аникланган ва узлуксиз булсин. $[a,b]$ кесмани ихтиёрий равишда $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}, x_n=b$ нукталар ёрдамида хар бирини, шунингдек, унинг узлуксиз Δx_i ($i=1, 2, \dots, n$) оркали белгилайлик

$$\Delta x_1=x_1-x_0; \Delta x_2=x_2-x_1; \Delta x_3=x_3-x_2; \dots; \Delta x_i=x_i-x_{i-1}; \Delta x_n=x_n-x_{n-1}.$$

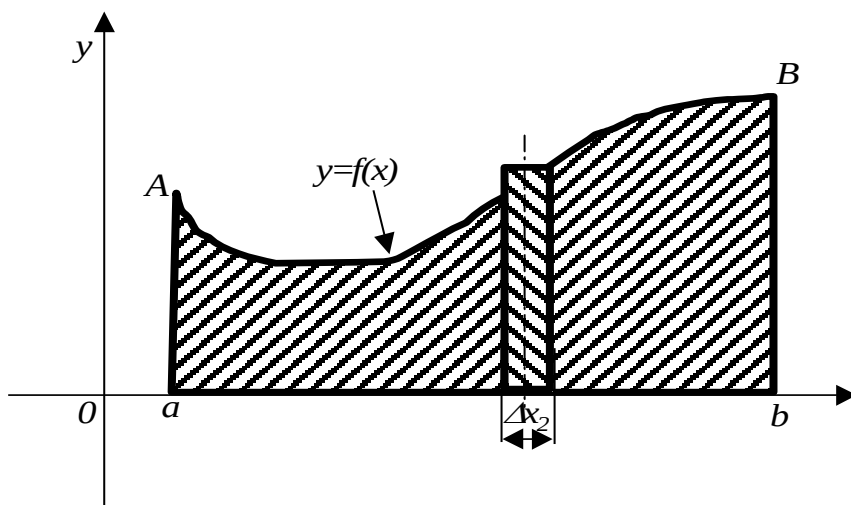
Бу булакларнинг хар бирида ихтиёрий $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n$ нукталарни оламиз ва $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ йигиндини тузамиз.

S_n йигинди $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги интеграл йигиндиси дейилади.

Таъриф. S_n интеграл йигиндисининг Δx_i кесмаларнинг энг каттаси нолга интилгандаги лимити $f(x)$ функциядан $[a, b]$ кесмада олинган аник интеграл дейилади. Яъни $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

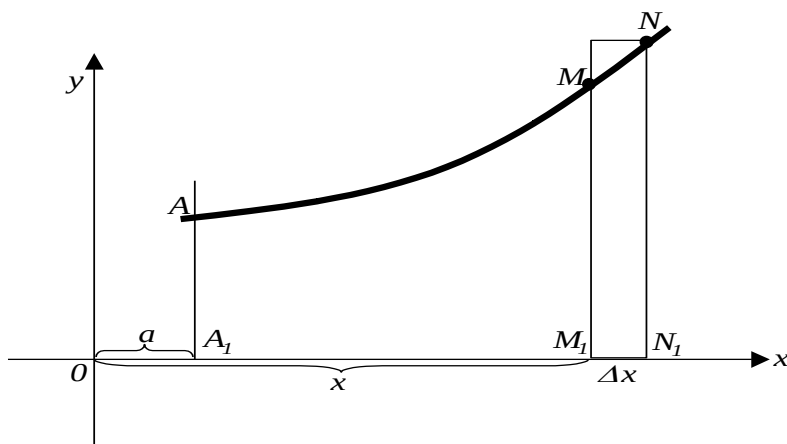
Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да узлуксиз булса, у холда лимит мавжуд булиб, у $[a, b]$ кесмани кисм кесмаларга булиш усулига ва ξ_i нукталарнинг танланишига боглик булмайди.

Агар $[a, b]$ ва $f(x) \geq 0$ булса, у холда аник интеграл а АВb эгри чизикли трапециянинг юзидан, яъни $x=a, x=b, y=0$ ва $y=f(x)$ чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзидан иборат булади.



$\int$ - интеграл белгиси, $f(x)$ - интеграл остидаги функция, x -интеграллаш узгарувчиси, $f(x)dx$ ифода интеграл остидаги ифода $[a, b]$ интервал интеграллаш интервали “ a ” ва “ b ” сонлари интеграллашнинг куйи ва бори чегаралари дейлади.

Куйидаги $x=a$ тугри чизик билан чегараланган, юкоридан эса чегараланмаган эгри чизикли трапецияни. Бу эгри чизикли трапециянинг юзини $\phi(x)$ билан белгилайлик.



(x) узгарувчи микдор булиб факат - $OM_1=x$ нинг (юкори чегаранинг) функциясидир.

Теорема. Кузгалувчи юкори томонли $A_1 A M M_1$ эгри чизикли трапеция юзини ифода этувчи $o(x)$ функция графиги бу трапецияни юкоридан чегараланган $y=f(x)$ нинг бошлангич функциясидир, яъни $o^1(x)=f(x)$ дир.

Исбот. $OM_1=x$; $M_1N_1=\Delta x$ орттирма, у холда $\phi(x)$ хам орттирма олади; $\Delta o(x)=(M_1M N N_1)$ юзи.

Чизмадан: $f(x) \cdot \Delta x < o(x) < f(x+\Delta x) \Delta x$ ёки $f(x) < \Delta o(x)/\Delta x < f(x+\Delta x)$ $\frac{\Delta \phi(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x)$

Бу тенгсизликнинг $\Delta x \rightarrow 0$ даги лимитини олсак

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi(x)}{\Delta x} = f(x) \quad \text{ёки} \quad \phi'(x) = f(x) \quad \text{ёки} \quad \phi(x) = \int f(x) dx$$

теорема исботланди.

$f(x)$ - бошлангич функция

$\phi(x)=f(x)+c$ (1) Аник интеграл таърифидан $\phi(x)=\int_a^x f(x)dx$ (2). (1) ва

($\lim=f(x)$ ёки $\phi'(x)=f(x)$ ёки $\phi(x)=\int f(x)dx$ 2) дан $\int_a^x f(x)dx=F(x)+c$ чизмадан $x=a$ да $\phi(a)=0$ ёки $F(a)+c=0$ ёки $c=-F(a)$.

Бунга кура $\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$. Агар аргументга тайин юкори чегара $x=b$ ни берсак $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Бу Ньютон-Лейбниц формуласидир. У аник интегрални аникмак интеграл билан боғлайди. Ньютон-Лейбнец формуласини бундай ҳам ёзиш мумкин:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Аник интеграл хоссалари.

Ньютон-Лейбниц формуласига кура аник интегралнинг куйидаги хоссаларини осонликча куриш мумкин.

1). Узгармас купайтувчини аник интеграл белгиси ташкарисига чиқариш мумкин.

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$$

2). Йигиндининг аник интегрални кушилувчилар аник интегралларининг йигиндиси тенг.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

3). Агар аник интеграл чегаралари алмаштирилса, унинг интеграл карама-каршисига узгаради.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

4). Чегаралари узаро тенг бўлган аник интеграл 0 га тенг.

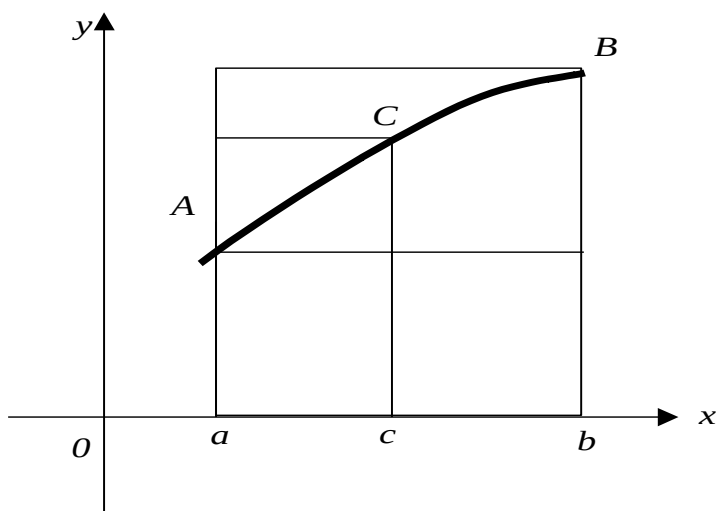
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5). $a < c < b$ учун $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ булади.

6). Агар интеграллаш узгарувчини алмаштирганда аник интегралнинг чегаралари ва интеграл остидаги функциянинг киймати узгармаса, у холда бундай узгаришдан интегралнинг киймати ҳам узгармайди: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$

7). Агар $f(x)$ $[a, b]$ ораликда аникланган ва бу функцияда узлуксиз функция булса, у холда $a \leq c \leq b$ буладиган шундай c нукта топиладики унинг

учун $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)$. Буни геометрик жихатдан



куриш осон $f(a)(b-a) < \int_a^b f(x)dx < f(b)(b-a)$ булиб, бирор $a \leq c \leq b$ буладиган c нукта учун $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ булади, бу ерда $\int_a^b f(x)dx$ ($aAbb$) эгри чизикли трапециянинг юзи.

Уз-узини текшириш саволлар

1. Куйидаги куринишдаги интегралларни топиш усуллари баён килинг $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots)dx$.
2. Кандай куринишдаги интегралларни топиш усуллари баён килинг $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+a}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+a}\right)^\beta, \dots)dx$.
3. Берилган кесмада берилган функциянинг аник интеграл деб нимага айтилади?
4. Аник интегралнинг энг содда хоссаларини ифодаланг.
5. Ньютон-Лейбниц формуласини ёзинг.

17 – МАЪРУЗА

АНИК ИНТЕГРАЛДА УЗГАРУВЧИЛАРНИ АЖРАТИШ. АНИК ИНТЕГРАЛ ЁРДАМИДА ТАКРИБИЙ ХИСОБЛАШ.

РЕЖА

1. Аник интегралда узгарувчиларни ажратиш.
2. Булаклаб интеграллаш.
3. Аник интеграл ёрдамида тақрибий ҳисоблаш.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Белгилаш киритиш, булаклаб интеграллаш, сегментда узлуксиз туртбурчаклар, трапециялар, параболалар усули.

1. Аник интегралда узгарувчиларни ажратиш.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз бўсин. Ушбу $\int_a^b f(x)dx$ интегрални ҳисоблаш талаб этилсин.

Бу интегралда $x=\varphi(t)$ деймиз. $\varphi(t)$ функция қуйидаги шартларни қаноатлантирсин.

- 1). $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ сегментда аникланган ва узлуксиз.
- 2). $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$.
- 3). $\varphi(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ сегментда узлуксиз $\varphi(t)$ ҳосилага эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t)dt$$

Мисол. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

Ечиш. $x=\sin t$
 $dx=\cos t dt, 1-x^2=\cos^2 t.$

Янги интеграллаш чегарасини аниклаймиз.

$x=0$ бўлганда $t=0$

$x=1$ бўлганда $t=\frac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

2. Булаклаб интеграллаш.

Фараз қилайлик, $u(x), v(x)$ функциялари $[a, b]$ кесмада дифференциалланувчи функциялар бўлсин. Уларнинг купайтмасини тузамиз ва ҳосиласини ҳисоблаймиз.

$(uv)' = u'v + v'u$ тенгликнинг иккала қисмини a дан b гача интеграллаймиз.

$$\int_a^b (u, v)' dx = \int_a^b u'v dx + \int_a^b v'u dx \quad (1)$$

$\int_a^b (uv)' dx = uv \Big|_a^b$. $u'x = du$ $v' dx = dv$ булгани учун (1) тенгликни бундай ёзиш мумкин.

$$uv \Big|_a^b = \int_a^b v du + \int_a^b u dv$$

Бундан $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. Бу формула аник интегрални булаклаб интеграллаш формуласи

Мисол. $\int_0^1 \arctg x dx$

$$\int_0^1 \arctg x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right\} = x \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} = \arctg 1 -$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+x^2| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

3. Аник интеграл ёрдамида таркибий хисоблаш.

$f(x)$ функция мураккаб булса (табiiйки, унинг бошлангич фанкциясини топиш кийин булади), унда берилган функциянинг интегралини тақрибий хисоблашга тугри келади.

I. Тугри туртбурчаклар формуласи.

$f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда берилган ва узлуксиз булсин. Бу функциянинг аник интегрални $\int_a^b f(x) dx$ кийматини тақрибий ифодаловчи формулани келтирамыз. $[a, b]$ сегменти $x_0=a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$ нукталар ёрдамида n та тенг булакка буламыз. Хар бир булакнинг узунлиги $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$) булади.

Берилган $f(x)$ функциянинг x_k нуктадаги киймати $f(x_k)$ ни хисоблаб, $f(x)$ нинг $[x_k, x_{k+1}]$ сегмент буйича аник интегрални

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx f(x_k) \Delta x_k = \frac{b-a}{n} f(x_k)$$

тақрибий ифодалаймыз. Бундай тақрибий формулани хар бир $[x_k, x_{k+1}]$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) сегментда нисбатан ёзиб, сунг уларни хадлаб кушамыз.

$$\int_a^{x_1} f(x) dx \approx f(x_0) \cdot \frac{b-a}{n}, \dots, \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx f(x_1) \cdot \frac{b-a}{n}, \int_{x_2}^{x_3} f(x) dx \approx f(x_2) \cdot \frac{b-a}{n}, \dots, \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \approx f(x_{n-1}) \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})]$$

Демак

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \text{ бу формула тугри}$$

туртбурчаклар формуласи дейилади.

II. Трапеция формуласи.

[a, b] сегментни n-та тенг булакка булиб, f(x) функциянинг [x_k, x_{k+1}] сегмент буйича олинган аник интегрални

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \Delta x_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \frac{b-a}{n} \text{ такрибий ифодалаймиз.}$$

Бундай такрибий формулани хар бир [x_k, x_{k+1}] (k=0,1,2 ... , n-1) сегментда ёзиб, кейин уларни хадлаб кушиб топамиз:

$$\int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n)] = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

$$\text{Демак } \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \text{ Бу формула}$$

трапециялар формуласи.

Параболалар симпсон формуласи f(x) функция [a,b] сегментда берилган ва узлуксиз булсин, [a, b] сегментни x₀=a < x₁ < x₂ < ... < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n}=b нукталар ёрдамида 2n та тенг булакка буламиз. f(x) функциянинг [x_{2k}, x_{2k+2}] сегмент буйича аник интегрални такрибий ифодалаймиз.

$$\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})].$$

Бундай такрибий формулаларни хар бир [x_{2k}, x_{2k+1}], (k=0,1,2, ... , n-1) сегментга нисбатан ёзиб, кейин уларни хадлаб кушамиз.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + (f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \dots + (f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))] = \frac{b-a}{n} [(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))].$$

Демак.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [(f(x_0) + f(x_{2n})) + 4(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})) + 2(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{2n-2}))]$$

Бу формула параболалар (Симпсон) формуласи дейилади.

Уз-узини текшириш учун саволлар.

1. Аник интегралда узгарувчининг алмаштириш усули нимадан иборат?
2. Аник интегралда буйлаб интеграллаш усули нимадан иборат?
3. Аник интегрални такрибий хисоблаш учун тугритуртбурчаклар формуласини ёзинг.
4. Аник интегрални такрибий хисоблаш учун трапециялар формуласини ёзинг.
5. Аник интегрални такрибий хисоблаш учун Симпсон формуласини ёзинг.

18-МАЪРУЗА

АНИК ИНТЕГРАЛНИ ГЕОМЕТРИК ТАДБИКИ. ЮЗАЛАРНИ ХИСОБЛАШ.

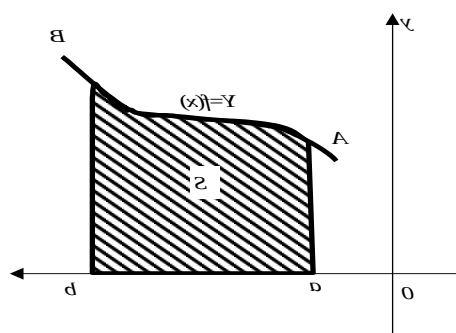
РЕЖА

1. Аник интегралнинг геометрик тадбири. Юзаларни хисоблаш.
2. Аник интегралнинг жисмлар ҳажмини хисоблашга тадбири.

ТАЯНЧ ИБОРАЛАР

Эгри чизикли трапециянинг юзи, юзани кутб координаталар системаси, цилиндрик жисмларнинг ҳажми.

- 1. Аник интегралнинг геометрик тадбири. Юзаларни хисоблаш.**
Юзни декарт координатарида хисоблаш.



1-расм

Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ сегментда узлуксиз ва мусбат булса, у холда асоси $[a, b]$ булган ва юкоридан бу функциянинг графиги билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзи

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx \quad (1)$$

формула билан топиш мумкин.

Энди $[a, b]$ сегментда $f(x) < 0$ булсин (2 расм). Асоси $[a, b]$ булган, куйидан $y=f(x)$ эгри чизик билан чегараланган эгри чизикли трапеция Ox укидан пастда ётади.

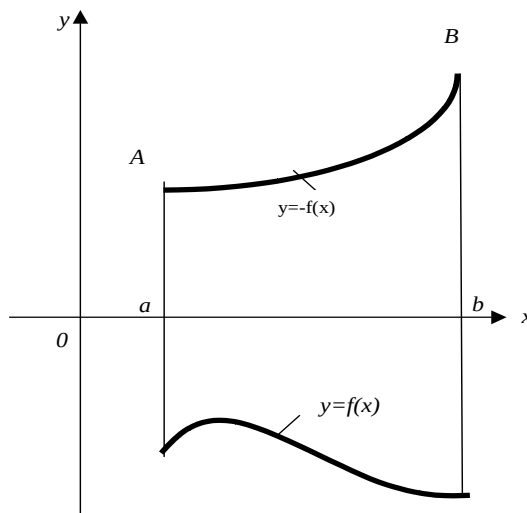
Симметрия хакидаги тасаввурларимизга кура унинг S юзи уша асосга эга булган, лекин юкоридан $y=-f(x)$ эгри чизик биланг чегараланган эгри чизикли трапеция юзига тенг. $f(x) < 0$ булгани учун $-f(x) > 0$ ва (1) формулани кулланиб, куйидагини топамиз.

$$S = \int_a^b [-f(x)]dx = - \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

(1) ва (2) формулаларни битта формула килиб бирлаштириш мумкин

$$S = \int_a^b |f(x)|dx \quad (3)$$

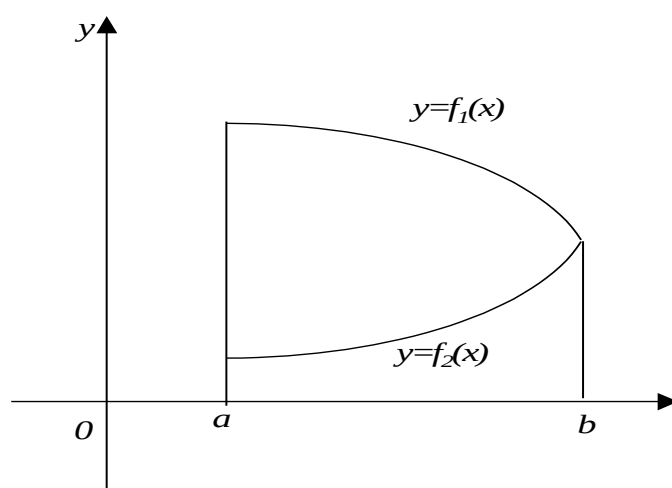
Бу формула $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ сегментда ишораси узгарадиган



2-расм.

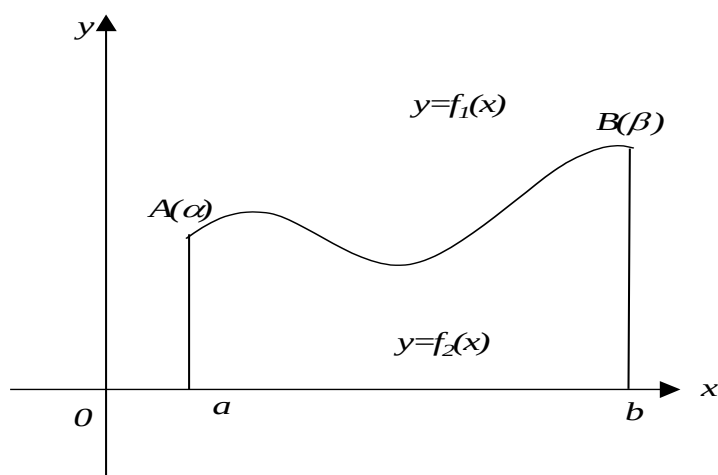
булганда хам, яъни у бу сегментда мусбат кийматларни хам, маний кийматларни хам кабул килганда хам уринли булиб колади.

Агар $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ эгри чизиклар хамда $x=a$ ва $x=b$ тугри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини хисоблаймиз, у холда $f_1(x) \geq f_2(x)$ шарт бажарилган фигуранинг юзи $S = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$



3-расм.

Агар эгри чизикли трапециянинг юзи $x=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$ параметрик шаклда берилган чизик билан чегараланган булса ($t \in [\alpha, \beta]$ ва $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$) у холда бу тенгламалар $[a, b]$ кесмадаги бирор $y=f(x)$ функцияни аниклайди (4-расм).



4-расм.

Эгри чизикли трапециянинг юзи $\int_a^b y dx$ формула буйича хисоблаш

мумкин. Бу интегралда узгарувчини алмаштирамиз:

$$x = \varphi(t); \quad dx = \varphi'(t) dt$$

$$y = f(x) = f(\varphi(t)) = \psi(t)$$

$$a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$$

$$S = \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

Бу формула чизик периметрик тенгламалар

билан биргаликда эгри чизикли трапециянинг юзини хисоблаш формуласидир.

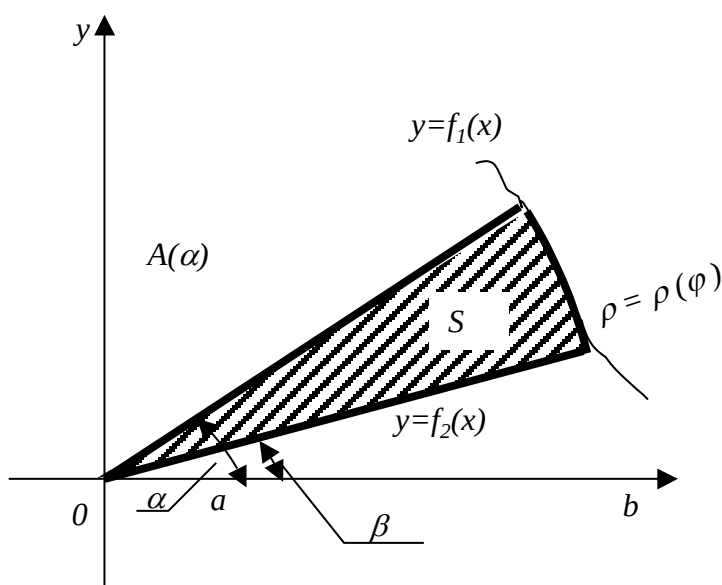
Фигуралар юзларини кутб координаталарда хисоблаш.

АВ эгри чизик кутб координатарида ($x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin(\varphi)$ $\rho = \rho(\varphi)$) формула билан берилган булсин, бунда $\rho(\varphi)$ функция $[\alpha, \beta]$ кемада узлуксиз.

$\rho = \rho(\varphi)$ тенглама билан берилган эгри чизик ва кутб уклари билан α хамда β бурчак хосил килувчи икки $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ нур билан чегараланган фигурани эгри чизикли сектор деб атайлик.

Эгри чизик секторнинг АОВ S юзи аник интегралга тенг. Яъни

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\varphi)]^2 d\varphi$$



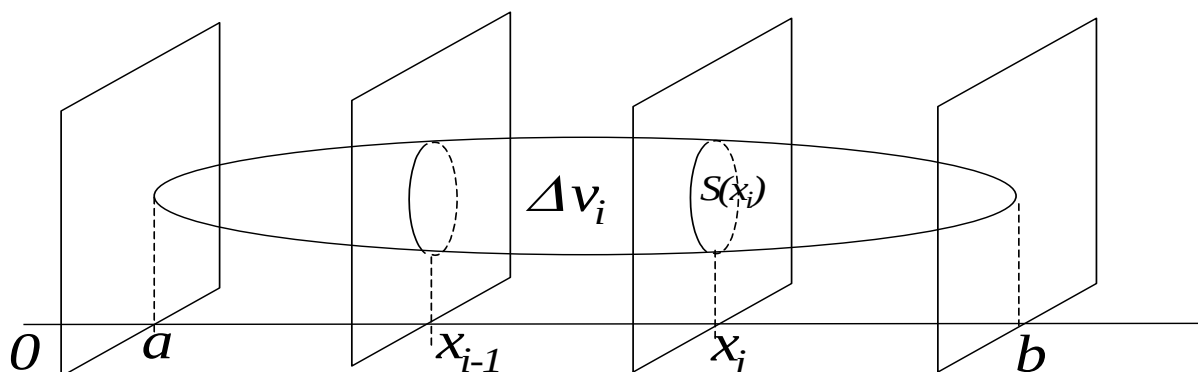
5-расм.

2. Аник интегралнинг жисмлар хажмини хисоблашга тадбики.

а). Жисмнинг хажмини кунгдаланг юзи буйича хисоблаш.

V -хажм аникланиши лозим булган хар бир жисмни караймиз. Бу жисмнинг Ox укига перпендикуляр текислик билан кесимини юзи маълум булсин. Бу кесимлар кунгдаланг кесимлар дейилади.

Кунгдаланг кесимни ҳолати унинг Ox ук билан кесишиш нуктасининг x абсциссаси билан аникланади.



6-расм.

x нинг узгариши билан кесим юзи узгаради. Кунгдаланг кесим x нинг функцияси $S=s(x)$ фарз қилайлик, $S(x)$ узлуксиз функция булсин. Жисмнинг V хажмини ҳисоблаш учун $[a, b]$ кесмани $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$ нукталар билан ихтиёрий булакка утказамиз (6-расм). Бу текисликлар жисмни n -та катламга ажратади, уларнинг хажмларини ΔV_i оркали белгилаймиз. У ҳолда

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i.$$

x_{i-1} ва x_i абсциссаси кесимлар ҳосил қилган битта катламни қараб чиқамиз. Унинг ΔV_i хажм баландлиги $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ асоси бирор ξ_i абсциссаси жисмнинг кесими билан мос тушадиган тугри цилиндрнинг хажмига тақрибан тенг, бунда $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ ва шунинг учун ҳам $S(\xi_i)$ юзага эга булади.

Бундай цилиндрнинг хажми $S(\xi_i)\Delta x_i$ га тенг $\Delta V_i \approx S(\xi_i)\Delta x_i$.

Берилган жисмнинг хажми учун қуйидаги тақрибий тенгликни ҳосил қиламиз. $V \approx \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$

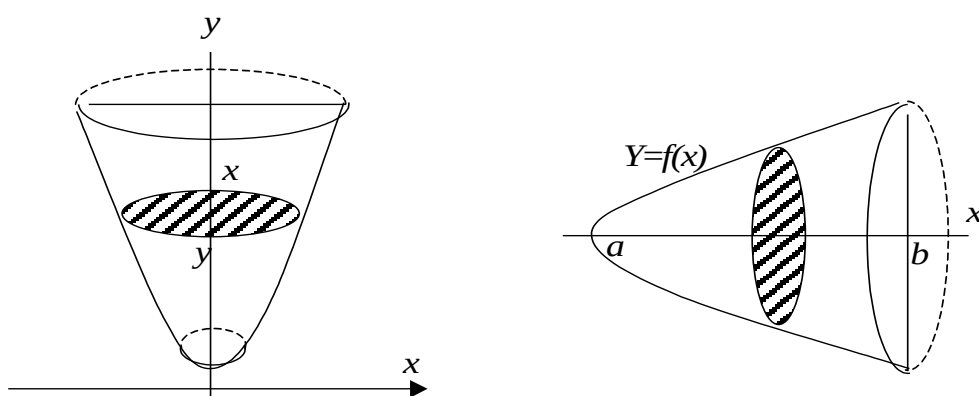
$[a, b]$ сегментни булиши қадами λ кичрайиб бориши билан бу тақрибий тенгликнинг аниқлиги ортиб боради. Шунинг учун хажмнинг аниқ қийматини булиш қадамига нолга келтириб ҳосил қиламиз.

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$$

$\sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$ йигинди $S(x)$ функциянинг интеграл йигиндисидир. Шунинг учун $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx$. Демак $V = \int_a^b S(x)dx$. $S(x)$ кунгдаланг кесим юзи, а ва b жисм кесими четки нукталарнинг абсциссалардир.

б). Айланиш жисмларини хажмини ҳисоблаш.

Агар каралаётган жисм $y=f(x)$ чизик билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг Ох ук атрофида айланишдан ҳосил булса, Ох укига перпендикуляр x абсциссаси кесим доирадан иборат булиб, унинг радиуси $y=f(x)$ ординатага мос келади (7-расм).



7-расм.

Бу ҳолда $S(x)=\pi y^2$ ёки $S(x)=\pi(f(x))^2$ ва Ох уки атрофида айланаётган жисмнинг хажми. $V=\pi \int_a^b y^2 dx$ ёки $V=\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. Оу уки атрофида айланаётган жисмнинг хажми $V=\pi \int_c^d x^2 dy$ ёки $V=\pi \int_c^d [\varphi(y)]^2 dy$ бунда $x=\varphi(y)$ айланиш жисми хосил килувчи чизикнинг тенгламаси $c \leq y \leq d$.

Уз-узини текшириш учун саволлар.

1. Чизиклар параметрик тенгламалар билан берилган ҳолда ясси фигураларнинг юзи Декарт координаталар қандай ҳисобланади?
2. Қутб координаталар системасида берилган эгри чизик билан чегараланган эгри чизикли секторнинг юзини ҳисоблаш формуласини ёзинг.
3. Жисмнинг маълум кунгдаланг кесими юзи бўйича хажми ҳисоблаш учун формуласини ёзинг.
4. Айланиш жисмлари хажмини ҳисоблаш учун формула келтириб чиқаринг.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЕТЛАР РУЙХАТИ.

1. Д.Искандаров Олий алгебра I том. Укувпеддавнашр 1960й.
2. Г.М.Фихтингольс Математик анализ асослари. Т. «Укитувчи» 1972й.
3. Н.С.Пискунов Дифференциал ва интеграл хисоб. I ва II том. М. “Наука” 1976й.
4. В.Е.Шнейдер, А.И.Слущский, А.Е.Шумов Олий математиканинг киска асослари. I ва II том. М. “Высшая школа” 1978
5. Е.У.Соатов Олий математика. I ва II жилд. Т. “Укитувчи” 1992й.