АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

На правах рукописи
УДК 517.958

ДУРДИЕВ ДУРДИМУРАТ КАЛАНДАРОВИЧ

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СРЕД С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ташкент – 2010 год

Работа выполнена в Институте математики СО РАН и на кафедре «Дифференциальные уравнения» физико-математического факультета Бухарского государственного университета им. Ф. Хаджаева

Научный консультант:
член - корреспондент РАН,
доктор физ.–мат. наук, профессор В.Г. Романов

Официальные оппоненты:
Доктор физ.-мат. наук, профессор А. Хайдаров
Доктор физ.-мат. наук, профессор Ж.О. Тахиров
Доктор физ.-мат. наук, профессор А.Б. Хасанов

Ведущая организация - Институт Вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН

Защита состоится ___ _________ 2010 г. в ____ часов в конференц-зале на заседании Специализированного Совета Д.015.17.01 при Институте математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и информационных технологий Академии наук Республики Узбекистан.

Автореферат разослан ___ _________ 2010 г.

Ученый секретарь Специализированного Совета,
к. ф.-м. н. А.А. Заитов

1. Общая характеристика диссертации

Актуальность работы. Задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений и систем по некоторой дополнительной информации об их решении имеют большое практическое значение. Искомыми коэффициентами, как правило, являются такие важные характеристики исследуемых сред как параметры Ламе и плотность - в случае обратной задачи теории упругости; тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости и тензор проводимости - в случае обратной задачи электродинамики; скорость распространения волн в среде и плотность - в случае обратной задачи акустики и т. д.

Обратные задачи определения ядра интегрального оператора в интегро-дифференциальных уравнениях гиперболического типа - сравнительно молодое направление в теории обратных задач, возникшее в конце 80 - тых годов прошлого столетия. При определенных условиях в уравнения распространения упругих и (или) электромагнитных волн добавляются волтерровы операторы типа свертки которые описывают явления "запаздывания" или памяти. Например, в быстропеременных электромагнитных полях, частоты которых не ограничены условием малости по сравнению с частотами, характерными для установления электрической и магнитной поляризации вещества нарушается однозначная зависимость D и B (индукции электрического и магнитного полей соответственно) от значений E и H (напряженности соответствующих полей) в тот же момент времени. Оказывается, что значения D и B в данный момент времени зависят не только от E и H, но и от всей предыстории действия этих полей (такую среду называют средой с последействием). Это обстоятельство является выражением того, что установление электрической и магнитной поляризации вещества не успевает следовать за изменением электромагнитного поля. Наиболее общий вид линейной зависимости между $D(x,t)$, $B(x,t)$ и соответствующими значениями функций $E(x,t)$, $H(x,t)$ во все предыдущие моменты времени может быть написан в виде интегральных соотношений

$$D(x,t) = \varepsilon E + \int_0^t \varphi(t-\tau)E(x,\tau)d\tau, \quad B(x,t) = \mu H + \int_0^t \psi(t-\tau)H(x,\tau)d\tau, \qquad (0.1)$$

$$E = (E_1, E_2, E_3), H = (H_1,\ H_2, H_3), D = (D_1, D_2, D_3), B = (B_1, B_2, B_3),\ x = (x_1, x_2, x_3),$$

$\varphi(t) = diag\left(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\right)$, $\psi(t) = diag\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3\right)$ - диагональные матричные функции, представляющие память. Эти функции конечны при всех значениях своего аргумента и стремятся при $t \to \infty$ к нулю. Последнее обстоятельство является выражением того факта, что на значения $D(x,t)$, $B(x,t)$ в данный момент времени не могут заметно влиять значения $E(x,t)$, $H(x,t)$ в очень давние моменты. Физический механизм, лежащий в основе интегральных зависимостей вида (0.1), заключается в процессах установления электро-магнитной поляризации. Поэтому интервал значений, в котором функции

$\varphi(t), \psi(t)$ заметно отличаются от нуля, - порядка величины времени релаксации, характеризующего скорость этих процессов.

Другое применение уравнений с памятью возникает в геофизике, когда свойства среды исследуются при помощи сейсмических волн. Фактически согласно предположением о гладкости система уравнений для неупругой модели Больцмана (одной наиболее общих для линейной неупругой среды) сводится к уравнению

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + \sigma^{-1}(x)\sigma'(x)u_x(x,t) +$$
$$+\omega(x)\int_0^t k(t-\tau)\left(u_{xx}(x,\tau) + \sigma^{-1}(x)\sigma'(x)u_x(x,\tau)\right)d\tau, \quad (x,t) \in R\times\left[0,T\right]. \quad (0.2)$$

Функции σ и ω, в этом уравнении, связаны с параметрами Ламе и плотностью рассматриваемой среды. Полагая σ и ω постоянными ($\omega = 1$), уравнение (0.2) можно привести к виду

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + \int_0^t k(t-\tau)u_{xx}(x,\tau)d\tau, \quad (x,t) \in R\times[0,T]. \qquad (0.3)$$

Уравнение вида (0.3) с интегральным членом типа свертки, в дальнейшем называется уравнением с памятью. Среда, в которой протекает соответствующий волновой процесс принято назвать средой с последейст-вием или с памятью. Исследование обратных задач определения ядра интегральных операторов в равенствах (0.1) и (0.2) по некоторой инфор-мации о волновом поле играет важную роль при изучении строения и свойства среды. В приложениях важны задачи с дельта – образными источ-никами сосредоточенными в окрестности фиксированной точки или на границе области. Именно такие задачи и рассматриваются в этой диссертационной работе.

Степень изученности проблемы. Обратные задачи для гиперболических уравнений относятся к некорректным задачам математической физики. Общий подход к решению некорректных задач был сформулирован А. Н. Тихоновым и развит в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова, В. Я Арсенина, В. Г. Романова, Ю. Е. Аниконова, В. А Морозова, А. И. Прилепко, А. Д. Искендерова, А. Л. Бухгейма, С. И. Кабанихина, В. Г. Яхно и др.

По типу дополнительной информации, задаваемой относительно решения прямой задачи, обратные задачи для гиперболических уравнений можно разделить на три основные группы: кинематические, спектральные и динамические. В кинематических обратных задачах в качестве дополь-нителной информации задаются времена прихода возмущений от источников к поверхности исследуемой среды. При этом измерения могут проводиться как на всей поверхности, так и на некоторой ее части; источники возмущений могут пробегать всю поверхность либо распологаться внутри исследуемой среды. Одномерная обратная кинематическая задача была решена Г. Герглотцем в начале прошлого века. Начиная с работы Г. Герглотца и В. Вихерта обратные кинематические задачи стали объектом исслодования многих авторов. Различные постановки обратных кинематических задач были сформулированы и исследованы М. М. Лаврентьевым, В. Г. Романовым, Ю. Е. Аниконовым, А. Л. Бухгеймом, Р. Г. Мухометовым, М. Л. Гервером и В. М. Маркушевичем, А. Х. Амировым и др.

В спектральных обратных задачах в качестве дополнительной информации задаются собственные значения соответствующих дифференциальных операторов и квадраты норм соответствующих собственных функций. В работах И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана, М. Г. Крейна, В. А. Марченко, Л. Д. Фаддеева и других авторов исследован широкий класс спектральных обратных задач, получены теоремы существования и единственности решения. К спектральным постановкам можно отнести и такие обратные задачи, в которых в качестве дополнительной информации задается преобразование Фурье по времени от решения соответствующей прямой задачи для гиперболического уравнения.

В динамических обратных задачах в качестве дополнительной информации задается след решения соответствующей прямой задачи на некоторой, как правило времениподобной, поверхности. Первые постановки динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем были сформулированы и исследованы М. М. Лаврентьевым и В. Г. Романовым, А. С. Благовещенским, А. С Алексеевым. Систематическое исследование динамических обратных задач для гиперболических уравнений и систем было проведено В. Г. Романовым. Методика доказательства локальных теорем существования и единственности решения обратных динамических задач, а также теорем единственности и условной устойчивости "в целом", развитая В. Г. Романовым, была применена в исследовании широкого круга обратных задач С. П. Белинским, В. Г. Яхно, С. И. Кабанихиным, Т. П. Пухначёвой. Разумеется, приведенная классификация не является всеобъемлющей и в известной степени условна, поскольку во многих публикациях используются различные комбинации динамических постановок со спектральными и кинематическими. Иногда используют классификацию обратных задач по искомым функциям или рассматриваемым уравнениям.

Связь обратных задач с уравнениями Вольтерра использовалась в самых ранних работах по теории обратных задач. С основными результатами в этой области можно познакомиться в монографиях М. М. Лаврентьева, В. Г Романова, А. Л. Бухгейма, С.И. Кабанихина. Основная идея метода операторных уравнений Вольтерра в применении к обратным динамическим задачам для гиперболических уравнений заключается в том, что для многих гиперболических уравнений известны интегральные представления решений в виде интегральных уравнений вольтерровского типа. Используя эти представления, а также дополнительную информацию о решении прямой задачи, можно получить операторное уравнение Вольтерра относительно искомых коэффициентов.

В работах М.Грассели, А.Лоренци, С.И. Кабанихина, А.Л. Бухгейьма, в основном, исследовались одномерные обратные задачи определения ядра интегрального члена в интегродифференциальных гиперболических и параболических уравнениях с распределенными источниками возмущения. Изучение таких задач для линейных интегродифференциальных уравнений гиперболического типа с сосредоточенными (дельта – образными) источниками локализованными в окрестности фиксированной точке или на поверхности рассматриваемой области проведено в настоящей работе.

Рассматриваемые в этой работе динамические обратные задачи для дифференциальных уравнений состоят в определении функции памяти среды по некоторой информации об обобщенных решениях этих уравнений. Здесь посредством обобщенных решений описываются процессы распространения упругих или электромагнитных волн, возникающих от источников типа импульсных направленных "ударов" или "взрывов". Рассматриваемые обобщенные решения дифференциальных уравнений, как правило, являются фундаментальными решениями.

Задача восстановления свойств среды по данным, полученным в результате измерения свойств рассеянного излучения на границе, возникает во многих разделах естественной науки. В последнее время наблюдается повышенный интерес к задачам определения предыстории среды, в которой протекает тот или иной волновой процесс. По-видимому, это вызвано с более точной степени моделированием каких-либо физических полей, процессов, или явлений (электромагнитных, акустических, сейсмических, тепловых и т.п.). Изучение обратных задач для вновь возникших уравнений требует новые постановки задач и методы их исследований.

Связь диссертационной работы с тематическими планами Н И Р. Тема диссертационной работы Дурдиева Д.К. «Обратные задачи для сред с последействием» утверждена на ученом совете Бухарского государственного университета и выполнена с плановой тематикой кафедры «Дифференциальные уравнения».

Цель исследования. Основной целью настоящей диссертационной работы является построение методов решения одномерных и многомерных обратных динамических задач для гиперболических уравнений в средах с последействием, а также исследование единственности, устойчивости и существования решения этих обратных задач.

Для достижения поставленной цели:

-Поставлены и исследованы прямые и обратные задачи для интегродифференциальных уравнений второго порядка с гиперболическим оператором в главной части.

-Изучены обратные задачи определения ядра памяти из системы уравнений термоупругости в вертикально – неоднородной несвязной среде с памятью.

-Исследованы многомерные обратные задачи определения ядра памяти среды аналитическое по части пространственных координат и гладкое по временной переменной.

-Поставлены и изучены обратные задачи одновременного определения двух неизвестных функций из гиперболического уравнения второго порядка в среде с памятью. Исследованы обратные задачи о нахождении нестационарных характеристок среды.

Задачи исследования. Основными задачами исследования являются:

-Изучение однозначной разрешимости обобщенной задачи Коши для гиперболического интегродифференциального уравнения с постоянной главной частью и с переменными коэффициентами при младших производных. Исследование обратной задачи нахождения ядра интегрального члена по известному в точке $x = 0$ решению прямой задачи.

-Исследование начально-краевой задачи для системы уравнений термоупругости в вертикально-неоднородной несвязной среде с памятью. Решение обратной задачи определения ядра памяти по заданному в точке $x = 0$ решению прямой задачи.

-Изучение начально-краевой задачи для интегродифференциального многомерного волнового уравнения с импульсной функцией по t и аналитической по $x \in R^n$ условием Неймана на границе полупространства. Исследование прямой и обратной задач в пространстве функций аналитических по пространственным переменным и гладких по временной переменной. Изучение выше задач с уравнением, когда память умножена на вторую производную по времени и дифференциальный оператор первого порядка по переменной x, коэффициенты которого являются действительными аналитическими функиями. Исследование дифференциальных свойств решения прямой и обратной задач.

- Постановка и исследование обобщенной задачи Коши для двумерной системы уравнений Максвелла с памятью, а также изучение обратной задачи нахождения двумерного ядра памяти среды по известному на плоскости $x_3 = 0$ одному из компонентов электрического поля.

-Исследование глабольной разрешимости прямых и обратных задач для одномерных и многомерных волновых уравнений с сосредоточенными источниками возмущения.

-Изучение обратных задач одновременного определения двух неизвестных в начально-краевой задаче для волнового уравнения с мгновенно действующим импульсным источником.

- Исследование прямых и обратных задач нахождения нестационарных характеристок среды из гиперболического уравнения второго пор-ядка.

Объект и предмет исследования: Объектом исследования являются одномерные и многомерные прямые и обратные задачи для интегродифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка и системы уравнений Максвелла с памятью.

Методы исследования: Однозначная разрешимость прямых задач доказана заменой задачи с интегральным уравнением второго рода Вольтеровского типа и последующим применением метода последовательных приближений. Доказательство локальной разрешимости обратных задач проводится на основе метода сжимающих отображений примененного к системе интегральных уравнений эквивалентной обратной задачи. Оценки устойчивости устанавливаются методом оценок интегральных уравнений и последующим применением неравенства Гронуолла. А также в работе использованы другие методы математического анализа и уравнений математической физики.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Результаты по дифференциальным свойствам решения обобщенной задачи Коши для интегродифференциального уравнения гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в главной части и с переменными коэффициентами при младших производных. Теоремы существования, единственности и условной устойчивости обратной задачи определения ядра памяти.
- Локальная однозначная разрешимость и оценка устойчивости обратной задачи определения ядра памяти из системы уравнений термоупругости в вертикально – неоднородной несвязной среде.
- Локальная однозначная разрешимость и оценка устойчивости многомерных обратных задач определения ядра памяти среды, аналитических по части пространственных координат и гладких по временной переменной.
- Глобальная разрешимость задач об определении одномерного ядра памяти среды из волновых уравнений разной размерности для полупространства и пространства в классе функций с экспоненциальным весом.
- Теоремы локальной и глобальной однозначной разрешимости и оценки устойчивости задач одновременного определения двух неизвестных коэффициентов.
- Результаты по локальной разрешимости оценки устойчивости задач определения нестационарных характеристик среды из гиперболических уравнений второго порядка. Теоремы единственности в целом.

Научная новизна.

- Исследованы дифференциальные свойства решения начально – краевой задачи для трехмерного интегродифференциального волнового уравнения в полупространстве R^3_+ с нулевым условием на границе с сосредоточенным источником возмущения. Доказаны теоремы существования, единственности и условной устойчивости обратной задачи определения ядра памяти по известному в точке $x=0$ решению прямой задачи.
- Исследована обобщенная задача Коши для интегродифференциального уравнения гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в главной части и с переменными коэффициентами при младших производных. При этом возмущения среды исходит от мгновенного точечного источника, расположенного в начале координат. В обратной задаче требуется определить ядро памяти среды по заданному в точке $x=0$ решения прямой задачи. Доказаны теоремы локальной однозначной разрешимости и установлена оценка условной устойчивости обратной задачи.
- Доказаны теоремы однозначной разрешимости обратной задачи определения ядра памяти из системы уравнений термоупругости в вертикально – неоднородной несвязной среде заполняющей

полупространства R_+^3 с мгновенным источником на границе. Установлена оценка условной устойчивости обратной задачи.

- Получены теоремы локальной однозначной разрешимости многомерных обратных задач определения ядра памяти среды, аналитических по части пространственных координат и гладких по временной переменной. Прямую задачу представляет начально – краевая задача для n+1 - мерного интегродифференциального волнового уравнения с мгновенно действующим источником на границе. Установлены оценки условной устойчивости обратных задач. А также исследованы вопросы локальной однозначной разрешимости нахождения ядра памяти, стоящей при первой, второй производных по временной переменной от решения прямой задачи в волновом уравнении. Доказана теорема локальной однозначной разрешимости подобной задачи с уравнением когда ядро умножено на дифференциальный оператор первого порядка по переменной x, коэффициенты которого являются действительными аналитическими функциями.

- Исследованы вопросы глобальной разрешимости задач об определении одномерного ядра памяти среды из волновых уравнений разной размерности для полупространства и пространства в классе функций с экспоненциальным весом. С введением эквивалентных весовых норм доказаны теоремы глобальной разрешимости обратных задач. А также выписаны оценки условной устойчивости.

- Доказаны теоремы локальной и глобальной однозначной разрешимости задачи одновременного определения двух неизвестных коэффициентов, один из которых представляет ядро памяти в интегродифференциальном уравнении второго порядка гиперболического типа, а другой определяет скорость распространения звука. А также исследована подобная задача с неизвестным источником возмущения. Получены оценки условной устойчивости .

- Исследованы вопросы локальной разрешимости задач определения нестационарных характеристик среды из гиперболических уравнений второго порядка. Доказаны теоремы глобальной единственности и условной устойчивости.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Они могут быть использованы для дальнейшего развития теории обратных и некорректных задач для уравнений математической физики.

Реализация результатов. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть рекомендованы для использования специалистам по обратным и некорректным задачам математической физики.

Апробация научных результатов диссертации. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались

на семинаре кафедры высшей математики Новосибирского государственного университета (руководитель: чл. корр. В.Г.Романов); на семинаре

«Обратные задачи геоэлектрики» (Институт Математики СО РАН, руководители: чл. корр. РАН В.Г. Романов, профессор С.И. Кабанихин); на семинаре лаборатории «Волновых процессов» (Институт Математики СО РАН, руководитель: чл. корр. РАН В.Г. Романов); на городском семинаре «Современные проблемы теории уравнений в частных производных» (Институт Математики и информационных технологий, АН РУз, руководитель: академик АН РУз М.С. Салахитдинов); на семинаре «Современные методы математической физики» (Национальный университет Узбекистана, руководитель: академик АН РУз Ш.А. Алимов); на семинаре кафедры «Дифференциальные уравнения» (Бухарский государственный университет, руководитель: доцент Х.Х. Ахмедов); на Республиканской научной конференции «Новые теоремы молодых математиков» (Наманган, 1994 г, 2003 г.); на международной конференции «Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа» (Ташкент, 2004 г.); на международной конференции «Современные проблемы математической физики и информационных технологий» (Ташкент, 2005 г.); на международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (Самара, 2008 г.); на международной конференции «Дифференциальные уравнения, Функциональные пространства, Теория приближений» (Новосибирск, 2008 г.).

Опубликованность результатов. Все результаты диссертации опубликованы в работах [144-173] в виде журнальных статей и тезисов конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Каждая глава разбита на параграфы. Объем диссертации 249 страниц, включая 6 страниц цитированной литературы. Список литературы содержит 173 наименований. Нумерация формул двойная: первая цифра указывает на номер главы, вторая - на номер формулы в ней.

2. Основное содержание диссертации

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, дан краткий анализ исследуемых проблем. Определены цели и задачи исследований, отличена научная новизна и практичная значимость работы и обзор литературных источников по теме диссертации.

В первой главе рассматриваются обратные задачи о нахождении одномерных ядер памяти среды, входящих в интегральные члены гиперболических уравнений второго порядка. Проведенные исследования посвящаются получению теорем об однозначной разрешимости и оценкам непрерывной зависимости изменения решения обратной задачи от изменения информации.

Рассматривается обобщенная задача Коши

$$u_{tt} - Lu = \int_0^t k(\tau)u(x, t-\tau)d\tau + \delta(x,t),$$
$$u|_{t<0} = 0, \tag{1}$$
где $t \in R^1, x \in R^3$, L - дифференциальный оператор, имеющий вид
$$Lu = \Delta u + \sum_{i=1}^{3} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \quad \Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right);$$
$\delta(x,t)$- дельта функция Дирака, $b_i(x)\ (i = 1,2,3)$, $c(x)$ - заданные гладкие функции своих аргументов.

Обратная задача заключается в определении функции $k(t)$, $t > 0$, по известному в точке $x = 0$ обобщенному решению задачи Коши (1)
$$u(0,t) = f(t), \quad t > 0. \tag{2}$$

Определение. Функция $k(t) \in C[0,\infty)$ (из класса непрерывных функций) называется решением обратной задачи (1), (2), если соответствующее ей решение задачи (1) $u(x,t) \in D'(R^4)$ (из класса обобщенных функций) удовлетворяет равенству (2) при $f(t) \in D'[0,\infty), b_i(x) \in D'(R^3)$, $i = 1,2,3$, $c(x) \in D'(R^3)$.

Оказывается, что решение задачи (1) состоит из суммы сингулярной и регулярной функций. При этом регулярная часть решения является гладкой функцией, если данные задачи достаточно гладки.

В первом параграфе главы 1 задача (1), (2) изучена в полупространстве $R_+^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 > 0\}$ с нулевым условием Неймана на границе ∂R_+^3 при $L \equiv \Delta$. Одним из важных результатов здесь является теорема о локальной разрешимости обратной задачи (1), (2).

Теорема 1.1. Пусть $f(t) \in C^1(0,T]$ и $f(+0) = 0$. Тогда найдется $T^* \in (0,T]$, такое, что на $(0,T^*]$ существует единственное непрерывное решение обратной задачи (1), (2).

Во втором параграфе второй главы исследована обратная задача (1), (2) при отличных от нуля функций $b_i(x)\ (i = 1,2,3)$, $c(x)$. Аналогом теоремы 1.1 здесь является следующая теорема существования и единственности в малом:

Теорема 1.4. Пусть $b_i(x) \in C^3[G_T], i = 1,2,3$, $c(x) \in C^1[G_T]$, $f(t) \in C^1[0,T]$, $G_T = \{x : |x| \le T\}, T > 0\}$ и выполнено условие согласования
$$c(0) + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{3}{4}b_i^2(0) - 2b_{ix_i}(0)\right] = 8\pi f(+0). \tag{3}$$
Тогда найдется $T^* \in (0,T]$, такое, что на $(0,T^*]$ решение обратной задачи (1), (2) существует и $k(t) \in C(0,T]$.

Приведем оценку условной устойчивости решения обратной задачи (1), (2). Для этого определим множество $\Phi(T, c_0)$ для данных функций (b, c, f)

обратной задачи, для которых $b_i(x)\in C^3\left[G_T\right], i=1,2,3,\ c(x)\in C^1\left[G_T\right]$, $f(t)\in C^1[0,T]$, $\max\left\{\|b\|_{C^3[G_T]},\ \ \|c\|_{C^1[G_T]}\right\}\le c_0$ и выполнено соотношение (3). Введем множество $K(T,k_0)$ решений обратной задачи, для которых $k(t)\in C\left(0,T\right]$ и $\|k\|_{C(0,T]}\le k_0$.

Теорема 1.6. Пусть $\left\{(b^1,c^1,f^1),(b^2,c^2,f^2)\right\}\in \Phi(T,c_0)$. Тогда для соответствующих решений $k^1(t),k^2(t)\in K(T,k_0)$ обратной задачи (1), (2) имеет место оценка

$$\left\|k^1(t)-k^2(t)\right\|_{C[0,T]}\le d\left\{\left\|b^1-b^2\right\|_{C^3[G(T)]}+\left\|c^1-c^2\right\|_{C^1[G(T)]}+\left\|f^1-f^2\right\|_{C^1[0,T]}\right\},$$

где $d=d(T,c_0,k_0)=const.$

В третьем параграфе главы 1 исследована однозначная разрешимость обратной задачи для системы уравнений термоупругости в вертикально-неоднородной несвязной среде с памятью.

Для $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3, t\in R, x_3>0$ рассматривается система дифференциальных уравнений несвязной динамической термоупругости с памятью

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\int_0^t h(\tau)u_i(x,t-\tau)d\tau,\quad i=1,2,3, \tag{4}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t}=k\Delta H, \tag{5}$$

где $H(x,t)$ - приращение температуры, Δ - оператор Лапласа по переменным (x_1,x_2,x_3), а $u(x,t)=(u_1(x,t),u_2(x,t),u_3(x,t))$ - вектор смещений, $h(t)$ - скалярная функция, характеризующая память среды, σ_{ij} - напряжения, для которых согласно закону Гука имеет место представление

$$\sigma_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\left[\lambda divu-(3\lambda+2\mu)\int_0^{H(x,t)}\alpha(y)dy\right].$$

Здесь δ_{ij} - символ Кронекора, $divu=\sum_{i=1}^{3}\partial u_i/\partial x_i$. В систему дифференциальных уравнений (4), (5) входят k - коэффициент температурапроводности, ρ - плотность среды, λ,μ - параметры Ламе, α - коэффициент теплового расширения среды. Далее считается, что $k>0$ постоянной; $\rho=\rho(x_3),\mu=\mu(x_3),\quad \lambda=\lambda(x_3)$- функциями одной переменной x_3, удовлетворяющими условиям $\rho(x_3)>0,\mu(x_3)>0,\lambda(x_3)+2\mu(x_3)>0.$

Система уравнений (4), (5) рассматривается со следующими начальными и граничными условиями:

$$u_i\,|_{t<0}\equiv 0,\quad i=1,2,3, \tag{6}$$

$$H\,|_{t<0}\equiv 0, \tag{7}$$

$$\sigma_{3j}\,|_{x_3=+0}=\nu\delta'(t),\quad \nu=colon(0,0,1),\quad j=1,2,3, \tag{8}$$

$$\left.\left(\frac{\partial H}{\partial x_3}-\gamma H\right)\right|_{x_3=+0}=-\gamma(T_1-T_0)\theta_1(t), \qquad (9)$$

где T_1, T_0, γ - постоянные, $T_1 > T_0, \gamma > 0;$ $\theta_1(t) = t\theta(t), \theta(t) = 1,$ при $t \geq 0,$ $\theta(t) = 0,$ при $t < 0;$ $\delta'(t)$ - производная дельта - функции Дирака. В обратной задаче требуется найти функцию $h(t),\ t \in [0,T],\ T > 0,$ входящую в уравнение (4) по известному решению задачи (4)- (9):

$$u_3(0,t) = g(t),\ t \in [0,T]. \qquad (10)$$

При этом функции $\alpha(y), \rho(x_3), \lambda(x_3), \mu(x_3)$ и постоянные k, γ, T_0, T_1 считаются заданными.

Предполагается, что функция $g(t)$ имеет следующую структуру:

$$g(t) = -a(0)\delta(t) + g_0(t)\theta(t), \qquad \text{где}$$

$a(y) = \left\{\left[\lambda(\tau^{-1}(y)) + 2\mu(\tau^{-1}(y))\right]\rho(\tau^{-1}(y))\right\}^{-\frac{1}{2}},$ $x_3 = \tau^{-1}(y)$ - функция обратная к $y = \tau(z) \equiv \int_0^z \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad v(\xi) = \sqrt{\frac{\lambda(z) + 2\mu(z)}{\rho(z)}}.$

Теорема 1.7. Пусть $g_0(t) \in C^2\left[0,T\right], \rho(z) \in C^3\left[0, \tau^{-1}(T/2)\right],$ $\lambda(z) \in C^3\left[0, \tau^{-1}(T/2)\right],$ $\mu(z) \in C^3\left[0, \tau^{-1}(T/2)\right], \alpha(y) \in C\left[0, Y\right],$

$$Y = \tilde{H}\left(T/2, T/2\right) = \theta(t)(T_1 - T_0) \times$$

$$\times \int_0^t \left[erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{k\tau}}\right) - \exp(\gamma z + \gamma^2 k\tau) erfc\left(\frac{z}{2\sqrt{k\tau}} + \gamma\sqrt{k\tau}\right)\right] d\tau,$$

$erfc(z) = 1 - erf(z), erf(z) = (2/\sqrt{\pi})\int_0^z \exp(-\xi^2)d\xi, z = x_3.$

Кроме того, выполнены условия согласования

$$2g_0(0) = a'(0), \quad 2g_0'(0)a(0) - a'g_0(0) = -a^2(0)\left[S''(0) - 2(S'(0))^2\right],$$

где $\quad S(y) = \sqrt{\frac{a(y)}{a(0)}}.$

Тогда найдется $T^* \in \left(0, T\right]$ такое, что на отрезке $\left[0, T\right]$ существует единственное решения обратной задачи (4) – (10) $h(t) \in C\left[0, T^*\right].$ В этом параграфе также получен аналог теоремы 1.6.

Вторая глава посвящена изучению многомерных обратных задач. Вводится шкала банахово пространство $A_s(r)$, $s > 0$, функций $\varphi(x)$, $x \in R^n$, аналитических в окрестности начало координат, для которых справедливо соотношение

$$\left\|\varphi\right\|_s = \sup_{|x|<r} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{s^{|\alpha|}}{\alpha!}\left|D^\alpha \varphi(x)\right| < \infty.$$

Здесь $r > 0,\ s > 0$ и

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}},\ \alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n), \quad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n, \quad \alpha! = \alpha_1!...\alpha_n!.$$

Рассматривается начально-краевая задача

$$u_{tt} - u_{zz} - \Delta u = \int_0^t k(\tau, x) Mu(x, z, t-\tau) d\tau, \quad (x,t) \in R^{n+1}, \quad z > 0, \tag{11}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad u_z|_{z=0} = \delta'(t) + h(x,t)\theta(t), \quad (x,t) \in R^{n+1}, \tag{12}$$

где Δ - оператор Лапласа по переменным $(x_1, x_2, ..., x_n) = x,\ M$ - некоторой дифферециальный оператор, вид которого приводится при конкретных задачах, рассмотренных в первом и втором параграфах этой главы.

В обратной задаче требуется определить функцию $k(t,x), t > 0, x \in R^n$, если решение задачи (11), (12) известно для $z = 0$:

$$u|_{z=0} = F(x,t), \quad (x,t) \in R^{n+1}. \tag{13}$$

При этом функция $h(x,t)$ считается известной. Показывается, что для разрешимости обратной задачи функция $F(x,t)$ должна иметь следующую структуру:

$$F(x,t) = -\delta(t) + f(x,t)\theta(t),$$

где $f(x,t)$ - известная регулярная функция. Метод исследования позволяет одновременно найти функции $u(x,z,t)$, $k(t,x)$. Поэтому в дальнейшем обратную задачу удобно трактовать как задача определения функций $u(x,z,t)$, $k(t,x)$ из соотношений (11)-(13).

Пусть $D_T = G_T \times R^n, G_T = \{(z,t) \,|\, 0 \le z \le t \le T - z\},\ T > 0.$ Через $C_{(z,t)}\left(G_T; A_{s_0}\right)$ обозначим класс функций, непрерывных по переменным (z,t) в области G_T со значениями в A_{s_0}. При фиксированных (z,t) норму функции $g(x,z,t)$ в A_{s_0} будем обозначать через $\|g\|_{s_0}(z,t)$. Норма функции g в $C_{(z,t)}\left(G_T;\ A_{s_0}\right)$ определяется равенством

$$\|g\|_{C_{(z,t)}\left(G_T; A_{s_0}\right)} = \sup_{(z,t)\in G_T} \|g\|_{s_0}(x,t).$$

В первом параграфе главы 2 обратная задача (11)-(13) исследуется в случае когда оператор M совпадает с тождественным оператором. Основным результатом этого параграфа является

Теорема 2.1. Пусть $f(x,+0) = 0,\ f_t(x,+0) = -h(x,+0)$. Кроме того,

$$\left(f(x,t), h(x,t), f_t(x,t), h_t(x,t), f_{tt}(x,t)\right) \in C_t\left([0,T]; A_{s_0}\right),$$

$$\max\left\{\|f\|_{s_0}(t),\ \max\left(1, \frac{T}{2}\right)\|h\|_{s_0}(t), \|f_t\|_{s_0}(t)\right\} \le \frac{R}{2},$$

$$\max\left\{\|f_{tt}(t)\|_{s_0},\ \|h_t\|_{s_0}(t)\right\} \le \frac{R}{16},\ t \in [0,T],\ R > 0.$$

Тогда найдется такое $a\in(0,T/2)$, что для любого $s\in(0,s_0)$ в области $\Gamma_{sT}=D_T \bigcap \{(x,z,t)\,|\,0\le z\le a(s_0-s)\}$ существует единственное решение обратной задачи (11)-(13), для которого

$$\left(u(x,z,t),v(x,z,t)\right)\in C_{(z,t)}\left(P_{sT};A_{s_0}\right)$$

$$k(t,x)\in C_t\left([0,a(s_0-s)];A_{s_0}\right),\ P_{sT}=G_T \bigcap \{(z,t)\,|\,0\le z\le a(s_0-s)\},$$

причем

$$\|u-u_0\|_s(z,t)\le R,\quad \|k-k_0\|_s(z)\le\frac{R}{(s_0-s)^2},\quad \|v-v_0\|_s(z,t)\le\frac{R}{s_0-s},\ (z,t)\in P_{sT},$$

где $v(x,z,t)\equiv u_t(x,z,t),\quad u_0(x,z,t)=\frac{1}{2}\left[f(x,t+z)+f(t-z)\right]+\frac{1}{2}\int_{t-z}^{t+z}h(x,\tau)\,d\tau,$

$$k_0(x,z)=8\left[f_{tt}(x,t)+h_t(x,t)\right]_{t=2z},\qquad v_0(x,z,t)=(\partial/\partial t)u_0(x,z,t).$$

Во втором параграфе главы 2 обратная задача (11)-(13) исследована для случая $M\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}$. Через $C_z^i\left(A_s,G\right)$ обозначим класс функций, непрерывно - дифференцируемых i - раз по переменной z и непрерывных по t в области G, со значениями в A_s.

Приведем теорему локальной однозначной разрешимости.

Теорема 2.4. Пусть $f(x,0),\ f_t(x,t)|_{t=0},\ f_{x_i}(x,0),\ i=1,...,n,\ \Delta f(x,0),g(x,0)$ принадлежат $A_{s_0},\ s_o>0$, а $f(x,t)$, $f_t(x,t),\ f_{tt}(x,t),\ g(x,t),\ g_t(x,t)$ принадлежат $C(A_{s_0},[0,T])$, и

$$\max\left[\ \|f(x,t)\|_{s_0}(t),\|w_0\|_{s_0}(z),\|h_0(x,z)\|_{s_0}(z),\left\|k^0(x)\right\|_{s_0}\right]=R,$$

для

$$(z,t)\in G_T:=\{(z,t)\,|\,0\le t\le z\le T\}.$$

Тогда для произвольного $\chi>0$ найдется число $a=a(s_0,T,R,n),\ as_0<T$ такое, что для любого $s\in(0,s_0)$ существует единственное решение задачи (11) - (13)

$$\vartheta(x,z,t)\in C_z^1\left(A_{s_0},D_s\right),k(x,t)\in C_t^2\left(A_{s_0},\ [0,a(s_0-s)]\right),$$

где $D_s=\{(z,t)\,|\,0\le t\le z<a(s_0-s)\}$, и для решение имеют место следующие неравенства

$$\|\vartheta-\vartheta_0\|_s(z,t)\le\chi,\ \left\|k-k^0\right\|_s(z)\le\frac{2\chi}{(s_0-s)},$$

где $\quad w_0(x,z)=(1/2)f_t(x,t)|_{t=z}+(1/2)\exp[-k_0(x)t/2]g(x,t),$

$$h_0(x,z)=2f(x,0)\exp[-f(x,0)z]g(x,z)-2\exp[-f(x,0)z]g_t(x,t)|_{t=z}+$$
$$+(1/2)\Delta f(x,0)-H(x,z)f(x,z)-\Delta f(x,z)-2z\left(\nabla f(x,0),\nabla f(x,z)\right)-$$
$$-2f_{tt}(x,t)|_{t=z}+(z/2)\sum_{i=1}^{n}f_{x_i}^2(x,0),$$

$$\vartheta_0 = f(x,z), \quad k^0 = k_0(x) + zk_{0t}, \quad (z,t) \in D_s.$$

В этом параграфе также исследованы обратные задачи (11)-(13) с операторами $M \equiv \dfrac{\partial}{\partial t}$ и $M \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \dfrac{\partial}{\partial x_i} + c(x)$, где $b_i(x), i = 1,2,3, c(x)$- заданные аналитические функции действительных переменных x. Получены локальные теоремы существования, теоремы единственности в целом и оценки условной устойчивости.

В третьем параграфе второй главы рассмотрена обратная задача для системы интегродифференциальных уравнений Максвелла

$$\nabla \times H = (\partial/\partial t)D(x,t) + \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -(\partial/\partial t)B(x,t), (x,t) \in R^4, \tag{14}$$

где $D(x,t) = \varepsilon E + \int_0^t \varphi(t-\tau)E(x,\tau)d\tau, \qquad B(x,t) = \mu H + \int_0^t \psi(t-\tau)H(x,\tau)d\tau,$

$$E = (E_1, E_2, E_3), H = (H_1, H_2, H_3), D = (D_1, D_2, D_3),$$
$$B = (B_1, B_1, B_3), \; x = (x_1, x_2, x_3),$$

$\varphi(t,x)$, $\psi(t,x)$ - скалярные функции, характеризующие память, сторонный ток j имеет вид

$$j = j^0 g(x_1)\delta(x_3)\delta(t), \quad j^0 = (0,1,0).$$

Система уравнений (14) рассмотрена с обобщенными условиями Коши

$$E|_{t<0} \equiv 0, \quad H|_{t<0} \equiv 0. \tag{15}$$

Предполагается, что в уравнениях (14) функции ε, μ, σ, φ, ψ не зависят от координаты x_2. Тогда решение задачи Коши (14) - (15) также не зависит от x_2 и $E_1 = E_3 = H_2$. Обратная задача заключается в определении функции $\varphi = \varphi(t,x_1)$, если относительно решения задачи (14) - (15) известна информация

$$E|_{x_3=0} = f(t,x_1), \quad t \ge 0, \; x_1 \in R^1. \tag{16}$$

Принимается, что ε, μ - постоянные в R^2 и σ - кусочно-постоянна: $\sigma = \sigma_0$ при $x_3 \ge 0$; $\sigma = 0$ при $x_3 < 0$ и $\psi = 0$ (отсутствие магнитной предыстории среды). При таких предположениях показывается, что обратная задача (14)-(16) сводится к задаче рассмотренной в предыдущем параграфе.

В четвертом параграфе главы 2 изучены дифференциальные свойства решения обратной задачи о нахождении двумерного ядра памяти. Задача заключается в определении функции $k(t,x), t > 0, x \in R$ из уравнения (11), если относительно решение задачи (11), (12) (с $h(x,t) = 0$) известна информация (13). Следующая теорема показывает, что решение задачи обладает некоторой степени гладкости если таковыми являются данные задачи.

Теорема 2.8. Предположим, что для $t \in [0,T]$

$$\left\{\frac{\partial^i f}{\partial t^i}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}\right\} \in C(A_{s_0}, [0,T]), \quad i = 0,1,2;$$

$$\max\left\{\|f\|_{s_0}, \left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\|_{s_0}, 2\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\|_{s_0} + \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|_{s_0}, \left\|\frac{\partial^3 f}{\partial z \partial x^2}\right\|_{s_0}\right\} \le R, \quad f(x,+0) = \frac{\partial f(x,+0)}{\partial t} = 0$$

и $\gamma \in (0, s_0)$ - произвольное фиксированное число. Тогда для любого $\chi > 0$ найдется положительная постоянная $C = C(R, s_0, T, \chi)$ такая, что для $s \in (0, s_0 - \gamma)$ решение обратной задачи (11)-(13) непрерывно дифференцируемо по переменным (z,t) в области

$$G_\gamma = G_\gamma(R, s_0, T, \chi, s) = \{(z,t) \,|\, 0 \le t \le z < a(s_0 - \gamma - s)\},$$

и для него справедливы оценки

$$\|u\|_s(z,t) \le c, \quad \|v\|_s(z,t) = \left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|_s (z,t) \le \frac{c}{\gamma}, \max\left[\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_s (z,t), \|k\|_s(z), \left\|\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right\|_s (z,t)\right] \le \frac{c}{\gamma^2},$$

$$\max\left[\left\|\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right\|_s (z,t), \left\|\frac{\partial u_{xx}}{\partial z}\right\|_s (z,t)\right] \le \frac{c}{\gamma^3}, \max\left[\left\|\frac{\partial u_{xx}}{\partial t}\right\|_s (z,t), \left\|\frac{\partial \vartheta_{xx}}{\partial t}\right\|_s (z,t)\right] \le \frac{c}{\gamma^4},$$

$$\max\left[\left\|\frac{\partial k}{\partial z}\right\|_s (z), \left\|\frac{\partial \vartheta_{xx}}{\partial z}\right\|_s (z,t)\right] \le \frac{c}{\gamma^5}, (z,t) \in G_\gamma.$$

В третьей главе изучаются вопросы глобальной разрешимости обратных задач определения одномерных ядер памяти. Для поставленных в этой главе задач доказаны теоремы глобального существования и единственности, получены оценки устойчивости.

В первом параграфе главы 3 рассмотрена начально-краевая задача для одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} - \int_0^t k(\tau) u(x, t-\tau) d\tau = 0, \quad (x,t) \in R_+^2, \tag{16}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad u_x|_{x=0} = \delta'(t) + f(t)\theta(t), \tag{17}$$

в которой $\mathrm{R}_+^2 = \{(\mathrm{x},\mathrm{t}) \in \mathrm{R}^2 \,|\, \mathrm{x} > 0\}$.

Показано, что решение задачи (16), (17) в окрестности характеристической прямой $t = x$ имеет следующую структуру:

$$u(x,t) = -\delta(t-x) + \theta(t-x) v(x,t).$$

Обратная задача заключается в определении функцию $k(t)$, входящую в интеграл уравнения (16) по информации о регулярной части решения задачи (16), (17) в любой момент времени $t \ge 0$ в точке $x = 0$:

$$v(0,t) = F(t), \quad t > 0. \tag{18}$$

Теорема 3.1. Пусть $f(t) \in C^1[0,T]$, $F(t) \in C^2[0,T]$ и выполнено условие согласования

$$f(0) = -F'(0).$$

Тогда обратная задача (16) - (18) имеет единственное решение $k(t) \in C[0,T], T > 0.$

Обозначим через $A(k_0)$ множество функций $k(t) \in C[0,T]$, удовлетворяющих при некотором $\mathrm{T} > 0$ условию

$$\| k \|_{C[0,T]} \le k_0$$

с постоянной $k_0 > 0.$

Теорема 3.2. Пусть $k^{(i)} \in A(k_0)$, $i = 1,2$ решения обратной задачи (16) - (18) с данными $f^{(i)}(t)$, $F^{(i)}(t)$, $i = 1,2$, соответственно. Тогда найдется положительная постоянная C, зависящая от T, k_0, $\|f^{(1)}\|_{C^1[0,T]}$, $\|F^{(1)}\|_{C^2[0,T]}$, что выполняется оценка

$$\|k^{(1)} - k^{(2)}\|_{C[0,T]} \le C\left(\|f^{(1)}(t) - f^{(2)}(t)\|_{C^1[0,T]} + \|F^{(1)} - F^{(2)}\|_{C^2[0,T]}\right).$$

Во втором параграфе главы 3 результаты предыдущего параграфа перенесены на случай $n+1$ - мерного волнового уравнения. Рассмотрим n - мерное волновое уравнение с памятью

$$u_{tt} - u_{xx} - \Delta u - \int_0^t k(\tau)u(x,y,t-\tau)d\tau = 0,\ (y,t) \in R^{n+1},\ x > 0,$$

(19)

в котором Δ - оператор Лапласа по переменной $\mathrm{y} = (\mathrm{y}_1,\ldots,\mathrm{y}_\mathrm{n})$, со следующими начальными и граничными условиями

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad u_x|_{x=0} = \delta'(t)\delta(y) + f(t)\theta(t)\delta(y). \qquad (20)$$

Обозначим через $\tilde{u}(x,\lambda,t), \quad \lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ образ Фурье функции $u(x,y,t)$:

$$\tilde{u}(x,\lambda,t) = \int_R u(x,y,t)e^{i(\lambda,y)}dx, \quad (\lambda,y) = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n.$$

Поставим обратную задачу: определить $k(t)$, $t > 0$ по заданной регулярной части образа Фурье решения задачи (19), (20) на прямой $x = 0$, для фиксированного $\lambda = \lambda_0 \in R^n$ и $t < T$, $T > 0,$ т. е.

$$v(0,\lambda_0,t) = F(t), \quad \lambda_0 \in R^n,\ t < T. \qquad (21)$$

Заметим, что обратная задача (19) - (21) при $\lambda = 0$ совпадает с задаче, исследованной в предыдущем параграфе.

Приведем теорему однозначной глобальной разрешимости для обратной задачи (19) - (21).

Теорема 3.5. Пусть $f(t) \in C^1[0,T]$, $F(t) \in C^2[0,T]$ и выполнено условие согласования

$$F(\lambda_0,0) = 0, \quad f(0) = \frac{|\lambda_0|^2}{2} - F'(0).$$

Тогда обратная задача (19) - (21) имеет единственное решение $k(t) \in C[0,T], \quad T > 0.$

В третьем параграфе главы 3 рассмотрена следующая обобщенная задача Коши:

$$u_{tt}-\Delta u+cu+\int_0^t k(t-\tau)u(x,\tau)d\tau=\nu\,\delta(x,t), \qquad (22)$$

$$u|_{t<0}=0, \qquad (23)$$

где $c=diag(c_1,c_2,c_3)=const,$ $\nu=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$-единичный вектор, $\nu_i\neq 0,$ $i=1,2,3$, $\delta(x,t)$ - дельта-функция Дирака, $k(t)=diag(k_1,k_2,k_3)$ - неизвестное ядро.

Показано, что решение задачи Коши (22), (23) имеет вид

$$u(x,t)=\frac{\nu\theta(t)}{4\pi|x|}\delta(t-|x|)+v(x,t),$$

где $v(x,t)$ представляет собой рассеянную волную.

Поставим обратную задачу: определить функцию $k(t)=diag(k_1,k_2,k_3)$, входящую в интеграл уравнения (22) по информации о рассеянной волне $v(x,t)$ в любой момент времени $t\geq 0$ в точке $x=0$:

$$v(0,t)=f(t), \quad f(t)=(f_1,\ f_2,\ f_3). \qquad (24)$$

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 3.7. Пусть $f(t)\in C^1[0,T]$ и выполнено условие согласование

$$f(0)=-\frac{c\nu}{8\pi}.$$

Тогда обратная задача (22) - (24) имеет единственное решение $k(t)\in C[0,T],\ T>0.$

В четвертом параграфе главы 3 исследуется глобальная разрешимость задачи определения двух неизвестных в обратной задаче для интегродифференциального волнового уравнения.

Рассматривается начально - краевая задача

$$u_{tt}-u_{yy}-\Delta u-\int_0^t k(\tau)\Delta u(x,y,t-\tau)d\tau=0,(x,t)\in R^{n+1},\ y>0, \qquad (25)$$

$$u|_{t<0}\equiv 0, \quad u_y|_{y=0}=\delta'(t)\delta(x)+f(t)\theta(t)\delta(x), \qquad (26)$$

в которой Δ - оператор Лапласа по переменной $x=(x_1,...,x_n)$. Пусть $\tilde{u}(\lambda,y,t),\ \lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ образ Фурье функции $u(x,y,t)$ по переменной x. Поставим обратную задачу: определить функции $k(t),\ f(t),\ t>0$, входящие в уравнения (25), (26) по информации о регулярной части образа Фурье решения задачи (25), (26) на прямой $y=0$, для для двух различных значений параметра преобразования:

$$v(\lambda^i,0,t)=F(\lambda^i,t), \quad t>0,\ i=1,2. \qquad (27)$$

Теорема 3.8. Пусть $F(\lambda^i,t)\in C^1[0,T],$ $i=1,2,$ $F_0(\lambda^1,\lambda^2,t)=F_t(\lambda^1,t)-F_t(\lambda^2,t)\ \in C^1[0,T]$ и выполнены условия согласования

$$F(\lambda^i,0)=0,\ i=1,2,\ \lambda^1\neq\lambda^2.$$

Тогда обратная задача (25) - (27) имеет единственное решение $\big(f(t),k(t)\big)\in C[0,T],$ для любого $T>0.$

В четвертой главе исследуются вопросы условной устойчивости в обратных задачах об одновременном определении двух неизвестных. Основными результатами являются оценки устойчивости и теоремы единственности рассматриваемых задач.

Рассматривается начально-краевая задача для уравнения

$$u_{tt} - \left(a^2 u_x\right)_x - \left(a^2 u_y\right)_y - \int_0^t k(\tau) u_{xx}(x,y,t-\tau)\,d\tau = 0, \; (x,y,t) \in R_+^2 \times R, \tag{28}$$

при условиях

$$u|_{t<0} \equiv 0, \quad u_y|_{y=0} = \delta(x)\delta'(t) + f(t)\delta(x)\theta(t), \tag{29}$$

в которых $R_+^2 = \left\{(x,y) \in R^2 \mid y > 0\right\}$. В этих уравнениях коэффициент $a = a(y)$ является положительной функцией класса $C^2\left(R_+\right), R_+ = \left\{y \in R \mid y > 0\right\}$, а $k(t),\ f(t)$ - непрерывные функции, $t \in R$.

В первом параграфе главы 4 изучена следующая обратная задача: определить функции $a(y), k(t),\ \ y > 0, t > 0,$ входящие в уравнение (28), если относительно решения начально-краевой задачи (28) – (29) известны информации

$$\tilde{u}(\lambda_i, y, t)\big|_{y=0} = F(\lambda_i, t), i = 1,2, \lambda_1 \neq \lambda_2, t > 0, \tag{30}$$

где $\tilde{u}(\lambda, y, t)$ - преобразование Фурье функции $u(x,y,t)$ по переменной x. Доказывается, что для разрешимости обратной задачи функция $F(\lambda,t)$ должна иметь следующую структуру:

$$F(\lambda,t) = -\delta(t) + F_0(\lambda,t)\theta(t), \quad (\lambda,t) \in R_+^2, \tag{31}$$

Обозначим через $A(c_0, c_{00}, k_0)$ множество пар функций $\left\{c(y), k(t)\right\}$, удовлетворяющих при некотором $T > 0$ следующим условиям:

$$0 < c_{00} \le c(z),\ \left\|c(y)\right\|_{C^2[0,T/2]} \le c_0,\ \left\|k(t)\right\|_{C[0,T]} \le k_0.$$

Пусть функция $F(\lambda,t)$ имеет структуру (31) и $F_0(\lambda,t) \in C^1\left[0,T\right]$ при фиксированном λ, $F_{00}(t) \equiv F_0(\lambda_1,t) - F_0(\lambda_2,t) \in C^2[0,T]$. Кроме того, предположим, что $F_{0t}(\lambda,0)$ является возрастающей функцией по $\lambda,\ \ \lambda \in R$. Относительно функции $f(t)$ будем считать выполненным условие

$$\left\| f(t)\right\|_{C[0,T]} \le f_0,$$

в котором f_0 - известное число.

Справедлива теорема устойчивости.

Теорема 4.1.. Пусть $(c^{(1)}, k^{(1)}) \in A(c_0, c_{00}, k_0)$, $(c^{(2)}, k^{(2)}) \in A(c_0, c_{00}, k_0)$ - решения обратной задачи (28) - (30), с данными $\left(F_0^{(1)}(\lambda_j,t),\ f^{(1)}(t)\right)$, $\left(F_0^{(2)}(\lambda_j,t),\ f^{(2)}(t)\right)$, $j = 1,2$, соответственно. Тогда найдется положительная постоянная C, зависящая от $\lambda_1, \lambda_2, T, c_0,\ c_{00}, k_0, f_0$, что выполняется оценка

$$\left\|k^{(1)}-k^{(2)}\right\|_{C[0,T]}+\left\|c^{(1)}-c^{(2)}\right\|_{C^2[0,T/2]}+\left\|h^{(1)}-h^{(2)}\right\|_{C^3[0,T/2]}\leq C\mu,$$

в котором $h(z)=\int_0^z c(\xi)\,d\xi,$

$$\mu=\sum_{j=1}^{2}\left\|F_0^{(1)}(\lambda_j,t)-F_0^{(2)}(\lambda_j,t)\right\|_{C^1[0,T]}+\left\|F_{00}^{(1)}-F_{00}^{(2)}\right\|_{C^2[0,T]}+\left\|f^{(1)}-f^{(2)}\right\|_{C[0,T]}.$$

Автор выражает глубокую признательность своему научному консультанту члену - корреспонденту РАН В.Г. Романову за постановку задач и полезные обсуждения изложенных в диссертации результатов.

3. Заключение

В диссертации исследованы вопросы корректности одномерных и многомерных динамических обратных задач определения ядра интегрального члена в интегродифференциальных уравнений гиперболического типа. Получены методы, позволяющие свести обратную задачу для дифференциальных уравнений в частных производных к решению системы интегральных уравнений второго порядка Вольтеровского типа. Рассмотрены обратные задачи для широкого класса гиперболических интегродифференциальных уравнений с интегральным оператором в правой части типа свертки.

- Исследованы свойства решение прямой задачи, которую представляет начально – краевая задача для трехмерного интегродифференциального волнового уравнения в полупространстве R_+^3 с импульсным источником возмущения. Доказана условная корректность обратной задачи определения ядра интегрального оператора по известному в точке $x=0$ решению прямой задачи.

- Изучена обобщенная задача Коши для интегродифференциального уравнения гиперболического типа второго порядка с волновым оператором в главной части и с переменными коэффициентами при младших производных. Изучены дифференциальные свойства решения прямой задачи. Доказаны теоремы локальной однозначной разрешимости и установлена оценка условной устойчивости обратной задачи. Исследована однозначная разрешимость обратной задачи определения ядра памяти из системы уравнений термоупругости в вертикально – неоднородной несвязной среде заполняющей полупространства R_+^3 с мгновенным источником на границе. Установлена оценка условной устойчивости обратной задачи.

- Исследована локальная однозначная разрешимость многомерных обратных задач определения ядра памяти среды, аналитических по части пространственных координат и гладких по временной переменной. Прямую задачу представляет начально – краевая задача для интегро-дифференциального волнового уравнения с мгновенно действующим источником на границе. Установлены оценки условной устойчивости обратных задач.

- Изучены вопросы глобальной разрешимости задач об определении одномерного ядра памяти среды из волнового уравнения в классе непрерывных функций с экспоненциальным весом. С введением эквивалентных весовых норм доказаны теоремы глобальной разрешимости обратных задач. А также выписаны оценки условной устойчивости.

- Исследована однозначная разрешимость задачи одновременного определения двух неизвестных коэффициентов, один из которых представляет ядро памяти в интегродифференциальном уравнении, а другой определяет скорость распространения звука. А также исследована подобная задача с неизвестным источникам возмущения. Изучены вопросы локальной однозначной разрешимости задач определения нестационарных характеристик среды из гиперболических уравнений второго порядка. Доказаны теоремы глобальной единственности и условной устойчивости.

Представленные в этой диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории обратных и некорректных задач для дифференциальных уравнений.

4. Список опубликованных работ

Журналы и монографии:

1. Дурдиев Д. К. Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью // Математический анализ и дискретная математика, Новосибирск, Изд - во Новосибирского ун - та, 1989. - С. 19 - 27.

2. Дурдиев Д. К. Задача об определении индикатрисы рассеяния в уравнении переноса // Математический анализ и дифференциальные уравнения, Новосибирск, Изд - во Новосибирского ун - та, 1991. - С. 55 – 59.

3. Дурдиев Д. К. Линеаризованная обратная задача для двумерного уравнения переноса // Методы решения условно - корректных задач и их приложения, Новосибирск, Труды ИМ СО АН СССР, 1991. - С. 47 – 56.

4. Дурдиев Д. К. К вопросу о корректности одной обратной задачи для гиперболического интегродифференциального уравнения // Сиб. матем. журн., 1992. – No 3 (33). - С. 69 - 77.

Английский перевод:

D.K.Durdiev. Question of well-posedness of a certain inverse problem for a hyperbolic integrodifferential equation// Siberian Mathematical Journal. 1992. – vol. 33, № 3. – P. 427 – 433.

5. Дурдиев Д. К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. матем. журн., 1994. – No 3 (35). - С. 574 - 582.

Английский перевод:

D.K.Durdiev. A multidimensional inverse problem for an equation with memory// Siberian Mathematical Journal. 1994. – vol. 35, № 3. – P. 514 – 521.

6. Дурдиев Д. К. Обратная задача для системы уравнений переноса нейтронов на отрезке // Научный Вестник Бухарского Университета, Бухара, 2003. - No 2. – С.55 – 58.

7. Дурдиев Д. К. Обратная задача для гиперболических систем первого порядка с памятью // Научный Вестник Бухарского Университета, Бухара, 2004. - No 3. - С. 70 - 74.

8. Дурдиев Д. К. Локальная однозначная разрешимость одной обратной задачи для интегродифференциального уравнения с памятью // Узб. матем. журн., 2004. - No 1. - С. 77 - 86.

9. Дурдиев Д. К. Задача определения памяти в двумерной системе уравнений Максвелла // Вестник НУУз, Ташкент, 2006. - No 2. - С. 13 - 17.

10. Дурдиев Д. К. Дифференциальные свойства решения одной обрат-ной задачи для уравнения с памятью // Узб. матем. журн., 2006. No 3. - С. 26 - 36.

11. Дурдиев Д. К. Многомерная задача восстановления функции памяти, стоящей при первой производной по времени под знаком интеграла в волновом уравнении // Научный Вестник Бухарского Университета, Бухара, 2007. - No 4. - С. 73 - 77.

12. Дурдиев Д. К. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегродифференциального уравнения электродинамики // Диф. уравнения, 2008. - No 7 (44). - С. 867 - 873.

Английский перевод:

D.K.Durdiev. Global solvability of an inverse problem for an integrodifferential equation of electrodynamics// Differential Equations. 2008. – vol. 44, № 7. – P. 893 – 899.

13. Дурдиев Д. К. Задача определения нестационарного потенциала в одном уравнении гиперболического типа // Теоретическая и Математическая физика, 2008. – No 2 (156). - С. 220 - 225.

Английский перевод:

D.K.Durdiev. Problem of determining the nonstationary potential in a hyperbolic-type equation// Theor. Math. Phys. 2008. –vol. 156, № 2. – P. 1154-1158.

14. Дурдиев Д. К. Вопросы глобальной разрешимости задачи определения двух коэффициентов в волновом уравнении с памятью // Научный Вестник Бухарского Университета, Бухара, 2009. - No 1. - С. 89 - 96.

15. Дурдиев Д. К. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегродифференциального уравнения электродинамики // Узб. матем. журн., 2009. – No 3. - С. 36 - 45.

16. Дурдиев Д. К. Задача определения функции памяти среды и регулярной части импульсного источника // Матем. заметки, 2009. – No 2 (86). - С. 202 – 212.

Английский перевод:

D.K.Durdiev. The problem of determining a function of the memory of a medium and of the regular part of a pulsed source// Mathematical Notes. 2009. – vol. 86, № 2. – P. 187-195.

17. Дурдиев Д. К. Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении // Сиб. журн. индустр. матем., 2009. – No 3 (12). – С. 28 – 40.

18. Дурдиев Д. К. Обратная задача для системы уравнений термоупругости в вертикально - неоднородной несвязной среде с памятью // Диф. уравнения, 2009. – No 9 (45). – С. 1229 – 1236.

Английский перевод:

D.K.Durdiev. Inverse problem for the system of thermelasticity equations for a vertically inhomogeneous cohesionless medium with memory// Differential Equations. 2009. – vol. 45, № 9. – P. 1254 – 1261.

19. Дурдиев Д.К. Глобальная разрешимость задачи определения двух неизвестных в одной обратной задаче для интегродифференциального волнового уравнения // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2009. - No 2 (19). – С. 17 – 28.

20. Durdiev D. K. Some Multidimensional Inverse Problems of Memory Determination in Hyperbolic Equations // Jour. of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2007. - vol. 4. - P. 441 - 423.

21. Durdimurod K. Durdiev. An Identification Problem of Memory Function of a Medium and the Form of an Impulse Source // Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2009. -vol. 2, - № 2. – P. 127 – 136.

22. Дурдиев Д. К., Маматова Н. Х. Обратная задача для двумерной системы уравнений Максвелла с памятью // Научный Вестник Бухарского Университета, Бухара, 2005. - С. 56 - 58.

23. Дурдиев Д. К., Нуриддинов Ж. З. Задача восстановления памяти в волновом уравнении для слоистой среды // Научный Вестник Бухарского Университета, Бухара, 2006. - No 4. - с. 113 - 116.

Сборник научных трудов и тезисы:

24. Дурдиев Д. К. Теорема об однозначной разрешимости одной обратной задачи для системы Максвелла с памятью // "Новые теоремы молодых математиков - 1994": Тез. докл. Республиканской научной конференции. - Наманган, 1994. - С. 33 - 34.

25. Дурдиев Д. К. Локальная однозначная разрешимость многомерной обратной задачи в среде с памятью // "Новые теоремы молодых математиков - 2003". Тез. докл. Республиканской научной конференции. - Наманган, 2003. - С. 31.

26. Дурдиев Д. К. Задача восстановления памяти в интегродифференциальном уравнении гиперболического типа // Материалы международной конференции "Дифференциальные уравнения в частных производных и родственные проблемы анализа", посвященной 70 - летию Т. Дж. Джураева, Ташкент, 2004. - С. 53 - 61.

27. Дурдиев Д. К. Задача восстановления памяти в уравнении колеба-ния струны // “Математическая физика и ее приложения". Тез. докл. международной конференции, Самара, 2008. - С. 70 - 71.

28. Дурдиев Д. К. Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении // "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений". Тез.

докл. международной конференции, посвященной 100 - летию со дня рождения С. Л. Соболева, Новосибирск, 2008. - С. 131.

29. Дурдиев Д. К., Болтаев А. К. Обратная задача для гиперболических систем первого порядка с памятью // "Новые теоремы молодых математиков - 2003". Тез. докл. Республиканской научной конференции. - Наманган, 2003. - С. 30.

30. Дурдиев Д. К., Маматова Н. Х. Обратная задача для интегродифференциального уравнения диффузии // Труды международной конференции " Современные проблемы математической физики и информационных технологий ". - Ташкент, 2005. – Т.1. - С. 272 – 275.

Физика-математика фанлари доктори илмий даражасига талабгор Дурдиев Дурдимурод Қаландаровичнинг 01.01.02 – дифференциал тенгламалар ихтисослиги бўйича **«Обратные задачи для сред с последействием»** мавзусидаги диссертациясининг

РЕЗЮМЕСИ

Калит сўзлар: гиперболик тенглама, тескари масала, ечимнинг мавжудлиги, ягоналик, шартли турғунлик, дельта функция, интеграл ҳаднинг ядроси, аналитик функция, глобал ечилиш, ностационар потенциал.

Тадқиқот объекти: иккинчи тартибли гиперболик типдаги интегро-дифференциал тенгламалар ва хотирали Максвелл тенгламалар системаси учун бир ва кўп ўлчовли тўғри ва тескари масалалар.

Ишнинг мақсади: оний манбали гиперболик типдаги интегродифференциал тенгламаларнинг интеграл ҳадидаги ядрони аниқлаш учун қўйилган бир ва кўп ўлчовли динамик тескари масалаларнинг ечимини берувчи усулларни яратиш; шунингдек, бу масалалар ечимларининг ягоналиги, турғунлиги ва мавжудлиги муаммоларини ўрганиш.

Тадқиқот усули: хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ва интеграл тенгламалар назариясининг замонавий усулларидан фойдаланилди.

Олинган натижалар ва уларнинг янгилиги: хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун тескари масалани Вольтерр типидаги интеграл тенгламалар системасига олиб келувчи усуллар олинган. Қуйи ҳадлари олдидаги коэффициентлари ўзгарувчан бўлган иккинчи тартибли гиперболик турдаги тенгламадан бир ўлчовли ядрони аниқлаш учун қўйилган тескари масала ечими ҳақидаги мавжудлик, ягоналик ва шартли турғунлик теоремалари исботланган. Фазовий координаталарининг бирор қисми бўйича аналитик ва вақт ўзгарувчиси бўйича силлиқ бўлган интеграл ҳаднинг ядросини аниқлаш учун қўйилган кўп ўлчовли тескари масаланинг бир қийматли ечилиши ва турғунлик баҳоси ўрнатилган. Экспоненциал вазнли функциялар синфида бир ўлчовли ядрони аниқлаш масаласининг бир қийматли ечилиши муаммолари ўрганилган.

Амалий аҳамияти: диссертация назарий характерга эга. Таклиф қилинаётган назариянинг муҳимлиги шундан иборатки, олинган барча натижалар конструктив йўл билан исботланган, яъни улар ёрдамида тақрибий ечимларни қуриш мумкин.

Татбиқ этиш даражаси ва иқтисодий самарадорлиги: диссертация мавзуси Бухоро давлат университети ИТИ режасига киритилган.

Қўлланиш соҳаси: олинган натижалар математик физиканинг тескари ва нокоррект масалалари соҳаси мутахассисларига фойдаланиш учун тавсия этилиши мумкин.

РЕЗЮМЕ

диссертации Дурдиева Дурдимурата Каландаровича на тему **«Обратные задачи для сред с последействием»** на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.02- дифференциальные уравнения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, обратная задача, существование решения, единственность, условная устойчивость, дельта функция, ядро интегрального члена, аналитическая функция, глобальная разрешимость, нестационарный потенциал.

Объект исследования: одномерные и многомерные прямые и обратные задачи для интегродифференциальных уравнений гиперболического типа второго порядка и системы уравнений Максвелла с памятью.

Цель работы: Построение методов решения одномерных и многомерных динамических обратных задач определения ядра интегрального члена в интегродифференциальных уравнениях гиперболического типа с сосредоточенными источниками возмущения, а также исследование вопросов единственности, устойчивости и существования решения этих обратных задач.

Метод исследования: основан на использовании современных методов теории дифференциальных уравнений с частными производными и теории интегральных уравнений.

Полученные результаты и их новизна: получены методы, позволяющие свести обратную задачу для дифференциальных уравнений в частных производных к решению системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Доказаны теоремы существования, единственности и условной устойчивости обратной задачи определения одномерного ядра памяти из уравнения гиперболического типа второго порядка с переменными коэффициентами при младших производных . Установлены однозначная разрешимость и оценка устойчивости многомерных обратных задач определения ядра интегрального члена, аналитических по части пространственных координат и гладких по временной переменной. Изучены вопросы глобальной разрешимости задач об определении одномерного ядра в классе функций с экспоненциальным весом.

Практическая значимость: диссертация носит теоретический характер. Важность теории заключается в том, что доказательства всех полученных результатов проводятся конструктивно: с их помощью можно построить приближенные решения.

Степень внедрения и экономическая эффективность: тематика диссертационной работы входила в НИР Бухарского государственного университета.

Область применения: полученные результаты могут быть рекомендованы для использования специалистам по обратным и некорректным задачам математической физики.

RESUME

Thesis of Durdiev Durdimurat Kalandarovich on the scientific degree competition of the doctor of sciences in physic-mathematical speciality 01.01.02 – differential equations, subject: **«Inverse problems for a medium with aftereffect».**

Key words: hyperbolic equations, inverse problem, existence of solution, uniqueness, conditional stability, delta function, kernel of integral member, analytical function, global solvability non-stationary potential.

Subjects of the inquiry: one-dimensional and multi-dimensional and inverse problems for hyperbolic type integrodifferential equations of direct second order and Maxwell equation systems with memory

Purpose of work: construction of methods of solving the one-dimensional and multi-dimensional inverse dynamic problems of determining the kernel of integral member in integrodifferential equations of hyperbolic type with impulse sources of disturbance, as well as research of questions of uniqueness, stability and existence of solutions of these inverse problems.

Methods of research: based on using contemporary methods of differential equations with particular derivatives and theory of integral equations.

The results achieved and their novelty: methods that make it possible to deliver the inverse problem for differential equations in particular derivatives to solving the system of integral equations of Volter-type are obtained. Theorems of existence, uniqueness and conditional stability of an inverse problem of determining a one-dimensional memory kernel from a hyperbolic-type equation of second order with variable coefficients in small derivatives are proved. Unique solvability and evaluation of stability of multi-dimensional inverse problems of determining the kernel of integral member, analytical along space coordinates and smooth along temporal variable are defined. Issues of global solvability of problems related to determining one-dimensional kernel in the class of functions with exponential weight are analyzed.

Practical value: dissertation possesses a theoretical character. The significance of the theory is concluded in the fact that the proofs of all obtained results are conducted constructively: with their help it is possible to obtain approximate solutions.

Degree of embed and economic effectivity: the theme of dissertation was included into the Scientific Research Project of Bukhara State University.

Field of application: obtained results can be recommended for use by the specialists of inverse and incorrect problems of mathematical physics.