# 2. НАДЕЖНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИИ

## 2.1. Понятия надежности сетей телекоммуникации

Это понятие связано с работоспособностью системы и сети телекоммуникации во времени, т. е. выполнением заданных функций в установленном объеме на требуемом уровне качества в течение определенного периода ее эксплуатации или в произвольный момент. различия этих понятий обусловлены прежде всего различиями причин или факторов, нарушающих нормальное функционирование системы, и характером нарушений.

***Надежность*** системы телекоммуникации есть ее свойство обеспечивать связь, сохраняя во времени значения установленных показателей качества в заданных условиях эксплуатации. она отражает влияние на работоспособность системы главным образом внутрисистемного фактора — случайных отказов техники, вызываемых физико-химическими процессами старения аппаратуры, дефектами технологии ее изготовления или ошибками обслуживающего персонала.

Случайные отказы характерны для отдельных устройств, линий или каналов телекоммуникации. При этом отказ одного аппарата на узле телекоммуникации обычно не вызывают отказов других комплектов аппаратуры, а тем более целого элемента или всего узла телекоммуникации. Исключение составляют общие коммутаторы и агрегаты электропитания. Поэтому при расчете надежности системы или сети телекоммуникации отказы ее структурных элементов, не имеющих общих устройств, считаются взаимонезависимыми.

Методы расчета показателей надежности, к которым обычно предъявляются высокие требования по точности, в некоторых случаях могут использоваться для оценки живучести системы телекоммуникации, однако для сокращения трудоемкости расчетов, они могут быть при этом существенно упрощены.

## 2.2. Показатели надежности сетей телекоммуникации

Основой понятия надежности техники является понятие отказа, т.е. состояние техники когда она не может продолжать выполнение своих функций. Это понятие применимо не только к аппаратуре телекоммуникации, но и к таким комплексам, как линии телекоммуникации (кабельные, радиорелейные и др.). Через понятие отказа целесообразно оценивать надежность также и двухполюсных сетей телекоммуникации. При этом под отказом двухполюсной сети телекоммуникации понимается такое ее состояние, когда пропускная способность и качество связи между ее полюсами ниже заданного порогового значения (требования). Например, двухполюсная сеть обеспечивает только телефонную связь по n каналам. Требование к сети – поддерживать связь не менее чем по $k<n$ каналам при удовлетворительной разборчивости речи. Когда в этой сети число связей становится меньше $k$ или не меньше, но неудовлетворительной разборчивости, то считается, что сеть отказала.

В тех случаях, когда двухполюсная система обеспечивает несколько видов связи (в ней имеется несколько вторичных сетей), состоянием отказа является такое, когда между полюсами не сохраняется ни одного вида связи требуемой минимальной пропускной способности и заданного ограничения по качеству. Однако некоторые системы управления требуют для своего функционирования обязательного наличия того или иного вида связи, например передачи данных. В этих случаях отказ системы наступает сразу же, как только прекращается эта обязательная связь.

Что же касается первичной сети двухполюсной системы телекоммуникации, то ее отказ наступает при выходе из строя всех каналов телекоммуникации или когда число работоспособных каналов становится меньше требуемого для обеспечения функционирования системы управления

Учитывая это обстоятельство, а также наличие общности понятий отказа двухполюсной сети (ДС) и аппаратуры телекоммуникации, в качестве показателей надежности ДС могут применяться показатели, для восстанавливаемого технического объекта. Наиболее целесообразными из них являются: коэффициент готовности $К_г$, наработка сети на отказ $Т_0$ и среднее время ее восстановления $Т_в$, которые являются функциями аналогичных показателей надежности элементов системы и взаимно связаны соотношением

$$K_г = \frac{T_0}{T_0 + T_В} \tag{2.1}$$

В практике нередко требуется наряду с характеристикой состояния системы в произвольный момент ($К_г$), что наиболее важно для сигнальной ДС, иметь оценку ее работоспособности в течение определенного времени $t_р$. В потоковой сети это время может быть периодом передачи самого ответственного потока сообщений. Для такой оценки рекомендуется так называемый коэффициент оперативной готовности

$$К_{о.г} = К_г\ p\,(t_р), \tag{2.2}$$

где $p\,(t_р)$ - вероятность того, что система, будучи исправной в произвольный момент t, не выйдет из строя в интервале $t \div t + t_р$.

Следует заметить, что соотношение (2.2) справедливо в тех случаях, когда вероятность $p(t_р)$ не зависит от момента начала работы системы. Во многих случаях вместо термина «коэффициент готовности» широко используется эквивалентный ему термин «вероятность связности» ДС. При этом критерием связности сигнальной ДС является наличие между ее полюсами хотя бы одного пути телекоммуникации. В потоковой сети пороговый уровень связности может быть более высоким.

Понятие отказа в частных случаях может быть применено и к многополюсной сети (МС) телекоммуникации. Так, если МС обслуживает такую систему, которая работает только при сохранении связи обязательно со всеми полюсами, то при отказе связи хотя бы с одним из них фиксируется отказ всей сети телекоммуникации. В качестве показателей надежности такой МС целесообразно использовать те же, которые рекомендованы для двухполюсной сети телекоммуникации.

Другим примером МС, к которой применимо понятие отказа, является система телекоммуникации строго централизованной системы управления, состояниями отказа которой являются: вышел из строя узел телекоммуникации главного пункта управления (прекратились связи со всеми остальными полюсами); отказали узлы телекоммуникации всех подчиненных пунктов управления; вышли из строя узлы телекоммуникации всех пунктов управления системы; узлы телекоммуникации в предыдущих случаях исправны, но связь отсутствует из-за отказов линий или каналов. Поскольку в подобной МС четко фиксируются два ее состояния: работает, не работает, - то ее надежность оценивается так же и теми же показателями, что и надежность двухполюсной сети.

В общем же случае применительно к многополюсной сети понятие отказа теряет практический смысл, так как одновременный выход из строя всех связей между всеми ее полюсами обычно маловероятен, а при нарушении связи с несколькими полюсами система продолжает выполнять свои функции, хотя и не в полном объеме. Однако это обстоятельство не означает, что МС не обладает свойством надежности. Раз такое свойство присуще элементам, оно непременно есть и у сети как единого целого. Несколько усложняются только конкретизация самого понятия надежности многополюсной системы сети и установление ее количественных показателей.

Под надежностью ***многополюсной сети телекоммуникации*** будем понимать ее свойство, обусловленное конечной надежностью линий (каналов), узловой аппаратуры и качеством управления, определяющее ее способность выполнять предусмотренные функции в установленном объеме в заданных условиях эксплуатации. Понятие “в установленном объеме” конкретизируется при проектировании сети или в процессе ее эксплуатации. Если в сигнальной МС связи между всеми полюсами МС равноценны по надежности, то установленный объем выполнения функций данной системой может быть выражен средней долей или математическим ожиданием доли пар полюсов, сохраняющих связность в произвольный момент интересуемого периода. Это и будет показатель надежности сигнальной системы. Вместе с тем требуемая доля сохраняемых связей может устанавливаться выше средней. Тогда показателем надежности такой МС является вероятность $p$ того, что доля пар связанных полюсов ($d_{с.п}$) будет не меньше заданной $d_з$, т.е.

$$H_{МС} = p(d_{с.п} \geq d_з) \tag{2.3}$$

Эти же показатели могут быть применены и к потоковой системе с учетом сделанных выше замечаний относительно порога связности в потоковых сетях. Вместе с тем надежность потоковой МС можно оценивать также по сохраняемой в ней усредненной (за рассматриваемый период) доли пропускной способности или по вероятности того, что эта доля будет не меньше заданной.

Между тем МС в большинстве случаев бывает неоднородна как по структуре ее фрагментов, используемых на различных информационных направлениях, так и по важности ее полюсов. Поэтому оценка надежности системы с помощью указанных выше показателей без дифференциации связей между полюсами оказалась бы неопределенной. Например, как можно было бы сопоставить две МС по надежности, если доли сохраняемых связей у них одинаковы, но у одной более устойчиво работают более важные свaязи, а у другой - менее важные.

Для устранения этой неопределенности целесообразно связи с полюсами разбить по степени важности их (в соответствии с важностью обслуживаемых пунктов управления) на две-три группы. Удельные веса (важности) каждой группы $g_i$ устанавливаются экспертным путем и согласовываются с заказчиком системы. Нормирующим условием является

$$\sum_{i=1}^{m} g_i = 1$$

где $m$ - число групп связей. Тогда доля сохраняемых связей (полюсов) вычисляется по каждой группе $d_i$, а средневзвешенная доля их по всей МС

$$\overset{0}{D}_{c.n} = \sum_{i=1}^{m} d_i g_i \tag{2.4}$$

Например, все связи в одном варианте МС разделены на две группы, степень важности которых: $g_1 = 0{,}7$; $g_2 = 0{,}3$. Доля исправно работающих связей в первой группе $d^1{}_1 = 0{,}4$, а во второй – $d^1{}_2 = 0{,}8$. В другом варианте МС доли сохраняемых связей аналогичных групп равны соответственно: $d^2{}_1 = 0{,}8$, $d^2{}_2 = 0{,}4$. Степени важности групп такие же, как и в первой системе. В этом случае средневзвешенная доля наличия связей в первой МС $D_1 = (0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}52$, а во второй - $D_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}68$, откуда следует, что предпочтение надо отдать второму варианту МС.

Кроме того, надежность МС можно характеризовать так называемой матрицей надежности, элементами которой являются показатели надежности связи на всех информационных направлениях системы. Так, если дана матрица

$$\|H_{MC}\| = \begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 0{,}99 & 0{,}9 & 0{,}95 & 0{,}999 \\ 2 & & 1 & 0{,}95 & 0{,}92 & 0{,}99 \\ 3 & & & 1 & 0{,}96 & 0{,}95 \\ 4 & & & & 1 & 0{,}98 \\ 5 & & & & & 1 \end{array},$$

то это значит, что надежность связи между первым и вторым полюсами МС по коэффициенту готовности равна 0,99, между первым и третьим - 0,9 и т. д. Главным недостатком матричной формы оценки надежности МС является то, что по ней трудно сравнивать надежность двух МС.

Учитывая, что МС, как правило, нельзя разделить на взаимонезависимые части, значения элементов в каждой матрице надежности МС более или менее взаимно коррелированны. Вместе с тем степень их корреляции – также важный показатель надежности МС. К примеру, в одной МС все пять двухполюсных сетей взаимонезависимы и их коэффициенты готовности одинаковы и равны 0,9. В другой пятиполюсной МС имеется общий элемент всех двухполюсных сетей (Кг)=0,95. элементы матриц надежности обеих систем в этом случае одинаковы (0,9). Однако наличие общего элемента во второй системе снижает ее надежность. Этот элемент является узким местом системы, так как его отказ ведет к нарушению всех связей.

Отмеченные особенности матричной формы следует помнить при ее использовании для оценки надежности МС. Наряду с рассмотренными выше количественными показателями надежность сетей телекоммуникации может характеризоваться и рядом качественных показателей, например степенью резервирования основных их элементов, числом взаимонезависимых путей связи между полюсами и т. п.

Таким образом, понятие надежности МС и ее показатели, а также способы их вычисления являются более сложными, чем у двухполюсных сетей и тем более аппаратуры. Однако из этого не следует, что от них надо отказываться и не учитывать при проектировании и эксплуатации систем и сетей телекоммуникации. Это способствовало бы принятию необоснованных и неоптимальных решений.

## 2.3. Методы расчета показателей надежности сети телекоммуникации

### 2.3.1. Классификация методов расчета надежности

Множество методов расчета показателей надежности и живучести сетей телекоммуникации, как и любой другой сложной системы, делится на два самостоятельных подмножества: точных и приближенных методов. Практическое применение того или иного метода определяется постановкой задачи, имеющимся парком вычислительной техники, степенью точности исходных вероятностей $p(э_i)$, исправности элементов и размерностью оцениваемой сети телекоммуникации. Достоинства и недостатки любого метода рассматриваются в каждом конкретном случае. Общая схема деления методов расчета показателей надежности и живучести сетей телекоммуникации изображена на рис. 3.1. Некоторые точные (аналитические) методы разработаны только для заданных конкретных конфигураций сетей телекоммуникации. Как видно из рис. 3.1. Множество аналитических методов содержит восемь подмножеств, отличающихся друг от друга используемым математическим аппаратом.

Большое число аналитических методов расчета характеризует попытки оценить надежность и живучесть сетей телекоммуникации без какой-либо погрешности при практически приемлемых затратах вычислительных ресурсов или объеме ручного счета.

По существу основной целью при разработке нового аналитического метода ставится снижение объема вычислений для получения результата. Однако очень высокая размерность оцениваемых сетей телекоммуникации ограничивает возможности точных методов, так как, начиная с некоторой границы, затраты вычислительных ресурсов растут примерно экспоненциально при любом методе. Тем не менее граница, с которой начинается экспоненциальное возрастание затрат вычислительных ресурсов, у каждого метода своя. По мере повышения возможностей точных методов усложняются и методики расчета, а следовательно, и алгоритмы. Это приводит к удлинению машинных программ, увеличению времени отладки, настройки и снижению надежности их работы.

Любой из точных методов неприемлем при достаточно большой размерности оцениваемой сети (размерность оценивается числом допустимых путей, числом элементов ДС или их суммой), поэтому зачастую оценка надежности и живучести производится приближенными методами.

Методы оценки надежности и живучести сетй телекоммуникации, в которых используются интегро-дифференциальные уравнения и теория игр, вообще не нашли практического применения прежде всего из-за их сложности.

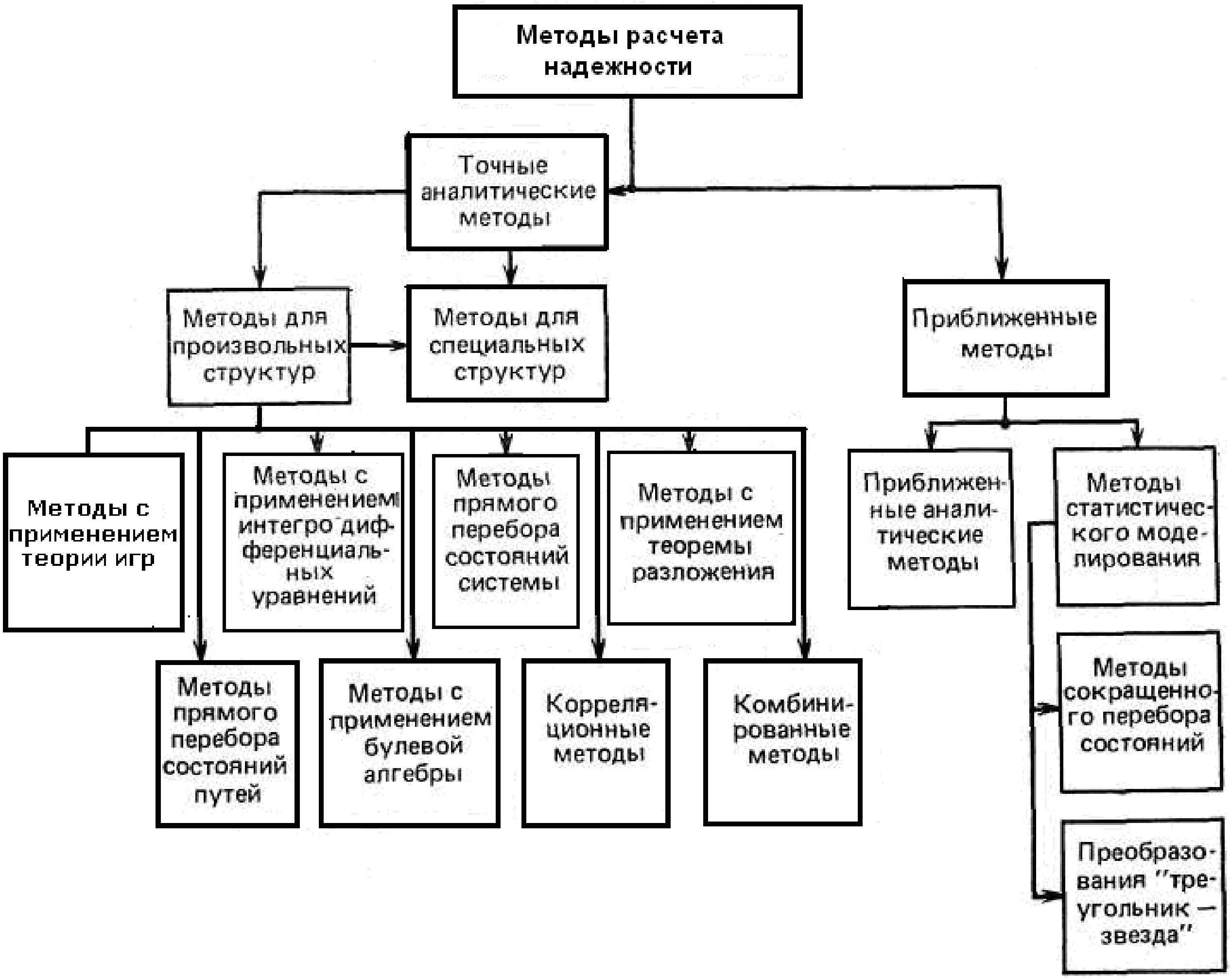



Рис. 2.1. Схема деления методов расчета надежности сетей телекоммуникации

Приближенные методы также делятся на два подмножества: приближенные аналитические методы и методы статистического моделирования. Применение любого из приближенных методов неизбежно приводит к некоторым погрешностям оценки.

Погрешность при использовании большинства аналитических приближенных методов задается. Исключение составляют методы, основанные на преобразованиях типа «треугольник—звезда». Некоторыми из аналитических методов оцениваются приближенные верхние и нижние границы значений показателей, по которым их можно усреднить. Такие методы для небольшого числа ДС применимы для ручного счета. Недостатком некоторых из них является трудность определения не только значения, но и знака погрешности.

Погрешность задается и при использовании методов статистического моделирования, в основу которых положен перебор состояний системы. И в том, и в другом случаях погрешность определяется суммарной вероятностью возникновения событий, которые при заданных исходных данных считаются практически неосуществимыми. Например, для сети телекоммуникации из $\boldsymbol{N}$ элементов, в которой случайное число отказавших элементов распределено нормально со средним $\overline{m} = 0{,}01N$ и среднеквадратическим уклонением $\sigma = 0{,}01N$, практически неосуществимым можно считать событие, когда в системе одновременно в состоянии отказа находится $k \geq 0{,}03N$ элементов.

Погрешность расчетов при использовании методов статистического моделирования определяется числом реализаций случайного процесса отказов элементов системы. Очевидно, что большое число элементов системы требует применения такого датчика случайных чисел (ДСЧ), который имеет достаточно большой период вырождения. Этим свойством обладают ДСЧ, требующие значительных дополнительных затрат вычислительных ресурсов. Поэтому, как правило, при высокой размерности сети и большом числе тяготеющих пар ее полюсов на выполнение одной реализации требуется значительное время работы ЭВМ.

При использовании приближенных методов необходимо, чтобы выполнялось важнейшее правило: погрешность исходных данных не должна превышать погрешность метода расчета.

### 2.3.2. Методы прямого перебора состояний элементов сетей телекоммуникации

Расчет показателей надежности методами прямого перебора состояний элементов сетей телекоммуникации *G{A, B}* предполагает независимость возникновения отказов ее элементов и наличие у каждого элемента двух взаимоисключающих друг друга состояний полностью исправен или полностью неисправен.

Вероятность пребывания сети телекоммуникации в состоянии, когда отказали *i* элементов, определяется по формуле Бернулли

$$P'(N,i) = C_N^i p(э)^{N-i}[1-p(э)]^i \quad (2.5)$$

Отказ какого-либо подмножества из совокупности *i* элементов, $i = 0, ..., N$, сети телекоммуникации приводит к разным последствиям: в одних случаях ДС *D* остается связной, в других — ее связность нарушается. Для определения влияния отказа *i* элементов сетей телекоммуникации на состояние ДС пронумеруем возможные подмножества *i* отказавших элементов числами $k=1, ..., J_i$ и введем в рассмотрение коэффициент $a_k$. Здесь $J_i = C_N^i$, а $a_k = 0$, если при отказе k - го подмножества *i* элементов связность ДС нарушена, и $a_k = 1$ в противном случае. Формула (3.1) преобразуется к виду

$$P(N,i) = \sum_{k=1}^{J_i} a_k p(э)^{N-i} [1-p(э)]^i \quad (2.6)$$

Очевидно, что $P\{N, i) \geq P'(N, i)$. Придавая *i* значения 0, 1,..., N, вычисляя по (3.2) $P(N, i)$ и складывая их друг с другом, получаем

$$p(E) = \sum_{i=0}^{N} P(N,i) \quad (2.7)$$

При различных $p(Э_i)$, что имеет место в реальных сетях, (3:2) принимает вид

$$P(N,i) = \sum_{k=1}^{Ji} a_k \prod_{э_v \notin э_{otk}}^{N-i} p(э_v) \prod_{э_j \in э_{otk}}^{i} \left[1-p(э_j)\right] \quad (2.8)$$

Здесь $Э_{отк}$ — множество отказавших элементов сетей телекоммуникации.

Пусть произвольно выбранная ДС отображается множеством путей М. Алгоритм вычисления $p(E)$ с использованием формул (3.3) и (3.2) или (3.4) имеет $2^N$ шагов. Существует несколько вариантов алгоритма вычисления $p(E)$ методом прямого перебора состояний. Шаг *k* наиболее простого алгоритма:

- формируется *k-е* двоичное число длиной *N* разрядов;

- значение «1» каждого разряда двоичного числа соответствует исправному, а «0» — неисправному состоянию элемента (двоичное число содержит $0 \le i \le N$ нулей и $N - i$ единиц);

- определяется значение $a_{kj}$ для j-й ДС, j=1,..., $N_W$. При $a_{kj}=1$ в зависимости от условия задачи по (3.2) или (3.4) определяется $P(N, i)$ и согласно (3.3)

$$p(E_j)_k = p(E_j)_{k-1} + P(N,i)_k \tag{2.9}$$

где индекс $j$ означает номер ДС, а $k$ — номер шага. После этого осуществляется переход к анализу следующей ДС. При $a_{kj} = 0$ переход к анализу следующей ДС осуществляется сразу.

Определение $a_{kj}$ производится по наличию в ДС $D_j$ хотя бы одного исправного пути. В этом случае $a_{kj} = 1$. При $j=N_w$ осуществляется возврат к началу алгоритма. Алгоритм заканчивается при $k=2^N$ и $j=N_w$.

Иногда применяется модифицированный алгоритм, расширяющий область применения метода прямого перебора. Отличие его от изложенного состоит в организации перебора состояний не всех элементов МС, а для каждой ДС отдельно. При этом $p\ (E_j)$ вычисляются поочередно за $2^N j$ шагов каждая, $j = \overline{1, N_w}$. Вычисление $p(E_j)$ производится в следующей последовательности:

-формируется множество путей $M_j$;

-перенумеровываются элементы ДС $D_j$ для упрощения организации перебора ее состояний (элементам ДС вместо исходных присваиваются номера 1, 2, 3, ..., $N_j$);

-формируется $k$-$e$, $k=1, ..., 2^N i$, двоичное число;

-определяется $a_{kj}$ и по формуле типа (3.5) производится вычисление.

Достоинства модифицированного алгоритма по сравнению с первым проявляются более резко при возрастании числа элементов сети. Основную часть модуля вычисления $p(E)$ методом прямого перебора состояний элементов системы телекоммуникации составляет подпрограмма формирования двоичных чисел.

### 2.3.3. Методы прямого перебора состояний путей сети телекоммуникации

Вторую группу методов, в которых используется принцип прямого перебора, составляют методы перебора состояний путей ДС. Двухполюсная сеть отображается множеством путей М, и ставится задача вычисления вероятности исправности хотя бы одного из них. Если все пути ДС структурно независимы между собой, то

$$p(E) = 1 - \prod_{i=1}^{h} 1 - p(\ell_i) \tag{2.10}$$

Состояния большинства путей ДС коррелированы друг с другом, поэтому (3.6) —это оценка *p(E)* сверху. Сущность методов прямого перебора путей состоит в представлении (3.6) в виде

$$p(E) = \sum_{i=1}^{j_1} p\ \ell_i \ - \sum_{i<v}^{j_2} p\ \ell_i, \ell_v \ + \ldots + \ -1^{\ h-1} p\left( \setminus_{i=1}^{N} \ell_i \right) \tag{2.11}$$

Последняя формула представляет собой вероятность суммы совместных независимых событий. Здесь $J_n = C^n h,\ n\text{-}1,\ \ldots,\ h$.

Для компактной записи алгоритма вычислений преобразуем (3.7). Обозначим $I_n = \{I_{nk}\}$, где $1_{nk}$ содержит *k*-ю комбинацию *n* путей из общего числа сочетаний из *h* по *n*, $n=1,\ \ldots,\ J_n$, а $p(E^n)$ — вероятность исправности хотя бы одного подмножества $I_{nk}$ путей, определяемая из выражения

$$p\ \ E_n \ = \sum_{k=1}^{J_n} p\ \ I_{nk} \ , n = 1, \ldots, h \tag{2.12}$$

Тогда (3.6) имеет вид

$$p(E) = \sum_{n=1}^{h} \ -1^{\ n-1} \ p\ \ E^n \tag{2.13}$$

Известны два подхода к исключению корреляции состояний путей при вычислении $p(1_{nk})$. Оба подхода обеспечивают выполнение условия, что степень любого сомножителя в слагаемых (3.7) должна быть не выше единицы. Первый подход основан а вычислении условных вероятностей исправности путей в слабых (3.7). Запишем $p\ \ I_{nk} \ = p\ \ \ell_i \ \ p\ \ \ell_v | \ell_i \ \ldots p\ \ \ell_i | \ell_v \ldots$ . Это выражение содержит *n* сомножителей.

Условные вероятности

$$p\left(\ell_j \middle| \ell_i \ell_v \ldots\right) = \frac{p\left(\ell_j\right)}{\prod\limits_{эk\in\varepsilon} p\left(э_k\right)}, \qquad (2.14)$$

где $\varepsilon$ — множество элементов ДС, общих для пути $\mu_j$ и путей $\mu_v,\ldots,$ а

$$p\left(\ell_j\right) = \prod_{эk\in\mu j}^{r\left(\mu_j\right)} p\left(э_k\right) \qquad (2.15)$$

При втором подходе используется свойство логического сложения Булевых переменных: *а + а + а+ ... =а.* Тогда

$$p\left(I_{nk}\right) = \prod_{эi\in\delta} p\left(э_i\right) \qquad (2.16)$$

где $\delta$ есть объединение элементов путей $\mu_v \in I_{nk}$. Указанное свойство применяется при формировании множества $\delta$.

Применение преобразования Булевой алгебры более экономично по сравнению с вычислением условных вероятностей. Алгоритм вычисления *p{E}* методом прямого перебора состояний путей с использованием преобразования Булевой алгебры имеет $2^h$ шагов. Особенности алгоритма следующие. Номера разрядов двоичных чисел *ДСН* соответствуют номерам путей. Если *v*-й разряд $ДСН_k, = 1$, то принято, что путь -$\mu_v$ исправен.

*Шаг* $k, k \geq 2$. Формируется двоичное число $ДСН_к$ и определяется число *n* разрядов, для которых $ДСН_k$ =1. Пути $\mu_v$ составляют множество $I_{nk}$.

Элементы путей $\mu_v \in I_{nk}$ включаются в множество $\delta$, и по (3.12) вычисляются $p(I_{nk})$, в соответствии с (3.8)

После выполнения $2^h$ шагов по (3.9) вычисляется *p(E).*

### 2.3.4. Методы с применением теоремы разложения

На основе теоремы разложения построен ряд методов вычисления показателей надежности сложных систем, в том числе сетей телекоммуникации. Она читается следующим образом: функция надежности *p(E)* системы, состоящей из *N* ненадежных элементов, равна произведению вероятности исправного состояния иго элемента на функцию надежности системы из $N$—1 элементов при условии, что $i$-й элемент замкнут накоротко, плюс произведение вероятности отказа $i$-го элемента на функцию надежности системы из $N$—1 элементов при условии, что $i$-й элемент разомкнут.

Очевидно, что к преобразованной системе из $N$ —1 элементов вновь может быть применена теорема разложения, затем к системе из $N$—2 элементов и т. д. Тогда имеет место формула полной вероятности

$$p\left(E\right)=\sum_{i=0}^{N''}P\left(N'',i\right)p\left(E'\right) \tag{2.17}$$

В этой формуле N''—число элементов ДС, не позволяющих производить вычисления по формулам последовательно-параллельного соединения $(N''<N)$; $P(N'', i)$ — вероятность состояния совокупности $N''$ элементов при одновременном отказе $i = 0, ..., N''$ и исправности $N''— i$ элементов; $p(E')$— условная вероятность сохранения связности ДС при размыкании $i$ и замыкании накоротко $N''$ — $i$ элементов, определяемая по формулам последовательно-параллельного соединения.

Наиболее типичный пример применения теоремы разложения для расчета надежности сетей телекоммуникации приведен на рис. 3.2. Поскольку исходный граф может быть преобразован в эквивалентный путем замены его вершин ребрами и ребер вершинами, теорема разложения применима для оценки надежности сетей телекоммуникации, состоящей из абсолютно надежных ребер и ненадежных вершин.

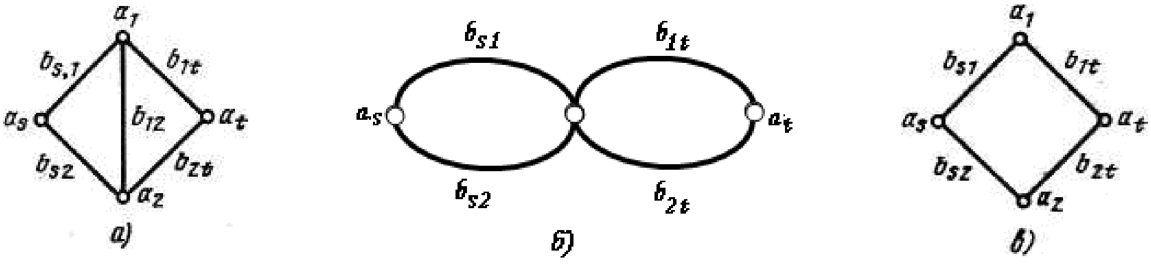



Рис. 2.2. Пример применения теоремы разложения для расчета надежности сети телекоммуникации

*а)* исходная структура; *б)* ребро $b_{1,2}$ замкнуто накоротко;

*в)* ребро $b_{1,2}$ разомкнутонуто.

В (3.13) вероятности *P(N", i)* определяются по формулам, аналогичным (3.2) и (3.4) для случаев одинаковых и различных вероятностей *p(э).* Отказ (размыкание) *i* и исправность (замыкание накоротко) *N"—i* различных совокупностей элементов приводят; очевидно, к различным последствиям, поэтому вероятность. $0 \le p\ E' \le 1$. Она вычисляется после анализа состояния ДС $D'_k$, в котором она оказалась после замыкания *N"— i* и размыкания *i* элементов. Общий вид преобразованной сети показан на рис. 3.3, а выражение вероятности $p(E'_k)$ ее исправности на *k*-м шаге.

$$p\ E'_k = \prod_{i=1}^{n} \left\{ 1 - \prod_{v=1}^{hj} \left[ 1 - \prod_{э_j \in \mu_{vi}} p\ э_j \right] \right\} \tag{2.18}$$

Здесь $n = N'' - i + 1$.

Алгоритм вычисления *p(E)* с использованием теоремы разложения состоит из трех частей: формирования множества путей М с разделением его на подмножества М и М; выделения из структуры ДС таких элементов, которые не дозволяют для расчета *p(E).'* Применить формулу последовательно-параллельного соединения элементов (2.18); вычисления вероятности *p(E)* за *2N"* шагов.

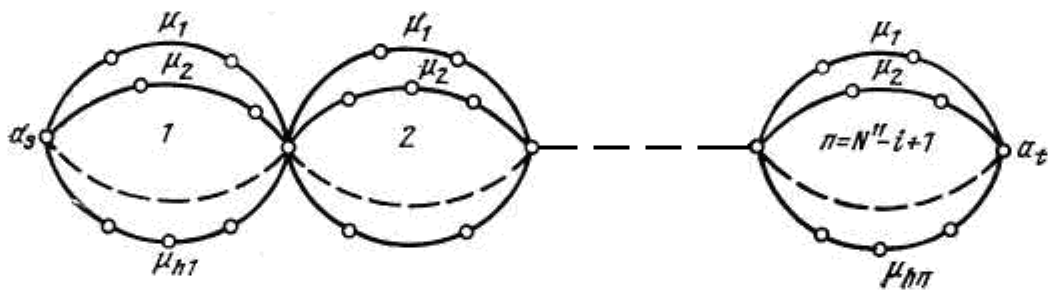



Рис. 2.3. Структура двухполюсной сети телекоммуникации на очередном шаге расчета ее надежности методом с применением теоремы разложения

Использование теоремы разложения для расчета надежности сетей телекоммуникации ограничивается для общего случая несколькими факторами, которые вытекают, во-первых, из условия формулирования самой теоремы и, во-вторых, из сложности программной реализации алгоритма преобразования структур $D'k$.

Теорема разложения сформулирована при условиях абсолютно надежных вершин и неориентированных ребер графа. В сетях и системах это не всегда выполняется. Так, если и ребра, и вершины неабсолютно надежны, то неизвестно, какой надежностью обладает эквивалентная (вершина на рис. 3.3,б. Если ребро $b_{1,2}$ на рис. 3.3,а — ориентированное, то общий результат, полученный на рис. 3.3,б и *в,* будет неправильным, так как при ориентированном ребре $b_{1,2}$ надежность мостовой схемы ниже. Возможность использования теоремы разложения для таких общих случаев доказана, но требуется выполнить сложные преобразования исходного графа сети. В сложных сетях с высокой размерностью, что обычно имеет место на практике, число элементов $N''$ достаточно велико. Поэтому организация перебора большого (несколько десятков) числа элементов равносильна методу прямого перебора состояний элементов сети.

Кроме того, в данном случае автоматическое формирование «состояний схем для расчета по (2.18) представляет достаточно сложную задачу, алгоритмическое и программное решения которой сводят к минимуму преимущества сокращения числа переборов. Поэтому область применения теоремы разложения ограничивается структурами специального класса, как, например, лестничная схема или «решетка»—схема, элементы которой представляют собой мостовые схемы, и некоторыми другими, заранее заданными структурами.

Исследовалась сложность алгоритма вычисления $p(E)$ двух: классов структур. Первый из них — лестничные схемы с произвольным числом звеньев (рис. 3.4). Алгоритм построен таким образом, что поперечные ребра могут задаваться не обязательно между каждой парой вершин, а число вершин в продольных ветвях может отличаться одно от другого. Важно, чтобы поперечные ребра не перекрещивались между собой. Алгоритм вычисление вероятности содержит блок формирования множества $Э''$ (поперечные ребра), блок формирования двоичных чисел и блок составления схемы расчета в соответствии с состоянием поперечных ребер и расчета вероятности *p(E'k)*.

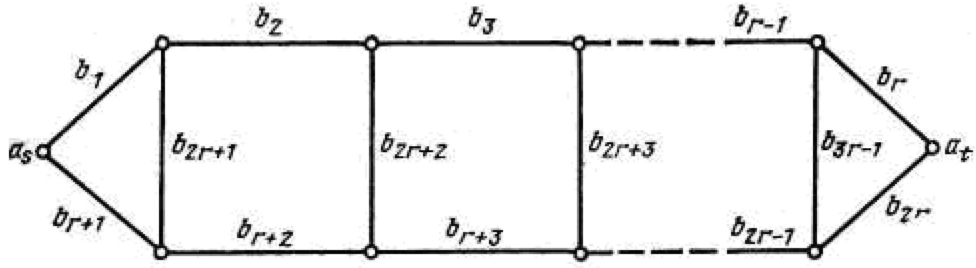



Рис. 2.4. Двухполюсная сеть телекоммуникации с лестничной структурой с произвольным числом звеньев

### 2.3.5. Методы с применением преобразований Булевой алгебры

Изложенные в предыдущих разделах методы и алгоритмы вычисления вероятностей *p(E)* основаны на организации полного или сокращенного перебора состояний элементов или путей системы. На каждом шаге алгоритмов проводятся операции над числами (сложение, умножение и реже деление). Вычисление *p(E)* логическими методами производится также по шагам, но их число равно числу путей. Отличие логических методов от изложенных в том, что, во-первых, исключается принцип перебора и, во-вторых, на каждом шаге проводятся операции не с числами, а с Булевыми переменными. На последнем шаге заканчивается составление выражения *p(E)* через исходные вероятности исправности элементов системы.

Сущность логических методов заключается в назначении соответствия между численными значениями вероятностей состояний элементов $p(э_i), q(э_i) = 1 - p(э_i)$ и Булевыми переменными $БП_i$, принимающими значение «нуль» или «единица». Обозначим *БВ (E)* выражение функции *p(E)* через Булевы переменные. Оно определяется простой формулой параллельного соединения путей ДС

$$БВ(E) = 1 - \prod_{k=1}^{h}\left[1 - БВ(\ell_k)\right] \tag{2.19}$$

Здесь $БВ(\ell_k)$—выражение функции $p(e_к)$ через переменные $БП_i$. Формула

(2.19) при ее развертывании содержит $2^h$ слагаемых, которые в дальнейшем обозначаются $БС_i$, $i=l, \ldots, N(БВ)$.

Слагаемые $БС_i$ в (2.19) вычисляются с применением свойства логического произведения

$$БП_v БП_v БП_v \ldots = БП_v \tag{2.20}$$

Для упрощения преобразований по (2.22) и организации обращений к оперативной памяти ЭВМ при расчетах после формирования множества путей М производится перенумерация элементов рассматриваемой ДС порядковыми числами 1, 2, ..., $N$. Алгоритм вычисления $p(E)$ при представлении ДС множеством М имеет $h$ шагов. На первом шаге согласно

$$БВ\ E\ _1 = БВ\ \ell_1\ = БС_1 \tag{2.21}$$

Шаг $k, k \geq 2$, выполняется в два этапа. На первом этапе производится логическое умножение каждого слагаемого выражения $БВ(E)_{k-1}$ на $БВ(e_k)$ с учетом (2.20). Умножение, как следует из (2.19), (2.20), заключается в дописывании к выражению $БВ(E)_{k-1}$ со знаком плюс слагаемого $БВ(e_k)$, а также $2N(EB)_{k-1}$ таких слагаемых $БС_V$, которые представляют собой логическое произведение каждого из слагаемых $БС_i \in БВ\ E\ _{k-1}$ на $БВ(e_k)$. Указатель знака $a(БС_v)$ слагаемых $ВС_V$ определяется по правилу $a\ БС_v\ = a\ БС_i\ \oplus 1$, $i = 1, \ldots N\ \ БВ\ _{k-1}$; $v = N\ \ БВ\ _{k-1} + 1, \ldots, 2N\ \ БВ\ _{k-1}$

Если $aБС_v=0$, то слагаемое $БС_V$ имеет знак «минус»; $N(БВ)_{k-1}$ —число слагаемых в выражении $БВ$ на $(k—1)$-м шаге.

На втором этапе $k$-го шага в полученном выражении $БВ(E)_к$ проверяется существование одинаковых слагаемых $БС_i$, $БС_V$, $i—1$, ..., $N(БВ)_k$, с противоположными знаками. Поскольку одинаковые слагаемые соответствуют равным числам, они из выражения $БВ(E)_к$ исключаются.

После выполнения $h$ шагов вероятность

$$p\ E\ = \sum_{i=1}^{N\ БВ} a\ \ БС_i\ \ p\ \ БС_i\ \ , \tag{2.22}$$

где $p(БС_i)$ — число, представляющее собой произведение исходных вероятностей исправности элементов, входящих в слагаемое *p(БС$_i$)*.

Достоинством логических методов и реализующих их алгоритмов является их простота. Однако число слагаемых выражения *БВ(Е)* в сложных системах достигает больших величин, что требует значительных ресурсов, оперативной памяти.

### 2.3.6. Корреляционный метод расчета надежности двухполюсной сети телекоммуникации

***Итеративный алгоритм расчета.*** Пусть известно множество путей $M = \mu_j \;, j = \overline{1,h}$. Требуется определить вероятность *p(E)* Исправности не менее одного пути при заданных вероятностях $p\;\text{э}_i$ исправности элементов. В целях, упрощения изложения дальнейшего материала в данной главе принято, что $M_j$ обозначает подмножество множества М, содержащее пути $\mu_1,\ldots\mu_j$, а события $E_j$ и $G_j$ обозначают соответственно исправность и неисправность этого подмножества.

Информация в ДС по пути $\mu_j$ передается только при отказе определяется за шагов первой итерации. Исключение корре-всех путей множества $M_{j-1}$ и при исправности пути $\mu_j$ независимо от состояния остальных $h-j$ путей.

Тогда
$$p(E) = \sum_{j=1}^{h} p(\ell_j)p\;\; G_{j-1}\middle|\ell_j \qquad (2.23)$$

При $j=1 p\;\; G_0|\ell_1\;\; =1$. Сумма (2.23) обладает переместительным свойством. Учитывая, что $p\;\; G_{j-1}|\ell_j\;\; = 1-p\;\; E_{j-1}|\ell_j$, и согласно (2.23) на $j$ – м шаге

$$p(E_j) = p\;\; E_{j-1}\;\; + p(\ell_j)\Big[1 - p\;\; E_{j-1}|\ell_j\;\;\Big] \qquad (2.24)$$

Исключение корреляции состояний путей $\mu_i \in M_{j-1}$ и пути достигается благодаря использованию формулы условной вероятности для путей $\mu_i$

$$p\;\; \ell_i|\ell_j\;\; = p\;\; \ell_i\;\; / \prod_{\text{э}\in\pi\;\; \mu_i,\mu_j} p\;\; \text{э}_v \qquad (2.25)$$

Где, $\pi\;\; \mu_i,\mu_j\;\; = \mu_i \cap \mu_j, i = 1,\ldots, j-1$.

Применение соотнешения (2.25) равносильно исключению элементов пути $\mu_j$ из состава путей $\mu_i \in M_{j-1}$. Преобразованные таким образом пути называются путями первой итерации, а их множество обозначено $M_{j-1}^1 = \mu_i^1 \ , i = 1, \ldots, j-1$. В дальнейшем пути исходного множества называются путями нулевой итерации. Ранг путей $r \ \mu_i^1 \ \le r \ \mu_1^0$ .

Пример исключения корреляции событий $G_3^0$ и $\ell_4^0$ для изображенной на рис. 3.3 б $a$ мостовой схемы сети телекоммуникации приведен в табл.2.1.

Вероятность исправности не менее одного пути $\mu_i^1 \in M_{j-1}^1$

$$p \ E_{j-1}^1 \ = \sum_{i=1}^{j-1} p \ \ell_i^1 \ \left[1 - p \ E_{i-1}^1 \middle| \ell_i^1 \ \right] \tag{2.26}$$

Согласно (2.24) условная вероятность $p \ E_{j-1}^1 \ = p \ E_{j-1}^0 \middle| \ell_j^0$ определяется за $j-1$ шагов первой итерации. Исключение корреляции событий $E_{i-1}^1$ и $\ell_i^1$ при вычислении $p \ E_{j-1}^1 \middle| \ell_i^1$ приводит к необходимости организации второй итерации, затем третьей и т.д. Обозначим $k$ номер итерации. Число путей в множестве $M_{j-k}^k$ с увеличением номера итерации на единицу снижается также на единицу, поэтому $k \in \ 0, j-1 \ , j = 1, \ldots, h$. На $k-$й итерации вычисляется вероятность

$$p \ E_{j-k}^k \ = \sum_{i=1}^{j-k} p \ \ell_k \ \left[1 - p \ E_{i-1}^{k+1} \ \right], \quad k = 0, \ldots, j-1 \tag{2.27}$$

При $k = j-1 p \ E_1^{j-1} \ = p \ \ell_1^{j-1}$ , так как по условию $p \ E_0^j \ = 0$.

Подставляя в (2.27) выражение $p \ E_{j-k}^k$ на каждой итерации, получаем

$$p \ E_j^0 \ = p \ E_{j-1}^0 \ + p \ \ell_j^0 \ \left\{1 - \sum_{i=1}^{j-1} p \ \ell_i^1 \ \left[1 - \sum_{v=1}^{i-1} p \ \ell_v^2 \ \left(1 - \ldots - \sum_{k=1}^{2} p \ \ell_k^{j-2} \ \ 1 - p \ \ell_1^{j-1} \ \ \ldots\right)\right]\right\} \tag{2.28}$$

Выражение (2.28) описывает итеративный алгоритм вычисления вероятности $p(E°j)$. Для упрощения организации вычислений далее проведена взаимоувязка наибольшего и текущего значений индекса $i$ с номерами итерации и шага.

Таблица 2.1.

| Нулевая итерация | | | | | | Первая итерация | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Обозначения пути | Трасса путей | | | | | Обозначения путей | Трасса путей | |
| $\mu_1^0$ | $b_{s,1}$ | $a_1$ | $b_{1,t}$ | | | $\mu_1^1$ | $b_{s,1}$ | |
| $\mu_2^0$ | $b_{s,1}$ | $a_1$ | $b_{1,2}$ | $a_2$ | $b_{2,t}$ | $\mu_2^1$ | $b_{s,1}$ | $b_{2,4}$ |
| $\mu_3^0$ | $b_{s,2}$ | $a_2$ | $b_{2,t}$ | | | $\mu_3^1$ | $b_{2,t}$ | |
| $\mu_4^0$ | $b_{s,2}$ | $a_2$ | $b_{1,2}$ | $a_1$ | $b_{1,t}$ | | | |

Обозначим для этого наибольшее и текущее значения индекса *i* на *k-й* итерации *I(k), i(k)*. Величина *I(k)* — это число путей на *k-й* итерации, а *i(k)* — номер пути в множестве $M^k_{I(k)}$. При $k = 0$.

$$I(0)=h, \tag{2.29}$$

а при $1 \le k \le j-1$ согласно ранее изложенному

$$I(k+l)\text{-}i(k)\text{-}l. \tag{2.30}$$

Введение взаимосвязанных индексов *I(k), i(k)* позволяет записать общее выражение для проведения расчетов на любом шаге любой итерации

$$p\left(E^k_{i(k)}\right) = p\left(E^k_{i(k)-1}\right) + p\left(\ell^k_{i(k)}\right)\left[1-p\left(E^{k+1}_{i(k)-1}\right)\right], \tag{2.31}$$

где $p\left(E^{k+1}_{i(k)-1}\right) = p\left(E^k_{i(k)-1}\middle|\ell^k_{i(k)}\right), i(k)=1,\ldots,I(k); k=0,\ldots,j-1$

Ниже излагается итеративный алгоритм вычисления *p(E)* с использованием выражения (2.31). Основу алгоритма составляют операции по проверке выполнения неравенств:

$$i(k)<I\{k); \tag{2.32}$$

$$k>0, \tag{2.33}$$

изменению значений индекса *i(k),* определению требуемого числа шагов *I(k),* формированию множеств $M^{k+1}_{i(k)-1}$ при переходе к (*k* +1)-й итерации и расчету $p\left(E^k_{i(k)}\right)$ по (2.31). При *i(k)*= l, *k=0, ...,* j-1, согласно введенному выше условию

$$p\left(E^k_1\right) = p\left(\ell^k_1\right) \tag{2.34}$$

Выполнение неравенства (2.32) проверяется по окончании каждого шага *k*-й итерации. Если (2.32) выполняется, то индекс *i(k)* увеличивается на единицу, формируется множество путей $M_{i\ k-1}^{k+1}$ после чего по (2.30) определяется *I(k)*, а значение *k* также увеличивается на единицу. Если *i(k)=I(k),* то проверяется выполнение неравенства (2.33). Если оно выполняется, то| значение *k* снижается на единицу и производится расчет $p\ E_{i\ k}^{k}$ по (2.31), после чего вновь переходят к проверке выполнения не-) равенства (2.32). Каждая итерация начинается вычислением по| (2.34) вероятности $p\ E_{1}^{k}$ , а заканчивается вычислением по (2.31)| вероятности $p\ E_{i\ k}^{k}$ Полностью алгоритм заканчивается, когда *i(k)=I(k)* при $k = 0$ (не выполняются оба неравенства (2.32) (2.33)). Ниже излагается последовательность расчетов при выполнении первого, второго, третьего и (*j*-го шагов нулевой итерации.

Номер итерации $k = 0$, и согласно (2.29) $i(0)=h$.

*Шаг 1 нулевой итерации.* Индекс $i(0) = 1$. Согласно (2.34) $p\ E_1^0 = p\ \ell_1^0$ . Индекс $i(0)<I(0)$, поэтому осуществляется ход к выполнению второго шага.

*Шаг 2 нулевой итерации.* Индекс $i(0)=2$. Согласно (2.31) $p\ E_2^0 = p\ E_2^0 + p\ \ell_2^0 \left[1 - p\ E_1^1\right]$. Для вычисления *p(E)* формируется множество $M_1^1 = \mu_1^1$ , где $\mu_1^1$ не содержит элементов пути $\mu_2^0$. Значение *k* увеличивается на единицу: *k=l.*

*Шаг 1 первой итерации.* Индекс $i(1) = 1$. Согласно (2.34) $p\ E_1^1 = p\ \ell_1^1$ . Первая итерация закончена. Неравенство. (2.32) не выполняется, а неравенство (2.33) выполняется. Поэтому значение  снижается на единицу: *k* =0. По (2.31) определяется $p\ E_2^0$ .

*Шаг 2 нулевой итерации закончен.* Неравенство (2.32) при $k = 0$ выполняется, поэтому осуществляется переход к шагу 3 нулевой итерации.

*Шаг 3 нулевой итерации. Индекс* $i(0)=3$. Согласно (2.31) $p\ E_3^0 = p\ E_2^0 + p\ \ell_3^0 \left[1 - p\ E_2^1\right]$. Для вычисления $p\ E_2^1$ формируется множество

$M_2^1 = \mu_1^1, \mu_2^1$ . Пути $\mu_1^1, \mu_2^1$ элементов пути $\mu_3^0$ не содержат. Согласно (2.30) $I\ 1 = 2$. Значение *k* увеличивается на единицу: *k=l.*

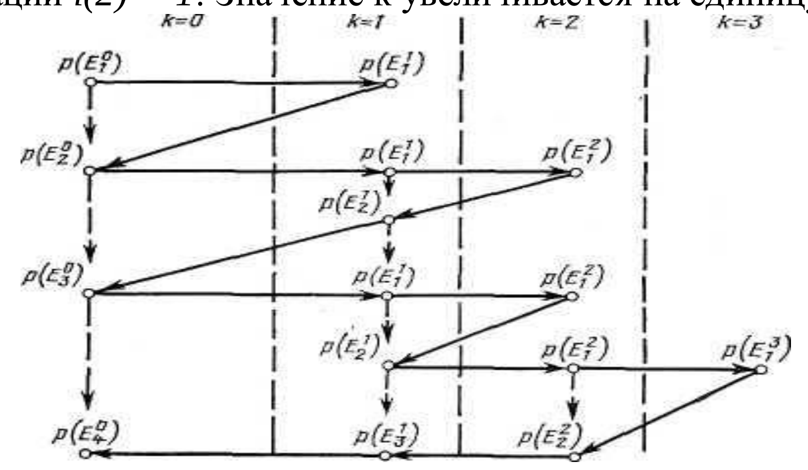
*Шаг 1 первой итерации.* Индекс $i\ 1 = 1$. Согласно (2.34) $p\ E_1^1 = p\ \ell_1^1$ . Неравенство (2.32) не выполняется, а неравенство (2.33) выполняется. Поэтому значение *k* снижается на единицу: *k=0*. По (2.31) определяется $p\ E_2^0$ .

*Шаг 2 первой итерации закончен.* Неравенство (2.32) при *k=0* выполняется, поэтому осуществляется переход к шагу 3 нулевой итерации.

*Шаг 3 первой итерации. Индекс i(0)=3.* Согласно (2.31) $p\ E_3^0 = p\ E_2^0 + p\ \ell_3^0 \left[1 - p\ E_2^1\ \right]$. Для вычисления $p\ E_2^1$ формируется множество $M_2^1 = \mu_1^1, \mu_2^1$ . Пути $\mu_1^1, \mu_2^1$ элементов пути $\mu_3^0$ не содержат. Согласно (2.30) $I\ 1 = 2$. Значение *k* увеличивается на единицу: *k=1*.

*Шаг 1 первой итерации. Индекс i(l)=1*. Согласно (2.34) $p\ E_1^1 = p\ \ell_1^1$ . Неравенство (2.32) выполняется поэтому осуществляется переход к шагу 2 первой итерации.

*Шаг 1 первой итерации. Индекс i(l)=1*. Согласно (2.31) $p\ E_2^1 = p\ E_1^1 + p\ \ell_2^1 \left[1 - p\ E_1^2\ \right]$. Для вычисления $p\ E_2^1$ формируется множество $M_1^2 = \mu_1^2$ , где $\mu_1^2$ не содержит элементов пути $\mu_2^1$. Согласно (2.30) число шагов на второй итерации *i(2) = 1*. Значение к увеличивается на единицу; *k=2*.




2.5. Последовательность вычислений вероятности корреляционным методом.

*Шаг 1 второй итерации.* Индекс *i(2) = 1*. Согласно (2.34) вероятность $p\ E_2^1 = p\ \ell_2^1$ . Вторая итерация закончена. Неравенство (2.32) не выполняется, а неравенство (2.33) выполняется. Значение *k* снижается на единицу, и вычисляется вероятность $p\ E_2^1$ . Первая итерация закончена. Вновь неравенство (2.32) не выполняется, а неравенство (2.33) выполняется. Значение *k* еще раз снижается на единицу и вычисляется вероятность $p\ E_3^0$ .

Неравенство (3.32) при $k = 0$ не выполняется, поэтому осуществляется переход к шагу 4 нулевой итерации.

*Шаг j нулевой итерации.* Вероятность $p\ E_{j-1}^0$ вычислена на предыдущем шаге. Индекс *i(0)=j*. Согласно (2.31)

$$p\ E_j^0 = p\ E_{j-1}^0 + p\ \ell_j^0 \left[1 - p\ E_{j-1}^1\right]$$

Вероятность $p\ E_{j-1}^1$ вычисляется за j—1 шагов первой итерации. Шаг i(i>l) первой итерации требует выполнения *i*—1 шагов второй итерации и т. д. Вычисление производится в изложенной выше последовательности.

## ВЫВОДЫ

По второй главе можно сделать следующие выводы:

-Множество методов расчета показателей надежности делится на два подмножества: точные и приближенные.

-Практическое применение того или иного метода определяется постановкой задачи, степенью точности исходных вероятностей *p*(эi), размерностью оцениваемой сети телекоммуникации.

-Некоторые точные (аналитические) методы разработаны только для заданных конкретных конфигураций сетей телекоммуникации.

-Очень высокая размерность оцениваемых сетей телекоммуникации ограничивает возможности точных методов.

-Приближенные методы делятся на два подмножества: приближенные аналитические методы и методы статистического моделирования.

-Методы оценки надежности сетей телекоммуникации используя интегро-дифференциальные уравнения и теория игр, не нашли практического применения прежде всего из-за их сложности.