

3. ИССЛЕДОВАНИЕ НАДЁЖНОСТИ СЕТИ ОПТИЧЕСКОГО АБОНЕНТСКОГО ДОСТУПА

Построение современных сетей телекоммуникации базируется на использовании волоконно-оптических технологий, что позволяет организовать высокоскоростные оптические сети различных уровней.

Высокая скорость передачи требует повышение надёжных характеристик сетей телекоммуникации.

Будет рассмотрена сеть оптического абонентского доступа с точки зрения надёжности.

3.1. Методы оценки надёжности оптических сетей доступа

При проектировании, эксплуатации и исследовании современных структурно-сложных сетей связи возникают задачи оценки эффективности их функционирования, в том числе и по показателю надёжности. В настоящее время известен достаточно широкий класс методов анализа структурной надёжности сетей. Характерной особенностью этих методов является их высокая вычислительная трудоемкость. Для вычисления надёжности сети оптического абонентского доступа предлагается использовать метод моно-экспресс-оценки вероятности связности.

Постановка задачи. На рис. 3.1,а показан фрагмент сети оптического абонентского доступа, граф связности которого последовательно можно привести к нетривиальному (неприводимому) виду, изображенному на рис. 3.1,б,в. Пусть из s в t передается какое-либо сообщение, т. е. на графе фрагмента будет задана двухполюсная сеть, вероятности связности которой требуется вычислить.

На рис. 3.2 в условном виде приведена классификация методов вычисления вероятности связности стохастической двухполюсной сети, как основного показателя оценки структурной надёжности сетей связи. К решению некоторых задач, при оперативном управлении предъявляется требование оценки надёжности сети в реальном масштабе времени. Известно,

что вычисление точных значений вероятности связности двухполюсной сети относится к NP -сложной задаче. В силу этого, точные аналитические методы вычисления вероятности связности двухполюсной сети не пригодны для решения в реальном масштабе времени.

Принцип дуальности, позволяющий вычислять двусторонние оценки, монотонно сходящиеся априори к точному значению вероятности связности двухполюсной сети, также малоэффективен. Из консервативных методов быстрого расчета вероятность связности двухполюсной сети, наиболее пригоден - метод экспресс-оценок, но он требует нахождения двух базовых элементарных конструкций-горизонтального и вертикального независимых каркасов двухполюсной сети. Оценки Эзари-Прошана нельзя отнести к быстрым методам, так как являются TVP -сложными. Так называемые оценки Ушакова-Литвака не имеют формальных правил нахождения основных элементарных конструкций. Рассмотрим метод моно-экспресс-оценки, в котором для вычисления вероятности связности двухполюсной сети требуется найти только одну базовую элементарную конструкцию.

Пусть оптическая сеть доступа с ненадежными линиями связи (для упрощения положим, что узлы связи абсолютно надежны) будет описана случайным перенумерованным графом $G\{V, L\}$, где $V = v_i$ и $L = \{l_{ij}\}$ - множества вершин и ребер графа, на котором выделены s и t . Для юго-западного фрагмента (рис. 3.1,в) элементы графа перенумерованы, например, так (рис.3.3,а): $V = v_i | i=1,2,3,\dots,m_v = |V|$ и $L = l_{\zeta} | \zeta = m_v + 1, m_v + 2, m_v + 3, \dots, m_v + m_L$, где $m_v = |V|$ и $m_L = |L|$ - мощности множеств вершин и ребер (для данного примера $m_v = 5, m_L = 7$).

Обозначим неисправное и исправное состояния ζ -го ребра как \bar{l}_{ζ} и $\bar{\bar{l}}_{\zeta}$ (или просто l_{ζ}). Предполагается, что отказы ребер наступают независимо друг от друга, при этом $\bar{l}_{\zeta} + \bar{\bar{l}}_{\zeta} = I$, где I - полная группа событий. Вероятности этих состояний соответственно равны q_{ζ} и p_{ζ} , причем $q_{\zeta} + p_{\zeta} = 1$. При рассмотрении численных примеров обозначим состояния ребер с учетом их

ζ -х номеров как $\bar{\zeta}$ и $\overline{\bar{\zeta}}$ (или ζ).

В теории графов аспекты связности и несвязности неотделимы от понятий простой цепи и простого разреза. Под простой цепью μ_n понимают последовательность ребер графа без петель и параллелей, соединяющую s и t между собой. Если все ребра n -й простой цепи исправны, то и простая цепь исправна, т. е. $\forall l_\zeta \in \mu_n \left[\bar{l}_\zeta \right] \Rightarrow \overline{\mu_n}$; иначе - простая цепь неисправна, т. е.

$\exists l_\zeta \in \mu_n \ l_\zeta \Rightarrow \bar{\mu_n}$. Такие состояния формально запишутся в виде

$$\mu_n \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \overline{\mu_n} = \prod_{\sigma=1}^{m_n} \bullet l_\zeta \sigma \\ \bar{\mu_n} = \prod_{\sigma=1}^{m_n} \bullet \bar{l}_\zeta \sigma \end{cases}, \quad (3.1)$$

здесь \forall - квантор общности, \Rightarrow - символ следования "если..., то ...", \exists — квантор существования, \emptyset - пустое множество, Π - конъюнкция, m_n - число ребер n -й простой цепи, σ - номер следования ребра в простой цепи, \bullet - логическое умножение, \prod - дополнение конъюнкции до полной группы событий. Вероятности исправного и неисправного состояний n -й простой цепи

$$0 < p_\zeta < 1 \Rightarrow \begin{cases} p \ \overline{\mu_n} = \prod_{\sigma=1}^{m_n} \bullet p_\zeta \sigma \\ q \ \bar{\mu_n} = \prod_{\sigma=1}^{m_n} \bullet \bar{p}_\zeta \sigma \end{cases}, \quad (3.2)$$

где Π и \prod - арифметическое произведение и его дополнение до 1.

Под вероятности связности вершин-полюсов двухполюсной сети s и t понимают вероятность $P_{s,t}$ события связности $E_{s,t}$, когда между s и t есть хотя бы одна исправная простая цепь, т. е.

$$P_{s,t} = P \ E_{s,t} = \exists \mu_n \in M_{s,t} \left[\overline{\mu_n} \right], \quad (3.3)$$

где $M_{s,t} = \mu_n | n=1,2,3,\dots,m_M$ - множество простой цепи, число которых равно m_M .

Под простым разрезом r_n понимают минимальную по включению

совокупность ребер, исключение которых из графа двухполюсной сети разъединяет s и t между собой. Если все ребра n -го простого разреза неисправны, то простой разрез исправен, т. е. $\forall l_\zeta \in r_n \left[\bar{l}_\zeta \right] \Rightarrow \bar{r}_n$; иначе - простой разрез неисправен, т. е. $\exists l_\zeta \in r_n \left[\bar{l}_\zeta \right] \Rightarrow \bar{r}_n$, или формально это запишется в виде

$$r_n \neq \emptyset \Rightarrow \begin{cases} \bar{r}_n = \prod_{\sigma=1}^{m_n} \bullet l_\zeta \sigma \\ r_n = \prod_{\sigma=1}^{m_n} \bullet l_\zeta \sigma \end{cases}, \quad (3.4)$$

где m_n - число ребер, входящих в n -й простой разрез. Вероятности исправного и неисправного состояний n -го простого разреза

$$0 < q_\zeta < 1 \Rightarrow \begin{cases} p \bar{r}_n = \prod_{\sigma=1}^{m_n} \bullet q_\zeta \sigma \\ q r_n = \prod_{\sigma=1}^{m_n} \bullet q_\zeta \sigma \end{cases}, \quad (3.5)$$

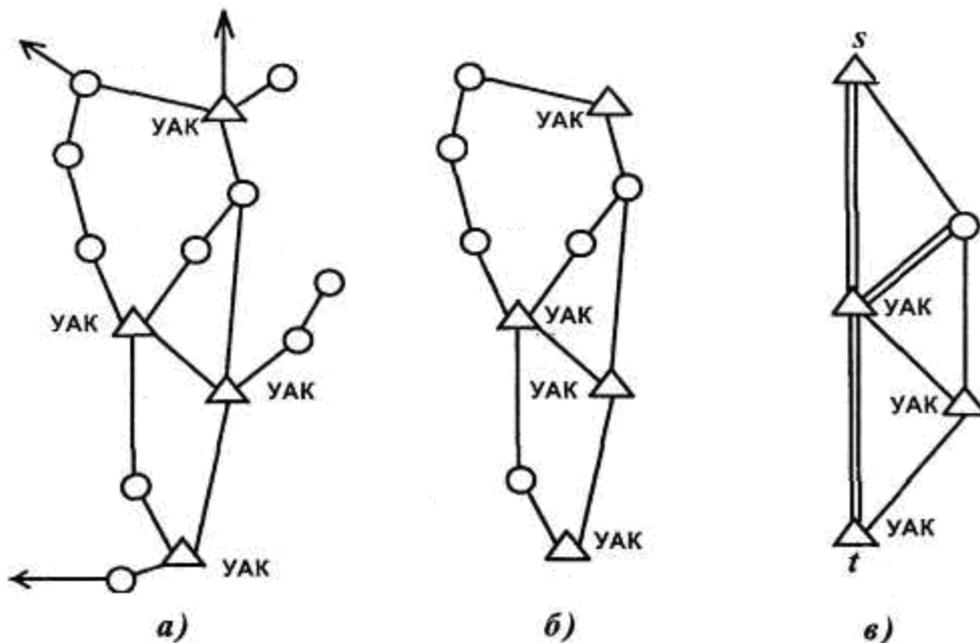


Рис. 3.1. Фрагмент сети абонентского доступа

Под вероятностью несвязности вершин-полюсов двухполюсной сети s и t понимают вероятность $P_{s,t}^-$ события несвязности $E_{s,t}^-$, когда существует хотя бы

один исправный простой разрез, т. е.

$$P_{s,t}^- = P \quad E_{s,t}^- = \exists r_n \in R_{s,t}^- \left[\bar{r}_n \right], \quad (3.6)$$

где $R_{s,t}^- = r_n | n=1,2,3,\dots,m_R$ - множество простого разреза, число которых равно m_R .

Из (3.1) и (3.4) видно, что процедуры описания $E_{s,t}$ и $E_{s,t}^-$ являются аддитивными, при этом $E_{s,t}$ и $E_{s,t}^-$ - взаимодополняющие и полные события

$$E_{s,t} + E_{s,t}^- = I .$$

При описании $E_{s,t}$ и $E_{s,t}^-$ полностью используются множества $M_{s,t} = \mu_n$ и $R_{s,t} = r_n$, т. е. на n -х итерационных шагах выполняется: $n = \overline{1, m_M}$ и $n = \overline{1, m_R}$, поэтому $P_{s,t}$ и $P_{s,t}^-$ есть точные значения вероятности связности и вероятность несвязности двухполюсной сети ($P_{s,t} + P_{s,t}^- = 1$). В общем случае расчет этих значений является NP-сложной задачей. Для уменьшения трудоемкости ее решения используют подход к расчету двусторонней оценки, позволяющий вычислять приближенную оценку вероятности связности двухполюсной сети $P_{s,t}$. Такой подход приемлем, если он позволяет оценить погрешность вычислений. Условно в этом подходе различают методы монотонного сближения двусторонней оценки к $P_{s,t}$ и их экспресс-оценки, суть которых заключается в следующем.

События $E_{s,t}^H$ и $E_{s,t}^{H-}$ называют неполными, если при их описании множества $M_{s,t} = \mu_n$ и $R_{s,t} = r_n$ используют частично, т. е. когда на n -х итерационных шагах выполняется $n = \overline{1, m_M - k}$ и $n = \overline{1, m_R - k}$, где $1 \leq k < m_M$ или $1 \leq k < m_R$, что и ведет к $E_{s,t}^H < E_{s,t}^H < E_{s,t}^-$ и $E_{s,t}^H + E_{s,t}^{H-} < I$. В этом случае вероятности $P_{s,t}^H = P \quad E_{s,t}^H$ и $P_{s,t}^{H-} = P \quad E_{s,t}^{H-}$ называют нижними оценками вероятности связности и вероятности несвязности двухполюсной сети, понимая, что $P_{s,t}^H < P_{s,t}$, $P_{s,t}^{H-} < P_{s,t}^-$ и $P_{s,t}^H + P_{s,t}^{H-} < 1$. Из $P_{s,t}^H + P_{s,t}^{H-} < 1$ следует, что $1 - P_{s,t}^{H-} > P_{s,t}^H$, а из $P_{s,t}^H > P_{s,t}^-$ и $P_{s,t} + P_{s,t}^- = 1$ следует, что $1 - P_{s,t}^H > 1 - P_{s,t}^-$ или $1 - P_{s,t}^H > P_{s,t}$.

Так как $1 - P_{s,t}^H > P_{s,t}^H$ и $1 - P_{s,t}^H > P_{s,t}$ разница вида $1 - P_{s,t}^H$ является верхней оценкой вероятности связности двухполюсной сети, которую обозначим как $P_{s,t}^B = 1 - P_{s,t}^H$. Тогда при $n < m_M$ и $n < m_R$ всегда выполняется $P_{s,t}^H < P_{s,t} < P_{s,t}^B$, что позволяет на любом n -м итерационном шаге вычислять приближенную оценку вероятности связности двухполюсной сети

$$P_{s,t} = P_{s,t}^B + P_{s,t}^H / 2, \quad (3.7)$$

$$\Delta_{s,t} = P_{s,t}^B - P_{s,t}^H / 2 \Rightarrow |P_{s,t} - P_{s,t}^H| \leq \Delta_{s,t}, \quad (3.8)$$

$$\Delta_{s,t} = \Delta_{s,t} \times 100\% / 0,5. \quad (3.9)$$

Здесь $\Delta_{s,t}$ и $\Delta_{s,t}$ - верхняя оценка абсолютной погрешности и коэффициент ее снижения, а 0,5 - значение $\Delta_{s,t}$ при $P_{s,t}^B = 1$ и $P_{s,t}^H = 0$.

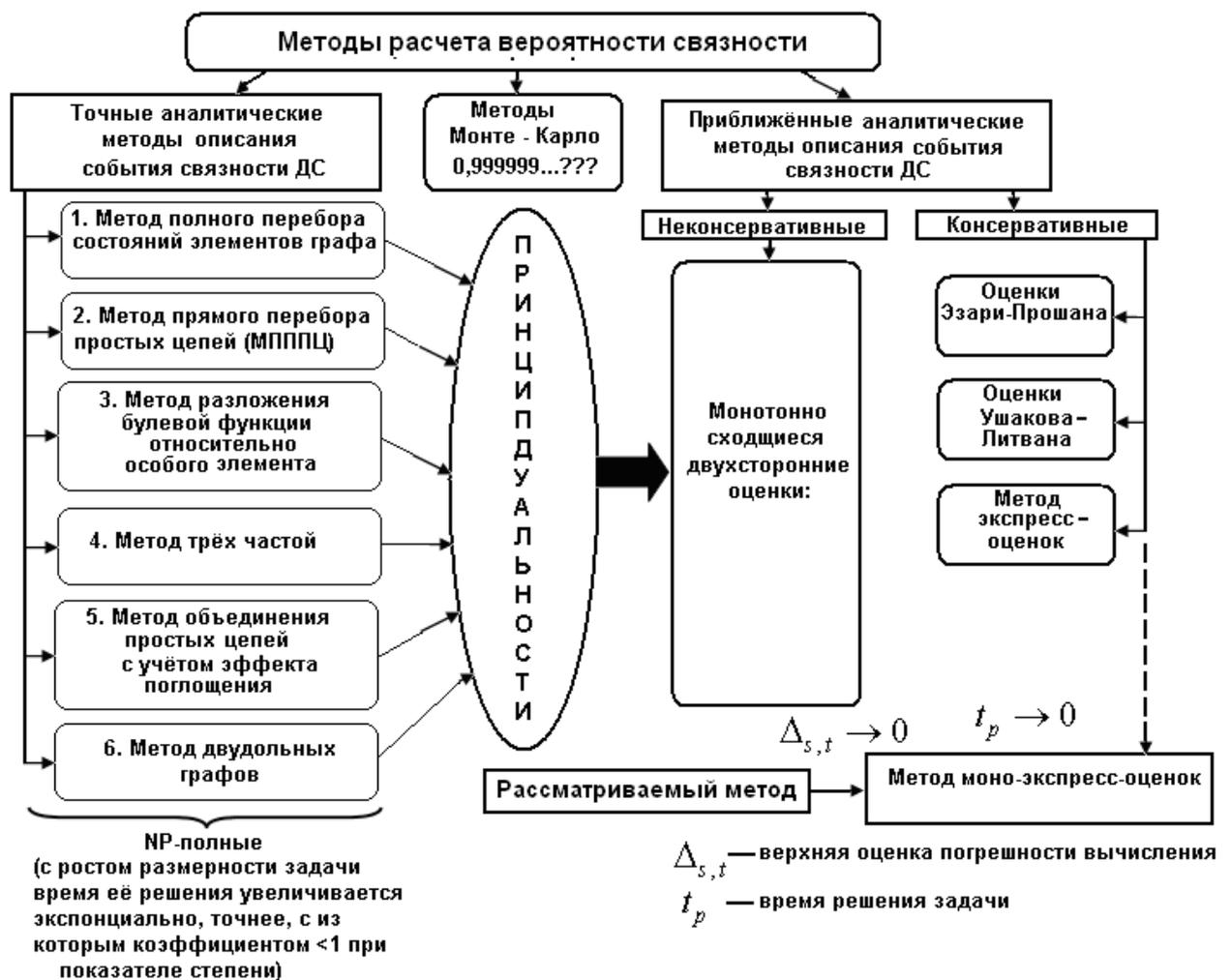


Рис. 3.2. Классификация методов вычисления вероятности связности стохастической двухполюсной сети

Известно, что среди $M_{s,t} = \mu_n$ и $R_{s,t} = r_n$ можно выделить базовые элементарные конструкции (например, горизонтальный независимый каркас и вертикальный независимый каркас), которые, в основном, и определяют надежность связности s и t . Неконсервативные подходы к расчету монотонно сближающихся двусторонних оценок вероятности связности двухполюсной сети и консервативные (рис. 3.2) различаются тем, что в первом случае при $n \rightarrow m_M$ и $n \rightarrow m_R$ имеет место $P_{s,t}^H \rightarrow P_{s,t} \rightarrow P_{s,t}^B$, при этом можно достичь $\Delta_{s,t} \leq \Delta_{s,t}^3$ где $\Delta_{s,t}^3$ — заданная погрешность вычислений; во втором — только лишь констатировать получающуюся погрешность $\Delta_{s,t}$, но при этом $n \ll m_M$ и $n \ll m_R$. Трудоемкость расчета во втором случае может быть на несколько порядков меньше по сравнению с первым.

Требуется вычислить экспресс-оценку вероятности связности двухполюсной сети $P_{s,t}$ с использованием одной базовой элементарной конструкции.

3.2. Методики вычисления вероятности связности

Решение задачи. Формально суть метода оценки Эзари-Прошана можно записать так:

$$\left. \begin{array}{l} M_{s,t} \neq \emptyset \\ R_{s,t} \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} E_{s,t}^H = \prod_{n=1}^{mR} \bar{r}_n \\ E_{s,t}^H = \prod_{n=1}^{mM} \bar{\mu}_n \end{cases} \quad (3.10)$$

Из анализа процедур описания неполных событий $E_{s,t}^H$ и $E_{s,t}^H$ можно заключить, что достичь $\Delta_{s,t} \leq \Delta_{s,t}^3$ нельзя даже при $n = m_R$ и $n = m_M$. С этой точки зрения оценки Эзари-Прошана следует отнести к консервативным методам (рис. 3.2).

С учетом (3.2) и (3.5) на базе (3.10) вычисляются оценки Эзари-Прошана

$$0 < p_\zeta < 1 \Rightarrow \begin{cases} P_{s,t}^H = \prod_{n=1}^{m_R} q \bar{r}_n \\ P_{s,t}^H = \prod_{n=1}^{m_M} q \bar{\mu}_n \Rightarrow P_{s,t}^B = 1 - P_{s,t}^H \end{cases} \quad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) видно, что в методе расчета оценки Эзари-Прошана предполагается взаимная структурная независимость между n -ми простыми разрезами и между n -ми простыми цепями, т. е.

$$\left. \begin{matrix} R_{s,t} \neq \emptyset \\ M_{s,t} \neq \emptyset \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \forall r_n, r_v | n \neq v \in R_{s,t} [r_n \cap r_v = \emptyset] \\ \forall \mu_n, \mu_v | n \neq v \in R_{s,t} [\mu_n \cap \mu_v = \emptyset] \end{cases} \quad (3.12)$$

где \cap - пересечение. Однако в общем случае это предположение, как правило, не выполняется. Например, анализ множеств простых разрезов и простых цепей, формируемых на графе двухполюсной сети, изображённом на рис. 3.3,а, подтверждает следующее:

$$\begin{aligned} R_{1,5} = r_1 = 6, 7, r_2 = 7, 8, 9, r_3 = 7, 8, 10, 12, \\ r_4 = 6, 8, 10, 11, r_5 = 9, 10, 11, r_{6=m_R} = 11, 12 \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$M_{1,5} = \mu_1 = 7, 11, \mu_2 = 6, 9, 12, \mu_3 = 6, 8, 11,$$

$$\mu_4 = 7, 10, 12, \mu_5 = 6, 8, 10, 12, \mu_6 = 6, 9, 10, 11, \mu_{7=m_M} = 7, 8, 9, 12. \quad (3.1)$$

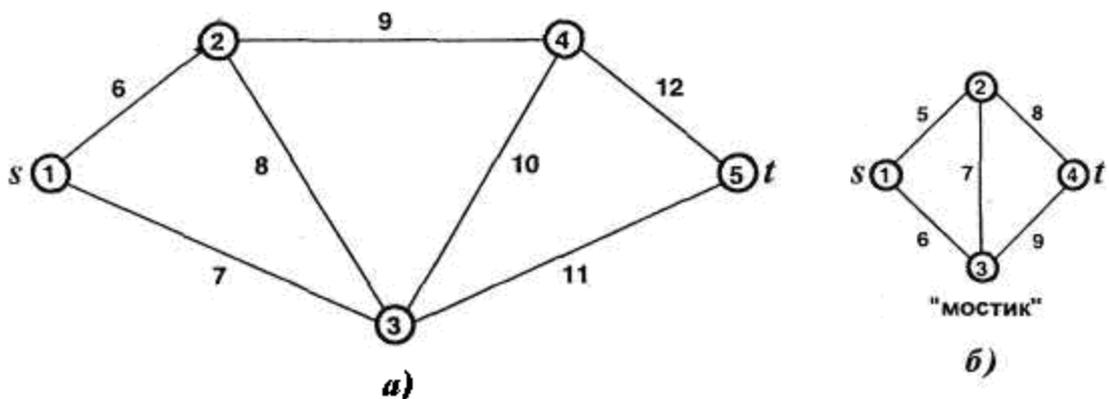


Рис.3.3. Граф двухполюсной сети

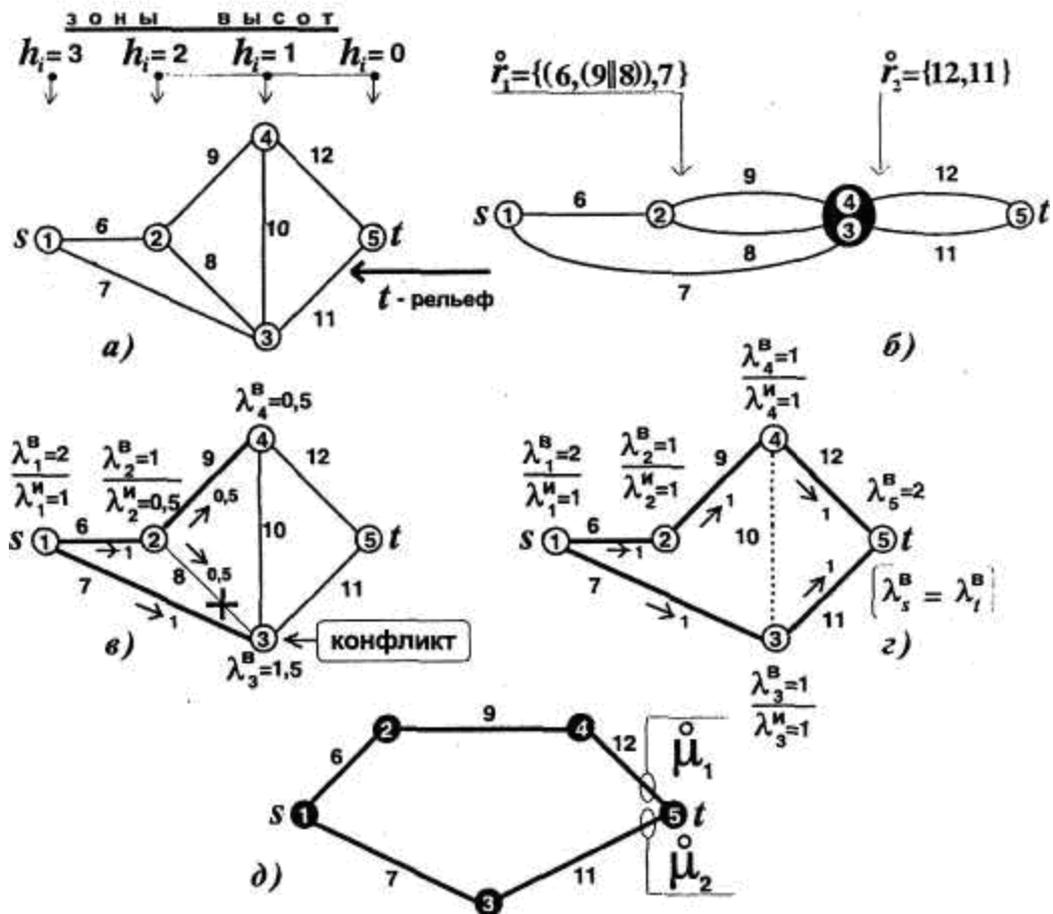


Рис.3.2. К методу вычисления двухполюсной сети методом экспресс-оценки

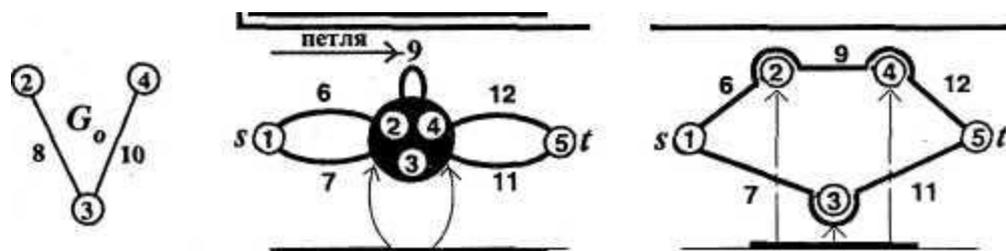


Рис. 3.5. Остаточные подграфы сети

Но известно, что формирование полных множеств простого разреза и простой цепи относится к NP-сложной задаче. С этой точки зрения метод

расчета оценки Эзари-Прошана необходимо отнести к точным аналитическим методам, но без возможности достижения $\Delta_{s,t} \leq \Delta_{s,t}^3$, что противоречиво. Поэтому на рис. 3.2 этот метод и помечен символом "?". Ниже (при рассмотрении численных примеров) будут показаны и другие недостатки метода вычисления оценки Эзари-Прошана.

В основу метода вычисления двусторонних экспресс-оценок вероятности связности двухполюсной сети положено использование двух базовых элементарных конструкций вертикального независимого каркаса и горизонтального независимого каркаса. На примере графа двухполюсной сети (рис. 3.3,а) проиллюстрируем формальные правила нахождения этих конструкций. На рис. 3.4,а изображен t -рельеф графа двухполюсной сети относительно вершины-стока v_5 .

Если вершины, входящие в какую-то одну зону высот, "стянуть в одну точку", то можно получить вертикальный независимый каркас, состоящий из последовательно включённых структурно независимых простых разрезов. Например, при "стягивании в одну точку" (см. рис. 3.4,б) вершин v_4 и v_3 , имеющих $h_i = 1$, в вертикальный независимый каркас войдут два последовательно включенных и структурно независимых простых разрезов

$$\left(\overset{\circ}{R}_{1,5} = \left\{ r_n \mid n=1, \left(\overset{\circ}{m}_R = 2 \right) \right\} \right) \subset R_{1,5},$$

где $\overset{\circ}{m}_R$ - число структурно независимых простых разрезов, входящих в вертикальный независимый каркас, а \subset - символ поглощения. Из (3.13) следует, что с учетом эквивалентных преобразований в вертикальный независимый каркас входят r_1, r_2 , и r_6 . Так как вертикальный независимый каркас получен при условии "стягивания в одну точку" вершин, имеющих одну и ту же высоту по t -рельефу, в общем случае неполное событие несвязности двухполюсной сети

$$E_{s,t}^H = \prod_{n=1}^{\overset{\circ}{m}_R} \overset{\circ}{r}_n \quad (3.15)$$

На базе (3.2) верхняя оценка вероятности связности двухполюсной сети

$$P_{s,t}^B = 1 - P_{s,t}^H = \prod_{n=1}^{\overset{\circ}{m}_R} q \left(\overset{\circ}{r}_n \right) \quad (3.16)$$

На рис. 3.4,в,г последовательно показаны процесс "пропускания единичного потока" от s к t на графе двухполюсной сети, имеющем t -рельеф, и "разрешение конфликта" (λ_i^B и λ_i^H - входящие и исходящие потоки на i -х вершинах). В результате этого на помеченных элементах графа можно построить горизонтальный независимый каркас (рис. 3.4,д) вида $\left(\overset{\circ}{M}_{1,5} = \left\{ \overset{\circ}{\mu}_n \mid n=1, \left(\overset{\circ}{m}_M = 2 \right) \right\} \right) \subset M_{1,5}$, где $\overset{\circ}{m}_M$ - число структурно независимых простых цепей в горизонтальном независимом каркасе. Из (3.14) видно, что в горизонтальный независимый каркас входят μ_1 и μ_2 . С учетом (3.3) структура горизонтального независимого каркаса позволяет описать неполное событие связности двухполюсной сети

$$E_{s,t}^H = \prod_{n=1}^{\overset{\circ}{m}_M} \overset{\circ}{\mu}_n \quad (3.17)$$

На базе (3.17) нижняя оценка вероятности связности двухполюсной сети

$$P_{s,t}^H = \prod_{n=1}^{\overset{\circ}{m}_R} q \left(\overset{\circ}{\mu}_n \right) \quad (3.18)$$

Из анализа (3.15)—(3.18) следует, что для получения двусторонней оценки вероятности связности двухполюсной сети методом экспресс-оценки необходимо построить две базовые элементарные конструкции. В методе моно-экспресс-оценки для этих же целей можно воспользоваться только лишь одной базовой элементарной конструкцией - остаточным подграфом G_0 . При известном горизонтальном независимом каркасе структура остаточного подграфа на графе двухполюсной сети формируется так:

$$\left. \begin{array}{l} G \neq \emptyset \\ \overset{\circ}{M}_{s,t} \neq \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow G_0 = G \setminus \overset{\circ}{M}_{s,t}, \quad (3.19)$$

где \setminus - символ "за исключением". Например, при известных структурах G (рис. 3.3,а) и $\overset{\circ}{M}_{1,5}$ (рис. 3.4,д) остаточный подграф будет таким, как это показано на рис. 3.5,а.

Сформулируем два симметричных и дуальных утверждения о состояниях ребер остаточного подграфа.

Утверждение № 1: "Пусть все ребра остаточного подграфа будут абсолютно надежны, вследствие чего все ВГП ребер остаточного подграфа стянутся в одну точку. Тогда структура горизонтального независимого каркаса, деформируясь, примет тривиальный вид (рис. 3.5,б), который позволит, используя обычные формулы последовательно-параллельного соединения элементов графа, вычислить $P_{s,t}^B$, так как учет реальной надежности ребер не может улучшить этой верхней оценки". Формально это утверждение запишется в виде

$$E_{s,t}^B = \left(\exists \overset{\circ}{\mu}_n \in \overset{\circ}{M}_{s,t} \left[\overset{\circ}{\mu}_n \right] \forall l_\zeta \in G_0 [p \ l_\zeta = 1] \right) \quad (3.20)$$

Утверждение № 2 : "Пусть все ребра остаточного подграфа будут абсолютно ненадежны, вследствие чего все ВГП ребер остаточного подграфа разорвутся между собой. Тогда структура горизонтального независимого каркаса, деформируясь, примет тривиальный вид (рис. 3.5,в), который позволит, используя обычные формулы последовательно-параллельного соединения элементов графа, вычислить $P_{s,t}^B$, так как учет реальной ненадежности ребер не может ухудшить этой нижней оценки". Формально это утверждение можно записать так:

$$E_{s,t}^B = \left(\exists \overset{\circ}{\mu}_n \in \overset{\circ}{M}_{s,t} \left[\overset{\circ}{\mu}_n \right] \forall l_\zeta \in G_0 [p \ l_\zeta = 0] \right) \quad (3.21)$$

Проиллюстрируем полученные выше соотношения (3.10)-(3.21) примерами расчета.

3.3. Расчет вероятности связности методом моно-экспресс-оценки

Примем коэффициент готовности всех ребер одинаковым и равным $p \ \zeta = 0,9$. Сначала покажем, что на "мостике" (рис. 3.3,б) верхняя оценка вероятности связности двухполюсной сети при использовании метода оценки

Эзари-Прошана в [7, 9, 10] приведена неверной, так как согласно этим работам $P_{1,4}^B = 0,9976$. Используя (3.10), (3.11), можно видеть, что на самом деле

$$P_{1,4}^B = P E_{1,4}^B = \overline{5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 0,19^2 \times 0,271^2 = 0,997387799 \quad (3.22)$$

Теперь на графе двухполюсной сети (рис. 3.3,а) покажем "странное поведение" оценки Эзари-Прошана P_1^H и $P_{1,5}^B$ динамике их вычисления относительно точного значения вероятности связности двухполюсной сети. Воспользовавшись методом объединения простых цепей (рис. 3.2) и множеством простых цепей (3.14), опишем полное событие связности двухполюсной сети

$$\begin{aligned} E_{1,5} = & \overline{7 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12} + 6 \cdot 8 \cdot 11 \cdot \overline{7 \cdot 9 \cdot 12} + \\ & + 7 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \overline{11 \cdot 6 \cdot 9} + 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \\ & \cdot \overline{9 \cdot 11 \cdot 7} + 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot \overline{7 \cdot 12 \cdot 8} + \\ & + 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \overline{11 \cdot 6 \cdot 10} \end{aligned} \quad (3.23)$$

С учетом (3.10) точное значение вероятности связности двухполюсной сети

$$\begin{aligned} P_{1,5} = & 0,94851 + 0,013851 + 0,013851 + 0,0006561 + \\ & + 0,0006561 + 0,0006561 + 0,9781803 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Согласно (3.10) и с учетом (3.13) и (3.14) имеем

$$\begin{aligned} E_{1,5}^H = & \overline{6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \\ & \cdot \overline{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 12} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} E_{1,5}^B = & \overline{7 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \dots \\ & \dots \cdot \overline{6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12} \end{aligned} \quad (3.26)$$

С учетом (3.25), (3.26)

$$\begin{aligned}
 P_{1,5}^H &= 1 \rightarrow 1 \times 0,99 = \underline{0,99} \rightarrow 0,99 \times 0,999 = \underline{0,98901} \rightarrow \\
 &\rightarrow 0,98901 \times 0,9999 = \underline{0,988911099} \rightarrow (0,988911099 \times 0,9999 = \\
 &= \underline{0,987823395} \rightarrow 0,987823395 \times 0,99 = \underline{0,977945161}.
 \end{aligned}
 \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1,5}^B &= 1 - 1 = \underline{0} \rightarrow 1 - 1 \times 0,19 = \underline{0,81} \rightarrow 1 - 0,19 \times 0,271 = \underline{0,94851} \rightarrow \\
 &\rightarrow 1 - 0,05149 \times 0,271 = \underline{0,98604621} \rightarrow \\
 &\rightarrow 1 - 0,01395379 \times 0,271 = \underline{0,996218522} \rightarrow \\
 &\rightarrow 1 - 0,003781477 \times 0,3439 = \underline{0,998699551} \rightarrow \\
 &\rightarrow 1 - 0,001300449 \times 0,3439 = \underline{0,999552775} \rightarrow \\
 &\rightarrow 1 - 0,000447225 \times 0,3439 = \underline{0,999846199}
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

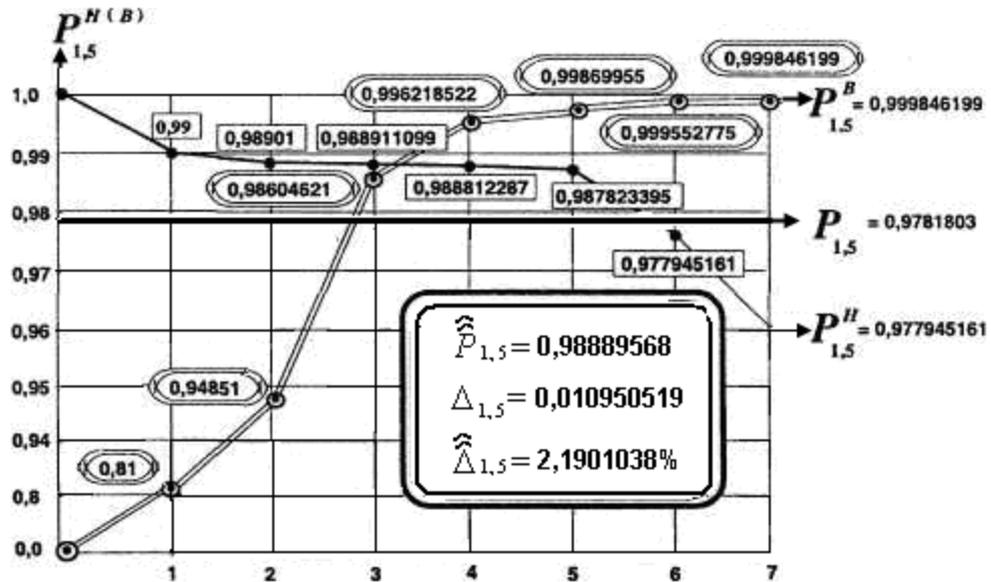


Рис.3.6. График изменения вероятности связности двухполюсной сети (жирная линия-положение точного значения вероятности связности, а ломаная одинарная изменения $P_{1,5}^H$ и двойная - изменения $P_{1,5}^B$)

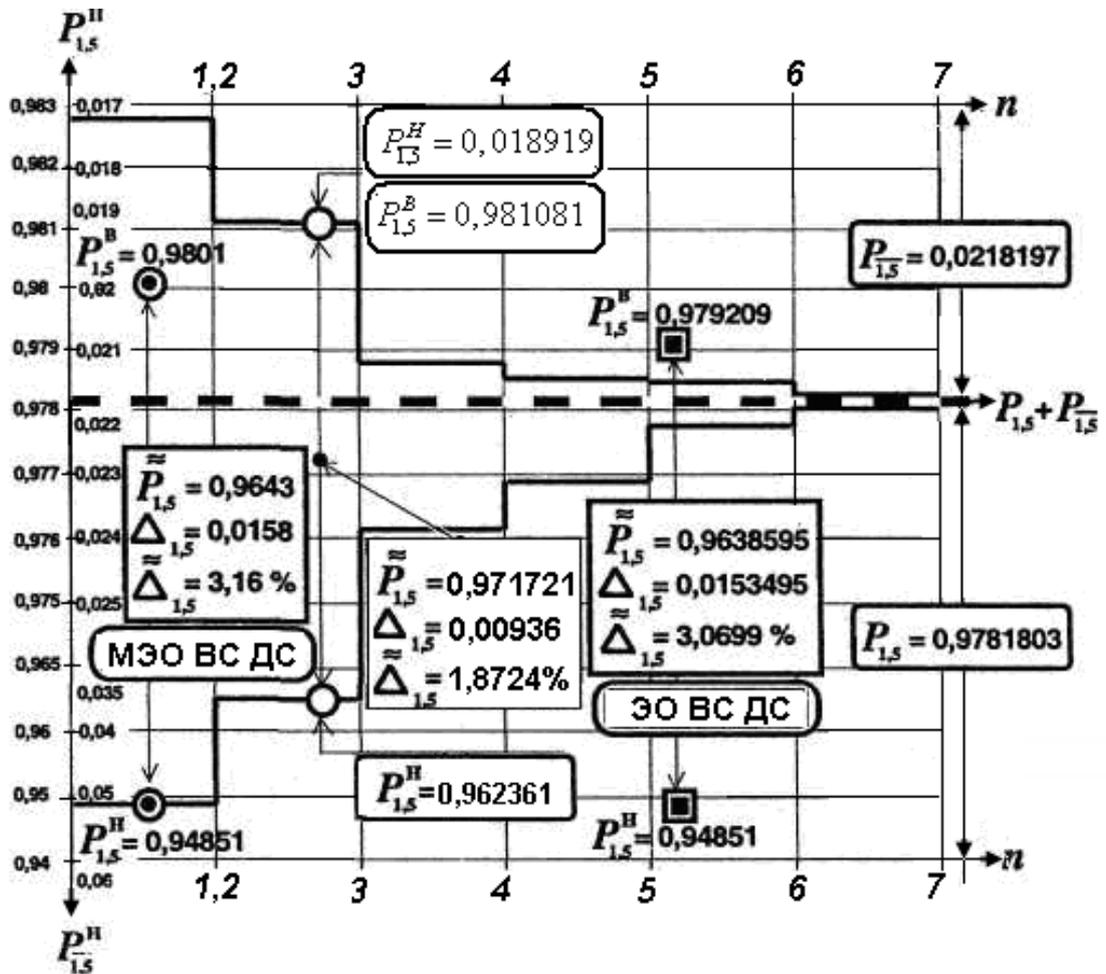


Рис.3.7. Сравнение двусторонние оценки вероятности связности двухполюсной сети и оценки погрешности вычислений по методам экспресс-оценки и моно-экспресс-оценки

Для удобства наблюдения изменений двусторонней оценки вероятности связности двухполюсной сети, вычисляемые на каждом n -м шаге, численные значения $P_{1,5}^H$ и $P_{1,5}^B$ подчеркнуты снизу двойной чертой. На рис. 3.6 представлен график изменения этих оценок (жирной линией показано положение точного значения вероятности связности двухполюсной сети, вычисленного по (3.24), а ломаными одинарной и двойной линиями - соответственно изменения $P_{1,5}^H$ и $P_{1,5}^B$). Из рис. 3.6 видно, что, во-первых, $P_{1,5}^H$ "накапливается" от 1, а $P_{1,5}^B$ - от 0, во-вторых, происходит взаимное пересечение этих оценок, и, в-третьих, - только на последних n -х шагах наконец-таки выполняется неравенство $P_{1,5}^H < P_{1,5} < P_{1,5}^B$. Но факт выполнения этого неравенства возможно установить

только лишь апостериори, когда $P_{s,t}$ известно (как в рассматриваемом примере вычисленное в (24) точное значение $P_{1,5}$). В общем случае априори "поведение" оценки Эзари-Прошана случайно.

Проведем сравнительный анализ методов экспресс-оценки и предлагаемого моно-экспресс-оценки вероятности связности двухполюсной сети (рис. 3.3,а) при тех же исходных данных. Сначала, используя принцип дуальности, дополнительно к (3.23) и (3.24) опишем полное событие несвязности двухполюсной сети ДС

$$\begin{aligned}
 E_{1,5} = & \left[\bar{7} \cdot \bar{6} + 7 \cdot \bar{11} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \bar{12} \right] + \\
 & + \left[\bar{7} \cdot \bar{6} \cdot \bar{9} \cdot \bar{8} + \bar{7} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \bar{12} \cdot 8 \cdot \bar{11} \right] + \\
 & + \left[7 \cdot \bar{11} \cdot \bar{6} \cdot 10 \cdot \bar{12} + 7 \cdot \bar{11} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \overline{10 \cdot 12} \right] + \\
 & + \left[\bar{7} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \bar{12} \cdot \bar{8} \cdot \overline{10 \cdot 11} \right] + \left[7 \cdot \bar{11} \cdot \bar{6} \cdot \overline{10 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12} \right]
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Согласно (29) точное значение вероятности несвязности двухполюсной сети

$$\begin{aligned}
 P_{1,5} = & 0,01729 + 0,001629 + 0,002340 + 0,0001539 + \\
 & + 0,0001539 + 0,0002439 = 0,0218187
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Из (3.24) и (3.17) следует $P_{1,5} + P_{1,5}^- = 1$, в силу чего метод объединения простых цепей с учетом эффекта поглощения является точным методом (см. рис. 3.2). На рис. 3.10 представлен график двойного изображения динамики $P_{1,5}^H \rightarrow P_{1,5} \leftarrow P_{1,5}^B$ (ступенчатыми линиями показано сближение двусторонней оценки к точному значению вероятности связности двухполюсной сети; в тонированных областях приведены результаты приближенной оценки вероятности связности двухполюсной сети, рассчитанные на $(n = 2)$ -м итерационном шаге). Согласно (3.15) - (3.18), (3.7) - (3.9) с учетом структуры горизонтального независимого каркаса и вертикального независимого каркаса (рис. 3.4) двусторонние оценки вероятности связности двухполюсной сети и оценки погрешности вычислений по методу экспресс-оценки (рис. 3.10)

$$P_{1,5}^H = P E_{1,5}^H = \overline{\overline{6 \bullet 9 \bullet 12 \bullet 7 \bullet 11}} = 0,94851,$$

$$P_{1,5}^B = P \left(\overline{\overline{6 \bullet 9 \bullet 8 \bullet 7 \bullet 12 \bullet 11}} \right) = 0,979209,$$

$$P_{1,5} = 0,9638595, \quad \Delta_{1,5} = 0,0153495, \quad \Delta_{1,5} = 3,0699\%$$

Согласно (3.20), (3.21), (3.7) - (3.9) с учетом структуры деформированного горизонтального независимого каркаса (рис. 3.5) двусторонние оценки вероятности связности двухполюсной сети и оценки погрешности вычислений по предлагаемому методу моно-экспресс-оценки (рис. 3.10)

$$P_{1,5}^H = P E_{1,5}^H = \overline{\overline{6 \bullet 9 \bullet 12 \bullet 7 \bullet 11}} = 0,94851,$$

$$P_{1,5}^B = P \overline{\overline{6 \bullet 7 \bullet 12 \bullet 11}} = 0,9801,$$

$$P_{1,5} = 0,9643, \quad \Delta_{1,5} = 0,0158, \quad \Delta_{1,5} = 3,16\%$$

Из анализа полученных результатов видно, что по сравнению с методом экспресс-оценки предлагаемый метод моно-экспресс-оценки по качеству сближения двусторонних оценок вероятность связности двухполюсной сети несколько проигрывает, но зато существенно снижает трудоемкость вычислений.

Выводы

По третьей главе можно сделать следующие выводы:

-Для получения двусторонней оценки ВСПУС методом экспресс-оценки необходимо построить две базовые элементарные конструкции.

-В методе моно-экспресс-оценки, только лишь одной базовой элементарной конструкцией - остаточным подграфом G_0 .

-По сравнению с методом экспресс-оценки метод моно-экспресс-оценки по качеству сближения двусторонних оценок ВСПУС несколько проигрывает, но зато существенно снижает трудоемкость вычислений.